Indice Articoli Anno 1901

Di alcune successioni ricorrenti a termini interi e positivi

1. Formano oggetto di questa nota quelle successioni di numeri interi e positivi ciascuno dei quali è uguale alla somma dei due precedenti.

Detta U una di tali successioni e indicati con

$$U_1\ U_2\ U_3 \dots U_n \dots$$

i suoi termini si ha per ipotesi ($n \geqq 3$)

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$$

e la successione sarà individuata allorchè siano fissati i valori di $U_1\ U_2$ che rappresenteremo rispettivamente con a, b e diremo *termini iniziali*. Nel caso particolare di $a = 1, b = 1$ si ha la successione

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

che diremo u; ne rappresenteremo i termini anche colle notazioni $u_1, u_2, u_3, \dots u_n, \dots$

Le proprietà della successione U dipendono da quelle della u; tra i loro termini si ha infatti una relazione che passiamo subito a stabilire.

A tal uopo osserviamo che se ai due termini della relazione $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$, data per ipotesi, si aggiunge U_n si ha, tenendo conto di nuovo della legge di ricorrenza,

$$U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$$

$$U_{n+2} = 2U_n + U_{n-1}$$

e sommando

$$U_{n+3} = 3U_n + 2U_{n-1}$$

ovvero, osservando che è $u_4 = 3$, $u_3 = 2$,

$$U_{n+3} = u_4\, U_n + u_3\, U_{n-1}.$$

Ma allora è facile vedere che si ha in generale

$$U_{n+s} = u_{s+1}\, U_n + u_s\, U_{n-1}. \tag{I}$$

Supposto infatti che questa sia vera fino ad un certo valore di s si avranno le relazioni

$$U_{n+(s-1)} = u_s U_n + u_{s-1} U_{n-1}$$

$$U_{n+s} = u_{s+1} U_n + u_s U_{n-1}$$

e sommando, tenendo conto della legge di ricorrenza, si trova subito

$$U_{n+(s+1)} = u_{s+2} U_n + u_{s+1} U_{n-1}$$

pertanto la (I) è dimostrata per valori arbitrari di n, s. E se in particolare si suppone che la U coincida colla u si dedurrà mutando U_r in u_r

$$u_{n+s} = u_{s+1} u_n + u_s u_{n-1}. \tag{1}$$

Se invece nella (I) si pone $n=2$ e si tiene conto che è $U_2 = b$, $U_1 = a$ si ha

$$U_{s+2} = u_s a + u_{s+1} b$$

e mutando ora s in $n-2$

$$U_n = u_{n-2} a + u_{n-1} b \tag{2}$$

Nelle relazioni (1), (2) hanno fondamento le proprietà della successione U.

2. Definizioni:

a) *Se in quattro termini* U_α, U_β, U_γ, U_δ *è* $\beta-\alpha=\delta-\gamma$ *si dirà che essi formano un gruppo simmetrico.*

b) *Due gruppi simmetrici* U_α, U_β, U_γ, U_δ *e* $U_{\alpha'}$, $U_{\beta'}$, $U_{\gamma'}$, $U_{\delta'}$ *si diranno equisimmetrici quando è* $\beta-\alpha=\beta'-\alpha'$, $\gamma-\beta=\gamma'-\beta'$.

c) *Un gruppo di tre termini* U_a, U_b, U_c *si dirà simmetrico se è* $b-a=c-b$.

d) *due gruppi simmetrici* U_a, U_b, U_c; $U_{a'}$, $U_{b'}$, $U_{c'}$ *si diranno equisimmetrici se è* $b-a=b'-a'$.

e) *Due gruppi equisimmetrici (di quattro o tre termini) si diranno consecutivi se le differenze tra gli indici di due termini corrispondenti sono uguali ad* 1.

Due gruppi equisimmetrici consecutivi sono cioè della forma

$$\begin{array}{llll|lll} U_\alpha, & U_\beta, & U_\gamma, & U_\delta & U_a, & U_b, & U_c \\ U_{\alpha-1}, & U_{\beta-1}, & U_{\gamma-1}, & U_{\delta-1} & U_{a-1}, & U_{b-1}, & U_{c-1} \end{array}$$

Teorema. — *Nei gruppi equisimmetrici formati di quattro termini la differenza tra il prodotto dei medi ed il prodotto degli estremi è costante in valore assoluto.*

1°. Dimostriamo dapprima la proprietà pei gruppi della successione u: un suo gruppo simmetrico qualunque è della forma

$$u_{n-k}\,,\ u_n\,,\ u_s\,,\ u_{s+k}.$$

Ora se nella (1) si muta s in $s-1$ si ha

$$u_{n+s-1} = u_s\, u_n + u_{s-1}\, u_{n-1}$$

e mutando in questa n in $n-k$ ed s in $s+k$ si deduce ancora

$$u_{n+s-1} = u_{s+k}\, u_{n-k} + u_{s+k-1}\, u_{n-k-1}$$

e sottraendo questa dalla precedente si ricava

$$u_s\, u_n - u_{s+k}\, u_{n-k} = -(u_{s-1}\, u_{n-1} - u_{s+k-1}\, u_{n-k-1})$$

pertanto è dimostrato che le differenze tra il prodotto dei medi e quello degli estremi dei due gruppi equisimmetrici consecutivi

$$\begin{array}{cccc} u_{n-k} & , u_n & , u_s & , u_{s+k} \\ u_{n-k-1} & , u_{n-1} & , u_{s-1} & , u_{s+k-1} \end{array}$$

sono uguali in valore assoluto e di segno opposto.

Per calcolare la costante osserviamo che se nell'ultima uguaglianza si diminuiscono successivamente gli indici di 1 per $n-k-2$ volte consecutive e si moltiplicano membro a membro tutte le relazioni così ottenute si troverà

$$u_s\, u_n - u_{s+k}\, u_{n-k} = (-1)^{n-k-1}(u_{s-n+k+1}\, u_{k+1} - u_{s-n+2k+1}\, u_1)$$

e poichè è $u_1 = 1$ avremo ponendo $s - n = \delta$,

$$u_s\, u_n - u_{s+k}\, u_{n-k} = (-1)^{n-k-1}(u_{\delta+k+1}\, u_{k+1} - u_{\delta+2k+1}).$$

Abbiamo così, nel secondo membro, l'espressione della costante dipendente *soltanto* dalle due differenze tra gli indici del gruppo simmetrico dato. Ma le si può dare ancora una forma più semplice; se infatti nella (1) si muta s in k ed n in $\delta + k + 1$ si ricava

$$u_{\delta+k+1}\, u_{k+1} - u_{\delta+2k+1} = -u_k\, u_{\delta+k}$$

e quindi sostituendo

$$u_s\, u_n - u_{s+k}\, u_{n-k} = (-1)^{n-k}\, u_k\, u_{\delta+k}. \qquad (3)$$

2°. Passiamo ora a dimostrare il teorema enunciato per la successione U, ma per maggiore chiarezza di ciò che segue facciamo un cambiamento di notazioni nella (3) osservando che se u_α, u_β, u_γ, u_δ è un gruppo simmetrico, e si pone $\beta - \alpha = \Delta'$, $\gamma - \beta = \Delta$ essa assume la forma

$$u_\beta\, u_\gamma - u_\alpha\, u_\delta = (-1)^{\alpha}\, u_{\Delta'}\, u_{\Delta+\Delta'}. \qquad (3')$$

Ciò premesso sia

$$U_{n-k},\ U_n,\ U_s,\ U_{s+k}$$

un gruppo simmetrico qualunque di U. Se nella espressione

$$U_n U_s - U_{n-k} U_{s-k}$$

si sostituiscono alle U le loro espressioni in funzioni delle u calcolate per mezzo della (2) si ha

$$U_n U_s - U_{n-k} U_{s+k} = (u_{n-2}\, a + u_{n-1}\, b)(u_{s-2}\, a + u_{s-1}\, b) - \\ - (u_{n-k-2}\, u_{n-k-2}\, a + u_{n-k-1}\, b)(u_{s+k-2}\, a + u_{s+k-1}\, b)$$

che sviluppando i prodotti del secondo membro assume la forma

$$U_n U_s - U_{n-k} U_{s+k} = a^2 (u_{n-2}\, u_{s-2} - u_{n-k-2}\, u_{s+k-2}) + \\ + b^2 (u_{n-1}\, u_{s-1} - u_{n-k-1}\, u_{s+k-1}) + \\ + ab \left\{ (u_{n-2} u_{s-1} - u_{n-k-2}\, u_{s+k-1}) + (u_{n-1}\, u_{s-2} - u_{n-k-1}\, u_{s+k-2}) \right\}.$$

Le differenze nelle parentesi del secondo membro si possono calcolare mediante la (3') applicata successivamente ai gruppi simmetrici

$$u_{n-k-2},\ u_{n-2},\ u_{s-2},\ u_{s+k-2}$$
$$u_{n-k-1},\ u_{n-1},\ u_{s-1},\ u_{s+k-1}$$
$$u_{n-k-2},\ u_{n-2},\ u_{s-1},\ u_{s+k-1}$$
$$u_{n-k-1},\ u_{n-1},\ u_{s-2},\ u_{s+k-2}$$

pei quali avendo riguardo alle differenze degli indici e posto, come nel primo caso, $s - n = \delta$ si trova subito

$$u_{n-2}\, u_{s-1} - u_{n-k-2}\, u_{s+k-2} = (-1)^{n-k} \quad u_k\, u_{\delta+k}$$
$$u_{n-1}\, u_{s-1} - u_{n-k-1}\, u_{s+k-1} = (-1)^{n-k-1}\, u_k\, u_{\delta+k}$$
$$u_{n-2}\, u_{s-1} - u_{n-k-2}\, u_{s+k-1} = (-1)^{n-k} \quad u_k\, u_{\delta+k+1}$$
$$u_{n-1}\, u_{s-2} - u_{n-k-1}\, u_{s-k-2} = (-1)^{n-k-1}\, u_k\, u_{\delta+k-1}$$

onde sostituendo sarà

$$U_n U_s - U_{n-k} U_{s+k} = (-1)^{n-k}\, u_k\, u_{\delta+k}\, (a^2 - b^2) + \\ + (-1)^{n-k}\, a b\, u_k\, (u_{\delta+k+1} - u_{\delta+k-1}).$$

Ma per la legge di ricorrenza stabilita per definizione la quantità entro l'ultima parentesi è uguale a $u_{\delta+k}$ e quindi

$$U_n U_s - U_{n-k} U_{s+k} = (-1)^{n-k}\, u_k\, u_{\delta+k}\, (a^2 - b^2 + ab). \qquad (4)$$

Il secondo membro dipende soltanto dai termini iniziali a, b della successione e dalle differenze δ, k tra gli indici del gruppo simmetrico dato; esso è dunque costante in valore assoluto nei gruppi equisimmetrici di U come si voleva provare.

Il procedimento tenuto nella precedente dimostrazione è valido anche se $s = n$ e, per conseguenza, $\delta = 0$; in questa nuova ipotesi le (3) (4) divengono

$$u^2_n - u_{n-k}\, u_{n+k} = (-1)^{n-k} u^2_k \tag{5}$$

$$U^2_n - U_{n-k}\, U_{n-k} = (-1)^{n-k} u^2_k\, (a^2 - b^2 + ab). \tag{6}$$

Riferendosi soltanto alla seconda (giacchè la prima ne è un caso particolare per $a = b = 1$) osserviamo che il primo membro è la differenza tra il quadrato del termine medio ed il prodotto degli estremi nel gruppo simmetrico

$$U_{n-k}\,,\ U_n\,,\ U_{n-k}$$

pertanto è dimostrato anche il seguente

Teorema. — *Nei gruppi equisimmetrici formati di tre termini la differenza tra il quadrato del medio ed il prodotto degli estremi è costante in valore assoluto.*

Osservazioni:

a) Se in luogo di s si pone il suo uguale $n + \delta$ le (3) (4) divengono (*)

$$(3'')\qquad u_n\, u_{n+\delta} - u_{n-k}\, u_{n+\delta+k} = (-1)^{n-k} u_k\, u_{\delta+k}$$

$$(4')\qquad U_n\, U_{n-\delta} - U_{n-k}\, U_{n+\delta+k} = (-1)^{n-k} u_k\, u_{\delta+k}\, (a^2 - b^2 + ab).$$

b) Denotando con $g(\delta, k)$, $G(\delta, k)$ i valori assoluti delle differenze al primo membro delle (3) (4) (o di quest'ultime) e con $|a^2 - b^2 + ab|$ quello di $a^2 - b^2 + ab$ avremo

$$\frac{G(\delta, k)}{g(\delta, k)} = |a^2 - b^2 + ab|$$

e denotando analogamente con $g(0, k)$, $G(0, k)$ i valori assoluti di quelle al primo membro delle (5) (6) si ricava pure

$$\frac{G(0, k)}{g(0, k)} = |a^2 - b^2 + ab|$$

e poichè i secondi membri sono interi uguali e *indipendenti* da δ e da k possiamo concludere:

In due gruppi equisimmetrici appartenenti uno ad U *l'altro ad* u, *le differenze tra il prodotto dei medi e quello degli estremi (o tra il quadrato del medio e il prodotto degli estremi) sono proporzionali e la costante di proporzionalità e il numero* **intero** $|a^2 - b^2 + ab|$ ecc. ecc.

(*) Per $\delta = k = 1$, poichè è $u_k\, u_{\delta+k} = u_1\, u_2 = 1$ si ha come caso particolarissimo

$$u_n\, u_{n+1} - u_{n-1}\, u_{n+2} = \pm 1,\quad U_n\, U_{n+1} - U_{n-1}\, U_{n+2} = \pm (a^2 - b^2 + ab)$$

cioè: *In quattro termini consecutivi di* U *la differenza tra il prodotto dei medi e quello degli estremi* è $\pm (a^2 - b^2 + ab)$. Analogamente si trova valendosi di (5) (6)

$$u^2_n - u_{n-1}\, u_{n+1} = (-1)^{n-1},\quad U^2_n - U_{n-1}\, U_{n+1} = (-1)^{n-1} (a^2 - b^2 + ab) \text{ ecc.}$$

3. Accanto alla successione U consideriamone un'altra U' di termini iniziali a', b' (definita colla medesima legge di ricorrenza stabilita in principio) ossia

$$U \equiv a,\ b,\ U_3,\ U_4 \ldots, \overbrace{U_n \ldots U_s}, \ldots, \overbrace{U_{n+\rho} \ldots U_{s+\rho}}, \ldots,$$
$$U' \equiv a', b', U'_3, U'_4 \ldots, U'_n \ldots U'_s, \ldots, U'_{n+\rho} \ldots U'_{s+\rho}, \ldots$$

diremo *simili* due coppie $(U_n U_s)$, $(U_{n+\rho} U_{s+\rho})$ che hanno uguali le differenze tra gli indici dei loro termini, e diremo *corrispondenti* due coppie come $(U_n U_s)$ $(U'_n U'_s)$ i cui termini hanno indici rispettivamente uguali. Ciò premesso si ha il seguente

Teorema. — *Se si fanno corrispondere due successioni* U, U' *termine a termine tutti i determinanti di secondo ordine formati da coppie corrispondenti e simili sono uguali in valore assoluto.*

Qui si tratta di provare che si ha in valore assoluto

$$\begin{vmatrix} U_n & U_s \\ U'_n & U'_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{n+\rho} & U_{s+\rho} \\ U'_{n+\rho} & U'_{s+\rho} \end{vmatrix}.$$

A tal fine osserviamo che se nella espressione $U_s U'_n - U'_s U_n$ sostituiamo alle U le loro espressioni in funzione delle u ricavate dalla (2) si ha subito

$$U_s U'_n - U_s U_n = (u_{s-2}\, a + u_{s-1}\, b)(u_{n-2}\, a' + u_{n-1}\, b') -$$
$$- (u_{s-2}\, a' + u_{s-1}\, b')(u_{n-2}\, a + u_{n-1}\, b)$$

ed anche sviluppando i prodotti

$$U_s U'_n - U'_s U_n = (ab' - a'b)(u_{n-1}\, u_{s-2} - u_{s-1}\, u_{n-2}).$$

Qui è opportuno considerare il gruppo simmetrico

$$u_{n-2},\ u_{n-1},\ u_{s-2},\ u_{s-1}$$

dove è certo $n-1 \leqq s-2$ essendo per ipotesi $n < s$; allora applicando la formola (3') dopo aver posto $s - n = \delta$ si trova

$$u_{n-1}\, u_{s-2} - u_{s-2}\, u_{n-2} = (-1)^n\, u_\delta$$

e sostituendo

$$U_s U'_n - U'_s U_n = (-1)^n (ab' - a'b)\, u_\delta \qquad (7)$$

Il secondo membro di questa relazione dipende in quanto a valore assoluto *solamente da* δ, e dai valori iniziali; pertanto mutando n in $n + \rho$ s in $s + \rho$ poichè non varia δ resta invariato anch'esso. Ciò prova quanto si è affermato.

4. Sul precedente risultato si fonda una notevole proprietà della successione U, contenuta nel seguente

Teorema. — *In ogni gruppo simmetrico formato di tre termini come* $(U_{n-\delta}, U_n, U_{n+\delta})$ *il termine medio è un divisore della somma degli estremi* *se δ è pari, ed è un divisore della loro differenza se δ è dispari. Inoltre il quoto intero è, nei rispettivi casi, costante in tutti i gruppi equisimmetrici al primo, e di più è indipendente da* a *e* b.

Si tratta di dimostrare che è $\dfrac{U_{n+\delta}+(-1)^\delta U_{n-\delta}}{U_n}=$ intero indipendente da a, b, n.

Se infatti nella (7) sostituiamo ad s il suo uguale $n+\delta$ si ha per qualunque valore di n e δ

$$U_{n+\delta}\,U'_n - U'_{n+\delta}\,U_n = (-1)^n\,(ab'-a'b)\,u_\delta$$

e per conseguenza cangiando n in $n-\delta$ sarà ancora

$$U_n\,U'_{n-\delta} - U'_n\,U_{n-\delta} = (-1)^{n-\delta}\,(ab'-a'b)\,u_\delta$$

segue quindi

$$U_{n+\delta}\,U'_n - U'_{n+\delta}\,U_n = (-1)^\delta\,U_n\,U'_{n-\delta} - (-1)^\delta\,U'_n\,U_{n-\delta}$$

ed anche

$$\frac{U_{n+\delta}+(-1)^\delta U_{n-\delta}}{U_n} = \frac{U'_{n+\delta}+(-1)^\delta U'_{n-\delta}}{U'_n}$$

Ma la successione U' che ha per termini iniziali due valori arbitrari a', b' può supporsi in particolare coincidente colla u col porre $a'=b'=1$, ed allora è $U'_t=u_t$ e la formola precedente diviene

$$\frac{U_{n+\delta}+(-1)^\delta U_{n-\delta}}{U_n} = \frac{u_{n+\delta}+(-1)^\delta u_{n-\delta}}{u_n}.$$

La dimostrazione del teorema è così riportata ad un gruppo equisimmetrico al dato, ma appartenente alla successione u. Occupiamoci dunque del quoziente

$$\frac{u_{n+\delta}+(-1)^\delta u_{n-\delta}}{u_n}.$$

Qui conviene ricorrere alla formola (1): se in essa si muta s in δ si ha intanto

$$u_{n+\delta} = u_{\delta+1}\,u_n + u_\delta\,u_{n-1}$$

e se inoltre si considera il gruppo simmetrico

$$u_{\delta-1},\ u_\delta,\ u_{n-1},\ u_n$$

si ha per la solita formola (3')

$$u_\delta\,u_{n-1} - u^\delta_{-1}\,u_n = (-1)^{\delta-1}\,u_{n-\delta}.$$

Sottraendo quest'ultima dalla precedente uguaglianza si ha

$$u_{n+\delta}+(-1)^\delta\,u_{n-\delta} = u_{\delta+1}\,u_n + u_{\delta-1}\,u_n$$

e quindi

$$\frac{u_{n+\delta}+(-1)^\delta\,u_{n-\delta}}{u_n} = u_{\delta+1}+u_{\delta-1}.$$

Concludendo sarà

$$\frac{U_{n+\delta} + (-1)^{\delta} U_{n-\delta}}{U_n} = u_{\delta+1} + u_{\delta-1}$$

Il secondo membro essendo *intero e indipendente* da a, b, n il teorema è completamente dimostrato

Casi particolari della (8).

a) Per $n = \delta + 1$, e poichè è $u_1 = 1$, si ha

$$\frac{u_{2\delta+1} + (-1)^{\delta}}{u_{\delta+1}} = u_{\delta-1} + u_{\delta+1}$$

b) Per $n = \delta + 2$, essendo pure $u_2 = 1$, è invece

$$\frac{u_{2\delta+2} + (-1)^{\delta}}{u_{\delta+2}} = u_{\delta-1} + u_{\delta+1} \text{ ovvero, mutando } \delta \text{ in } \delta - 1$$

$$\frac{u_{2\delta} - (-1)^{\delta}}{u_{\delta+1}} = u_{\delta} + u_{\delta-2} \text{ ecc.}$$

5. *a)* La successione particolare u sulle cui proprietà sono basate quelle di ogni successione U, ha oltre le esposte comuni colle U, altre proprietà speciali. Una di queste che passiamo subito a stabilire ci servirà per dimostrare un'*altra* delle U. La questione che ci proponiamo ora è di vedere se esistono e come sono distribuiti nella successione u i multipli di un suo termine u_i. Cominciamo dal dimostrare che *per qualunque valore di* m *il termine* u_{mi} *è multiplo di* u_i.

Il procedimento che teniamo conduce anche alla determinazione del quoziente. Se infatti nella (1) poniamo $s = (m-1)i$, $n = i$, risulta

$$u_{mi} = u_{(m-1)i+1}\, u_i + u_{(m-1)i}\, u_{i-1}$$

e quindi

$$\frac{u_{mi}}{u_i} = u_{(m-1)i+1} + \frac{u_{(m-1)i}}{u_i} u_{i-1}$$

Da questa relazione di ricorrenza si riconosce che affinchè sia intero $\frac{u_{mi}}{u_i}$ basta che sia tale $\frac{u_{(m-1)i}}{u_i}$. E poichè quest'ultimo rapporto per $m = 2$ assume il valore 1, così saranno interi successivamente $\frac{u_{2i}}{u_i}, \frac{u_{3i}}{u_i} \dots \frac{u_{mi}}{u_i}$ come si voleva provare.

Dalla precedente relazione di ricorrenza risultano poi, facendovi successivamente $m = 2, 3, 4, \dots m$ e valendosi ogni volta della relazione precedente, le seguenti

$$\frac{u_{2i}}{u_i} = u_{i+1} + u_{i-1}$$

$$\frac{u_{3i}}{u_i} = u_{2i+1} + u_{i-1}(u_{i-1} + u_{i+1})$$

$$\frac{u_{4i}}{u_i} = u_{3i+1} + u_{i-1}\left\{u_{2i+1} + u_{i-1}(u_{i-1} + u_{i+1})\right\}$$

. . . .

e da queste, come è facile vedere col solito metodo di induzione, discende poi la notevole uguaglianza

$$(\beta)\quad \frac{u_{mi}}{u_i} = u_{i-1}^{m-1} + u_{i+1}\, u_{i-1}^{m-2} + u_{2i+1}\, u_{i-1}^{m-3} + \dots$$
$$+ u_{(m-3)i+1}\, u_{i-1}^2 + u_{(m-2)i+1}\, u_{i-1} + u_{(m-1)i+1}$$

b) Per esaurire la questione posta resta a vedere se oltre i termini

$$u_i,\ u_{2i},\ u_{3i} \dots u_{mi}, \dots$$

esistono *nella successione* u altri multipli di u_i. Supponiamo che ne esista uno compreso tra due dei precedenti multipli, per esempio tra $u_{(m-1)i}$ ed u_{mi}: esso sarà necessariamente delle forma $u_{mi-\varrho}$ con $\rho < i$. Indichiamo con q il quoto intero della divisione di mi per ρ se si vuole supporre mi non multiplo di ρ, e col medesimo simbolo q indichiamo invece l'intero immediatamente inferiore al quoto esatto di mi per ρ se mi si suppone invece multiplo di ρ. Sarà così necessariamente a seconda del caso

$$mi - q\rho \leqq \rho$$

Ciò premesso se si prendono a considerare nella successione u i termini a indici decrescenti

$$u_{mi},\ u_{mi-\varrho},\ u_{mi-2\varrho}, \dots u_{mi-(\alpha-1)\varrho},\ u_{mi-\alpha\varrho},\ u_{mi-(\alpha+1)\varrho}, \dots u_{mi-q\varrho}$$

dico che resulteranno *tutti* multipli di u_i; tali sono infatti u_{mi} per quanto precede, ed $u_{mi-\varrho}$ per l'attuale ipotesi, e quindi basterà provare che ove la proprietà si verifichi per tutti i termini scritti fino a $u_{mi-\alpha\varrho}$ incluso si verificherà pure per il successivo $u_{mi-(\alpha+1)\varrho}$. Per comodità si ponga

$$mi - \alpha\rho = j$$

sarà quindi $mi - (\alpha - 1)\rho = j + \rho$, $mi - (\alpha + 1)\rho = j - \rho$.

Dalla (1) si deduce

$$u_{j+\varrho} = u_j\, u_{\varrho+1} + u_{j-1}\, u_\varrho\,.$$

Ma per ipotesi $u_{j+\varrho}$, u_j sono entrambi multipli di u_i, e perciò sarà multiplo di u_i anche il prodotto $u_{j-1}\, u_\varrho$. D'altra parte essendo $j = mi - \alpha\rho > \rho$ è il caso di considerare il gruppo simmetrico

$$u_{\varrho-1},\ u_\varrho,\ u_{j-1},\ u_j$$

nel quale si ha per le solite formole del n. 2,

$$u_\varrho\, u_{j-1} - u_{\varrho-1}\, u_j = (-1)^{\varrho-1}\, u_{j-\varrho}$$

ma allora poichè risultano multipli di u_i entrambi i termini del primo membro, sarà multiplo di u_i anche il secondo $u_{j-\varrho}$ cioè $u_{mi-(\alpha+1)\varrho}$; l'affermazione posta è dunque dimostrata, e dovrà essere multiplo di u_i anche il termine ultimo della successione considerata, cioè $u_{mi-q\rho}$. D'altra parte essendo per ipotesi

$$mi - q\rho \leqq \rho < i$$

è certo

$$u_{mi-q\rho} < u_i$$

la conclusione precedente è quindi assurda.

Relativamente alla successione u possiamo dunque enunciare il seguente:

Teorema. — *La condizione necessaria è sufficiente affinchè* u_r *sia multiplo di* u_s *è che* r *sia multiplo di* s.

Corollario I. — *I termini con indici composti sono composti.*

Corollario II. — *Un termine* u_r *ha tanti divisori nella successione quanti ne ha l'indice* r *nella serie dei numeri naturali* (ossia nella successione degli indici).

Corollario III. — *Se* d, m *sono rispettivamente il massimo comune divisore ed il minimo comune multiplo di più numeri* r, s, t..., *saranno* u_d, u_m *massimo comun divisore e minimo-comune multiplo,* **nella successione** u, *dei termini* u_r, u_s, u_t, ... ecc. ecc.

Questi risultati mettono in vista delle analogie tra la successione u e quella dei numeri naturali.

6. Torniamo ora a considerare la successione U. A partire da un termine *qualunque,* si consideri la successione di tutti i termini aventi gli indici in progressione aritmetica di differenza qualunque ρ. Tale successione potrà rappresentarsi così:

$$U_x \dots U_{p-m\rho}\, U_{p-(m-1)\rho} \dots U_{p-\lambda\rho} \dots U_p \dots U_{p+\lambda\rho} \dots U_{p+(m-1)\rho}\, U_{p+m\rho} \dots$$

Se allora si prendono in esame, le due coppie simmetriche rispetto all'elemento U_p:

$$(U_{p-m\rho}\, U_{p+m\rho})\,(U_{p-\lambda\rho},\, U_{p+\lambda\rho})$$

si ha il seguente

Teorema. — *Il quoziente*

$$\frac{U_{p+m\rho} - (-1)^{m\rho}\, U_{p-m\rho}}{U_{p+\lambda\rho} - (-1)^{\lambda\rho}\, U_{p-\lambda\rho}}$$

è un numero intero se e solamente quando m *è multiplo di* λ, **è costante** *al variare di* U_p *nella successione* U *mentre sono fissi* m *e* ρ, *è* **indipendente** *dai termini iniziali* a, b *della successione* U.

Per la dimostrazione conviene premettere alcune semplici considerazioni relative alla successione u. Denotando p ed n numeri qualunque sappiamo che è per la (1)

$$u_{p+n} = u_p u_{n+1} + u_{p-1} u_n .$$

E supposto $p > n$ (ciò che è lecito perchè p ed n sono permutabili) si consideri il gruppo simmetrico

$$u_n , u_{n+1} , u_p , u_{p+1}.$$

Applicando il teorema del n. 2, come altre volte. si avrà:

$$u_{n+1} u_p - u_n u_{p+1} = (-1)^n u_{p-n}$$

che sottratta dalla precedente dà la seguente

$$u_{p+n} - (-1)^n u_{p-n} = u_n (u_{p-1} + u_{p+1}).$$

Ora tornando alla U si costruisca l'espressione $U_{p+n} - (-1)^n U_{p-n}$. Tenuto conto della (2) risulta

$$U_{p+n} - (-1)^n U_{p-n} = (au_{p+n-2} + bu_{p+n-1}) - (-1)^n (au_{p-n-1} + bu_{p-n-1})$$

da cui

$$U_{p+n} - (-1)^n U_{p-n} = a(u_{p+n-2} - (-1)^n u_{p-n-2}) + b(u_{p+n-1} - (-1)^n u_{p-n-1})$$

Ma se nell'ultima relazione tra le sole u_r si muta una volta p in $p-2$ ed un'altra volta p in $p-1$ si trova

$$u_{p+n-2} - (-1)^n u_{p-n-2} = u_n (u_{p-3} + u_{p-1})$$
$$u_{p+n-2} - (-1)^n u_{p-n-1} = u_n (u_{p-2} + u_p)$$

e quindi sostituendo

$$U_{p+n} - (-1)^n U_{p-n} = u_n \left[[au_{p-1} + bu_p] + [au_{p-3} + bu_{p-2}] \right]$$

e poichè le due quantità entro le parentesi interne sono, a causa della (2), rispettivamente uguali ad U_{p+1}, U_{p-1} così avremo ancora

$$U_{p+n} - (-1)^n U_{p-n} = u_n (U_{p+1} + U_{p-1})$$

dalla quale mutando n in $m\rho$ una prima volta, poi in $\lambda\rho$ e dividendo le due relazioni ottenute si ricava

$$\frac{U_{p+m\rho} - (-1)^{m\rho} U_{p-m\rho}}{U_{p+\lambda\rho} - (-1)^{\lambda\sigma} U_{p-\lambda\rho}} = \frac{u_{m\rho}}{u_{\lambda\rho}} .$$

Poichè il secondo membro è indipendente da p, a, b sono dimostrate la seconda e la terza proprietà contenute nell'enunciato del teorema; in quanto alla prima risulta pure immediatamente osservando che il quoziente $\frac{u_{m\rho}}{u}$ è intero *soltanto e sempre* che sia $m\rho$ multiplo di $\lambda\rho$, cioè m multiplo di λ, come abbiamo dimostrato al n. 5.

OSSERVAZIONI:

a) Dalla relazione $u_{p+n} - (-1)^n u_{p-n} = u_n (u_{p-1} + u_{p+1})$ stabilita in principio della precedente dimostrazione risulta

$$\frac{u_{p+n} - (-1)^n u_{p-n}}{u_n} = u_{p-1} + u_{p+1}$$

e poichè il secondo membro è indipendente da n, così possiamo dire che nella *successione* u *il rapporto al primo membro della precedente eguaglianza è intero e costante al variare di* n.

a) Mutando n in δ e p in $\delta + 1$ si ha in particolare

$$\frac{u_{2\delta+1} - (-1)^\delta}{u_\delta} = u_\delta + u_{\delta+2}$$

b) Mutando invece n in δ e p in $\delta + 2$, e nella formola ottenuta cangiando di nuovo δ in $\delta - 1$ si ricava

$$\frac{u_{2\delta} + (-1)^\delta}{u_{\delta-1}} = u_{\delta-1} + u_{\delta+1}$$

c) Nella successione particolare u si ha poi un'altra proprietà notevole che discende subito dalla (1). Infatti se vi si pone $n = s + 1$ si ha subito

$$u_{2s+1} = u^2_{s+1} + u^2_s$$

ossia: *tutti i termini di indice dispari sono la somma di due quadrati interi, e di più dei quadrati di due termini consecutivi della successione.*

La Spezia, aprile 1900.

ALBERTO TAGIURI.

TRASFORMAZIONE DI UNA FRAZIONE NELLA SOMMA DI PIÙ FRAZIONI

i cui denominatori sono le successive potenze di un numero dato

Data una frazione propria $\frac{m}{n}$, ed un numero intero p, ci proponiamo di dimostrare che si possono sempre trovare dei numeri interi $q_1, q_2 \ldots q_s$ minori di p, tali che la frazione data si trasformi nella somma

$$\frac{q_1}{p} + \frac{q_2}{p^2} + \ldots + \frac{q_s}{p^s}$$

esattamente o con un errore assoluto minore di $\frac{1}{p^s}$, e che in tutti e due i casi la trasformazione si può fare in un solo modo.

Ricercheremo quindi la condizione necessaria e sufficiente perchè la detta trasformazione si possa fare esattamente, e considereremo poi il caso particolare di $p = 10$.

Indicheremo per brevità con T la trasformazione di cui si tratta.

Premettiamo il seguente

Lemma. — *Se* $q_1, q_2 \ldots q_s$ *sono minori di* p, *ed* $\frac{h}{k}$ *è minore di* $\frac{1}{p^s}$, la somma

$$\text{(A)} \qquad \frac{q_1}{p} + \frac{q_2}{p^2} + \ldots + \frac{q_s}{p^s} + \frac{h}{k}$$

è minore di 1.

Infatti, se nei termini della somma (A) in luogo di q_i $(i = 1, 2, \ldots s)$ si pone $(p-1)$, che è il massimo dei valori che può avere q_i, si trova

$$\frac{p-1}{p} + \frac{p-1}{p^2} + \ldots + \frac{p-1}{p^s} + \frac{h}{k} = \frac{(p-1)(p^{s-1} + p^{s-2} + \ldots + 1)}{p^s} + \frac{h}{k} = \frac{p^s - 1}{p^s} + \frac{h}{k},$$

e poichè $\frac{h}{k} < \frac{1}{p^s}$, si deduce

$$\frac{p^s - 1}{p^s} + \frac{h}{k} < 1,$$

e quindi a maggior ragione la somma (A) sarà minore di 1.

Teorema 1°. — *La trasformazione* T *si può sempre effettuare ed in un solo modo.*

Infatti si divida mp per n, sia q_1 la parte intera del quoziente ed r_1 il resto; si divida $r_1 p$ per n, sia q_2 la parte intera del quoziente ed r_2 il resto; . . . . si divida $r_{s-1}\,p$, per n, sia q_s la parte intera del quoziente ed r_s il resto.

Dobbiamo distinguere due casi:

1° $r_s = 0$

2° $r_s > 0$, nè è possibile trovare un resto nullo. Sia nel primo che nel secondo caso avremo i due gruppi d'eguaglianze:

$$\text{(B)}\begin{cases} \dfrac{mp}{n} = q_1 + \dfrac{r_1}{n} \\ \dfrac{r_1 p}{n} = q_2 + \dfrac{r_2}{n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{r_{s-1}\,p}{n} = q_s + \dfrac{r_s}{n} \end{cases} \qquad \text{(C)}\begin{cases} \dfrac{m}{n} = \dfrac{q_1}{p} + \dfrac{r_1}{np} \\ \dfrac{r_1}{np} = \dfrac{q_2}{p^2} + \dfrac{r_2}{np^2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{r_{s-1}}{np^{s-1}} = \dfrac{q_s}{p^s} + \dfrac{r_s}{np^s} \end{cases}.$$

e i numeri $q_1, q_2 \ldots q_s$ saranno minori di p.

Addizionando le (C) membro a membro e sopprimendo nell'eguaglianza dedotta i termini comuni ai due membri, si trova nel 1° caso

$$\frac{m}{n} = \frac{q_1}{p} + \frac{q_2}{p^2} + \ldots + \frac{q_s}{p^s},$$

nel 2º caso

$$\frac{m}{n}=\frac{q_1}{p}+\frac{q_2}{p^2}+\ldots+\frac{q_s}{p^s}+\frac{r_s}{np^s};$$

e siccome $\frac{r_s}{np^s}<\frac{1}{p^s}$ perchè $r_s<n$, la prima parte del teorema è dimostrata.

Supponiamo ora di aver trovato mediante due procedimenti diversi

$$\frac{m}{n}=\frac{q_1}{p}+\frac{q_2}{p^2}+\ldots+\frac{q_s}{p^s}+\frac{c}{d},$$

$$\frac{m}{n}=\frac{g_1}{p}+\frac{g_2}{p^2}+\ldots+\frac{g_s}{p^s}+\frac{h}{k},$$

essendo

$$\frac{c}{d}<\frac{1}{p^s},\quad \frac{h}{k}<\frac{1}{p^s}.$$

Si deduce l'eguaglianza

$$\text{(D)}\quad \frac{q_1}{p}+\frac{q_2}{p^2}+\ldots+\frac{q_s}{p^s}+\frac{c}{d}=\frac{g_1}{p}+\frac{g_2}{p^2}+\ldots+\frac{g_s}{p^s}+\frac{h}{k},$$

e moltiplicando i due membri della (D) per p si trova

$$\text{(E)}\quad q_1+\frac{q_2}{p}+\ldots+\frac{q_s}{p^{s-1}}+\frac{pc}{d}=g_1+\frac{g_2}{p}+\ldots+\frac{g_s}{p^{s-1}}+\frac{ph}{k},$$

e sarà

$$\frac{pc}{d}<\frac{1}{p^{s-1}},\quad \frac{ph}{k}<\frac{1}{p^{s-1}}.$$

Ma affinchè la (E) possa sussistere deve essere

$$q_1=g_1,$$

perchè per la proposizione premessa la somma dei rimanenti termini in ciascun membro della (E) è una frazione minore di uno. Allora avremo anche

$$\frac{q_2}{p}+\frac{q_3}{p_2}+\ldots+\frac{q_s}{p^{s-1}}+\frac{pc}{d}=\frac{g_2}{p}+\frac{g_3}{p_2}+\ldots+\frac{g_s}{p^{s-1}}+\frac{ph}{k};$$

e da quest'ultima eguaglianza si ricava, ragionando come prima,

$$q_2=g_2,$$

e così continuando si arriverà all'eguaglianza

$$\frac{q_s}{p}+\frac{p^{s-1}c}{d}=\frac{g_s}{p}+\frac{p^{s-1}h}{k},$$

da cui si deduce

$$q_s = g_s,$$
$$\frac{c}{d} = \frac{h}{k};$$

ed il teorema è completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE. — *Nel caso in cui non si può trovare un resto nullo, la trasformazione* T *si può effettuare con un errore sempre più piccolo, perchè minore di* $\frac{1}{p^s}$, *dove* s *si può prendere grande a piacere.*

TEOREMA 2°. — *Per una frazione* $\frac{a}{p^s}$, *il cui denominatore è una potenza* s^esima^ *perfetta, la trasformazione* T *si può sempre effettuare esattamente, e il numero dei termini è eguale ad* s.

Infatti operando con la frazione $\frac{a}{p^s}$ (per la quale è lecito supporre a non divisibile per p) come si è operato con la frazione $\frac{m}{n}$, si trovino i quozienti incompleti $q_1, q_2 \ldots q_s$ ed i resti $r_1, r_2 \ldots r_s$. Poichè r_1 è il resto della divisione di ap per p^s, r_1 sarà divisibile per p e allora r_1p per p^2, r_2p per p^3, $r_{s-1}p$ per p^s; dunque $r_s = 0$ ed avremo

$$\frac{a}{p^s} = \frac{q_1}{p} + \frac{q_2}{p^2} + \ldots + \frac{q_s}{p^s}.$$

TEOREMA 3°. — *La condizione necessaria e sufficiente perchè per una frazione propria* $\frac{m}{n}$ *irriducibile la trasformazione* T *si possa effettuare esattamente è che i fattori primi di* n *siano fattori primi di* p; *e quando la trasformazione* T *è effettuabile, il numero dei termini la cui somma equivale alla frazione data è uguale al più piccolo esponente per cui si ha una potenza di* p *divisibile per* n.

La condizione è necessaria. Infatti se

$$\frac{m}{n} = \frac{q_1}{p} + \frac{q_2}{p^2} + \ldots + \frac{q_s}{p^s},$$

si deduce

$$\frac{m}{n} = \frac{q_1p^{s-1} + q_2p^{s-2} + \ldots + q_s}{p^s};$$

ed essendo $\frac{m}{n}$ irriducibile, p^s dev'essere multiplo di n, e quindi i fattori primi di n devono essere fattori primi di p^s e perciò di p.

La condizione è sufficiente. Infatti se i fattori primi di n sono fattori primi di p, potremo trovare una potenza p^s, sia questa la più piccola, divisibile per n ed allora avremo

$$\frac{m}{n} = \frac{\mu}{p^s}$$

e per il teorema precedente $\frac{m}{n}$ si potrà trasformare esattamente nel modo detto e il numero dei termini sarà s.

Osservazione. — *Se gli esponenti dei fattori primi di* p *sono eguali ad* 1, *e i fattori primi di* n *sono fattori primi di* p, *la più piccola potenza di* p *multipla di* n *è quella che ha per esponente il più grande degli esponenti dei fattori primi di* n.

Se è data una frazione $\frac{b}{n}$ maggiore di 1, si divida b per n; sia q la parte intera del quoziente ed r il resto; avremo

$$\frac{b}{n}=q+\frac{r}{n}$$

essendo $\frac{r}{n}<1$; e quindi la frazione data si potrà trasformare nella somma

$$q+\frac{q_1}{p}+\frac{q_2}{p^2}+\ldots+\frac{q_s}{p^s}$$

esattamente o con un errore assoluto minore di $\frac{1}{p^s}$, operando sulla frazione $\frac{r}{n}$ la trasformazione T.

Supponendo $p=10$ risultano dai teoremi precedenti le seguenti proposizioni:

a) Una frazione si può trasformare in un numero decimale esattamente o con un errore assoluto minore di una unità di un ordine decimale qualunque.

Infatti la frazione data si potrà, per quanto abbiamo dimostrato, trasformare nella somma

$$\text{(F)} \qquad q+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{10^2}+\ldots+\frac{q_s}{10^s}$$

esattamente o con un errore assoluto minore di $\frac{1}{10^s}$; essendo la somma (F) un numero decimale, che ha q per parte intera e per cifre decimali

$$q_1, q_2 \ldots q_s .$$

b) La condizione necessaria e sufficiente perchè una frazione $\frac{m}{n}$ irriducibile si possa trasformare esattamente in un numero decimale, è che n non contenga fattori primi diversi da 2 e da 5; e quando la detta trasformazione è effettuabile, il numero delle cifre decimali è uguale al più grande degli esponenti dei fattori 2 e 5 di n.

Ciò risulta dal teorema 3°, notando che $10=2\times 5$, e tenendo conto dell'osservazione fatta a detto teorema.

Belluno, dicembre 1899.

G. Monti.

QUALCHE COMPLEMENTO AL TEOREMA DI HUNYADY

su certi determinanti

Dato un determinante qualunque d'ordine n

$$D = [a_{ik}] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

il teorema di Hunyady dimostra come un certo determinante Δ di ordine $\frac{n(n+1)}{2}$, opportunamente formato con gli elementi a_{ik}, sia esprimibile con una potenza di D. Non fu avvertito però, per quanto è a mia cognizione, che pure i complementi algebrici di primo ordine in Δ, ammettono una espressione elegante in funzione di D e de' suoi complementi di primo ordine.

Tale semplice ricerca e le conseguenti relazioni intendo porre in evidenza nella nota che segue.

1. Approfitto di un richiamo del teorema di Hunyady per introdurre qualche utile notazione.

Per mezzo del determinante D costruisco le n funzioni lineari:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{n1} x_n = y_1 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{n2} x_n = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = y_n . \end{cases}$$

Si facciano ora i quadrati ed i prodotti due a due delle funzioni (A), e indichiamo con $\alpha_{(ij)(hk)}$ il coefficente di $(x_i x_j)$ nella funzione quadratica $(y_h y_k)$. Le $\alpha_{(ij)(hk)}$ non mutano scambiando due indici di una stessa parentesi, e si presentano in numero di

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 .$$

Scrivendo ordinatamente le funzioni quadratiche $(y_h y_k)$ si ottiene:

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \alpha_{(11)(11)} x_1^2 + \alpha_{(12)(11)} x_1 x_2 + \ldots + \alpha_{(nn)(11)} x_n^2 = y_1^2 \\ \alpha_{(11)(12)} x_1^2 + \alpha_{(12)(12)} x_1 x_2 + \ldots + \alpha_{(nn)(12)} x_n^2 = y_1 y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{(11)(nn)} x_1^2 + \alpha_{(12)(nn)} x_1 x_2 + \ldots + \alpha_{(nn)(nn)} x_n^2 = y_n^2 \end{cases}$$

Si costruisca allora il determinante

$$\Delta = [\alpha_{(ij)(hk)}],$$

ponendo nella stessa colonna tutte le α in cui sono fissi i primi indici (ij), e nella stessa linea tutte quelle α in cui sono fissi i secondi indici (hk).

Le colonne e le linee così costruite si indicheranno brevemente con i rispettivi simboli (ij), (hk).

Ora il teorema di Hunyady è espresso dalla formola

$$\Delta = D^{n+1}, \tag{1}$$

intendendo che le linee e le colonne in Δ sieno opportunamente ordinate, così per es. come nella tabella (B), si presentano i coefficenti α.

2. Si attribuisca alle y_r significato di quantità arbitrarie. Allora dal sistema (A) ricavando i valori di x_i, x_j risulta

$$x_i = \frac{D_i(y)}{D}, \qquad x_j = \frac{D_j(y)}{D}, \tag{2}$$

dove $D_i(y)$, $D_j(y)$ si deducono dal determinante D ponendo la colonna delle y rispettivamente al posto delle colonne di posto i, j.

Dal sistema (B) ricaviamo ora x_i^2, $x_i x_j$, x_j^2, onde

$$x_i^2 = \frac{\Delta_{ii}(y)}{\Delta}, \qquad x_i x_j = \frac{\Delta_{ij}(y)}{\Delta}, \qquad x_j^2 = \frac{\Delta_{jj}(y)}{\Delta}, \tag{3}$$

dove Δ_{ij} si deduce dal determinante Δ, ponendo i prodotti

$$y_h y_k \; (h, k = 1, 2, \ldots n)$$

al posto della colonna (ij).

Eliminando x_i, x_j fra le (3) si ottiene la formola

$$\Delta_{ij}^2(y) = \Delta_{ii}(y)\,\Delta_{jj}(y), \tag{4}$$

la quale è molto interessante per chi ne analizzi il significato, e servirà di cardine a parte delle nostre ricerche.

3. Si confrontino ora i valori delle x_i^2 dati dalle (2) e (3). Tenuta presente la (1), si ottiene in modo ovvio

$$\Delta_{ii}(y) = D^{n-1} . D_i^2(y). \tag{5}$$

Sostituendo ora questa espressione nelle Δ_{ii}, Δ_{jj} della formola (4) ed estraendo la radice, risulta

$$\Delta_{ij}(y) = D^{n-1} . D_i(y) . D_j(y), \tag{6}$$

dove, calcolando il segno di un medesimo termine nei due membri, è tosto verificato che, nell'estrazione di radice del secondo membro, a questo compete il segno positivo appunto, come si è posto.

4. Dalle (5) e (6) è facile ora dedurre l'espressione dei minori di primo ordine di Δ. Indichiamo in generale con D_{ij} il complemento algebrico di a_{ij} in D, e con $\Delta_{(ij)(hk)}$ il complemento di $x_{(ij)(hk)}$ in Δ.

Poniamo

$$y_h = 1, \quad y_r = 0 \, (r \neq h).$$

Per tal modo i determinanti

$$D_i(y), \qquad D_j(y), \qquad \Delta_{ii}(y), \quad \Delta_{ij}(y)$$

diventano rispettivamente

$$D_{ih}, \qquad D_{jh}, \qquad \Delta_{(ii)(hh)}, \quad \Delta_{(ij)(hh)}.$$

Onde la (5) e la (6) diventano

(7) $$\Delta_{(ii)(hh)} = D^{n-1} . D_{ih}^2,$$

(8) $$\Delta_{(ij)(hh)} = D^{n-1} . D_{ih} D_{jh},$$

delle quali la prima naturalmente è caso particolare della seconda. In questo modo abbiamo determinata l'espressione dei complementi algebrici di elementi, in cui almeno i secondi indici sono uguali.

5. Per procedere ora alla ricerca generale poniamo

$$y_h = y_k = 1, \qquad y_r = 0, \qquad (r \neq h, k),$$

e sostituiamo nella (5). I determinanti

$$D_i(y) \quad , \quad \Delta_{ii}(y)$$

si mutano allora in

$$D_{ih} + D_{ik}, \qquad \Delta_{(ii)(hh)} + \Delta_{(ii)(hk)} + \Delta_{(ii)(kk)}:$$

onde

$$\Delta_{(ii)(hh)} + \Delta_{(ii)(hk)} + \Delta_{(ii)(kk)} = D^{n-1} (D_{ih} + D_{ik})^2,$$

e tenuto conto della (7)

(9) $$\Delta_{(ii)(hk)} = 2 D^{n-1} D_{ih} D_{ik} \qquad (h \neq k)$$

espressione del minore in cui i primi indici sono uguali. Sostituendo invece i posti valori delle Δ nella (6), essa diventa analogamente

$$\Delta_{(ij)(hh)} + \Delta_{(ij)(hk)} + \Delta_{(ij)(kk)} = (D_{ih} + D_{ik}) (D_{jh} + D_{jk}).$$

Relazione questa, che, sviluppando il secondo membro e tenendo presente la (8), si riduce alla forma

(10) $$\Delta_{(ij)(hk)} = D^{n-1}(D_{ih}D_{jk} + D_{ik}D_{jh}).$$

E questa comprende la (9), ma è vera soltanto per $h \neq k$.

6. In sostanza adunque abbiamo ottenute due formole generali, la (8) e la (10), per l'espressione dei minori di Δ. Tali formole non sono riconducibili l'una all'altra in quanto la prima vale quando in $\Delta_{(ih)(jk)}$ i secondi indici sono uguali, e l'altra solo nel caso che sieno essenzialmente diversi.

Per riassumerle in una forma comprensiva possiamo porre

(11) $$\Delta_{(ij)(hk)} = \varepsilon D^{n-1}(D_{ih}D_{jk} + D_{ik}D_{jh})$$

dove $\varepsilon = \frac{1}{2}$ per $h = k$, $\varepsilon = 1$ per $h \neq k$.

7. Per indicare qualche applicazione della (11) deduciamo un teorema abbastanza interessante.

Calcolando il reciproco Δ' di Δ, e posto

$$c = \frac{(n^2-1)(n+2)}{2},$$

si ottiene, rammentando la (1),

$$\Delta' = D^c.$$

D'altra parte se con Γ indico il determinante di elementi

$$\gamma_{(ij)(hk)} = D_{ih}D_{jk} + D_{ik}D_{jh},$$

questo, a meno del fattore

$$M = \frac{1}{2^n} D^{\frac{n(n^2-1)}{2}}$$

coincide con Δ'. Risulta adunque paragonando,

(12) $$\Gamma = [\gamma_{(ij)(hk)}] = 2^n D^{n^2-1}.$$

Segue quindi il teorema:

Se $D = [a_{ik}]$ *è un determinante d'ordine* n, *e mediante i complementi algebrici de' suoi elementi si formano le espressioni*

$$\gamma_{(ij)(hk)} = D_{ih}D_{jk} + D_{ik}D_{jh},$$

allora il determinante

$$\Gamma = [\gamma_{(ij)(hk)}]$$

d'ordine $\frac{n(n+1)}{2}$, *formato ponendo nella stessa colonna le* γ *in cui i primi indici sono fissi, e nella stessa linea tutti quelli in cui sono fissi i secondi, è espresso per* D *nel modo seguente:*

$$\Gamma = \pm 2^n D^{n^2-1},$$

in cui il segno dipende dall'ordinamento delle colonne.

8. Applichiamo ancora la (11) a qualche determinante speciale.

a) Si supponga D un emisimmetrico d'ordine dispari.

Allora dal noto teorema $D=0$ discende

$$\Delta = 0 \quad , \quad \Delta_{(ij)(hk)} = 0.$$

Supponiamo invece D d'ordine pari, onde

$$D = (1, 2, 3, \dots n)^2.$$

e indichiamo con $[ij]$ il pfaffiano che si deduce da $(1, 2, 3, \dots n)$, sopprimendo gli indici i, j, considerato con segno $+$ o $-$ a seconda che $i \lesseqgtr j$.

Ricordando allora che

$$D_{rs} = (1, 2, 3, \dots n)[rs] \qquad (r \neq s),$$

le (1) ed (11) diventano

$$\Delta = (1, 2, 3, \dots n)^{2n+2}.$$
$$\Delta_{(ij)(hk)} = \varepsilon (1, 2, 3, \dots n)^{2n-2} \left\{ [ih][jk] + [ik][jh] \right\}.$$

In virtù poi della formola (12) con facili osservazioni si ha pure che, formando gli elementi

$$\beta_{(ij)(hk)} = [ih][jk] + [ik][jh],$$

e con essi il determinante

$$B = [\beta_{(ij)(hk)}],$$

questo è dato dall'espressione

$$B = 2^n . (1, 2, 3, \dots n)^{(n+1)(n-2)}.$$

b) Facciamo ora l'ipotesi che il determinante D sia ortogonale, ad esempio destrorso. In tal caso si ha

$$D = 1 \quad , \quad D_{rs} = a_{rs};$$

onde le formole

$$\Delta = 1,$$
$$\Delta_{(ij)(hk)} = \varepsilon (a_{ih} a_{jk} + a_{ik} a_{jh}),$$

in cui ε ha i soliti valori.

Di qui si vede che il teorema del n. 7 diventa in questa ipotesi particolarmente semplice:

Se $D=[a_{ih}]$ *è un determinante ortogonale destrorso, e mediante i suoi elementi si formano le espressioni*

$$\gamma_{(ij)(hk)} = a_{ih}\,a_{jk} + a_{ik}\,a_{jh}\,,$$

allora costruendo il determinante $\Gamma = [\gamma_{(ij)(hk)}]$ *d'ordine* $\frac{n(n+1)}{2}$, *secondo l'esposta legge, questo ha il valore* $\Gamma = 2^n$, *quando alle colonne di* Γ *si dia un ordinamento opportuno.*

Omettiamo ogni esempio ulteriore.

Sassari, 4 maggio 1900.

TITO CAZZANIGA.

INTORNO AL TEOREMA DI WILSON

1. In questa breve nota ci proponiamo di stabilire alcune formule analoghe a quella celebre di Wilson

$$(p-1)!+1 \equiv 0 \pmod{p},$$

la quale offre, come si sa, una proprietà caratteristica dei numeri primi.

Abbiamo

$$(p-1)! = (p-2)!\,p - (p-2)!$$

e quindi

$$(p-2)! - 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

così

$$(p-2)! = (p-3)!\,p - 2\,(p-3)!$$

onde

$$2\,(p-3)! + 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

proseguendo così si ottiene la formula generale

$$(\alpha) \qquad x!\left\{p-(x+1)\right\}! \equiv (-1)^{x+1} \pmod{p}.$$

Se questa formula è vera per il valore x_1 di x, essa è pure vera pel valore x_1+1; infatti, essendo

$$\left\{p-(x_1+1)\right\}! \equiv -\left\{p-(x_1+2)\right\}!\,(x_1+1) \pmod{p}.$$

si ha

$$(x_1+1)!\left\{p-(x_1+2)\right\}! \equiv (-1)^{x_1+2} \pmod{p}.$$

Così la (α) è dimostrata. Essa vale per ogni valore intero compreso fra 0 e $p-1$: per tali due valori di x si ricade nella formula di Wilson. Può farsi in particolare: $x=\frac{p-1}{2}$; si ha allora:

(1) $$\left(\frac{p-1}{2}\right)!^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}.$$

Ma ai fattori del prodotto

$$2^2 . 3^2 . 4^2 \dots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

si possono sostituire i residui quadratici di p; indicando con π_p il loro prodotto, si ha

(2) $$\pi_p \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p},$$

cioè: *Per ogni numero primo* p, *il prodotto dei residui quadratici, aumentato o diminuito di 1, è divisibile per* p; *viceversa tale proprietà caratterizza i numeri primi.*

12. Riprendiamo la (1). Si può scrivere

$$\frac{p-1}{2}! = \frac{p-3}{2}!\,\frac{p-1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{p-3}{2}!\,p - \frac{1}{2}\,\frac{p-3}{2}!$$

onde

$$\left(\frac{1}{2}\,\frac{p-3}{2}!\right)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p};$$

così analogamente

$$\left(\frac{3}{2^2}\,\frac{p-5}{2}!\right)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p};$$

ed in generale

(γ) $$\{3 . 5 . 7 . 9 \dots (2y-1)\}^2 \frac{\left(\frac{p-2y-1}{2}!\right)^2}{2^{2y}} \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}.$$

Se la formula è vera pel valore y_1 di y, lo è pure pel valore y_1+1, perchè è

$$\frac{p-2y_1-1}{2}! = \frac{p-2y_1-3}{2}!\,p - \frac{p-2y_1-3}{2}!\,\frac{2y_1+1}{2}.$$

Essa vale per ogni valore di y compreso fra 0 e $\frac{p-1}{2}$. Per $y=0$ si ricade nella (1). Per $y=\frac{p-1}{2}$ si ha

$$\{3 . 5 . 7 . 9 \dots (p-2)\}^2 \equiv 2^{p-1}(-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p},$$

e pel teorema di Fermat

(3) $$\{3 . 5 . 7 . 9 \dots (p-2)\}^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p},$$

oppure

$$\left\{4 \,.\, 6 \,.\, 8 \ldots (p-1)\right\} \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}.$$

In generale sarà opportuno prendere per caso particolare della (β) il massimo valore di y che soddisfa la disuguaglianza:

$$\mathrm{E}\left(\frac{p-2y-1}{2^2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{p-2y-1}{2^3}\right) + \ldots \quad + \mathrm{E}\left(\frac{p-2y-1}{2^u}\right) \geq 2^y,$$

dove $\mathrm{E}(a)$ è il simbolo di Legendre e 2^u è la massima potenza di 2 contenuta in $p-2y-1$.

3. Si ha ancora

$$\left(\frac{p-1}{2}\,!\right)^2 \equiv \left(\frac{p-3}{2}\,!\, p-1\,\frac{p-1}{2}\,! - \frac{p-3}{2}\,!\right)^2 \equiv \left(\frac{p-1}{2}\,! + \frac{p-3}{2}\,!\right)^2 \pmod{p};$$

sostituendo per $\left(\frac{p-1}{2}\,!\right)^2$ e $\left(\frac{p-3}{2}\,!\right)^2$ i valori congrui che si ricavano dalla (β), si ha

$$2\,(-1)^{\frac{p+1}{2}} + \frac{p-1}{2}\,!\,\frac{p-3}{2}\,! \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p};$$

proseguendo così per $\frac{p-2}{2}\,!,\ \frac{p-5}{2}\,!, \ldots$, si ottiene la formula generale:

$$(\gamma) \quad 2^{2z+1}(-1)^{\frac{p+1}{2}} + (2z+1)\left\{3 \,.\, 5 \ldots (2z-1)\right\}^2 \frac{p-2z-3}{2}\,!\,\frac{p-2z-1}{2}\,! \equiv 0 \pmod{p},$$

dove z può variare fra 0 e $\frac{p-3}{2}$. Per quest'ultimo valore di 2 si ottiene ancora la formula (3).

4. Le formule (α), (β), (γ) e le altre, che ne sono particolari casi danno altrettante condizioni necessarie e sufficienti pel riconoscimento di un numero primo. Benchè esse siano ancor lungi dall'offrire criteri pratici, si possono tuttavia notare dal punto di vista logico.

MARIO VECCHI.

PROPRIETÀ DEL TETRAEDRO E DEL QUADRILATERO

1. In questa nota chiameremo: A_1, A_2, A_3, A_4 i vertici di un tetraedro; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ le facce opposte; γ_{ij} il piano elevato perpendicolarmente allo spigolo A_iA_j nel suo punto medio, δ_{ij} il piano perpendicolare allo spigolo A_iA_j condotto dal punto medio dello spigolo opposto, G il baricentro, O il centro della sfera circoscritta ed H l'ortocentro, ossia il centro dell'iperboloide delle altezze.

Osserviamo prima di tutto che il piano γ_{ij} è il simmetrico del piano δ_{ij} rispetto a G. Infatti essi piani sono paralleli perchè entrambi perpendicolari ad A_iA_j, ed il punto ove il primo incontra A_iA_j (punto medio di A_iA_j) è il simmetrico rispetto a G del punto ove il secondo incontra lo spigolo opposto A_kA_l (punto medio di A_kA_l). Risulta allora che, allo stesso modo come i 6 piani γ_{ij} formano un angolo quadrispigolo di vertice O, i sei piani δ_{ij} formano un angolo quadrispigolo il cui vertice è il punto simmetrico di O rispetto a G, il quale in virtù di un teorema di Monge(*) è l'ortocentro H del tetraedro.

2. È facile vedere che il trispigolo diagonale dell'angolo quadrispigolo dei piani γ_{ij} ha per facce i 3 piani antiradicali(**) delle tre coppie di sfere descritte sulle coppie di spigoli opposti del tetraedro considerati come diametri (***). Si deduce quindi che le facce del trispigolo diagonale dell'angolo quadrispigolo dei piani δ_{ij} sono i piani radicali delle stesse coppie di sfere. Entrambe le terne dei piani sono costituite da piani perpendicolari alle 3 congiungenti le coppie di punti medii degli spigoli opposti.

3. È noto che se $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ sono i piani condotti da O perpendicolarmente alle mediane del tetraedro partenti da A_1, A_2, A_3, A_4 per ogni punto M del piano β_i si ha:

$$3\,\overline{MA_i}^2 = \overline{MA_j}^2 + \overline{MA_k}^2 + \overline{MA_l}^2 \quad (****)$$

ove i, j, k, l sono, indipendentemente dall'ordine, i numeri 1, 2, 3, 4. Possiamo aggiungere che: *l'angolo tetraedro dei quattro piani $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ è armonicamente circoscritto all'angolo quadrispigolo dei piani γ_{ij}*, cioè le tre coppie di spigoli opposti dell'angolo tetraedro dei piani β si trovano sulle tre coppie di facce dell'angolo tetraspigolo dei piani γ_{ij} ed il triedro diagonale del primo coincide col trispigolo diagonale del secondo.

Infatti, per ogni punto M comune ai piani β_1, β_2 si ha:

$$\left.\begin{aligned} 3\,\overline{MA_1}^2 &= \overline{MA_2}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2 \\ 3\,\overline{MA_2}^2 &= \overline{MA_1}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

e sottraendo: $4\overline{MA_1}^2 = 4\overline{MA_2}^2$, ossia $MA_1 = MA_2$. Sicchè il punto M si trova anche nel piano γ_{12}. Inoltre la prima delle due equazioni (1) per $MA_1 = MA_2$ si può scrivere:

$$\overline{MA_1}^2 + \overline{MA_2}^2 = \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2,$$

e ciò indica che il punto M si trova pure nel piano antiradicale delle due sfere descritte su A_1A_2, A_3A_4 come diametri. Potremo quindi affermare che i piani $\beta_i\beta_j$ si incontrano in una retta che è comune anche al piano γ_{ij} ed al piano antiradicale delle due sfere descritte su A_iA_j e sullo spigolo opposto come diametri; ed il teorema è con ciò dimostrato.

Da ciò che precede si ricava pure che *l'angolo tetraedro formato dai piani $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \beta'_4$ condotti da* H *perpendicolarmente alle mediane uscenti da* A_1, A_2, A_3, A_4 *è armonicamente circoscritto all'angolo quadrispigolo dei piani δ_{ij}*.

4. Vogliamo ora ricercare la relazione che passa tra le distanze di un punto P di un piano β'_1 dai 4 vertici del tetraedro. Siano A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 i simmetrici di $A_1 A_2 A_3 A_4$ rispetto a G, avremo allora:

$$3\overline{PA'_1}^2 = \overline{PA'_2}^2 + \overline{PA'_3}^2 + \overline{PA'_4}^2 \quad \text{ecc.}$$

(*) *Correspondance sur l'école polytechnique*, Vol. II. 1809.
(**) Sono i piani simmetrici dei piani radicali rispetto ai punti medii delle centrali.
(***) Cfr.: *A.* " Quelques théorèmes de géométrie „. *Nouvelles Annales de Math.*, pag. 17. 1897.
(****) Cfr.: la nota citata, pag. 13.

D'altra parte si ha

$$\left.\begin{aligned}\overline{PA_1}^2 + \overline{PA'_1}^2 = 2\overline{PG}^2 + 2\overline{GA_1}^2\\ \overline{PA_2}^2 + \overline{PA'_2}^2 = 2\overline{PG}^2 + 2\overline{GA_2}^2\\ \overline{PA_3}^2 + \overline{PA'_3}^2 = 2\overline{PG}^2 + 2\overline{GA_3}^2\\ \overline{PA_4}^2 + \overline{PA'_4}^2 = 2\overline{PG}^2 + 2\overline{GA_4}^2\end{aligned}\right\}$$

e sottraendo dal triplo della 1ª la somma delle altre tre, si ha:

$$3\overline{PA_1}^2 - (\overline{PA_2}^2 + \overline{PA_3}^2 + \overline{PA_4}^2) = 2\left\{3\overline{GA_1}^2 - (\overline{GA_2}^2 + \overline{GA_3}^2 + \overline{GA_4}^2)\right\}.$$

Ora, se indichiamo con G_1 il baricentro di $A_2A_3A_4$, si ha

$$\overline{GA_2}^2 + \overline{GA_3}^2 + \overline{GA_4}^2 = 3\overline{GG_1}^2 + \frac{1}{3}(\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_4A_2}^2).$$

Ed osservando che $GG_1 = \frac{1}{4}A_1G_1$, e che $A_1G = \frac{3}{4}A_1G_1$,

$$3\overline{GA_1}^2 - (\overline{GA_2}^2 + \overline{GA_3}^2 + \overline{GA_4}^2) = \frac{3}{2}\overline{A_1G_1}^2 - \frac{1}{3}(\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_4A_2}^2)$$

Inoltre: $\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_1A_4}^2 = 3\overline{A_1G_1}^2 - \frac{1}{3}(\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_4A_2}^2)$

Ricavando $\overline{A_1G_1}^2$ e sostituendolo nella espressione precedente, si trova dopo facili riduzioni

$$3\overline{PA_1}^2 - (\overline{PA_2}^2 + \overline{PA_3}^2 + \overline{PA_4}^2) = (\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_1A_4}^2) - (\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_4A_2}^2).$$

Analogamente per i punti dei piani β'_2, β'_3, β'_4.

L'ortocentro H *di un tetraedro* $A_1A_2A_3A_4$ *ha adunque la proprietà espressa dalle eguaglianze seguenti:*

$$3\overline{HA_i}^2 = \overline{HA_j}^2 + \overline{HA_k}^2 + \overline{HA_l}^2 + \delta_i \text{ per } i = 1, 2, 3, 4 \qquad (2)$$

ove δ_i *è la differenza tra la somma dei quadrati degli spigoli passanti per* A_i *e la somma dei quadrati degli altri tre spigoli.*

In particolare se gli spigoli opposti sono eguali si ha $\delta_i = 0$ e quindi H coincide con O. Si ha così un teorema noto per il tetraedro equifacciale (v. ad es.: Besso, *Periodico di matematica*, Vol. I).

5. Si sa che $\overline{HA_1}^2 + \overline{HA_2}^2 + \overline{HA_3}^2 + \overline{HA_4}^2 = 4R^2$, ove R è il raggio della sfera circoscritta al tetraedro (v. Intrigila, " Sul tetraedro „ *Rendiconti dell'Accademia Reale di Napoli*, § II, 1883). Tenendo conto anche della (2) si ricaverà

$$\overline{HA_i}^2 - R^2 = \frac{1}{4}\delta_i,$$

e da qui si deduce facilmente che: *i valori assoluti delle* δ_i *sono proporzionali alle projezioni della* GA_i *sulla retta* GO.

6. Supponiamo che tre dei vertici $A_2A_3A_4$ del tetraedro siano e fissi, che il quarto vertice A_1 si muova su un piano π, quale è l'inviluppo dei piani β_1?

Sul piano π disegniamo un circolo μ, e sia M il punto ove il suo asse r incontra uno dei piani β_1, quello corrispondente ad una certa posizione di A_1 su μ; si avrà: $3\overline{MA_1}^2 = \overline{MA_2}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2$. Se A'_1 è un altro punto di μ, per essere

$MA_1 = MA'_1$ si avrà: $3\overline{MA'_1}^2 = \overline{MA_2}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2$, e quindi il punto M si trova anche nel piano β_1 corrispondente al tetraedro $A'_1A_2A_3A_4$. Risulta così dimostrato che, quando il punto A_1 si muove sul circolo μ del piano π, i piani β_1 corrispondenti passano per un punto M inviluppando un cono di secondo grado. Reciprocamente un punto M dà luogo ad uno solo di siffatti coni, perchè non può esistere un altro circolo che dia luogo pure ad un cono di vertice M.

Facendo variare il circolo μ su π si avranno ∞^3 coni di secondo grado, i cui piani tangenti sono i piani β_1, ed i cui vertici sono tutti i punti dello spazio. Risulta da ciò dimostrato che l'inviluppo richiesto è una quadrica.

7. Nelle stesse condizioni del paragrafo precedente, quale è l'inviluppo dei piani β'_1 condotti dagli ortocentri perpendicolarmente alle mediane passanti per i vertici A_1? Dimostreremo che tali piani passano per uno stesso punto M.

Dal baricentro G_1 di $A_2A_3A_4$ si abbassi la perpendicolare G_1P al piano π, e sia M il punto ove essa incontra il piano β'_1 corrispondente ad un punto A_1 di π; si avrà: $\overline{MA_1}^2 = \frac{1}{3}(\overline{MA_2}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2) + \frac{1}{3}\delta_1$, ossia, sostituendo a δ_1 il suo valore, ed esprimendo la somma $\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2$ mediante A_1G_1:

$$\overline{MA_1}^2 = \frac{1}{3}(\overline{MA_2}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2) + \overline{A_1G_1}^2 - \frac{8}{9}(\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_4A_2}^2).$$

Sia ora A un punto qualunque di π; col centro P e raggio PA si descrive la circonferenza μ che incontra PA_1 in un punto A'_1. Avremo:

$$\overline{MA_1}^2 - \overline{MA'_1}^2 = \overline{GA_1}^2 - \overline{GA'_1}^2,$$

onde si potrà scrivere:

$$\begin{aligned}\overline{MA'_1}^2 &= \frac{1}{3}(\overline{MA_2}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2) + \overline{A'_1G_1}^2 - \frac{8}{9}(\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_4A_2}^2)\\ &= \frac{1}{3}(\overline{MA_2}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2) + \frac{1}{3}\delta'_1,\end{aligned}$$

ove δ'_1 è il δ_1 corrispondente ad A'_1 e ciò dimostra che il piano β'_1 corrispondente ad A'_1 passa pure M. Dal fatto poi che A si trova su μ risulta $MA = MA'_1$, d'onde si ricava facilmente che anche il piano corrispondente ad A passa per M. Così il teorema è dimostrato.

Nella memoria citata di Intrigila (§ 4° e 5°) si trova studiato il luogo degli ortocentri dei tetraedri, che è una quadrica.

8. Supponendo che i 4 punti $A_1A_2A_3A_4$ stiano su un piano, si hanno proprietà del quadrilatero. Invece dei piani γ_{ij}, δ_{ij} si avranno le rette g_{ij}, d_{ij}. Le rette g_{ij} sono i 6 lati di un quadrangolo che ha per vertici i centri dei cerchi circoscritti ai triangoli $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_4$ (triangoli parziali del quadrilatero). Le rette d_{ij} sono le simmetriche delle rette precedenti rispetto al baricentro G del quadrilatero, e quindi sono i lati di un altro quadrangolo. Nel caso particolare del quadrilatero inscrittibile (e solo allora) le rette G_{ij} concorrono in un punto O, e quindi le rette d_{ij} concorrono in un altro punto H simmetrico di O rispetto a G. Questo punto H, che si potrebbe chiamare l'ortocentro del quadrilatero inscrittibile, gode di parecchie altre proprietà (Cfr.: ad es.: GILLET, " Alcune proprietà del triangolo e del quadrangolo ", *Periodico*, pag. 147, 1895 e la 15ª quistione a concorso del *Supplemento al Periodico*, proposta dal prof. CARDOSO-LAYNES).

9. Anche nel piano si può considerare il luogo dei punti M tali che:

$$\overline{MA_l}^2 = \frac{1}{3}\left(\overline{MA_i}^2 + \overline{MA_k}^2 + \overline{MA_j}^2\right)$$

ove i, j, k, l sono indipendentemente dall'ordine i numeri 1, 2, 3, 4. Si avranno così 4 rette b_1, b_2, b_3, b_4, le quali soltanto nel quadrilatero inscrittibile concorrono in un punto; in generale però formano un quadrilatero armonicamente circoscritto al quadrangolo determinato dalle sei rette g_{ij} (v. la figura). Si ha così un mezzo semplice di costruire queste 4 rette.

10. Analogamente si troveranno 4 rette $b'_1 b'_2 b'_3 b'_4$ definite come i piani $\beta'_1 \beta'_2 \beta'_3 \beta'_4$; tali rette formano in generale un quadrilatero armonicamente circoscritto al quadrangolo determinato dalle 6 rette d_{ij}.

11. Se vi rimangono fissi 3 dei vertici, $A_2 . A_3 . A_4$ del quadrilatero dato, ed il 4° vertice A_1 si muove su una retta, l'inviluppo della retta b_2 è una conica e le rette b'_1 passano tutte per uno stesso punto.

G. Gallucci.

SUL BARICENTRO DEL TRONCO DI PRISMA TRIANGOLARE

Ill.mo Signor Direttore,

Nel fasc. V del *Periodico* di quest'anno ho letto una sua nota sul baricentro del tronco di prisma triangolare. A me pare che si possa dimostrare la quistione nella detta nota trattata, anche senza uscire dal campo della matematica elementare.

Conservo le notazioni adottate nel detto articolo, e suppongo noto anch'io, cosa del resto facilissima a dimostrarsi, che

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{c'}{a + b'}.$$

Allora il baricentro del tronco di prisma coincide con il baricentro dei punti K_1, K_2, ai quali sieno applicati rispettivamente i coefficenti c', $a' + b'$, ovvero i coefficienti proporzionali $4c'$, $4a' + b'$. Il punto $K_2 . 4(a' + b')$ (*) può riguardarsi come il baricentro dei punti $C' . (a' + b')$, $H_2 . 3(a' + b')$; e il punto $K_1 . 4c'$ come come il baricentro dei punti $C'' . 2c'$, $D . 2c'$. D essendo il punto medio di AB. Il piano CC'D taglia il triangolo A''B''C'', secondo la mediana C''E uscente da C'',

(*) Seguendo il Baltzer indico con $P . m$ il punto P affetto dal coefficiente m.

e se I è il punto comune a detta mediana e alla retta $C'D$, risulta subito dalla considerazione dei triangoli simili $IC'C''$, IDE, che

$$\frac{IC'}{ID} = \frac{2c'}{a' + b'},$$

e perciò $I.(a' + b' + 2c')$ può riguardarsi il baricentro dei punti $D.2b'$, $C'.(a' + b')$. E siccome è anche

$$\frac{IC''}{IE} = \frac{2c'}{a' + b'},$$

$I.(a' + b' + 2c')$ può ritenersi come il baricentro dei punti $C''.(a' + b')$, $E.2c'$: Infine $E.2c'$ è il baricentro dei punti $A''.c'$, $B''.c'$ e $H_2.3a' + b'$ è il baricentro dei punti $A'(2a' + b') + B(a' + 2b')$, e quindi il baricentro del tronco di prisma coincide con il baricentro dei punti

$$A''.(2a' + b' + c'), \quad B''.(a' + 2b' + c'), \quad C'.(a' + b' + 2c'),$$

che è quanto volevasi dimostrare.

S. Catania.

PROBLEMI DIVERSI

1. Sieno OA e OB due raggi perpendicolari fissi d'un circolo dato. La tangente in un punto variabile M del circolo incontri le rette OA e OB in P e Q. Sia S' il punto d'incontro della parallela ad OB condotta per P colla parallela ad OA condotta per Q. K la proiezione di S su PQ, K' la proiezione di K su OA, P' la proiezione di P sulla parallela PQ condotta per S', e H la proiezione di O su PP'.

1°. La curva luogo del punto K è una quartica unicursale. L'area compresa fra la curva e le rette OA, OB, KK' è equivalente a tre volte l'area del settore circolare MOA. L'area totale compresa fra la curva e i suoi asintoti è il triplo di quella del cerchio dato.

2°. Si costruisca il punto in cui la retta PP' tocca il suo inviluppo.

3°. Il luogo del punto P' è una quartica di cui l'area compresa fra la curva e gli asintoti è il triplo di quella del cerchio.

4°. Il luogo del punto H è un *cappa* di cui l'area compresa fra la curva e gli asintoti è equivalente all'area del cerchio.

2. La tangente in un punto M variabile d'un'ellisse incontra gli assi in T e T'; la normale in M li incontra in N, N'. Il luogo del centro dell'iperbole che passa per i punti T, T', N, N' ed ha i suoi assi paralleli a quelli dell'ellisse è una curva tale che l'area compresa fra essa ed i suoi asintoti è

$$\mathrm{U} = ab - \frac{2c^4}{ab} + \frac{3\pi c^4}{4ab}.$$

3. Sieno O il punto di regresso e Ox l'asse di simmetria di una cardioide, Oy la perpendicolare ad Ox, M un punto qualunque della cardioide, P e Q le sue proiezioni sopra Ox, Oy. Trovare le aree delle tre curve seguenti:

1° inviluppo di PQ;

2° luogo della proiezione di O su PQ;

3° luogo della proiezione di M su PQ.

Si costruiscano queste curve.

4. La tangente in punto M di un'ellisse di centro O incontra l'asse maggiore in P. Sia Q il punto d'incontro della parallela all'asse maggiore, condotta per M colla parallela a OM condotta per P, Q' il simmetrico di Q rispetto a P, S la proiezione di O su QQ', H e H' le proiezioni di Q e Q' sulla perpendicolare a MP condotta per P, K il punto d'incontro di PQ colla parellela condotta per M all'asse minore.

1°. Il luogo del punto Q è la quartica

$$x^2 = \frac{a^2(2b^2 - y^2)^2}{b^2(b^2 - y^2)}$$

(essendo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ l'equazione dell'ellisse data). e l'area compresa fra la curva ed i suoi asintoti è $\mathrm{U} = 3\pi ab$.

2°. Il luogo del punto Q' è la quartica

$$x^2 = \frac{a^2 y^4}{b^2(b^2 - y^2)};$$

e l'area compresa fra questa curva e gli asintoti è $\mathrm{U} = \pi ab$.

3°. Il luogo del punto S è la sestica

$$b^2 y^2 (x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2.$$

L'area compresa fra questa curva e i suoi asintoti è

$$\mathrm{U} = \frac{\pi a^2 (3a^2 - b^2)}{2b^2}.$$

4°. La retta PQ tocca il suo inviluppo in un punto che si ottiene nel modo seguente.

Si proietta M in I sull'asse maggiore, si prende il simmetrico I' di I rispetto a P. La parallela all'asse minore condotta per I' incontra la retta PQ nel punto cercato. Questa parallela incontra anche la retta PH nel punto in cui PH tocca il suo inviluppo.

5°. Il luogo del punto H è una curva unicursale; l'area compresa fra questa curva ed i suoi asintoti è

$$U = \frac{\pi}{2}(a^2 + 5b^2).$$

Si osservi che le aree delle curve 1 e 5 sono equivalenti per $a = b$ e per $a = 5b$.

6°. Il luogo del punto H' è una curva unicursale: l'area compresa fra questo ed i suoi asintoti è $U = \frac{\pi}{2}(a^2 - 3b^2)$.

7°. Il luogo del punto K è la sestica

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(a^2 - x^2)^3}{x^4}.$$

5. Si consideri un circolo di centro O e due punti A e A' fissi situati sopra uno stesso diametro a eguali distanze da O; e sia M un punto variabile del circolo.

1°. Il luogo dell'ortocentro del triangolo MAA' è una quartica; l'area compresa fra la curva ed i suoi asintoti è equivalente alla differenza per il doppio dell'area del cerchio di diametro AA' e l'area del cerchio dato.

2°. Il luogo del punto di Lemoive del triangolo MAA' e dei suoi punti associati si compone d'un'ellisse, d'una retta e di due quartiche.

6. Si consideri un'ellisse e e il circolo c concentrico a e ed avente per diametro la somma degli assi di e. Esistono infiniti triangoli ABC inscritti a c e circoscritti a e. Sian A', B', C' i punti di contatto dei lati BC, CA, AB con e:

1° la perpendicolare condotta per A su B'C' è normale ad un'ellisse fissa;

2° questa perpendicolare e la normale ad e in A' s'incontrano sopra un'ellisse fissa;

3° il luogo delle proiezioni di A su B'C' è una curva unicursale, della quale si domanda l'area:

4° le perpendicolari abbassate rispettivamente da A, B, C su B'C', C'A', A'B' concorrono in uno stesso punto. Si trovi l'area della curva luogo di questo punto.

7. Se si prendono per ordinata ed ascissa di un punto rispetto ad assi ortogonali le distanze del centro di un'ellisse della tangente e della normale in un punto variabile dell'ellisse medesima, si forma una quartica costituita di due ovali. L'area di ciascuno di questi è eguale a quella delle podaria del centro della sviluppata dell'ellisse.

E. N. Barisien.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI

501, 506, 507, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517

---

501. *Dimostrare che nella quartica avente per equazione (assi rettangolari)*

$$(x^2+y^2)^2-4ax(x^2-y^2)+4a^2(x^2-3y^2)=0.$$

1°. *Le quattro tangenti condotte alla curva da ognuno dei suoi due punti doppi* A *e* B *formano un fascio equiarmonico.*

2°. *Delle otto tangenti doppie, quattro sono immaginarie e quattro reali; queste ultime, due delle quali sono isolate, concorrono in un punto, e gli otto punti di contatto sopra un cerchio. Trovare le otto equazioni delle tangenti doppie.*

3°. *Se* P *è un punto arbitrario della quartica, l'ortocentro del triangolo* PAB *cade sulla curva.*

V. Retali.

Risoluzione del prof. A. Barozzini di Treviso.

Una retta $y=\lambda x$ passante per A taglia la quartica in punti le cui ascisse sono date da

$$(1+\lambda^2)^2x^2+4a(\lambda^2-1)x+4a^2(1-3\lambda^2)=0. \tag{1}$$

La retta è tangente se sono uguali le radici di (1), cioè se

$$3\lambda^4+5\lambda^2-1=0.$$

Se ε è il valore del rapporto anarmonico del fascio delle quattro tangenti si ha facilmente $\varepsilon^2-\varepsilon+1=0$, quindi il fascio è anarmonico come d. d.

Delle quattro tangenti due sono reali e due immaginarie, i contatti stanno sul cerchio $x^2+y^2+8ax-12a^2=0$, che contiene anche i punti J, J' della curva pei quali $x=0$.

Una retta per B $y=\mu(x-2a)$ tagliata la quartica nei punti le cui ascisse sono date da

$$(1+\mu^2)^2x^2+4a\mu^2(1-\mu^2)x+4a^2\mu^2(\mu^2-3)=0. \tag{2}$$

Tale equazione si ottiene dalla (1) mutando λ^2 in $\frac{1}{\mu^2}$; cioè se P_1 è un punto della quartica, vi è sempre un raggio BP_2 perpendicolare ad AP_1, essendo P_2 altro punto della quartica colla medesima ascissa di P_1. In altre parole P_2 ortocentro di ABP_1 sta sulla curva come d. d.

La retta $y=\mu(x-2a)$ è tangente se $\mu^4-6\mu^2-3=0$. Ciò dimostra ancora che le tangenti condotte per B sono perpendicolari ordinatamente a quelle per A, quindi sono uguali i rapporti anarmonici dei due gruppi di tangenti. Quelle per B sono pure due reali e due immaginarie ed hanno i loro contatti sul cerchio

$$x^2+y^2-4ax=0$$

passante per A e col centro in B.

L'equazione della quartica si può scrivere

$$[x^2+y^2+2ax-6a^2]^2=4a[2x-3a][x^2-3a^2].$$

Si hanno allora quattro tangenti reali, due isolate (la retta all'∞ tangente nei ciclici e la $x = +a\sqrt{+3}$) e due coi contatti reali. Gli otto contatti stanno sul cerchio $x^2 + y^2 + 2ax - 6a^2 = 0$ e le quattro tangenti concorrono nel punto all'∞ della perpendicolare ad AB.

Altra forma dell'equazione della curva è

$$[3y^2 + x^2 - 6ax + 6a^2]^2 = 4[3y^2(x^2 + y^2 - 2ax) + (x^2 - 3ax + a^2)^2].$$

Il secondo membro uguagliato a zero dà l'equazione complessiva delle quattro tangenti doppie immaginarie; il primo membro una ellisse che passa pegli otto contatti delle tangenti medesime. I doppi A;B sono coniugati rispetto tale conica.

Nota. — Il chiar.^{mo} prof. Retali ottiene la costruzione della quartica nel seguente modo: Una retta $x = m$ tagli in P_0 il cerchio $x^2 + y^2 - 3a^2 = 0$: centro P_0 si descriva un cerchio ortogonale a quello il cui diametro è AB, e che tagli la retta in P_1, P_2: tali punti appartengono alla quartica.

Ora aggiungo che le tangenti a tale curva in $P_1.P_2$ e la tangente al cerchio

$$x^2 + y^2 - 3a^2 = 0$$

in P_0, concorrono in un medesimo punto posto sulla retta $x = 3a - m$. Ciò dà un modo semplicissimo di tracciare le tangenti alla curva.

Inoltre i cerchi circoscritti ai triangoli AP_1P_2, BP_1R_2 sono uguali ed hanno i centri pure su cerchi uguali al cerchio $x^2 + y^2 - 3a^2 = 0$.

Finalmente la superficie compresa nei due cappii in cui è divisa la parte reale della curva ha per misura totale

$$a^2[4\sqrt{3} + 3\pi].$$

506. *Sono dati in un piano due cerchi K^2, C^2 ed AB sono i termini del diametro di K^2 sulla linea dei centri; da un punto variabile P di C^2 si conducono la perpendicolare p ad (AB) e la tangente (Pω) a K^2. Determinare il luogo dei punti d'intersezione di p con le rette (ωA), (ωB), che uniscono il punto di contatto ω con A e B.*

V. Retali.

Risoluzione del comandante E.-N. Barisien di Costantinopoli.

Sieno l'equazioni dei circoli K^2 e C^2 e delle rette Pω e p

(K^2) $$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \tag{1}$$
(C^2) $$(x - a)^2 + y^2 - R'^2 = 0, \tag{2}$$
$(P\varphi)$ $$x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi - R = 0, \tag{3}$$
(p) $$x = X, \tag{4}$$

essendo φ l'angolo del diametro di K^2, che passa per ω, col diametro AB. Conoscendo le coordinate di A (R, 0) e di ω (R cos φ, R sen φ), si deduce che l'equazione della retta (Aω) è

$(A\omega)$ $$X\,\mathrm{sen}\,\varphi + y(1 - \cos\varphi) = R\,\mathrm{sen}\,\varphi. \tag{5}$$

Si avrà il luogo del punto d'incontro di (Aω) con p, eliminando x, y e φ fra le ultime quattro equazioni. Facendo $x = X$ nelle (3) e (5), queste equazioni diventano

$$X\cos\varphi + Y\,\mathrm{sen}\,\varphi = R$$
$$Y\cos\varphi - (X - R)\,\mathrm{sen}\,\varphi = Y.$$

L'eliminazione di φ fra queste due ultime equazioni dà

$$[XY - YR]^2 + [Yy + R(X - R)]^2 = [Yy + X(X - R)]^2,$$

ossia

$$(X - R)^2 [X^2 - Y^2 - R^2 + 2Yy] = 0. \tag{6}$$

La retta $X - R = 0$ è evidentemente una soluzione estranea. Facendo $x = X$ nella (2) si ha

$$y = \sqrt{R^2 - (X - a)^2}.$$

L'equazione del luogo del punto d'incontro delle rette $(A\omega)$, p è dunque

$$X^2 - Y^2 - R^2 + 2Y\sqrt{R'^2 - (X - a)^2}$$

ovvero

$$(X^2 - Y^2 - R^2)^2 + 4Y^2 [(X - a)^2 - R'^2] = 0. \tag{7}$$

Facendo lo stesso calcolo per il luogo del punto d'incontro di $(B\omega)$ con p, si trova la stessa *quartica* (7). È una curva formata da due ovali.

Osservazione I. — Sia $(P\omega')$ la seconda tangente a K^2 uscente da P. Si vede geometricamente che le rette (ωA), $(B\omega')$ concorrono in Q su p, e che le rette (ωB), $(\omega' A)$ concorrono in Q' su p, poichè i quattro punti A, B, Q e Q' formano un *gruppo ortocentrico*. Ad ogni punto P di C^2, corrispondono dunque i due Q e Q' del luogo cercato. Siccome questo è evidentemente simmetrico rispetto alla retta dei centri, ne risulta che su di ogni retta P, si trovano quattro punti del luogo. Il luogo è dunque, *a priori* una quartica.

Osservazione II. — Se si rimpiazza il circolo C^2 con una retta, basta rimpiazzare y con una funzione lineare di X $(y = mx + p)$ nell'equazione (6). Il luogo sarà quindi l'iperbole equilatera

$$(X^2 - Y^2 - R^2) + 2Y(mX + p) = 0.$$

In una forma più generale, se la curva percorsa da P ha per equazione

$$y = F(x),$$

il luogo analogo a quello dell'enunciato sarà la curva

$$X^2 - Y^2 - R^2 + 2Y \, . \, F(X) = 0.$$

507. *Siano* G *e* g *polo e polare rispetto ad una conica immaginaria* ω. *Dato un punto* P *del piano di* ω, *sia* P' *il punto della retta* GP *che è reciproco di* P *rispetto ad* ω. *Trovare la condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva* ρ *del piano di* ω, *sia il luogo di* P' *quando* P *descriva una retta* r.

G. Marletta.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Sia K^2 la conica reale coniugata ad ω rispetto al punto G (e all'asse g): le polari p_1 e p' di P rispetto a K^2 e ad ω si segano sopra g e sono separate armonicamente mediante G e g. (*) I punti P_1 e P' ordinatamente reciproci di P rispetto a K^2 ed ω, e allineati con G, si corrispondono dunque nella omologia armonica avente G per centro e g per asse d'omologia; se P descrive una retta r, il luogo di P_1 è (teorema notissimo) la conica R^2 corrispondente ad r nella inversione di Hirst avente G per polo e K^2 per conica dei punti uniti, dunque il luogo di P' è la conica omologica armonica di R^2, G centro e g asse d'omologia; passa per G, per i due punti imaginari conjugati (r, ω) e pei due ove K^2 è segata dalla retta ch'è separata armonicamente da r mediante G e g.

509. *Dimostrare che*

$$\int_0^a \frac{x\sqrt[4]{x}\,.\,dx}{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{x}}} = \frac{35\,\pi\,a^2}{64}$$

E. N. BARISIEN.

Risoluzione del prof. V. Retali e del sig. V. Golisciani, studente della R. U. di Napoli.

Se poniamo

$$y = \frac{x\sqrt[4]{x}}{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}$$

si ha

(1) $$ay^4 = x\,(x^2 + y^2)^2:$$

l'integrale definito proposto rappresenta dunque l'area A compresa fra la curva (1) l'asse della x e l'assintoto reale d'inflessione, che è $x = a$; per determinare quest'area pongo $y = xt = x\,\mathrm{tg}\theta$: le equazioni parametriche della quintica razionale (1) sono dunque

(2) $$x = \frac{at^4}{(1+t^2)^2}, \quad y = \frac{at^5}{(1+t^2)^2},$$

e abbiamo successivamente:

$$dx = \frac{4\,at^3}{(1+t^2)^3}\,.\,dt$$

$$A = \int_0^a y\,dx = 4a^2 \int_0^\infty \frac{t^8}{(1+t^2)^5}\,.\,dt = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^8\theta\,d\theta;$$

osservando ora che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{sen}\theta)^{2n}\,d\theta = \frac{\binom{2n}{n}\,\pi}{2^{2n+1}}\,.$$

(*) RETALI, "Sulle coniche coniugate", teor. XIII (*Mem. della R. Acc. delle Scienze di Bologna*, T. VI_4, pag. 104; anno 1884), IDEM, "Osservazioni analitico-geometriche ecc.", (*ibid.* T. VII_4, pag. 12, anno 1886). In queste due mie note si trovano, con altri, quasi tutti i resultati ottenuti dal signor G. MARLETTA nella sua elegante nota "Sulle polarità piane", inserita recentemente in questo *Periodico* (Anno XV, pag. 144-150). Le quattro polarità piane considerate dal signor MARLETTA sono identiche al sistema di quattro *coniche armoniche* studiato ripetutamente da STEINER, CREMONA, SCHRÖTER, ROSANES, RUFFINI, BATTAGLINI, D'OVIDIO, SIACCI, VERONESE, CHR. WIENER e da me.

abbiamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^8\theta \, d\theta = \frac{\binom{8}{4}\pi}{2^9} = \frac{70\pi}{2.256}$$

e finalmente

$$A = \frac{35\pi}{256} \cdot 4a^2 = \frac{35\pi a^2}{64}.$$

510. *Sia A un punto d'incontro d'una parabola colla sua sviluppata. Il rapporto del raggio di curvatura della parabola e della sua sviluppata in questo punto è* $\sqrt{6}$.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Dalle equazioni $y^2 = 2px$ e $27py^2 = 8(x-p)^3$, della parabola e della sua sviluppata, abbiamo

$$4x^3 - 12px^2 - 15p^2x - 4p^3 = 0,$$

che può scriversi $(x = 4p) \cdot (2x + p)^2 = 0$. Le coordinate dei due punti *reali* d'incontro delle due curve sono dunque

$$x = 4p, \; y = \pm 2p\sqrt{2},$$

e quelle dei punti imaginari coniugati comuni

$$x = -\frac{p}{2}, \; y = \pm pi.$$

E ora ponendo nella solita formola $\rho = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} : y''$, per x' e y'' i loro valori troviamo per espressioni dei raggi di curvatura della parabola e della sviluppata in un punto (al finito) di ascissa x rispettivamente

$$\rho_1 = \frac{(2x+p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}, \quad \rho_2 = \frac{2(2x+p)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{x-p}}{3p\sqrt{2}}$$

e da queste

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 3\sqrt{\frac{p}{2(x-p)}},$$

che esprime un teorema più generale di quello enunciato nella quistione.

Per $x = 4p$ si trova $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6}$ e per $x = -\frac{p}{2}$ abbiamo $\frac{\rho_1}{\rho_2} = i\sqrt{3}$.

511. *Essendo data la cubica* $y^2 = \frac{x^3}{k}$, *si consideri il punto A della curva tale che l'ordinata AA' sia eguale all'ascissa OA'. Sieno B il centro di curvatura relativo ad A e B la proiezione di B sull'asse x.*

1°. *Se U designa l'area della cubica compresa fra l'arco OA, l'asse delle x e l'ordinata AA', e se U' rappresenta l'area della sua sviluppata compresa fra l'arco OB, l'asse x e l'ordinata BB', si ha*

$$\frac{U'}{U} = \frac{2768}{63}.$$

2°. *Se* S' *ed* S *indicano gli archi* OB *ed* OA, *si ha*

$$\frac{S}{S'} = \frac{2(13\sqrt{13} - 8)}{117\sqrt{13}}.$$

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Dalla $y^2 = \frac{x^3}{k}$ abbiamo, derivando due volte,

$$y' = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}},\quad y'' = \frac{3}{4k^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}}$$

e le coordinate (ξ, η) del centro di curvatura nel punto (x, y) sono

$$\xi = x - y'\,\frac{1 + y'^2}{y''} = -\,\frac{x(9x + 2k)}{2k}$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = \frac{4(3x + k)\sqrt{x}}{3\sqrt{k}},$$

dalle quali, ponendo $x = k$, troviamo per le coordinate del punto B, centro di curvatura relativo ad A (k, k),

$$\xi_0 = -\frac{11k}{2},\quad \eta_0 = \frac{16k}{3};$$

ma l'arco OB = S' della sviluppata essendo uguale al raggio di curvatura $\overline{AB}$, abbiamo subito

$$S' = \overline{AB} = \sqrt{\left(k + \frac{11k}{2}\right)^2 + \left(k - \frac{16k}{3}\right)^2} = \frac{k}{6}\,.\,13\sqrt{13}.$$

Calcoliamo ora l'arco S:

$$S = \int_0^k \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_0^k \sqrt{\left(1 + \frac{9x}{4k}\right)}\,dx$$

e, posto $4k + 9x = z$,

$$S = \frac{1}{18\sqrt{k}}\int_{4k}^{13k}\sqrt{z}\,.\,dz = \frac{k}{27}(13\sqrt{13} - 8)$$

dunque

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{13\sqrt{13} - 8}{27}\right)\cdot\frac{6}{13\sqrt{13}} = \frac{2(13\sqrt{13} - 8)}{117\sqrt{13}}.$$

L'area AOA' è espressa da

$$U = \int_0^k y\,dx = \frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^k x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2k^2}{5};$$

il calcolo di U' è meno breve ma pur facilissimo: abbiamo

$$U' = \int_0^{\frac{11k}{2}} \eta\,.\,d\xi = \frac{4}{3\sqrt{k}}\int_0^k (3x + k)\sqrt{x}.\,\left(1 + \frac{9x}{k}\right)dx$$

e successivamente

$$U' = \frac{16}{\sqrt{k}} \int_0^k x^{\frac{3}{2}}\, dx + \frac{36}{k^{\frac{3}{2}}} \int_0^k x^{\frac{5}{2}}\, dx + \frac{4k}{3\sqrt{k}} \int_0^k x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$U' = \frac{32k^2}{5} + \frac{72k^2}{7} + \frac{8k^2}{9} = \frac{5536k^2}{5 \,.\, 63},$$

dunque

$$\frac{U'}{U} = \frac{2768}{63}.$$

512. *Dimostrare che la retta avente per equazione*

$$x(1+t^2)^2 - 2ty = at^2(t^2-1)$$

inviluppa una cubica, allorchè t *varia.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Derivando rispetto a t la equazione data abbiamo

$$2t(1+t^2) \,.\, x - y = at(2t^2-1)$$

e risolvendo rispetto ad $x\,.\,y$ troviamo per le coordinate del punto di contatto della retta col suo inviluppo

$$x = \frac{at^2}{1+t^2}, \quad y = at;$$

che sono le equazioni parametriche della *cubica d'Agnesi*. Infatti eliminando t si ha subito $a^2x = (a-x)\,y^2$.

513. *Da un punto* P *della curva* d'Agnesi $\left(\textit{la cui equazione è } y^2 = \frac{a^2x}{a-x}\right)$ *si possono condurre sette normali alla curva. Dimostrare che:*

1°. *La somma delle distanze dei piedi di queste sette normali dell'asse di simmetria della curva è in un rapporto costante col loro prodotto;*

2°. *il luogo del punto* P *tale che la somma delle inverse delle distanze dei piedi delle normali dall'asse suddetto sia costante, è una retta.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Le equazioni parametriche dell'*Agnesiana* sono (v. risoluz. della quistione 512)

$$x = \frac{at^2}{1+t^2}, \quad y = at$$

e quella della tangente alla curva nel punto t è

$$x(1+t^2)^2 - 2ty = at^2(t^2-1);$$

la equazione della normale nel punto t è dunque

$$2t(1+t^2)\,x + (1+t^2)^3\,y = at(1+t^2)^3 + 2at^3$$

ossia, sviluppando e ordinando rispetto a t,

$$-at^7+yt^6-3at^5+3yt^4+(2x-5a)t^3+3yt^2+2xt+y=0;$$

il rapporto della somma al prodotto delle radici dell'ultima equazione è dunque 1, e la somma delle inverse delle radici è espresso da $-\frac{2x}{y}$; se ora osserviamo che il parametro t è proporzionale all'ordinata del piede della normale troviamo subito che il rapporto indicato nel teorema 1° è $1:a^6$ e che il luogo cui si accenna nel teorema 2° è la retta per l'origine

$$ky+2ax=0$$

dove k è la costante.

514. *Essendo* S, *la proiezione del centro di una iperbole equilatera* $xy=k^2$ *sulla tangente in un punto* M *e* S' *il simmetrico di* S *rispetto ad* M, *si dimostri:*

1° *che l'equazione del luogo di* S' *riferita agli assintoti è*

$$x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=2k;$$

2° *che l'area racchiusa fra gli assintoti e la curva è* $U=6k^2$.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. V. Retali e del sig. V. Golisciani, studente della R. U. di Napoli.

Sieno A e B i due punti ove la tangente in M sega rispettivamente gli assi Ox, Oy: posto $MO=\rho$, $\widehat{MOA}=\theta$ abbiamo $AM=MB=\rho$ e $\widehat{BAO}=\theta$. Le coordinate rettangolari X, Y di M sono

$$X=k\sqrt{\cot\theta},\quad y=k\sqrt{\operatorname{tg}\theta},$$

e quelle di S

$$x'=OS\cos(90^\circ-\theta)=k\sqrt{2\operatorname{sen}2\theta}\,.\operatorname{sen}\theta=2k\operatorname{sen}\theta\sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$
$$y'=OS\operatorname{sen}(90^\circ-\theta)=k\sqrt{2\operatorname{sen}2\theta}\,.\cos\theta=2k\cos\theta\sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta};$$

le coordinate (x,y) di S' son dunque

$$x=2X-x'=2k\sqrt{\cos\theta}\,.\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}=2k\cos^3\theta:\sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$
$$y=2Y-y'=2k\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\,.\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{\cos\theta}}=2k\operatorname{sen}^3\theta:\sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}:$$

queste sono le equazioni parametriche del luogo di S'; per eliminare θ, moltiplicando e dividendo membro a membro si ha

$$xy=4k^2\,.\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$$
$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}^3\theta$$

e dalla seconda di queste ultime,

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{y^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}}=y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}},\quad \cos\theta=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

e finalmente

$$xy = 4k^2 \frac{(xy)^{\frac{2}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^2},$$

$$(xy)^{\frac{1}{3}} \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^2 = 4k^2.$$

Per trovare l'area compresa fra le curve e gli assi positivi conviene servirsi delle equazioni parametriche: abbiamo

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{U} = \int_0^x y dx,$$

$$y = 2k \operatorname{sen}^{\frac{5}{2}}\theta \cos^{-\frac{1}{2}}\theta$$

$$dx = 2k \left(-\frac{5}{2} \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\theta \cos^{\frac{3}{2}}\theta - \frac{1}{2} \cos^{\frac{7}{2}}\theta \operatorname{sen}^{-\frac{3}{2}}\theta\right) d\theta$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{U} = 10k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta \, d\theta + 2k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta \cos^3\theta \, d\theta$$

e siccome $\int \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta \, d\theta = \frac{1}{4} \,.\, \operatorname{sen}^4\theta$, $\int \operatorname{sen}\theta \cos^3\theta \, d\theta = -\frac{1}{4} \cos^4\theta$,

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{U} = 10k^2 \left(\frac{1}{4}\right) + 2k^2 \left(\frac{1}{4}\right) = 3k^2.$$

515. *Sia dato un pentagono piano* 12345, *si conducano le diagonali* 13 *e* 14 *e* 25, *le due prime sieno tagliate dalla terza respettivamente in* 4′ *e* 3′, *si trovino i due punti che dividono armonicamente i segmenti* 24′ *e* 53′ *e si congiungano con* 1, *si ripete la stessa costruzione portando da ciascuno degli altri quattro vertici del pentagono. I dieci punti così ottenuti appartengono ad una stessa conica toccata dalle dieci rette.*

D. Valeri.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Consideriamo la conica, reale e immaginaria di prima specie, coniugata al triangolo 153′ e rispetto alla quale il punto 3 è polo della retta |42|: i due punti 4 e 2 intersezioni della retta |42| con le |13′|, |53′| sono respettivamente i poli rispetto a K^2 delle rette |35|, |31| le quali uniscono 3 con i punti 5 ed 1. La conica indicata nell'enunciato è dunque quella in rispetto alla quale ogni vertice del pentagono piano 14523 è polo del lato opposto. (Cfr. v. Staudt, *Geometrie der Lage*, p. 133, § 238.)

516. *Sia dato il triangolo* ABC *e sieno* A_1, B_1, C_1, *ed* H *i piedi e il punto d'incontro delle altezze. Sui lati* AB *ed* AC *si trovino le due coppie di punti (reali se l'angolo* A *è acuto, immaginari se ottuso) che sono equidistanti da* A *e che dividono armonicamente i segmenti* BC_1 *e* CB_1: *sulle altezze* BB_1 *e* CC_1 *si trovino le due coppie di punti equidistanti respettivamente da* B_1 *e* C_1 *e che dividono armo-*

nicamente i segmenti BH *e* CH. *Gli otto punti così ottenuti sono in un cerchio di centro* A *respettivamente al quale i poli delle altezze* BB_1 *e* CC_1 *sono respettivamente* C *e* B.

D. Valeri.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Il centro del cerchio conjugato rispetto a un triangolo dato è l'ortocentro del triangolo: dunque il cerchio A^2 conjugato rispetto al triangolo BHC ha A per centro e passa per gli otto punti indicati nell'enunciato del teorema che è così dimostrato.

Osservazione. — Si hanno così quattro cerchi A^2, B^2, C^2, H^2, *tre dei quali sono reali e l'altro* (relativo a quello dei punti A, B, C, H che è interno al triangolo formato dagli altri tre) *immaginario di prima specie. Ognuno dei quattro cerchi sega ortogonalmente gli altri tre* (è l'Jacobiano del sistema formato dagli altri tre), ha il centro in uno dei quattro punti A, B, C, H ed è conjugato al triangolo formato dagli altri tre: *due cerchi qualunque della quaterna si segano in due punti reciproci rispetto ad ognuno degli altri due. Se i tre cerchi reali sono per es.* A^2, B^2, C^2, se cioè il triangolo ABC è acutangolo, *le corde di questi cerchi parallele respettivamente ai lati* BC, CA, AB *sono eguali.* Proponiamo al lettore la dimostrazione di questi teoremi; la quaterna di cerchi ora considerata è importante anche perchè identica a quella dei cerchi focali di una quartica bicircolare e di una cubica ciclica. Cfr. " Sur le double contact etc. „ § 8; *Mem. de la Soc. royale des Sc. de Liége*, t. $XVIII_2$ e *Periodico di Matematica*, t. XIII, pag. 109.

517. *Costruite ancora le due prime coppie di punti come nell'esercizio precedente e determinate inoltre sulle altezze* BB_1 *e* CC_1 *le coppie di punti equidistanti respettivamente da* B *e da* C *e che dividono armonicamente i segmenti* B_1H, *e* C_1H *si hanno otto punti che sono in un'iperbole equilatera di centro* A *rispetto alla quale i poli delle altezze* BB_1 *e* CC_1 *sono respettivamente* C_1 *e* B_1.

D. Valeri.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Consideriamo la conica H_a^2 di centro A e conjugata al triangolo B_1C_1H; poichè B e C_1 sono reciproci rispetto ad H_a^2 questa passa pei due punti ove il cerchio A^2 (vedi la risoluzione della quistione precedente) è segato da |AB|, e analogamente si vede che H_a^2 passa per i due punti comuni ad A^2 e alla retta |AC|.

Poichè la retta $|CC_1|$ e la retta all'infinito sono respettivamente polari di B_1 ed A rispetto ad H_a^2, il polo di |AC| sarà il punto all'infinito di $|CC_1|$ e questa retta sega H_a^2 nei punti doppi della involuzione

$$(C_1, H \; ; \; C, \infty);$$

e analogamente si vede che H_a^2 sega la retta $|BB_1|$ nei punti doppi della involuzione

$$(B_1, H \; ; \; B, \infty).$$

La H_a^2 passa dunque per gli otto punti indicati nell'enunciato; per dimostrare poi che H_a^2 è equilatera osservo che, condotte pel centro A le rette $|AC_0|$, $|AB_0|$ respettivamente parallele a $|CC_1|$, $|BB_1|$, sono $|AC|, |AC_0|$ e $|AB|, |AB_0|$ due coppie di diametri conjugati, ma gli angoli CAC_0, BAB_0 hanno le medesime bisettrici, dunque gli assintoti di H_a^2 sono rettangolari.

QUISTIONI PROPOSTE

518. Se P_1, P_2, P_3 sono le proiezioni di P sui lati del triangolo ACB, determinare il luogo di P tale che le rette AP_1, BP_2, CP_3 siano concorrenti.

519. Determinare sull'asse della strofoide retta tre punti A, B, C tali che, per ogni punto P della curva, abbia luogo la relazione

$$\overline{PB}^2 = PA \, . \, PC.$$

A. Barozzini.

520. La curva rappresentata dall'equazione

$$(x^2 + 2y^2)^4 (x^2 + y^2) = a^4 x^6$$

ha la stessa area della lemmiscate di Bernouilli

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$$

521. Si considerino le due curve, di cui le equazioni polari sono

$$r = a \frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos \theta}, \qquad r = a \tan \theta,$$

e che rappresentano una *cissoide retta* ed una *cappa*. L'area limitata fra queste due curve, che sono asintotiche, è equivalente a quella del cerchio generatore della cissoide.

522. Dimostrare che:

1° se si prolungano i raggi vettori focali d'un ellisse, di assi $2a$ e $2b$, della lunghezza $\sqrt{b}\,(\sqrt{b} - \sqrt{b})$, il luogo degli estremi di questi raggi vettori è una curva, di cui l'area è doppia di quella dell'ellisse;

2° se si diminuiscono i raggi vettori focali della lunghezza $2b$, la curva luogo degli estremi di questi raggi accorciati ha area uguale a quella dell'ellisse.

523. La tangente e la normale in un punto M d'un ellisse incontrino in T ed N l'asse maggiore, e siano T' ed N' i simmetrici di T ed N rispetto al centro dell'ellisse. Quando M percorre l'ellisse:

1° la retta MN' è normale ad un elisse fissa;

2° il luogo del punto di mezzo del segmento MN' è un ellisse;

3° il luogo del punto di mezzo del segmento MT' è una curva, tale che l'area compresa fra essa ed i suoi assintoti è finita ed equivalente ad un quarto dell'aria dell'ellisse data.

524. La podaria di una cardioide rispetto al suo vertice è una sestica binodale, di cui l'area S ed il perimetro p sono

$$S = \frac{27\pi a^2}{32}, \quad p = 6a + a\sqrt{3} \, . \, L(\sqrt{3} + 2) = 8,756 \ldots a$$

essendo a la distanza fra il punto di regresso ed il vortice della cardioide.

E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

F. Enriques. — *Questioni riguardanti la Geometria elementare.* Bologna, Zanichelli, 1900.

L' idea di questa raccolta, è stata suggerita al chiarissimo prof. Enriques della Università di Bologna, come dichiara egli stesso nella prefazione, dalla raccolta di conferenze pubblicate dal Klein in occasione dell' Esposizione di Chicago.

E l' idea è veramente ottima. In quattordici articoli sono trattate da vari autori quasi tutte le quistioni più importanti, che interessano la geometria elementare, in guisa che ogni insegnante di scuole secondarie trova in questo libro il mezzo di mettersi al corrente di quanto interessa il suo insegnamento. — Ci proponiamo di analizzare più ampiamente in seguito almeno i più importanti fra i suddetti articoli, per ora ci limitiamo a dare l'elenco dei medesimi.

Articolo I. — *Enriques,* Sulla importanza scientifica e didattica delle quistioni che si riferiscono ai principi della geometria.

Articolo II. — *Amaldi,* Sui concetti di retta e di piano.

Articolo III. — *Guarducci,* Della congruenza e del movimento.

Articolo IV. — *Vitali,* Sulle applicazioni del postulato della continuità nella geometria elementare.

Articolo V. — *Amaldi,* Sulla teoria dell'equivalenza.

Articolo VI. — *Bonola,* Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non euclidee.

Articolo VII. — *Baroni,* Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici.

Articolo VIII. — *Daniele,* Sulla risoluzione dei problemi geometrici col compasso.

Articolo IX. — *Giacomini,* Sulla risoluzione dei problemi geometrici cogli istrumenti elementari.

Articolo X. — *Castelnuovo,* Sulla risolubilità dei problemi geometrici cogli istrumenti elementari.

Articolo XI. — *Enriques,* Sulle equazioni algebriche risolubili per radicali quadratici e sulla costruibilità dei poligoni regolari.

Articolo XII. — *Daniele,* Sulle costruzioni dell'ettadecagono regolare.

Articolo XIII. — *Conti,* Problemi di terzo grado: Duplicazione del cubo. Trisezione dell'angolo.

Articolo XIV. — *Calò,* Sui problemi triscendenti e in particolare sulla quadratura del circolo.

*DA GIORNALI E RIVISTE

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.

Vol. XXXV, disp. 1-6. — *C. Rosati,* Sulla superficie di Veronese e di Steiner. — *B. Levi,* Sulla trasformazione dell'intorno di un punto per una corrispondenza irrazionale fra due spazi. — *D. De Francesco,* Sul moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante. — *E. Almansi,* Sulla torsione dei cilindri cavi a spessore piccolissimo. — *M. Lerch,* Nouvelle formule pour la differentiation d'une certaine classe de séries trigonométriques. — *V. Volterra,* Sugli

N. B. — Gli articoli segnati con asterisco sono inviati dal Comitato di redazione dell'Associazione Mathesis.

integrali lineari dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti. — *F. Giudice,* Sulla metrica degli spazi a curvatura costante. — *E. Boggio,* Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.

Serie II, vol. XXXIII, fasc. 4-6. — *G. Celoria e C. Somigliana,* Eugenio Beltrami: cenni commemorativi. — *E. Pascal,* Sulle equazioni ai differenziali totali di ordine qualunque.

Rendiconti delle sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.

Nuova serie, vol. IV, fasc. 1°. — *F. P. Ruffini,* Linee radicali e punti radicali.

Memorie della pontificia Accademia dei nuovi Lincei.

Vol. XVI. — *P. T. Pepin,* Étude historique sur la théorie des residus quadratiques.

Annali di Matematica pura ed applicata.

Serie III, tomo IV, fasc. 1° e 2°. — *Bianchi,* Sulla deformazione dei paraboloidi di rotazione negli spazi di curvatura costante. — *Tanturri,* Ricerche sugli spazi plurisecanti di una curva algebrica. — *Calò,* Risoluzione di alcuni problemi sull'applicabilità delle superficie. — *Armanini,* Sulla superficie di minima resistenza. — *Dini,* Eugenio Beltrami (Cenno necrologico ed elenco dei suoi lavori).

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

Vol. XIV (1900), fasc. 1° e 2°. — *Appel,* Sur l'integration des équatiens du movement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal: cas particulier du cerceau. — *Korteweg,* Extrait d'une lettre à M. Appell. — *Pizzetti,* Sulla correzione da fare alle latitudini osservate per tener conto dell'altezza dei punti di stazione sul livello del mare. — *Ciani,* Un teorema sopra il covariante S della quartica piana. — *Petrovitch,* Sur l'expression du terme général des séries de Taylor représentant des combinaisons rationelles de la fonction exponentielle. — *id.,* Sur une classe d'equations différentielles du premier ordre. — *De Franchis,* Le superficie irrazionali di 4° ordine di genere gometrico-superficiale nullo. — *Gerbaldi,* Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane. (Parte seconda).

Il Pitagora, diretto da *G. Fazzari.*

Anno VI (1900), fasc. 7-8. — *R. Bettazzi,* I numeri limiti (continuaz. e fine). — *E. Trevisan,* Sul problema dei ponti di Königsberg: risoluzione del problema generalizzato. — *D. Gambioli,* Nota su alcune questioni di massimo e minimo (continuazione). — *C. Burali-Forti,* Questione di logica matematica. — Platone. — *D. Gambioli,* Esercizi sul trapezio isoscele circoscritto. — Dimostrazione geometrica della formula: tang $\frac{1}{2}$(A—B) : tang $\frac{1}{2}$(A—B) = $(a-b):(a+b)$. — *A. Bassi,* Appunti sulla sfera. — Progressione logaritmica. — Questioni.

Fasc. 9. — *C. Burali-Forti,* Sui simboli di logica matematica: nota 3ª. — Temi per concorso. — Relazione intorno ai lavori del concorso sui simboli di logica matematica. — Questioni.

Il Bollettino di matematiche e di scienze fisiche e naturali, diretto da *A. Conti.*

Num. 11. — *Bettazzi,* Grandezza, quantità e numero. — *Neri,* Mezzi di comunicazione e di trasporto. — *Buzzi,* La genesi del Calcolo Numerale attraverso l'evoluzione (contin.). — *Scoto,* Rivista Storica (contin.). — Rivista bibliografica.

Num. 12. — *Ciamberlini,* I giri viziosi nelle risoluzioni dei problemi numerici. — *Neri,* Mezzi di comunicazione e di trasporto (continuaz. e fine). — *Marangoni,* Lunghezza, area, volume. — *id.,* La nomenclatura per le quattro operazioni. — *Del Chicca,* Sull'insegnamento delle nozioni varie nelle Scuole Elementari (continuaz.). — Rivista bibliografica.

Num. 13-14. — Concorsi a premio. — *Bustelli*, Il postulato del movimento. — *Griffini*, I pesci luminosi dei nostri mari. — *Buzzi*, La genesi ecc. (continuaz.). — *Ciamberlini*, Esercizi di calcolo mentale per la 4ª e 5ª classe elementare. — *id.*, Didattica. — Rivista bibliografica. — Cronaca: Adunanza di professori di matematica tenuta in Bologna. — A proposito della prova scritta di matematica.

The Mathematical Gazette.

Vol. I, num. 21 (Maggio 1900). — *R. W. Genese*, Sul modo di insegnare le potenze con esponente qualunque; esame del modo migliore di dare la definizione di tali potenze nell'insegnamento secondario. — Rivista bibliografica. — *Percy J. Heawood*, Sulla proposizione fondamentale collegata all'annullarsi di un determinante: breve dimostrazione del teorema che la condizione acciocchè *n* equazioni lineari ad *n* incognite, omogenee, abbiano soluzioni diverse da zero è l'annullarsi del determinante dei coefficienti. — Problemi e soluzioni.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Anno V (1899), fasc. 4°. — Oltre ad articoli riguardanti le scienze naturali troviamo: *F. Pietzker*, Sistemi e metodi nell'insegnamento delle scienze esatte (continuazione e fine). — Recensione sulle opere: 1°. Primo periodo dell'insegnamento geometrico in Quarta (Ostern, 1896). 2°. Il secondo anno dell'insegnamento geometrico nel Ginnasio (Ostern, 1897) di *Schulte, Ernest W. G.* e su tre opere didattiche di *E. Schultz*, dedicate alle scuole operaie.

Fasc. 5° (1899). — *L. Kiepert*, Sulla matematica delle assicurazioni. (Fatta una breve storia dello sviluppo dell'idea dell'assicurazione, di cui trovansi tracce già presso gli antichi Greci e Romani, l'A. discute sui metodi che riguardano il calcolo dei premi). — *B. Habenicht*, Semplificazioni all'insegnamento geometrico, specialmente del primo anno. (Il metodo che l'A. sviluppa è fondato sulle seguenti norme: 1° di non servirsi di figure, bensì di modelli di carta, latta, fil di ferro, 2° di non stabilire mai una defininizione se non dopo aver fatto acquistare all'alunno un'esatta conoscenza dell'oggetto che si vuol definire, 3° di dedurre le proprietà degli enti da osservazioni empiriche e dalla considerazione di casi particolari, poichè " longum iter per praecepta et demonstrationes, breve per exempla „). — *A. Richter*, La nautica in relazione all'insegnamento trigonometrico [L'A. si propone di provare con alcuni esempi l'utilità di trattare, nell'insegnamento trigonometrico, problemi che si riferiscono alla nautica]. — Recensione dell'opera: *Erler*, Gli elementi delle coniche trattati sinteticamente, 5ª ediz. Teubner, Leipzig, 1898.

Fasc. 6° (1899). — *L. Kiepert*, Sulla matematica delle assicurazioni (cont. e fine). — *B. Schmidt*, Analogie fra i più importanti concetti e leggi della idrodinamica e della teoria dell'elettricità. — *B. Habenicht*, Semplificazioni ecc. (continuazione e fine). — Lavori del congresso dei Direttori dello Schlewig-Holstein sull'impartizione dell'insegnamento della matematica. — *K. A. Mayer*, Nuovo compasso parabolico. — Recensioni delle opere: *H. v. Helmholtz*, Lezioni di fisica teoretica, Vol. V. Lezioni sulla teoria elettromagnetica della luce. Hamburg e Leipzig, 1897. — *Fenkner, Dr. Hugo*, Manuale di geometria per l'insegnamento matematico negli Istituti superiori. Prima parte: Geometria piana. 3ª ediz. migliorata. Otto Salle, Berlin, 1897. — *Ganter, Dr. H. e Rudio, Dr. F.* Gli elementi della geometria analitica a uso degli Istituti superiori con numerosi esercizi. Prima parte: La geom. anal. del piano. 3ª ediz. migliorata. B. G. Teubner, Leipzig, 1897.

Giornale di Matematiche.

Maggio-Giugno (1899). — *Alcide da Porto*, Sulla generazione, per stelle reciproche, delle quadriche ad un numero qualunque di dimensioni (continuaz. e fine). — *Arturo d'Alessandro*, Sui Gruppi Hamiltoniani. (L'A. dopo aver riassunta una memoria di *Dedekind* (Ueber Gruppen, deren sämmtliche Theiler Normaltheiler sind Math. Ann. Bd. 48) dà delle nuove relazioni ed inoltre una semplice formola per calcolare il numero dei Gruppi Quaternioni contenuti nei Gruppi Hamiltoniani). —

Filippo de Astis, Un sistema di tre forme quadratiche binarie. (L'A., seguendo un procedimento già tenuto in una sua Nota pubblicata nel vol. XXXVI dello stesso Giornale, tratta la seguente questione: Date tre forme quadratiche binarie, vedere se esiste una sostituzione lineare tale che le forme trasformate risultino le derivate parziali seconde di una stessa forma biquadratica). — *Francesco Stasi*, Sui sistemi di due quartiche binarie derivabili da una medesima quintica. (Vien trattata in altra forma ed approfondita maggiormente una questione trattata dal *Salmon* nel § 225 delle Leçons d'Algèbre supérieure). — *L. Sinigallia*, Sulle superficie di area minima applicabili su se stesse (continuazione e fine). — *Franz Meyer*, Rapporto sullo stato presente della teoria degli invarianti (continuazione). Luglio-Agosto (1899). — *Franz-Meyer*, Rapporto ecc. (continuaz. e fine). — *G. Pirondini*, Simmetria ortogonale rispetto ad una linea qualunque (continuazione).

Settembre-Ottobre (1899). — *G. Pirondini*, Simmetria ecc. (continuaz. e fine.) — *Francesco Caldarera*, La meccanica in coordinate tetraedriche e triangolari. Novembre-Dicembre (1899). — *F. Caldarera*, La meccanica ecc. (continuaz. e fine). — *Alfredo Bassi*, Studio sulle funzioni di genere qualunque ecc. (continuaz. e fine). — *Guglielmo Giordano*, Sulle condizioni per l'esprimibilità della forma F (x^2, y^2) per mezzo di un quadrato esatto. — *V. Alberti*, Sulla funzion vettoriale di primo grado $\varphi\rho$.

*PUBBLICAZIONI MATEMATICHE ITALIANE RECENTI

A. Camosci (Romano Fiaschi, Ispettore scolastico) L'insegnamento dell'Aritmetica nelle scuole elementari, appunti e note per i maestri. Torino, Paravia, 1899.

S. Pincherle, Gli Elementi dell'Aritmetica ad uso delle scuole secondarie. Nona edizione. Bologna, Zanichelli, 1900. L. 2.

F. Viola, La Planimetria indipendente dal concetto di misura. Padova, Prosperini, 1899.

S. Vecchi, Sulla figura completa determinata da un numero qualunque di punti o da un numero qualunque di tangenti di una conica e sulle loro correlative nello spazio. Parma, Rossi-Ubaldi, 1899.

P. Fulcheris, Elementi di Geometria ad uso delle Scuole tecniche e normali. 17ª edizione. Torino, Paravia, 1900. L. 2.

C. Mandoli, Trattato di Algebra elementare ad uso dei licei. Seconda edizione. Napoli, Trani, 1900. L. 3,50.

F. Levi, Problemi elementari relativi ad alcuni casi di equivalenza di figure piane. Lodi, Dall'Avo, 1899. L. 0,50.

O. Müller, Tavole di logaritmi con cinque decimali. Sesta edizione aumentata delle tavole dei logaritmi di addizione e sottrazione per cura di *M. Rajna*. Milano, Manuali Hoepli, 1900.

E. Giorli, L'Aritmetica e la Geometria dell'operaio. Milano, Manuali Hoepli, 1900.

G. M. Testi, Nozioni di Geometria ad uso più specialmente delle allieve dei corsi complementari. Quarta edizione. Livorno, Giusti, 1900. L. 1.

A. W. Grube, Manuale per l'insegnamento del calcolo nelle scuole elementari secondo i principii del metodo inventivo. — Versione dal tedesco del prof. *A. Ambrosini*, coll'aggiunta di alcune lezioni pratiche di *A. C. Okler*. Torino, Paravia, 1900. L. 4.

S. Miele, Problema sulla costruzione d'un segmento circolare di data area. Firenze, Niccolai, 1900.

F. Enriques, Questioni riguardanti la Geometria elementare. Bologna, Zanichelli, 1900. L. 12.

PER EUGENIO BELTRAMI.

La facoltà di matematiche dell' Università di Roma si è costituita in comitato per onorare la memoria dell' illustre estinto, ed ha giustamente pensato che il monumento più duraturo, che si potesse immaginare è quello che egli si è costruito da sè stesso. — Il Comitato ha aperto quindi una sottoscrizione fra tutti i cultori della matematica allo scopo di pubblicare la raccolta completa delle opere di Eugenio Beltrami.

I sottoscrittori per almeno 50 lire riceveranno una copia delle opere complete di E. Beltrami.

CONCORSI A PREMIO

DEL R. ISTIT. VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI. — *Premio di fondazione Querini Stampalia.* - Concorso per l'anno 1902.

TEMA. — *I caratteri projettivi delle superficie algebriche a due dimensioni dello spazio ad n dimensioni.*

Tali caratteri e le loro relazioni numeriche sono già conosciuti per le curve algebriche anche di uno spazio ad n dimensioni. Sono pure stati studiati quelli delle superficie dello spazio ordinario ed alcuni delle superficie degli spazi superiori. Il tema propone la stessa ricerca generale per le superficie a due dimensioni dello spazio (lineare) ad n dimensioni.

Negli ultimi anni si è svolta la geometria sopra una superficie algebrica generale, per merito particolarmente di geometri italiani e francesi, tenendo conto dei caratteri della superficie che rimangono invariati per trasformazioni birazionali.

Geometricamente è pure importante di conoscere i caratteri che rimangono invariati per trasformazioni projettive, le relazioni fra loro, e come queste si modifichino col modificarsi di alcuni di essi.

Potranno anche essere premiate ricerche importanti che non risolvano completamente il tema. — Il concorso rimarrà aperto fino al 31 Dicembre 1902. — Il premio è di L. 3000.

Discipline relative a questo concorso. — Nazionali e stranieri, eccettuati i membri effettivi del Reale Istituto Veneto, sono ammessi al concorso. Le Memorie potranno essere scritte nelle lingue italiana, francese, tedesca ed inglese. Tutte poi dovranno essere presentate, franche di porto, alla Segreteria dell' Istituto medesimo.

Secondo l'uso, esse porteranno un'epigrafe, ripetuta sopra un viglietto suggellato, contenente il nome, cognome e domicilio dell'autore. Verrà aperto il solo viglietto della Memoria premiata: e tutti i manoscritti rimarranno nell'archivio del R. Istituto a guarentigia dei proferiti giudizi, con la sola facoltà agli autori di farne trarre copia autentica dalla Cancelleria dell' Istituto, a loro spese. Il risultato dei concorsi si proclama nell'annua pubblica solenne adunanza dell' Istituto.

La proprietà delle Memorie premiate resta agli autori, che sono obbligati a pubblicarle entro il termine di un anno, dietro accordo colla Segreteria dell' Istituto per il formato ed il caratteri della stampa, e per la successiva obbligatoria consegna di 50 esemplari delle medesime. Nella stampa del lavoro premiato, l'autore ha l'obbligo di premettere la intiera relazione della Giunta esaminatrice del R. Istituto. Il danaro del premio non potrà conseguirsi, se non dopo aver soddisfatto a queste prescrizioni.

L' Istituto, si mantiene il diritto di fare imprimere a proprie spese, quel numero qualunque di copie, che reputasse conveniente.

Avvertenza. — Ogni premiato dovrà pagare sotto forma di trattenuta sul premio aggiudicatogli, l'importo della tassa governativa di Ricchezza Mobile (93,15 per mille).

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 31 Luglio 1900.

Al momento in cui il *Periodico* stava per essere stampato, una funerea notizia ha immerso nel lutto tutta l'Italia.

UMBERTO I

il Re mite e generoso, il figlio del Re galantuomo, il discendente di una stirpe d'eroi, il gentile cavaliere della patria e della carità, ha esalato la sua grande anima sotto i colpi di un vile assassino.

La morte, che egli aveva sfidata imperterrito, e che non aveva osato colpirlo sul campo cruento di Custoza, presso ai letti dei colerosi di Busca e di Napoli, tra le rovine di Casamicciola e nelle inondazioni del Veneto, la morte che egli aveva sognato sul campo della gloria, per la grandezza della sua patria diletta, lo ha sorpreso a tradimento al terzo attentato, come un volgare tiranno: lui, il più liberale dei Re.

Tutta la parte sana della Nazione, ossia la gran maggioranza di essa, che a lui guardava come ad un faro, che nella unione indissolubile della Monarchia, eletta dai plebisciti, col popolo vedeva la grandezza d'Italia, rimane sbigottita e commossa dinanzi alla grande sventura, e si domanda con terrore, se la stella che presiede ai destini d'Italia, che dal campo fatale di Novara la guidò trionfante al Campidoglio, si sia offuscata; ma le parole che il morto Re rivolse al paese, appena assunto alla suprema dignità regale, e che pochi giorni fa, quasi presago della sua prossima fine, ripetè come suo testamento "*il Re è morto ma le istituzioni non muoiono*" si levano come promessa e speranza.

Non può ammettersi che l'opera grande del risorgimento e dell'unità d'Italia, opera di migliaia di martiri e d'eroi, opera di geni, che il destino creò per la fortuna della patria, sia messa a repentaglio per l'insano furore di un pazzo malvagio, e per l'infamia dei pochi malfattori che lo hanno pervertito, e gli hanno armato la mano.

Il sangue gentile di Savoia, iniquamente sparso, ricada, più che sul volgare assassino, su coloro che l'hanno spinto al delitto, su coloro che facendo balenare dinanzi agli occhi delle plebi incoscienti ideali utopistici, le hanno corrotte ed hanno scatenata la bufera. Come olocausto pacificatore, valga a rendere a tutti il senso della rettitudine, della verità e della giustizia; ed allora nel gelido avello le ossa del Re martire esulteranno per l'estremo servigio reso alla patria.

G. Lazzeri.

RICERCHE

sopra una nuova espressione di π in funzione di soli numeri primi e sulla fattoriale di un numero

---

> „Dicimus, fractionem illam $\dfrac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times \text{ec.}}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times \text{ec.}}$ seu $\dfrac{9\times25\times49\times81 \text{ ec.}}{8\times24\times48\times80 \text{ ec.}}$ in infinitum continuatam, esse ipsissimum quaesitum numerum $\square$ praecise ad quem ita se habet 1, ut Circulus ad Quadratum Diametri „.
>
> WALLIS, a. 1655 t. 1. p. 469.

1. Fra le molte formule d'approssimazione pel valore di π che furono date nel periodo 1650-1770, a cui appartiene la nascita dell'Analisi moderna, ve n'è una, abbastanza notevole, dovuta al matematico inglese Gio. Wallis, che si distingue dalle altre pel fatto che, invece di essere sotto forma di serie, è sotto forma di prodotto infinito. Questa formula è la seguente:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdots \qquad (1)$$

Orbene, partendo appunto da questa espressione, con opportune trasformazioni, si arriva ad esprimere π in funzione di soli fattori primi. Ed ecco la via da me seguìta:

2. Principiamo col moltiplicare i due membri della (1) per 2 ed avremo, aggruppando i termini due a due,

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7}\right) \left(\frac{8}{7} \cdot\right) \cdots$$

che possiamo anche scrivere, arrestandoci al termine n^{esimo},

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2n)^2}{3^2 . 5^2 . 7^2 \ldots\ldots (2n-1)^2 (2n+1)} \qquad (2)$$

3. Cerchiamo ora un'espressione, la quale ci permetta di calcolare il valore di π per n fissata ad arbitrio, senza fare le successive moltiplicazioni, indicate dalla (2).

Abbiamo intanto pel numeratore, pei primi n fattori,

$$(1 . 2)^2 . (2 . 2)^2 . (3 . 2)^2 \ldots\ldots (n . 2)^2,$$

e, mettendo da tutti in evidenza 2^2,

$2^2 . 2^2 \ldots\ldots$ ripetuto n volte, ossia 2^{2n}, moltiplicato pel quadrato della fattoriale di n: dunque

$$2^2 . 4^2 . 6^2 \ldots . (2n)^2 = 2^{2n} (n!)^2. \tag{3}$$

Prendiamo ora a considerare il denominatore

$$3^2 . 5^2 . 7^2 \ldots\ldots (2n-1)^2 (2n+1) :$$

esso è dato dal prodotto di due fattori: uno è il prodotto dei quadrati dei numeri dispari consecutivi, da 1 fino a $(2n-1)$; l'altro è $2n+1$: ossia è

$$\{1 . 3 . 5 . 7 \ldots\ldots (2n-1)\}^2 (2n+1) .$$

Ora evidentemente

$$\{1 . 3 . 5 . 7 \ldots\ldots (2n-1)\}^2 = \frac{\{1 . 2 . 3 . 4 \ldots . (2n-1)\}^2}{\{2 . 4 \ldots\ldots\ldots (2n-2)\}^2}$$

ossia

$$\frac{\{(2n-1)!\}^2}{\{2 . 4 \ldots\ldots (2n-2)\}^2} .$$

Ma dalla (3), sostituendo al posto di n, $(n-1)$, si ha

$$2^2 . 4^2 \ldots . (2n-2)^2 = 2^{2(n-1)} \{(n-1)!\}^2 ,$$

quindi

$$\{1 . 3 . 5 \ldots . (2n-1)\}^2 = \frac{\{(2n-1)!\}^2}{2^{2(n-1)}\{(n-1)!\}^2} \tag{4}$$

Sarà dunque per le (3) e (4)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\dfrac{\{(2n-1)!\}^2 (2n+1)}{2^{2(n-1)}\{(n-1)!\}^2}} = \lim_{n=\infty} \frac{2^{2n} . 2^{2(n-1)} (n!)^2 \{(n-1)!\}^2}{\{(2n-1)!\}^2 (2n+1)!}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{2^{2(2n-1)}}{2n+1} . \frac{(n!)^2 \{(n-1)!\}^2}{\{(2n-1)!\}^2}$$

e dividendo numeratore e denominatore per $\{(n-1)!\}^2$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2^{2(2n-1)}}{2n+1} . \frac{(n!)^2}{n^2 (n+1)^2 \ldots . (2n-1)^2} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n-1}\, n!}{n(n+1) \ldots\ldots\ldots (2n-1)} \right\}^2 =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n-1} (n-1)!}{(n+1)(n+2) \ldots . (2n-1)} \right\}^2 .$$

Moltiplichiamo ora i due termini della frazione fra parentesi per $2n$: si ha

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n=\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{2^{2n}\,n\,!}{(n+1)\ldots.2n}\right\}^2.$$

Ma

$$(n+1)(n+2)\ldots.2n=\frac{2n\,!}{n\,!},$$

quindi

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n=\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{2^{2n}\,n\,!}{\frac{2n\,!}{n\,!}}\right\}^2=\lim_{n=\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{2^{2n}\,(n\,!)^2}{2n\,!}\right\}^2,$$

da cui

$$\pi=\lim_{n=\infty}\frac{2^{4n+1}}{2n+1}\left\{\frac{(n\,!)^2}{2n\,!}\right\}^2. \tag{5}$$

4. A questo punto, prima di procedere oltre nelle nostre ricerche, è necessario fare alcune considerazioni

Sulla fattoriale di n.

5. La fattoriale di un numero è il prodotto del numero stesso e di tutti quelli che lo precedono. È naturale quindi che la via più semplice che si presenta alla mente per calcolare la fattoriale di un numero n, sia quella di moltiplicare per n la fattoriale del numero precedente $(n-1)$. Però, a bene osservare, si capisce facilmente che se questo mezzo può riuscire comodo e celere nel caso che il numero n sia piccolo; oppure che, pei calcoli che si devono fare, sia necessario trovare la fattoriale di tutti i numeri successivi da 2 fino all' $(n-1)$esimo, ciò nondimeno esso ha due difetti essenziali: il primo che, per la grandezza dei prodotti che, anche per fattoriali di numeri piccoli, si ottengono (*), le operazioni riescono oltremodo lunghe e laboriose, e quindi più numerose sono le cause d' errore: secondariamente poi, quando si vogliano le fattoriali di numeri isolati, senza tener conto di quelle dei precedenti, riesce inutile, per non dire dannoso, il lunghissimo calcolo che bisogna premettere. Mi sono quindi proposto, osservato che, nella fattoriale di un numero, compare il prodotto di tutti i numeri primi ad esso inferiori, di esprimere la fattoriale stessa mediante il prodotto di essi numeri primi, elevati ad opportune potenze.

(*) Ad esempio, la fattoriale di 25 è espressa da un numero di 26 cifre.

6. E, principiando dal 2, osserviamo che, in una successione di n numeri consecutivi, ce ne sono $\frac{n}{2}$ multipli del 2, intendendo che, se n è dispari, si debba prendere per $\frac{n}{2}$ la parte intera del quoziente: in ambedue i casi di n pari e dispari, possiamo rappresentare con

$$E\,\frac{n}{2}$$

il numero dei multipli di 2 contenuti in n, introducendo il simbolo di Legendre indicante numero intero.

Mettendo allora in evidenza 2 da ognuno di questi $E\,\frac{n}{2}$ fattori, si ha

$$2^{E\frac{n}{2}};$$

rimangono poi le potenze di 2, le quali si seguono di 4 in 4: da queste alla lor volta mettendo in evidenza 2, avremo

$$2^{E\frac{n}{4}},$$

e così successivamente, finchè si arrivi ad un esponente

$$E\,\frac{n}{P_2}=1\,.$$

Possiamo dunque concludere che, nella fattoriale di n, il 2 compare all'esponente

$$E\,\frac{n}{2}+E\,\frac{n}{4}+E\,\frac{n}{8}+\ldots\ldots+E\,\frac{n}{P_2},$$

indicando con P_2 la massima potenza del 2 contenuta in n.

Del pari, consideriamo che in n numeri consecutivi ce ne sono $E\,\frac{n}{3}$ multipli del 3: levati questi, e messo così in evidenza

$$3^{E\frac{n}{3}},$$

rimangono sempre le potenze del 3, che si seguono di 9 in 9 e che ci dànno

$$3^{E\frac{n}{9}}$$

e così di seguito, fino a

$$3^{E\frac{n}{P_3}},$$

dove

$$E\,\frac{n}{P_3}=1\,.$$

Avremo dunque che il 3 compare nella fattoriale di n all'esponente

$$E\,\frac{n}{3}+E\,\frac{n}{9}\ldots\ldots+E\,\frac{n}{P_3}\,.$$

Analogamente per il 5, che ci dà l'esponente

$$E\frac{n}{5}+E\frac{n}{25}+\ldots+E\frac{n}{P_5},$$

e per gli altri numeri primi successivi, fino al massimo contenuto in n, che indicheremo con p e che ha per esponente

$$E\frac{n}{p}+E\frac{n}{p^2}+\ldots+E\frac{n}{P_p}\cdot$$

Avremo dunque, riassumendo

$$n\,!=2^{E\frac{n}{2}+E\frac{n}{4}+\ldots+E\frac{n}{P_2}}\,.\,3^{E\frac{n}{3}+E\frac{n}{9}+\ldots+E\frac{n}{P_3}}\ldots p^{E\frac{n}{p}+E\frac{n}{p_2}+\ldots+E\frac{n}{P_p}}$$

e, raccogliendo tutto in una sola espressione.

$$n\,!=\prod_{p=2}^{p=p} p^{E\frac{n}{p}+E\frac{n}{p_2}+\ldots+E\frac{n}{P_p}}, \tag{6}$$

dove, come abbiamo detto. P_p rappresenta la massima potenza del valore che si dà a p, minore od eguale ad n.

7. *Esempi.* — Supponiamo che si voglia trovare $10\,!$ Applicando la (6) abbiamo

$$10\,!=2^{5+2+1}\,.\,3^{3+1}\,.\,5^2\,.\,7=256\,.\,81\,.\,25\,.\,7=3.628.800.$$

Così, costruiamo $15\,!$ Sarà

$$15\,!=2^{7+3+1}\,.\,3^{5+1}\,.\,5^3\,.\,7^2\,.\,11\,.\,13=2048\,.\,729\,.\,125\,.\,49\,.\,11\,.\,13=$$
$$=1.307.674.368.000,$$

come si trova direttamente. (Cfr. le tavole in fine della memoria.)

8. Riprendiamo ora la formula (5) che ci dava il valore di π, e guardiamo come si trasforma mediante la (6).

Dalla (6), cambiando n in $2n$ si ha

$$2n\,!=2^{E\frac{2n}{2}+E\frac{2n}{4}+\ldots+E\frac{2n}{P_2}+E\frac{2n}{2P_2}\ldots}\ldots p^{E\frac{2n}{p}+\ldots+E\frac{2n}{P_p}+E\frac{2n}{pP_p}}\,.\,p'^{E\frac{2n}{p'}+\ldots+E\frac{2n}{P_{p'}}}$$
$$\ldots\mu^{E\frac{2n}{\mu}+\ldots+E\frac{2n}{P_\mu}},$$

dove con p' indico il numero primo che immediatamente segue p, e e con μ il massimo numero primo $=$ o $<$ di n.

Dico però che " di tutti i termini seguenti ad $E\frac{2n}{P_p}$ soltanto il primo, cioè

$$E\frac{2n}{pP_p},$$

può sussistere, ed in questo caso è sempre eguale ad 1: gli altri tutti sono sempre eguali allo zero ".

Vediamo dunque, prima di tutto, quando sussiste il termine

$$E\frac{2n}{pP_p},$$

cioè, in altre parole, sotto quali condizioni si ha

$$E\frac{2n}{pP_p}=1 \quad \text{ossia} \quad \frac{2n}{nP_p}=1:$$

dimostreremo poi che

$$E\frac{2n}{p^q P_p}=0$$

per qualunque valore di q diverso di da 1.

Intanto, se deve essere

$$\frac{2n}{pP_p}=1, \tag{α}$$

sarà pure

$$2n=pP_p \qquad \text{da cui } P_p=\frac{2n}{p} \text{ ed } n=\frac{pP_p}{2},$$

quindi, perchè si verifichi la (α) deve essere

$$P_p \leqq \frac{2n}{p}:$$

nel caso poi che fosse

$$P_p > \frac{2n}{p},$$

sarebbe

$$E\frac{2n}{pP_p}=0$$

e quindi, nel caso nostro, trascurabile. Osserviamo qui che, nel caso di $p=2$, si ha sempre

$$E\frac{2n}{2P_2}=1.$$

Devo ora dimostrare che non può essere

$$E\frac{2n}{pP_p}>1.$$

Per questo, supponiamo per un momento che si avesse

$$\frac{2n}{pP_p}=q \text{ (*)}:$$

sarebbe allora

$$n=\frac{pq}{2}P_p$$

e P_p non sarebbe più la massima potenza di p contenuta in n.

(*) Si suppone $q \neq 1$.

Con un ragionamento analogo si dimostra che, per qualunque valore di q diverso da 1, si ha

$$\mathrm{E}\,\frac{2n}{p^q\,\mathrm{P}_p}=0\,.$$

Infatti, supponiamo che si avesse

$$\mathrm{E}\,\frac{2n}{p^q\,\mathrm{P}_p}=r$$

dove r è diverso da zero. Sarebbe allora

$$n=\frac{rp^q\,\mathrm{P}_p}{2}$$

ed n conterrebbe un'altra potenza di p maggiore di P_p, contrariamente all' ipotesi.

9. Premesso questo, possiamo scrivere

$$2n\,!=2^{\mathrm{E}\frac{2n}{2}+\ldots+\mathrm{E}\frac{2n}{2\mathrm{P}_2}}\,.\,3^{\mathrm{E}\frac{2n}{3}+\ldots+\mathrm{E}\frac{2n}{3\mathrm{P}_3}}\ldots\,p^{\mathrm{E}\frac{2n}{p}+\ldots+\mathrm{E}\frac{2n}{p\mathrm{P}_p}}\,,$$
$$p'^{\,\mathrm{E}\frac{2n}{p'}+\ldots+\mathrm{E}\frac{2n}{\mathrm{P}_{p'}}}\ldots\,\mu^{\mathrm{E}\frac{2n}{\mu}+\ldots+\mathrm{E}\frac{2n}{\mathrm{P}_\mu}}\,.$$

Ebbene, io dico che gli esponenti dei numeri primi successivi a p, quando sussistono, sono sempre eguali all'unità „.

Prendiamo, p. es. a considerare l'esponente di p': esso è dato da

$$\mathrm{E}\,\frac{2n}{p'}+\mathrm{E}\,\frac{2n}{p'^2}+\ldots+\mathrm{E}\,\frac{2n}{\mathrm{P}p'}\,,$$

dove è evidente che la parte intera più grande è quella del primo addendo. Orbene, se arrivo a dimostrare che questa non può essere maggiore di 1, resterà pure dimostrato che tutte le altre saranno eguali a zero, e che l'esponente di p' è 1.

Rammentiamo per questo che p' rappresenta il primo numero primo successivo ad n: abbiamo dunque

$$p'>n$$

quindi

$$2p'>2n$$

$$\frac{2n}{2p'}<1$$

$$\frac{2n}{p'}<2$$

e per conseguenza

$$\mathrm{E}\,\frac{2n}{p'}=1 \qquad\qquad \text{c. d. d.}$$

Analogamente per gli esponenti di tutti gli altri numeri primi maggiori di p'; quindi finalmente possiamo scrivere

$$2n\,! = 2^{E\frac{2n}{2}+\ldots+E\frac{2n}{2P_2}} \,.\, 3^{E\frac{2n}{3}+\ldots+E\frac{2n}{3P_3}} \ldots . p^{E\frac{2n}{p}+\ldots+E\frac{2n}{pP_p}} . p' \ldots . \mu \quad (7)$$

10. D'altra parte, sempre per la (6), abbiamo

$$(n\,!)^2 = 2^{2E\frac{n}{2}+2E\frac{n}{4}+\ldots+2E\frac{n}{P_2}} \ldots . p^{2E\frac{n}{p}+\ldots+2E\frac{n}{P_p}} ,$$

quindi

$$\frac{(n\,!)^2}{2n\,!} = \frac{2^{2E\frac{n}{2}+\ldots+2E\frac{n}{P_2}} \ldots . p^{2E\frac{n}{p}+\ldots+2E\frac{n}{P_p}}}{2^{E\frac{2n}{2}+\ldots+E\frac{2n}{P_2}+E\frac{2n}{2P_2}} \ldots . p^{E\frac{2n}{p}+\ldots+E\frac{2n}{P_p}+E\frac{2n}{pP_p}} . p' \ldots . \mu}$$

che possiamo anche scrivere

$$\frac{(n\,!)^2}{2n\,!} = \frac{1}{2^{E\frac{2n}{2P_2}} . 3^{E\frac{2n}{3P_3}} \ldots p^{E\frac{2n}{pP_p}} . p' \ldots \mu} \times \frac{2^{2E\frac{n}{2}+\ldots+2E\frac{n}{P_2}} \ldots p^{2E\frac{n}{p}+\ldots+2E\frac{n}{P_p}}}{2^{E\frac{2n}{2}+\ldots+E\frac{2n}{P_2}} \ldots p^{E\frac{2n}{p}+\ldots+E\frac{2n}{P_p}}} \quad (8)$$

Ora il secondo di questi fattori possiamo metterlo sotto la forma

$$\frac{1}{2^{\left(E\frac{2n}{2}-2E\frac{n}{2}\right)+\ldots+\left(E\frac{2n}{P_2}-2E\frac{n}{P_2}\right)} \ldots p^{\left(E\frac{2n}{p}-2E\frac{n}{p}\right)+\ldots+\left(E\frac{2n}{P_p}-2E\frac{n}{P_p}\right)}} \quad (9)$$

11. Vogliamo adesso considerare quali saranno i valori di queste singole differenze che compaiono all' esponente, dato il valore di n. È chiaro intanto che, qualunque sia il valore di n e di P_p, si potranno verificare due soli casi

$$E\frac{2n}{P_p} - 2E\frac{n}{P_p} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} . \quad (\alpha)$$

Guardiamo quando si verifica l' uno piuttosto che l'altro. Principiamo per questo dall'osservare che, dato un numero n a piacere, lo possiamo sempre mettere sotto la forma (dal momento che n deve essere maggiore di P_p, altrimenti la parte intera non sarebbe più 1)

$$kP_p + a , \quad (\beta)$$

dove k ed a sono numeri interi e positivi e di più

$$a < k .$$

Allora dico che " se si ha

$$a \geq \frac{P_p}{2} , \ (*)$$

(*) Qui possiamo mettere addirittura $\frac{P_p}{2}$ invece di $E\frac{P_p}{2}$, perchè, essendo, come abbiamo supposto, a intero, se deve essere maggiore di $\frac{P_p}{2}$, è naturale che, nel caso che questo contenga anche una parte frazionaria, sarà a fortiori

$$a > E\frac{P_p}{2} .$$

sarà

$$E\frac{2n}{P_p}-2E\frac{n}{P_p}=1;$$

se invece

$$a<\frac{P_p}{2}$$

sarà

$$E\frac{2n}{P_p}-2E\frac{n}{P_p}=0\,..$$

Infatti principiamo dal considerare

$$\frac{2n}{P_p},$$

ed al posto di n sostituiamo il suo valore dato dalla (β).

Si avrà

$$\frac{2n}{P_p}=\frac{2k\,P_p}{P_p}+\frac{2a}{P_p}=2k+\frac{2a}{P_p}\,.$$

Ora, essendo per ipotesi k intero, sarà tale anche $2k$: bisogna dunque per trovare $E\frac{2n}{P_p}$, considerare il secondo addendo $\frac{2a}{P_p}$. Ora qui si vede subito che, se $2a\geq P_p$ ossia $a\geq\frac{P_p}{2}$, è

$$E\frac{2a}{P_p}=1:$$

in questo caso dunque sarà

$$E\frac{2n}{P_p}=2k+1:$$

se invece $2a<P_p$ ossia $a<\frac{P_p}{2}$, sarà

$$E\frac{2a}{P_p}=0$$

e quindi

$$E\frac{2n}{P_p}=2k.$$

Passiamo ora a considerare

$$2E\frac{n}{P_p}\,.$$

Abbiamo intanto, colla stessa sostituzione di prima,

$$\frac{n}{P_p}=\frac{kP_p}{P_p}+\frac{a}{P_p}=k+\frac{a}{P_p}\,.$$

Ma k è intero: bisogna dunque cercare in quali casi $\frac{a}{P_p}$ è intero.

Si vede però subito che per $a > \frac{P_p}{2}$, si ha

$$E\frac{a}{P_p} = 0$$

e quindi

$$E\frac{n}{P_p} = k$$

e

$$2E\frac{n}{P_p} = 2k;$$

per $a < \frac{P_p}{2}$ si ha a fortiori

$$E\frac{a}{P_p} = 0,$$

onde, in ogni caso,

$$2E\frac{n}{P_p} = 2k.$$

Riassumendo, abbiamo

$$\text{per } a \geq \frac{P_p}{2} \begin{cases} E\frac{2n}{P_p} = 2k + 1 \\ 2E\frac{n}{P_p} = 2k, \end{cases}$$

quindi

$$E\frac{2n}{P_p} - 2E\frac{n}{P_p} = 1;$$

$$\text{per } a < \frac{P_p}{2} \begin{cases} E\frac{2n}{P_p} = 2k \\ 2E\frac{n}{P_p} = 2k \end{cases}$$

quindi

$$E\frac{2n}{P_p} - 2E\frac{n}{P_p} = 0$$

c. d. d.

Servendoci dunque di questo criterio, possiamo, dato n, trovare a priori gli esponenti dei singoli fattori che compaiono nel denominatore della (9).

12. Per fare un'applicazione di quanto abbiamo detto fin qui, supponiamo di dover calcolare

$$\frac{(10!)^2}{20!}.$$

La formula (8) mediante la (9) ci dà

$$\frac{(n!)^2}{2n!}=\frac{1}{2^{E\frac{2n}{2P_2}}\,.\,3^{E\frac{2n}{3P_3}}\ldots p^{E\frac{2n}{pP_p}}\,.\,p'\ldots\mu}\times$$

$$\times\frac{1}{2^{\left(E\frac{2n}{2}-2E\frac{n}{2}\right)+\ldots+\left(E\frac{2n}{P_2}-2E\frac{n}{P_2}\right)}\ldots p^{\left(E\frac{2n}{p}-2E\frac{n}{p}\right)+\ldots+\left(E\frac{2n}{P_p}-2E\frac{n}{P_p}\right)}}. \quad (10)$$

Nel caso nostro, ricordando che p' è il primo numero primo $>n$, e che μ è il più grande dei numeri primi $<2n$, il primo fattore sarà

$$\frac{1}{2\,.\,11\,.\,13\,.\,17\,.\,19},$$

giacchè per le osservazioni fatte al § 8, gli esponenti dei numeri primi 3, 5, 7 sono eguali allo zero.

Passiamo ora al secondo fattore: i numeri primi comparenti al denominatore saranno

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,$$

giacchè p ci indica il massimo numero primo $<n$.

Quanto agli esponenti, facciamo le seguenti considerazioni: intanto

$$\begin{aligned} P_2&=8\\ P_3&=9\\ P_5&=5\\ P_7&=7: \end{aligned}$$

avremo poi per l'esponente di 2

$$\left(E\frac{20}{2}-2E\frac{10}{2}\right)+\left(E\frac{20}{4}-2E\frac{10}{4}\right)+\left(E\frac{20}{8}-2E\frac{20}{8}\right);$$

ma il primo di questi addendi, essendo

$$10=5.2+0$$

e quindi

$$a<\frac{2}{2},$$

è eguale a zero; il secondo, essendo

$$10=2.4+2$$

e quindi

$$a=\frac{4}{2},$$

è eguale ad 1; il terzo, essendo

$$10=1.8+2$$

e quindi

$$a<\frac{8}{2},$$

è eguale a zero; dunque si ha

$$2^{0+1+0}=2.$$

Analogamente, l'esponente di 3 sarebbe

$$\left(E\frac{20}{3}-2E\frac{10}{3}\right)-\left(E\frac{20}{9}-2E\frac{10}{9}\right);$$

ed applicando la stesso criterio

$$10=3.3+1$$

quindi $a<\frac{3}{2}$, ed il primo addendo $=0$;

$$10=1.9+1$$
$$a<\frac{9}{2}$$

e il secondo addendo $=0$; quindi si ha

$$3^{0+0}=1.$$

Passiamo finalmente al 5: abbiamo

$$5^{\left(E\frac{20}{5}-2E\frac{10}{5}\right)}$$
$$10=2.5+0$$

dunque $a<\frac{5}{2}$ e l'esponente $=0$.

In conclusione, il secondo fattore è dato da

$$\frac{1}{2};$$

quindi

$$\frac{(10!)^2}{20!}=\frac{1}{2^2.11.13.17.19}=\frac{1}{184.756}.$$

Cerchiamo quello che si avrebbe col metodo diretto. Applicando la (6), si ha

$$10!=2^{E\frac{10}{2}+E\frac{10}{4}+E\frac{10}{8}}.3^{E\frac{10}{3}+E\frac{10}{9}}.5^{E\frac{10}{5}}.7=2^8.3^4.5^2.7.$$

donde

$$(10!)^2=2^{16}.3^8.5^4.7^2.$$

Abbiamo poi, sempre per la (6)

$$20!=2^{E\frac{20}{2}+E\frac{20}{4}+E\frac{20}{8}+E\frac{20}{16}}.3^{E\frac{20}{3}+E\frac{20}{9}}.5^{E\frac{20}{5}}.7^{E\frac{20}{7}}.11.13.17.19=$$
$$=2^{18}.3^8.5^4.7^2.11.13.17.19;$$

dunque

$$\frac{(10!)^2}{20!}=\frac{2^{16}.3^8.5^4.7^2}{2^{18}.3^8.5^4.7^2.11.13.17.19}=\frac{1}{2^2.11.13.17.19}=\frac{1}{184.756},$$

come avevamo trovato con l'altro metodo.

Altro esempio. — Supponiamo che sia $n = 13$, e si voglia calcolare

$$\frac{(n!)^2}{2n!} = \frac{(13!)^2}{26!}:$$

applicando la (10) si ha

$$\frac{(13!)^2}{26!} = \frac{1}{2.17.19.23} \times \frac{1}{2^2.5.7} = \frac{1}{2^3.5.7.17.19.23},$$

mentre direttamente

$$\frac{(13!)^2}{26!} = \frac{2^{20}.3^{10}.5^4.7^2.11^2.13^2}{2^{23}.3^{10}.5^5.7^3.11^3.17.19.23} = \frac{1}{2^3.5.7.17.19.23}.$$

13. Trovata l'espressione (10) per $\frac{(n!)^2}{2n!}$, poniamo per semplicità

$$\left(E\frac{2n}{2} - 2E\frac{n}{2}\right) + \left(E\frac{2n}{4} - 2E\frac{n}{4}\right) + \ldots + \left(E\frac{2n}{P_2} - 2E\frac{n}{P_2}\right) + E\frac{2n}{2P_2} = A_2$$

$$\left(E\frac{2n}{3} - 2E\frac{n}{3}\right) + \left(E\frac{2n}{9} - 2E\frac{n}{9}\right) + \ldots + \left(E\frac{2n}{P_3} - 2E\frac{n}{P_3}\right) + E\frac{2n}{3P_3} = A_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(E\frac{2n}{p} - 2E\frac{n}{p}\right) + \left(E\frac{n}{p^2} - 2E\frac{n}{p^2}\right) + \ldots + \left(E\frac{2n}{P_p} - 2E\frac{n}{P_p}\right) + E\frac{2n}{pP_p} = A_p$$

e, per omogeneità, diamo ai numeri primi consecutivi a p gli esponenti

$$A_{p'} \ldots\ldots A_\mu,$$

ricordando però sempre che questi, per quanto abbiamo visto, sono eguali all'unità. Allora la (10) prende la forma

$$\frac{(n!)^2}{2n!} = \frac{1}{2^{A_2}.3^{A_3}\ldots p^{A_p}.p'^{A_{p'}}\ldots\mu^{A_\mu}}. \tag{11}$$

Sostituiamo ora questo valore nell'espressione (5) trovata per π: avremo

$$\pi = \lim_{n=\infty} \frac{2^{4n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2A_2}.3^{2A_3}\ldots p^{2A_p}.p'^{2A_{p'}}\ldots\mu^{2A_\mu}}$$

e dividendo numeratore e denominatore per 2^{4n+1}

$$\pi = \lim_{n=\infty} \frac{1}{(2n+1).2^{2A_2-(4n+1)}.3^{2A_3}\ldots p^{2A_p}.p'^{2A_{p'}}\ldots\mu^{2A_\mu}}. \tag{12}$$

14. Ci rimane adesso da fare un ultimo passo per avere l'espressione di π in funzione di soli fattori primi, che ci eravamo proposti di trovare fin da principio. Osserviamo, prima di tutto, che nel caso in cui $2n+1$ fosse numero primo, la (12) sarebbe appunto la formola cercata: noi però faremo delle considerazioni generali, comprendenti insieme i due casi.

Scomponiamo per questo $2n+1$ in fattori primi: avremo

$$2n+1 = 2^{Q_2} . 3^{Q_3} \ldots p^{Q_p} . p'^{Q_{p'}} . \mu^{Q_\mu} . \mu' :$$

osserviamo qui che, dal momento che $2n+1$ è un numero dispari, deve essere sempre $Q_2 = 0$; di più per ragioni, analoghe a quelle già dette più avanti, gli esponenti dei numeri primi successivi a p non possono essere maggiori di 1; finalmente μ' non esisterà che quando $2n+1$ sarà numero primo, ed in questo caso, sarà ad esso eguale. Possiamo dunque, mantenendo però per simmetria tutti gli esponenti, scrivere

$$\pi = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^{Q_2} . 3^{Q_3} \ldots \mu^{Q_\mu} . \mu' . 2^{2A_2-(4n+1)} . 3^{2A_3} \ldots \mu^{2A_\mu}} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^{2A_2+Q_2-(4n+1)} . 3^{2A_3+Q_3} \ldots \mu^{2A_\mu+Q_\mu} . \mu'}$$

e ponendo per semplicità

$$\begin{aligned} 2A_2 + Q_2 &= a_2 \\ 2A_3 + Q_3 &= a_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ 2A^\mu + Q_\mu &= a_\mu , \end{aligned}$$

avremo

$$\pi = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^{a_2-(4n+1)} . 3^{a_3} \ldots \mu^{a_\mu} . \mu'} , \tag{13}$$

che, raccogliendo sotto il simbolo di prodotto, possiamo scrivere più semplicemente

$$\pi = \lim_{n=\infty} 2^{4n+1} \frac{1}{\mu'} \prod_{\nu=2}^{\nu=\mu} \frac{1}{p^{a_\nu}} . \tag{14}$$

Questa è appunto la formula che si cercava.

15. Trovata l'espressione di π in funzione di soli fattori primi, mi propongo di cercare quale approssimazione ottengo, arrestandomi ad un dato termine, cioè prendendo per n un certo valore. Si presentano qui a priori due questioni:

1. trovare l'approssimazione del valore di π corrispondente ad un dato valore di n.

2. trovare il valore di n corrispondente ad una data approssimazione.

Consideriamo la prima questione:

Nel principio delle nostre ricerche, considerando l'espressione di Wallis, l'abbiamo posta sotto la forma

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7}\right) \left(\frac{8}{7} \cdot \quad\right) \ldots\ldots ,$$

che è facile vedere ci dà il valore di π per difetto. Preso p. es. $n=3$, si ha

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7}\right) = \frac{2304}{1575}$$

da cui

$$\pi = \frac{4608}{1575} = 2{,}98:$$

ebbene, rappresenterò con A il valore di π dato da questa forma dell'espressione del Wallis.

Ma possiamo porre l'espressione di Wallis anche sotto la forma

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdots\cdot$$

che ci dà il valore di π per eccesso.

Per es., sempre per $n = 3$, abbiamo

$$\frac{\pi}{4} = \frac{9.216}{11.025}$$

da cui

$$\pi = \frac{36.864}{11.025} = 3{,}34\,.$$

Rappresentiamo con B il valore di π dato da questa seconda forma: avremo allora

$$A < \pi < B\,,$$

e la differenza tra il valore esatto di π ed A sarà minore di

$$B - A\,.$$

Ora abbiamo

$$A = \frac{2^2.\,4^2.\,6^2.\,8^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2n)^2}{3^2.\,5^2.\,7^2 \ldots (2n-1)^2 (2n+1)}$$

$$B = \frac{2^2.\,4^2.\,6^2 \ldots\ldots (2n)^2\,(2n+2)}{3^2.\,5^2.\,7^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2n+1)^2},$$

quindi

$$B = A\,\frac{2n+2}{2n+1}\,.$$

Sarà allora

$$B - A = A\,\frac{2n+2}{2n+1} - A = \frac{A\,(2n+2) - A\,(2n+1)}{2n+1} = \frac{A}{2n+1}.$$

Abbiamo dunque che la differenza tra il valore esatto e il valore trovato di π è minore di

$$\frac{A}{2n+1}\,.$$

Dato allora n, si può facilmente calcolare l'approssimazione che per esso si ottiene, bastando trovare A e dividerlo per $2n+1$.

Così la prima questione è risolta.

Passiamo alla seconda: ci proponiamo, data un' approssimazione arbitraria, di trovare il valore di n che ad essa corrisponde. Anche per questo giova ricordare che

$$\pi - A < \frac{A}{2n+1}\,.$$

Supponiamo p. es. di aver già trovato che il valore di π a meno di $\frac{1}{10}$ è 3, 1, e di volerne trovare il valore a meno di $\frac{1}{100}$. Sarà dunque sufficiente che sia

$$\frac{A}{2n+1} < \frac{1}{100} . \tag{α}$$

Ora sappiamo già che la prima cifra decimale di π è 1; la seconda, nella ipotesi a noi più sfavorevole, può essere 9. ed è evidente che, supponendola eguale a 9, sarà, in ogni caso, soddisfatta la (α). In questa ipotesi abbiamo

$$\frac{3.19}{2n+1} < \frac{1}{100} .$$

ossia

$$319 < 2n+1$$
$$\frac{319-1}{2} < n ,$$

cioè per avere la seconda cifra decimale, ossia un' approssimazione $< \frac{1}{100}$, bisogna prendere

$$n > 159 .$$

Analogamente, se volessi la terza cifra decimale, cioè l'approssimazione di $\frac{1}{1.000}$, potrei porre, supposto di aver trovata la seconda cifra eguale a 4,

$$\frac{3,149}{2n+1} < \frac{1}{1.000} ,$$

donde

$$3149 < 2n+1$$
$$3148 < 2n$$
$$1574 < n :$$

in generale dunque. volendo l'approssimazione di $\frac{1}{\delta}$, per δ potenza del 10 grande ad arbitrio, dovremo prendere (indicando con $A_{\frac{\delta}{10}}$ il valore di π coll'approssimazione di $\frac{1}{\frac{\delta}{10}} = \frac{10}{\delta}$)

$$n > \frac{A_{\frac{\delta}{10}} . \delta + 8}{2} . \tag{15}$$

Con questa formula siamo certi che, per n ad essa soddisfacente, avremo dalla (14) il valore di π a meno di $\frac{1}{\delta}$.

16. Supponiamo di volere il valore di π a meno di un' unità: dovrà essere

$$n > \frac{3 . 8}{2}$$

cioè

$$n > 5$$

ossia, al minimo,

$$n = 6.$$

Difatti la (14) per $n=6$ ci dà

$$\pi = \frac{1}{2^{4-25} \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13} = \frac{2^{21}}{693.693} = \frac{2.097.152}{693.693} = 3,0.$$

Cerchiamo ora il valore di π a meno di $\frac{1}{10}$: per la (15) si ha che n deve essere maggiore di $\frac{3 \cdot 10 + 8}{2} = 19$, cioè almeno

$$n = 20.$$

Allora dalla (13) si ha

$$\pi = \frac{1}{2^{a_2-81} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5} \cdot 7^{a_7} \cdot 11^{a_{11}} \cdot 13^{a_{13}} \cdot 17^{a_{17}} \cdot 19^{a_{19}} \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 37^2 \cdot 41}$$

essendo, per $n=20$

$$\begin{aligned} p &= 19 \\ p' &= 23 \\ \mu &= 37 \\ \mu' &= 41. \end{aligned}$$

Cerchiamo gli esponenti dei singoli fattori primi: abbiamo

$$\begin{aligned}
a_2 &= 2A_2 = 4 \text{ essendo} \\
A_2 &= 1+1; \\
a_3 &= 2A_3 = 4 \\
A_3 &= 1+1; \\
a_5 &= 2A_5 = 2 \\
A_5 &= 1; \\
a_7 &= 2A_7 = 2 \\
A_7 &= 1; \\
a_{11} &= 2A_{11} = 2 \\
A_{11} &= 1; \\
a_{13} &= 2A_{13} = 2 \\
A_{13} &= 1; \\
a_{17} &= 2A_{17} = 0 \\
A_{17} &= 0; \\
a_{19} &= 2A_{19} = 0 \\
A_{19} &= 0;
\end{aligned}$$

quindi

$$\pi = \frac{2^{77}}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 37^2 \cdot 41} = 3,12 \text{ circa},$$

cioè coll'approssimazione a meno di $\frac{1}{10}$, come ci eravamo proposti.

TAVOLE NUMERICHE.

Tavola I. **Potenze del 2.**

x	2^x
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1.024
11	2.048
12	4.096
13	8.192
14	16.384
15	32.768
16	65.536
17	131.072
18	262.144
19	524.288
20	1.048.576
21	2.097.152
22	4.194.304
23	8.388.608
24	16.777.216
25	33.554.432
26	67.108.864
27	134.217.728
28	268.435.456
29	536.870.912
30	1.073.741.824
31	2.147.483.648
32	4.294.967.296
33	8.589.934.592
34	17.179.869.184
35	34.359.738.368
36	68.719.476.736
37	137.438.953.472
38	274.877.906.944
39	549.755.813.888
40	1.099.511.627.776
41	2.199.023.255.552
42	4.398.046.511.104
43	8.796.093.022.208
44	17.592.186.044.416
45	35.184.372.088.832
46	70.368.744.177.664
47	140.737.488.355.328
48	281.474.976.710.656
49	562.949.953.421.312
50	1.125.899.906.842.624

Tavola I. *(Segue)* **Potenze del 2.**

x	2^x
51	2.251.799.813.685.248
52	4.503.599.627.370.496
53	9.007.199.254.740.992
54	18.014.398.509.481.984
55	36.028.797.018.963.968
56	72.057.594.037.927.936
57	144.115.188.075.855.872
58	288.230.376.151.711.744
59	576.460.752.303.423.488
60	1.152.921.504.606.846.976
61	2.305.843.009.213.693.952
62	4.611.686.018.427.387.904
63	9.223.372.036.854.775.808
64	18.446.744.073.709.551.616
65	36.893.488.147.419.103.232
66	73.786.976.294.838.206.464
67	147.573.952.589.676.412.928
68	295.147.905.179.352.825.856
69	590.295.810.358.705.651.712
70	1.180.591.620.717.411.303.424
71	2.361.183.241.434.822.606.848
72	4.722.366.482.869.645.213.696
73	9.444.732.965.739.290.427.392
74	18.889.465.931.478.580.854.784
75	37.778.931.862.957.161.709.568
76	75.557.863.725.914.323.419.136
77	151.115.727.451.828.646.838.272
78	302.231.454.903.657.293.676.544
79	604.462.909.807.314.587.353.088
80	1.208.925.819.614.629.174.706.176
81	2.417.851.639.229.258.349.412.352
82	4.835.703.278.458.516.698.824.704
83	9.671.406.556.917.033.397.649.408
84	19.342.813.113.834.066.795.298.816
85	38.685.626.227.668.133.590.597.632
86	77.371.252.455.336.267.181.195.264
87	154.742.504.910.672.534.362.390.528
88	309.485.009.821.345.068.724.781.056
89	618.970.019.642.690.137.449.562.112
90	1.237.940.039.285.380.274.899.124.224
91	2.475.880.078.570.760.549.798.248.448
92	4.951.760.157.141.521.099.596.496.896
93	9.903.520.314.283.042.199.192.993.792
94	19.807.040.628.566.084.398.385.987.584
95	39.614.081.257.132.168.796.771.975.168
96	79.228.162.514.264.337.593.543.950.336
97	158.456.325.028.528.675.187.087.900.672
98	316.912.650.057.057.350.374.175.801.344
99	633.825.300.114.114.700.748.351.602.688
100	1 267.650.600.228.229.401.496.703.205.376

Tavola II. Potenze del 3.

x	3^x
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243
6	729
7	2.187
8	6.561
9	19.683
10	59.049
11	177.147
12	531.441
13	1.594.323
14	4.782.969
15	14.348.907
16	43.046.721
17	129.140.163
18	387.420.489
19	1.162.261.467
20	3.486.784.401
21	10.460.353.203
22	31.381.059.609
23	94.143.178.827
24	282.429.536.481
25	847.288.609.443
26	2.541.865.828.329
27	7.625.597.484.987
28	22.876.792.454.961
29	68.630.377.364.883
30	205.891.132.094.649
31	617.673.396.283.947
32	1.853.020.188.851.841
33	5.559.060.566.555.523
34	16.677.181.699.666.569
35	50.031.545.098.999.707
36	150.094.635.296.999.121
37	450.283.905.890.997.363
38	1.350.851.717.672.992.089
39	4.052.555.153.018.976.267
40	12.157.665.459.056.928.801
41	36.472.996.377.170.786.403
42	109.418.989.131.512.359.209
43	328.256.967.394.537.077.627
44	984.770.902.183.611.232.881
45	2.954.312.706.550.833.698.643
46	8.862.938.119.652.501.095.929
47	26.588.814.358.957.503.287.787
48	79.766.443.076.872.509.863.361
49	239.299.329.230.617.529.590.083
50	717.897.987.691.852.588.770.249

Tavola III. Potenze del 5.

x	5^x
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3.125
6	15.625
7	78.125
8	390.625
9	1.953.125
10	9.765.625
11	48.828.125
12	244.140.625
13	1.220.703.125
14	6.103.515.625
15	30.517.578.125
16	152.587.890.625
17	762.939.453.125
18	3.814.697.265.625
19	19.073.486.328.125
20	95.367.431.640.625
21	476.837.158.203.125
22	2.384.185.791.015.625
23	11.920.928.955.078.125
24	59.604.644.775.390.625
25	298.023.223.876.953.125
26	1.490.116.119.384.765.625
27	7.450.580.596.923.828.125
28	37.252.902.984.619.140.625
29	186.264.514.923.095.703.125
30	931.322.574.615.478.515.625
31	4.656.612.873.077.392.578.125
32	23.283.064.365.386.962.890.625
33	116.415.321.826.934.814.453.125
34	582.076.609.134.674.072.265.625
35	2.910.383.045.673.370.361.328.125
36	14.551.915.228.366.851.806.640.625
37	72.759.576.141.834.259.033.203.125
38	363.797.880.709.171.295.166.015.625
39	1.818.989.403.545.856.475.830.078.125
40	9.094.947.017.729.282.379.150.390.625
41	45.474.735.088.646.411.895.751.953.125
42	227.373.675.443.232.059.478.759.765.625
43	1.136.868.377.216.160.297.393.798.828.125
44	5.684.341.886.080.801.486.968.994.140.625
45	28.421.709.430.404.007.434.844.970.703.125
46	142.108.547.152.020.037.174.224.853.515.625
47	710.542.735.760.100.185.871.124.267.578.125
48	3.552.713.678.800.500.929.355.621.337.890.625
49	17.763.568.394.002.504.646.778.106.689.453.125
50	88.817.841.970.012.523.233.890.533.447.265.625

Tavola IV. **Potenze del 7.**

x	7^x
1	7
2	49
3	343
4	2.401
5	16.807
6	117.649
7	823.543
8	5.764.801
9	40.353.607
10	282.475.249
11	1.977.326.743
12	13.841.287.201
13	96.889.010.407
14	678.223.072.849
15	4.747.561.509.943
16	33.232.930.569.601
17	232.630.513.987.207
18	1.628.413.597.910.449
19	11.398.895.185.373.143
20	79.792.266.297.612.001
21	558.545.864.083.284.007
22	3.909.821.048.582.988.049
23	27.368.747.340.080.916.343
24	191.581.231.380.566.414.401
25	1.341.068.619.663.964.900.807
26	9.387.480.337.647.754.305.649
27	65.712.362.363.534.280.139.543
28	459.986.536.544.739.960.976.801
29	3.219.905.755.813.179.726.837.607
30	22.539.340.290.692.258.087.863.249
31	157.775.382.034.845.806.615.042.743
32	1.104.427.674.243.920.646.305.299.201
33	7.730.993.719.707.444.524.137.094.407
34	54.116.956.037.952.111.668.959.660.849
35	378.818.692.265.664.781.682.717.625.943
36	2.651.730.845.859.653.471.779.023.381.601
37	18.562.115.921.017.574.302.453.163.671.207
38	129.934.811.447.123.020.117.172.145.698.449
39	909.543.680.129.861.140.820.205.019.889.143
40	6.366.805.760.909.027.985.741.435.139.224.001
41	44.567.640.326.363.195.900.190.045.974.568.007
42	311.973.482.284.542.371.301.330.321.821.976.049
43	2.183.814.375.991.796.599.109.312.252.753.832.343
44	15.286.700.631.942.576.193.765.185.769.276.826.401
45	107.006.904.423.598.033.356.356.300.384.937.784.807
46	749.048.330.965.186.233.494.494.102.694.564.493.649
47	5.243.338.316.756.303.634.461.458.718.861.951.455.543
48	36.703.368.217.294.125.441.230.211.032.033.660.188.801
49	256.923.577.521.058.878.088.611.477.224.235.621.321.607
50	1.798.465.042.647.412.146.620.280.340.569.649.349.251.249

Tavola V. **Fattoriali.**

n	$n!$
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5.040
8	40.320
9	362.880
10	3.628.800
11	39.916.800
12	479.001.600
13	6.227.020.800
14	87.178.291.200
15	1.307.674.368.000
16	20.922.789.888.000
17	355.687.427.996.000
18	6.402.373.703.928.000
19	121.645.130.374.632.000
20	2.432.902.607.492.640.000
21	51.090.954.757.345.440.000
22	1.124.001.004.661.599.680.000
23	25.852.023.107.216.792.640.000
24	620.448.554.573.203.023.360.000
25	15.511.213.864.330.075.584.000.000

Massa, gennaio 1900.

Mario Lazzarini.

Uno sguardo alle curve algebriche in base alla gonalità

Conferenza letta in francese dall'A. nel Congresso internazionale dei Matematici

il 9 agosto alle ore 2 pom.

§ 1. — Che cosa è la gonalità della curva.

1. Seguendo i concetti di Riemann, " la gonalità è il più piccolo " numero di punti della superficie di Riemann di genere p, pei quali " una funzione razionale della superficie diviene infinita di primo " ordine ". (*Oeuvres mathématiques,* pagg. 115-116.) Sulla importanza di questo numero si sono espressi i signori Appel e Goursat dicendo: " Pour une courbe donnée le nombre des pôles d'une fonction rationnelle (tous ces pôles étant supposés du premier ordre) ne peut pas " descendre au-dessous d'un certain minimum. Ce nombre minimum, " qui se conserve évidemment dans toute transformation birationnelle, paraît devoir jouer un rôle important dans la théorie des " courbes algébriques ". (*Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales,* pagg. 385-386.)

2. Secondo le idee di Weierstrass, non esistono funzioni razionali della curva algebrica (*Gebilde*) di genere p che hanno come punto infinito unico, di multiplicità $\leq p$, un punto arbitrariamente scelto su questa curva; e, dato un punto particolare della curva, se si cercano le funzioni razionali della curva, dei gradi $1, 2, 3, 4, \ldots$ che ammettono questo punto come punto infinito unico, vi sono precisamente p numeri che non si possono ritrovare come gradi di funzioni aventi il punto di cui si tratta come punto infinito unico. Per ogni punto della curva vi è un grado minimo per le funzioni razionali che hanno questo punto come punto infinito unico. *Il più piccolo fra questi gradi minimi, allorchè il punto varia sulla curva, è la gonalità di questa.*

3. Secondo il modo di vedere della *Geometria su di una curva algebrica*, l'ordine delle serie lineari complete o parziali (*Vollschaar* o *Theilschaar*) semplicemente infinite, segate sulla curva da fasci di varietà, e quindi da fasci di curve aggiunte, se la curva è piana, non può discendere al di sotto di un certo minimo. *Il minimo ordine delle serie lineari* ∞^1, *che esistono su una curva* C_p^m *di ordine* m, *di genere* p, *indica la gonalità della curva.*

Noi rappresentiamo con k questa gonalità; essa è un numero che può variare da 1 a ∞. Le curve di gonalità 1 sono le *curve unicursali* o *razionali;* le curve di gonalità 2 sono le *curve iperellittiche,* comprese le *ellittiche.*

§ 2. — Metodi e nomenclatura per lo studio delle gonalità.

4. Dal punto di vista analitico la ricerca della gonalità della curva si riduce alla ricerca delle *funzioni speciali* delle superficie di Riemann, qualora si faccia astrazione dalle superficie di genere zero e dalle superficie ellittiche. A questo proposito il Klein dice:

" La esposizione e la ricerca delle funzioni speciali appartenenti " ad una superficie F è una delle più interessanti ma anche delle più " difficili parti della teoria delle superficie di Riemann e finora in " nessun modo si è potuto raggiungere una soddisfacente risolu- " zione ". (1) (Klein-Fricke, *Elliptischen Modulfunctionen,* Bd. I, pagina 555). Perciò conveniva tentare la risoluzione del problema col metodo algebrico-geometrico: ma, pure con questo metodo, la ricerca presentava grandi difficoltà; poichè, quando si passava dalle curve iperellittiche alle curve di gonalità maggiore, i teoremi che si trovavano erano sempre ritenuti di dubbia fede, perchè mancanti di una completa generalità per rispetto al genere.

5. Noi abbiamo tentata questa via e siamo riusciti a fare qualche passo, ed a sbarazzarci il cammino dalle grandi difficoltà che il soggetto presentava, e ciò semplicissimamente, pensando, in opposizione a ciò che i signori Brill e Nöther avevano affermato nella loro classica fondamentale Memoria " Sulla teoria della Geometria su una curva algebrica " (*Math. Ann.,* VII), che dovesse essere di capitale importanza lo studiare in modo diretto le curve aggiunte alla curva C_p^m di un ordine $< m-3$, e sopratutto le curve aggiunte che hanno il minimo ordine compatibile con l'ordine, e col genere della curva data. Son queste le curve che noi abbiamo chiamate *curve aggiunte minime.* Intuitivamente ci convicemmo che queste curve dovessero funzionare,

---

(1) Die Aufstellung und Untersuchung der zu einer Fläche F gehörenden Specialfunctionen gehört zu den interessantesten, aber auch schwierigsten Theilen der Riemann'schen Theorie und ist bislang keineswegs einer abgeschlossenen Lösung zugänglich gewesen.

per le curve di gonalità >2, come le curve aggiunte dell'ordine $m-3$ funzionano nelle curve iperellittiche, e non c'ingannammo: poichè tutte le nostre ricerche hanno confermato e dimostrato questo fatto essenziale della teoria. Questo metodo di ricerca ci ha obbligato ad adottare una nomenclatura più minuziosa di quella che si usava prima; quindi riservammo il nome di *serie speciali* alle sole serie lineari segate dalle curve aggiunte di ordine $m-3$ e non da curve aggiunte di ordine minore; e abbiam dette *serie specializzate una volta* quelle che sono segate da curve aggiunte di ordine $m-4$ e non da curve aggiunte di ordine minore; *serie specializzate due volte* quelle segate da curve aggiunte di ordine $m-5$, ecc. Ed inoltre chiamammo

1ª serie canonica quella che è segata da tutte le curve agg. di ord. $m-3$,
2ª serie canonica " " " " " $m-4$,
. . . .
. . . .
$(\alpha+1)^{ma}$ *serie canonica* " " " " $m-3-\alpha$.

6. La più grande difficoltà consisteva nel determinare la dimensione effettiva delle serie canoniche successive alla prima; e a questa difficoltà era legata un'altra, che, tentata da Küpper, era stata giudicata da questi ben difficile a superarsi (*Bibl.*, 1). Ecco di che si tratta. Essendo data una curva C^m, di ordine m, una curva aggiunta di ordine $m-3-\alpha$ deve avere in ogni punto s-uplo di C^m un punto $(s-1)$-uplo, e, quindi, deve soddisfare a $\frac{1}{2}\Sigma s(s-1)$ condizioni lineari, che intanto possono non essere tutte linearmente indipendenti per le curve aggiunte d'ordine $m-3-\alpha$, se $\alpha>0$. Se si suppone che ρ_α di queste condizioni dipendono linearmente dalle altre si dice che ρ_α è la *sovrabbondanza* del sistema di curve aggiunte di ordine $m-3-\alpha$. La difficoltà consisteva nella ricerca di un *limite superiore* di ρ_α. Un'altra difficoltà consisteva nella necessità di rischiarare in qualche modo la funzione e di conoscere il numero dei punti fissi che i sistemi delle curve aggiunte di ordine $<m-3$ possono avere sulla C^m_p, fuori dei punti multipli; punti fissi che mancano completamente, come si sa, per le curve aggiunte di ordine $\geq m-3$.

§ 3. — Risultati generici relativi alle curve algebriche.

7. Distingueremo i resultati ottenuti colle nostre ricerche in due categorie; cioè in *risultati generici* e *risultati relativi ad una gonalità determinata.* In quanto ai risultati generici, il primo che siamo pervenuti a stabilire, considerando la $(\alpha+1)^{ma}$ serie canonica, è stato il limite superiore di ρ_α, risultato di cui si dubitò dapprima, ma che si è finito per ammettere.

Trovammo che (*Bibl.*, 4):

(1) $$\rho_\alpha \leq \tfrac{1}{2}\alpha(m-3-\alpha).$$

8. Un altro risultato è la forma che prende il teorema di Riemann e Roch esteso alle curve aggiunte di ordine $m-3-\alpha$. Eccolo (*Bibl.*, 5):

Se per un gruppo G_{n_α} *d'una curva* C_p^m *passano* $\infty^{r'_\alpha}$ *curve aggiunte di ordine* $m-3-\alpha$, *il gruppo appartiene a una serie lineare completa* $g_{n_\alpha}^{r_\alpha}$, *di cui la dimensione* r_α *non può essere inferiore a* $n_\alpha + r'_\alpha - p + 1 + \frac{1}{2}\alpha(\alpha+3) + \rho_\alpha$, *di modo che si deve avere.*

(2) $$r_\alpha \geq (n_\alpha + r'_\alpha) - (p-1) + \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + \rho_\alpha.$$

Questo teorema può enunciarsi anche nel seguente modo: *La dimensione della serie lineare completa* $g_{n'_\alpha}^{r'_\alpha}$ *residua della* $g_{n_\alpha}^{r_\alpha}$ rispetto *alla serie canonica* $g_{N_\alpha}^{R_\alpha}$ *segata dalle curve aggiunte di ordine* $m-3-\alpha$, e

$$r'_\alpha \leq (p-1) - (n_\alpha - r_\alpha) - \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - \rho_\alpha.$$

Or, se noi facciamo l'interpretazione analitica di questo teorema, considerando che un polinomio aggiunto dell'ordine $m-3-\alpha$ è *una funzione speciale* della superficie di Riemann di genere p, e che il numero r'_α rappresenta il numero dei parametri *non omogenei*, che entrano linearmente nella funzione di cui si tratta, che ha per poli di 1° ordine gli n_α punti, noi perveniamo al teorema seguente:

Dati n *punti tali che essi appartengano a* $\tau = r' + 1$ *curve aggiunte linearmente indipendenti, dell'ordine* $m-3-\alpha$, *la funzione algebrica più generale, avente per poli questi* n *punti o una parte di essi, conterrà almeno*

$$n + \tau - p + 1 + \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + \rho_\alpha$$

costanti arbitrarie omogenee.

9. Un altro risultato dapprima creduto dubbio, in seguito riconosciuto esatto, è quello che dà il minimo genere delle curve di ordine m, dotate di curve aggiunte di ordine $m-3-\alpha$. Questo minimo è

(3) $$p = \tfrac{1}{2}\alpha m + 1.$$

10. Un risultato di cui l'esattezza è stata assodata mediante una polemica avuta con i signori Bertini e Burkhardt, è la estensione del *teorema di reciprocità* di Nöther alle curve aggiunte di ordine $m-3-\alpha$.

Fu assodato che: *gli ordini e le dimensioni di due serie, residue fra loro rispetto alla serie canonica* $g_{N_\alpha}^{R_\alpha}$, *segate dalle curve aggiunte di ordine* $m-3-\alpha$, *sono legati dalle relazioni*

$$n_\alpha + n'_\alpha = N_\alpha\ , \quad [2(r_\alpha - r'_\alpha) - (n_\alpha - n'_\alpha)] \leq 2(\overline{\rho}_\alpha - \rho_\alpha), \tag{4}$$

ove $\overline{\rho}_\alpha$ rappresenta il più alto valore che ρ_α possa raggiungere.

11. Inoltre abbiamo trovato che la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza delle curve aggiunte $C^{m-3-\alpha}$ è

$$p \leq \tfrac{1}{2}\alpha m + 1 + (\overline{\rho}_\alpha - \rho_\alpha), \tag{5}$$

purchè si ammetta anche il caso limite, cioè che in una curva senza punti multipli ogni punto possa essere considerato come una curva aggiunta di ordine 0, la qualcosa ha la sua ragione di essere (*Bibl.*, 12).

12. Ed infine abbiam trovato che *la formola, conosciuta, del più alto genere di una curva* C^m *appartenente ad uno spazio a* d *dimensioni prende le forme seguenti, secondo che* m *è congruo a* 1, *a* 2 *o a* 0, *a* 3 *o a* $d-2$, *a* 4 *o a* $d-3$,... *per rispetto al modulo* $d-1$:

per d *pari*,

$$p = \frac{(m-1)(m-d)}{2(d-1)}, \quad \frac{(m-2)(m-d+1)}{2(d-1)}, \ldots, \frac{\left(m-\dfrac{d}{2}\right)\left(m-\dfrac{d}{2}-1\right)}{2(d-1)};$$

per d *dispari*,

$$p = \frac{(m-1)(m-d)}{2(d-1)}, \quad \frac{m-2)(m-d+1)}{2(d-1)}, \ldots, \frac{\left(m-\dfrac{d+1}{2}\right)^2}{2(d-1)}.$$

§ 4. — **Risultati relativi alle curve di data gonalità.**

13. Per esporre con chiarezza le proprietà delle curve algebriche relative alla gonalità, segnaleremo innanzi tutto quelle che sono comuni a tutte le curve di gonalità k, e poi esporremo le proprietà delle curve aventi la stessa gonalità, ma che soddisfano pure a qualche altra condizione.

Bisogna prima di tutto notare che sulle superficie di Riemann a moduli generali e di gonalità k, Riemann ha trovato che: “ *lorsque les* “ *valeurs de ramifications de la surface ne satisfont pas à des équations* “ *de condition, il faut que l'on ait* (*Oeuvres math.*, p. 116) $k \geq \frac{1}{2}p+1$ ”.

Noi abbiam trovato che si deve avere pure (*Bibl.*, 6) $k \leq \dfrac{p+3}{2}$, d'onde segue che: *Le superficie di Riemann, a moduli generali, sulle* *quali le funzioni razionali ammettono* k *per minimo numero di poli di primo ordine sono quelle de' generi*

$$2k-3 \quad , \quad 2k-2.$$

Questo teorema può esser tradotto e completato nel seguente:

Fra tutte le curve di gonalità k, *soltanto quelle dei generi* $2k-3$, $2k-2$ POSSONO *essere a moduli generali; e fra queste, quelle di cui il genere è* $2k-3$ *ammette una semplice infinità di* g_k^1, *mentre che le altre ne hanno* $\frac{(2k-2)!}{k!\,(k-1)!}$.

Per tutti gli altri generi le curve ammettono moduli particolari; ma ciò non impedisce che le curve k-gonali dei generi $2k-3$, $2k-2$ possano avere moduli particolari. È assodato (*Bibl.*, 19) che ciò non avviene per le curve iperellittiche dei generi 1 e 2, nè per le curve trigonali dei generi 3 e 4; ma ciò comincia a verificarsi per le curve tetragonali. Si trova infatti fra queste curve la C_6^7 (di 7° ordine, di generi 6) che ha moduli particolari ed ammette una semplice infinità di g_4^1 se essa è dotata di 3 punti tripli; ma, se essa ha 2 punti tripli e 3 punti doppi arbitrari, essa ha moduli generali e non ammette che 5 g_4^1. La prima di queste curve è una trasformata quadratica della curva di 5° ordine senza punti doppi; l'altra è trasformata quadratica della C_6^6, del 6° ordine con 4 punti doppi.

14. Ecco gli altri risultati, che si riferiscono alle proprietà generiche delle curve algebriche di gonalità data k.

1°. *Se una curva* k-*gonale* C_p^m *ammette almeno* $k-\alpha$ *curve aggiunte dell'ordine* $m-3-\alpha$, *linearmente indipendenti, le curve* $C^{m-3-\alpha}$, *che passano per* $k-\alpha-1$ *punti di un gruppo di una* g_k^1, *passano per tutti gli altri punti del gruppo; esse segano una* $g_{N_\alpha-k}^{R_\alpha+\alpha+1-k}$, *e quindi le curve aggiunte* $C^{m-3-\alpha}$ *che passano per un gruppo di questa serie possono servire a segare la* g_k^1. (*Bibl.*, 8 e 15).

In particolare: *nella stessa ipotesi, ogni gruppo della serie* g_k^1 *vale* $k-2$ *condizioni per ogni* C^{m-4} *aggiunta, vale* $k-3$ *condizioni per ogni* C^{m-5} *aggiunta,..., e vale una sola condizione per ogni curva aggiunta dell'ordine* $m-k-1$.

2°. *Le curve* k-*gonali dell'ordine* m *non possono avere curve aggiunte di ordine minore di* $m-k-1$. *Da ciò si deduce che:*

a) *Il più alto genere che possono raggiungere le curve* k-*gonali d'un ordine dato* m *è*

$$p=(k-1)m-\tfrac{1}{2}(k-1)(k+2). \tag{6}$$

b) *Se il numero dei punti doppi di una curva piana semplice, dell'ordine* m, *è minore di* $\frac{1}{2}(m-k)(m-k-1)$, *la gonalità della curva sorpassa* k.

3°. *Sulle curve* k*-gonali, singolari nel loro genere, non possono esistere serie irrazionali involutorie, semplicemente infinite, dell'ordine* k *e di genere* $\pi < \frac{p-(k-1)^2}{k}$ (*Bibl.*, 3).

4°. *Le curve* k*-gonali, di cui il genere sorpassa* $(k-1)^2$, *devono necessariamente avere una sola* g_k^1 (*Bibl.*, 15 e 3).

5°. *Le curve* k*-gonali, a moduli particolari di cui il genere supera* $2k-2$, *ma non* $(k-1)^2$, *possono anche avere una sola* g_k^1.

§ 5. — Proprietà delle curve k-gonali dotate di curve aggiunte C^{m-k-1}.

15. Limitandoci, pel momento, a esaminare le curve k-gonali dotate di curve aggiunte del più piccolo ordine compatibile con la gonalità, troviamo in primo luogo che queste curve hanno un carattere fondamentale rimarchevolissimo, che apporta una folla di proprietà semplici ed interessanti. Il carattere di cui si parla consiste in ciò che *ogni gruppo di ciascuna* g_k^1, *esistente sulla curva, ha i suoi punti in linea retta* (*Bibl.*, 6).

Come abbiamo visto sopra, ciascuno di questi gruppi equivale una sola condizione per ogni curva aggiunta C^{m-k-1} che passa per esso, donde segue che:

Se vi è una infinità di queste curve aggiunte C^{m-k-1}, *ogni* g_k^1 *è segata da un fascio di curve* C^{m-k-1}. *Se, al contrario, non vi è che una sola curva aggiunta* C^{m-k-1}, *ogni* g_k^1, *che esiste sulla curva data, è segata da un fascio di curve aggiunte dell'ordine* $m-k$.

16. *Il genere più basso che può raggiungere una curva* k*-gonale, dotata di curve aggiunte minime, è*

$$p = \tfrac{1}{2}(k-2)m+1. \tag{7}$$

Le curve k*-gonali, di cui il genere soddisfa alle limitazioni seguenti*

$$\tfrac{1}{2}(k-2)m+1+(\delta_{k-2}-\rho_{k-2}) \leq p \leq (k-1)m - \tfrac{1}{2}(k-1)(k+2), \tag{8}$$

hanno certamente per diritto i punti di ogni gruppo di ciascuna g_k^1.

17. *L'inviluppo delle rette che sostengono ogni gruppo di una* g_k^1 *sulla curva* k*-gonale è della classe* (*Bibl.*, 7)

$$s = 1 + \frac{2(\theta-\xi)}{k(k-1)}, \tag{9}$$

dove θ *rappresenta l'eccesso del genere massimo delle curve* **k**-*gonali sul genere* p *della curva data, e* ξ *è il numero delle coppie di punti comuni alla* g_k^1 *e ad ogni* g_m^1 *segata sulla curva da un fascio di rette il cui centro sia esterno alla curva, cioè è il numero delle coppie di punti dei gruppi della* g_k^1 *assorbiti nei punti multipli della* C_p^m.

Da ciò si deduce che:

Il numero θ *è sempre eguale a* ξ *aumentato di un multiplo di* $\frac{1}{2}k(k-1)$, *cioè* (*Bibl.*, 6 e 19)

$$\theta = \xi + \frac{1}{2}k(k-1)t \leq \frac{1}{2}(m-k-1)k. \tag{10}$$

§ 6. — Curve k-gonali senza punti fissi per le C^{m-k-1}.

18. Dopo aver stabilite queste proprietà comuni a tutte le curve k-gonali, dotate di curve aggiunte minime, non pareva facile di procedere innanzi, e per superare le difficoltà che si presentavano avemmo dapprima l'idea di considerare, fra queste curve, soltanto le curve di gonalità k, che non hanno punti fissi nella $(k-1)^{ma}$ serie canonica segata dalle curve aggiunte C^{m-k-1}.

Ecco le proprietà principali che abbiamo potuto scovrire:

1°. *La serie canonica segata su queste curve dalle curve aggiunte* C^{m-k-1}, *allorchè la dimensione del sistema di queste curve è* >1, *è una serie* g_{kR}^R, *sempre composta mediante la* g_k^1, R *essendo la dimensione del sistema delle curve aggiunte dell'ordine* $m-k-1$; *di modo che la* $(k-1)^{ma}$ *serie canonica si comporta per queste curve come la serie canonica segata dalle curve aggiunte* C^{m-3} *si comporta per le curve iperellittiche.*

2°. *Tutte le curve aggiunte* C^{m-k-1}, *che passano per i gruppi di una* g_k^1 *allineati con un punto fisso del piano della curva, passano anch'esse per questo punto* (*Bibl.*, 9 e 15).

19. Per poter fare uno studio presso a poco completo di questa categoria di curve, abbiam trovato utile di suddividerla in famiglie, adottando come carattere differenziale un carattere proiettivo, che abbiam chiamato *specie* della curva. Il numero che indica la specie della curva è uguale alla *classe* dell'inviluppo delle rette che sostengono tutti i gruppi di ogni g_k^1. Questa divisione in famiglie è stata per noi di grande utilità come mezzo di ricerca, ma essa non avrà bisogno forse di essere mantenuta, quando si potrà pervenire direttamente ai risultati ottenuti. Essa ci è apparsa massimamente utile nello studio e nella ricerca di curve di dato genere e di data gonalità aventi solo punti doppi.

20. Limitandoci alle curve di 1ª e di 2ª specie abbiam potuto assegnare la loro costruzione effettiva mediante fasci di curve (*Bibl.*, 9); abbiam segnalata l'esistenza di una infinità di reti, e di sistemi tripli, quadrupli,..., di curve di ordini m senza punti *multipli* che hanno delle reti a intersezioni variabili formate di gruppi di $m-1$ punti per diritto (*Bibl.*, 11); ed abbiam potuto stabilire che:

1°. *Nelle curve* k-*gonali di* 1ª *specie i valori di* $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{k-2}$ *sono tutti nulli.*

2°. *Nelle curve* k-*gonali di* 2ª *specie, che hanno una sola curva aggiunte dell'ordine* $m-k-1$, *cioè nelle curve* $C^{2k}_{(k-1)^2}$, *si ha*

$$(11)\quad \rho_0=0,\ \rho_1=1,\ \rho_2=3, \ldots,\ \rho_{k-4}=\binom{k-3}{2},\ \rho_{k-3}=\binom{k-2}{2},\ \rho_{k-2}=\binom{k-1}{2}.$$

3°. *Nelle curve* k-*gonali di* 1ª *specie la serie segata da tutte le coniche del piano è contenuta in una serie* g^{5}_{2k} *completa; la serie segata da tutte le cubiche del piano è contenuta in una serie completa* g^{15}_{6k}, ecc. ecc.

21. Per le curve di gonalità k e di specie $s \geq 1$ in generale, i risultati più essenziali riguardano la determinazione precisa delle dimensioni di alcune delle serie complete segate su queste curve dalle curve aggiunte e da curve non aggiunte. E fra tutti questi risultati si è giudicato molto difficile ed importante quello che concerne la dimensione della serie lineare completa, che contiene la serie segata sulle curve dalle rette del piano. Ecco i teoremi. (*Bibl.*, 15.)

1°. *La dimensione della serie lineare completa, che contiene la serie segata dalle rette del piano, è eguale alla specie della curva aumentata di un'unità.*

2°. *La sovrabbondanza* ρ_1 *del sistema delle curve aggiunte di ordine* $m-4$ è $s-1$.

3°. *La sovrabbondanza* ρ_{k-3} *del sistema delle curve aggiunte dell'ordine* $m-k$ *è* $\frac{1}{2}(s-1)(k-2)(k-3)$.

4°. *La sovrabbondanza* ρ_{k-2} *del sistema delle curve aggiunte dell'ordine* $m-k-1$ *è* $\frac{1}{2}(s-1)(k-1)(k-2)$.

5°. *La dimensione della* $(k-2)^{ma}$ *serie canonica, segata dalle curve aggiunte dell'ordine* $m-k$ *è* $2R+s+1$, *donde segue che la serie in questione è* $g^{2R+s+1}_{k(R+s)+R-(s-2)}$.

22. Dal primo dei teoremi che precedono si deduce che (*Bibl.*, 17):

Tutte le curve k-*gonali di* s^{ma} *specie sono le proiezioni di curve dello stesso ordine dello spazio di dimensione* $s+1$, *ma* NORMALI *per questo spazio; e queste curve normali appartengono a superficie rigate razionali dell'ordine* s, *di cui ciascuna generatrice le incontra* k *volte.*

§ 7. — Curve k-gonali con punti fissi per le C^{m-k-1}.

23. Ci resta a dire qualche parola sopra i risultati ottenuti intorno alle curve algebriche k-gonali, che hanno curve aggiunte minime dell'ordine $m-k-1$, e che presentano inoltre un certo numero σ di punti fissi per queste curve aggiunte, fuori dei punti multipli. Lo studio di questo argomento riguarda anche, per $\sigma=0$, tutte le curve considerate nel paragrafo precedente, di modo che torneremo a considerare ora tutte le curve k-gonali dotate di curve aggiunte C^{m-k-1}. Il genere di queste curve è dato dalla formola

$$p=(k-1)m-\tfrac{1}{2}(k-1)(k+2)-\tfrac{1}{2}k(k-1)t-\xi-\tfrac{1}{2}(k-1)(2m-ks-2)-\xi \tag{12}$$

e in tal caso l'inviluppo delle rette, cui appartengono i gruppi di una g^1_k è della classe

$$s=t+1. \tag{13}$$

Noi conserveremo per queste curve la divisione in *ispecie;* ma non bisognerà dimenticare che, fra le curve di s^{ma} specie, si trovano ora, non solamente le curve già considerate innanzi ($\sigma=0$, $\xi=0$), ma anche tutte le altre per le quali σ e ξ non sono entrambi eguali a zero.

24. Il primo teorema che conviene citare è il seguente (*Bibl.*, 19). *Ogni curva* k-*gonale, di cui l'inviluppo della* g^1_k *è di classe* s, *si può trasformare birazionalmente in una curva* k-*gonale dello stesso ordine, dotata di un punto* (m — k)-*uplo, di* s — 1 *punti* k-*upli, e di altri punti multipli, di multiplicità inferiore a* k, *equivalenti a* ξ *punti doppi. Questa curva si può anche trasformare birazionalmente in una curva* k-*gonale di* 1ª *specie di un ordine inferiore* m' *dotata di un punto* (m' — k)-*uplo e di altri punti multipli di multiplicità inferiore a* k.

Grazie a questo teorema le proprietà invariantive delle curve k-gonali di assegnata specie possono essere ottenute tutte dalle sole curve k-gonali di 1ª specie C^m, che hanno un punto $(m-k)$-uplo e altri punti multipli di multiplicità inferiore a k.

25. Ecco quali sono i caratteri di queste curve.

Esse hanno $\theta=\xi$; il genere e l'ordine sono

$$p=\tfrac{1}{2}(k-1)(2m-k-2)-\theta \quad , \quad m \geq k+1+\frac{2\theta}{k};$$

il numero dei punti fissi è

$$\sigma=(k-2)\theta-k\rho_{k-2};$$

la dimensione e l'ordine della $(k-1)^{ma}$ serie canonica sono

$$R = m - k - 1 - (\theta - \rho_{k-2}) \quad , \quad N = kR + \sigma.$$

Il numero dei punti doppi arbitrarii sono $\theta - \rho_{k-2}$, e vi è tra θ e ρ_{k-2} la relazione seguente

$$\rho_{k-2} \leq \frac{k-2}{k} \theta,$$

che ci fu comunicata da Küpper.

26. In particolare, per le curve iperellittiche, si trova (facendo $k=2$) $\sigma = -k\rho_0$; ma σ non può esser negativo, dunque $\sigma = 0$, ciò che dimostra (per la prima volta di una maniera diretta) che non possono esservi punti fissi nella serie canonica sulle curve iperellittiche.

27. I caratteri delle curve, di cui si è parlato nel n. 25, possono essere utilmente espressi in funzione della dimensione R del sistema delle curve aggiunte minime:

$$m = R + k + 1 + (\theta - \rho_{k-2}) \quad , \quad p = \tfrac{1}{2}(k-1)(2R+k) + (k-2)\theta - (k-1)\rho_{k-2}$$

e le curve hanno un punto $(m-k)$-uplo e altri punti multipli di multiplicità inferiore a k, equivalenti a θ punti doppi.

Le curve aggiunte minime si riducono al sistema di $R + (\theta - \rho_{k-2})$ rette, di cui $\theta - \rho_{k-2}$ sono fisse e determinano i σ punti fissi della curva.

28. Le curve per le quali si ha $\rho_{k-2} = 0$ hanno una importanza particolare; fra esse son comprese *tutte* le curve trigonali di 1ª specie. Per tali curve si hanno i seguenti teoremi:

1°. *Le curve* C^m_p k-*gonali di 1ª specie; che hanno* $\rho_{k-2} = 0$, *non hanno che soli punti doppi e un solo punto* (m — k)-*uplo, che non è in linea retta con due dei punti doppi.*

2°. *La serie segata su queste curve dalle rette del piano* è COMPLETA; donde segue *che le curve in questione sono tutte curve normali per il piano.*

Per mostrare l'importanza di questi due teoremi ci arresteremo ad osservare che, limitandoci al solo caso di $k=3$, si ritrova il teorema di Bobek: *Nelle curve trigonali il numero dei punti fissi* $\sigma = \theta$, la cui estensione al caso di k qualunque appariva estremamente difficile; e si arriva a stabilire la rappresentazione normale di tutte le curve trigonali, risultato che abbiamo avuto l'onore di comunicare all'Accademia delle Scienze di Parigi, e che si può riassumere nel seguente teorema:

3°. *Ogni curva trigonale (per conseguenza di genere* p $\geq$ 3) *può essere rappresentata per mezzo di una curva normale del piano, dell'ordine*

$\frac{p}{2}+3$ o $\frac{p-1}{2}+3$, *secondo che* p *è pari o dispari. La curva normale deve avere un punto* $\frac{p}{2}$*-uplo e un solo punto doppio nel primo caso, e non deve avere, nell'altro caso, che un punto* $\frac{p-1}{2}$*-uplo* (*Bibl.*, 19).

Bibliografia.

1. Küpper Karl. — 1°. *Ueber die curve* C_p^m *von* n^{ter} *Ordung und dem Geschlecht* $p>1$ *auf welchem die einfachen specialschaaren* g_2^1, g_3^1 *vorkommen;* Prag. Abh. (7) III, 1889.
2. Bobek K. — *Ueber Dreischaarcurven;* Wien. Ber. Bd. 98 pp. 142-173, 1889.
3. Amodeo Federico. — 1°. *Contribuzione alla teoria delle serie irrazionali involutorie giacenti sulle varietà algebriche ad una dimensione;* Ann. di Mat. (2), 20, Giugno 1892.
4. — — 2°. *Curve aggiunte minime;* Roma, Rend. Acc. Lincei, Vol. 2_1, pp. 450-467, 21 Maggio 1893.
5. — — 3°. *Serie residue nella serie canonica delle curve aggiunte di ordine* $m-3-\alpha$; Roma, Acc. Lincei. Vol. 2_1, pp. 528-532, 3 Giugno 1893.
6. — — 4°. *Curve* k-*gonali;* Ann. di Matem. (2) Vol. 21, pp. 221-236, Giugno 1893.
7. Bertini Eugenio. — *La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico;* Ann. di Matem. (2) Vol. 22, 1894.
8. Küpper K. — 2°. *Ueber* k-*gonale Curven* C_p^n n^{ter} *Ordnung von Geschlecht* $p>1$; Prag. Ber. k. böhm. Ges. d. Wiss., 14 Juni, 1895; Monatsh. f. Math. u. Phys. VIII. Iahrg.
9. Amodeo F. — 5°. *Curve* k-*gonali di 1ª e di 2ª specie;* Ann. di Matem. (2), 24, pp. 1-22 (Agosto 1895), 1896.
10. Küpper K. — 3°. *Ueber beziehungen zwischen Polygonalen und Raumcurven;* Prag., Ber. d. k. Ges. d. Wiss., 7 febbr. 1896.
11. Amodeo F. — 6°. *Sistemi lineari di curve algebriche di genere massimo ad intersezioni variabili collineari;* Napoli, Rend. Acc. d. Sc., 7 Marzo 1896.
12. — — 7°. *Curve aggiunte e serie specializzate;* Napoli, Rend. Acc. d. Sc., 28 Nov. 1896.
13. Burkhardt H. — *Zur Theorie der linearen Schaaren von Punktaggregaten auf algebraischen Curven;* Göttingen, Nachr. d. k. Ges. d. Wiss., 21 Nov. 1896.
14. Küpper K. — 4°. *Die Ultraelliptischen Curven;* Prag. Ber. d. k. Ges. d. Wiss., 18 Dicembre 1896.
15. Amodeo F. — 8°. *Curve* k-*gonali di* s^{ma} *specie;* Napoli, Atti Acc. d. Sc. (2), Vol. 9, n. 4, 23 Ottobre 1897.
16. Küpper K. — 5°. *Curventheoretische;* Prag. Ber. d. k. böhm. Ges. d. Wiss., 14 gennaio 1898.
17. Amodeo F. — 9°. *Spazio normale e genere massimo delle curve di ordine* m, k-*gonali di specie* s; Napoli, Rend. Acc. d. Sc., 29 Ottobre 1898.
18. — — 10°. *Courbes normales trigonales du plan;* Paris, Comptes Rendu, 25 Giugno 1900.
19. — — 11°. *Curve di gonalità* k *con punti fissi nella* $(k-1)^{esima}$ *serie canonica e curve normali trigonali del piano;* Napoli, Rend. Acc. d. sc. (22 Aprile). 7 Luglio 1900.

Napoli, 19 luglio 1900.

Federico Amodeo.

RELAZIONI FRA LE RADICI DELL'EQUAZIONE CUBICA

e quelle della sua derivata

Siano z_1, z_2, z_3 le radici dell'equazione cubica $f(z)=0$, e ζ_1, ζ_2, quelle dell'equazione derivata $f'(z)=0$. Ogni sostituzione lineare intera sulla variabile z trasforma evidentemente le due equazioni in modo che la seconda non cessa di essere l'equazione derivata della prima; e d'altra parte si sa che per tale sostituzione non variano gli angoli delle rette, nè i rapporti fra le distanze dei punti del piano. Ne segue che la sostituzione stessa lascia inalterate le posizioni dei punti ζ_1 e ζ_2 rispetto al triangolo $z_1z_2z_3$, e che qualunque relazione fra distanze deve, per la sua omogeneità, sussistere indipendentemente dalla posizione del triangolo nel piano. Di ciò vogliamo approfittare per situare il triangolo nella posizione più conveniente; e prima di tutto ne poniamo il baricentro z_0 nell'origine, in guisa cioè che si abbia $z_1+z_2+z_3=0$, e per conseguenza

$$z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2=-\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2+z_3^2).$$

Così l'equazione diventa

$$z^3-\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2+z_3^2)\,z-z_1z_2z_3=0,$$

e però le radici dell'equazione derivata sono

$$\zeta_1=\frac{1}{6}\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}, \qquad \zeta_2=-\frac{1}{6}\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}, \tag{1}$$

sicchè i punti ζ_1 e ζ_2 sono simmetrici rispetto a z_0. Questa è, del resto, una proprietà che appartiene alle equazioni di qualsivoglia grado, nel senso che *il baricentro delle radici di* f'(z) *coincide sempre con quello delle radici di* f(z).

Ora, tornando al triangolo, una conveniente rotazione di tutta la figura intorno all'origine conduce i punti ζ_1 e ζ_2 sull'asse dei numeri reali, e tale posizione della figura è, per le (1), caratterizzata dal fatto che il numero

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+2i(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)$$

deve risultare reale, non negativo, dimodochè

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0; \tag{2}$$

ed inoltre, ponendo

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=6a^2, \qquad y_1^2+y_2^2+y_3^2=6b^2, \tag{3}$$

dev'essere $a^2 \geqq b^2$, e per consegnenza $\zeta = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$. Un calcolo facile mostra che la condizione (2), insieme all'altra $a^2 \geqq b^2$, assicura la scelta dell'asse dei numeri reali in guisa che la somma $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ si trova ridotta al suo *minimo* valore. Anche questa proprietà sussiste per le equazioni di grado qualunque n, perchè, se il coefficiente di z^{n-1} è nullo, e se quello di z^{n-2} è un numero reale non positivo, queste medesime circostanze si ripresentano nell'equazione derivata. Ne segue che *una stessa retta gode della proprietà che la somma dei quadrati delle sue distanze dalle radici di* f(z), *o pure da quelle di* f'(z), *è minima.* Evidentemente anche le radici delle successive derivate si vanno sempre più accostando alla medesima retta, senza che venga meno la proprietà enunciata, finchè si giunge alla derivata $(n-2)^{\text{esima}}$, le cui radici cadono necessariamente sulla retta, e bastano per determinarla.

Riprendiamo l'equazione di terzo grado, ed osserviamo che ζ_1 e ζ_2 sono i fuochi dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

D'altra parte, se si rappresenta con σ l'area del triangolo $z_1 z_2 z_3$, ossia

$$\sigma = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

basta elevare al quadrato questo determinante, e tener presenti le uguaglianze (2) e (3), per ottenere $\sigma = 3ab\sqrt{3}$. Intanto dalle uguaglianze

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0,$$

si deduce, ricordando la prima delle (3),

$$\frac{x_1}{y_2 - y_3} = \frac{x_2}{y_3 - y_1} = \frac{x_3}{y_1 - y_2} = \frac{3a^2}{\sigma} = \frac{a}{b\sqrt{3}};$$

quindi

$$\frac{x_1^2}{a^2} = \frac{(y_2 - y_3)^2}{3b^2} = \frac{2(y_2^2 + y_3^2) - y_1^2}{3b^2} = 4 - \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Così vediamo che l'equazione (4) è soddisfatta nel punto $z'_1 = -\frac{1}{2} z_1$, che divide per metà il lato $z_2 z_3$. Similmente si vede che la (4) è soddisfatta negli analoghi punti z'_2 e z'_3, sugli altri lati. Siccome poi la corda $z'_2 z'_3$, parallela a $z_2 z_3$, è divisa per metà dal diametro $z_0 z'_1$, le direzioni di queste rette sono coniugate, e però in z'_1 l'ellisse tocca $z_2 z_3$. Altrettanto dicasi degli altri lati. È poi noto che questa ellisse, fra le infinite inscritte nel triangolo $z_1 z_2 z_3$, è quella che ha l'area più grande. Dunque *le radici di* f'(z) *sono i fuochi della massima ellisse inscritta nel triangolo, che ha per vertici le radici di* f(z). Questo non è che un caso particolare d'un bel teorema di Van den Berg. (*)

(*) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1891, p. 290.

La distanza $r=\sqrt{a^2-b^2}$ si può facilmente esprimere mediante le distanze r_1, r_2, r_3 di z_0 ai vertici del triangolo. Infatti si ha

$$r^4=(a^2+b^2)^2-4a^2b^2=\frac{1}{36}(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2-\frac{4}{27}\sigma^2. \tag{5}$$

D'altra parte, se z''_1 è il simmetrico di z_0 rispetto a z'_1, il triangolo $z_0z_2z''_1$, i cui lati hanno le lunghezze r_1, r_2, r_3, è equivalente al triangolo $z_0z_2z_3$, e però la sua area vale $\frac{1}{3}\sigma$. Ne segue, per una nota formola,

$$\sigma=\frac{3}{4}\sqrt{2r_2^2r_3^2+2r_3^2r_1^2+2r_1^2r_2^2-r_1^4-r_2^4-r_3^4};$$

poi la (5) dà

$$r^4=\frac{1}{9}(r_1^4+r_2^4+r_3^4-r_2^2r_3^2-r_3^2r_1^2-r_1^2r_2^2).$$

Supposto $r_1\leqq r_2\leqq r_3$, se si osserva che dev'essere $r_3\leqq r_1+r_2\leqq 2r_2$. la stessa (5), trascurandovi σ, dà $r\leqq r_2$. Dunque, se da z_0 come centro si descrive un circolo, lasciando fuori una sola radice di $f(z)$, fuori del circolo stesso non cadrà alcuna radice di $f'(z)$. Del resto non può caderne alcuna neppure fuori del triangolo, d'onde segue che, quando z_1, z_2, z_3 tendono a disporsi per dritto, altrettanto debbono fare ζ_1 e ζ_2. Intanto, poichè si tende anche ad avere $\sigma=0$, la (5) dà non solo $r\leqq r_2$, ma pure $r\geqq r_1$. In questa doppia limitazione sta la ragione dell'ordinario *teorema di Rolle*. Infatti, sulla retta, i varii punti si presentano nell'ordine $z_2z_1z_0z_3$; e poichè r è compreso fra r_1 ed $r_2\leqq r_3$, una radice dell'equazione derivata deve cadere fra z_1 e z_3, l'altra fra i simmetrici di questi punti rispetto a z_0, e però sempre fra z_1 e z_2. Ed ora è naturale domandarsi se una spiegazione analoga si può dare del teorema di Rolle per un'equazione di grado n. Questa domanda noi rivolgiamo ai lettori del *Periodico*.

E. Cesàro.

PICCOLE NOTE

1°. Osservazione sopra una formula utile in topografia e geodesia. — Il Chiar.mo Ing. A. Cerri, insegnante di geodesia nella R. Università di Pavia, in una pregevole sua memoria intitolata " Deviazione della stadia „ (inserita nel periodico *Il Politecnico*, Milano, 1894) ha considerato l'errore che solitamente si commette nella misura tacheometrica delle distanze, allorchè la stadia non uscendo dal piano verticale di collimazione, devia dalla posizione normale, stabilendo così l'espressione esatta di tale errore, tanto col *metodo* della *stadia verticale*, quanto coll'altro della *stadia perpendicolare* mettendo in evidenza, tanto l'influenza della *deviazione della stadia*, che quella della *inclinazione dell'asse di collimazione*.

Nel metodo della stadia verticale (più utile) il sig. Cerri, stabilisce per espressione rigorosamente esatta dell'errore v la formola:

$$v = \left(2E\,\mathrm{sen}^2\frac{\varepsilon}{2} + E\,\mathrm{sen}\,\varepsilon\,\mathrm{tang}\,\varphi\right)\mathrm{tan}\,\varphi - 2T\,\mathrm{sen}^2\frac{\varepsilon}{2}$$

ove ε è l'angolo di deviazione dalla verticale, φ l'elevazione dell'asse di collimazione sull'orizzonte ed E, T dati derivanti in base a letture fatte per la distanza orizzontale di due punti. (Vedi citata memoria.)

La formola (1) riceve una semplificazione notevole, quando si voglia per v un valore approssimato (che noi non addottiamo).

Considerando l'espressione esatta di v, vogliamo con semplici trasformazioni, metterla sotto altra forma nella quale per gli angoli φ ed ε non figuri che la sola funzione *seno*. Dalla (1) si ha:

$$v = 2E\,\mathrm{sen}^2\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{tang}\,\varphi + E\,\mathrm{sen}\,\varepsilon\,\mathrm{tang}^2\varphi - 2T\,\mathrm{sen}^2\frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \frac{2E\,\mathrm{sen}^2\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + E\,\mathrm{sen}\,\varepsilon\,\mathrm{sen}^2\varphi - 2T\,\mathrm{sen}^2\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{2E\,.\,\mathrm{sen}\frac{\varepsilon}{2}\,.\,\mathrm{sen}\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + 2E\,\mathrm{sen}\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{sen}^2\varphi - 2T\,\mathrm{sen}^2\frac{\varepsilon}{2}(1-\mathrm{sen}^2\varphi)}{1-\mathrm{sen}^2\varphi} =$$

$$= \frac{2\,\mathrm{sen}\frac{\varepsilon}{2}\left\{E\left(\mathrm{sen}\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + \cos\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{sen}^2\varphi\right) - T\,\mathrm{sen}\frac{\varepsilon}{2}(1-\mathrm{sen}^2\varphi)\right\}}{1-\mathrm{sen}^2\varphi} =$$

$$= \frac{2\,\mathrm{sen}\frac{\varepsilon}{2}\left\{E\,\mathrm{sen}\,\varphi\left(\mathrm{sen}\frac{\varepsilon}{2}\cos\varphi + \mathrm{sen}\,\varphi\cos\frac{\varepsilon}{2}\right) - T\,\mathrm{sen}\frac{\varepsilon}{2}(1-\mathrm{sen}^2\varphi)\right\}}{1-\mathrm{sen}^2\varphi} =$$

$$= \frac{2\,\mathrm{sen}\frac{\varepsilon}{2}}{1-\mathrm{sen}^2\varphi}\left\{E\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\left(\varphi + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} - T\,\mathrm{sen}\frac{\varepsilon}{2}$$

che si può anche scrivere:

$$v = \mathrm{sen}\frac{\varepsilon}{2}\left\{\frac{2E\,\mathrm{sen}\,\varphi\,.\,\mathrm{sen}\left(\varphi + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{(1+\mathrm{sen}\,\varphi)(1-\mathrm{sen}\,\varphi)} - T\right\}$$

formola che volevamo stabilire per v molto più comoda anche pel modo che contiene la T.

Stradella (Previano), 5 agosto 1900.

G. GIOVANETTI.

2°. **Integrale d'una funzione particolare.** — In certe questioni di *fisica matematica*, occorre considerare l'integrale della funzione:

$$\left\{\theta(1+\theta)(\mathrm{sen}\,n\theta + \cos n\theta)\right\}$$

cioè:

$$\int\left\{\theta(1+\theta)(\mathrm{sen}\,n\theta + \cos n\theta\right\}d\theta,$$

ove n è un numero finito intero.

Ci proponiamo pertanto il calcolo di questo integrale riducendolo alla considerazione d' integrali più semplici a determinarsi.

Considerando che si ha:

$$\int\left\{\theta(1+\theta)(\operatorname{sen} n\theta+\cos n\theta)\right\}d\theta=\int\theta(\operatorname{sen} n\theta+\cos n\theta)d\theta+\int\theta^2(\operatorname{sen} n\theta+\cos n\theta)\,d\theta=$$
$$=\int\theta\operatorname{sen} n\theta\,d\theta+\int\theta\cos n\theta\,d\theta+\int\theta^2\operatorname{sen} n\theta\,d\theta+\int\theta^2\cos n\theta\,d\theta,$$

si potrà calcolare separatamente questi integrali.

Infatti a meno di costanti si ha applicando i noti metodi d' integrazione:

$$\int\theta\operatorname{sen} n\theta\,d\theta=-\frac{\theta\cos n\theta}{n}+\frac{\operatorname{sen} n\theta}{n^2}\tag{1}$$

$$\int\theta\cos n\theta\,d\theta=\frac{\theta\operatorname{sen} n\theta}{n}+\frac{\cos n\theta}{n^2}\tag{2}$$

$$\int\theta^2\cos n\theta\,d\theta=\frac{\theta^2\operatorname{sen} n\theta}{n}+\frac{2\theta\cos n\theta}{n^2}-\frac{2\operatorname{sen} n\theta}{n^3}\tag{3}$$

$$\int\theta^2\operatorname{sen} n\theta\,d\theta=-\frac{\theta^2\cos n\theta}{n}+\frac{2\theta\operatorname{sen} n\theta}{n^2}+\frac{2\cos n\theta}{n^3}.\tag{4}$$

Sommando membro a membro questi integrali si ha:

$$\int\left\{\theta(1+\theta)(\operatorname{sen} n\theta+\cos n\theta)\right\}d\theta=-\frac{\theta\cos n\theta}{n}+\frac{\operatorname{sen} n\theta}{n^2}+\frac{\theta\operatorname{sen} n\theta}{n}+\frac{\cos n\theta}{n^2}+$$
$$+\frac{\theta^2\operatorname{sen} n\theta}{n}+\frac{2\theta\cos n\theta}{n^2}-\frac{2\operatorname{sen} n\theta}{n^3}-\frac{\theta^2\cos n\theta}{n}+\frac{2\theta\operatorname{sen} n\theta}{n^2}+\frac{2\cos n\theta}{n^3}=$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\theta(1+\theta)(\operatorname{sen} n\theta-\cos n\theta)\right\}+\frac{1}{n^2}\left\{(1+2\theta)(\operatorname{sen} n\theta+\cos n\theta)\right\}-\frac{1}{n^3}\left\{2(\operatorname{sen} n\theta-\cos n\theta)\right\}$$

espressione che rappresenta l' integrale che volevamo stabilire, ed ordinata secondo le potenze crescenti di $\frac{1}{n}$.

Stradella (Previano), 6 agosto 1900.

G. GIOVANETTI.

3°. **Sulla quistione 524.** — Nello enunciato della quistione 524 (pag. 42) è detto che la pedale della cardioide rispetto al suo vertice è una sestica *binodale:* è facile però vedere che non è esatto; poichè la cardioide è del quart'ordine, della classe terza ed ha una cuspide in ognuno dei punti ciclici (oltre quella al finito) abbiamo, con le notazioni consuete,

$$m=4,\qquad n=3,\qquad f=4,\qquad g'=1\ \text{(polo sulla curva)}$$
$$q=2,\qquad g=f'=p'=q'=0$$

e per la pedale rispetto al vertice:

$$\mathrm{M}=6,\qquad \mathrm{N}=5,\qquad \mathrm{F}=6,\qquad \mathrm{G}'=3,\qquad \mathrm{P}=1,\qquad \mathrm{Q}=4.$$

Questa pedale è dunque del sest'ordine e della classe quinta, ha nell'origine (cioè nel vertice della cardioide) un punto triplo con una coincidenza, equivalente a due punti doppi ordinari e una cuspide; in ognuno dei punti ciclici ha un punto triplo con due coincidenze, equivalenti insieme a due punti doppi e quattro cuspidi; il rimanente punto doppio è la proiezione del vertice sulla tangente doppia della cardioide. Abbiamo dunque

$$\delta = 5 \quad \text{punti doppi ordinari}$$
$$\varkappa = 5 \quad \text{cuspidi di prima specie}$$

e, come insegna la formula di Plücker,

$$N = M(M-1) - 2\delta - 3\varkappa = 6 \times 5 - 2 \times 5 - 3 \times 5.$$

Mendrisio (Svizzera), 7 agosto 1900.

V. Retali.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 508, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524

508. *Calcolare i seguenti integrali*

$$\int e^{\alpha x} \tan^m \beta x \,.\, dx,$$
$$\int e^{\alpha x} \cot^m \beta x \,.\, dx,$$
$$\int e^{\alpha x} \tanh^m \beta x \,.\, dx,$$
$$\int e^{\alpha x} \coth^m \beta x \,.\, dx.$$

G. L.

Risoluzione di G. L.

a) Si ponga per brevità

(1) $$I_m = \int e^{\alpha x} \tanh^m x \, dx.$$

Per mezzo di una integrazione per parti si trova

$$I_{m-1} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \tanh^{m-1} x - \frac{m-1}{\alpha} \int e^{\alpha x} \,.\, \tanh^{m-2} x \,.\, \operatorname{sech}^2 x \,.\, dx$$

ovvero (essendo $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$)

(2) $$\frac{\alpha}{m-1} I_{m-1} = \frac{e^{\alpha x}}{m-1} \tanh^{m-1} x - I_{m-2} + I_m.$$

Se ne deduce

(3) $$I_m = \frac{\alpha}{m-1} I_{m-1} + I_{m-2} - \frac{e^{\alpha x}}{m-1} \tanh^{m-1} x.$$

Applicando successivamente questa formola di riduzione, il calcolo di I_m si riduce a quella di

$$I_0 = \int e^{\alpha x} \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$$

e di

$$I_1 = \int e^{\alpha x} \tanh x \, dx = \int e^{\alpha x} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, dx.$$

Ponendo $e^x = y$ si trova

$$I_1 = \int \frac{1-y^2}{1+y^2} y^{\alpha-1}\, dy;$$

integrale che per α intero o anche frazionario si determina facilmente;

b) Per calcolare,

$$I'_m = \int e^{\alpha x} \coth^m x\, dx = I_{-m}$$

possiamo valerci della stessa formola (2). Se in essa poniamo $m = -(n-2)$, si trova

$$\frac{\alpha}{-(n-1)} I_{-(n-1)} = \frac{e^{\alpha x}}{-(n-1)} \tanh^{-(n-1)} x - I_{-n} + I_{-(n-2)},$$

ossia

$$I'_n = \frac{\alpha}{n-1} I'_{n-1} + I'_{n-2} - \frac{e^{\alpha x}}{n-1} \coth^{n-1} x. \tag{4}$$

Per mezzo di questa formola il calcolo di I'_m si fa dipendere da quello di $I'_0 = I_0$ e di

$$I'_1 = \int e^{\alpha x} \coth x\, dx = \int e^{\alpha x} \frac{e^x + e^{-x}}{e^{\alpha x} - e^{-x}}\, dx,$$

che si calcola come I_1 per α intero o frazionario.

c) Per il calcolo di $\int e^{\alpha x} \tan x\, dx$ si trova una formola di riduzione analoga alla (2). Posta $T_m = \int e^{\alpha x} \tan^m x\, dx$, si trova con una integrazione per parti

$$T_{m-1} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \tan^{m-1} x - \frac{m-1}{\alpha} \int e^{\alpha x} \tan^{m-2} x \sec^2 x\, dx,$$

da cui

$$\frac{\alpha}{m-1} T_{m-1} = \frac{e^{\alpha x}}{m-1} \tan^{m-1} x - T_{m-2} - T_m \tag{5}$$

$$T_m = -\frac{\alpha}{m-1} T_{m-1} - T_{m-2} + \frac{e^{\alpha x}}{m-1} \tan^{m-1} x. \tag{6}$$

Così il calcolo di T_m si può far difendere da quello di T_1 e T_0.

518. *Se* P_1, P_2, P_3 *sono le proiezioni di* P *sui lati del triangolo* ABC, *determinare il luogo di* P *tale che le rette* AP_1, BP_2, CP_3 *siano concorrenti.*

A. Barozzini.

Risoluzione del prof. Claudio Merizzi del R. Ginnasio di Ceva.

Presi come assi cartesiani il lato BC, e l'altezza relativa, sia h l'ordinata di A, siano a_1, a_2 le ascisse di C, B, e sia $P \equiv (\xi, \eta)$: affinchè le tre rette AP_1, BP_2, CP_3, siano concorrenti, dovrà essere pel teorema di Ceva

$$\overline{BP_1} \cdot \overline{CP_2} \cdot \overline{AP_3} = \overline{P_1C} \cdot \overline{P_2A} \cdot \overline{P_3B}.$$

Ora $\overline{BP_1} = \xi - a_2$, $\overline{P_1C} = a_1 - \xi$. Essendo poi

$$a_1 x - hy - a_1\xi + h\eta = 0$$

l'equazione della retta PP_2 (passante per P, e normale ad AC) sarà $\frac{a_1^2 - a_1\xi + h\eta}{\sqrt{a_1^2 + h^2}}$ la lunghezza $\overline{CP_2}$, e quindi $\sqrt{a_1^2 + h^2} - \frac{a_1^2 - a_1\xi + a\eta}{\sqrt{a_1^2 + h^2}}$ ossia $\frac{h^2 + a_1\xi - h\eta}{\sqrt{a_1^2 + h^2}}$ quella di $\overline{P_2A}$. Nello stesso modo si trova

$$\overline{AP_3} = \frac{h^2 + a_2\xi - h\eta}{\sqrt{a_2^2 + h^2}} \qquad \overline{P_3A} = \frac{a_2^2 - a_2\xi + h\eta}{\sqrt{a_2^2 + h^2}}.$$

Sostituendo questi valori nella (1) si trova l'equazione del luogo di P

$$(2)\quad (\xi-a_2)(a_1{}^2-a_1\xi-h\eta)(h^2+a_2\xi-h\eta)+(\xi-a_1)(h^2+a_1\xi-h\eta)(a_2{}^2-a_2\xi+h\eta)=0,$$

che è una cubica passante pei tre vertici e per l'ortocentro del triangolo.

Se il triangolo fosse isoscele, cioè $a_2 = -a_1$ la (2) diverrebbe

$$\xi\left\{a_1{}^2\xi^2-h^2\eta^2+h\eta(h^2-a_1{}^2)-a_1{}^4\right\}=0.$$

che si spezza nelle due

$$\xi=0, \qquad a_1{}^2\xi^2-h^2\eta^2+h\eta(h^2-a_1{}^2)-a_1{}^4=0$$

cioè nella bisettrice dell'angolo A ed in una iperbole avente il centro nel punto $\equiv\left(0,\ \dfrac{h^2-a_1{}^2}{2h}\right)$ e l'asse delle η come asse, reale od immaginario, secondo che è $h^2(h^2-2a_1{}^2) \gtrless 3a^4$.

Tale iperbole, se il triangolo fosse anche rettangolo (cioè $a_2=-a_1=-h$), sarebbe equilatera ed avrebbe per centro il punto medio della ipotenusa e per vertici gli estremi di questa.

Se finalmente in triangolo fosse equilatero $\left(\text{cioè } a_2=-a_1=-h\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, la (2) diverrebbe

$$\xi(\xi+\sqrt{3}\eta-a)(\xi-\sqrt{3}\eta-a)=0,$$

cioè la cubica si spezzerebbe nelle tre bisettrici del triangolo.

Risoluzione del comandante E.-N. Barisien di Costantinopoli.

Con procedimento analogo al precedente il sig. Barisien trova l'equazione della curva in coordinate polari sotto la forma

$$r\cos\theta[a\cos B-2\cos(B+\theta)][b-r\cos(C-\theta)]=r\cos(C-\theta)(a-r\cos\theta)[b\cos A+r\cos(B+\theta)]$$

essendo C il polo e CB l'asse polare, e da questa deduce l'equazione in coordinate cartesiane. Egli fa inoltre le seguenti osservazioni:

1°. La curva passa per i centri dal circolo inscritto e del circolo circoscritto, per il punto di Lemoine, ecc.

2°. Il luogo del punto Q comune alle rette AP_1, BP_2, CP_3 è un'altra cubica che è circoscritta al triangolo ABC e passa per i punti notevoli del triangolo che che han la dipendenza richiesta fra P e Q. Così passa per il baricentro del triangolo (corrispondente al centro del circolo circoscritto) e per il punto di Gergonne (corrispondente al centro del circolo inscritto).

519. *Determinare sull'asse della strofoide retta tre punti* A, B, C *tali che, per ogni punto* P *della curva, abbia luogo la relazione*

$$\overline{PB}^2 = PA\,.\,PC.$$

A. Barozzini.

Risoluzione del prof. C. Merizzi.

L'equazione della strofoide retta, riferita all'asse ed alla normale a questo nel nodo, può scriversi, indicando con a la distanza del nodo al vertice,

$$x(x^2+y^2)-ax^2+ay^2=0.$$

Sia $P\equiv(x, y)$ e siano u, v, w le ascisse dei tre punti da determinare, A, B, C.

Essendo

$$\overline{PA}=\sqrt{(x-u)^2+y^2},\quad \overline{PB}=\sqrt{(x-v)^2+y)^2},\quad \overline{PC}=\sqrt{(x-w)+y^2},$$

dovrà essere

$$(x-v)^2+y^2=\sqrt{(x-u)^2+y^2}\,.\,\sqrt{(x-w)^2+y^2}\,;$$

donde quadrando, riducendo ed ordinando

$$x(x^2+y^2)(-4v+2u+2w)+x^2(6v^2-u^2-w^2-4uw)+$$
$$+y^2(2v-u^2-w^2)+x(-4v^3+2uw^2+2u^2w)+(v^4-u^2w^2)=0,$$

ossia

$$x(x^2+y^2)+\frac{6v^2-u^2-w^2-4uw}{-4v+2u+2w}x^2+\frac{2v^2-u^2-w^2}{-4v+2u+2w}y^2+$$
$$+\frac{-4v^3+2uw^2+2u^2w}{-4v+2u+2w}x+\frac{v^4-u^2w^2}{-4v+2u+2w}=0.$$

Dovendo questa equazione essere soddisfatta per tutti i valori di x, y che soddisfano all'equazione della strofoide, i termini simili delle due equazioni devono avere i coefficienti proporzionali, ossia deve essere:

(1) $\quad 6v^2-u^2-w^2-4uw=-a(-4v+2u+2w)$

(2) $\quad 2v^2-u^2-w^2=a(-4v+2u+2w)$

(3) $\quad -4v^3+2uw^2+2u^2w=0$

(4) $\quad v^4-u^2w^2=0.$

È facile vedere che la (4) è conseguenza delle altre tre: ora, sommando le (1), (2) membro a membro, abbiamo

(5) $$4v^2=(u+w)^2$$

che si scinde nelle due equazioni

(6) $\quad 2v=+(u+w)$ $\qquad$ (7) $\quad 2v=-(u+w)$

Ora è chiaro che il complesso dei due sistemi (2) (3) (6) e (2) (3) (7) cioè

$$\begin{cases}2v^2-u^2-w^2=a(-4v+2u+2w)\\ 2v^3=uw(u+w)\\ 2v=u+w\end{cases}\qquad \begin{cases}2v^2-u^2-w^2=a(-4v+2u+2w)\\ 2v^3=uw(u+w)\\ 2v=-(u+w),\end{cases}$$

sarà equivalente al sistema (1) (2) (3) (4).

Il primo di questi sistemi dedotti dà la soluzione $u=v=w=0$ che è da trascurare: il secondo ci dà la soluzione $u=2a(\sqrt{2}-1),\, w=-2a(\sqrt{2}+1)$ e viceversa, $v=2a$.

Osservazione. — Si deduce che la strofoide retta può anche considerarsi come luogo del punto P che gode la proprietà

$$\overline{PB}^2=\overline{PA}\,.\,\overline{PC}$$

essendo A, B, C, tre punti di una retta situati alle distanze $2a(\sqrt{2}-1)$, $2a$, $-2a(\sqrt{2}+1)$ da un punto fisso O della stessa, e assumere questa proprietà per definizione della strofoide retta.

520. *La curva rappresentata dall'equazione*

$$(x^2 + 2y^2)^4 (x^2 + y^2) a^4 = x^6$$

ha la stessa area della lemmiscate di Bernoulli

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y)^2.$$

E.-N. BARISIEN.

Risoluzione dei proff. Merizzi e Retali.

L'equazione polare della prima curva è

$$\rho^2 = \frac{a^2 \cos^3 \theta}{(1 + \operatorname{sen}^2 \beta)^2}$$

la quarta parte della sua area è dunque

$$\frac{a^2}{2} \int^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 \theta}{(1 + \operatorname{sen}^2 \theta)^2} d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^1 \frac{1 - z^2}{(1 + z^2)^2} \cdot dz = \frac{a^2}{2} \left(\frac{z}{1 + z^2}\right)_0^1 = \frac{a^2}{4}$$

e il teorema è dimostrato, perchè è notissimo che l'area della lemmiscata

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta \qquad \text{è} \qquad a^2.$$

Altra risoluzione del prof. Barozzini.

521. *Si considerino le due curve, di cui le equazioni polari sono*

$$r = a \frac{sen^2 \theta}{cos \theta}, \qquad r = a \, tan \theta,$$

e che rappresentano una cissoide retta *ed una* cappa. *L'area limitata fra queste due curve, cha sono asintotiche, è equivalente a quella del cerchio generatore della cissoide.*

E.-B. BARISIEN.

Risoluzione dei proff. Barozzini e Merizzi.

Essendo le due curve simmetriche rispetto all'asse polare, l'area da esse limitata sarà espressa da

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2 \operatorname{sen}^4 \theta}{2 \cos^2 \theta} - \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2 \cos^2 \theta}\right) d\theta$$

ossia

$$a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \, (\operatorname{sen}^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

che semplificato diventa

$$-a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta .$$

Abbiamo dunque

$$\text{Area} = -a^2 \left[\frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta - \theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \pi a^2.$$

c. d. d.

522. *Dimostrare che:*

1°. *Se si prolungano i raggi vettori focali d'un ellisse di assi* 2a *e* 2b, *della lunghezza* $-b+\sqrt{b^2+2ab}$ *il luogo degli estremi di questi raggi vettori è una curva, di cui l'area è doppia di quella dell'ellisse.*

2°. *Se si diminuiscono i raggi vettori focali della lunghezza* 2b, *la curva luogo degli estremi di questi raggi vettori accorciati ha area uguale a quella dell'ellisse.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione e generalizzazione del prof. Barozzini.

L'equaz. dell'ellisse sia $r=\frac{b^2}{a(1-e\cos\theta)}$ e quella della concoide $r=\frac{b^2}{a(1-e\cos\theta)}+m$.

Si ha per area della concoide

$$A=(m^2+2bm+ab)\pi.$$

Se si vuole che il rapporto fra l'area della concoide e quella dell'ellisse sia λ, la m dovrà verificare l'equazione

$$m^2+2bm+ab=\lambda ab.$$

Se $\lambda=2$ si ha $\qquad m=-b\pm\sqrt{b^2+2ab}.$

Se $\lambda=1$ $\qquad m=0 \quad \text{e} \quad m=-2b.$

Conviene però osservare in quest'ultimo caso che se $2b<a+c$ la curva ha un nodo il quale viene contato due volte nella misura dell'area della curva.

Altra risoluzione del prof. Merizzi.

523. *La tangente e la normale in un punto* M *d'un'ellisse incontrino in* T *ed* N *l'asse maggiore, e sieno* T' *e* N' *i simmetrici di* T *e* N *rispetto al centro dell'ellisse. Quando* M *percorre l'ellisse:*

1° *la retta* MN' *è normale ad una ellisse fissa;*

2° *il luogo del punto di mezzo del segmento* MN' *è un'ellisse;*

3° *il luogo del punto di mezzo del segmento* MT' *è una curva, tale che l'area compresa fra essa ed i suoi assintoti è finita ed equivalente ad un quarto dell'area dell'ellisse data.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione dei proff. Merizzi e Retali.

Supposto l'ellisse riferito agli assi, se (ξ,η) son le coordinate di M e T_0, N_0 i punti medi dei segmenti MT', MN', le ascisse di T ed N sono rispettivamente $\frac{a^2}{\xi}$, $e^2\xi$, quelle di T', N', $-\frac{a^2}{\xi}$, $-e^2\xi$, e le coordinate di T_0, N_0

$$x=(\xi^2-a^2):2\xi \quad , \quad y=\eta:2 \tag{1}$$

$$x=b^2\xi:2a^2 \quad , \quad y=\eta:2 \tag{2}$$

Ciò posto: 1° l'equazione della retta |MN'| è

$$\eta\,.\,x-(1+e^2)\,\xi\,.\,y+e^2\xi\eta=0$$

e l'equazione tangenziale dell'inviluppo

$$a^2(1+e^2)^2\,.\,u^2+b^2v^2=a^2b^2e^4\,.\,u^2v^2$$

2° ponendo nella

$$b^2\xi^2+a^2\eta^2=a^2b^2 \tag{3}$$

i valori $\xi = 2a^2x : b^2$, $\eta = 2y$ ricavati dalle (2) troviamo per luogo del punto N_0 l'ellisse

$$4\,(a^2x^2 + b^2y^2) = b^4$$

Ponendo invece nella (3), $\xi = x \pm \sqrt{a^2 + x^2}$, $\eta = 2y$, ricavati dalle (1), si ha l'equazione del luogo di T_0,

$$4y^2\,(b^2x^2 + a^2y^2) = b^4x^2, \tag{4}$$

una quartica razionale somigliante nella forma a un *cappa*. L'origine è un tacnodo con l'asse delle y per tangente tacnodale; il punto all'infinito dell'asse delle x è un *punto doppio d'inflessione* e le tangenti in esso sono $2y = \pm b$; gli altri due punti all'infinito della quartica sono quelli stessi dell'ellisse data.

Il quarto dell'area compresa fra la quartica e i suoi asintoti reali è dunque

$$A = \int_0^{\frac{b}{2}} x dy = \frac{2a}{b}\int_0^{\frac{b}{2}} \frac{y^2dy}{\sqrt{b^2 - 4y^2}} = \frac{a}{b}\int_0^{\frac{b}{2}} \frac{y^2dy}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2}}$$

e siccome il valore dell'ultimo integrale definito è $\frac{\pi}{4}\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi b^2}{16}$ abbiamo finalmente $4\,A = \frac{\pi}{4}\,ab$.

Altra risoluzione del prof. A. Barozzini.

524. *La podaria d'una cardioide rispetto al suo vertice è una sestica binodale, di cui l'area* S *ed il perimetro* p *sono*

$$S = \frac{27\pi a^2}{32}, \qquad p = 6a + a\sqrt{3}\,.\,L\,(\sqrt{3} + 2) = 8{,}756\ldots a$$

essendo a *la distanza fra il punto di regresso ed il vertice della cardioide.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. A. Barozzini di Treviso.

L'equazione polare della cardioide si può mettere sotto la forma $r = \frac{a}{2}(1 - \cos\theta)$.

Osservando che la tangente alla curva fa col raggio vettore al punto di contatto un angolo uguale a $\frac{\theta}{2}$, si possono dedurre per le coordinate di un punto della podaria i valori:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{a}{4}\,[6\cos^3\theta + 3\cos^2\theta - 6\cos\theta + 1], \\ y = -\dfrac{3a}{4}\,\mathrm{sen}\,\theta\,[2\cos^2\theta + \cos\theta - 1]. \end{cases}$$

Eliminando θ si ha per equazione della podaria:

$$27\,a^2y^2\,[y^2 + x^2 + ax] = [y^2 + (x+a)^2]^2\,[8y^2 + (x+a)\,(8x - a)],$$

sestica tricircolare, che ha un nodo in $y = 0, x = \frac{a}{8}$, e nel vertice della cardioide un punto triplo formato da un ramo della curva e da una cuspide.

L'area della curva è data da

$$S = \frac{1}{2}\int (xdy - ydx) = \frac{3a^2}{32}\int [15\cos^3\theta - \cos^2\theta - 11\cos\theta + 5]\,d\theta$$
$$= \frac{3a^2}{64}\,[10\,\mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta - \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta + 9\theta].$$

Integrando fra $-\pi$ e $+\pi$ si ha $\frac{27\pi a^2}{32}$ per area di tutta la curva, ma così il nodo interno è contato due volte. Integro fra $-\frac{\pi}{3}$ e $+\frac{\pi}{3}$ ed ho pel nodo interno $\frac{9\pi a^2}{32}$ quindi pel rimanente della curva pure $\frac{9\pi a^2}{32}$.

La lunghezza si ha da

$$p = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{3a}{4} \int d\theta \sqrt{(1 + \cos\theta)(5 - 3\cos\theta)};$$

o ponendo $\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = z$

$$p = a\sqrt{3} \int dz \sqrt{1 + z^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \left[z\sqrt{1 + z^2} + \log\left\{ z + \sqrt{1 + z^2} \right\} \right].$$

Prendendo l'integrale fra i limiti $\theta = \pm \pi$ ossia fra $z = -\sqrt{3}$ e $2 = \sqrt{3}$, si ha

$$p = 6a + a\sqrt{3} \log(2 + \sqrt{3}).$$

QUISTIONI PROPOSTE

525. Trovare un circolo per cui sia minima la somma dei quadrati delle distanze di quattro punti alle rispettive polari.

E. Cesàro.

526. Il circolo osculatore in un punto M variabile d'un'ellisse incontra l'ellisse in P. Trovare l'area della curva inviluppo della perpendicolare abbassata da M sulla tangente all'ellisse nel punto P.

527. Si trovi

1° il luogo dei centri dei circoli inscritti ed ex-inscritti a tutti i triangoli, che essendo inscritti in un circolo dato, hanno due loro lati paralleli a due direzioni date.

2° L'inviluppo del terzo lato di questi triangoli.

528. Sulla tangente in un punto M di una parabola di fuoco F si prendano due punti M′, M″ tali che sia MM′=MM″=MF. Il luogo di questi punti M′, M″ è una cubica. Si trovi l'area compresa fra questa curva e il suo asintoto.

529. Per ogni punto M di una ellisse si conduca una retta che faccia coll'ellisse un angolo costante α. Il circolo che ha il centro in M e che è tangente all'asse minore dell'ellisse incontra la retta suddetta in due punti P, Q. Il luogo di ciascuno di questi punti si compone di due curve chiuse equivalenti, e delle quali l'area resta costante qualunque sia l'angolo α.

530. Se si porta sopra ogni raggio vettore focale FM d'un'ellisse un segmento uguale ad un semidiametro coniugato a quello che passa per M, il luogo dell'estremo di questo segmento è una quartica di cui l'area è equivalente a quella dell'ellisse.

531. Dimostrare che

$$\int_{\sqrt[4]{15}}^{\sqrt{3\sqrt[4]{3}}} \frac{(x-15)\,dx}{\sqrt{12x-(x^2-9)^2}}.$$

E.-N. Barisien.

532. Se y è una funzione della variabile x, ponendo $x=e^t$, ed assumendo t come nuova variabile indipendente, si ha, qualunque sia n,

$$x^n \cdot \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n y}{dt^n} - s_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + s_2 \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} - \ldots + (-1)^h s_h \frac{d^{n-h} y}{dt^{n-h}} + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{dy}{dt},$$

dove s_h indica la somma dei $\binom{n-1}{h}$ prodotti dei numeri $1, 2, \ldots\, n-1$, combinati h ad h in tutti i modi possibili.

M. Chini.

BIBLIOGRAFIA

Giuseppe Scoto. — *Elementi di geometria* per le scuole secondarie e più particolarmente ad uso delle scuole normali del Regno. Palermo, Sandron, 1900.

L'A. nella prefazione esponendo le sue idee riguardo allo scopo che deve avere lo studio della Matematica nella scuola Normale dice fra le altre cose che " dee " porre nella mente dei futuri maestri nozioni precise, idee chiare, concetti esatti " e completi ". Sembra dunque che l'A. creda che il suo libro abbia " nozioni pre- " cise, idee chiare, concetti esatti e completi. Ma ciò è proprio vero? — Spigolerò qua e là e lascerò poi giudice il lettore.

A pag. 10 si legge: " ... chiameremo linea sia il contorno tutto intero di una " porzione di superficie che una parte sola di esso contorno. Necessitando una " distinzione chiameremo *linea completa o chiusa* la prima, *segmento di linea l'altra.* Siccome non dà una definizione speciale per *linea aperta* e per conseguenza deve logicamente intendersi che chiami linea aperta ogni linea che non è chiusa, poichè a pag. 11 è detto che la retta è una linea aperta, segue che *la retta non è completa* ed inoltre che è *un segmento di linea!*

Completa e chiusa, almeno se non si vuol porre una contraddizione con i rispettivi significati che hanno queste parole nella lingua italiana, non possono esser sinonimi. Per es.: come chiamerebbe l'autore la *parte* di una curva (*boucle* dei francesi) che percorrerebbe un punto mobile partendosi da un nodo e ritornando in esso?

Altrettanto dicasi per le superficie per le quali l'A. fa le stesse distinzioni (pag. 10 e 18). A pag. 17 l'A. dà la definizione di spazzata e parla di linee senza avere ancora considerato il piano, e perciò s'intende che parli anche di linee *non piane;* allora non si spiega come possa dire: " ...rispetto ad una linea non retta " diremo *porzione piana intercetta* in essa quella che è limitata o dalla linea stessa " quando essa è chiusa, oppure dalla linea e dal segmento che ne unisce i termini " quando è aperta. Del resto anche fra le linee piane, secondo la riportata definizione quale sarebbe la *porzione piana intercetta* in una linea aperta indefinita? (per fissare le idee, si pensi per es.: ad una parabola cubica).

Lasciamo andare " i segmenti piani estesi indefinitamente in ogni direzione „ che figurano a pag. 18 e la dimostrazione dell'eguaglianza di angoli piatti (pag. 24) fatta precedere alla definizione di eguaglianza fra angoli (pag. 25), ma a proposito di eguaglianza e diseguaglianza di angoli è bene notare che a pag. 25 è detto: " dati due angoli, se si sovrappongono in maniera che due lati (e quindi i vertici) " coincidano, può darsi che gli altri due lati coincidano pure o che non abbiano " che la sola origine comune. Nel primo caso i due angoli sono eguali, nell'altro " non combaciano e diconsi diseguali „. Segue da ciò che se due angoli eguali si portano ad esser consecutivi, si viene a provare che essi sono diseguali.

Così potrei continuar di questo passo e citare frasi come la seguente:... " se " i due angoli non potranno entrare in uno stesso triangolo „ (pag. 45) e formole come questa:

$$\text{settore} = \frac{\text{arco} \times \text{raggio}}{2} \quad (\text{pag. } 143).$$

E dire che l'A. critica, con ragione, la scrittura $m.3 \times m.5 = m^2 15!$...; ma credo che basti.

Tuttavia, se il libro dello Scoto ha i suoi difetti, che principalmente trovansi nei concetti generali e particolarmente nelle definizioni, dall'altro lato, nel rimanente, dove non si discosta dagli ordinari trattati, ha il pregio di esser scritto in forma piana e in generale con assai chiarezza.

G. C.-L.

CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI A PARIGI

(6-12 AGOSTO 1900)

Il congresso si doveva inaugurare alle 14 del 6 agosto, ma, per una certa tinta di disordine che vi ha regnato uniformemente e che ha contribuito a renderlo più originale, fu inaugurato alle 9 del mattino, togliendo così l'opportunità a quelli che arrivarono a Parigi all'ultim'ora di ascoltare la conferenza del sig. Moritz Cantor, *Sur l'historiographie des mathématiques;* e la conferenza del sig. Vito Volterra intitolata: *Trois analistes italiens:* Betti, Brioschi, Casorati *et trois manières d'envisager les questions d'analyse - Leur influence.*

Gl'iscritti al congresso furono circa trecento, di cui cinquanta circa rappresentavano il sesso gentile; gl'intervenuti furono poco meno. Fra i congressisti italiani intervenuti notammo i signori Capelli, Maggi, Peano, Volterra e la sua signora, Fano, Levi-Civita, Amodeo e la sua signora, Boccardi, Contarino, Padoa, Poggi, Vacca e Vailati. Erano inscritti, ma non intervennero, Del Re, Guccia, Somigliana, Veronese e la sua signora. Vi erano delegati ufficiali dell'Austria, della Spagna, degli Stati Uniti, dell'Ungheria, del Giappone, del Mexico, dell'Università di Columbia, della facoltà di Scienze di Buenos-Ayres e dei Ministri della Marina, e delle Belle Arti della Francia. L'inaugurazione fu fatta al Palazzo dei Congressi nel recinto dell'Esposizione; le sedute si tennero alla Sorbona negli elegantissimi anfiteatri di Cauchy e di Leverrier. Fu nominato presidente d'onore Hermite, presidente effettivo Poincaré; presiedevano i lavori delle Sezioni; Hilbert per l'Aritmetica ed Algebra, Painlevé per l'Analisi, Darboux per la Geometria, Larmor per la Meccanica, Fisico-matematica e Meccanica Celeste, M. Cantor per la Bibliografia, Storia, Insegnamento e Metodo.

Non è possibile riferire tutte le comunicazioni fatte nelle diverse sezioni; esse sorpassano la quarantina; queste si potranno rilevare ed ammirare negli Atti del Congresso che ci auguriamo non tardino ad essere pubblicati. Alcune delle comunicazioni, per omissioni fattane nell'elenco dei lavori, furono annunziate con avvisi messi alle porte delle aule. Le comunicazioni dei matematici italiani furono, per ordine alfabetico degli autori, le seguenti:

Amodeo, *Coup d'œil sur les courbes algebriques au point de vue de la gonalité.*

Boccardi, *Sur le calcul des perturbations spéciales des planètes.*

Capelli, *Le operazioni iperaritmetiche e l'indirizzo combinatorio dell'aritmetica ordinaria.*

Padoa, *Un nouveau système irréductible des postulats pour l'algèbre.*

— *Un nouveau système de définitions pour la géométrie euclidienne.*

Peano, *Sur la logique mathématique.*

Il congresso si chiuse l'11 agosto con due conferenze; una di Mittag-Leffler "*Une page de la vie de Weierstrass*"; l'altra di Poincaré "*Du rôle de l'intuition et de la logique en Mathématique*".

Su proposta di Cantor fu votato che la futura sede del Congresso sarà Baden-Baden nel 1904; e su proposta di Volterra fu raccomandata per sede del Congresso del 1898 la città di Roma.

Le cortesie fatte ai congressisti furono: un *lunch* offerto dal Direttore della Scuola Normale; un ricevimento del pomeriggio fatto dal Presidente della Repubblica all'Eliseo; un ricevimento serale fatto dal Principe Rolando Bonaparte.

Il pretesto di un *déjeuner* riunì un'ultima volta tutti i congressisti, alle 11 1/2 del giorno 12, nella Sala dell'Athéné Saint Germain, ove tutti si augurarono colla massima cordialità di rivedersi il 1904. A.

ERRATA-CORRIGE del fasc. precedente.

A pag.	4, linea 8,	*invece di*	$(u_{n-k-2}u_{n-k-2}+\ldots$	*leggi*	$(u_{n-k-2}a+\ldots$
"	5, ult. linea in nota	"	U_{+n1}	"	U_{n+1}
"	7, in fondo,	"	$u^{\delta}{}_{-1}$	"	$u_{\delta-1}$
"	" l'ultima formola va denotata col numero (8)				
"	10, linea penultima	*invece di*	mentre sono fissi m, e ρ,	"	mentre sono fissi m, ρ e λ,
"	11, " "	"	$\frac{u_{m\rho}}{u}$	"	$\frac{u_{m\rho}}{u_{\lambda\rho}}$.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 25 Ottobre 1900.

SUCCESSIONI DI NUMERI INTERI POSITIVI

ciascuno dei quali è una funzione lineare dei due precedenti

Mi propongo di studiare in questa Nota quelle successioni di numeri interi positivi V_n i cui termini (per $n \geqq 3$) sono legati dalla relazione lineare $V_n = hV_{n-1} + lV_{n-2}$, dove h, l sono interi positivi comunque fissati, e V_1, V_2, termini *iniziali*, sono pure interi positivi fissati a piacere. Le ricerche di cui mi occupo sono fondate sopra una relazione tra i termini V_n di una qualunque delle dette successioni (successione V), e quelli v_n di quella speciale successione v, dedotta dalla V quando si supponga $V_1 = 1$, $V_2 = h$. Alcune successioni già studiate in un'altra Nota che ho pubblicato su questo *Periodico* (*) non sono che un caso particolarissimo delle V, v, e le loro proprietà si trovano qui, insieme ad altre ricerche, generalizzate od estese. (**) Le nuove ricerche si riferiscono alla successione v; esse hanno speciale attinenza coll'aritmetica ordinaria e mettono spesso in vista notevoli corrispondenze tra certe proprietà dei termini v_n, e quelle analoghe dei loro indici. — Sono comprese tra queste proprietà alcune relative ai termini v_p in cui p è un numero primo: sotto certe condizioni, uno qualunque di tali termini non ammette, *nella successione,* divisori diversi da sè stesso e dall'unità ed è perciò chiamato *primo nella successione;* i numeri primi nella successione presentano, come vedremo, alcune analogie coi numeri primi.

I.

1. Consideriamo la successione

$$V \equiv V_1, V_2, V_3, \dots V_n, \dots$$

già definita, e siano rispettivamente α, β i valori dei termini iniziali V_1, V_2. Essendo per l'ipotesi

$$V_{n+1} = hV_n + lV_{n-1}$$
$$V_{n+2} = hV_{n+1} + lV_n$$

(*) " Di alcune successioni ricorrenti ecc. ", Tomo XVI, luglio-agosto, 1900.
(**) Per $h = l = 1$ le V, v si riducono alle U, u della nota citata.

si deduce mediante sostituzione

$$V_{n+2} = (h^2 + l)\, V_n + hl V_{n-1}$$

Analogamente sostituendo questa espressione di V_{n+2} e la precedente di V_{n+1} nella relazione

$$V_{n+3} = h V_{n+2} + l V_{n+1}$$

si trova

$$V_{n+3} = [h(h^2 + l) + hl]\, V_n + l(h^2 + l)\, V_{n-1}$$

Ciò posto se si considera la successione

$$v \equiv v_1, v_2, v_3, \ldots v_n, \ldots$$

definita da

$$v_1 = 1\,, v_2 = h\,, v_n = h v_{n-1} + l v_{n-2} \qquad (n \geqq 3)$$

sarà

$$v_3 = h^2 + l\,, v_4 = h(h^2 + l) + lh$$

pertanto risulterà ancora

$$V_{n+2} = v_3 V_n + l v_2 V_{n-1}$$
$$V_{n+3} = v_4 V_n + l v_3 V_{n-1}$$

Queste formole provano che per $s = 2$, $s = 3$ ha luogo la relazione

$$V_{n+s} = v_{s+1}\, V_n + l v_s\, V_{n-1}$$

Proveremo col metodo di induzione che è vera in generale. — Supposto infatti che sia

$$V_{n+(s-2)} = v_{s-1}\, V_n + l v_{s-2}\, V_{n-1}$$
$$V_{n+(s-1)} = v_s\, V_n + l v_{s-1}\, V_{n-1}$$

si moltiplichi la prima per l, e la seconda per h; sommando risulta

$$h V_{n+(s-1)} + l V_{n+(s-2)} = (h v_s + l v_{s-1})\, V_n + l(h v_{s-1} + l v_{s-2})\, V_{n-1}$$

che per la legge di ricorrenza stabilita nell'ipotesi diviene

(I) $$V_{n+s} = v_{s+1}\, V_n + l v_s\, V_{n-1}$$

come si voleva provare.

2. Dalla precedente relazione, che è quella cui accennavamo in principio, discende subito un'altra tra i soli termini della successione v. Infatti i termini iniziali α, β della V essendo arbitrari possiamo porre in particolare $\alpha = 1$, $\beta = h$; allora (poichè la legge di ricorrenza tra le v_n è la stessa che quella tra le V_n) le V_n si riducono alle v_n, e perciò la (I) con questo cangiamento diviene

(1) $$v_{n+s} = v_n\, v_{s+1} + l v_s\, v_{n-1}$$

Dalla stessa (I) poi si deduce ancora la espressione delle V_n in funzione delle v_n e, naturalmente, dei termini iniziali α, β. — Infatti scambiandovi tra loro s, n, ciò che è lecito perchè entrambi arbitrari, si ha

$$V_{n+s} = v_{n+1} V_s + l v_n V_{s-1}$$

e ponendo $s = 2$, coll'osservare che è $V_2 = \beta$, $V_1 = \alpha$, si ha

$$V_{n+2} = \beta v_{n+1} + l\alpha v_n$$

ovvero, mutando n in $n-2$,

(2) $$V_n = \beta v_{n-1} + l\alpha v_{n-2}$$

3. Richiamo con qualche aggiunta alcune definizioni della mia Nota citata:

a) *Se in quattro termini* V_α, V_β, V_γ, V_δ $(\alpha < \beta < \gamma < \delta)$ *è* $\beta - \alpha = \delta - \gamma$ *si dirà che essi formano un gruppo simmetrico.*

b) *Due gruppi simmetrici*

$$V_\alpha, V_\beta, V_\gamma, V_\delta$$
$$V_{\alpha'}, V_{\beta'}, V_{\gamma'}, V_{\delta'}$$

si diranno equisimmetrici quando è $\beta - \alpha = \beta' - \alpha'$, $\gamma - \beta = \gamma' - \beta'$.

c) *Un gruppo di tre termini* V_α, V_β, V_γ *si dirà simmetrico quando* $\beta - \alpha = \gamma - \beta$.

d) *Due gruppi simmetrici*

$$V_\alpha, V_\beta, V_\gamma$$
$$V_{\alpha'}, V_{\beta'}, V_{\gamma'}$$

si diranno equisimmetrici se $\beta - \alpha = \beta' - \alpha'$.

Aumentando o diminuendo gli indici di un gruppo simmetrico di uno stesso numero y si ottiene manifestamente un secondo gruppo equisimmetrico al primo; se $y = 1$ i due gruppi equisimmetrici si diranno *consecutivi*.

Dato un gruppo simmetrico

$$V_\alpha, V_\beta, V_\gamma, V_\delta$$

con $\alpha > 1$, sottraendo da ciascun indice $\alpha - 1$ si ottiene il gruppo equisimmetrico

$$V_1, V_{\beta-\alpha+1}, V_{\gamma-\alpha+1}, V_{\delta-\alpha+1}$$

Aumentando di 1 gli indici di questo gruppo, ripetendo sul gruppo ottenuto la stessa operazione e così di seguito si forma una successione di gruppi equisimmetrici a quello dato, nella quale ogni gruppo è *consecutivo* di quello che lo precede ed occupa un posto rappresentato dall'indice del suo primo termine. A tale successione che contiene manifestamente *tutti* i gruppi equisimmetrici al gruppo dato daremo il nome di *sistema ordinato* di gruppi equisimmetrici. Ogni coppia di interi positivi x, y (da considerarsi nell'ordine scritto) *individua* un sistema, cioè quello in cui x è la differenza tra gli indici medi ed y quella tra uno degli indici estremi ed il medio prossimo in uno qualunque dei suoi gruppi; e reciprocamente.

Osservazioni analoghe si possono ripetere per gruppi equisimmetrici di tre termini.

4. Rispetto ai gruppi equisimmetrici di quattro termini si ha:

Teorema. — *In ogni sistema ordinato di gruppi equisimmetrici formati da quattro termini, le differenze tra il prodotto dei termini medî e quello degli estremi in ciascun gruppo formano una progressione geometrica avente per quoziente il numero intero negativo* $-l$

a) Dimostriamo dapprima la proprietà per i gruppi della successione v; a tal uopo se nella (1) si muta n in $n-\rho$, s in $s+\rho$ e la relazione così ottenuta si sottrae dalla (1) stessa si ricava

$$v_{s+1}\, v_n - v_{s+\rho+1}\, v_{n-\rho} = -l(v_s\, v_{n-1} - v_{s+\rho}\, v_{n-\rho-1})$$

ovvero mutando s (che è arbitrario) in $s-1$

$$v_s\, v_n - v_{s+\rho}\, v_{n-\rho} = -l(v_{s-1}\, v_{n-1} - v_{s+\rho-1}\, v_{n-\rho-1}).$$

Ora il primo membro di questa relazione, e la quantità tra parentesi del secondo, sono rispettivamente (supposto $n < s$), differenze del prodotto dei medî e quello degli estremi nei due gruppi equisimmetrici consecutivi

$$\begin{array}{cccc} v_{n-\rho} & , v_n & , v_s & , v_{s+\rho} \\ v_{n-\rho-1} , & v_{n-1} , & v_{s-1} , & v_{s+\rho-1} \end{array}$$

pertanto è provato quanto si voleva per la v.

Ma prima di passare alla dimostrazione del teorema in generale conviene trasformare l'ultima uguaglianza. Perciò, posto $s-n=\delta$, applichiamo l'uguaglianza stessa ai gruppi $(v_{n-\rho}\,,\, v_n\,,\, v_s\,,\, v_{s+\rho})(v_{n-\rho-1}\, v_{n-1}\,,\, v_{s-1}\,,\, v_{s+\rho-1})(v_{n-\rho-2}\,,\, v_{n-2}\,,\, v_{s-2}\,,\, v_{s+\rho-2})\ldots(v_1\,,\, v_{\rho+1}\,,\, v_{\delta+\rho+1}\,,\, v_{\delta+2\rho+1})$ considerati due a due; si ricava poi moltiplicando tutte le relazioni ottenute

$$v_s\, v_n - v_{n-\rho}\, v_{s+\rho} = (-l)^{n-\rho-1}(v_{\rho+1}\, v_{\delta+\rho+1} - v_1\, v_{\delta+2\rho+1}).$$

ma è $v_1 = 1$ quindi

$$v_s\, v_n - v_{s+\rho}\, v_{n-\rho} = (-l)^{n-\rho-1}(v_{\rho+1}\, v_{\delta+\rho+1} - v_{\delta+2\rho+1})$$

E se ora nella (1) si pone in luogo di n, s, che sono a piacere, rispettivamente $\delta+\rho+1$, ρ, si ottiene

$$v_{\delta+2\rho+1} = v_{\rho+1}\, v_{\delta+\rho+1} + l v_\rho\, v_{\delta+\rho}$$

onde risulterà sostituendo

(3) $$v_s\, v_n - v_{s+\rho}\, v_{n-\rho} = (-l)^{n-\rho}\, v_\rho\, v_{\delta+\rho}$$

Questa formola trasforma in prodotto la differenza tra il prodotto dei medî e quello degli estremi di un gruppo simmetrico qualunque $v_{n-\varrho}, v_n, v_s, v_{s-\varrho}$. Cambiando notazione (per comodità di quello che segue) si rappresenti il gruppo simmetrico con $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma, v_\delta$; allora se si pone $\gamma-\beta=d$, $\beta-\alpha=\delta-\gamma=d'$ essa assume la forma

$$v_\beta v_\gamma - v_\alpha v_\delta = (-l)^\alpha v_{d'} v_{d+d'}. \tag{3'}$$

b) Ciò premesso sia $V_{n-\varrho}, V_n, V_s, V_{s+\varrho}$ un gruppo simmetrico della successione V. Se si costruisce l'espressione $V_n V_s - V_{n-\varrho} V_{s+\varrho}$ si avrà tenendo conto della (2)

$$V_n V_s - V_{n-\varrho} V_{s+\varrho} = (\beta v_{n-1} + l\alpha v_{n-2})(\beta v_{s-1} + l\alpha v_{s-2}) - \\ -(\beta v_{n-\varrho-1} + l\alpha v_{n-\varrho-2})(\beta v_{s+\varrho-1} + l\alpha v_{s+\varrho-2})$$

che sviluppando i prodotti assume la forma

$$V_n V_s - V_{n-\varrho} V_{s+\varrho} = l^2\alpha^2(v_{n-2} v_{s-2} - v_{n-\varrho-2} v_{s+\varrho-2}) + \\ + \beta^2(v_{n-1} v_{s-1} - v_{n-\varrho-1} v_{s+\varrho-1}) + l\alpha\beta[(v_{n-1} v_{s-2} - v_{n-\varrho-1} v_{s+\varrho-2}) + \\ + (v_{n-2} v_{s-1} - v_{n-\varrho-2} v_{s+\varrho-1})].$$

Le quantità entro le parentesi tonde sono differenze tra il prodotto deî medî e quello degli estremi dei seguenti gruppi simmetrici

$$v_{n-\varrho-2},\ v_{n-2},\ v_{s-2},\ v_{s+\varrho-2}$$
$$v_{n-\varrho-1},\ v_{n-1},\ v_{s-1},\ v_{s+\varrho-1}$$
$$v_{n-\varrho-1},\ v_{n-1},\ v_{s-2},\ v_{s+\varrho-2}$$
$$v_{n-\varrho-2},\ v_{n-2},\ v_{s-1},\ v_{s+\varrho-1}.$$

Ponendo $s-n=\delta$, e tenuto conto delle differenze tra gli indici, si avrà applicando la (3')

$$v_{n-2} v_{s-2} - v_{n-\varrho-2} v_{s+\varrho-2} = (-l)^{n-\varrho-2} v_\varrho v_{\delta+\varrho}$$
$$v_{n-1} v_{s-1} - v_{n-\varrho-1} v_{s+\varrho-1} = (-l)^{n-\varrho-1} v_\varrho v_{\delta+\varrho}$$
$$v_{n-1} v_{s-2} - v_{n-\varrho-1} v_{s+\varrho-2} = (-l)^{n-\varrho-1} v_\varrho v_{\delta+\varrho-1}$$
$$v_{n-2} v_{s-1} - v_{n-\varrho-2} v_{s+\varrho-1} = (-l)^{n-\varrho-2} v_\varrho v_{\delta+\varrho+1}$$

e quindi sostituendo si troverà

$$V_n V_s - V_{n-\varrho} V_{s+\varrho} = (-l)^{n-\varrho-1} v_\varrho v_{\delta+\varrho}(-\alpha^2 l + \beta^2) + \\ + (-l)^{n-\varrho-1}(l v_{\delta+\varrho-1} - v_{\delta+\varrho+1})\alpha\beta v_\varrho.$$

La differenza entro l'ultima parentesi, si trasforma in prodotto osservando che per la definizione è

$$v_{\delta+\varrho+1} = h v_{\delta+\varrho} + l v_{\delta+\varrho-1}$$

e quindi

$$l v_{\delta+\varrho-1} - v_{\delta+\varrho+1} = -h v_{\delta+\varrho}$$

e pertanto sarà ancora

$$V_n V_s - V_{n-\varrho} V_{s+\varrho} = (-l)^{n-\varrho-1}(\beta^2 - \alpha^2 l - h\alpha\beta) v_\varrho v_{\delta+\varrho} \tag{4}$$

Questa formola trasforma la differenza tra il prodotto dei termini medi e quello degli estremi di un gruppo simmetrico qualunque $V_{n-\rho}$, V_n, V_s, $V_{s+\rho}$. Applicandola al gruppo equisimmetrico $V_{n-\rho-1}$, V_{n-1}, V_{s-1}, $V_{s+\rho-1}$ avremo

$$V_{n-1}\,V_{s-1} - V_{n-\rho-1}\,U_{s+\rho-1} = (-l)^{n-\rho-2}(\beta^2 - \alpha^2 l - h\alpha\beta)\,v_\rho\, v_{\delta+\rho}$$

e quindi si ha

$$\frac{V_n\,V_s - V_{n-\rho}\,V_{s+\rho}}{V_{n-1}\,V_{s-1} - V_{n-\rho-1}\,V_{s+\rho-1}} = -l \tag{5}$$

che dimostra appunto il teorema enunciato.

5. Il procedimento tenuto nella dimostrazione precedente è valido, come si vede facilmente, anche per $s=n$; in questa ipotesi osservando che è $\delta = s - n = 0$ le formole (3) (4) (5) divengono

$$v^2_n - v_{n+\rho}\,v_{n-\rho} = (-l)^{n-\rho}\,v_\rho^2 \tag{6}$$

$$V^2_n - V_{n+\rho}\,V_{n-\rho} = (-l)^{n-\rho-1}(\beta^2 - \alpha^2 l - h\alpha\beta)\,v_\rho^2 \tag{7}$$

$$\frac{V^2_n - V_{n-\rho}\,V_{n+\rho}}{V^2_{n-1} - V_{n-\rho-1}\,V_{n+\rho-1}} = -l \tag{8}$$

Le prime due forniscono una trasformazione della differenza tra il quadrato del termine medio ed il prodotto degli estremi nei gruppi simmetrici di tre termini, $(v_{n-\rho}\,v_n\,v_{n+\rho})$ e $(V_{n-\rho}\,V_n\,V_{n+\rho})$, l'ultima contiene il seguente

TEOREMA. — *In ogni sistema ordinato di gruppi equisimmetrici di tre termini, le differenze tra il quadrato del termine medio ed il prodotto degli estremi in ciascun gruppo, formano una progressione geometrica avente per quoziente il numero intero negativo* —l.

6. Insieme alla successione V consideriamone un'altra

$$V' \equiv V'_1,\, V'_2,\, V'_3,\, \ldots\, V'_n,\, \ldots$$

in cui i termini iniziali V'_1, V'_2 sono rispettivamente uguali a due interi positivi α', β' comunque scelti, e gli altri termini sono individuati mediante la relazione

$$V'_n = hV_{n-1} + lV_{n-2}$$

dove h, l sono i coefficienti *già fissati.* Calcoliamo il determinante di secondo ordine

$$\begin{vmatrix} V_n & V_s \\ V'_n & V'_s \end{vmatrix} \quad (n < s)$$

formato con due coppie corrispondenti nelle due successioni, cioè l'espressione $V_n\,V'_s - V'_n\,V_s$. Sostituendo alle V le loro espressioni in funzione delle v calcolate per mezzo della (2) si avrà

$$V_n\,V'_s - V_s\,V'_n = (\beta v_{n-1} + l\alpha v_{n-2})(\beta' v_{s-1} + l\alpha' v_{s-2}) -$$
$$-(\beta v_{s-1} + l\alpha v_{s-2})(\beta' v_{n-1} + l\alpha' v_{n-2})$$

che sviluppando i prodotti diviene

$$V_n V'_s - V_s V'_n = l(\alpha'\beta - \alpha\beta')(v_{n-1} v_{s-2} - v_{s-1} v_{n-2}).$$

Si consideri il gruppo simmetrico

$$v_{n-2}\,,\ v_{n-1}\,,\ v_{s-2}\,,\ v_{s-1}$$

Posto $s - n = \delta$, la differenza degli indici medi è

$$(s-2)-(n-1) = \delta - 1$$

e quindi applicando la formola (3') si avrà

$$v_{n-1} v_{s-2} - v_{n-2} v_{s-1} = (-l)^{n-2} v_1 v_\delta$$

e poichè $v_1 = 1$, risulterà, sostituendo

(9) $$V_n V'_s - V_s V'_n = -(-l)^{n-1}(\alpha'\beta - \alpha\beta') v_\delta$$

che è la formola cercata.

7. Sostituendo ad s il suo uguale $n + \delta$ si ha

$$V_n V'_{n+\delta} - V_{n+\delta} V'_n = -(-l)^{n-1}(\alpha'\beta - \alpha\beta') v_\delta$$

per qualunque valore di n; mutando quindi n in $n + \rho$ e dividendo membro a membro si ha

$$\frac{V_{n+\rho} V'_{n+\delta+\rho} - V_{n+\delta+\rho} V'_{n+\rho}}{V_n V'_{n+\rho} - V_{n+\delta} V'_n} = (-l)^\rho$$

surrogando nuovamente $n + \delta$ con s si ha

$$\frac{V_{n+\rho} V'_{s+\rho} - V_{s+\rho} V'_{n+\rho}}{V_n V'_s - V_s V'_n} = (-l)^\rho.$$

E poichè gli indici del numeratore superano di ρ quelli del denominatore, così questa relazione prova che *la successione di determinanti di secondo ordine*

$$\ldots\begin{vmatrix} V_n & V_s \\ V'_n & V'_s \end{vmatrix}\ \begin{vmatrix} V_{n+\rho} & V_{s+\rho} \\ V'_{n+\rho} & V'_{s+\rho} \end{vmatrix}\ \begin{vmatrix} V_{n+2\rho} & V_{s+2\rho} \\ V'_{n+2\rho} & V'_{s+2\rho} \end{vmatrix}\ldots$$

costituisce una progressione geometrica che ha per quoziente il numero intero $(-l)^\rho$.

8. Della formola (9) faremo subito un'altra applicazione. Come abbiamo visto in principio del numero precedente possiamo scrivere per valori arbitrari di n, δ

$$V_n V'_{n+\delta} - V_{n+\delta} V'_n = -(-l)^{n-1}(\alpha'\beta - \alpha\beta') v_\delta$$

Cangiando n in $n + \delta$ si ha:

$$V_{n+\delta} V'_{n+2\delta} - V_{n+2\delta} V'_{n+\delta} = -(-l)^{n+\delta-1}(\alpha'\beta - \alpha\beta') v_\delta$$

Moltiplicando la prima per $(-l)^\delta$ si ricava

$$V_{n+\delta} V'_{n+2\delta} - V_{n+2\delta} V'_{n+\delta} = (-l)^\delta V_n V'_{n+\delta} - (-l)^\delta V_{n+\delta} V'_n$$

ossia

$$\frac{V_{n+2\delta} + (-l)^\delta V_n}{V_{n+\delta}} = \frac{V'_{n+2\delta} + (-l)^\delta V'_n}{V'_{n+\delta}}.$$

Questa relazione prova che fissati n, δ il rapporto $\frac{V_{n+2\delta} + (-l)^\delta V_n}{V_{n+\delta}}$ ha un valore che è *indipendente* dai termini iniziali della successione, e per conseguenza sarà anche

$$\frac{V_{n+2\delta} + (-l)^\delta V_n}{V_{n+\delta}} = \frac{v_{n+2\delta} + (-l)^\delta v_n}{v_{n+\delta}}$$

(non essendo altro la v che la V quando $\alpha = 1$, $\beta = h$), ed anche mutando n in $n - \delta$

$$\frac{V_{n+\delta} + (-l)^\delta V_{n-\delta}}{V_n} = \frac{v_{n+\delta} + (-l)^\delta v_{n-\delta}}{v_n}.$$

Proponiamoci ora di calcolare il quoziente che è al secondo membro; a tal fine osserviamo che nel gruppo simmetrico

$$v_{\delta-1}, v_\delta, v_{n-1}, v_n$$

la differenza d tra gli indici medi è $n - \delta - 1$, quella d' tra un indice estremo e quello medio prossimo è 1, quindi applicando la (3') si avrà

$$v_\delta v_{n-1} - v_n v_{\delta-1} = (-l)^{\delta-1} v_{n-\delta}$$

e moltiplicando per l

$$l v_\delta v_{n-1} - l v_n v_{\delta-1} = -(-l)^\delta v_{n-\delta}.$$

Ma per la (1) è

$$v_{n+\delta} = v_{\delta+1} v_n + l v_\delta v_{n-1}$$

che sottratta dalla precedente dà

$$v_{n+\delta} + (-l)^\delta v_{n-\delta} = v_n (l v_{\delta-1} + v_{\delta+1})$$

e perciò

$$\frac{v_{n+\delta} + (-l)^\delta v_{n-\delta}}{v_n} = l v_{\delta-1} + v_{\delta+1}.$$

Si conclude in generale

$$\text{(10)} \qquad \frac{V_{n+\delta} + (-l)^\delta V_{n-\delta}}{V_n} = l v_{\delta-1} + v_{\delta+1} \text{ (*)}$$

(*) È escluso dal procedimento tenuto il caso di $\delta = 1$; la formola trovata in tal caso diviene $\frac{V_{n+1} - l V_{n-1}}{V_n} = l v_0 + v_2$ col secondo membro privo di significato.

Ma poichè dalla definizione della successione V risulta $\frac{V_{n+1} - l V_{n-1}}{V_n} = h = v_2$ così la (10) diviene ancora applicabile ponendo $v_0 = 0$.

Il secondo membro è intero; positivo, indipendente da α, β e da n, pertanto possiamo concludere:

La funzione

$$\frac{V_{n+\delta} + (-l)^{\delta} V_{n-\delta}}{V_n}$$

è un intero positivo costante al variare di n, *e indipendente dai termini iniziali* α, β *della successione* V

Osservando che dal gruppo simmetrico

$$V_{n-\delta}\,,\ V_n\,,\ V_{n+\delta}$$

al variare del solo n si deducono tutti i gruppi ad esso equisimmetrici, il teorema precedente può enunciarsi anche così:

La funzione

$$\frac{V_{n+\delta} + (-l)^{\delta} V_{n-\delta}}{V_n}$$

formata coi termini del gruppo simmetrico $V_{n-\delta}$, V_n, $V_{n+\delta}$, *è un intero positivo, costante in tutti i gruppi equisimmetrici al dato, ed è indipendente inoltre da* α, β

II.

9. Passiamo ora ad occuparci di alcune proprietà speciali della successione v. Dalla relazione fondamentale (1), dove n, s sono arbitrari, discende subito col porre $n = s + 1$

$$v_{2s+1} = v^2_{s+1} + l v^2_s$$

Quindi: *Ogni termine di indice dispari in* v *è rappresentabile mediante la forma quadratica* $x^2 + ly^2$. *e con un sistema di valori per* x, y *che sono termini consecutivi della successione stessa.*

In altri termini: *L'equazione indeterminata quadratica*

$$x^2 + ly^2 = x_{2s+1}$$

ammette la soluzione in numeri interi

$$x = \pm\, v_{s+1}\,,\ y = \pm\, v_s\,.$$

10. Dalla (1) si ricava ancora che *se* r *è multiplo di* i *è anche* v_r *multiplo di* v_i.

Infatti, supposto $r = mi$ con $m > 1$, vi si faccia $s = i$ $n = (m-1)i$; si deduce

$$v_{mi} = v_{i+1} \,.\, v_{(m-1)i} + l v_i v_{(m-1)i-1}$$

e quindi

$$(1')\qquad \frac{v_{mi}}{v_i} = lv_{(m-1)i-1} + v_{i+1}\frac{v_{(m-1)i}}{v_i}$$

Affinchè sia intero il quoziente $\frac{v_{mi}}{v_i}$, è dunque sufficiente che sia tale $\frac{v_{(m-1)i}}{v_i}$. Ma per $m=2$ si ha:

$$\frac{v_{2i}}{v_i} = lv_{i-1} + v_{i+1}.$$

Essendo dunque intero $\frac{v_{2i}}{v_i}$ saranno interi ancora $\frac{v_{3i}}{v_i}\,\frac{v_{4i}}{v_i}\ldots\frac{v_{mi}}{v_i}\ldots$ Del resto è facile esprimere in generale il quoziente $\frac{v_{mi}}{v_i}$ sotto forma intera. Se infatti nella (1') si attribuiscono successivamente ad m i valori 2, 3, 4, ... si ricava facilmente valendosi ogni volta della relazione precedente

$$\frac{v_{mi}}{v_i} = lv_{(m-1)i-1} + lv_{(m-2)i-1}\,.\,v_{i+1} + lv_{(m-3)i-1}\,v_{i+1}^2 + \ldots$$
$$+ lv_{2i-1}\,.\,v_{i+1}^{m-3} + lv_{i-1}\,.\,v_{i+1}^{m-2} + v_{i+1}^{m-1}.$$

Un'altra espressione, notevole, del quoziente $\frac{v_{mi}}{v_i}$ si ottiene così: nella (1) si ponga invece $s=(m-1)i$, $n=i$ e si divida poi i due membri dell'eguaglianza trovata per v_i; risulta

$$\frac{v_{mi}}{v_i} = v_{(m-1)i+1} + lv_{i-1}\,\frac{v_{(m-1)i}}{v_i}$$

e da questa ponendo successivamente $m=2, 3, 4, \ldots, m$ si deduce la formula

$$\frac{v_{mi}}{v_i} = v_{(m-1)i+1} + lv_{(m-2)i+1}\,.\,v_{i-1} + l^2v_{(m-3)i+1}\,.\,v_{i-1}^2 +$$
$$+ l^3v_{(m-4)i+1}\,.\,v_{i-1}^3 + \ldots + l^{m-2}\,v_{i+1}\,v_{i-1}^{m-2} + l^{m-1}\,v_{i-1}^{m-1}$$

ed altre ancora, sempre valendosi della (1), si potrebbero stabilire.

II. Quando i numeri h, l sono dati comunque, può accadere che nella successione v cadano oltre i termini $v_{mi}\,(m=1,2,3,\ldots\infty)$ altri multipli di v_i; ma se supponiamo h, l *primi tra loro* possiamo dimostrare che *la successione*

$$v_i,\ v_{2i},\ v_{3i},\ \ldots,\ v_{mi},\ \ldots$$

contiene tutti i multipli di v_i *appartenenti alla successione* v. Premettiamo a tal fine i seguenti lemmi:

1°. *Se* h, l *sono primi tra loro* v_n, l *sono pure primi tra loro per qualunque valore di* n.

Infatti dalla relazione

$$v_n = hv_{n-1} + lv_{n-2}$$

discende che ogni divisore d comune ai numeri v_n, l è divisore del prodotto hv_{n-1}: ma a causa dell'ipotesi è d primo con h quindi sarà pure divisore di v_{n-1}. Il numero d essendo così divisore comune ai numeri v_{n-1}, l sarà pure divisore di v_{n-2} e così pure di $v_{n-3}, v_{n-4}, \dots v_1$. Ma è per ipotesi $v_1 = 1$ quindi $d = 1$ come si voleva dimostrare.

2°. *Se* h, l *sono primi tra loro, due termini consecutivi* v_{n-1}, v_n *sono pure primi tra loro.*

Infatti dalla relazione

$$v_n = hv_{n-1} + lv_{n-2}$$

risulta che ogni divisore d comune ai termini v_{n-1}, v_n è pure divisore del prodotto lv_{n-2}; ma per il lemma precedente v_n, l sono primi tra loro, quindi anche d (che è divisore di v_n) sarà primo con l e perciò sarà divisore di v_{n-2}. Il numero d è dunque un divisore comune ai termini v_{n-1}, v_{n-2}; si concluderà dunque che è divisore di v_{n-3}, $v_{n-4}, \dots v_1$. Ma $v_1 = 1$, onde $d = 1$ come si voleva provare.

Ciò premesso, torniamo alla questione enunciata in principio del paragrafo, e supponiamo che tra due multipli di v_i come v_{mi}, $v_{m(i+1)}$ cada un termine multiplo anch'esso di v_i: esso sarà necessariamente della forma $v_{mi+\rho}$ con $\rho < i$. Ora se nella (1) si cangia n in mi ed s in ρ si trova

$$v_{mi+\rho} = v_{mi}\, v_{\rho+1} + lv_\rho\, v_{mi-1}.$$

E poichè $v_{mi+\rho}$, v_{mi} sono multipli di v_i tale sarà pure il prodotto $lv_\rho v_{mi-1}$. Ma v_i ed l sono, per il lemma 1°, primi fra loro; e primi tra loro sono pure v_i e v_{mi-1}; (perchè ogni loro divisore comune d è pure divisore comune ai termini v_{mi}, v_{mi-1} quindi per il lemma 2°, è $d = 1$) dovrà essere dunque v_ρ multiplo di v_i; ciò che è assurdo poichè essendo per ipotesi $\rho < i$, è anche $v_\rho < v_i$.

Il teorema è pertanto dimostrato, e potremo concludere riassumendo:

Teorema. — *Se* h, l *sono primi fra loro, la condizione necessaria e sufficiente affinchè* v_r *sia multiplo di* v_i *è chè* r *sia multiplo di* i.

Corollario I. — *I termini von indice composto maggiore di 4, sono numeri composti,* (*) *e se* $h > 1$ *è composto anche* v_4. (**)

Infatti se v_a è uno di tali termini, a avrà un divisore $i > 2$ e quindi v_a ammetterà il divisore $v_i > 1$, perchè è sempre $v_3 > 1$ e la

(*) Con queste parole devesi enunciare il corollario primo al n. 5 della nota citata.

(**) Dalla v per $h = l = 1$ si deriva la successione particolare

1, 1, 2, 3, 5, 8 ..

nella quale è $v_4 = 3$ un numero *primo*. Similmente per $h = 1$, $l = 3$ si l'altra 1, 1, 4, 7, 19 ... nella quale è primo $v_4 = 7$.

successione è crescente. Il termine v_4 poi ammette il divisore $v_2 = h$ quindi se $h > 1$ è composto anch'esso.

Corollario II. — *Un termine* v_r *ha tanti divisori nella successione quanti ne ha il suo indice* r *nella serie dei numeri naturali.*

Corollario III. — *Un termine con indice primo ammette per divisori nella successione solamente sè stesso e l'unità.*

Corollario IV. — *Alquanti termini* $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma \dots$ *hanno tanti divisori comuni nella successione, quanto ne hanno di comuni i loro indici nelle serie dei numeri naturali.*

Corollario V. — *Se* m *è il minimo multiplo comune a più numeri* r, s, t, ..., *sarà* v_m *il minimo multiplo comune, nella successione, dei termini* $v_r, v_s, v_t \dots$ *ecc.*

12. Restando sempre nell'ipotesi di h, l *primi tra loro (come in tutto ciò che segue)* passiamo a determinare il massimo comun divisore ordinario di più termini della successione v. Si hanno le seguenti proprietà:

a) *Se* α *è divisibile per* β *il massimo comun divisore di* v_α, v_β *è* v_β.

Infatti, pel teorema del paragrafo precedente, è v_α divisibile per v_β.

b) *Se* r *è il resto della divisione di* α *per* β *il massimo comun divisore di* v_α, v_β *è uguale a quello di* v_β, v_r.

Infatti posto $\alpha = \beta q + r$, $(r < \beta)$, si faccia nella (1) $n = \beta q$, $r = s$; risulta

$$v_\alpha = v_{\beta q} v_{r+1} + l v_r v_{\beta q - 1}.$$

Ora ogni divisore d comune a v_α, v_β, essendo divisore di $v_{\beta q}$, sarà pure divisore del prodotto $l v_r v_{\beta q - 1}$. Ma per quanto precede (§ 11) d è primo con l e con $v_{\beta q - 1}$, quindi dovrà dividere v_r. Reciprocamente, discende ancora dall'ultima eguaglianza che ogni divisore comune a v_β, v_r, essendo divisore di $v_{\beta q}$, è divisore di v_α. Le due coppie $(v_\alpha\ v_\beta)$ $(v_\beta\ v_r)$ hanno dunque i medesimi divisori comuni e quindi il medesimo massimo comune divisore. (*)

c) *Se* m *è il massimo comune divisore dei due indici* α, β, *sarà* v_m *il massimo comun divisore dei due termini* v_α, v_β.

Infatti se insieme ai numeri

$$\alpha, \beta, r, s, \dots u, m,$$

dove $r, s, \dots u, m$ sono i successivi resti ottenuti nella ordinaria ricerca del massimo comun divisore di α, β, consideriamo i termini

$$v_\alpha, v_\beta, v_r, v_s, \dots, v_u\, v_m$$

(*) In modo analogo si dimostra: *Se* m *è un divisore comune a più termini* $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma \dots$ *sarà* m *un divisore di* $v_{p\alpha \pm q\beta \pm s\gamma \dots}$

si riconosce, a causa del precedente teorema, che le coppie (v_α, v_β) (v_β, v_γ) $(v_\gamma, v_\delta) \ldots (v_u, v_m)$ hanno il medesimo massimo comun divisore; ma è u multiplo di m quindi esso sarà v_m, come si voleva provare.

Si deduce immediatamente:

d) *Se* m *è il massimo comun divisore di alquanti indici* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, *sarà* v_m *il massimo comun divisore dei termini* v_α, v_β, $v_\gamma, \ldots$

Questi teoremi riducono la ricerca del massimo comun divisore dei termini della successione a quella del massimo comun divisore dei loro indici.

13. Da quanto è stabilito nel paragrafo precedente *c)*, deriva che due termini v_α, v_β saranno primi tra loro sempre e soltanto quando è $v_m = 1$, essendo m il massimo comun divisore degli indici α, β. Ma essendo per definizione,

$$v_1 = 1,\ v_2 = h,\ v_3 = h^2 + l, \ldots$$

si riconosce subito che se $h > 1$, è soltanto $v_1 = 1$ e quindi necessariamente $m = 1$, ossia *i due indici* α, β *sono anch'essi primi tra loro:* se è invece $h = 1$ si ha $v_1 = 1, v_2 = 1$ e perciò necessariamente $m = 1$, oppure $m = 2$; ossia *i due indici* α, β *sono primi tra loro od hanno per massimo comun divisore* 2. Possiamo dunque enunciare i seguenti teoremi:

a) *Se* h > 1, *la condizione necessaria e sufficiente affinchè due termini* v_α, v_β *siano primi tra loro è che i loro indici* α, β *siano primi tra loro.*

b) *Se* h $= 1$, *la condizione necessaria e sufficiente affinchè due termini* v_α, v_β *siano primi tra loro è che i loro indici* α, β *abbiano un massimo comun divisore non maggiore di* 2.

14. Denotando con $\overline{\varphi(v_\alpha)}$ il numero dei termini della successione v non maggiori di v_α e primi con esso, e con $\varphi(\alpha)$ la funzione di Gauss rappresentante il numero dei numeri non maggiori di α e primi con esso, si dedurrà dai teoremi dimostrati ora:

1°. Se $h > 1$,

$$\overline{\varphi(v_\alpha)} = \varphi(\alpha) \tag{11}$$

2°. Se $h = 1$,

$$\overline{\varphi(v_\alpha)} = \varphi(\alpha) + \varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{12}$$

con $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$ quando α è dispari.

La funzione $\overline{\varphi}$ gode della seguente proprietà:
Se α, β *sono primi tra loro si ha*

$$\overline{\varphi(v_\alpha)}\ \overline{\varphi(v_\beta)} = \overline{\varphi(v_{\alpha\beta})} \tag{A}$$

Per la dimostrazione premettiamo che nella fatta ipotesi si ha, come è noto,

(B) $$\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)=\varphi(\alpha\beta).$$

Supposto dapprima $h>1$, questa relazione si trasforma subito nella (A) perchè è allora, per qualunque valore di n, $\overline{\varphi(v_n)}=\varphi(n)$.

Se invece $h=1$ si ha $\overline{\varphi(v_n)}=\varphi(n)$ *solamente* per valori *dispari di* n, e quindi se α, β sono *entrambi dispari* si ricaverà ancora la (A) dalla (B) come nel caso precedente. Se al contrario dei due numeri α, β (primi tra loro per ipotesi) *uno* è pari, ad esempio α. dalle relazioni

$$\overline{\varphi(v_\alpha)}=\varphi(\alpha)+\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$\overline{\varphi(v_\beta)}=\varphi(\beta)$$

si dedurrà

$$\overline{\varphi(v_\alpha)}\;\overline{\varphi(v_\beta)}=\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)+\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\varphi(\beta).$$

E poichè anche $\frac{\alpha}{2}$, β sono primi tra loro, si avrà ad un tempo

$$\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)=\varphi(\alpha\beta),\quad \varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\varphi(\beta)=\varphi\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right)$$

e quindi

$$\overline{\varphi(v_\alpha)}\;\overline{\varphi(v_\beta)}=\varphi(\alpha\beta)+\varphi\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right)$$

ovvero a causa delle (12)

$$\overline{\varphi(v_\alpha)}\;\overline{\varphi(v_\beta)}=\overline{\varphi(v_{\alpha\beta})}.$$

La proprietà enunciata è così dimostrata per tutti i casi.

15. Più generalmente denotando con $v_\delta>1$ un divisore di v_α appartenente alla successione, e con N il numero dei termini della successione stessa *minori di* v_α *ed aventi con esso per massimo comun divisore* v_δ, possiamo esprimere N per mezzo di $\overline{\varphi}$. Infatti se v_α, v_x hanno per massimo comun divisore v_δ, gli indici α, x, hanno per massimo comun divisore δ e reciprocamente (§ 12, c). Si conclude che il numero N è uguale a quello dei numeri *inferiori ad* α *ed aventi con esso per massimo comun divisore* δ, e quindi in ogni caso

$$N=\varphi\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)$$

Ora se $h>1$, si avrà anche, a causa della (11),

$$N=\overline{\varphi\left(v_{\frac{\alpha}{\delta}}\right)}$$

Se invece $h=1$ dalla (12) si deduce

$$\overline{\varphi\left(v_{\frac{\alpha}{\delta}}\right)}=\varphi\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha}{2\delta}\right).$$

ossia

$$\mathrm{N}=\overline{\varphi\left(v_{\frac{\alpha}{\delta}}\right)}-\varphi\left(\frac{\alpha}{2\delta}\right).$$

Se $\frac{\alpha}{2\delta}$ è fratto il secondo membro si riduce al primo termine, ma se è intero si ricaverà dalla (12) col mutarvi α in $\frac{\alpha}{2\delta}$.

$$\overline{\varphi\left(v_{\frac{\alpha}{\delta}}\right)}=\varphi\left(\frac{\alpha}{2\delta}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha}{4\delta}\right).$$

Sostituendo nella precedente il valore di $\varphi\left(\frac{\alpha}{2\delta}\right)$ di qui ricavato si ha:

$$\mathrm{N}=\overline{\varphi\left(v_{\frac{\alpha}{\delta}}\right)}-\overline{\varphi\left(v_{\frac{\alpha}{2\delta}}\right)}+\varphi\left(\frac{\alpha}{4\delta}\right).$$

Se $\frac{\alpha}{4\delta}$ è fratto il secondo membro si riduce ai due primi termini, nel caso contrario si muterà nella (12) α in $\frac{\alpha}{4\delta}$, e procedendo poi in modo analogo si avrà in generale

$$\mathrm{N}=\overline{\varphi\left(v_{\frac{\alpha}{\delta}}\right)}-\overline{\varphi\left(v_{\frac{\alpha}{\delta}}\right)}+\overline{\varphi\left(v_{\frac{\alpha}{\delta}}\right)}-\ldots\ldots+(-1)^n\,\overline{\varphi\left(v_{\frac{\alpha}{2^n.\delta}}\right)}$$

essendo 2^n la massima potenza di 2 che divide $\frac{\alpha}{\delta}$.

16. Un termine v_γ avente per indice un numero primo può essere *primo* o *composto*, (*) ma per quanto precede (§ 11) non ammette *nella successione* divisori diversi da sè stesso e dall'unità. Tra i termini di indice composto il *solo* v_4 gode questa proprietà e nel *solo* caso di $h=1$, giacchè allora i divisori del v_4 appartenenti alla successione sono v_4 e $v_1=v_2=h=1$. Chiameremo perciò *primi nella successione* i termini con indice primo in ogni caso, ed anche v_4 quando $h=1$. Ciò premesso si hanno i seguenti teoremi:

TEOREMA I. — *Ogni termine* v_α *ammette un divisore primo nella successione.*

Infatti se α è primo il teorema è dimostrato; se α è composto e non è una potenza di 2, detto p un suo fattore primo dispari, sarà

(*) Per $h=l=1$ si ha, ad esempio, la successione $u\equiv 1, 1, 2, 3, 5, 7, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 157, 2184, 4181, \ldots$ nella quale sono primi i termini di indice primo minore di 19, ed è composto $u_{19}=4181=37.113$.

Per $h=2$, $l=1$ si ha la successione $1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \ldots$ nella quale è composto $u'_7=169$.

$v_p \geqq v_3 > 1$ uno dei divisori cercati. Finalmente se a è una potenza di 2 posto $a = 2^k$ i divisori di v_a appartenenti alla successioni sono

$$v_1 = 1,\ v_2 = h,\ v_4,\ v_8,\ \ldots v_a$$

e quindi se $h > 1$ sarà v_2 il divisore cercato; se invece $h = 1$ sarà v_4.

Teorema II. — *Se un termine* v_γ *primo nella successione divide un prodotto di più fattori* v_λ, v_μ, v_ν ... *divide uno di essi.*

Cominciamo da supporre γ primo. Se v_γ non dividesse alcuno dei fattori v_λ, v_μ, v_ν ... neanche l'indice γ dividerà (§ 11) alcuno degli indici λ, μ, ν .... e perciò essendo primo, sarà primo con ciascuno di essi. Ne consegue (§ 13) che v_γ è primo con ciascuno dei fattori v_λ, v_μ, v_ν, ... e quindi col loro prodotto ciò che è contro l'ipotesi.

Se poi $\gamma = 4$ e v_4 non dividesse alcuno dei termini v_λ, v_μ, v_ν, ... neanche 4 dividerà alcuni degli indici $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ ed avrà con ciascuno di essi un massimo comun divisore non maggiore di 2, onde v_4 sarà primo con v_λ, v_μ, v_ν, ... e si concluderà come nel caso precedente.

Di qui si deducono facilmente i seguenti:

3°. *Se un termine* v_γ *primo nella successione divide una potenza* $(v_\lambda)^m$, *divide anche la base.*

4°. *Se un termine* v_γ *primo nella successione divide un prodotto di più altri* v_λ, v_μ, ... *primi nella successione, è uguale ad uno di essi.*

Di quest'ultimo è poi facile conseguenza l'altro:

5°. *Se un numero* N *è decomponibile nel prodotto di più fattori* v_ν, v_μ, v_λ, ... *primi nella successione è decomponibile in un modo soltanto.*

Osservazione. — Segue di qui che un numero N non può essere rappresentabile che in un modo soltanto sotto la forma

$$N = v_\lambda^p\, v_q^\mu\, v_\nu^r \ldots$$

quando $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ sono *numeri primi differenti, od uno di essi al più è eguale a* 4.

6°. *Se due numeri* m, n(m > n) *sono prodotti di fattori* v_x *primi nella successione* v, *la condizione necessaria e sufficiente affinchè* m *sia divisibile per* n *è che il dividendo contenga ogni fattore primo, nella successione, del divisore con esponente almeno uguale.*

La condiz. è necessaria: supponiamo infatti $m = nz$ con $m = v_\lambda^p\, v_\mu^q\, v_\nu^r \ldots$, $n = v_\alpha^r \cdot v_\beta^s \cdot v_\gamma^t \ldots$ dove v_λ, v_μ, ... sono primi nella successione e differenti tra loro, e così anche v_α, v_β, v_γ ... sono primi nella successione e differenti tra loro. Essendo v_α divisore di n sarà pure, a causa dell'ipotesi divisore di m, e quindi per la precedente proprietà (4) sarà ad esempio $v_\alpha = v_\lambda$; ne segue sostituendo

$$m = v_\alpha^p\, v_\mu^q\, v_\nu^r \ldots$$

È poichè per le ipotesi v_α^r divide m, ed inoltre è primo (§ 13) con ciascuno dei fattori v_μ^q, $v_\nu^r \dots$, così si concluderà che v_α^r divide v_α^p e quindi p è almeno uguale ad r. Se ora si pone

$$m_1 = v_\alpha^{p-r} \cdot v_\mu^q \cdot v_\nu^r \dots, \quad n_1 = v_\beta^s \, v_\gamma^t \dots\dots$$

si dedurrà $m_1 = n_1 z$, ed analogamente a quanto precede, che v_β è ad esempio uguale a v_μ (non a v_α perchè per ipotesi è α diverso da β) e conseguentemente $q \geq s$. Resta pertanto provato quanto abbiamo asserito. Che la condizione enunciata sia sufficiente è cosa ovvia.

17. Se chiamiamo *primi tra loro nella successione* v due termini v_α v_β che non hanno altro divisore comune *nella successione* che $v_1 = 1$, si può vedere facilmente che v_α, v_β *sono primi tra loro in senso ordinario.* Basta a tal fine provare che i loro indici α, β sono primi tra loro se $h > 1$, e che hanno un massimo comune divisore non maggiore di 2 se $h = 1$. (13. *a*, *b*). Detto infatti m il massimo comun divisore degli indici, se fosse $m > 1$ o $m > 2$ a seconda del caso, sarebbe $v_m > 1$. Ma v_m è divisore comune (anzi è il massimo) ai termini v_α, v_β; dunque v_α, v_β avrebbero un divisore comune $v_m > 1$ ciò che è contro l'ipotesi. Quindi necessariamente $m = 1$ o m non maggiore di 2, come si voleva dimostrare.

Del resto si può anche notare che due termini qualunque v_α, v_β ammettono a divisori comuni in v tutti e *soltanto* quei termini v_d nei quali d è divisore comune di α, β (§ 11). Conseguentemente se è $v_1 = 1$ il *solo* divisore comune a $v_\alpha v_\beta$ in v, è 1 il solo divisore comune ad α, β e quindi v_α, v_β (§ 13) sono primi tra loro. Se poi nella successione v è anche $v_2 = h = 1$ allora α, β potranno avere per massimo comun divisore 2 e si concluderà come nel caso precedente.

18. Del teorema del § 11 faremo ancora un'applicazione per dimostrare una proprietà della successione V. Rispetto ad un termine V_s di essa si considerino le due coppie simmetriche $(V_{s+\mu}, U_{s-\mu})$ $(V_{s+\nu}\ V_{s-\nu})$ si ha allora il seguente

Teorema. — *Il quoziente*

$$\frac{V_{s+\mu} - (-l)^\mu \, V_{s-\mu}}{V_{s+\nu} - (-l)^\nu \, V_{s-\nu}}$$

è intero sempre quando μ *e multiplo di* ν *e lo è soltanto allora, se i coefficienti* h, l *sono primi tra loro; esso è inoltre costante al variare di* s *ed indipendente dai termini iniziali* α, β *della successione* V.

Conviene, per la dimostrazione, premettere una relazione tra i termini della successione v. A tal fine consideriamo il gruppo simmetrico

$$v_{n-1}, \; v_{n+1}, \; v_s, \; v_{s+1}$$

Applicandovi la formola (3') del § 4, poichè è qui $d' = 1$, $d = s - n - 1$, si trova subito

$$(-l)^n v_{s-n} = v_s v_{n+1} - v_{s+1} v_n$$

Ma dalla (1) scambiando n con s si deduce

$$v_{n+s} = v_s v_{n+1} + l v_n v_{s-1}$$

quindi resulterà sottraendo

(13) (*) $$v_{s+n} - (-l)^n v_{s-n} = v_n (l v_{s-1} + v_{s+1})$$

Ciò premesso se valendoci della (2), calcoliamo l'espressione $\mathrm{V}_{s+n} - (-l)^n \mathrm{V}_{s-n}$ in funzione delle v_x si ha subito

$$\mathrm{V}_{s+n} - (-l)^n \mathrm{V}_{s-n} = (\beta v_{s+n-1} + l\alpha v_{s+n-2}) - (-l)^n (\beta v_{s-n-1} + l\alpha v_{s-n-2})$$

che diviene

$$\mathrm{V}_{s+n} - (-l)^n \mathrm{V}_{s-n} = \beta [v_{s+n-1} - (-l)^n v_{s-n-1}] + \\ + l\alpha [v_{s+n-2} - (-l)^n v_{s-n-2}]$$

Le quantità entro le parentesi si trasformano per mezzo della (13) nella quale si muti una prima volta s in $s-1$ ed un'altra volta s in $s-2$; si troverà quindi sostituendo

$$\mathrm{V}_{s+n} - (-l)^n \mathrm{V}_{s-n} = \beta v_n (l v_{s-2} + v_s) + l\alpha v_n (l v_{s-3} + v_{s-1})$$

ed anche

$$\mathrm{V}_{s+n} - (-l)^n \mathrm{V}_{s-n} = v_n [l(\beta v_{s-2} + l\alpha r_{s-3}) + (\beta v_s + l\alpha v_{s-1})]$$

Ma per mezzo della (2) si riconosce che le due quantità entro le parentesi interne del secondo membro sono rispettivamente V_{s-1}, V_{s+1} e quindi sarà

$$\mathrm{V}_{s+n} - (-l)^n \mathrm{V}_{s-1} = v_n [l\mathrm{V}_{s-1} + \mathrm{V}_{s+1}].$$

Mutando n in μ una prima volta, poi in ν e dividendo membro a membro le relazioni ottenute si ha:

$$\frac{\mathrm{V}_{s+\mu} - (-l)^\mu \ \mathrm{V}_{s-\mu}}{\mathrm{V}_{s+\nu} - (-l)^\nu \ \mathrm{V}_{s-\nu}} = \frac{v_\mu}{v_\nu}.$$

Il secondo membro è indipendente da s, e dai valori iniziali α, β; inoltre è sempre intero quando μ è multiplo di ν, ed è tale in questo caso *solamente* se h, l sono primi tra loro (§ 11). Il teorema è pertanto dimostrato.

La Spezia, Ottobre 1900.

ALBERTO TAGIURI.

(*) Si deduce di qui che il rapporto $\frac{v_{s+n} - (-l)^n v_{s-n}}{v_n} = l v_{n-1} + v_{s+1}$ è intero e costante al variare di n.

PODARIE RISPETTO ALLA PARABOLA

Sia la parabola rappresentata dall'equazione

$$y^2 = 2px.$$

Una tangente avendo per equazione

$$y = mx + \frac{p}{2m}, \tag{1}$$

la perpendicolare ad essa condotta da un punto P (α, β) del piano ha per equazione

$$y - \beta = -\frac{1}{m}(x - \alpha). \tag{2}$$

L'eliminazione di m fra le (1) e (2) da l'equazione della cubica podaria

$$(x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y)(x - \alpha) + \frac{p}{2}(y - \beta)^2 = 0 \tag{3}$$

ovvero

$$y^2\left(x - \alpha + \frac{p}{2}\right) - \beta y(x - \alpha + p) + x(x - \alpha)^2 + \frac{p\beta^2}{2} = 0. \tag{4}$$

Se si trasportano gli assi parallelamente a loro stessi in modo che l'origine venga nel punto P, si ha

$$x = X + \alpha \quad , \quad y = Y + \beta$$

e la (3) diviene

$$X(X^2 + Y^2) + \alpha X^2 + \beta XY + \frac{p}{2} Y^2 = 0. \tag{5}$$

Questa rappresenta una cubica circolare unicursale, avente un asintoto parallelo all'asse delle y e un punto doppio in P.

Le tangenti nel punto doppio non sono reali che nel caso in cui sia $\beta^2 - 2p\alpha > 0$, cioè se il punto P è situato fuori della parabola. La curva che è tangente in un punto alla parabola, ha la forma strofoidale, con un cappio a punto doppio.

Allorchè il punto P è situato sulla parabola o interno ad essa, la curva, che assume una forma cissoidale, ha un punto doppio isolato. Essa è tangente alla parabola in tre punti o in un sol punto, secondo che P è interno o esterno alla sviluppata della parabola. Qualunque sia la posizione del punto P, la cubica taglia il suo asintoto in un punto Q di cui calcoleremo le coordinate.

Per la (4) l'equazione dell'asintoto è il coefficiente di y^2 eguagliato a zero. Essa è dunque

$$x = \alpha - \frac{p}{2} \tag{6}$$

Questo valore posto nella (4) dà per l'ordinata y di Q

$$y = \beta + \frac{p(2\alpha - p)}{4\beta} \tag{7}$$

Queste formule danno luogo a interessanti applicazioni.

L'equazione generale della cubica circolare unicursale a punto doppio può sempre mettersi sotto la forma

$$X(X^2 + Y^2) + \lambda X^2 + \mu XY + \nu Y^2 = 0. \tag{8}$$

La (5) si può rendere identica alla (8) ponendo

$$\lambda = \alpha, \quad \mu = \beta, \quad \nu = \frac{p}{2},$$

e quindi, se il punto P percorre tutto il piano, la sua podaria dà luogo a tutte le varietà possibili di cubiche circolari unicursali a punto doppio.

Le varietà più interessanti hanno luogo, quando P è situato sulla tangente nel vertice o sulla direttrice.

1°. P *è situato sulla tangente nel vertice.*

Allora $\alpha = 0$, e l'equazioni (4) e (5) divengono

$$y^2\left(x + \frac{p}{2}\right) - \beta y(x + p) + x^2 + \frac{p\beta^2}{2} = 0 \tag{9}$$

$$X(X^2 + Y^2) + \beta XY + \frac{p}{2} Y^2 = 0 \tag{10}$$

La curva ha sempre una forma strofoidale ed ha per asintoto la direttrice.

Le coordinate del punto Q sono allora

$$x = -\frac{p}{2} \quad , \quad y = \beta - \frac{p^2}{4\beta}. \tag{11}$$

Se dunque il punto P ha per coordinate $\alpha = 0$, $\beta = \frac{p}{2}$, il punto Q è il piede della direttrice.

Se il punto P è il vertice ($\alpha = 0, \beta = 0$), l'equazione (9) diviene

$$x(x^2 + y^2) + \frac{py^2}{2} = 0.$$

È la sola cubica di questa serie che abbia forma cissoidale. È d'altronde, come è noto, una cissoide retta.

2°. P *è sulla direttrice.*

In questo caso $\alpha = -\frac{p}{2}$, e l'equazioni (4) e (5) divengono

$$(12) \qquad y^2(x+p) - \beta y\left(x + \frac{3p}{2}\right) + x\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p\beta^2}{2} = 0,$$

$$(13) \qquad X(X^2 + Y^2) - \frac{p}{2}(X^2 - Y^2) + \beta XY = 0.$$

Le tangenti nel punto doppio P sono perpendicolari. La cubica è dunque una strofoide obliqua, che ha per asintoto la retta $x = -p$.

Le coordinate del punto Q sono in questo caso

$$(14) \qquad x = -p, \quad y = \beta - \frac{p^2}{2\beta}.$$

Se dunque P ha le coordinate $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \frac{p}{\sqrt{2}}$, il punto Q ha le coordinate $x = -p, y = 0$.

Se il punto P è il piede della direttrice ($\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = 0$), l'equazioni (12) e (13) diventano

$$y^2(x+p) + x\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0,$$

$$X(X^2 + Y^2) - \frac{p}{2}(X^2 - Y^2) = \theta,$$

rappresentano una strofoide retta di cui il vertice coincide con quello della parabola.

3°. P *è nel fuoco della parabola.*

Allora, essendo $\alpha = \frac{p}{2}$, $\beta = 0$, la (4) diviene

$$x\left[\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2\right] = 0,$$

cioè il luogo si compone della tangente nel vertice e del fuoco (come punto isolato).

Abbiamo esposti questi risultati per l'unità di questa nota.

Ecco ora altre proprietà che crediamo inedite.

I. — *La retta* P,Q *è fissa per uno stesso punto* P *e per tutte le parabole aventi lo stesso asse e lo stesso vertice.*

Infatti l'equazione di questa retta è

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ \alpha - \frac{p}{2} & \beta + \frac{p(2\alpha - \beta)}{4\beta} & 1 \end{vmatrix} =$$

ovvero

$$(15) \qquad (2\alpha-\beta)x+2\beta y=2\alpha^2+2\beta^2-\alpha\beta,$$

che è indipendente dal parametro p della parabola.

Ne risulta che:

1°. *Se il punto* P *percorre una retta fissa, cioè se fra* α *e* β *esiste una relazione*

$$\beta=m\alpha+q,$$

l'inviluppo della retta PQ *è una parabola.*

2°. *Se il punto* P *si sposta sulla parabola data (il che dà luogo alla relazione* $\beta^2=2p\alpha$*), l'inviluppo di* PQ *è una cubica.*

II. — *Per tutti i punti* P *situati sopra la retta fissa* $y=\beta$, *il punto* Q *è situato sopra una retta, e quando* β *varia, questa retta rimane tangente alla parabola data.*

Infatti l'eliminazione di α fra le equazioni (6) e (7) dà

$$(16) \qquad y=\beta+\frac{px}{2\beta}\cdot$$

III. — *Per un punto* P *fisso e per tutte le parabole aventi lo stesso asse e lo stesso vertice, il luogo del punto* Q *è una parabola.*

Infatti l'eliminazione di p fra le (6) e (7) dà

$$(17) \qquad x^2-\alpha x+\beta y-\beta^2=0.$$

IV. — *Se il punto* P *percorre una retta fissa, il luogo di* Q *è una conica.*

V. — *Se il punto* P *percorre la parabola data, il luogo del punto* Q *è la cubica*

$$(18) \qquad 8y^2(2x+p)=p(5x+2p)^2.$$

VI. — *Se le parabole hanno lo stesso asse e lo stesso vertice, e se il punto* P *è situata sulla direttrice ed ha una distanza costante* β *dall'asse, il luogo del punto* Q *è la parabola.*

$$(19) \qquad x^2+2\beta y-2\beta^2=0.$$

La retta PR inviluppa la parabola

$$(20) \qquad x^2-\beta x+4\beta y-\frac{15\beta^2}{4}=0.$$

VII. — *L'antipodaria di una strofoide obliqua rapporto al suo punto doppio è una parabola la cui direttrice passa per il punto doppio.*

E in generale.

L'antipodaria d'una cubica unicursale a punto doppio rapporto al suo punto doppio è una parabola la cui direttrice è parallela all'asintoto della cubica.

Ricerca dell'area compresa fra la podaria di P e il suo asintoto, quando P è sull'asse della parabola.

L'equazione (5) che rappresenta la podaria riferita agli assi PX e PY diviene, ponendovi $\beta = 0$,

$$X(X^2 + Y^2) + \alpha X^2 + \frac{p}{2} Y^2 = 0,$$

ossia

$$Y = X \sqrt{\frac{-\alpha - X}{X + \frac{p}{2}}}. \tag{21}$$

L'area compresa fra la curva ed il suo asintoto è

$$U = 2 \int_{-\alpha}^{-\frac{p}{2}} X \sqrt{\frac{-\alpha - X}{X + \frac{p}{2}}}\, dX.$$

Poniamo

$$\frac{-\alpha - X}{X + \frac{p}{2}} = \tan^2 \varphi.$$

Ne risulta

$$X = -\left(\alpha \cos^2 \varphi + \frac{p}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi\right),$$

$$dX = (2\alpha - p) \operatorname{sen} \varphi \,.\, \cos \varphi \, d\varphi$$

e quindi

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (p - 2\alpha) \operatorname{sen}^2 \varphi \left(\alpha \cos^2 \varphi + \frac{p}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi\right) d\varphi$$

e

$$U = 2(p - 2\alpha) \left\{ \alpha \int^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi + \frac{p}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \varphi \, d\varphi \right\}.$$

Ma si sa che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \varphi \,.\, \cos \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{16} \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \varphi \, d\varphi = \frac{3\pi}{16}.$$

Dunque

$$U = \frac{p(p - 2\alpha)(2\alpha + 3p)}{16}. \tag{22}$$

Ecco per alcuni casi particolari interessanti l'equazione della podaria e l'area di essa.

1°. Se $\alpha = \frac{p}{2}$, $\quad (X^2 + Y^2)\left(X + \frac{p}{2}\right) = 0, \qquad U = 0.$

Il punto P è il fuoco, la cubica è la tangente nel vertice col fuoco come punto doppio isolato.

2°. Se $\alpha = 0$, $$Y^2 = \frac{-X^3}{X + \frac{p}{2}}, \qquad U = \frac{3\pi p^2}{16}.$$

Il punto P è il vertice della parabola, e la cubica è una *cissoide retta.*

3°. Se $\alpha = -\frac{p}{2}$, $$Y = X\sqrt{\frac{\frac{p}{2} - X}{\frac{p}{2} + X}}, \qquad U = \frac{\pi p^2}{4}.$$

Il punto P è il piede della direttrice, e la cubica è una *strofoide retta.*

4°. Se $\alpha = -\frac{3p}{2}$, $$Y = X\sqrt{\frac{3p - 2X}{2X + p}}, \qquad U = 0.$$

L'area $U = 0$ indica che per questa curva, che è una *trisettrice di Mac-Laurin* e che deriva dal *folium di Descartes*, di cui l'equazione è

$$Y = \frac{X}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3p - 2X}{2X + p}},$$

l'area del cappio è equivalente a quella compresa fra il resto della curva ed il suo asintoto.

Queste due aree essendo algebricamente di segno contrario, ne risulta $U = 0$.

Questa interessante proprietà delle aree è comune alla *trisettrice di Mac-Laurin* e al *folium di Descartes*. L'area del cappio della trisettrice è $\frac{3p^2\sqrt{3}}{4}$.

Su questo proposito mi permetto di esporre ai nostri amabili corrispondenti il seguente *desideratum.*

Nel caso in cui il punto P è qualunque, la podaria della parabola rapporto a P deve avere l'area compresa fra la curva ed il suo asintoto finita. Sarebbe interessante poterne calcolare il valore ed auguro che un corrispondente sia più fortunato di me in questa ricerca.

E.-N. Barisien.

SULLA DETERMINAZIONE DI ALCUNI COEFFICENTI NUMERICI di uno sviluppo nella teoria delle forme

1. Se con f indichiamo una funzione di due variabili $x\,(x_1, x_2)$, $y(y_1 y_2)$, omogenea e di grado m nelle $x_1' x_2$, omogenea e di grado n nelle y_1, y_2, se a Δ, D, Ω diamo i soliti significati relativi alle ben note operazioni del calcolo simbolico avremo l'uguaglianza:

$$a)\qquad f = \Delta^n D^n f + \alpha_1^{(n)} (xy) \Delta^{n-1} D^{n-1} \Omega f + \alpha_2^{(n)} (xy)^2 \Delta^{n-2} D^{n-2} \Omega^2 f + \\ + \ldots\ldots + \alpha_n^{(n)} \Omega^n f,$$

in cui le $D^n f$, $D^{n-1}\Omega f$, $D^{n-2}\Omega^2 f$; .... sono funzioni delle sole $x, (x_1, x_2)$.

I termini del secondo membro della $a)$ sono affetti da coefficenti numerici, dipendenti dai gradi m, n e dall'ordine corrispondente al posto che occupano.

Essi sono legati dalle note formole di ricorrenza:

$$1)\quad \alpha_1^{(n)} = \alpha_1^{(n-1)} + \frac{m^2}{(m+n-1)(m+n)}$$

$$2)\quad \alpha_2^{(n)} = \alpha_2^{(n-1)} + \frac{(m-1)^2}{(m+n-3)(m+n-2)} \alpha_2^{(n-1)}$$

$$3)\quad \alpha_3^{(n)} = \alpha_3^{(n-1)} + \frac{(m-2)^2}{(m+n-5)(m+n-4)} \alpha_2^{(n-1)}$$

. . . .

$$\lambda)\quad \alpha_\lambda^{(n)} = \alpha_\lambda^{(n-1)} + \frac{(m-\lambda+1)^2}{(m+n-2\lambda+1)(m+n-2\lambda+2)} \alpha_{\lambda-1}^{(n-1)} \;.$$

La determinazione di questi coefficenti è fatta dal Clebsch con artifici che si riferiscono alla teoria delle forme. Mi propongo di pervenire all'espressione di uno qualunque di questi coefficenti col solo sussidio delle cognizioni algebriche.

2. Osserviamo anzitutto che λ non può superare n, che cioè per $\lambda > n$ tutte le α corrispondenti sono nulle.

Poniamo nella 1) $n = 1$

$$\alpha'_1 = \alpha_1^0 + \frac{m^2}{m \,.\, m+1}$$

ossia:

$$\alpha' = \frac{m}{m+1}$$

E successivamente per $m = 2, = 3, = 4, = n$ avremo:

$$b)\ \begin{cases} \alpha_1^2 = \alpha'_1 + \dfrac{m^2}{m+1 \,.\, m+2} \\ \alpha_1^3 = \alpha_1^2 + \dfrac{m^2}{m+2 \,.\, m+3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^n = \alpha_1^{n-1} + \dfrac{m^2}{m+n-1 \,.\, m+n} \end{cases}.$$

Sommando le $b)$ e riducendo:

$$c) \qquad \alpha_1^{(n)} = \sum_{n=1}^{n} \frac{m^2}{m+n-1 \,.\, m+n} = m^2 \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{m+n-1 \,.\, m+n},$$

e poichè

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{m+n-1 \,.\, m+n} = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{m+n-1} - \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{m+n},$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{m+n-1 \,.\, m+n} = \sum_{n=0}^{n-1} \frac{1}{m+n} - \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{m+n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} = \frac{m \,.\, m+n}{n}$$

e per sostituzione nella $c)$

$$c') \qquad \alpha_1^{(n)} = \frac{m \,.\, n}{m+n} = \frac{\binom{m}{1}\binom{n}{1}}{\binom{m+n}{1}},$$

formola simmetrica in $m, n.$ —

Dalla $c')$ si ha

$$\alpha_1^{(n-1)} = \frac{m \,.\, n-1}{m+n-1},$$

che per sostituzione nella 2) dà

$$\alpha_2^{(n)} = \alpha_2^{(n-1)} + \frac{(m-1)^2 m \,.\, (n-1)}{(m+n-3)(m+n-2)(m+n-1)},$$

nella quale fatto $n = 2, 3, \ldots . n$ si hanno le formole di ricorrenza

$$\alpha_2^{(2)} = \alpha_2^{(1)} + \frac{m \,.\, (m-1)}{m-1 \,.\, m \,.\, m+1}$$

$$\alpha_2^{(3)} = n_2^{(2)} + \frac{m \,.\, m+1 \,.\, +2}{2 \,.\, (m-1)^2 m \,.}$$

. . . .

$$\alpha_2^{(n)} = \alpha_2^{(n-1)} + \frac{(n-1)(m-1)^2 m}{(m+n-3)(m+n-2) \,.\, (m+n-1)},$$

da cui, per via di somma,

$$d) \qquad \alpha_2^{(n)} = m(m-1)^2 \sum_{n=2}^{n} \frac{n-1}{(m+n-3) \,.\, (m+n-2)(m+n-1)};$$

posto

$$m+n-3 = \xi_3^{(n)} \quad m+n-2 = \xi_2^{(n)} \quad m+n-1 = \xi_1^{(n)},$$

si avrà

$$\sum_{n=2}^{n} \frac{n-1}{\xi_1^{(n)}\xi_2^{(n)}\xi_3^{(n)}} = \sum_{n=2}^{n} \frac{\xi_1^{(n)} - m}{\xi_1^{(n)}\xi_2^{(n)}\xi_3^{(n)}} = \sum_{n=2}^{n} \frac{1}{\xi_2^{(n)}\xi_3^{(n)}} - m \sum_{n=2}^{n} \frac{1}{\xi_1^{(n)}\xi_2^{(n)}\xi_3^{(n)}};$$

ora

$$\sum_{n=2}^{n} \frac{1}{\xi_1^{(n)}\xi_2^{(n)}\xi_3^{(n)}} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{n} \frac{1}{\xi_2^{(n)}\xi_3^{(n)}} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{n} \frac{1}{\xi_2^{(n)}\xi_1^{(n)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m \,.\, m-1} - \frac{1}{m+n-2 \,.\, m+n-1}\right)$$

e

$$\sum_{n=2}^{n} \frac{1}{\xi_2^{(n)}\,\xi_3^{(n)}} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+n-2};$$

quindi

$$\sum_{n=2}^{n} \frac{n-1}{(m+n-3)(m+n-2)(m+n-1)} = \frac{1}{m-1} = \frac{1}{2(m-1} = \frac{1}{m+n2} + $$
$$+ \frac{m}{2(m+n-1)(m+n-2)} = \frac{n \,.\, n-1}{2(m-1)(m+n-2)(m+n-1)};$$

e per sostituzione nella *d)*

$$d') \qquad \alpha_2^{(n)} = \frac{m \,.\, m-1 \,.\, n \,.\, n-1}{2 \,.\, (m+n-1)(m+n-2)} = \frac{\binom{m}{2}\binom{n}{2}}{\binom{m+n-1}{2}}.$$

Dalle formole *c)* e *d')* si scorge la legge di successione dei valori di $\alpha_\lambda^{(n)}$. Mostriamo che se essa è verificata per $n = \lambda - 1$, sarà verificata anche per $n = \lambda$.

Supposto cioè che sia

$$\alpha_{\lambda-1}^{(n)} = \frac{\binom{m}{\lambda-1}\binom{n}{\lambda-1}}{\binom{m+n-\lambda+2}{\lambda-1}},$$

proviamo che

$$\alpha_\lambda^{(n)} = \frac{\binom{m}{\lambda}\binom{n}{\lambda}}{\binom{m+n-\lambda+1}{\lambda}}.$$

Ora avremo immediatamente che

$$\alpha_{\lambda-1}^{n-1} = \frac{\binom{m+n-\lambda+1}{\lambda-1}}{\binom{m}{\lambda-1}\binom{n-1}{\lambda-1}},$$

e per sostituzione nella λ), col solito metodo di somma, ricaviamo

$$e) \quad \alpha_\lambda^{(n)} = (m-\lambda+1)^2 \binom{m}{\lambda-1} \sum_{n=\lambda}^{n} \frac{\binom{n-1}{\lambda-1}}{\binom{m+n-\lambda+1}{\lambda-1}(m+n-2\lambda+1)(m+n-2\lambda+2)},$$

che può porsi sotto la forma

$$\alpha_\lambda^{(n)} = (m-\lambda+1)\binom{m}{\lambda} \sum_{n=\lambda}^{n} \frac{\binom{n-1}{\lambda-1}}{\binom{m+n-\lambda+1}{\lambda}(m+n-2\lambda+1)}.$$

Non è agevole calcolare direttamente. Diamo dei valori particolari.

Poniamo $n = \lambda$; avremo

$$\alpha_\lambda^\lambda = (m-\lambda+1)\binom{m}{\lambda} \frac{\binom{\lambda-1}{\lambda-1}}{\binom{m+1}{\lambda}(m+\lambda-1)} = \binom{m}{\lambda} \frac{1}{\binom{m+1}{\lambda}}$$

per $n=\lambda+1$

$$\alpha_\lambda^{\lambda+1}=(m-\lambda+1)\binom{m}{\lambda}\left\{\frac{1}{\binom{m+1}{\lambda}(m-\lambda+1)}+\frac{\lambda}{\binom{m+2}{\lambda}(m-\lambda+2)}\right\},$$

e per essere

$$\binom{m+1}{\lambda}=\binom{m+2}{\lambda}\frac{m-\lambda+2}{m+2},$$

avremo

$$\alpha_\lambda^{\lambda+1}=(m-\lambda+1)\binom{m}{\lambda}\frac{1}{\binom{m+2}{\lambda}(m-\lambda+2)}\left\{\frac{m+2}{m-\lambda+1}+\lambda\right\}$$

$$=(m-\lambda+1)\binom{m}{\lambda}\frac{1}{\binom{m+2}{\lambda}(m-\lambda+2)}\,\frac{m+2+\lambda(m-\lambda+2)-\lambda}{m-\lambda+1}$$

$$=\frac{\lambda+1}{\binom{m+2}{\lambda}}\binom{m}{\lambda}.$$

Poniamo ora

$$n=\lambda+2;$$

avremo

$$\alpha_\lambda^{\lambda+2}=(m-\lambda+1)\binom{m}{\lambda}\left\{\frac{\lambda+1}{\binom{m+2}{\lambda}(m-\lambda+1)}+\frac{\lambda\,.\,\lambda+1}{2\binom{m+3}{\lambda}(m-\lambda+3)}\right\},$$

da cui raccogliendo

$$\alpha_\lambda^{\lambda+2}=(m-\lambda+1)\binom{m}{\lambda}\frac{\lambda+1}{2\binom{m+3}{\lambda}(m-\lambda+1)}\,\frac{2(m+3)+\lambda\,.\,(m-\lambda+1)}{m-\lambda+3}$$

$$=\binom{m}{\lambda}\frac{\lambda+1}{2\binom{m+3}{\lambda}}\,\frac{(m-\lambda+3)(\lambda+2)}{m-\lambda+3}=\binom{m}{\lambda}\frac{\binom{\lambda+1}{2}}{\binom{m+3}{\lambda}}.$$

Ora dall' ispezione dei valori del sommatorio per $n=\lambda,\ \lambda+1,\ \lambda+2$, si scorge la legge di successione dei valori del sommatorio stesso. Supposto infatti che per n, si prende il valore $n-1$, e si abbia per valore del sommatorio

$$\frac{\binom{n-1}{\lambda}}{(m-\lambda+1)\binom{m+n-\lambda}{\lambda}},$$

troverò per il valore n l'espressione

$$\frac{\binom{n}{\lambda}}{(m-\lambda-1)\binom{m+n-\lambda+1}{\lambda}}.$$

Infatti per n, il sommatorio sarebbe eguale alla somma delle espressioni

$$\frac{\binom{n-1}{\lambda}}{(m-\lambda+1)\binom{m+n-\lambda}{\lambda}}+\frac{\binom{n-1}{\lambda-1}}{\binom{m+n-\lambda+1}{\lambda}(m+n-2\lambda+1)};$$

e poichè

$$\binom{n-1}{\lambda} = \binom{n}{\lambda}\frac{n-\lambda}{n} \quad \text{e} \quad \binom{n-1}{\lambda-1} = \binom{n}{\lambda}\frac{\lambda}{n}$$

$$\binom{m+n-\lambda}{\lambda} = \binom{m+n-\lambda+1}{\lambda}\frac{m+n-2\lambda+1}{m+n-\lambda+1},$$

si avrà per sostituzione

$$\frac{\binom{n}{\lambda}\frac{n-\lambda}{n}}{\binom{m+n-\lambda+1}{\lambda}\frac{m+n-2\lambda+1}{m+n-\lambda+1}(m-\lambda+1)} + \frac{\binom{n}{\lambda}\frac{\lambda}{n}}{\binom{m+n-\lambda+1}{\lambda}(m+n-2\lambda+1)},$$

da cui raccogliendo ed eseguendo i calcoli, si ricava

$$\frac{\binom{n}{\lambda}}{\binom{m+n-\lambda+1}{\lambda}(m-\lambda+1)}.$$

Resta con ciò provato che il valore del sommatorio è, per il valore n, dato da

$$\frac{\binom{n}{\lambda}}{(m-\lambda+1)\binom{m+n-\lambda+1}{\lambda}},$$

e quindi per sostituzione nella *e)*

$$\alpha_\lambda^{(n)} = \frac{\binom{n}{\lambda}\binom{m}{\lambda}}{\binom{m+n-\lambda,+1}{\lambda}}$$

La legge che regola la successione dei valori della $\alpha_\lambda^{(n)}$ per qualunque valore di λ, ed n, è dunque verificata.

Dott. A. Bassi.

Sulla risoluzione dei problemi mediante la sola riga

Si consideri la riga, non come atta soltanto a *tracciare* una retta, ma come uno strumento che permetta inoltre, mediante punti di riferimento che vi si suppongono segnati, di portare una lunghezza data sopra una retta *già tracciata*. È da prevedere che *taluni* problemi, che si ritengono non risolubili senza l'aiuto del compasso, diventino invece risolubili mediante la sola riga così definita, poichè una tal riga ha, per così dire, qualche cosa del compasso. Cominciamo dai più semplici:

a) *Ad una retta data condurre una parallela.* Si congiunga un punto qualunque C, preso fuori della retta, a due punti A e B della retta stessa; si prenda CX = AC, CY = BC; evidentemente XY sarà parallela ad AB.

b) *Ad una retta data condurre la parallela per un punto dato.* Per questo punto C si conduca una retta qualunque, che incontra in D la data retta AB. Si tracci poi una parallela a CD: questa incontra in E la retta data; e se si prende $EX = DC$, è chiaro che CX sarà la parallela richiesta.

Dopo ciò si vede che si può, *senza compasso*, costruire una quarta proporzionale, o una terza proporzionale, ed in generale qualunque espressione della forma $x = \frac{abcd}{efg}$. Ed anche si può dividere un segmento rettilineo dato in un qualsiasi numero di parti uguali, o proporzionali a lunghezze date.

c) *Tracciare un angolo retto, che abbia il vertice in un punto dato.* Per questo punto A si conduca una retta qualunque; per un punto B di questa si tracci un'altra retta XY, e su questa si portino, nei due sensi, le lunghezze $BX = BY = AB$. In tal modo XAY risulterà un angolo retto.

d) *Ad una retta data condurre la perpendicolare per un punto dato.* Si costruiscano due angoli retti, aventi il vertice nel dato punto C; siano A e B, rispettivamente, i punti d'incontro di due lati del primo e del secondo angolo con la retta data, e si tracci per A la parallela all'altro lato del secondo angolo, e per B la parallela all'altro lato del primo angolo: sia X il punto d'incontro di tali parallele. È chiaro che CX è la perpendicolare richiesta, giacchè le altezze del triangolo ABC debbono concorrere in un punto. La costruzione diventa illusoria quando C è dato sulla retta; ma si può allora cominciare dal sostituire questa con una sua parallela.

Dalle cose fin qui dette segue che si può, *senza compasso*, costruire qualunque espressione irrazionale della forma $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}$, e per conseguenza $a\sqrt{3}$, o un triangolo equilatero, o un esagono regolare di lato a, ed anche gli angoli di 45°, 60°, 30°, ed in generale ogni angolo definito della formula $\tan\theta = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, con α e β razionali.

Ora, per riassumere, e per vedere fin dove si può fare a meno del compasso nel costruire le espressioni, che si sa di poter costruire mediante la riga ed il compasso, ricordiamo che tali costruzioni si possono ricondurre a quella di una delle seguenti espressioni:

a) $x = \frac{\varphi}{\psi}$, con φ e ψ polinomi razionali omogenei, dei gradi rispettivi $n + 1$ ed n. Dividendo numeratore e denominatore per a^{n-1}, dove a indica una lunghezza qualunque, si riducono al primo grado i termini di ψ, quindi tutto il denominatore ad un monomio; poi x alla somma di tante espressioni del primo grado, che si sanno costruire senza compasso, per quanto si è osservato in seguito alla risoluzione dei primi due problemi.

b) $x = \sqrt{a^2 + b^2 + \ldots}$, che si può costruire, come si è detto, senza compasso.

c) $x = \sqrt{ab}$, $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, espressioni che si trasformano immediatamente l'una nell'altra, sicchè il problema di "*costruire la media geometrica di a e b*" equivale all'altro: *costruire un triangolo rettangolo, conoscendone un lato e l'ipotenusa*. Quando a e b ammettono una comune misura c, ponendo $a = c\alpha$, $b = c\beta$, si ha $x = c\sqrt{\alpha\beta}$ o $x = c\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, e si ricade nel caso precedente.

Adunque il solo problema, in cui le considerazioni che precedono non valgono a dispensarci dall'uso del compasso, è la *ricerca della media geometrica fra due lunghezze, tra loro incommensurabili.*

Prof. G. Cesàro
DELL'UNIVERSITÀ DI LIEGI.

LUOGHI ED INVILUPPI (*)

(ESERCIZI DI GEOMETRIA ANALITICA)

29. Sia OA un raggio fisso di un circolo, OB ed OC due raggi mobili tali che sia $\widehat{AOC} = 2\widehat{AOB}$.

1° Il luogo delle intersezioni delle tangenti al circolo nei punti B e C è (oltre alla retta OA) una *trisettrice di Mac-Laurin*.

2° Se da B si conduce la parallela ad OA e da C la perpendicolare alla OA stessa, il luogo delle intersezioni di queste due rette è una *parabola*.

3° Se invece si conduce da B la perpendicolare e da C la parallela ad OA, il luogo delle intersezioni è una *quartica nodale*.

30. Se A e B sono due vertici fissi di un triangolo ABC ed è $\widehat{C} = 3\widehat{A}$, il luogo di C è una *quartica circolare* con un punto triplo in A. Le tangenti in A sono la perpendicolare alla AB e le rette inclinate su AB di $\pm \frac{\pi}{4}$. La curva ha due assintoti reali inclinati di $\pm \frac{\pi}{8}$ su AB e incrociantesi in A.

31. Il luogo dei centri dei cerchi iscritti nei triangoli determinati da un raggio fisso e da uno mobile di uno stesso circolo è una *strofoide retta*.

32. Si considerino tutte le coniche simili di cui è dato un fuoco F e la corrispondente direttrice passa per un punto dato D; il luogo dei centri di tali coniche è un *circolo*; l'inviluppo delle coniche stesse è pure un *circolo*.

33. Sieno C^2 e C'^2 due cerchi concentrici in O e supponiamo che C'^2 sia interno a C^2. Da un punto S di C'^2 si conduca una retta mobile che tagli C^2 in A e A' e C'^2 ulteriormente in T. Se R è l'altro estremo del diametro di C'^2 passante per S, le intersezioni della TR con le OA, OA' descrivono una *curva di Jerabek*.

34. Un cerchio di raggio r rotola sopra una retta data. Da un punto fisso A di questa retta si conduce la seconda tangente al cerchio; il luogo dei punti di contatto è una *cubica circolare*.

35. Sia OA un raggio fisso di un circolo O^2, M ed N due punti di questo circolo tali che sia $\widehat{AN} = 2\widehat{AM}$; il luogo del baricentro dei punti A, M, N ed O è una *Conchiglia di Pascal*.

36. Una retta mobile perpendicolare ad un diametro fisso AB di un cerchio di centro O taglia questa curva nei punti P, Q: il luogo delle intersezioni delle rette AP e QO; AQ e PO è (oltre alla retta AB contata due volte) una *iperbole*.

37. Sieno AB ed A'B' due rette parallele ed O un punto fisso della

(*) Continuazione v. Vol. preced. a pag. 59.

bisettrice della striscia da esse determinata. Si conduca per O una retta mobile che tagli in M ed N rispettivamente le AB ed A'B'; il luogo delle intersezioni della perpendicolare condotta da M ad MN e della bisettrice dell'angolo MNB' è una *cubica mista*.

38. Il luogo del vertice mobile di un triangolo di cui è data la base AB e si sa che è $\widehat{A} = 2\widehat{B}$, è una *quartica* con un punto isolato in A e che ha due assintoti inclinati di $\pm \frac{\pi}{3}$ sulla retta AB.

39. Sieno date due rette ortogonali OX ed OY ed un segmento a. L'inviluppo dei cerchi che hanno per centro un punto A di OX e passano per un punto B di OY, in modo che sia $OA + OB = a$, è una *ellisse*.

40. Sia AP una retta mobile intorno ad un punto fisso di un circolo O^2 di centro O che incontri ulteriormente il cerchio in P, PT la tangente in P che incontri in T il diametro passante per A; se TI è la perpendicolare condotta da T ad AP, il luogo di I è una *quartica* (inversa di *folium parabolicum*).

41. Sia NM una corda mobile di un cerchio, parallela ad un dato diametro AB; si unisca A con M e da N si conduca la perpendicolare ad AB; il luogo delle intersezioni di queste due rette è una *Cissoide di Diocle*.

42. L'inviluppo di tutte le coniche simili che hanno un fuoco sopra un cerchio dato e la corrispondente direttrice è una data retta, è una coppia di *coniche* della stessa specie di quelle date.

43. Sia O un punto fisso ed A uno mobile di un cerchio e sia OO' il diametro passante per O; il luogo delle bisettrici dell'angolo AOO' con la parallela condotta da A ad OO' è un *trifolium retto*.

44. Sia PQ una retta mobile perpendicolare all'asse maggiore AB di un'ellisse. Il luogo delle intersezioni della tangente in P all'ellisse con la retta QA è (oltre alla tangente in A all'ellisse) un'*iperbole*.

45. Il luogo dei vertici I di un triangolo variabile MNI tale che MN sia diametro di un cerchio dato C^2, MI sia tangente a questo cerchio ed NI passi costantemente per un punto A di C^2 è una *cissoide di Diocle*.

46. Se dal punto doppio di una cubica razionale circolare si conducono due rette ortogonali che taglino la curva ulteriormente nei punti P e Q, il luogo del punto medio del segmento PQ è una *retta*.

47. Sia OA un raggio fisso e OP uno mobile di un circolo O^2 e QQ' il diametro perpendicolare a questo raggio. Il luogo delle intersezioni delle rette QA e QA' con OP è una *strofoide retta*.

48. Sia A un punto fisso ed M uno mobile di un circolo O^2 di centro O; il luogo delle intersezioni della retta OM col cerchio A(AM) è una *Conchiglia di Pascal*; così pure il luogo delle intersezioni della tangente in M ad O^2 con lo stesso cerchio A(AM) è una *Conchiglia di Pascal*.

49. Sia C^2 un cerchio fisso e C'^2 un altro cerchio che rotoli su C^2; il luogo delle intersezioni di C'^2 con la parallela condotta dal punto di contatto dei due cerchi ad una direzione fissa, è, in generale, un'*ellisse* (oltre al circolo C^2).

50. Sia MN una retta mobile, perpendicolare all'asse maggiore di un'ellisse di centro O ed incontri in M, N la curva. Il luogo delle intersezioni della OM con la tangente in N e della ON con la tangente in M è una *kreuzcurva*.

Se si considera invece un circolo, si ha una *kreuzcurva equilatera*.

Se invece di considerare un'ellisse si considera un'iperbole, si ha per il luogo una *quartica* che ha un punto doppio nel centro dell'iperbole e le tangenti in questo punto coincidono con gli assintoti dell'iperbole.

Se l'iperbole è equilatera la suddetta quartica è una *lemniscata di Bernoulli*.

G. Cardoso-Laynes.

MOVIMENTO ED EGUAGLIANZA

1. L'articolo " Il postulato del movimento „ scritto da Anton Maria Bustelli nel *Bollettino di matematiche e scienze fisiche*, anno I, n. 13-14, contiene diversi concetti degni di essere meditati. Io, unicamente mosso dal desiderio di veder chiaro in una questione che ha occupato molti nostri valorosi insegnanti e cultori di scienze matematiche, come il Burali-Forti, il De Amicis, il Veronese, il Bustelli, ecc., scrivo le mie considerazioni.

2. Base di tutta la geometria elementare è il concetto di eguaglianza dimostrata col movimento. Questo principio tacitamente incluso in Euclide e in tutti gli elementi di geometria fino a Legendre, fu poi posto in evidenza da diversi autori che vennero dopo Legendre, e in questi ultimi tempi il De Amicis, il Bustelli ed altri ne spiegarono la grande importanza. Nella seduta quarta del congresso promosso dall'associazione Mathesis in Torino nel 1898, dissi, e lo stesso prof. De Amicis ammise, essere conveniente sostituire, nella formola del detto principio, la parola " *verificare* „ alla parola " *dimostrare* „. Ora partirò da questa formula " *Base di tutta la geometria elementare è il concetto di eguaglianza verificata col movimento* „ e cercherò di spiegarmi sul significato e sull'estensione de' suoi tre principali elementi, moto, verifica, eguaglianza.

Tutti abbiamo le nozioni intuitive di:

corpo fisico ossia tutto ciò che genera le nostre sensazioni le quali vanno sotto il nome di " proprietà dei corpi fisici „ p. e. colore, peso, porosità, impenetrabilità, ecc.

corpo geometrico ossia tutto ciò che si ottiene pensando al corpo fisico, e nello stesso tempo facendo astrazione dai nostri sensi ossia dalle proprietà dei corpi fisici e da altre possibili sensazioni non ancora riconosciute e classificate sotto la denominazione " proprietà fisiche dei corpi „.

forma ed estensione ossia elementi comuni a tutti gli individui della classe " corpo geometrico „

punto geometrico o semplicemente punto ossia ciò che si ottiene pensando al corpo geometrico e nello stesso tempo facendo astrazione dai detti elementi, forma ed estensione.

3. Il movimento dei corpi è concetto primitivo fornitoci dall'esperienza.

A tutte le cose, che cadono o che potrebbero cadere sotto i nostri sensi (che generano o che potrebbero generare le nostre sensazioni), si associa il concetto di movimento. Ma tale concetto non si può associare nè alle sensazioni o affezioni dell'uomo (p. e. dolore, ambizione, virtù, avarizia ecc.) nè alle cose che non cadono e non possono cadere sotto i nostri sensi (p. e. numeri, valore, proposizione, operazioni aritmetiche, ecc.) nè ai risultati dell'astrazione su certe classi di cose (p. e. il dolce, l'amaro, la durezza, la trasparenza, l'impenetrabilità, ecc.) risultati ottenuti pensando prima a classi di cose materiali che producono in noi certe sensazioni, e poi facendo astrazione da tutto ciò che non è comune a tutti gl'individui delle classi. Perciò nè alle cosidette proprietà dei corpi fisici, nè al corpo geometrico, si può associare il concetto di movimento.

Quando si dice che un punto si move e genera una linea, si deve intendere che un punto fisico si move e genera la rappresentazione di una linea. Quando si dice che una linea si move e genera una superficie, si deve intendere che, un corpo fisico, il quale si ritiene come la rappresentazione di una linea, si muove e genera la rappresentazione di una superficie. Analogamente la rappresentazione di una superficie può muoversi a generare la rappresentazione di un corpo. In conclusione, in geometria, il moto si riferisce sempre a rappresentazioni di enti geometrici le quali generano rappresentazioni di altri enti geometrici.

Fermiamoci un poco sopra i concetti precedenti, e per semplicità e varietà di linguaggio chiamiamo *forma* un corpo geometrico, e chiamiamo *figura* la rappresentazione di una forma (qui s'intende la rappresentazione naturale e non già il disegno che è la rappresentazione di rappresentazione). Ad ogni corpo fisico corrisponde una forma ed una rappresentazione della forma ossia una figura: la figura è cosa che cade sotto i sensi dell'uomo: la forma non cade più sotto i sensi dell'uomo. Per es. fissiamo alcune palle da bigliardo le quali producano su l'uomo le stesse sensazioni; per ognuna, dopo l'astrazione da tutte le proprietà fisiche, rimarrà sempre ciò che in geometria vien chiamato figura e che determina una sensazione: ora facendo astrazione anche da quest'ultima sensazione rimarrà un elemento comune a tutte le dette palle e che dicesi forma o corpo geometrico. Quando un corpo fisico si toglie dal campo dell'osservatore, nella percezione dell'osservatore non esisterà più nè il corpo fisico nè la figura corrispondente al corpo fisico, ma esisterà sempre (date le buone condizioni intellettuali dell'osservatore) il corpo geometrico ossia la forma corrispondente al corpo fisico. Non si può negare che la rappresentazione di una forma sia un corpo (inteso con questo nome non già il solo corpo fisico ma una cosa che cade sotto i sensi ossia generante una sensazione anche diversa da quelle che vanno sotto il nome di proprietà fisiche): questo corpo non è corpo fisico, non avendo più le proprietà fisiche come l'elasticità, la porosità, l'impenetrabilità; però esso è sempre una cosa a cui si associa la nozione di moto precisamente come pei corpi fisici.

Invece la forma non è più corpo (inteso sempre con questa parola una cosa che genera una sensazione) e ad essa, come già si disse, non si associa la nozione di moto.

Riepilogando brevemente diremo: in geometria, per movimento di un corpo si deve sempre intendere il movimento della figura di detto corpo; e poichè questa non è corpo fisico, così al suo movimento sono sempre estranei i fenomeni fisici, quindi il fenomeno fisico della deformazione è completamente estraneo al movimento geometrico.

Il Bustelli colpì nel segno quando scrisse " .... a nessuno sarebbe venuto in animo di screditare, per via di dubbi e di diffidenze, quel postulato (il postulato del movimento nella veste datagli dall'Hoüel) se non vi si fossero ficcate le parole invariabile di forme .... "

4. Si verifica che la distanza tra due paesi è di un dato numero di km; che la cassa contiene un dato numero di monete di data specie; che un corpo ha un dato peso; che una merce è di data qualità; ecc.; si verifica, in un dato ambiente, la legge di gravità, la porosità di corpi dati, ecc.

Si dimostra una proposizione su un triangolo, su un'operazione d'aritmetica, su formole algebriche ecc.; si dimostra, la ragione o il torto di un contendente, un diritto, come un fatto debba essere avvenuto in un modo piuttosto che in un altro ecc.

Verificare significa disporre, ordinare, dei corpi fisici in modo da ottenere un determinato effetto; tale effetto o fatto sperimentale sarà poi indicato con una voce o con un segno o con una proposizione. Dimostrare significa disporre, ordinare, delle proposizioni (in generale delle cose che non sono corpi) in modo da ottenere, come conseguenza logica, una determinata proposizione.

Nel primo caso, come risultato della verifica, coi sensi si acquista la coscienza dell'effetto: nel secondo caso, come risultato della dimostrazione, si ha il così detto sentimento dell'evidenza. La verifica è, in tutto o in parte, operazione dei sensi, e per essa è proprio l'aggettivo sperimentale: la dimostrazione è essenzialmente operazione di logica e per essa è proprio l'aggettivo razionale, logica.

Per quanto già si è detto, il moto non è operazione che si fa su enti geometrici, ma si bene un operazione che si può fare sulle rappresentazioni di enti geometrici cioè figure; quindi il moto non potrà valere per dimostrare proposizioni su enti geometrici, ma potrà valere per verificare dei fatti (fatti indicati da proposizioni) sulle figure.

Ma intanto, come va che le operazioni di moto e le proposizioni su figure si intendono (e ciò per comodità nello sviluppo della geometria e senza cadere in equivoci o contraddizione) come operazioni di moto e proposizioni su gli enti geometrici dei quali esse sono le rappresentazioni? Ecco il nodo della questione.

5. Cominciamo prima di tutto ad intenderci sulla nozione di *identità*.

Avviene spesso che una stessa cosa si indica con due segni diversi, o si nomina con due vocaboli diversi; in tal caso si usa dire che le due cose corrispondenti ai due segni, ai due vocaboli, sono identiche. Quindi identità non esprime altro che una stessa cosa indicata in modi diversi o chiamata con nomi diversi. Non si deve dimenticare che i segni diversi od i vocaboli diversi, attribuiti ad una stessa cosa, corrispondono a diversi istanti, nei quali si pensa alla cosa. La frase " una cosa è identica a sè stessa " non è che un modo per avvertire che la cosa si presenta al pensiero in due istanti diversi. Da una stessa cosa pensata in diversi istanti, e quindi indicata con segni diversi o chiamata con diversi vocaboli, nasce il sentimento dell'identità. La frase " due forme identiche " non è che un modo per dire " si ha una sola forma pensata in due istanti cioè ottenuta due volte come risultato di astrazione su un corpo fisico o su due distinti corpi fisici. La parola " *replicazione* o *multilocazione* " che si legge nello scritto del Bustelli, sarebbe conveniente per esprimere il suddetto concetto di *identità di forma*.

Parlando di figure, all'identita si dà il nome speciale di *coincidenza o sovrapposizione*: così si dice che, due punti coincidono o sono sovrapposti, per dire che si ha una sola rappresentazione di punto geometrico pensata in due diversi istanti e chiamata con nomi diversi: si dice che, due figure coincidono o sono sovrapposte, per dire che si ha una sola figura con nomi diversi, ossia tutto ciò che si pensa per la figura corrispondente ad un nome vale anche per la figura corrispondente all'altro nome.

Qui può nascere un'obbiezione: considerando le figure come classi di rappresentazioni di punti geometrici, possiamo avere due figure coincidenti secondo la definizione "*due figure coincidono quando ogni punto di una qualunque di esse appartiene anche all'altra*", ma tali che esista una corrispondenza fra la prima ed una terza figura, ed un'altra diversa corrispondenza fra la seconda e la terza: ciò può far dubitare che questa *coincidenza* non sia compresa nel concetto di coincidenza sopra spiegato: ma si deve osservare che la corrispondenza fra la prima e la terza figura è nello stesso tempo corrispondenza tra la seconda e la terza; che la corrispondenza tra la seconda e la terza è nello stesso tempo corrispondenza tra la prima e la terza; che quindi il detto fatto si riduce a porre due diverse corrispondenze tra una figura sola ed una terza figura.

6. Definizione. — *Due figure si dicono eguali quando sono rappresentazioni di una stessa forma (corpo geometrico), o, ciò che è lo stesso, di identiche forme.*

Ricordando quanto si disse al n. 3 sarà chiaro che: quando un corpo fisico si move, ai diversi istanti si fa corrispondere sempre lo stesso corpo fisico e quindi la stessa forma; e le figure, che rappresentano sempre la stessa forma nei diversi istanti, ossia le figure corrispondenti ai diversi istanti, non sono coincidenti ma sono eguali; e ciò stando al significato dato precedentemente alla parola eguale.

L'obbiezione del movimento fisico, reale, non conforme al concetto precedente, è distrutta dal gran principio che caratterizza tutti i rami della matematica e delle altre scienze positive come l'economia politica, la sociologia; principio che nella mente del D'Alembert ha preso questa veste "Le vérités mathématiques sont en quelque sort l'asymptote des vérités physiques".

Volendo introdurre nei ragionamenti la voce *deformazione,* questa si deve prendere per indicare una classe di forme oppure la corrispondente classe di figure: così i termini "forma variabile, figura variabile" si spiegano in modo analogo ai termini "numero variabile, grandezza variabile, valore variabile", i quali sono presi per indicare, classe di numeri, classi di grandezze, classi di valori. Quando si dice "gli agenti fisici agiscono in un certo intervallo di tempo sopra un corpo, modificandone le proprietà fisiche e la figura e la forma", il geometra intende che: si ha una determinata classe di corpi, ad ogni istante dell'intervallo considerato corrisponde un corpo con la sua figura e forma.

Il movimento geometrico (al quale sono estranei i fenomeni fisici) si traduce nella percezione, di un solo corpo fisico in diversi istanti, e di molte figure eguali (una per istante), e di una sola forma: invece il movimento con deformazione si traduce nella percezione, di una classe di corpi (uno per istante), e di molte figure (una per istante), e di molte forme (una per istante). Con altre parole si dirà: ad una classe di istanti, l'operazione di movimento geometrico fa corrispondere uno stesso corpo fisico, una stessa forma, una classe di figure eguali; invece l'operazione di movimento con deformazione fa corrispondere una classe di corpi, una classe di forme, una classe di figure.

In conclusione la voce "deformazione" deve essere bandita dalla geometria elementare, prima perchè indica un concetto totalmente estraneo alla geometria elementare, secondariamente perchè indica un concetto molto più complesso di quello del movimento geometrico, invero, è molto più semplice, chiara, distinta, la visione di un corpo e di una forma che non la visione di una classe di corpi e di una classe di forme. Il movimento con deformazione, introdottosi di nascosto e fraudolentemente, nella geometria per mezzo delle frasi " senza deformazione, invariabilità di una figura, ecc. ", ha generato confusione ed ha fatto credere che il provare l'eguaglianza delle figure con l'operazione di movimento sia un circolo vizioso.

7. Per togliere di mezzo alcune obbiezioni che si potrebbero fare sulle precedenti conclusioni, le quali sono in sostanza basate su queste tre cose distinte, corpo fisico, sua figura, sua forma, ritorniamo su ciò che già si è detto al n. 3, e riprendiamo l'esempio delle palle da bigliardo, le quali producono su noi le identiche sensazioni. Fissiamone una, e su questa facciamo astrazione da una proprietà fisica (la quale si traduce poi in una sensazione) p. e. dalla gravità. Dopo ciò, noi diremo forse che si ha ancora lo stesso corpo? È vero che per i nostri cinque sensi non vi sarà forse modificazione alcuna, è vero che un altro uomo non può accorgersi della nostra astrazione, possono essere vere tante altre belle cose, ma noi diremo sempre di non avere più la palla di prima e di avere un'altra cosa, che però è sempre un corpo (inteso con questo nome una cosa che genera sensazioni). Continuiamo a far successivamente astrazione dall'elasticità, dalla porosità, e avremo successivi corpi derivati e tra loro differenti. Facciamo ancora astrazione dalla durezza e dal colore.

Quale sarà il risultato finale di quest'ultime astrazioni? Certamente sarà cosa che non ha più relazione coi, così detti, due sensi fondamentali del tatto e della vista; però non sarà assurdo immaginare che abbia relazioni con altri sensi dell'uomo; ma se anche, relativamente all'uomo, non ha più relazione con alcun senso, possiamo noi dire che esso non sia cosa atta a generare sensazioni su strutture organiche più perfezionate della struttura umana? Non si dica che tolte tutte le proprietà fisiche, a noi cognite, il corpo resta distrutto. Invece non si deve dimenticare che, tutte le proprietà fisiche di un corpo sono funzioni dei diversi organi della sensibilità degli uomini, e che, fatta astrazione da tutte le proprietà fisiche, per necessità logica, rimarrà sempre quell'essenza a noi ignota la quale in presenza di strutture organiche superiori a quelle degli uomini, può determinare nuove e più potenti sensazioni. Bisogna poi anche osservare che si ha sovente il fatto di diverse sensazioni simultanee; queste nel mondo fisico, empirico, devono stare sempre insieme, ma nel campo del pensiero si separano e si considerano indipendentemente l'una dall'altra.

Per quanto si è detto, non è nè metafisico, nè oscuro, nè difficile l'ammettere che: per la fissata palla da bigliardo, simultaneamente alle sensazioni del tatto e della vista, vi ha un'altra sensazione che chiameremo *sensazione della figura*. E questa sensazione non corrisponde ancora alla " forma ", poichè resta nella coscienza anche senza l'esistenza delle altre palle dell'esempio proposto. Ripetiamo: per ognuna delle palle vi ha un qualcosa, che in noi produce una sensazione, la quale nel mondo fisico è sempre simultanea ad altre, un qualcosa che non ha più le proprietà fisiche dell'elasticità, dell'impenetrabilità ecc., un qualcosa a cui si associa il moto, o a cui si dà il nome di figura. Finalmente l'ultima astrazione dalla sensazione di figura dà per risultato un elemento non più speciale per ogni palla, ma comune a tutte le palle, un elemento logico a cui si dà il nome di forma o corpo geometrico comune a tutte le palle dell'esempio proposto.

Ad ogni corpo fisico corrisponde la sua figura e la sua forma; e, per la definizione al n. 6, ad ogni classe di figure eguali corrisponde una sola forma o corpo geometrico. Certamente, la definizione formale di eguaglianza tra figure, non contiene il movimento, perchè essa si traduce in identità delle forme rappresentate dalle figure. Però data una figura, come è mai possibile ottenere altre figure ad essa eguali senza il movimento della figura data? Il movimento è l'unico generatore delle figure eguali ad una data; senza il movimento la definizione di eguaglianza tra figure sarebbe sterile, ossia priva di un contenuto utile.

A questo punto apriamo una parentesi. Pare che la " definizione di eguaglianza tra segmenti „ data dal Veronese, sia in qualche modo in opposizione colle precedenti conclusioni. Vediamo un po'.

L'eguaglianza di due segmenti, per il Veronese, si riduce a corrispondenza fra parti oppure punti di segmenti; dunque per il Veronese il segmento esiste in quanto che è un complesso o classe di cose dette o parti di segmento, oppure punti. Ma se noi, come vedremo fra poco, intenderemo il segmento per una cosa, ossia individuo e non per una classe, certamente non accetteremo più la definizione del Veronese. Un individuo non può mai identificarsi con una classe. Avviene spesso il caso in cui una stessa cosa (per es. segmento) viene considerata sotto due aspetti differenti: questo modo di esprimersi è una forma linguistica popolare e poco esatta poichè, rigorosamente parlando, le differenze di aspetto o di punto di vista costituiscono differenze di obbietto: quando si dice che due teorie trattano della medesima cosa o del medesimo fenomeno da punti di vista differenti, si vuol intendere di considerare in una stessa cosa, *caratteri tipici differenti;* e questi caratteri tipici differenti costituiscono effettivamente obbietti differenti rispetto alla logica.

La definizione del Veronese è il capo saldo di una nuova e pregevole teoria, la quale, nei principi, non può essere nè in accordo nè in opposizione alla teoria basata sul movimento: queste due teorie si possono paragonare a due viandanti che sono incamminati su strade differenti e che senza punto mai disturbarsi arrivano alla stessa meta.

8. Fin qui si è sempre parlato delle figure e forme corrispondenti ai corpi fisici, dimenticando quelle cose che s'intuiscono come elementi delle figure, cioè le superficie, le linee, i punti. Queste sono strettamente unite al concetto indefinibile di limite, anzi costituiscono lo stesso concetto considerato nel solo campo geometrico. Basterà accennare brevemente che:

la superficie è il limite tra due parti di una figura oppure tra la figura e tutto ciò che è diverso dalla figura;

la linea è il limite tra due parti di una superficie oppure tra la superficie e tutto ciò che è diverso dalla superficie;

il punto è il limite tra due parti di una linea oppure tra la linea e tutto ciò che è diverso dalla linea.

In seguito alla superficie ed alla linea si diede un significato più esteso per poter comprendere sotto queste denominazioni anche ciò che vien chiamato superficie e linea illimitata: invero dal corpo fisico e dalla corrispondente figura non può sorgere il concetto di " *illimitato* „ questo può sorgere solamente da postulato o da considerazioni speciali da farsi sulle stesse superficie o linee. Finalmente si presero a formulare certi postulati da applicarsi a superficie e linee, e scaturirono determinati concetti di piano e di retta illimitata.

Alla voce figura si diede poi un senso più ampio, comprendendo sotto questa denominazione anche le superficie, le linee, i punti, ed associando il movimento anche a questi elementi, ed estendendo a questi tutto ciò che s'è detto per le figure corrispondenti a corpi fisici.

Certamente per la logica è molto più comodo e vantaggioso partire da quegli elementi caratterizzati da maggior numero di postulati, ed è per questa ragione che nello studio della geometria s'incomincia dalla retta e dal piano. Però le nostre conoscenze si succedono secondo quest'ordine: corpo fisico; figura corrispondente al corpo fisico; superficie; linea; punto; porzione di piano; segmento; piano; retta; forme; eguaglianza di figure e moto come mezzo per verificare l'eguaglianza di figure; infine moti su punto, su linea, su superficie, considerati come generatori delle figure dette linea, superficie, e delle figure corrispondenti a corpi fisici. Cerchiamo di seguire lo sviluppo di un bambino posto in ambiente normale, vedremo che si metterà in rapporto col mondo a grado a grado, e seguendo con grande approssimazione la successione su detta.

9. Data una *figura* (intesa, d'ora in avanti, in senso lato come si spiegò al n. precedente) diremo che il moto è l'unico generatore delle figure eguali alla data ed eguali tra loro: date due figure, alla questione " riconoscere se sono eguali „ si può dare l'espressione " riconoscere se una delle due figure appartiene alla classe generata dal moto dell'altra „.

Ora osserviamo che di solito, per constatare se una data cosa appartiene ad una certa classe, non è necessario avere presenti tutti gli individui della classe per poi riconoscere l'identità di uno di essi con la cosa data, ma bastano alcune relazioni logiche tra la cosa data e la classe. Così per constatare, se una di due figure date appartiene alla classe delle eguali all'altra, non è necessario nè eseguire realmente il movimento su una figura, nè avere la sensazione dello stesso movimento, ma bastano alcune proposizioni relative al moto di figure; proposizioni che si possono intendere o come postulati del movimento o come postulati delle figure.

Gamalero, 16 Settembre 1900.

Prof. PIETRO BUFFA.

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI 228, 526, 527, 528, 530, 532

228. *Per un punto* S, *ad un cerchio* φ *si conducano le secanti arbitrarie* SBC, SMM′, *e la secante* SAD, *perpendicolare al diametro che passa per* B; *si avrà*

$$\tan\frac{BC}{2}\cdot\tan\frac{BM}{2}\tan\frac{BM'}{2}-\tan^2\frac{BA}{2}\left(\tan\frac{BM}{2}+\tan\frac{BM'}{2}-\tan\frac{BC}{2}\right)=0.$$

A. DEL RE.

Risoluzione del dott. Roberto Volpi a Modena.

Si riferisca la figura a due assi ortogonali coll'origine nel centro di φ e colla parte positiva dell'asse OX passante per B; si dicano a, b le coordinate di S, ed m il coefficiente angolare della MM′. L'ascissa di A è a, quindi, se r è il raggio di φ, si ha subito $\tan^2\frac{1}{2}\,BA=\frac{r-a}{r+a}$. Di più $\frac{1}{2}\,B(O)C=C(B)O$, perchè la bisettrice di B(O)C e la AD sono perpendicolari ai lati di C(B)O; quindi si ha $\tan\frac{1}{2}\,BC=\frac{r-a}{b}$.

NOTA. — Nel numero precedente fu per errore dimenticato il nome del prof. G. Mola fra i risolutori delle questioni 521, 522, 523, 524.

Inoltre si osserva facimente che la perpendicolare per O alla MM' fa con OB un angolo $= \frac{1}{2} B(O)M + \frac{1}{2} B(O)M'$, e quindi che è $\tan \frac{1}{2}(BM + BM') = -\frac{1}{m}$. Tenendo conto di queste uguaglianze e della formula $\tan\alpha + \tan\beta = \tan(\alpha+\beta)(1 - \tan\alpha\tan\beta)$, l'uguaglianza proposta si trasforma nella equivalente

$$\tan\frac{BM}{2}\tan\frac{BM'}{2} = \frac{b + m(r-a)}{b - m(r+a)}.$$

Ora facendo sistema delle equazioni di φ e di MM', per determinare le ascisse x ed x' di M ed M' si ha l'equazione $(b-am+mx)^2+x^2=r^2$, dalla quale si ha subito

$$\tan\frac{BM}{2}\tan\frac{BM'}{2} = \sqrt{\frac{r-x}{r+x}}\sqrt{\frac{r-x'}{r+x'}} = \pm\frac{b+m(r-a)}{b-m(r-a)}.$$

Una facile ispezione della figura, che per la generalità delle formule usate può limitarsi ad un solo caso particolare, mostra la convenienza del segno superiore, e resta in tal modo dimostrata l'uguaglianza enunciata.

526. *Il circolo osculatore in un punto* M *variabile d'un'ellissi incontra l'ellissi in* P. *Trovare l'area della curva inviluppo della perpendicolare abbassata da* M *sulla tangente all'ellissi nel punto* P.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del dott. Roberto Volpi a Modena.

È noto che se φ è l'angolo eccentrico corrispondente al punto M, quello corrispondente a P vien dato da -3φ (v. p. es. Salmon, *Sez. Con.*, trad. *Dino*, p. 221). Essendo allora $a\cos 3\varphi$ e $-b\,\text{sen}\,3\varphi$ le coordinate cartesiane di P rispetto agli assi dell'ellissi, si ricava per il coefficiente angolare della tangente in P: $\frac{b\cos 3\varphi}{a\,\text{sen}\,3\varphi}$, e per l'equazione della perpendicolare da M sulla tangente in P, dopo poche trasformazioni:

$$(1) \qquad a\,\text{sen}\,3\varphi \,.\, X + b\cos 3\varphi \,.\, Y = \frac{1}{2}(a^2+b^2)\,\text{sen}\,4\varphi + \frac{1}{2}(a^2-b^2)\,\text{sen}\,2\varphi;$$

e derivando rapporto a φ,

$$(2) \qquad 3a\cos 3\varphi \,.\, X - 3b\,\text{sen}\,3\varphi \,.\, Y = 2(a^2+b^2)\cos 4\varphi + (a^2-b^2)\cos 2\varphi.$$

Dalle (1) e (2), trasformando in somme i prodotti di seni e coseni, si deduce:

$$X = \frac{1}{12a}[(a^2+b^2)\cos 7\varphi - (a^2-b^2)\cos 5\varphi + 2(6a^2+b^2)\cos\varphi]$$

$$Y = \frac{1}{12b}[-(a^2+b^2)\,\text{sen}\,7\varphi + (a^2-b^2)\,\text{sen}\,5\varphi + 2(a^2+6b^2)\,\text{sen}\varphi],$$

donde

$$dX = \frac{1}{12a}[-7(a^2+b^2)\,\text{sen}\,7\varphi + 5(a^2-b^2)\,\text{sen}\,5\varphi - 2(6a^2+b^2)\,\text{sen}\varphi]$$

$$dY = \frac{1}{12b}[-7(a^2+b^2)\cos 7\varphi + (a^2-b^2)\cos 5\varphi + 2(a^2+6b^2)\cos\varphi].$$

Ora è facile osservare, anche senza entrare in dettagli di calcolo, che, trasformando sempre in somme i prodotti di seni e coseni, le espressioni di XdY e YdX contengono un termine indipendente da φ e dei termini con solo fattore variabile della forma $\text{sen}\,2k\,\varphi$, che nell'integrazione da 0 a $\frac{\pi}{2}$ vengono evidentemente a sparire. Curandosi soltanto del calcolo del termine indipendente da φ e posto mente alla manifesta simmetria dell'inviluppo rispetto agli assi, si trova senza difficoltà:

$$\text{area} = 4\int_0^b XdY = 4\int_0^a YdX = \frac{a^4+12a^2b^2+b^4}{6\,ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{a^4+12a^2b^2+b^4}{12\,ab}\,\pi.$$

527. *Si trovi:*

1° *il luogo dei centri dei circoli inscritti ed ex-inscritti a tutti i triangoli, che, essendo inscritti in un circolo dato, hanno due loro lati paralleli a due direzioni date;*

2° *l'inviluppo del terzo lato di questi triangoli.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del dott. Roberto Volpi a Modena.

1°. Sul circolo dato C di centro O si segnino le coppie di punti A, A' e B, B' per cui passano le tangenti rispettivamente parallele alle due direzioni fisse a e b. Scelto un punto qualunque X sopra C, si dicano M ed N i punti in cui le parallele per X ad a e b tornano ad incontrare C. Le bisettrici del triangolo XMN uscenti da X sono costantemente parallele a quelle dell'angolo (ab), quelle uscenti da M passano una per B e l'altra per B', essendo B e B' punti di mezzo degli archi XN e quelle uscenti da N passano per A ed A'. Detto poi Y il punto comune a tre di queste bisettrici, si osserva che uno degli angoli formati dalle MY ed NY è supplemento di Y(M)N + Y(N)M e quindi manifestamente uguale al complemento della metà di uno degli angoli (ab). Essendo adunque costanti gli angoli formati dalle MY ed NY e passando queste rette per due dei quattro punti A, A', B, B', si deduce che Y deve trovarsi su uno di quattro circoli fissi passanti rispettivamente per le coppie di punti AB', B'A', A'B, BA. Di più si osserva subito che questi circoli (per la grandezza degli angoli insistenti sulle corde corrispondenti alle coppie di punti testè nominati) debbono avere i centri nei vertici del parallelogrammo circoscritto a C coi lati perpendicolari alle rette a e b, e che debbono essere uguali a C, perchè, detto ad es. O_1 il centro di quello che passa per A e B, si ha $B(O_1)A = B(O)A$, essendo entrambi questi angoli uguali ad uno di quelli delle rette a e b. Finalmente si nota che scelto un punto qualunque Y sopra uno dei quattro circoli, per es., quello di centro O_1, le AY e BY incontrano nuovamente C in M ed N e che la corda MN è capace in C di un angolo MBA' = A(Y)B — A(A')B = ang. (ab), e quindi che le parallele per M ad a e b s'incontrano in un punto X di C, dando luogo ad un triangolo XMN inscritto in C ed avente Y come centro del circolo iscritto o di uno degli ex-iscritti. Resta così provato che il luogo richiesto è costituito dall'assieme di quei quattro circoli.

2°. Il terzo lato MN, essendo una corda di C su cui insiste un angolo costante (ab) è di lunghezza costante, e quindi inviluppa un circolo concentrico al dato e di facilissima costruzione.

528. *Sulla tangente in un punto* M *di una parabola di fuoco* F *si prendano due punti* M', M'', *tali che sia* MM' = MM'' = MF. *Il luogo di questi punti* M', M'' *è una cubica. Si trovi l'area compresa fra questa curva e il suo asintoto.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. G. Mola a Campobasso.

Un punto M della parabola riferita al fuoco F, se θ è l'angolo che il vettore FM fa con l'asse, ed a la distanza focale, può rappresentarsi con l'equipollenza

$$M = \frac{a\varepsilon^{\theta}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Derivando, abbiamo

$$\mathrm{DM} = \frac{-a\cos\frac{\theta}{2}\,.\,\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{3}}\,\varepsilon^\theta + i\frac{a}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\,\varepsilon^\theta = \frac{-a\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2}}\,\varepsilon^\theta = \frac{-a}{\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2}}\,\varepsilon^{\frac{\theta}{2}}.$$

Il modulo di questa espressione indica un segmento della tangente menata alla curva dal punto M. Esso, moltiplicato per $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, diventa eguale in grandezza al vettore FM. Onde se MM′ e MM″ sono due segmenti opposti presi sulla tangente dal punto M, ed eguali ad FM, sussisteranno le equipollenze

$$\mathrm{MM'} = \frac{-a\varepsilon^{\frac{\theta}{2}}}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}, \qquad \mathrm{MM''} = \frac{a\varepsilon^{\frac{\theta}{2}}}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}},$$

ovvero, poichè $\mathrm{FM'} = \mathrm{FM} + \mathrm{MM'}$, $\mathrm{FM''} = \mathrm{FM} + \mathrm{MM''}$,

$$\mathrm{FM'} = \frac{a}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\left(\varepsilon^\theta - \varepsilon^{\frac{\theta}{2}}\right),\quad \mathrm{FM''} = \frac{a}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\left(\varepsilon^\theta + \varepsilon^{\frac{\theta}{2}}\right).$$

Possiamo sostituire ad $\varepsilon^\theta - \varepsilon^{\frac{\theta}{2}}$, $\varepsilon^\theta + \varepsilon^{\frac{\theta}{2}}$, $\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$, rispettivamente i valori $2i\operatorname{sen}\frac{\theta}{4}\,\varepsilon^{\frac{3\theta}{4}}$, $2\cos\frac{\theta}{4}\,\varepsilon^{\frac{3\theta}{4}}$, $4\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{4}\cos^2\frac{\theta}{4}$, e porre $\frac{\varphi}{3}$ invece di $\frac{\theta}{4}$; avremo allora che i luoghi di M′ e M″ sono dati da

$$\mathrm{M'} = \frac{ai\varepsilon^\varphi}{\operatorname{sen}\frac{2\varphi}{3}\,.\,\cos\frac{\varphi}{3}}, \quad \mathrm{M''} = \frac{a\varepsilon^\varphi}{\operatorname{sen}\frac{2\varphi}{3}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{3}}.$$

Quando diamo a φ il valore zero, M′ e M″ indicheranno punti infinitamente lontani, M″ nella direzione positiva dell'asse, M′ nella direzione positiva della perpendicolare elevata da F. Per $\varphi = \frac{\pi}{2}$, abbiamo

$$\mathrm{FM'} = \frac{-4a}{3}, \quad \mathrm{FM''} = \frac{4ai}{\sqrt{3}},$$

cioè vengono determinati due punti, uno A, sull'asse, e l'altro B sulla perpendicolare elevata da F. E per $\varphi = \pi$, otteniamo $\mathrm{FM'} = \frac{-4ai}{\sqrt{3}}$, $\mathrm{FM''} = \frac{-4a}{3}$, che mostrano che M′, è in B′, simmetrico di B, e M″ in A. Dunque si hanno due rami di curve che hanno un punto all'infinito sull'asse, e che si tagliano nel punto A; due loro parti simmetriche tagliano dalla perpendicolare il segmento BB′, e le altre due parti hanno questa perpendicolare per asintoto.

Derivando il valore del vettore M′, si ha

$$\mathrm{DM'} = \frac{\left(ai\operatorname{sen}\frac{\varphi}{3}\operatorname{sen}\frac{2\varphi}{3} - 2ai\cos\frac{\varphi}{3}\cos\frac{2\varphi}{3}\right)\varepsilon^\varphi}{3\cos^2\frac{\varphi}{3}\,.\,\operatorname{sen}^2\frac{2\varphi}{3}} - \frac{a\varepsilon^\varphi}{\cos\frac{\varphi}{3}\operatorname{sen}\frac{2\varphi}{3}},$$

che, riducendo, si trasforma in

$$DM' = -\frac{a\varepsilon^{\frac{2\varphi}{3}}}{3\cos^2\frac{\varphi}{3}\,.\,\mathrm{sen}\,\frac{2\varphi}{3}} - \frac{2ai\varepsilon^{\frac{\varphi}{3}}}{3\cos\frac{\varphi}{3}\,.\,\mathrm{sen}^2\frac{\varphi 2}{3}}.$$

Onde per trovare il valore dell'area elementare dA descritto dal vettore M', ed espressa da

$$dA = \frac{i}{4}(M'\,.\,cjdM' - dM'\,.\,cjM'),$$

dobbiamo in questa formula sostituire i valori

$$M' = \frac{ai\varepsilon^{\varphi}}{\cos\frac{\varphi}{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\varphi}{3}},\ dM' = -\frac{a\varepsilon^{\frac{2\varphi}{3}}\,.\,d\varphi}{3\cos^2\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\varphi}{3}} - \frac{2ai\varepsilon^{\frac{\varphi}{3}}\,.\,d\varphi}{3\cos\frac{\varphi}{3}\,\mathrm{sen}^2\frac{2\varphi}{3}}$$

ed i coniugati dei medesimi

$$cjM' = \frac{-ai\varepsilon^{-\varphi}}{\cos\frac{\varphi}{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\varphi}{4}},\ cjdM' = -\frac{a\varepsilon^{-\frac{2\varphi}{3}}\,.\,d\varphi}{3\cos^2\frac{\varphi}{3}\,.\,\mathrm{sen}\,\frac{2\varphi}{3}} + \frac{2ai\varepsilon^{-\frac{\varphi}{3}}\,.\,d\varphi}{3\cos\frac{\varphi}{3}\,.\,\mathrm{sen}^2\frac{2\varphi}{3}}.$$

Dopo facili riduzioni si trova

$$dA = \frac{a^2}{2}\frac{d\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{3}\,\mathrm{sen}^2\frac{2\varphi}{3}},$$

che, integrata, tra i valori limiti $\frac{\pi}{2}$ e π di φ, dà $A = \frac{10}{9}\sqrt{3}\,.\,a^2$. Onde tutta l'area finita compresa tra la curva ed il segmento BB' dell'asintoto è ugnale a $\frac{20}{9}\sqrt{3}\,a^2$.

530. *Se si porta sopra ogni raggio vettore focale* FM *d'un'ellisse un segmento uguale ad un semidiametro coniugato a quello che passa per* M, *il luogo dell'estremo di questo segmento è una quartica di cui l'area è equivalente a quella dell'ellisse.*

E.-N. BARISIEN.

Risoluzione del dott. Roberto Volpi a Modena.

Se x ed y sono le coordinate di M rispetto agli assi dell'ellisse, come è noto, la lunghezza del semidiametro coniugato a quello che passa per M è data da $\sqrt{a^2 - e^2x^2}$, sicchè chiamando ρ e φ le coordinate polari di un punto del luogo cercato, rispetto ad F (di ascissa positiva) ed all'asse maggiore dell'ellisse, per equazioni parametriche del luogo medesimo si ottiene subito:

$$\text{(I)} \qquad \rho = \pm\sqrt{a^2 - e^2x^2} \qquad \tan\varphi = \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a(x - ae)}.$$

Queste mostrano che ad ogni valore di φ corrispondono quattro valori per ρ e quindi che una retta passante per F (ed anche una retta, qualunque del piano) incontra la locale in quattro punti: in altri termini che essa è una *quartica*.

Quanto all'area, detto ω l'angolo che la tangente in M fa colla parte positiva dell'asse delle x, e λ la grandezza assoluta dell'angolo acuto che la tangente stessa fa colla MF, si ha che è $\varphi = \omega - \lambda$, e per il punto M', diametralmente opposto ad M, $\varphi' = \omega - \lambda$; e ciò in forza della simmetria dell'ellisse rispetto ai suoi assi e della nota proprietà degli angoli che una tangente all'ellisse fa coi raggi focali del punto di contatto. Osservando ancora che nei punti M ed M' i valori di ρ e ρ sono manifestamente uguali, si ha che la somma dei due elementi di area corrispondenti ai punti M ed M' è data da:

$$\frac{1}{2}\rho^2 d\varphi + \frac{1}{2}\rho'^2 d\varphi' = \rho^2 d\omega$$

e quindi subito: area $= \int_0^\pi \rho^2 d\omega$, che è evidentemente l'area dell'ellisse, essendo ρ la lunghezza di un semidiametro corrente, e $d\omega$ il differenziale dell'angolo che esso fa coll'asse maggiore.

È da notarsi che la locale (1) si compone di due pezzi chiusi, uguali e simmetrici rispetto all'asse maggiore dell'ellisse, aventi ciascuno area uguale all'ellisse etc. etc.

532. *Se* y *è una funzione della variabile* x, *ponendo* $x = e^t$, *ed assumendo* t *come nuova variabile indipendente si ha, qualunque sia* n,

$$x^n\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n y}{dt^n} - s_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + s^2\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} - \ldots + (-1)^h s_h\frac{d^{n-h}y}{dt^{n-h}} + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{dy}{dt},$$

dove s_h *indica la somma dei* $\binom{n-1}{h}$ *prodotti dei numeri* $1, 2, \ldots, n-1$, *combinati ad* h *ad* h *in tutti i modi possibili.*

M. CHINI.

Risoluzione del dott. Roberto Volpi.

Derivando i due membri dell'uguaglianza rapporto a t, e risolvendo rispetto a $x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}$, si ottiene

$$x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}} + \sum_{h=0}^{h=n-1}(-1)^h(s_h + ns_{h-1})\frac{d^{n-h}y}{dt^{n-h}} + (-1)^n n!\frac{dy}{dt},$$

ed avendosi manifestamente $s_h + ns_{h-1} =$ somma degli $\binom{n}{h}$ prodotti dei numeri $1, 2, \ldots, n$, combinati ad h ad h in tutti i modi possibili, resta dimostrata per induzione la formula enunciata, giacchè essa è valida per $n = 1$.

Altra risoluzione del sig. Santacroce, studente di Napoli.

QUISTIONI PROPOSTE

531. *(Errata nel num. precedente).* Dimostrare che

$$\int_{15}^{27}\frac{(x-15)\,dx}{\sqrt{12x-(x^2-9)^2}} = \frac{36}{5}.$$

533. Sia M un punto variabile di un'ellisse, C il centro di curvatura relativo al punto M; H e H_1 due punti situati sulla tangente in M tali che sia $MH = MH_1 = MC$; C_1 il simmetrico di C rapporto ad M. Trovare le aree delle curve, luoghi dei punti H, H_1, C_1 e dei punti di mezzo dei lati del quadrato CHC_1H_1.

534. Due circoli variabili O e O′ ortogonali s'incontrano in due punti A e B fissi. Una delle tangenti comuni tocca i due circoli nei punti T e T′.

1°. Il luogo del punto comune alle rette OT′ e O′T è una retta.
2°. Il luogo del punto comune alle rette AT e BT′ è un'ellisse.
3°. La differenza delle aree dei triangoli ATT′ e BTT′ è costante.
4°. Il luogo dell'ortocentro del triangolo ATT′ è una quartica.

535. Dimostrare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^4\theta \cos^4\theta\, d\theta}{(a^2\operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta)^4} = \frac{1}{a^3b^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^4\theta \cos^4\theta\, d\theta}{a^2\operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta}.$$

536. Dimostrare che

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} =$$

$$=(a^2+b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}\varphi + b^2\cos\varphi}} - (a^2-b^2)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi}{(a^2\operatorname{sen}\varphi + b^2\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

537. Trovare l'area della curva inviluppo delle rette condotte per i punti di un asteroide in modo che la tagli negli stessi punti sotto un angolo costante. (Questa curva è la sviluppata obliqua dell'asteroide.)

538. Si considerino tutti i triangoli ABC, di cui la BC è fissa e di cui il vertice A si sposta sopra una retta parallela a BC. Dimostrare che

1° il luogo dell'ortocentro e quello del centro del circolo dei nove punti del triangolo ABC sono due parabole;

2° il luogo del punto di Lemoine del triangolo ABC è un'ellisse.

E.-N. BARISIEN.

539. Calcolare

$$\int \left[\left\{1 + n\operatorname{sen}^{n-1} x\right\} \operatorname{sen}(n+1)\, x\, dx\right].$$

G. GIOVANETTI.

540. Risolvere le equazioni

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}=0$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}=0.$$

M. CHINI.

BIBLIOGRAFIA

PINCHERLE. — *Introduzione al corso di algebra complementare e di geometria analitica.* Appunti redatti per uso degli studenti. Bologna, Zanichelli, 1901.

Riproduciamo la breve prefazione di questa utilissima operetta.

" Scopo di questa introduzione è di riassumere brevemente, nelle sue parti " essenziali, la genesi dei numeri reali, e di stabilire in modo preciso la corri- " spondenza biunivoca fra i numeri reali ed i segmenti della retta: corrispondenza " che sta a fondamento della geometria analitica ".

Nei primi due capitoli dopo avere ricavato dall'operazione del contare il concetto di numeri interi e positivi ed avere esaminato rapidamente le loro proprietà formali, vengono dedotte con metodo chiaro e rigoroso tutte le successive generalizzazioni del concetto di numero per mezzo *del principio di permanenza* o *conservazione delle leggi formali*.

Nel terzo capitolo viene stabilita la corrispondenza fra i numeri reali ed i segmenti.

Troviamo molto lodevole lo scopo prefissosi, ed interamente raggiunto dal chiaro autore, di porre su basi solide e rigorose i fondamenti della geometria analitica.

K.

GIORLI. — *L'aritmetica e la geometria dell'operaio.* Manuali Höepli, 1900.

Come si vede dal titolo, questo libro non ha pretese scientifiche, ed ha per iscopo di raccogliere in piccolo volume un gran numero di nozioni pratiche relative all'aritmetica e alla geometria, ed è " compilato, come dice l'autore nella " prefazione, sulla base degli esami per Capi-tecnici ed Assistenti della R. Marina, " nonchè per l'ammissione dei giovani alla scuola macchinisti e fuochisti delle " ferrovie ".

La modestia degli intenti non ci sembra che giustifichi il sacrificio della chiarezza e della precisione che si nota in tutto il volume. — Senza dilungarci citeremo un solo esempio fra i moltissimi. A pag. 155: " Il prisma è un solido " che ha per basi due poligoni qualunque e per facce laterali tanti rettangoli, " parallelogrammi o trapezi, per quanti sono i lati del poligono base "!

K.

GHERSI. — *Conti e calcoli fatti.* Novantatre tabelle ed istruzioni pratiche sul modo di usarle. Manuali Höepli, 1901.

È un volumetto di molta utilità pratica poichè le novantatre tavole, che lo compongono, contengono i dati numerici relativi ad una quantità di cose svariatissime e di uso comune, e permettono quindi di risparmiare molti calcoli. — Riproduciamo sommariamente l'indice per dare un'idea dell'opera.

Misure, pesi e monete. — Misurazioni delle botti. — Termometri. — Pressioni dei gaz e vapori. — Areometri. — Miscele d'acqua e d'alcool. — Soluzioni zuccherine. — Soluzioni di glicerina. — Pesi specifici. — Legnami. — Carbone di legna. — Peso dei metalli. — Viti. — Dadi. — Divisione del tempo. — Paga giornaliera. — Prezzo del grano e del granturco. — Interessi ed annualità. — Rendita. — Potenze radici ed indici dei numeri. — Poligoni regolari. — Sfera. — Divisione della circonferenza. — Inclinazione e pendenza. K.

DA GIORNALI E RIVISTE

Annali di matematica pura ed applicata.

Serie III, tomo IV, fasc. 3° e 4°. — *De Sanctis*, Alcuni nuovi teoremi sulle funzioni armoniche a tre variabili. — *Timerding*, Sur les lignes osculatrices d'une cubique gauche. — *Pincherle*, Di alcune operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità in una funzione analitica. — *Lauricella*, Su di una classe di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.

Serie III, tomo V, fasc. 1°. — *Reye*, Lehrsätze über lineare Mannigfaltikeiten projectiver Kugelbüschel, Kugelbündel und Kugelbüsche. — *Niels Nielsen*, Sur une classe de polynômes qui se présentent dans la théorie des functions cylindriques. — *Ciani*, Contributo alla teoria del gruppo di 168 collineazioni piane. — *Hermite*, Extrait de quelques lettres de M. Ch. Hermite à M. S. Pincherle. — *Pirondini*, Risoluzione di due questioni geometriche.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.

Tomo XIV (1900), fasc. 3° e 4°. — *Gerbaldi*, Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane. Parte II (continuaz.). — *Bucca*, Studii di analisi: I. Sullo sviluppo degli integrali di un'equazione differenziale lineare omogenea nell'intorno di un punto singolare. - II. Sulla riduzione del gruppo di Galois d'una equazione algebrica coll'aggiunzione di irrazionalità arbitrarie. - III. Sulle espressioni algebriche costruibili geometricamente colle sole coniche o con curve d'ordine superiore al secondo. - IV. Sulla irrazionalità icosaedrica. - V. Sulla reduttibilità delle equazioni binomie. — *Pincherle*, Sopra un problema d'interpolazione. — *Vivanti*, Sulla trasformazione di Laplace. — *Severini*, Sulla rappresentazione delle funzioni reali di variabili reali mediante serie di polinomi razionali interi. — *Burgatti*, Teoria dei sistemi articolati più semplici.

Fasc. 5°. — *Burgatti*, Teoria dei sistemi ecc. (continuaz. e fine). — *Vitali*, Sulle funzioni analitiche sopra le superficie di Riemann. — *Id.*, Sui limiti per $n=\infty$ delle derivate n^{esime} delle funzioni analitiche. — *Mittag-Leffler*, Sur la représentation analytique des functions d'une variable réelle. (Extrait d'une lettre a M. E. Picard.) — *Puglisi*, Sulle formule per la composizione di più movimenti finiti. — *Phragmèn*, Sur la représentation analytique de fonctions reélles, données sur un ensemble quelconque de points. (Extrait d'une lettre à M. G. B. Guccia.) — *Beltrami*, Commem. di Francesco Brioschi. (Dagli Atti della R. Acc. dei Lincei.) — *Cremona*, Commem. di Eugenio Beltrami. (Dagli Atti della R. Acc. dei Lincei.)

Il Bollettino di matematiche e di scienze fisiche e naturali diretto da *A. Conti*.

Fasc. 15-16. — *Ferrari*, Lunghezza, area, volume. — *Sforza*, Sopra una dimostrazione del principio di De Zolt relativamente all'equivalenza dei prismi. — *Scoto*, Rivista storica. — *Ciamberlini*, Didattica per le Scuole elementari. — Rivista bibliografica. — Cronaca: Nuovi programmi di matematica per la Scuola Complementare e per le Scuole Normali.

Fasc. 17-18-19-20. — *Del Pezzo, Gerbaldi, Guccia*, Perizia per la contraffazione di un'aritmetica. — *Conti*, Forme da evitarsi nell'insegnamento dell'Aritmetica e della Geometria (continuaz.) — *Cercignani*, Notizie storiche sulla misura del tempo. — *Dal Bo*, Per gli esercizi di applicazione del teorema di Pitagora. — *Magli*, Osservazioni intorno a una regola d'aritmetica elementare. — *Ciamberlini*, Gli esercizi di calcolo *semimentale*. — *Id.*, Un'osservazione sulla lettura delle misure del sistema metrico decimale. — *Scoto*, Rivista storica (continuaz.). — *Ciamberlini*, Didattica per le Scuole elementari. — Rivista bibliografica. — Cronaca.

Fasc. 21-22. — *Vanni*, Alcuni teoremi sulle proporzioni numeriche. — *Buzzi*, La genesi del calcolo numerale attraverso l'evoluzione (continuaz.). — *Genovesi*, La moltiplicazione con un fattore zero. — *Ciamberlini*, Didattica per le Scuole elementari. — Rivista bibliografica.

Fasc. 23-24. — *Nannei*, Alcuni teoremi sulle proporzioni numeriche (continuaz. e fine). — *Buzzi*, La Genesi del calcolo ecc. — *Ciamberlini*, Su alcuni problemi proposti ordinariamente come applicazione della teoria delle frazioni ordinarie. — Rivista bibliografica. — Corrispondenze.

I NUOVI PROGRAMMI DI MATEMATICA, CHIMICA E FISICA

NEI GINNASI E NEI LICEI

Da oltre trent'anni eravamo abituati a vedere i programmi di geometria nel Ginnasio e nel Liceo ridotti alla distribuzione dei libri di Euclide fra i vari corsi. Finalmente coi nuovi, pubblicati nel Bollettino della P. Istruzione del 15 nov. scorso, si è abbandonato questo brutto sistema, e si è adottata una divisione logica ed organica dei vari rami della matematica, indipendente dal vecchio codice Euclideo, e tenendo conto del sussidio che questa scienza deve dare allo studio della fisica.

Si potrà trovare a ridire su qualche particolare, ma complessivamente questi nuovi programmi sono un lavoro coscienzioso, maturamente ponderato, e degno dei maggiori encomi.

Non intendo qui di esaminarli partitamente, ma mi preme soltanto rilevare una cosa notevole e assolutamente nuova nel nostro paese.

Essi sono fatti accogliendo ed armonizzando le proposte degl'insegnanti di tutta Italia, tanto che possono dirsi il frutto della pratica, dell'esperienza di tutti; e con ciò non credo diminuire, ma anzi accrescere il merito degli egregi compilatori dei medesimi.

La pubblicazione di questi programmi è una bella vittoria della nostra Associazione " Mathesis „ e della Società italiana di Fisica, che, come è detto nella relazione, si *fecero organi autorevoli* delle osservazioni e dei desideri dalla maggioranza degl'insegnanti.

L'opera assidua compiuta dall'Associazione " Mathesis „ in quattro anni, le discussioni avvenute in varie città d'Italia, e specialmente nel congresso di Torino del 1898, hanno dunque recato un utile vero alla scuola; ed è da sperarsi che dopo quest'esempio tutti si persuadano della verità del vecchio proverbio l'*unione fa la forza*, e vogliano prender parte attiva ai lavori dell'Associazione, ed in particolare a quelli del secondo congresso, che, per iniziativa della medesima, avrà luogo a Livorno nella seconda quindicina del prossimo agosto.

Non posso infine tacere della soddisfazione che provo come vecchio e convinto fautore della fusione della geometria piana e solida.

Nella prima seduta del Congresso di Torino (9 settembre 1898) fu votato ad unanimità, meno un'astensione, il seguente ordine del giorno:

" È conveniente modificare possibilmente i programmi in modo che sia concessa
" agl'insegnanti la libertà di scegliere fra il metodo separatista ed il fusionista „.

I nuovi programmi hanno resa possibile la libertà di scelta desiderata, esplicitamente ammessa nel n. 8 delle istruzioni, che è il seguente:

" Nella prima classe del Liceo v'è parte di geometria solida e parte di geo-
" metria piana. L'insegnante potrà svolgerle in quell'ordine che stimerà migliore „.

" Lo stesso è a dirsi del programma della seconda classe, che si chiude col
" trattato della misura „.

Ma vi è di più. Nel n. 4 delle istruzioni medesime è detto: " l'insegnante
" non mancherà di far notare agli allievi le analogie e le differenze, che passano
" tra alcuni enti, a mano a mano che se ne svelano le proprietà, come, nella
" geometria, tra la retta punteggiata, il fascio di raggi e gli archi di una circonfe-
" renza, tra i triangoli e i triedri, ecc. „ E questa, mi sembra, è fusione bella e buona.

D'altronde, dovendo fare in uno stesso anno argomenti affini di geometria piana e solida, anche i più ostinati antifusionisti si accorgeranno ben presto dell'utilità della fusione.

G. Lazzeri.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 15 dicembre 1900.

MEMORIA BIBLIOGRAFICA

SULL' ULTIMO TEOREMA DI FERMAT

§ I.

Preliminari.

1. Ecco l'ultimo teorema di Pietro Fermat: (*)

" *Cubum in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos et generaliter nullum in infinitum, ultra quadratum, potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere* ".

2. Principale scopo della presente memoria è di mettere sotto gli occhi degli studiosi delle discipline matematiche tutte le note e le memorie riguardanti un tal teorema, che hanno fin qui veduto la luce, e tra le quali una dimostrazione generale del prof. Calzolari di Ferrara; a proposito della quale però mi sorge il dubbio, che qualche inesattezza debba infirmarne la validità.

Questi lavori presentati direi quasi come in un quadro, chi sa che non facciano invogliare gli odierni matematici a riprendere dalle fondamenta tale questione, che ha per sì lungo ordine di anni affaticato indarno tante menti; e chi sa che essi più fortunati dei loro predecessori non riescano finalmente a darne una dimostrazione generale ed esauriente, tenuto anche conto degl'immensi progressi fatti in questi ultimi anni dalla matematica in ogni suo ramo; nello stesso modo che il Lindemann ha potuto mostrare la trascendenza di π. Io nutro ferma speranza che essi vinceranno anche questa battaglia e solo questa speranza e l'amore grande, che ho per la scienza, mi han consigliato a pubblicare la presente memoria.

3. Eulero, il Lejeune-Dirichlet, il Legendre, il Lamé, il Kummer, come vedremo in seguito, diedero la dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat per casi particolari, coll'intendimento forse, che, proseguendo nella via su cui si erano messi, sarebbero giunti a dimostrarlo nel caso generale; ma le loro dimostrazioni son troppo complicate ed artifiziose, e questa forse è l'unica ragione per cui gli autori di esse, ad onta del loro altissimo ingegno, non sono riusciti nello intento, che si eran prefisso. E tanto più queste dimostrazioni appaiono complicate ed artifiziose, quando si confrontano con alcune di quelle date dal Fermat, che furon per caso rinvenute in seguito, e che risplendono per chiarezza, per semplicità, per brevità e per eleganza; ed il Fermat stesso asserisce di aver trovato del suo ultimo teorema una dimostrazione molto elegante ed ammirabile.

(*) Vedi Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libri, sex, Tolosa 1670, Observatio Domini Petri de Fermat, pag. 61.

Probabilmente i matematici a lui posteriori non hanno fin qui battuto buona strada; e colla loro fantasia ingigantendo le difficoltà della dimostrazione, hanno voluto escogitare metodi assai difficili e complicati, i quali invece di condurli alla dimostrazione desiderata, li hanno sempre più allontanati da essa. E questa mia opinione viene in certo qual modo suffragata anche dal Legendre, il quale nella IV parte § VII, pag. 386 del suo " Essai sur la théorie des nombres „, a proposito della dimostrazione data da lui del teorema " Sulla reciprocità fra due numeri primi qualunque „ così si esprime: " In tal guisa abbiamo dimostrato un teorema che si può riguardare come il più importante della teoria dei numeri e che sotto varie forme ha presentato difficoltà quasi insuperabili a chi voleva dimostrarlo seguendo altre vie. La dimostrazione che ne diamo, dopo Federico Gauss, è tanto più importante in quanto, che essa è fondata su principii elementarissimi e non occorre premettere ad essa teoria alcuna. Chi sa quanti teoremi come questo, reputati difficilissimi nella scienza de' numeri, non si possano dimostrare assai facilmente; e vi è sempre da sperare che si trovino dimostrazioni assai semplici anche per quelli, che sono stati fino ad ora dimostrati con metodi lunghi e complicati „.

4. Ognun sa con quale immenso successo il Fermat abbia coltivato la scienza de' numeri, in cui egli additò nuovi orizzonti e tracciò nuove vie; disgraziatamente però egli ha tramandato ai posteri senza dimostrazione un gran numero di teoremi interessantissimi, e le poche che rimangono fanno viepiù rimpiangere quelle che mancano e quelle che pur troppo sono andate perdute. Infatti dal seguente passo di una delle sue note su Diophanto pag. 187. (Vedi " Essai sur la théorie des nombres „ del Legendre. Parte II, § IV, pag. 183.) " Imo propositionem pulcherrimam et maxime generalem nos primi deteximus. Nempe omnem numerum vel esse triangulum vel ex duobus aut tribus triangulis compositum, esse quadratum vel ex duobus aut tribus quadratis compositum; esse pentagonum vel ex duobus, tribus, quatuor aut quinque pentagonis compositum et sic deinceps in infinitum in hexagonis, heptagonis et polygonis quibuslibet, enuntianda videlicet pro numero angulorum generali et mirabili propositione. Eius autem demonstrationem quae ex multis variis et abstrusissimis numerorum mysteriis derivatur hic apponere non licet, opus enim et librum integrum huic operi destinare decrevimus et Arithmeticen hoc in parte ultra veteres et notos terminos mirum in modum promovere „ risulta ben chiaramente che il Fermat stava scrivendo una grande opera, la quale come egli stesso asserisce doveva contenere molte e belle proprietà sui numeri; e, come giustamente dice il Legendre, i geometri dovranno ben dolersi per lungo tempo che questo illustre scienziato non abbia potuto condurre a compimento il suo disegno e che i suoi congiunti od amici, divenuti depositari dei suoi manoscritti, non li abbiano fatti conoscere al pubblico. In essi certamente si sarebbero trovati, oltre le dimostrazioni ancora ignorate di parecchi de' suoi teoremi, metodi degni della sagacia dell'autore, i quali accoppiati alle scoperte posteriori avrebbero di molto contribuito a perfezionare quella parte difficilissima delle discipline matematiche, che è la teoria dei numeri. Però è certo che anche il Fermat stesso, come parecchi matematici a lui contemporanei, molte volte si compiaceva di enunciare teoremi, che in gran parte egli aveva sicuramente prima dimostrati, senza renderne note le dimostrazioni trovate, come ad esempio questo. " Il numero $2^{31} - 1 = 2.147.483.647$ è un numero primo „; teorema che fu in appresso dimostrato dall'Eulero (Mém. de Berlin an. 1772, pag. 36). E come risulta anche dalla lettera seguente al padre Mersenne: " Vous demandez si le nombre 100. 895. 598. 169 est premier ou non, et une méthode pour découvrir dans l'espace d'un jour, s'il est premier ou composé. A cette

question, je réponds que ce nombre est composé et se fait du produit de ces deux: 898.423 e 112.303 qui sont premiers. Je suis toujours, mon révérend Père, votre très-humble et très-affectionné serviteur.

FERMAT ».

Qui sorge spontanea la domanda: Quali le ragioni di questo fatto? Innanzi tutto ne abbiamo una nello spirito di que'tempi, in cui gli scienziati si proponevano a vicenda questioni da risolvere; ma il più delle volte essi nascondevano, invece di farli conoscere, i loro metodi, per riserbarsi nuovi trionfi in avvenire; ed a questo si aggiunga anche lo spirito di nazione; imperocchè vi era in quell'epoca una grande rivalità, sovrattutto fra i geometri di Francia e quelli d'Inghilterra. Potrebbe però anche darsi che il Fermat medesimo, riandando in seguito la dimostrazione del suo teorema, l'abbia trovata insufficiente od in qualche parte imperfetta. Ciò non deve punto recar meraviglia, quando si rifletta che anche la dimostrazione del teorema seguente: (*) Il sistema indeterminato di equazioni: $2y^2 - 1 = x$, $2z^2 - 1 = x^2$ ammette le sole due soluzioni:

$$1^a \qquad x = y = z = 1, \qquad\qquad 2^a \qquad x = 7, \quad y = 2, \quad z = 5,$$

(dimostrazione che il Fermat ha inviato in una sua lettera al Frenicle) (**) non si è potuta rinvenire, perchè forse fu trovata insufficiente dal Frenicle stesso, non parendomi ammissibile che questi l'abbia, in caso contrario, tenuta nascosta; e quando per di più si pensi che talvolta il Fermat stesso cadde in errore, come ad esempio in questo teorema: « La formola $2^{2^n} + 1$ dà sempre numeri primi »; giacchè ognuno sa che Eulero dimostrò poi essere $2^{2^5} + 1 = 641 \times 6.700.417$.

§ II.

1. In questo paragrafo della presente memoria faccio conoscere alcuni miei risultati in parte nuovi ed in parte, benchè noti, ottenuti con metodi diversi ed assai più semplici di quelli seguiti dal Calzolari e da altri. Innanzi tutto espongo alcune considerazioni generali sull'equazione $x^n + y^n = z^n$; indi dimostro che « la differenza dei biquadrati di due numeri interi ed ineguali non è mai eguale al quadrato di un numero intero », il qual teorema mi servirà per dimostrare quello di Fermat nel caso di $n = 4$; poi risolvo l'equazione $x^2 + y^2 = z^2$, esponendo indi le importanti proprietà dei numeri x, y, z che la verificano. Al § X poi dimostro l'impossibilità dell'equazione $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ in numeri interi.

Per brevità, secondo la logica matematica, un numero intero positivo e diverso dallo zero lo indico con N_1; un numero intero e positivo che può essere anche zero lo indico con N_0; ed un multiplo di un N_1 qualunque a lo indico con $N_1 a$ o $a . N_1$, ed un numero primo con N_p. Il numero n significherà sempre un N_1.

2. Considerazioni generali sull'equazione $x^n + y^n = z^n$.

a) TEOREMA. — *Ammesso vero il teorema di Fermat per gli* N_1, *esso è vero anche per numeri fratti.*

(*) Vedi gli *Atti dell'Accademia pontificia dei nuovi Lincei*, Tomo XXXVI, Anno XXXVI, 1883 nota « sur un théorème de Fermat », di M. TH. PEPIN.

(**) Vedi « Recherches sur les manuscrits de Fermat », par M. HENRY, pubblicate nel *Bollettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* di B. Boncompagni. Tomo XXI, Roma, Luglio, Agosto, Settembre, Ottobre, 1879.

Dimostrazione. — Infatti, se è possibile, poniamo che si abbia

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{e}{f}\right)^n, \tag{1}$$

ove a, b, c, d, e, f sono degli N_1; da essa si ha

$$(adf)^n + (bef)^n = (bde)^n, \tag{2}$$

la quale pel teorema di Fermat non può verificarsi; dunque anche la (1) non può verificarsi ecc.

b) Teorema. (*) — *La somma delle potenze* n^{esime} *di due* N_p *non è mai eguale alla potenza* n^{esima} *di un* N_p, *se è* $n > 1$.

Dimostrazione 1ª. — Sia $x < y < z$, dalla quale si vede che z supera x di non meno di 2; ora poniamo: $u = z - x$; allora dall'equazione $x^n + y^n = z^n$ si ha

$$y^n = (x+u)^n - x^n = n \,.\, u \,.\, x^{n-1} + \binom{n}{2} u^2 x^{n-2} + \ldots + u^n;$$

d'onde si ha che y^n è un $N_1 u$; ma y è per ipotesi un N_p; dunque essendo per ipotesi $u \geq 2$, ne consegue che u è uguale ad y o ad una sua potenza; se fosse $u = y$ si avrebbe: $x^n + y^n = (x+y)^n$, che è assurda; quindi deve essere $u < y$; dunque a fortiori è $u < y^s$, ove s è un N_1; ma y non ammette nessun divisore minore di esso; dunque ecc.

2ª. — Sia $x < y < z$; sarà $z - x \geq 2$; ora abbiamo

$$z^n - x^n = y^n:$$

e quindi y^n è divisibile per $z - x$; e perciò lo è y; poichè non può essere $z - x = y$, nè $z - x = 1$, perchè ciò sarebbe contro l'ipotesi; dunque ecc.

Corollario. — *Se l'equazione* (1) $x^n + y^n = z^n$ *è soddisfatta in* N_1 *(se il valore di* $n > 1$ *permette che lo sia) il maggiore dei due numeri* x *ed* y, *è un numero composto, qualunque sia* x, *semplice o composto.*

c) Teorema. — *Allorchè l'equazione* (1) $x^n + y^n = z^n$ *è soddisfatta in* N_1 *(se il valore di* $n > 1$ *permette che lo sia):*

1° *se* x *è un* N_p, *i due numeri* z *ed* y *differiscono tra loro di* 1;

2° *se* y, *che è maggiore di* x, *è un* N_p, *l'equazione* (1) *non è soddisfatta in* N_1.

Dimostrazione 1ª. — Si ponga $z = x + u = y + v$; si ha $x^n + y^n = (x+u)^n = (y+v)^n$; d'onde:

$$y^n = N_1 u, \qquad x^n = N_1 v;$$

ma x è un N_p, ed essendo $n > 1$, ne consegue che deve essere $v = 1$ e quindi $z - y = 1$.

2ª. — Si ha $z - x \geq 2$ e $z^n - x^n = y^n$; dalla quale si vede che y è divisibile per $z - x$; il che è assurdo; dunque ecc.

d) Teorema. — *Se l'esponente* n *dell'equazione* (1) $x^n + y^n = z^n$ *è un* $N_1 2 + 1$; *o se è un* $N_1 2$, *contenga almeno un fattore* $N_1 2 + 1$; *e si ammette che la* (1) *possa, se è possibile, essere soddisfatta in* N_1 *per* $n > 1$, *io dico che* z *non può essere un* N_p.

Dimostrazione. — Supponiamo, se è possibile, che z sia un N_p; allora sapendosi che $x^n + y^n$ è divisibile per $x^{2^s} + y^{2^s}$, ove s può assumere i valori 0, 1, 2, 3, 4..., ne viene che è $z = x^{2^s} + y^{2^s}$, il che è assurdo, essendo $z < x + y$; dunque ecc.

(*) Vedi negli *Atti dell'Accademia pontificia* ecc. t. XXXVII la nota " Sur le dernier théorème de Fermat par M. De-Jonquière, 1884 ".

e) Teorema. — *Supponiamo che l'esponente* n *della* (1) $x^n + y^n = z^n$ *sia un* $N_1 2 + 1$, *o se è un* $N_1 2$, *contenga almeno un fattore* $N_1 2 + 1$, *e supponiamo* $x < y < z$ *ed* x *sia un* N_p; *io dico che la* (1) *non può sussistere.*

Dimostrazione. — Infatti pel teorema *c)* si sa che è $z = y + 1$ e pel teorema *d)* si sa che z è un numero composto e divisibile per $x^{2^s} + y^{2^s}$, ove s può assumere i valori 0, 1, 2, 3 . . .; ma essendo $x \neq 1$, ne consegue che è sempre $x^{2^s} + y^{2^s} > y + 1$; quindi z non può essere divisibile per $x^{2^s} + y^{2^s}$; dunque ecc.

f) Teorema. — *Ammesso, se è possibile, che l'equazione* $x^n + y^n = z^n$ *per* $n > 1$ *possa esser soddisfatta in* N_1 *ed* x *ed* y *siano degli* N_1 *composti ed* n *sia un* $N_1 2 + 1$; *e se è un* $N_1 2$, *contenga almeno un divisore* $N_1 2 + 1$, *anche* z *è un* N_1 *composto.*

Dimostrazione. — Supponiamo, se è possibile, che z sia un N_p, dall'equazione $x^n + y^n = z^n$ si vede che z^n, e quindi z, è divisibile per $x^{2^s} + y^{2^s}$, ove s può prendere i valori 0, 1, 2, 3 . . .; e quindi dovrà essere $z = x^{2^s} + y^{2^s}$; ma si sa che è $z < x + y$; dunque z non può essere un N_p; perciò ecc.

g) Sia n un Np maggiore di 2, e sia $D(x, y) = 1$; poichè è

(1) $$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1}) = z^n,$$

sarà

$$D(x + y,\ x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}) = 1;$$

allora, posto

(2) $$x + y = a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

ove a, b, c sono degli N_1, deve essere

(3) $$z = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} . z_1;$$

ed allora dalla (1), (2), (3), si deduce

(4) $$a^\alpha b^\beta c^\gamma = a^{n\alpha'} b^{n\beta'} c^{n\gamma'},$$

e

(5) $$x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + y^{n-1} = z_1^n,$$

dalla (4) si ha

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = n.$$

E allora abbiamo

$$x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + y^{n-1} = z_1^n.$$

h) Ammesso vero il teorema di Fermat, ne consegue dal *g)* che i sistemi di equazioni della forma:

$$\begin{cases} x^n - x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 - \dots + y^n = z^{n+1} \\ x + y = u^{n+1}, \end{cases}$$

ove n è un N_p maggiore od eguale a 2, sono impossibili in N_1.

3. Risoluzione delle equazioni $x^4 - y^4 = z^2$ e $x^4 + y^4 = z^4$.

a) Teorema. — *L'equazione*: (1) $x^4 - y^4 = z^2$ *è impossibile in* N_1.

Dimostrazione. — Se la (1) è possibile in N_1, possiamo raggruppare tutte quelle soluzioni, in cui il prodotto xyz delle tre indeterminate ha lo stesso valore; è evidente che fra questi diversi gruppi ve ne ha uno, pel quale xyz ha il minimo valore possibile, senza essere nullo; suppongo che la soluzione considerata (x, y, z) appartenga a questo gruppo; e dimostrerò che si può sempre ottenere un'altra soluzione formata di tre numeri, il cui prodotto senza annullarsi, è minore del minimo prodotto xyz; questa conseguenza, a cui si arriva è assurda; dunque se ne inferisce che la (1) è impossibile in N_1. Dalla (1) si vede che, siccome i tre numeri x, y, z si possono supporre primi tra loro, due debbono essere degli $N_1 2 + 1$, ed uno di questi sicuramente è x. Infatti se x fosse un $N_1 2$, allora y e z sarebbero degli $N_1 2 + 1$; e dalla (1) si avrebbe $x^4 = z^2 + y^4$, la quale si mostra subito che è assurda, poichè essendo

$$x^4 = N_1 4; \qquad z^2 = N_1 4 + 1, \qquad y^4 = N_1 4 + 1$$

e quindi

$$N_1 4 = N_1 4 + 1 + N_1 4 + 1,$$

ne viene

$$N_1 2 = N_1 2 + 1,$$

che è assurda. Dunque x è un $N_1 2 + 1$; ma y può essere un $N_1 2$ o un $N_1 2 + 1$; consideriamo separatamente questi due casi.

1° Caso y è $N_1 2$.

Poniamo $y = 2\alpha . \beta$, ove α e β sono degli N_1; dalla (1) ho

$$x^2 \pm z = 2\alpha^4; \qquad x^2 \mp z = 8\beta^4; \quad \text{e quindi:} \quad x^2 = \alpha^4 + 4\beta^4;$$

dall'ultima ricavo

$$x^2 - \alpha^4 = (x + \alpha^2)(x - \alpha^2) = 4\beta^4;$$

ora ponendo $\beta = \delta . \gamma$, ove δ e γ sono degli N_1, si ha

$$x + \alpha^2 = 2\delta^4, \qquad x - \alpha^2 = 2\gamma^4;$$

e quindi $\alpha^2 = \delta^4 - \gamma^4$. In questo caso si avrà una seconda soluzione della (1) in δ, γ, α, il cui prodotto non solo è minore di xyz, ma anche di y.

2° Caso y è $N_1 2 + 1$.

In questo caso z è un $N_1 2$; poniamo $z = 2\alpha\beta$, ove α, β, sono degli N_1, si ha

$$x^2 + y^2 = 2\alpha^2, \qquad x^2 - y^2 = 2\beta^2;$$

d'onde

$$x^2 = \alpha^2 + \beta^2; \qquad y^2 = \alpha^2 - \beta^2; \qquad (xy)^2 = \alpha^4 - \beta^4;$$

e così la (1) sarà verificata da α, β, (xy), il cui prodotto $\alpha . \beta . (xy) = \frac{1}{2} xyz$, essendo $xyz = 2\alpha\beta (xy)$.

Da quanto precede si vede che supponendo y un $N_1 2$ o un $N_1 2 + 1$, si arriva all'assurdo, che la (1) sarebbe verificata da tre N_1, il cui prodotto sarebbe minore del minimo prodotto xyz; onde se ne inferisce che la (1) non ammette soluzione in N_1.

a) Teorema. — *L'equazione:* (1) $x^4 + y^4 = z^4$ *è impossibile in* N_1.

Dimostrazione 1ª. — Dalla (1) ho: $z^4 - y^4 = (x^2)^2$, la quale pel teorema *a)* è impossibile in N_1; dunque ecc.

2ª. — La (1) si può scrivere così

$$(2) \qquad (x^2)^2 + (y^2)^2 = (z^2)^2,$$

la quale, come può verificarsi, è soddisfatta da

$$(3) \qquad x^2 = p^2 - q^2, \qquad y^2 = 2pq, \qquad z^2 = p^2 + q^2;$$

da cui si ha moltiplicando la 1ª e la 3ª di queste fra loro: $p^4 - q^4 = (xz)^2$, la quale pel teorema *a)* si sa che è impossibile in N_1; dunque ecc.

Osservazione. — Ne consegue che l'equazione $x^2 + y^2 = z^2$ non può essere soddisfatta da tre N_1^2.

COROLLARIO 1°. — *L'equazione:* $x^{2^n} + y^{2^n} = z^{2^n}$ *non può essere soddisfatta in* N_1; *perchè la si può scrivere così*

$$(x^{2^{n-2}})^4 + (y^{2^{n-2}})^4 = (z^{2^{n-2}})^4,$$

la quale, come si sa, non può essere soddisfatta in N_1.

2°. — *Per questo teorema e pel teorema* f) *del n.* 2, *possiamo ora asserire in generale che " se l'equazione* $x^n + y^n = z^n$, *è possibile di essere soddisfatta in* N_1 *per l'esponente* $n > 1$, *se* x *ed* y *sono degli* N_1 *composti, anche* z *è un* N_1 *composto* ".

4. Risoluzione dell'equazione pitagorica (1) $x^2 + y^2 = z^2$, e proprietà dei numeri x, y, z.

a) TEOREMA. — *Ponendo* (2) $z = x + u = y + v$; *far vedere che* x *ed* y *si scambiano fra loro, scambiando fra loro* u *e* v, *e che* z, $x + y = z$ *sono funzioni simmetriche di* u *e* v.

DIMOSTRAZIONE. — Dalle (1) e (2) si ha:

$$z^2 - 2(u + v)z + (u^2 + v^2) = 0, \tag{3}$$

la quale rimane invariata scambiando u con v, cioè i valori di z sono funzioni simmetriche di u e v. Nelle (2) scambiando u con v e viceversa, la x si scambia con y e viceversa; ne consegue che anche $x + y - z$ è funzione simmetrica di u e v.

b) TEOREMA. — *Se* u *e* v *hanno un fattor comune, l'hanno pure* x, y, z, *e reciprocamente.*

DIMOSTRAZIONE 1ª. — Si ha: (1) $z^2 - 2(u + v)z + (u^2 + v^2) = 0$; se u e v hanno a divisore comune d, ove d è un N_1, la $(u^2 + v^2)$ avrà a divisore comune d^2; onde dalla (1) si vede che z deve essere divisibile per d; ora essendo $x = z - u$, $y = z - v$, ne consegue che anche x ed y ammettono il divisore d.

2ª. — Se x, y hanno il divisor comune d, l'avranno pure z, u, v.

Infatti dall'equazione $x^2 + y^2 = z^2$ si vede che z ammette il divisore d; ora essendo $u = z - x$, $v = z - y$, ne viene che u e v sono divisibili per d.

COROLLARIO. — *Se* u *e* v *sono primi fra loro, sono pure primi due a due fra loro* x, y, z; *e reciprocamente se* x *ed* y *sono primi fra loro, tali sono due a due fra loro* z, u, v.

OSSERVAZIONE. — Si possono combinare nelle ipotesi due a due fra loro x, y, z, u, v, e si hanno altrettanti teoremi analoghi ai precedenti.

c) TEOREMA. — *L'equazione* (1) $x^2 + y^2 = z^2$ *è soddisfatta da*

$$z = u + v + w, \qquad x = v + w, \qquad y = u + w, \tag{2}$$

ove w *è* $N_1 2$ *e funzione simmetrica di* u *e* v.

DIMOSTRAZIONE. — Dalla (1) si ha

$$z^2 - x^2 - y^2 = z^2 - x(z - u) - y(z - v) = 0;$$

d'onde

$$z - x - y + \frac{ux + vy}{z} = 0; \tag{3}$$

d'onde se ne inferisce che $ux + vy$ è divisibile per z e questo quoto è un $N_1 2$ e funzione simmetrica di u e v come $x + y - z$. Poniamo: (4) $\frac{ux + vy}{z} = w$; allora la (3) diviene: (5) $z - x - y + w = 0$; avendosi (6) $u = z - x$, $v = z - y$, e combinando le (5), (6) si hanno le (2).

OSSERVAZIONE 1ª. — Se nella $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ si fa:

1°. $z = x + u, \quad y = x + u - v;$

2°. $z = y + v, \quad x = y - u + v,$

in uno dei due fattori eguali che formano $z.z$, $y.y$, $x.x$, e poi si dividono le equazioni così ottenute rispettivamente per x ed y, e si ottiene

$$z - x - y + \frac{uz + (v - u)y}{x} = 0,$$
$$z - x - y + \frac{vz + (u - v)x}{y} = 0;$$

e quindi da quanto si è veduto più sopra si ha:

$$\frac{ux + vy}{z} = \frac{uz + (v - u)y}{x} = \frac{vz + (u - v)x}{y} = w.$$

OSSERVAZIONE 2ª. — L'ammettere che sia possibile di risolvere in N_1 l'equazione (1), equivale ad ammettere la possibilità di poter determinare un $N_1 2$, che si è indicato con w, funzione simmetrica di u e v, tale che aggiunta ad $u + v$, a v e ad u dia rispettivamente i tre numeri z, x, y, che verificano l'equazione (1).

d) TEOREMA. — *Se l'equazione* (1) $x^2 + y^2 = z^2$ *è soddisfatta in* N_1, *le espressioni*

$$(2) \qquad \frac{u^2 + v^2}{z}, \quad \frac{u^2 - (v - u)^2}{x}, \quad \frac{v^2 - (v - u)^2}{y}$$

debbono essere degli N_1; *in altri termini* w *va determinato in modo, che* z, x, y *siano divisori rispettivamente di* $u^2 + v^2$, $u^2 - (v - u)^2$, $v^2 - (v - u)^2$.

DIMOSTRAZIONE. — Dall'equazione (3) $z^2 - 2(u + v)z + (u^2 + v^2) = 0$ dividendola per z si vede che $\frac{u^2 + v^2}{z}$ è un N_1. Essendo $z = x + u$; dalla (3) ho: (4) $x^2 - 2vx + (v - u)^2 - u^2 = 0$; dividendola per x si vede che $\frac{u^2 - (v - u)^2}{x}$ è un N_1. Analogamente facendo nella (3) $z = y + v$ ed operando come precedentemente, si vede che $\frac{v^2 - (v - u)^2}{y}$ è un N_1.

OSSERVAZIONE. — Facendo nelle espressioni

$$\frac{ux + vy}{z}, \quad \frac{uz + (v - u)y}{x}, \quad \frac{vz - (u - v)x}{y}$$

rispettivamente

$$x = z - u, \ y = z - v; \ z = x + u, \ y = x + u - v; \ z = y + v, \ x = y + v - u$$

si ottiene

$$\frac{ux + vy}{z} = u + v - \frac{u^2 + v^2}{z}; \quad \frac{uz + (v - u)y}{x} = v + \frac{u^2 - (v - u)^2}{x}$$

e

$$\frac{vz + (u - v)x}{y} = u + \frac{v^2 - (v - u)^2}{y};$$

sapendosi che

$$\frac{u^2 + v^2}{z}, \quad \frac{u^2 - (v - u)^2}{x}, \quad \frac{v^2 - (v - u)^2}{y}$$

sono degli N_1, ne consegue che anche le espressioni

$$\frac{ux + vy}{z}, \quad \frac{uz + (v - u)y}{x}, \quad \frac{vz + (u - v)x}{y}$$

sono degli N_1, i quali si è veduto (vedi Teor. *c)* Oss. 1ª) che son tutti eguali a w; e reciprocamente se ne dedurrebbe

$$\frac{u^2+v^2}{z}=u+v-w;\quad \frac{u^2-(v-u)^2}{x}=-v+w;\quad \frac{v^2-(v-u)^2}{y}=-u+w.$$

Il numero w lo chiameremo il *criterio di possibilità* dell'equazione (1), poichè dalla determinazione di w dipende precisamente la determinazione delle terne degli N_1, che soddisfano la (1).

e) Teorema. — *Per risolvere in* N_1 *l'equazione* (1) $x^2+y^2=z^2$ *la condizione* necessaria *e* sufficiente *è che il prodotto* $2uv$ *sia eguale al quadrato pari* w^2, *ossia abbiasi* (2) $w^2=2uv$, *per cui i numeri intieri* z, x, y *saranno dati da:*

$$(3)\qquad z=u+v+\sqrt{2uv},\qquad y=u+\sqrt{2uv},\qquad x=v+\sqrt{2uv}.$$

Dimostrazione. — 1°. La condizione (2) è necessaria; infatti facendo nella (1)

$$z=u+v+w,\ y=u+w,\ x=v+w,$$

si ottiene la (2).

2°. La condizione (2) è sufficiente, poichè non solo la (1) è soddisfatta dalle (3); ma sono soddisfatte anche le condizioni richieste dal teorema 3; infatti si ha

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{u^2+v^2}{z}=\dfrac{(u+v+\sqrt{2uv})(u+v-\sqrt{2uv})}{u+v+w}; \\[2ex] \dfrac{u^2-(v-u)^2}{x}=-\dfrac{v^2-2uv}{x}=-\dfrac{(v+\sqrt{2uv})(v-\sqrt{2uv})}{v+w}; \\[2ex] \dfrac{v^2-(v-u)^2}{y}=-\dfrac{u^2-2uv}{y}=-\dfrac{(u+\sqrt{2uv})(u-\sqrt{2uv})}{u+w}; \end{cases}$$

ora ponendo $w=\sqrt{2uv}$, i primi membri delle (3) sono degli N_1, purchè bene inteso $2uv$ sia un quadrato pari, e così abbiamo

$$(4)\qquad \frac{u^2+v^2}{z}=u+v-\sqrt{2uv};\ \frac{u^2-(v-u)^2}{x}=-v+\sqrt{2uv};$$
$$\frac{v^2-(v-u)^2}{y}=-u+\sqrt{2uv}.$$

Osservazione. — Sicchè abbiamo

$$\frac{ux+vy}{z}=\frac{uz+(v-u)\,y}{x}=\frac{vz-(u-v)\,x}{y}=\sqrt{2uv};$$

ciascuna delle quali conduce alla (1); infatti dall'equazione $\dfrac{ux+vy}{z}=\sqrt{2uv}$, essendo $u=z-x$, $v=z-y$, si ha

$$ux+vy=zx+zy-x^2-y^2=z\sqrt{2uv}=z\sqrt{2[z^2-(x+y)z+xy]};$$

d'onde

$$zx+zy-z^2=z\sqrt{2[z^2-(x+y)z+xy]};$$

dividendola per z ho

$$x+y-z=\sqrt{2[z^2-(x+y)z+xy]};$$

quadrandola ho, a fatte riduzioni, la (1) ecc.

f) Teorema. — *Le formule* (3) *della* e) *assumono le forme seguenti:*

(1) $$z = p^2 + q^2; \quad y = 2pq; \quad x = p^2 - q^2,$$

ove p *e* q *sono degli* N_1 *primi fra loro, se tali si suppongono nella* $x^2 + y^2 = z^2$ *i numeri intieri* z, y, x *due a due fra loro.*

Dimostrazione. — Infatti dalla nota equazione

$$z^2 - 2(u + v)z + (u^2 + v^2) = 0,$$

ricavo $z = u + v \pm \sqrt{2uv}$; essendo $z = x + u = y + v$, avremo $x = v \pm \sqrt{2uv}$, $y = u \pm \sqrt{2uv}$. Dovendo essere $2uv$ un quadrato pari, potremo porre $u = 2\lambda^2$, $v = \mu^2$; e quindi avremo

(2) $$z = (\lambda \pm \mu)^2 + \lambda^2; \; x = \mu^2 \pm 2\lambda\mu = (\lambda \pm \mu)^2 - \lambda^2; \; y = 2(\lambda^2 \pm \lambda\mu)^2 = 2\lambda(\lambda \pm \mu).$$

Ora facendo in queste formule $\lambda \pm \mu = p$, $\lambda = q$, le (*i*) divengono

(3) $$z = p^2 + q^2, \quad x = p^2 - q^2, \quad y = 2pq.$$

Osservazione 1ª. — Si è detto che se x, y, z sono primi due a due fra loro, tali son pure p e q; ciò discende dal corollario del teor. *b)*.

Osservazione 2ª. — Dalle (3) si vede che se p e q fossero entrambi degli $N_1 2 + 1$, allora x, y, z non sarebbero più primi due a due fra loro. Dunque p e q dovranno essere l'uno un $N_1 2$, l'altro un $N_1 2 + 1$.

g) Alcune proprietà dei numeri x, y, z.

1ª. Da quanto si è detto più sopra e dalle (3) se ne inferisce che dei tre numeri interi x, y, z due sono degli $N_1 2 + 1$ ed uno dei due x ed y è un $N_1 2$.

2ª. Essendo $x^2 + y^2 = z^2$, si avrà $(x + y)^2 - z^2 = 2xy$; quindi la somma $x + y + z$ e la differenza $x + y - z$ divideranno il prodotto $2xy$; ed essendo $x + y - z$ un $N_1 2$, non potrà mai dividere x, che è un $N_1 2 + 1$; e quando $x + y - z$ sarà prima con x, esso dividerà y.

3ª. Il 3 è sempre divisore di uno dei due numeri x, y.

Se è $x = p^2 - q^2$; e p e q sono primi con 3, p^2 e q^2 saranno della forma $N_1 3 + 1$, e perciò si ha

$$x = p^2 - q^2 = N_1 3 + 1 - (N_1 3 + 1) = N_1 3.$$

4ª. Il 4 è sempre divisore di uno dei due numeri x ed y.

Infatti se è: $y = 2pq$, dovendo essere p o q. (Vedi Oss. 2ª di *f)*) un $N_1 2$, ne consegue che y è un $N_1 4$.

5ª. Il 5 è sempre divisore di uno dei tre numeri x, y, z.

Se p o q fosse un $N_1 5$, allora $y = 2pq$ sarebbe un $N_1 5$; quindi supponiamoli non divisibili per 5; ora si sa che un $N_1{}^2$ può mettersi sotto le forme: $N_1 5 \pm 1$; quindi:

$$x = p^2 - q^2 = (N_1 5 \pm 1) - (N_1 5 \pm 1) = N_1 5,$$

ovvero:

$$z = p^2 + q^2 = (N_1 5 \mp 1) + (N_1 5 \pm 1) = N_1 5;$$

6ª. Essendo 3, 4, 5 primi due a due fra loro, dalle proprietà 3ª, 4ª e 5ª ne consegue che xyz è divisibile per 60.

7ª. Il 7 è sempre divisore di uno dei quattro numeri $x, y, x - y, x + y$. Infatti avendosi $x = p^2 - q^2$, $y = 2pq$, si ottiene:

$$x \pm y = p^2 - q^2 \pm 2pq = (p \pm q)^2 - 2q^2.$$

Ora si sa che un $N_1{}^2$ può avere una delle forme seguenti: $N_1 7 + 1$, $N_1 7 + 2$,

$N_1 7 + 4$. Se p o q fosse un $N_1 7$, allora y sarebbe un $N_1 7$; quindi supponiamo che p e q non siano degli $N_1 7$. Se p^2 e q^2 sono entrambi di una delle tre forme suesposte, si ha:

$$x = p^2 - q^2 = (N_1 7 + \alpha) - (N_1 7 + \alpha) = N_1 7,$$

ove α può assumere i valori 1, 2, 4; e quindi x è un $N_1 7$.

Essendo p^2 e q^2 di forme diverse, possono verificarsi questi sei casi:

1°. $p^2 = N_1 7 + 1, \quad q^2 = N.7 + 2;$
2°. $p^2 = N_1 7 + 1, \quad q^2 = N_2 7 + 4;$
3°. $p^2 = N_1 7 + 2, \quad q^2 = N_1 7 + 4;$
4°. $p^2 = N_1 7 + 2, \quad q^2 = N_1 7 + 1;$
5°. $p^2 = N_1 7 + 4, \quad q^2 = N_1 7 + 1;$
6°. $p^2 = N_1 7 + 4, \quad q^2 = N_1 7 + 2;$

ed osservando che si ha:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = (p^2 - q^2)^2 - 4p^2q^2;$$

si verifica facilmente in tutti e sei i casi che è: $(x + y).(x - y) = N_1 7$; quindi $x + y$ o $x - y$ è un $N_1 7$.

8ª. Sia n un N_p maggiore di 3, allora y è un $N_1 12$.

Essendo x un N_p pel teorema *c)* del n. 2 si ha: $z - y = 1$ ossia $p^2 + q^2 - 2pq = 1$; d'onde $p - q = 1$, cioè $p = q + 1$; e quindi:

$$x = 2q + 1, \qquad y = 2q(q + 1), \qquad z = 2q^2 + 2q + 1.$$

Essendo x un N_p maggiore di 3, dovrà essere della forma $N_1 6 + 1$, e quindi si avrà: $2q + 1 = N_1 6 + 1$; da cui si ricava:

1°. $q = N_1 3$; 2°. $q = N_1 3 - 1$.

Nel 1° caso si avrà: $y = N_1 3$; sicchè in questo caso y è un $N_1 3$. Nel 2° caso essendo $q = N_1 3 - 1$, sarà $p = q + 1 = N_1 3$; quindi avremo: $y = N_1 3$; quindi anche in questo caso y è un $N_1 3$. Ma si sa dalla 4ª proprietà che y è un $N_1 4$, quindi essendo anche un $N_1 3$, ne consegue che esso è un $N_1 12$.

§ III.

La memoria di L. Calzolari. (*)

1. Risoluzione dell'equazione $x^3 + y^3 = z^3$.

a) Si suppongono x, y, z primi fra loro due a due; ed anche in questo caso due di essi saranno degli $N_1 2 + 1$ ed il rimanente un $N_1 2$. Sia $z = x + u = y + v$; si osserva che anche in questo caso x ed y si scambiano fra loro, scambiando fra loro u e v, e che z, $x + y - z$, $x^2 + y^2 - z^2$ sono funzioni simmetriche di u e v, e valgono per u, v, x, y, z le proprietà del n. 4 teorema *b)* § II.

(*) Vedi L. Calzolari. "Tentativo per dimostrare il teorema di Fermat sull'equazione indeterminata $x^n + y^n = z^n$". Ferrara, 1855.

b) TEOREMA. — *Se l'equazione* (1) $x^3 + y^3 = z^3$ *è risolubile in* N_1, *i valori di* x, y, z *assumono anch'essi la forma:*

$$(2) \qquad z = u + v + w; \qquad x = v + u; \qquad y = u + w,$$

nelle quali w *è un* N_1 *e funzione simmetrica di* u *e* v.

DIMOSTRAZIONE. — Dall'equazione (1) sapendosi che è: $x = z - u$, $y = z - v$, si ha:

$$z^3 - x^2 . x - y^2 . y = z^3 - x^2 . (z - u) - y^2 . (z - u) = 0;$$

d'onde dividendole per z si ricava

$$(3) \qquad z^2 - x^2 - y^2 + \frac{ux^2 + vy^2}{z} = 0.$$

Ora si ponga:

$$(4) \qquad w_1 = \frac{ux^2 + vy^2}{z},$$

che è un N_1 e funzione simmetrica di u e v come $x^2 + y^2 - z^2$, a cui esso è uguale; così la (3) diviene (5) $z^2 - x^2 - y^2 + w_1 = 0$. Facendo in questa come precedentemente (6) $x = z - u$, $y = z - v$, e poi dividendo l'equazione così ottenuta per z avremo:

$$(7) \qquad z - x - y + \frac{ux + vy + w_1}{z} = 0;$$

ora si ponga

$$(8) \qquad w = \frac{ux + vy + w_1}{z},$$

che è pur esso un N_1 e funzione simmetrica di u e v come $x + y - z$, a cui esso è uguale. Si avrà (9) $z - x - y + w = 0$; dalla quale, combinata colle (6) si ricavano le (2).

OSSERVAZIONE 1ª. — Se nell'equazione $z^3 - x^3 - y^3 = z^2 . z - x^2 . x - y^2 . y = 0$, si fa

$$1^0.\ z = x + u, \quad y = x + u - v; \qquad 2^0.\ z = y + v, \quad x = y + v - u$$

si ottiene

$$z^2 (x + u) = x^3 - y^2 (x + u - v) = 0.$$
$$z^2 (y + v) - x^2 (y + v - u) - y^3 = 0;$$

dividendola rispettivamente per x ed y si ha:

$$\frac{uz^2 - (u - v)\, y^2}{x} = \frac{vz^2 - (v - u)\, x^2}{y} = x^2 + y^2 - z^2 = w_1,$$

e quindi

$$(10) \qquad \frac{ux^2 + vy^2}{z} = \frac{uz^2 - (u - v)\, y^2}{x} = \frac{vz^2 - (v - u)\, x^2}{y} = w_1.$$

Analogamente sostituendo nella $z^2 - x^2 - y^2 + w_1 = z . z - x . x - y . y + w_1 = 0$;

$$1^0.\ z = x + u, \quad y = x + u - v; \qquad 2^0.\ z = y + v, \quad x = y + v - u$$

si avrà:

$$z (x + u) - x^2 - y (x + u - v) + w_1 = 0.$$
$$z (y + v) - x (y + v - u) - y^2 + w_1 = 0;$$

dividendole rispettivamente per x ed y, si avrà:

$$\frac{uz-(u-v)y+w_1}{x}=\frac{vz-(v-u)x+w_1}{y}=x+y-z=w;$$

quindi avremo:

$$(11)\qquad \frac{ux+vy+w_1}{z}=\frac{uz-(u-v)y+w_1}{x}=\frac{vz-(v-u)x+w_1}{y}=w.$$

Osservazione 2ª. — Ammesso di poter risolvere in N_1 la (1), deve certamente esistere un N_1, che dico w, pari e funzione simmetrica di u e v tale che aggiunto ad $u+v$, a v, ad u dia i valori di z, x, y, che soddisfano l'equazione (1).

c) Teorema. — *Se l'equazione* (1) $x^3+y^3=z^3$ *è possibile in* N_1,

$$(2)\qquad \frac{u^3+v^3}{z},\qquad \frac{u^3-(u-v)^3}{x},\qquad \frac{v^3-(v-u)^3}{y}$$

debbono essere degli N_1; *in altri termini il numero intero* w *va determinato in modo che* z, x, y *siano rispettivamente divisori di* u^3+v^3, $u^3-(u-v)^3$, $v^3-(v-u)^3$.

Dimostrazione. — Avendo posto $u=z-x$, $v=z-y$, dalla (1) abbiamo subito

$$(3)\qquad z^3-3(u+v)z^2+3(u^2+v^2)z-(u^3+v^3)=0;$$

dividendola per z si vede che $\frac{u^3+v^3}{z}$ è un N_1.

Procedendo come nel n. 4, teorema *d)* § II si dimostra che

$$\frac{u^3-(u-v)^3}{x},\qquad \frac{v^3-(v-u)^3}{y}$$

sono pure degli N_1. Dunque ecc.

Osservazione 1ª. — Identica all'osservazione del teorema *d)* del n. 4, § II.

Osservazione 2ª. — Perciò il *criterio di possibilità* per risolvere in N_1 la (1) è dunque rappresentato dalle (2), che debbono essere ad un tempo eguali ad un N_1 per un sol valore di w intero, positivo, pari e funzione simmetrica di u e v.

d) Teorema. — *L'equazione* (1) $x^3+y^3=z^3$ *non può essere risolta in* N_1.

Dimostrazione. — Si ha

$$\frac{u^3+v^3}{z}=\frac{(u+v)(u^2-uv+v^2)}{z}=\frac{(u+v)\left(u+v+\sqrt{3uv}\right)\left(u+v-\sqrt{3uv}\right)}{u+v+w};$$

esclusi i valori zero e negativi di w, il solo valore di w, che possa rendere intera l'espressione precedente è (2) $w=\sqrt{3uv}$, purchè $3uv$ rappresenti un quadrato pari. Analogamente si ha

$$\frac{u^3-(u-v)^3}{x}=\frac{v\left[v+\sqrt{3u(v-u)}\right]\left[v-\sqrt{3u(v-u)}\right]}{v+w};$$

qui il valore di w non può essere che (3) $w=\sqrt{3u(v-u)}$.

E così si ha pure

$$\frac{v^3-(v-u)^3}{y}=\frac{u\left[u+\sqrt{3v(u-v)}\right]\left[u-\sqrt{3v(u-v)}\right]}{u+w};$$

e qui il valore di w sarà (4) $w=\sqrt{3v(u-v)}$.

Dalla (2), (3), (4) si ottiene

$$w^2 = 3uv = 3u(v-u) = 3v(u-v);$$

d'onde: (5) $u = v = 0$; il che è assurdo. Dunque ecc.

Osservazione. — Dalle (3), (4) si vede anche che w è ad un tempo reale ed immaginario; il che è pure assurdo ecc.

2. Risoluzione dell'equazione $x^n + y^n = z^n$ per $n > 3$.

a) Anche in questo caso generale supponiamo x, y, z primi due a due fra loro e $u = z - x$, $v = z - y$. I numeri x, y, z saranno due dispari ed uno pari; il trinomio $(x^{n-s} + y^{n-s} - z^{n-s})$, ove s può assumere i valori $1, 2, 3, \dots (n-1)$, è sempre un $N_1 2$; anche in questo caso si può mostrare che z e tutti i trinomi $(x^{n-s} + y^{n-s} - z^{n-s})$ son funzioni simmetriche di u e v, e che x ed y si scambian fra loro, scambiando fra loro u e v; ed anche in questo caso valgono per x, y, z le proprietà contenute nel teor. *b)* del n. 4, § II.

b) Teorema. — *Se l'equazione* (1) $\mathrm{x^n + y^n = z^n}$ *per* $\mathrm{n} > 3$ *è risolubile in* N_1, *come nei casi di* $\mathrm{n} = 2, 3$ *si hanno le formole risolventi:*

$$\mathrm{z = u + v + w}, \qquad \mathrm{x = v + w}, \qquad \mathrm{y = u + w}; \tag{2}$$

dove w *mantiene sempre la proprietà di essere un* $N_1 2$ *e funzione simmetrica di* u *e* v.

Dimostrazione. — La dimostrazione di questo teorema è identica a quella del teorema *b)* del n. 1, § III.

Nell'equazione $z^n - x^n - y^n = 0$ s'introducono i valori semplici di x ed y dati da $x = z - u$, $y = z - v$, così:

$$z^n - x^n - y^n = z^n - x^{n-1} . x - y^{n-1} . y = z^n - x^{n-1}(z-u) - y^{n-1}(z-v) =$$
$$= z^n - zx^{n-1} - zy^{n-1} + ux^{n-1} + vy^{n-1} = 0;$$

dividendola per z avremo:

$$z^{n-1} - x^{n-1} - y^{n-1} + \frac{ux^{n-1} + vy^{n-1}}{z} = 0; \tag{3}$$

e ponendo:

$$w_1 = \frac{ux^{n-1} + vy^{n-1}}{z}, \tag{4}$$

la (3) diverrà:

$$z^{n-1} - x^{n-1} - y^{n-1} + w_1 = 0, \tag{5}$$

ove w_1 è un $N_1 2$ e funzione simmetrica di u e v come il trinomio $x^{n-1} + y^{n-1} - z^{n-1}$, a cui esso è uguale. Ripetendo sull'equazione (5) la solita sostituzione per x ed y e la divisione per z, come si è fatto nella (1), e ponendo

$$\frac{ux^{n-2} + vy^{n-2}}{z} = w_2; \tag{6}$$

la (5) diverrà:

$$z^{n-2} - x^{n-2} - y^{n-2} + w_2 = 0, \tag{7}$$

ove w_2 è un $N_1 2$ e funzione simmetrica di u e v, come il trinomio $x^{n-2} + y^{n-2} - z^{n-2}$, a cui esso è uguale. Procedendo a questo modo si otterrà la serie di equazioni successive:

$$z^{n-1} - x^{n-1} - y^{n-1} + w_1 = 0;\ z^{n-2} - x^{n-2} - y^{n-2} + w_2 = 0; \dots; \tag{8}$$
$$z^{n-s} - x^{n-s} - y^{n-s} + w_s = 0; \dots;\ z - x - y + w_{n-1} = 0;$$

e per semplicità di scrittura porremo: $w_{n-1}=w$, il quale conserva evidentemente le stesse proprietà di $w_1, w_2, w_3 \ldots, w_{n-2}$, cioè di significare un $N_1 2$ ed una funzione simmetrica di u e v. Combinando al solito le $u=z-x$, $v=z-y$ colla $z-x-y+w=0$, si hanno le (2).

Osservazione 1ª. — La stessa Oss. 1ª fatta nel teor. *b)* del n. 1 di questo paragrafo; così si hanno le due nuove condizioni:

$$\text{(9)} \qquad \frac{uz^{n-1}-(u-v)\,y^{n-1}}{x}=\frac{uz^{n-1}-(v-u)\,x^{n-1}}{y}=w_1,$$

le quali unitamente alla (4) servono di fondamento a stabilire il *criterio di possibilità per* l'equazione (1).

Osservazione 2ª. — Se la (1) è possibile in N_1, deve di conseguenza potersi determinare un N_1 che sia un $N_1 2$ e funzione simmetrica di u e v tale che aggiunto successivamente ad $u+v$, a v, ad u dia le formole (2), che soddisfano la (1).

c) Teorema. — *Nella ipotesi che* (1) $x^n+y^n=z^n$ sia risolubile in N_1;

$$\text{(2)} \qquad \frac{u^n+v^n}{z},\quad \frac{u^n-(u-v)^n}{x},\quad \frac{v^n-(v-u)^n}{y}$$

saranno degli N_1; in altri termini conviene determinare w in modo da rendere z, x, y rispettivamente divisori di:

$$u^n+v^n, \qquad u^n-(u-v)^n, \qquad v^n-(v-u)^n.$$

Dimostrazione. — Essendo $u=z-x$, $v=z-y$, dalla (1) ricaviamo:

$$\text{(3)} \qquad z^n-\binom{n}{1}(u+v)\,z^{n-1}+\binom{n}{2}(u^2+v^2)\,z^{n-2}-\binom{n}{3}(u^3+v^3)\,z^{n-3}+\ldots+$$
$$+(-1)^s\binom{n}{s}(u^s+v^s)\,z^{n-s}+\ldots+(-1)^n(u^n+v^n)=0;$$

dividendola per z si vede che $\frac{u^n+v^n}{z}$ è un N_1. Sostituendo nella (3) per z una volta $z=x+u$ e poi $z=y+v$, e quindi dividendo rispettivamente le equazioni così ottenute per x ed y si avranno $\frac{u^n-(u-v)^n}{x}$, $\frac{v^n-(v-u)^n}{y}$, che sono degli N_1.

Osservazione 1ª. — Le (2) rappresentano *il criterio di possibilità* per l'equazione (1); un sol valore di w intero, positivo, pari e funzione simmetrica di u e v deve rendere le (2) uguali a tre N_1.

Osservazione 2ª. — Identica a quella del teorema *d)* del n. 4 del § II.

d) Teorema. — *L'equazione* (1) $x^n+y^n=z^n$ *è impossibile in* N_1 *per*

$$n=N_1\,.\,2+1>1.$$

Dimostrazione. — Vediamo quali valori dovrà assumere w, affinchè le espressioni (2) del teorema *c)* siano degli N_1; consideriamo la 1ª delle (2) del teorema *c)*; si ha pel teorema di Cotes per $n=N_1 2+1$:

$$u^n+v^n=(u+v)\left(u^2-2uv\cos\frac{\pi}{n}+v^2\right)\left(u^2-2uv\cos\frac{3\pi}{n}+v^2\right)\ldots.$$
$$\left(u^2-2uv\cos\frac{n-4}{n}\pi+v^2\right)\left(u^2-2uv\cos\frac{n-2}{n}\pi+v^2\right)=0;$$

e si sa che è

$$u^2-2uv\cos\frac{\lambda\pi}{n}+v^2=\left(u+v+\sqrt{2uv}\,.\sqrt{1+\cos\frac{\lambda\pi}{n}}\right)\left(u+v-\sqrt{2uv}\,.\sqrt{1+\cos\frac{\lambda\pi}{n}}\right)=$$

$$=\left(u+v+2\sqrt{uv}\,.\cos\frac{\lambda\pi}{n}\right)\left(u+v-2\sqrt{uv}\,.\cos\frac{\lambda\pi}{n}\right)=0,$$

ove λ è un N_1; dunque u^n+v^n sarà divisibile per $z=u+v+w$, se sarà

(2) $$w=2\sqrt{uv}\cos\frac{\lambda\pi}{2n};$$

ove qui λ è un $N_1 2+1$; e si vede che w è funzione simmetrica di u e v, e sarà un N_1, se tale potrà ridursi il 2° membro della (2).

Consideriamo la 2ª delle (2) del teorema *c)*; essendo n un $N_1 2+1$, il suo numeratore potrà scriversi così: $u^n+(v-u)^n$, e come precedentemente si avrà:

(3) $$w=2\sqrt{u(v-u)}\cos\frac{\lambda'\pi}{2n},$$

ove λ' è un $N_1 2+1$; da cui si vede che w non è più funzione simmetrica di u e v. Ora consideriamo la 3ª delle (2) del teorema *c)*; permutando gli elementi u e v, e ripetendo il calcolo precedente per $v^n-(v-u)^n=v^n+(u-v)^n$ si ottiene:

(4) $$w=2\sqrt{v(u-v)}\,.\cos\frac{\lambda''\pi}{2n},$$

ove λ'' è un $N_1 2+1$.

Dalle (3) e (4) si vede che w è ad un tempo un numero reale ed un numero immaginario; e dalle (2), (3), (4) che w è funzione simmetrica e non simmetrica di u e v; il che è assurdo.

Osservazione. — Le impossibilità trovate si possono giustificare in questo modo: i fattori di u^n+v^n, all'infuori di $u+v$, sono tutti degli $N_1 2+1$, poichè essendo: $u^n+v^n=(u+v)(u^{n-1}+u^{n-2}v+\ldots+uv^{n-2}+v^{n-1})$, si vede che l'$N_1$ dentro la 2ª parentesi è sempre un $N_1 2+1$, tanto se u e v sono degli $N_1 2+1$, quanto se l'uno è un $N_1 2$ e l'altro un $N_1 2+1$. In egual modo si vede che i due numeri $u^n+(v-u)^n$ e $v^n+(u-v)^n$, in cui u e $v-u$, v e $u-v$ si conservano primi fra loro, oltre i fattori $u+v-u=v$, $v+u-v=u$, ne contengono altri tutti della forma $N_1 2+1$; quindi si ha

$$\frac{u^n+v^n}{z}=\frac{(u+v).N_1 2+1}{z};\quad \frac{u^n-(u-v)^n}{x}=\frac{v.N_1 2+1}{x};\quad \frac{v^n-(v-u)^n}{y}=\frac{u.N_1 2+1}{y};$$

ma z non può dividere $(u+v)$, x la v, y la u; onde z, x, y debbono ricercarsi fra i divisori degli $N_1 2+1$; così ne verrebbe che tre $N_1 2+1$ verificherebbero la (1); il che pel teorema *a)* è assurdo.

e) Teorema. — *L'equazione* (1) $x^n+y^n=z^n$ *è impossibile in* N_1 *per* n *della forma* $N_1 2>2$.

Dimostrazione. — Dal teorema di Cotes per n della forma $N_1 2$ si ha

$$u^n+v^n=\left(u^2-2uv\cos\frac{\pi}{n}+v^2\right)\left(u^2-2uv\cos\frac{3\pi}{n}+v^2\right)\ldots$$

$$\ldots\left(u^2-2uv\cos\frac{n-3}{n}\pi+v^2\right)\left(u^2-2uv\cos\frac{n-1}{n}\pi+v^2\right)=0;$$

e si sa che è:

$$u^2 - 2uv \cos\frac{\lambda\pi}{n} + v^2 = \left(u + v + 2\sqrt{uv}\cos\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\left(u + v - 2\sqrt{uv}\cos\frac{\lambda\pi}{2n}\right),$$

ove λ è un $N_1 2 + 1$. Dunque $u^n + v^n$ sarà divisibile per $z = u + v + w$, se sarà

(2) $$w = 2\sqrt{uv}\,.\cos\frac{\lambda\pi}{2n},$$

il qual valore è funzione simmetrica di u e v e sarà un N_1, se lo sarà il 2° membro della (2).

Consideriamo il 2° binomio

$$u^n - (u - v)^n = u^n - (v - u)^n = v(2u - v)\left[u^2 - 2u(v - u)\cos\frac{2\pi}{n} + (v - u)^2\right].$$

$$\left[u^2 - 2u(v - u)\cos\frac{4\pi}{n} + (v - u)^2\right]\ldots\left[u^2 - 2u(v - u)\cos\frac{n - 4}{n}\pi + (v - u)^2\right].$$

$$\left[u^2 - 2u(v - u)\cos\frac{n - 2}{n}\pi + (v - u)^2\right],$$

e si sa che è

$$u^2 - 2u(u - v)\cos\frac{\lambda'\pi}{n} + (v - u)^2 = \left[v + 2\sqrt{u(v - u)}\cos\frac{\lambda'\pi}{2n}\right]\left[v - 2\sqrt{u(v - u)}\cos\frac{\lambda'\pi}{2n}\right],$$

ove λ' è un $N_1 2$ e che $v(2u - v) = -\left(v + \sqrt{2uv}\right)\left(v - \sqrt{2uv}\right)$; quindi affinchè sia $u^n - (u - v)^n$ divisibile per $x = v + w$ bisogna che si abbia:

(3) $$w = \sqrt{2uv} \qquad \text{ovvero} \qquad w = 2\sqrt{u(v - u)}\cos\frac{\lambda'\pi}{2n}.$$

Ora consideriamo il 3° binomio $v^n - (v - u)^n = v^n - (u - v)^n$; affinchè esso sia divisibile per $y = u + w$ si ha, permutando gli elementi u e v nelle (3), che dovrà essere

(4) $$w = \sqrt{2uv}, \qquad \text{ovvero} \qquad w = 2\sqrt{v(u - v)}\cos\frac{\lambda''\pi}{2n},$$

ove λ'' è un $N_1 2$.

Osservando le (3) e (4) si vede che i secondi valori di w sono ad un tempo reali ed immaginari, il che è assurdo. Quindi rimane da considerare i rimanenti; allora avremo

$$\cos\frac{\lambda\pi}{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4};$$

e quindi $n = 2\lambda$ con $\lambda = N_1 2 + 1$; ciò equivale a dire che la (1) è risolubile in N_1, supposto il suo grado un $N_1 2$ e tale, che diviso per 2 dia per quoto un $N_1 2 + 1$; e vedremo che è $\lambda = 1$. Supponiamo $\lambda > 1$; l'equazione $z^{2\lambda} = x^{2\lambda} + y^{2\lambda}$, se poniamo $z^2 = z'$, $x^2 = x'$, $y^2 = y'$, si trasforma nella $z'^\lambda = x'^\lambda + y'^\lambda$; ora questa pel teorema *d)* è insolubile in N_1 per $\lambda > 1$; quindi a fortiori lo sarà la (1); dunque $\lambda = 1$, $n = 2$; e già sappiamo che $w = \sqrt{2uv}$ soddisfa l'equazione $x^2 + y^2 = z^2$, come dovevasi dimostrare.

Osservazione 1ª. — Essendo $\cos\frac{\lambda\pi}{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, il valore di w della (2) è irrazionale, mentre si sa che deve essere un N_1.

OSSERVAZIONE 2ª. — Può essere $\cos\frac{\lambda\pi}{2n}=1$ ossia $\frac{\lambda\pi}{2n}=0$, da cui si ha $\lambda=0$, il che è assurdo; e $\frac{\lambda\pi}{2n}=\alpha\,.\,2\pi$, ove α è un N_1, da cui $2n=\frac{\lambda}{2\alpha}$; la quale è assurda, perchè l'esponente della (1) è essenzialmente un N_1.

§ IV.

Memoria 1ª di Legendre. (*)

1. *Quatrième partie. Metodes et recherches sur les puissances des nombres* (p. 361).

a) (324) TEOREMA 2°. — *La somma di due biquadrati non può essere eguale ad un quadrato, a meno che uno di essi non sia nullo.*

DIMOSTRAZIONE. — Sia, se è possibile, $a^4+b^4=c^2$; dapprima bisogna che sia: $a^2=p^2-q^2$, $b^2=2pq$, $c^2=p^2+q^2$. Si osserva poi che a e b potendo essere supposti primi fra loro, p e q saranno primi fra loro, ed anche che non possono essere entrambi degli N_12, poichè se lo fossero, a e b sarebbero tutti e due degli N_12. Non si potrà neanche supporre p pari e q dispari, perchè allora p^2-q^2 sarebbe della forma N_14-1, la quale non può convenire al quadrato a^2. Dunque p è un N_12; e così per soddisfare l'equazione $b^2=2pq$ si prenderà $p=m^2$, $q=2n^2$, valori che essendo sostituiti nell'altra equazione $a^2=p^2-q^2$, daranno $m^4-4n=a^2$. Questa ultima equazione esprimendo che il quadrato m^4 è eguale alla somma di due altri quadrati $4n^2$, a^2, il solo mezzo di soddisfarvi è di prendere: $m^2=f^2+g^2$, $2n^2=2fg$, $a=f^2-g^2$. Nell'equazione $n^2=fg$, f e g sono primi fra loro, dunque $f=\alpha^2$, $g=\beta^2$; e per questi valori l'equazione $m^2=f^2+g^2$ diviene $\alpha^4+\beta^4=m^2$. D'onde si vede che se esistono due biquadrati a^4, b^4, la cui somma sia eguale ad un quadrato c^2, esisteranno ad un tempo due altri biquadrati assai più piccoli α^2, β^2, la cui somma similmente sia eguale ad un quadrato. E per rendere sensibile la piccolezza di questi in confronto dei primi, si dedurrà dai valori precedenti

$$a=\alpha^4-\beta^4,\qquad b=2\alpha\beta\sqrt{\alpha^4+\beta^4},$$

ciò che dà:

$$\alpha^4+\beta^4=\sqrt{\frac{1}{2}\,a^2+\frac{1}{2}\sqrt{a^4+b^4}},$$

e per conseguenza

$$\alpha^4+\beta^4<\sqrt[4]{a^4+b^4}.$$

Si osserverà d'altronde che α e β non possono essere zero, poichè ne seguirebbe $b=0$, caso escluso. Se esiste dunque un quadrato c^2 eguale alla somma di due biquadrati, si conoscerà per suo mezzo un secondo quadrato c'^2 similmente eguale alla somma di due biquadrati, e di cui il lato c' sarà $<\sqrt[4]{c}$, senza esser nullo. Ma per la stessa ragione il quadrato c'^2 ne farà conoscere un terzo c''^2 godente la stessa proprietà, e di cui il lato sarà $c''<\sqrt[4]{c'}$, senza essere nullo e così di seguito. Ora implica

(*) Vedi *Essai sur la théorie des nombres* par A. M. LEGENDRE. Seconde édition. Paris, 1808.

contraddizione che una serie di N_1: $c, c', c'' \ldots,$ di cui ciascuno è minore della radice biquadrata del precedente, senza essere nullo, possa essere prolungata all'infinito. Dunque è impossibile che un quadrato si decomponga in due biquadrati.

Corollario 1°. — *La stessa dimostrazione prova che la forma* $\mathrm{m}^4 - 4\mathrm{n}^4$ *non può essere eguale ad un quadrato, se non è* $\mathrm{n} = 0$.

Corollario 2°. — *La stessa dimostrazione prova che la forma* $\mathrm{x}^4 + \mathrm{y}^4$ *non può essere eguale a* $\mathrm{z}^4 = (\mathrm{z}^2)^2$ *ecc.*

b) Teorema 5°. — *La somma o la differenza di due cubi non può essere eguale ad un cubo.*

Dimostrazione. — Sia, se è possibile, $x^3 \pm y^3 = z^3$; si potrà supporre secondo il solito che x, y, z siano primi fra loro. Ciò premesso, tra i numeri x, y, z ve ne son sempre due dispari ed uno pari; siano x ed y i dispari, che si possono sempre porre nello stesso membro; se si fa: $x \pm y = 2p$, $x \mp y = 2q$, ovvero $x = p + q$, $x \pm y = - q$ si avrà colla sostituzione: $2p(p^2 + 3q^2) = z^3$; e si osserverà ulteriormente che, poichè $p + q$ e $p - q$ devono essere dispari, bisogna che p e q siano uno pari, l'altro dispari; di maniera che $p^2 + 3q^2$ sarà sempre dispari. Ma $2p(p^2 + 3q^2)$ dovendo essere un cubo, è chiaro che $2p$ sarà divisibile per 8, e così p sarà un $N_1 2$ e q un $N_1 2 + 1$. Ora vi sono due casi da distinguere, secondo che p è o non è divisibile per 3.

1° Caso. — Se p non è un $N_1 3$, i fattori $2p$, $p^2 + 3q^2$ saranno primi fra loro, e se il loro prodotto è un cubo, bisognerà che ciascun d'essi ne sia uno. Sia dunque $p^2 + 3d^2 = r^3$; allora r sarà della forma $m^2 + 3n^2$, e si potrà fare

$$p + q\sqrt{-3} = (m + n\sqrt{-3})^3,$$

ciò che darà: $p = m^3 - 9mn^2$, $q = 3m^2n - 3n^3$. Questi valori soddisfano l'equazione $p^2 + 3q^2 = r^3$; ma d'altronde essi hanno tutta la generalità necessaria, come uno se ne può assicurare colla risoluzione diretta di questa equazione. Non resta dunque più che fare in modo che $2p$ o $2m(m + 3n)(m - 3n)$ sia un cubo. Ora è facile vedere che i tre fattori di questa quantità sono primi fra loro, e così ciascuno di essi deve essere un cubo; sia conseguentemente

$$m + 3n = a^3,\ m - 3n = b^3,\ 2m = c^3,$$

si avrà: $a^3 + b^3 = c^3$. Di qui si vede che se l'equazione $x^3 \pm y^3 = z^3$ è possibile in N_1, l'equazione $a^3 + b^3 = c^3$, simile alla prima ed espressa in numeri assai più piccoli, sarà egualmente possibile. Sia ora

$$\mathrm{A} = x^3 \pm y^3 = 2p(p^2 + 3q^2) \quad \text{e} \quad \mathrm{A}' = a^3 + b^3;$$

si avrà colla sostituzione dei valori precedenti:

$$\mathrm{A} = (a^3 + b^3)\, a^3 b^3 \left(\frac{a^6 + a^3b^3 + b^6}{3}\right)^3,$$

ed a causa di $a^6 + b^6 > 2a^3b^3$, questa formula darà: $\mathrm{A} > (a^3 + b^3)\, a^{12} b^{12}$. Ma (eccetto il caso di $a = b = 1$ che non può mai verificarsi) si ha sempre: $a^3b^3 > \frac{a^3+b^3}{3}$; dunque $\frac{1}{2}\mathrm{A}$ è maggiore di $\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^5$ o $\left(\frac{\mathrm{A}'}{2}\right)^5$: dunque $\frac{1}{2}\mathrm{A}' < \sqrt[5]{\frac{\mathrm{A}}{2}}$. Ma collo stesso ragionamento si dedurrà dal cubo di A′ un terzo cubo A″ tale che $\frac{1}{2}\mathrm{A}''$ sarà $< \sqrt{\frac{\mathrm{A}'}{2}}$, e così all'infinito; ora è impossibile che una serie di N_1: A, A′, A″ …

sia decrescente e prolungata all'infinito; dunque è impossibile che la formola: $2p(p^2+3q^2)$ sia un cubo, almeno allorchè p non è divisibile per 3.

2º Caso. — Se p è divisibile per 3, si farà $p=3r$ e la formula $2p(p^2+3q^2)$ diverrà: $18r(q^2+3r^2)$. Ora siccome i fattori $18r, q^2+3r^2$ son primi fra loro, bisognerà che ciascuno di essi sia un cubo. Facendo dunque dapprima: $q^2+3r^2=(f^2+3g^2)^3$ o piuttosto $q+r\sqrt{-3}=(f+g\sqrt{-3})^3$, ciò che darà: $r=f^3-9fg^2, r=3f^2g-3g^3$, resterà da farsi in modo che $18r$ o $27.2g.(f+g).(f-g)$ sia un cubo. D'onde si dedurrà come sopra $f+g=a^3, f-g=b^3, 2g=c^3$, e per conseguenza: $a^3-b^3=c^3$. Ora similmente si farà vedere che il cubo c^3, eguale ad a^3-b^3, è assai più piccolo del cubo z^3, eguale a $2p(p^2+3q^2)$, (poichè si ha $c<\sqrt[3]{\frac{8}{9}z}$); si ricadrà dunque ancora su di una serie di N_1, che deve essere decrescente e prolungata all'infinito; donde si concluderà che le equazioni $x^3 \pm y^3 = z^3$ sono impossibili, a meno che l'uno dei termini non sia nullo.

Osservazione. — Si è dimostrato che le equazioni: $x^3 \pm y^3=z^3$ e $x^4 \pm y^4 = z^2$ ecc., sono impossibili in N_1; Fermat ha asserito di più (ediz. cit. Dioph. pag. 61) che l'equazione $x^n+y^n=z^n$ è generalmente impossibile per $n>2$. È facile vedere che la proposizione sarà dimostrata in generale, se la è pel caso che n sia un Np.

§ V.

Memoria di Lejeune-Dirichlet. (*)

1. Se esistono degli N_1: t, u, v, che soddisfano l'equazione

$$t^{14}=u^{14}+v^{14}, \tag{1}$$

è manifesto che un fattore comune δ a due di essi dovrà dividere necessariamente l'altro. Si potrà dividere ciascun d'essi per δ, ciò non cambierà punto la forma dell'equazione; d'onde se ne conclude che si può sempre considerare gli N_1: t, u, v primi due a due fra loro. Ciò posto questi N_1 debbono evidentemente essere supposti l'uno un $N_1 2$, gli altri degli $N_1 2+1$; e l'$N_1 2$ sarà uno di quelli che compariscono al 2º membro. Si vede pure che se fra questi N_1 avvene uno divisibile per 7, non potrebbe essere che t, poichè 7 non può mai dividere la somma di due quadrati primi fra loro. L'equazione (1) essendo simmetrica rispetto ad u e v, possiamo supporre che, se fra questi N_1 vi è un $N_1 7$, v si trova in questo caso. Trasportando il termine u, l'equazione cambierà in questa

$$t^{14}-u^{14}=v^{14}, \tag{2}$$

che si può mettere sotto questa forma

$$(t^2-u^2)[(t^2-u^2)^6+7t^2u^2(t^4-t^2u^2+u^4)^2]=v^{14}. \tag{3}$$

(*) Vedi *Journal* de Crelle-Neutter, Band, Berlin, 1832, pag. 390 " Démonstration du théorème de Fermat pour le cas des 14ièmes puissances " par M. Lejeune-Dirichlet, prof. de Math. à Berlin.

I t, u essendo stati supposti primi fra loro, $t^2 - u^2$, tu sono pure primi fra loro e così anche $t^2 - u^2$ e $t^4 - t^2u^2 + u^4$, poichè ogni N_p divisore comune di questi dividerà

$$t^4 - t^2u^2 + u^4 - (t^2 - u^2)^2 = t^2u^2,$$

e per conseguenza anche tu. I numeri tu e $t^2 - u^2$ avranno dunque questo stesso divisore comune, la qual cosa non concorda con ciò che si è mostrato. Da ciò risulta, se per brevità poniamo

$$t^2 - u^2 = \varphi, \qquad tu\,(t^4 - t^2u^2 + u^4) = \psi,$$

che φ e ψ, di cui evidentemente l'uno è un $N_1 2$, l'altro un $N_1 2 + 1$, non hanno lo stesso divisore comune; e si avrà

(4)
$$\varphi \cdot ((\varphi^3)^2 + 7\psi^2) = v^{14}.$$

Noi distingueremo ora due casi, secondo che v è o non è divisibile per 7. Se in primo luogo si suppone v non divisibile per 7, φ non lo sarà pure; e da ciò consegue, e dal fatto che φ e ψ sono primi fra loro, che i due fattori del primo membro sono anche primi fra loro, e per conseguenza uguali l'uno e l'altro a delle 14^{esime} potenze. D'altra parte si può conchiudere da un teorema conosciuto che la radice della 14^{esima} potenza dispari $(\varphi^3)^2 + 7\psi^2$ ha la stessa forma $g^2 + 7h^2$, e si prova facilmente che gl'interi g ed h soddisfano all'equazione

$$\varphi^3 + \psi\sqrt{-7} = (g + h\sqrt{-7})^{14},$$

in cui bisogna eguagliare separatamente le parti reali ed i coefficienti di $\sqrt{-7}$. Senza sviluppare questa espressione è evidente che il valore che essa dà per ψ è divisibile per 7; ma essendo $\psi = tu\,(t^4 - t^2u^2 + v^4) = tu\,[(t^2 - u^2)^2 + t^2u^2]$ non può essere divisibile per 7, a meno che non lo sia t od u; il che sarebbe contrario all'ipotesi fatta più sopra. È adunque provato che il caso che si suppone di v non divisibile per 7, nello stesso tempo che t ed u, non potrebbe aver luogo.

Resta a far vedere che l'equazione (2) non può sussistere neppure se considerasi v come un $N_1 7$. Facendovi $v = 7w$, essa diverrà

$$t^{14} - u^{14} = 7^{14} \cdot w^{14};$$

questa è l'equazione di cui proveremo l'impossibilità. Senza complicare la via della dimostrazione, noi possiamo invece dell'equazione precedente, trattare l'equazione più generale

(5)
$$t^{14} - u^{14} = 2^m \cdot 7^{1+n} \cdot w^{14};$$

i numeri t, u essendo supposti sempre primi fra loro ed m ed n designando degli N_0. Conservando tutte le denominazioni precedenti, l'equazione (5) potrà essere messa sotto questa forma

$$\varphi\,[(\varphi^3)^2 + 7\psi^2] = 2^m \cdot 7^{1+n} \cdot w^{14}.$$

Siccome essa richiede evidentemente che φ sia un $N_1 7$, facciamo $\varphi = 7\chi$, noi così avremo

$$7^2\chi \cdot [\psi^2 + 7\,(7^2\chi^3)^2] = 2^m \cdot 7^{1+n} \cdot w^{14}.$$

È facile vedere che i due fattori $7^2\chi$ e $\psi^2 + 7\,(7^2\chi^3)^2$, di cui il 2° è impari, sono primi fra loro. Da ciò risulta che l'equazione precedente non può sussistere, a meno che $\psi^2 + 7(7^2\chi^3)^2$ e $7^2\varphi$ non siano il 1° una 14^{esima} potenza, il 2° il prodotto di una potenza eguale per $2^m . 7^{1+n}$. Per quanto concerne la 1ª di queste condizioni essa richiede, dopo quanto si è detto, che si abbia

$$\psi \pm 7^2\chi^3\sqrt{-7} = (r \pm s\sqrt{-7})^{14},$$

cioè

$$7^2 . \chi^3 = \frac{(r + s\sqrt{-7})^{14} - (r - s\sqrt{-7})^{14}}{2\sqrt{-7}},$$

nella quale gl'interi r ed s son primi fra loro, l'uno pari e l'altro dispari, ed inoltre il 1° non divisibile per 7.

Possiamo far subire a questa espressione una trasformazione simile a quella che si è fatta sul 1° membro dell'equazione (2). A tal uopo basta sostituire nel 1° membro dell'equazione (3) a t ed u rispettivamente $r + s\sqrt{-7}$ e $r - s\sqrt{-7}$; operando in tal modo e facendo per abbreviare

$$(r^2 + 7s^2)(r^4 - 2 . 7^2r^2s^2 + 7^2s^4) = \mathrm{R},$$

si ottiene

$$7^2\chi^3 = 2 . 7 . r . s[\mathrm{R}^2 - (7 . 4^3 . r^3 . s^3)^2],$$

o ciò che è lo stesso, moltiplicando i due membri per 7^4,

$$7^6\chi^3 = 2 . 7^5 . r . s[(\mathrm{R} + 7(4rs)^3)(\mathrm{R} - 7(4rs)^3)].$$

È facile mostrare che i tre fattori $2 . 7^5 . r . s$, $\mathrm{R} + 7(4rs)^3$, $\mathrm{R} - 7(4rs)^3$ sono due a due primi fra loro: è d'altra parte evidente che se vi è un divisore comune, questo non può essere nè 2, nè 7, giacchè i due ultimi N_1 in questione son dispari e non divisibili per 7. Sia in secondo luogo p un N_p impari e diverso da 7; supponiamo che esso sia un divisor comune di due delle espressioni, di cui trattiamo; si vede che esso sarà fattor comune di rs ed R; e facendo di poi attenzione al modo, con cui l'espressione R è composta con r ed s, è evidente che è necessario che p divida alla sua volta r ed s: il che è assurdo, essendo r ed s primi fra fra loro. Noi abbiam visto che $7^2\chi$ doveva essere una 14^{esima} potenza moltiplicata per $2^m . 7^{1+n}$; il 1° membro dell'ultima equazione sarà quindi il prodotto di una potenza del medesimo grado e di $2^{3n} . 7^{3+3n}$. Risulta da ciò e dal fatto che i tre fattori del 2° membro sono primi fra loro, che i due ultimi sono 14^{esime} potenze, e che il primo è il prodotto per una potenza eguale e di $2^{3n} . 7^{3+3n}$. Si avrà dunque

$$2 . 7^5 . r . s = 2^{3m} . 7^{3+3n} . v'^{14}; \qquad \mathrm{R} + 7(4rs)^3 = t'^{14}; \qquad \mathrm{R} - 7(4rs)^3 = u'^{14}.$$

È facile vedere che si può mettere il secondo membro della 1ª di queste equazioni sotto la forma $2^{3m} . 7^{6+n'} . v'^{14}$, dove n' è un N_1. Quando n' è differente da zero, la cosa è evidente; nel caso che n' è eguale a zero, bisogna che affinchè il secondo membro possa essere eguale al primo membro, divisibile per 7^5, che v' sia un N_17. Mettendo quindi $7v'$ in luogo di v', il secondo membro prenderà ancora la forma supposta. Noi possiamo quindi alla 1ª delle equazioni precedenti sostituire questa:

$$4rs = 2^{3m+1} . 7^{1+n} . v'^{14}.$$

Prendendo in seguito la differenza delle due ultime, confrontandole e ponendo per brevità $v'^2 = w'$, si avrà

$$t'^{14} - u'^{14} = 2^{9m+6} . 7^{3n'+6} . w'^{14}.$$

Questa equazione, in cui t' ed u' sono primi fra loro, è interamente simile all'equazione (5), da cui essa deriva; solamente i numeri interi t', u', che vi entrano, sono molto più piccoli dei loro analoghi t ed u della (5).

Possiamo quindi concludere nel modo solito che l'equazione (5), e per conseguenza l'equazione (1), non può essere risoluta in N_1.

Berlino, Ottobre 1832.

DIRICHLET.

§ VI.

Memoria di Lamé. (*)

1. *Memoires présentés. — Analyse mathématique. — Memoire sur le dernier théorème de Fermat par* M. G. LAMÉ, pag. 45.

2. Di tutti i teoremi enunciati dal Fermat uno solo resta ancora dimostrato incompletamente. Questo teorema dice " l'equazione $x^n + y^n = z^n$ è impossibile in N_1 per $n > 2$ ". Questa memoria stabilisce la stessa impossibilità per $n = 7$ e per conseguenza per tutti gli $N_1 7$ dispari e non divisibili per 3 o per 5, i soli che non rientrano nei casi precedentemente trattati.

" Nella equazione $x^7 + y^7 + z^7 = 0$, essendo supposta risolta per N_1, dei quali uno almeno sia negativo, e che son primi fra loro, si dimostra dapprima che una delle incognite è necessariamente divisibile per 7, come Legendre l'aveva stabilito nella sua teoria dei numeri. L'equazione essendo decomposta in tre maniere diverse, si stabilisce facilmente la relazione:

$$x + y + z = 7A\mu\eta\rho = 7AP,$$

ove $7, \mu, \eta, \rho$ sono degli N_1 primi fra loro e tali che:

$$z + y = 7^6\mu^7 = a, \qquad z + x = \eta^7 = b, \qquad x + y = \rho^7 = c,$$

supponendo che x sia l'indeterminata divisibile per 7, A è primo con x, y, z ". Si dimostra che A è un quadrato B^2. Questa dimostrazione conduce alle 4 equazioni simmetriche:

$$a + b + c = 2 7B^2 . P.$$
$$abc = 7^6 . P^7,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab = BD,$$
$$3(a^4 + b^4 + c^4) + 10(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 2^4 . B^{14};$$

da cui si eliminano a, b, c, per ottenere un'equazione non contenente che i numeri B, D, P. Questa equazione finale coll'aiuto di parecchie decomposizioni successive, è ricondotta alla risoluzione dell'equazione:

$$U^8 - 3 . 7^4 . V^4 . U^4 + 2^4 . 7^7 . V^8 = W^4,$$

di cui si dimostra l'impossibilità in N_1 finiti.

3. Vedi *Compt. rendus.* pag. 359 citato precedentemente *Rapport sur un Mèmoire de* M. LAMÉ *relatif au dérnier théorème de Fermat. (Commissaires M. M. Liouville, Cauchy rapporteur).*

(*) Vedi *Comptes Rendus Hebdomadaires des séances de l'académie des sciences*, t. IX, Paris, 1839.

Le dimostrazioni date per i vari casi particolari si fondano sulla teoria delle forme quadratiche dei N_p; ma le difficoltà incontrate da Legendre su questa via provano che avvi poca speranza di applicare con esito favorevole gli stessi principî ai casi, in cui l'esponente n prenda valori maggiori.

Il Lamé dimostrò l'impossibilità dell'equazione $x^7+y^7+z^7=0$ senza battere la stessa via seguita da altri. M. Lamé mostrato che x, y, z possono supporsi primi fra loro, dimostra un lemma importante, e cioè che il rapporto fra la somma $x+y+z$ e la radice 7^{ma} del prodotto $(x+y)(x+z)(y+z)$ o di esso moltiplicato per 7 è un quadrato perfetto; poi mediante questo lemma dimostra facilmente che è impossibile di supporre le tre incognite non divisibili per 7, ciò che si sapeva già; ed infine supponendo una delle incognite divisibili per 7, e fondandosi sul lemma, di cui si tratta, egli rimpiazza l'equazione proposta del 7^{mo} grado con un'altra equazione, di cui il 1° membro è del 4° grado, il 2° membro essendo dell'8^{vo}, e che può essere presentata sotto la forma:

$$z^4 = x^8 - 3x^4y^4 + \frac{16}{7}y^8;$$

poi egli dimostra l'impossibilità di risolvere quest'ultima equazione, col sussidio di una serie di operazioni simili a quella, che fornisce la risoluzione dell'equazione della forma: $x^2-y^2=A$.

Osservano Liouville e Cauchy che il lemma del Lamé è una conseguenza necessaria di questo importante teorema di analisi. " Se si sottrae la somma delle potenze n^{esime} di due incognite x, y dalla potenza n^{esima} della loro somma $x+y$, il resto sarà divisibile algebricamente non solamente pel prodotto $nxy\,(x+y)$, come lo si riconosce facilmente; ma ancora per i valori di $n>3$ per il trinomio: $x^2+xy+y^2=\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$, ed anche pel quadrato di questo trinomio, allorchè $n = N_1 6 + 1$ ". Applicando questo teorema al caso, in cui si ha: $n=3$, $n=5$, $n=7$, si ottengono successivamente le formole:

$$\begin{aligned}
&(x+y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy\,(x+y),\\
&(x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy\,(x+y)\,.\,(x^2+xy+y^2),\\
&(x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy\,(x+y)\,(x^2+y^2+xy)^2,
\end{aligned}$$

di cui l'ultima conduce subito al lemma di Lamé.

Si può abbreviare la dimostrazione del Lamé, quando si cominci a stabilire l'impossibilità di risolvere l'equazione: $z^2 = x^4 - \frac{3}{4}x^2y^2 + \frac{1}{7}y^4$, prendendo per x, y, z degli N_1 primi due a due fra loro e per y un quadrato pari. Del resto il metodo col quale ci si arriva non differisce in fondo da quello che serve a dimostrare l'impossibilità di risolvere in N_1 l'equazione $z^2=x^4+y^4$; e servirebbe egualmente a stabilire l'impossibilità di risolvere in N_1 un'infinità di equazioni della forma:

$$z^2 = x^4 - Ax^2y^2 + By^4.$$

Quantunque il Lamé non abbia potuto dimostrare il teorema di Fermat, che l'Accademia aveva messo al concorso del premio, tuttavia fu trovato il lavoro del Lamé buono ecc.

Post-scriptum. — Si dimostra facilmente il nuovo teorema enunciato in questo supposto, così:

Siano 1, α, β le tre radici dell'equazione $x^3 = 1$; si avrà non solo $1 + \alpha + \beta = 0$, ma ancora, supponendo n non divisibile per 3

$$1 + \alpha^n + \beta^n = 0, \tag{1}$$

e di più

$$x^2 + xy + y^2 = (x - \alpha y)(x - \beta y).$$

Ciò posto io dico che se si prende per n un Np impari e maggiore di 3, l'espressione

$$(x + y)^n - x^n - y^n \tag{2}$$

sarà divisibile pel trinomio $x^2 + xy + y^2$, ed anche pel quadrato di questo trinomio, allorchè è $n = \mathrm{N}_1 3 + 1$. Infatti per stabilire questa proposizione bisognerà far vedere che supponendo $x = \alpha y$ o $x = \beta y$ si riduce a zero l'espressione (2), e di più la sua derivata relativa ad x sarà

$$n\,[(x + y)^{n-1} - x^{n-1}], \tag{3}$$

allorchè è $n = \mathrm{N}_1 6 + 1$. Ora allorchè si suppone $x = \alpha y$, le espressioni (2) e (3) divengono

$$(1 + \alpha)^n - 1 - \alpha^n = 1 - \alpha^n + (-\beta)^n,$$
$$n\,[(1 + \alpha)^{n-1} - \alpha^{n-1}] = n\,[(-\beta)^{n-1} - \alpha^{n-1}];$$

ed è chiaro che esse si annullano: la 1ª in virtù della formula (1) per i valori dispari di n non divisibile per 3; la 2ª in virtù delle formule $\alpha^3 = 1$, $\beta^3 = 1$ per i valori dispari di n, che, divisi per 3, dànno 1 per resto.

§ VII.

Memoria di Kummer. (*)

Dimostrazione generale del teorema di Fermat, che l'equazione $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$, è irresolubile per mezzo di numeri interi, per tutte quelle potenze coll'esponente λ, le quali sono numeri primi dispari e non compariscono come fattori nei numeratori dei primi numeri bernoulliani $\frac{1}{2}(\lambda - 3)$.

1. Nella memoria precedente abbiamo condotta la teoria dei numeri complessi fino al punto, che coll'aiuto di essa la dimostrazione del teorema di Fermat, sebbene non ancora perfetta in generale, pure per tutte quelle potenze, i cui esponenti soddisfano alla condizione indicata nell'enunciato, può essere fatta con facilità e sicurezza. Imperocchè arreca poca differenza che si prendano x, y, z soltanto come numeri complessi formati dalle λ^{esime} radici dell'unità; noi subito daremo la dimostrazione per i numeri complessi.

(*) V. *Journal für die reine und angewandte mathematik.* In Zwanglosen Heften-Herausgegeben von A. L. Crelle-Vierzigster Band, Berlin, 1850 (t. 20).

" Allgemeiner Beweis des Fermatschen Satzes, dafs die Gleichung $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ durch ganze Zahlen unlösbar ist, für alle diejenigen Potenz Exponenten λ, welche ungerade Primzahlen sind und in der Zählern der ersten $\frac{1}{2}(\lambda - 3)$ Bernoullischen Zahlen als Factoren nicht vorkommen ". (Von Herrn. E. E. Kummer Professor in Breslau) pag. 130.

2. L'equazione che tratteremo sia questa

$$u^\lambda + v^\lambda + w^\lambda = 0, \tag{1}$$

dove u, v, w rappresentano veri numeri complessi. Oltre a ciò sia λ un N_p, il quale non comparisca come fattore in nessuno dei primi numeri bernoulliani $\frac{1}{2}(\lambda - 3)$.

In questa supposizione i qui citati numeri complessi hanno, secondo il teorema dimostrato nella precedente memoria: (*)

1°. La proprietà che il numero di ogni classe non equivalente non è divisibile per λ; da cui noi ricaviamo subito per la seguente dimostrazione questa notevole conclusione, che qui mai una potenza λ^{esima} di un numero complesso è uguale ad un *reale*, questo stesso numero complesso deve essere un numero reale. (Si veda la Memoria n. 16, volume 35 di questo Giornale.)

2°. In questa supposizione, conforme all'ultimo teorema della precedente memoria, ogni unità complessa, la quale per il modulo λ diventa congruente di un numero complesso reale, non è mai potenza λ^{esima} di un'altra unità.

Inoltre i numeri complessi u, v, w vengono supposti primi due a due fra loro.

3. La dimostrazione della impossibilità dell'equazione (1) si scinde ora in due parti, di cui la 1ª considera il caso, in cui dei tre numeri complessi u, v, w nessuno ha il fattore $1 - \alpha$, l'altra considera il caso in cui uno di essi è divisibile per $1 - \alpha$.

4. Sia primieramente nell'equazione

$$u^\lambda + v^\lambda + w^\lambda = 0$$

nessuno dei numeri complessi u, v, w divisibile per $1 - \alpha$.

Poichè nella data equazione compariscono soltanto le λ^{esime} potenze di u, v, w, così si può moltiplicare questi numeri complessi per arbitrarie λ^{esime} potenze dell'unità; si può così porre $\alpha^h u$ in luogo di u, dove h è un N_1, il quale, come è facile mostrare, sempre si può determinare in modo che $\alpha^h u$ assuma la forma

$$a + (1 - \alpha)^2 . P,$$

dove a è un numero intero reale e P un numero intero complesso. La stessa forma può darsi anche a v e w. Perciò qui per u, v, w debbono essere prese le seguenti forme:

$$\begin{cases} u = a + (1 - \alpha)^2 . P \\ v = b + (1 - \alpha)^2 . Q \\ w = c + (1 - \alpha^2) . R. \end{cases} \tag{2}$$

I numeri interi reali a, b, c sono in causa della supposizione, che u, v e w non debbono essere divisibili per $1 - \alpha$, non divisibili per λ. Ora scompongo la forma $u^\lambda + v^\lambda$ nei suoi fattori ed ottengo così dall'eguaglianza (1) la seguente:

$$(u + v)(u + \alpha v)(u + \alpha^2 v) \ldots (u + \alpha^{\lambda - 1} v) = - w^\lambda . \tag{3}$$

Questi λ fattori non hanno alcun divisore comune; poichè se $u + \alpha^r v$ e $u + \alpha^s v$ ne avessero uno, dovrebbero $(\alpha^r - \alpha^s) u$ e $(\alpha^r - \alpha^s) v$ avere lo stesso divisore, e poichè u e v sono numeri primi fra loro, così il divisore comune non potrebbe essere che $\alpha^r - \alpha^s$. Ma $\alpha^r - \alpha^s$ è uguale ad $(1 - \alpha)$ moltiplicato per un'unità com-

(*) Vedi § XI della presente memoria.

plessa, e questo non può essere divisore di uno di quelli λ fattori, perchè altrimenti anche w^λ e conseguentemente anche w dovrebbe essere divisibile per $1-a$.

Poichè ora tutti questi λ fattori, che compariscono al 1° membro dell'equazione (3), sono numeri primi due a due fra loro, ed il loro prodotto è eguale ad una λ^{esima} potenza, così essi debbono essere tutti eguali a λ^{esime} potenze di numeri complessi ideali, moltiplicati per alcune unità complesse. Segue così immediatamente, come per i numeri interi ordinari, dal teorema dimostrato nella Memoria n. 16, volume 35, pag. 348, che considerato nelle unità, le quali possono entrare come fattori, ogni numero complesso come prodotto dei suoi fattori primi ideali, si rappresenta in un solo unico e determinato modo. Si ottiene dunque per tutti i valori $r=0, 1, 2 \ldots (\lambda-1)$:

(4)
$$u + a^r v = a^q E_r(a) \,.\, t_r^\lambda \,;$$

dove t_r è un numero complesso fattore di w e $a^q E_r(a)$ un'unità della specie tale che $E_r(a) = E_r(a^{-1})$.

Ora si osserva che si scompone lo stesso, come è noto, ogni unità complessa in due fattori a^q ed $E_r(a)$, di cui soltanto uno è la λ^{esima} potenza dell'unità, l'altro ha la proprietà di rimanere invariato alla trasformazione di a in a^{-1}.

Poichè secondo l'equazione (4) t_r^λ è uguale ad un reale numero complesso, così concludiamo, secondo quello che si è sopra dimostrato, che anche t_r deve essere un numero reale complesso; e poichè ogni λ^{esima} potenza di un reale numero complesso, come si sa, è congruente ad un numero intero reale per il modulo λ, così pongo

$$t_r^\lambda \equiv m \pmod{\lambda},$$

dove m è un N_1. L'equazione (4) si muta perciò nella congruenza:

(5)
$$u + a^r v \equiv a^q \,.\, E_r(a)\, m \pmod{\lambda}.$$

Ora si muti a in a^{-1}, onde u si trasforma in u', v in v', w in w', così è:

(6)
$$u' + a^{-r} v' \equiv a^{-q} E_r(a)\, m \pmod{\lambda};$$

eliminando dalle congruenze (5) e (6) la m si ha:

(7)
$$a^{-q}(u + a^r v) \equiv a^q (u' + a^{-r} v') \pmod{\lambda}.$$

Se si prende ora invece del modulo λ il modulo $(1-a)^2$, il quale è un divisore di λ, e si osserva che secondo le equazioni (2):

$$u \equiv a \;\;,\;\; v \equiv b \;\;,\;\; u' \equiv a \;\;,\;\; v' \equiv b \quad [\text{mod. } (1-a)^2],$$

si ottiene:

(8)
$$a^{-q}(a + a^r b) \equiv a^q (a + a^{-r} b) \pmod{(1-a)^2};$$

e poichè generalmente $a^h \equiv 1 - h(1-a) \pmod{(1-a)^2}$, così questa congruenza si muta nella seguente:

$$2(a+b)\, q \equiv 2br \pmod{(1-a)}.$$

Poichè ora i numeri reali interi che sono divisibili per $1-a$ devono anche essere divisibili per λ, così ne viene:

(9)
$$(a+b)\, q \equiv br \pmod{\lambda}.$$

Se ora si chiama con k quell'N_1, che basta alla congruenza:

$$(10)\qquad (a+b)\,k \equiv b \pmod{\lambda}:$$

k è indipendente da r e $q \equiv k\,.\,r$, così dà la congruenza:

$$(11)\qquad a^{-kr}(u + a^r v) \equiv a^{+kr}(u' + a^{-r} v') \pmod{\lambda}.$$

Pel caso speciale di $r = 0$, poichè non può essere

$$a + b \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

dalla congruenza (9) si ha:

$$q \equiv 0 \pmod{\lambda};$$

così:

$$(12)\qquad u + v \equiv u' + v' \pmod{\lambda};$$

e poichè u, v, w della data equazione

$$u^\lambda + v^\lambda + w^\lambda = 0$$

possono essere arbitrariamente trasformati, così è anche:

$$(13)\qquad \left.\begin{cases} u + w \equiv u' + w' \\ v + w \equiv v' + w' \end{cases}\right\} \pmod{\lambda};$$

dalle quali si hanno le tre più semplici:

$$(14)\qquad \left.\begin{cases} u \equiv u' \\ v \equiv v' \\ w \equiv w' \end{cases}\right\} \pmod{\lambda}.$$

Perciò la congruenza (11) per ogni valore arbitrario di r si trasforma nella seguente:

$$(15)\qquad a^{kr}(u + a^r v) \equiv a^{kr}(u + a^{-r} v) \pmod{\lambda},$$

o in:

$$(15)'\qquad u\,(a^{kr} + a^{-kr}) + v\,(a^{(k-1)r} - a^{-(k-1)r}) \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Faccio in quest'ultimo $r = 1$ e $r = 2$, ed ottengo:

$$(16)\qquad \left.\begin{cases} u\,(a^{k} - a^{-k}) + v\,(a^{(k-1)} - a^{-(k-1)}) \equiv 0 \\ u\,(a^{2k} - a^{-2k}) + v\,(a^{2(k-1)} - a^{-2(k-1)}) \equiv 0 \end{cases}\right\} \pmod{\lambda}.$$

E se si moltiplica la 1ª di queste congruenze per $a^k + a^{-k}$ e da essa poi si sottrae la 2ª, e quindi la ottenuta si divide per v, il quale non è divisibile per $1 - a$, pure primo con λ, si ottiene:

$$(a^k + a^{-k})\,[a^{(k-1)} - a^{-(k-1)}] + a^{2(k-1)} - a^{-2(k-1)} \equiv 0 \pmod{\lambda};$$

ossia:

$$(a^{k-1} - a^{-(k-1)})\,(a^{+k} + a^{-k} - a^{k-1} - a^{-(k-1)}) \equiv 0 \pmod{\lambda};$$

e quindi:

$$(17)\qquad (a^{k-1} - a^{-(k-1)})\,(a^{-k} - a^{k-1})\,(1 - a) \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Se ora nessuno di questi tre fattori:

$$a^{k-1} - a^{-(k-1)}\ ,\quad a^{-k} - a^{k-1}\ ,\quad 1 - a$$

per sè è uguale a zero, il prodotto di essi contiene tre volte il fattore $(1-a)$; ma esso dovrebbe contenerlo tante volte, quante sono le λ, così $\lambda - 1$ volte, affinchè la congruenza realmente abbia luogo. Coll'esclusione del caso unico $\lambda = 3$, questa congruenza non può aver luogo, se non è:

$$(18) \qquad \begin{cases} a^{k-1} - a^{-(k-1)} = 0 \text{ oppure} \\ a^{-k} - a^{k-1} \quad = 0. \end{cases}$$

Così deve essere o $k \equiv 1$ o $2k \equiv 1 \pmod{\lambda}$.

Ma il primo caso $k \equiv 1$ darebbe per conseguenza la congruenza:

$$(10) \qquad a \equiv 0 \pmod{\lambda};$$

e perciò non può aver luogo. Il secondo caso $2k \equiv 1$ darebbe luogo alla congruenza:

$$(10) \qquad a \equiv b \pmod{\lambda};$$

da cui segue, mercè semplice sostituzione di lettere, che deve essere anche:

$$a \equiv c \quad \text{e} \quad b \equiv c \pmod{\lambda}.$$

Ma dall'equazione:

$$u^\lambda + v^\lambda + w^\lambda = 0$$

segue, secondo le (2) accettate espressioni di u, v, w, che deve essere anche:

$$a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda \equiv 0 \pmod{\lambda};$$

così anche:

$$a + b + c \equiv 0 \pmod{\lambda};$$

e poichè a, b, c sono congruenti, si ha infine $3a \equiv 0 \pmod{\lambda}$, il quale con eccezione del già escluso caso $\lambda = 3$, è pure impossibile, poichè secondo la supposizione u non contiene il fattore $1 - a$, e così anche a non può essere divisibile per λ.

Con ciò la prima parte della dimostrazione è data compiutamente, colla quale viene provato che l'equazione:

$$u^\lambda + v^\lambda + w^\lambda = 0,$$

se nessuno dei numeri complessi u, v, w contiene il fattore $1 - a$, trae seco pel modulo λ una congruenza impossibile, con eccezione del caso di $\lambda = 3$, che qui non vogliamo particolarmente considerare.

5. Sia secondariamente nell'equazione:

$$u^\lambda + v^\lambda + w^\lambda = 0$$

uno dei tre numeri u, v, w divisibile per $1 - a$; e sia il numero w; questo può contenere il fattore $(1 - a)$ anche parecchie volte; allora si pone $(1 - a)^m w$ in luogo di w, così che ora w non può più contenere il fattore $1 - a$; così si è condotti a studiare l'equazione:

$$u^\lambda + v^\lambda + (1 - a)^{m\lambda} . w^\lambda = 0.$$

In luogo di questa io considero quest'altra un po' più generale:

$$(19) \qquad u^\lambda + v^\lambda = \mathrm{E}(a) . (1 - a)^{m\lambda} . w^\lambda,$$

nella quale $\mathrm{E}(a)$ è un'unità complessa arbitraria. Scomponendo in fattori l'espressione $u^\lambda + v^\lambda$ si ottiene:

$$(20) \qquad (u + v)(u + av)(u + a^2 v) \ldots (u + a^{\lambda-1} v) = \mathrm{E}(a)(1 - a)^{m\lambda} . w^\lambda.$$

I l'λ fattori $u+v, u+av \dots u+a^{\lambda-1}v$, hanno tutti il maggior divisore comune $1-a$; all'infuori di questo, due di essi non hanno forse nessun divisore comune. Parimente, se si prende per u e v di nuovo, come sopra, le forme:

$$u = a + (1-a)^2 . \mathrm{P} \qquad \text{e} \qquad v = t + (1-a)^2 . \mathrm{Q},$$

si ottiene:

(21) $$u + a^r . v \equiv a + b - r\, b\,(1-a) \pmod{(1-a)^2};$$

ma $u+a^r v$ per un valore almeno di r deve essere divisibile per $1-a$, perchè il prodotto di tutti questi fattori è divisibile per $(1-a)^{m\lambda}$; per conseguenza anche per λ, e la congruenza (21) diviene

(22) $$u + a^r v \equiv r\,.\,b\,(1-a) \pmod{(1-a)^2};$$

da cui innanzi tutto segue che per ogni valore di r la $u+a^r v$ deve contenere il fattore $1-a$, in luogo del quale anche il fattore $1-a^r$, che differisce da questo solo per un'unità complessa, la quale vi entra come fattore; inoltre che $u+a^r v$ può contenere questo fattore $1-a^r$ oppure $1-a$ soltanto una volta con eccezione del caso $r=0$. Ma la quantità $u+v$ contiene veramente il fattore $1-a$ parecchie volte; ma in virtù dell'equazione (20) lo contiene esattamente $m\nu-\lambda+1$ volte, mentre i rimanenti $\lambda-1$ fattori lo contengono ciascuno una volta, ed il prodotto di tutti questi fattori $m\lambda$ volte.

Ora si pone:

(23) $$u + v = (1-a)^{m\lambda-\lambda+1} . \varphi$$

e

(24) $$u + a^r v = (1-a^r) . \varphi_r;$$

così l'equazione (20) si trasforma nella seguente

(25) $$\varphi . \varphi_1 . \varphi . \varphi_2 . - \varphi_{n-1} = \mathrm{E}(a) . w^\lambda;$$

e i fattori $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{n-1}$, i quali sono primi due a due fra loro, ed il cui prodotto è uguale ad una λ^{esima} potenza moltiplicata per un'unità, devono essere tutti le stesse λ^{esime} potenze moltiplicate per un'unità. Secondo ciò si può porre

$$\varphi = e(a)\, w_1^\lambda \qquad \text{e} \qquad \varphi_r = e_r(a)\, t_r^\lambda;$$

da cui:

(26) $$u + v = e(a)\,(1-a)^{m\lambda-\lambda+1} . w_1^\lambda$$

e

(27) $$u + a^r . v = e_r(a) . (1-a^r)\, t_r^\lambda$$

per tutti i valori $r = 1, 2, 3 \dots \lambda-1$.

I numeri complessi w_1 e t_r sono qui parimente soltanto numeri reali complessi, perchè le λ^{esime} potenze di essi sono reali numeri complessi. Se si dà alla r un altro valore s, si ottiene

(28) $$u + a^s v = e_s(a) . (1-a^s) . t_s^\lambda;$$

e se dalle equazioni (26), (27), (28) si eliminano u e v si ottiene

(29) $$e_r(a) . t_r^\lambda - e_s(a)\, t_s^\lambda = \frac{e(a^s - a^r)(1-a)}{(1-a^r)(1-a^s)} . (1-a)^{(m-1)\lambda} . w_1^\lambda .$$

Se si divide per $e_r(a)$ e si pone

$$\frac{-e_s(a)}{e_r(a)} = \varepsilon(a), \quad \frac{e(a).(a^r - a^s)(1-a)}{e_r(a)(1-a^r)(1-a^s)} = \mathrm{E}_1(a)$$

e dove $\varepsilon(a)$ ed $\mathrm{E}_1(a)$ sono parimente unità complesse, così si ottiene

$$(30) \qquad t_r^\lambda + \varepsilon(a)\, t_s^\lambda = \mathrm{E}_1(a)(1-a)^{(m-1)\lambda} \,.\, w_1^\lambda \,.$$

Se ora $m > 1$, come è noto, è $(1-a)^{(m-1)\lambda} \equiv 0 \pmod{\lambda}$.

Oltre a ciò poichè t_r e t_s sono reali numeri complessi, le λ^{esime} potenze degli stessi numeri reali interi debbono essere congruenti rispetto al modulo λ, così deve essere

$$t_r^\lambda \equiv c \quad \text{e} \quad t_s^\lambda \equiv k \pmod{\lambda}.$$

L'equazione (30) dà quindi la congruenza seguente

$$c + \varepsilon(a) \,.\, k \equiv 0 \pmod{\lambda};$$

dalla quale segue che l'unità $\varepsilon(a)$ è congruente ad un numero intero reale rispetto al modulo λ; e così $\varepsilon(a)$ deve essere una λ^{esima} potenza di un'altra unità; perciò $\varepsilon(a) = \varepsilon_1(a)^\lambda$.

Se ora si pone $\varepsilon_1(a) \,.\, t_s = v_1$ ed in luogo di t_r il segno u_1, l'equazione (30) si muta nella seguente

$$(31) \qquad u_1^\lambda + v_1^\lambda = \mathrm{E}_1(a) \,.\, (1-a)^{(m-1)\lambda} \,.\, w_1^\lambda \,.$$

Ma questa equazione è per la forma perfettamente eguale all'equazione (19), dalla quale è derivata, e differisce da essa soltanto perciò che m è diminuita di un'unità. Se si adopera lo stesso metodo sull'equazione (31) si ottiene di nuovo da essa un'equazione della stessa forma, nella quale m è minore di due unità, che nell'equazione (19), e così via. Colla ripetizione di questo procedimento si giunge sempre ad un'equazione della stessa forma della (19), nella quale è $m = 1$; ma arrivati a quest'ultima, poi il metodo che richiede, come sopra si è detto, $m > 1$, non è più servibile. Si ottiene così un'equazione dalla forma

$$(32) \qquad u^\lambda + v^\lambda = \mathrm{E}(a)(1-a)^\lambda \,.\, w^\lambda \,.$$

L'impossibilità di questa equazione si dimostra facilmente, se verrà dimostrato questo: se la forma $u^\lambda + v^\lambda$ contiene sovratutto il fattore $1-a$, essa lo deve contenere almeno $(\lambda + 1)$ volte. Per dimostrare ciò pongo per u e v, come sopra, di nuovo le forme

$$u = a + (1-a)^2 \,.\, \mathrm{P} \quad , \quad v = b + (1-a)^2 \,.\, \mathrm{Q};$$

così si ottiene di nuovo

$$(33) \qquad u + a^r v \equiv a + b - rb(1-a) \pmod{(1-a)^2}.$$

Poichè ora $u^\lambda + v^\lambda$ è divisibile per $1-a$, e perciò anche uno almeno dei fattori di questa espressione, i quali tutti hanno la forma: $u + a^r v$, deve essere divisibile per $1-a$, così ne segue che $a+b$ è divisibile per $1-a$, e quindi anche per λ. Allora la congruenza (33) si trasforma come sopra nella seguente

$$(34) \qquad u + a^r v \equiv rt(1-a) \pmod{(1-a)^2}.$$

Così tutti i fattori della forma

$$u^\lambda + v^\lambda = (u+v)(u+\alpha v)(u+\alpha^2 v)\dots(u+\alpha^{\lambda-1} v)$$

sono divisibili per $1-\alpha$; ma il fattore $u+v$ è divisibile per $(1-\alpha)^2$; perciò il numero di tutti i fattori $1-\alpha$ contenuti in $u^\lambda + v^\lambda$ è almeno uguale a $\lambda+1$, ciò che dovevasi dimostrare.

Così l'equazione (32), nella quale w non è divisibile per $1-\alpha$, contiene in sè la contraddizione, che il primo membro di essa è divisibile per $(1-\alpha)^{\lambda+1}$, mentre il 2° membro non lo è. Quindi l'equazione (32) è impossibile, e perciò anche l'equazione (19), dalla quale essa è derivata, è impossibile; in questo modo chiamasi un'equazione, la quale non si possa in alcun modo soddisfare mediante numeri interi complessi

6. L'equazione

$$u^\lambda + v^\lambda + w^\lambda = 0$$

è dunque impossibile in entrambi i casi, tanto se nessuno dei numeri complessi u, v, w è divisibile per $1-\alpha$, quanto se anche uno di essi viene preso divisibile per $1-\alpha$. Perciò il teorema di Fermat è dimostrato non solo per numeri reali interi, ma altresì per numeri interi complessi, formati da λ^{esime} radici delle unità, per tutte quelle potenze, i cui esponenti λ sono degli N_p, ed i quali soddisfano alla condizione, che non compariscono in nessuno dei primi numeri bernoulliani $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ come fattori del numeratore.

Poichè $\lambda = 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 43$ adempiono a questa condizione, così il teorema di Fermat è dimostrato per tutti questi esponenti. Ma per $\lambda = 37$ la data condizione non è soddisfatta: e quindi il teorema di Fermat non è dimostrato per l'esponente 37 e per gli esponenti $37 \cdot n$.

Le mie presenti cognizioni sulla teoria dei numeri complessi non mi hanno ancora fornito il mezzo di poter dimostrare la non solubilità o la solubilità dell'equazione di Fermat per i rimanenti numeri primi, i quali non soddisfano alla data condizione.

§ VIII.

Memorie di Eulero. (*)

1. Al capitolo XIII dell'algebra di Eulero pag. 242 si ha:

« De quelques expressions de la forme $ax^4 + by^4$, qui ne sont pas réductibles à des carrés ».

In questo capitolo Eulero incomincia a dimostrare che $x^4 + y^4$ non può essere eguale ad un quadrato z^2 e poi dimostra che è pure impossibile che $x^4 - y^4$ sia eguale ad un quadrato z^2; siccome le dimostrazioni che egli ne dà sono in sostanza le stesse di quelle che abbiamo vedute più innanzi, crediamo conveniente di ometterle.

(*) Vedi *Éléments d'algèbre* par M. LÉONARD EULER, traduits de l'allemand, tome second. Lyon et Paris, 1774.

2. Nello stesso capitolo XIII a pag. 243 Eulero dimostra questo teorema:

" Il n'est pas possible de trouver deux cubes, dont la somme ou bien la différence soit une cube „.

La dimostrazione di questo teorema è identica a quella data dal Legendre, che noi abbiamo riportata nel § IX della presente memoria, quindi è inutile di qui riportarla.

§ IX.

Memoria 2ª di Legendre. (*)

" *Recherches sur quelques objets d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat* „.

1. Qui non riporteremo di questa memoria che la parte, la quale ha stretta attinenza coll'ultimo teorema di Fermat.

2. Quantunque la teoria dei numeri sia ora di molto progredita rispetto ai tempi di Fermat, tuttavia ancora rimane da dimostrare una proposizione scoperta da questo scienziato e cioè:

" Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum, potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere, cujus rei demostrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet „. FERMAT, *Notes sur Diophante,* pag. 61. Queste ultime parole autorizzano a credere che la dimostrazione, di cui parla il Fermat, non avrebbe occupato che un picciol numero di pagine, se la si avesse a nostra disposizione. Questa dimostrazione era dunque assai più semplice di quella, di cui noi ci serviamo in questo scritto per dimostrare solamente che la soluzione, se ve ne è una nei casi non risolti, non potrebbe essere data che per numeri di una grandezza prodigiosa.

Il caso delle terze potenze è stato dimostrato da Eulero e quello delle quarte lo è stato dimostrato egualmente con un metodo, che Fermat stesso aveva sufficientemente indicato; ma non si è andati al di là; e quantunque l'Accademia delle Scienze di Francia, a fine di onorare la memoria di Fermat, avesse proposto per soggetto di uno dei suoi premi di Matematiche, la dimostrazione del teorema suddetto, e quantunque avesse prorogato il limite di questo concorso al di là del termine ordinario, pur tuttavia non si ottenne lo scopo che l'Accademia si riprometteva.

Adunque sembra che una difficoltà particolare sia inerente a tale quistione e che non si conosca ancora il principio speciale, che sarebbe necessario per risolverla. Aspettando che un caso fortunato faccia ritrovare questo principio, tale quale Fermat lo aveva conosciuto, i cultori della teoria dei numeri vedranno forse con piacere che il caso delle quinte potenze può essere rigorosamente dimostrato. Ora esporremo questa dimostrazione, facendola precedere da alcune considerazioni generali intorno alle condizioni, alle quali dovrebbero soddisfare le tre incognite, se la soluzione fosse possibile. Una di queste condizioni è che l'esponente della potenza, od anche il suo quadrato, sia divisore di una delle incognite; e si osser-

(*) *Mémoires de l'académie royale des sciences de l'institut de France,* tome VI. Paris, 1823.

verà che questa semplice condizione, facile a dimostrarsi per piccoli valori dell'esponente, diviene un problema difficile e non risolto, allorchè si vuole estenderlo ad un esponente qualunque.

3. Ora si tratta di dimostrare che l'equazione

$$x^n + y^n + z^n = 0,$$

ove n è un Np maggiore di 2, è impossibile in N_1, salvo il caso evidente in cui uno qualunque dei numeri x, y, z fosse nullo. Per semplicità si suppongono i numeri x, y, z, i cui valori ed i cui segni sono indeterminati, primi due a due fra loro; e perciò due di essi saranno degli $N_1 2 + 1$ ed il terzo un $N_1 2$.

4. Teorema. — *Sia* $x + y + z = p$, *io dico che* p *è un* $N_1 n$.

Dimostrazione. — Infatti essendo n un Np, la quantità $x^n - x$ è un $N_1 n$, e così $y^n - y$, $z^n - z$ sono degli $N_1 n$; dunque la loro somma

$$(x^n - x) + (y^n - y) + (z^n - z) = x^n + y^n + z^n - (x + y + z) = -p$$

è un $N_1 n$.

5. Teorema. — *Io dico ora che* p^n *è divisibile pel prodotto* $(x+y)(y+z)(z+x)$, *sicchè si potrà porre*

$$p^n = (x + y)(y + z)(z + x) \,.\, P,$$

ove P *è un polinomio in* x, y, z *omogeneo del* $(n - 3)^{mo}$ *grado.*

Dimostrazione. — Essendo n un $N_1 2 + 1$ qualunque, $p^n - z^n$ è sempre divisibile per $p - z$ ossia per $x + y$; e così pure $x^n + y^n$ è divisibile per $x + y$; dunque $p^n - z^n - x^n - y^n$ o semplicemente p^n è divisibile per $x + y$. Analogamente si dimostra che p^n è divisibile per $y + z$ e per $z + x$. Dunque se n è un $N_1 2 + 1$ qualunque, p^n è divisibile pel prodotto $(x + y)(y + z)(z + x)$ ecc.

6. Se si suppone che uno dei numeri x, y, z non sia un $N_1 n$, bisognerà pure che nessuna delle $x + y$, $y + z$, $z + x$ non sia un $N_1 n$, poichè se per es. $x + y$ fosse un $N_1 n$, la differenza $p - (x + y) = z$ sarebbe un $N_1 n$; il che è contro l'Hp.

7. Supponiamo che uno dei numeri x, y, z, per es. x, sia un $N_1 n$, allora $y + z$ non solo è un $N_1 n$ ma è un $N_1 n^{n-1}$. Infatti poichè si ha $x^n + y^n + z^n = 0$, bisogna che $y^n + z^n$ sia un $N_1 n^n$; ma $y^n + z^n$ è il prodotto di $y + z$ pel polinomio $y^{n-1} - zy^{n-2} + z^2 y^{n-3} - \ldots$; e se si fa in questo polinomio $y + z = 0$ ossia $z = -y$, esso diviene ny^{n-1}; dunque, siccome y non è un $N_1 n$, poichè x ed y son primi fra loro, il polinomio sarà divisibile per n semplicemente e non per una potenza più elevata di n. Dunque $y + z$ sarà divisibile per n^{n-1}. In generale se x fosse divisibile per n^α, e $y + z$ sarebbe divisibile per $n^{n\alpha - 1}$ e P semplicemente per n.

Osservazione. — Da ciò risulta che facendo $y^n + z^n = (y + z)\,\varphi(y, z)$, i fattori $y + z$ e $\varphi(y, z)$ avranno n per divisor comune o non ne avranno nessuno, secondo che x è o non è un $N_1 n$.

8. Consideriamo dapprima il caso, in cui l'uno dei tre numeri x, y, z sia un $N_1 n$, e sia x questo numero; allora facendo $y^n + z^n = (y + z)\,\varphi(y, z) = (-x)^n$; e siccome questi due fattori $y + z$, $\varphi(y, z)$ non possono avere che n per divisore, come risulta dall'Oss. del n. 7, bisognerà che $n(y + z)$ e $\frac{1}{n}\varphi(y, z)$ siano l'uno e l'altro delle potenze n^{esime}, il cui prodotto sarà eguale a $(-x)^n$; perciò faremo in generale $y + z = \frac{1}{n} a^n$, a essendo un $N_1 n$ o un $N_1 n^\alpha$ e $\varphi(y, z) = n\alpha^n$, ciò che suppone $x = -a\alpha$, e di più α primo con $n\alpha$.

Analogamente si avrà, non essendo y e z degli $N_1 n$:

$$z+x=b^n,\ \varphi(z,x)=\beta^n,\ y=-b\beta \quad \text{e} \quad x+y=c^n,\ \varphi(x,y)=-\gamma^n,\ z=-c\gamma.$$

Si avrà dunque ad un tempo le nove equazioni:

$$\begin{cases} y+z=\dfrac{1}{n}a^n, & \varphi(y,z)=n\alpha^n, \qquad x=-a\alpha, \\ z+x=b^n, & \varphi(z,x)=\beta^n, \qquad y=-b\beta, \\ x+y=c^n, & \varphi(x,y)=\gamma^n, \qquad z=-c\gamma. \end{cases}$$

E si ha

$$2p=\frac{1}{n}a^n+b^n+c^n;$$

e si avrà quindi

$$x=p-\frac{1}{n}a^n=\frac{1}{2}\left(b^n+c^n-\frac{1}{n}a^n\right);$$

$$y=p-b^n=\frac{1}{2}\left(c^n+\frac{1}{n}a^n-b^n\right);$$

$$z=p-c^n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}a^n+b^n-c^n\right).$$

9. Esiste pure una relazione fra a, b, c, la quale si dedurrà dall'equazione

$$2p=\frac{1}{n}a^n+b^n++c^n,$$

combinata colla equazione

$$0=\left(p-\frac{1}{n}a^n\right)^n+(p-b^n)^n+(p-c^n)^n.$$

Si sa d'altra parte che p^n è un $N_1 n(y+z)(z+x)(x+y)$ o un $N_1 abc$; dunque si può porre $p=abc\mathrm{D}$; quindi si avrà

$$2abc\mathrm{D}=\frac{1}{n}a^n+b^n+c^n.$$

E collo sviluppo dell'equazione precedente si otterrà in ciascun caso particolare un'altra equazione fra a, b, c, D ecc.

10. Se supponiamo ora che nessuno dei numeri x, y, z sia un $N_1 n$; allora il solo cambiamento da farsi nelle nove equazioni del n. 8 sarà di $\dfrac{1}{n}a^n$ in a^n e $n\alpha^n$ in α^n; ma si vedrà che questo caso non può aver luogo.

11. Se una delle indeterminate x, y, z è un $N_1 n$, io dico che è necessariamente anche un $N_1 n^2$, e così pure p sarà un $N_1 n^2$.

Infatti essendo x la indeterminata che è un $N_1 n$, ed avendosi

$$2p=\frac{1}{n}a^n+b^n+c^n,$$

in cui $2p$ e $\dfrac{1}{n}a^n$ sono degli $N_1 n$, occorre che b^n+c^n sia un $N_1 n$. D'altra parte b^n-b, c^n-c essendo sempre degli $N_1 n$, la loro somma $b^n+c^n-(b+c)$ è un $N_1 n$; dunque $b+c$ è pure un $N_1 n$. Sia $b+c=n\mathrm{A}$, si avrà

$$b^n=(-c+n\mathrm{A})^n,$$

e

$$b^n+c^n=nc^{n-1}\,.\,n\mathrm{A}-\frac{n(n-1)}{1}c^{n-1}\,.\,n^2\mathrm{A}^2+\text{etc.};$$

da cui si vede che $b^n + c^n$ è sempre un $N_1 n^2$. Ma la parte $\frac{1}{n} a^n$ è pure un $N_1 n^2$ nel caso di $n = 3$ e per una potenza più elevata di n, allorchè è $n > 3$. Dunque sarà sempre $p - \frac{1}{n} a^n$ un $N_1 n^2$ ossia x sarà un $N n^2$.

12. Ora mostreremo che una delle incognite x, y, z è necessariamente un $N_1 n$. (*)

Avendo già posto $p = x + y + z$, facciamo ora $q = xy + yz + zx$, $r = xyz$, di maniera che le incognite x, y, z sono le radici dell'equazione

$$V^3 - pV^2 + qV - r = 0;$$

ora si ha

$$S_1 = p; \qquad S_2 = p^2 - 2q; \qquad S_3 = p^3 + 3(r - pq),$$

ed in generale

$$S_m = p^m - mqp^{m-2} + mrp^{m-3} + \frac{m(m-3)}{2} q^2 p^{m-4} - \frac{m(m-4)}{2} . 2qrp^{m-5}$$
$$+ \frac{m(m-5)}{2} r^2 p^{m-6} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3} q^3 p^{m-6} + \frac{m(m-5)(m-6)}{2.3} . 3q^2 rp^{m-7}$$
$$- \frac{m(m-6)(m-7)}{2.3} . 3qr^2 p^{m-8} + \frac{m(m-7)(m-8)}{2.3} r^3 p^{m-9} + \text{etc.},$$

questa serie dovendo essere prolungata sino alle potenze negative di p esclusivamente.

1°. Sia $n = 3$; si ha $S_3 = 0$, quindi si ha

$$p^3 = 3(pq - r) = 3(x + y)(y + z)(z + x);$$

dunque p è divisibile per 3, e di più uno dei fattori $x + y$, $y + z$, $z + x$ sarà un $N_1 9$; sia questo $y + z$, allora $p - (y + z) = x$ è un $N_1 3$; di più si può concludere, pel n. 11, che x è un $N_1 9$ come p.

2°. Sia $n = 5$; si ha $S_5 = 0$, la quale dà

$$p^5 = 5(pq - r)(p^2 - q),$$

ovvero

$$p^5 = 5(x + y)(y + z)(z + x) \frac{p^2 + x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

Se nessuno dei fattori $x+y$, $y+z$, $z+x$ è un $N_1 5$, bisognerà che $p^2+x^2+y^2+z^2$ o la parte $x^2 + y^2 + z^2$ sia un $N_1 5$. Ma ogni numero non un $N_1 5$ è delle forme $5m \pm 1$, $5m \pm 2$, ed il suo quadrato della forma $5m \pm 1$; ora tre N_1 della forma $5m \pm 1$ avranno la somma delle forme $5m \pm 1$, $5m \pm 3$; dunque è impossibile che $x^2 + y^2 + z^2$ sia un $N_1 5$, se non lo è nessuno delle x, y, z. Dunque in questo caso una delle indeterminate è un $N_1 5$, ed è ad un tempo un $N_1 25$ come p.

Questi due ultimi casi possono essere dimostrati anche così:

1°. Un cubo non un $N_1 3$ è delle forme $9m \pm 1$; ora tre dei resti ± 1, non possono fare nè la somma zero, nè la somma 9; dunque se si può soddisfare in N_1 all'equazione $x^3+y^3+z^3=0$, una delle tre indeterminate sarà necessariamente un $N_1 3$.

2°. La 5ª potenza di ogni N_1, che non è un $N_1 5$, ha necessariamente una delle quattro forme $25m \pm (1,7)$, ciò che si può verificare sulle quinte potenze dei

(*) Osservazione. — Se per es. x è un $N_1 n$ ed n è un Np, ne consegue che è $y \equiv z$ (mod. n).

D. Gambioli.

numeri 1, 2, 3, 4, che divise per 25, dànno gli stessi resti, che darebbero le quinte potenze dei numeri $5x+1$, $5x+2$, $5x+3$, $5x+4$. Ora tre dei quattro resti ± 1, ± 7 non possono fare nè la somma zero, nè la somma 25. Dunque se l'equazione $x^5+y^5+z^5=0$ è risolubile in N_1, bisognerà che una delle indeterminate sia un $N_1 5$ ecc.

In generale un tal principio si dimostra così:

Supponiamo che si abbia $x^n+y^n+z^n=0$ e θ sia un Np non divisore di xyz; poichè x e θ^n sono primi fra loro, si può supporre $y=fx+\theta^n y'$, $z=gx+\theta^n z'$; e facendo la sostituzione si vedrà che $1+f^n+g^n$ è divisibile per θ^n, o che sopprimendo i multipli di θ^n, si ha $(-g^n)=f^n+1$; dunque fra i resti delle potenze n^{esime} divise per θ^n, ve ne sarà sempre una, proveniente da $(\theta-g)^n$ o da $(-g)^n$, che supererà di un'unità il resto proveniente da f^n. Se questa condizione non si verifica nella serie dei resti, si deve concludere che vi è necessariamente uno dei numeri x, y, z divisibile per θ.

13. Dell'equazione $x^5+y^5+z^5=0$.

a) Poichè una delle indeterminate deve essere un $N_1 5$ ed un $N_1 25$, sia x questa indeterminata, e si troverà come al n. 8, che l'equazione $y^5+z^5=-x^5$ si scinde necessariamente in due altre di questa forma:

$$(1)\qquad \begin{cases} y+z=5^4 t^5 \\ y^4-y^3z+y^2z^2-yz^3+z^4=5r^5, \end{cases}$$

ciò che suppone $x=-5tr$, r essendo un $N_1 2+1$, positivo e primo con $5t$. Ciò posto, vi sono due casi da considerare: secondo che x è un $N_1 2$ o un $N_1 2+1$.

1° caso, in cui x è un $N_1 2$.

b) Allora t è un $N_1 2$, y e z sono degli $N_1 2+1$, e la 2ª dell'equazioni (1) si potrà mettere sotto la forma:

$$5\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)^2-\left(\frac{y^2+2yz+z^2}{2}\right)^2=5r^5.$$

Dividendo per 5 e mettendo in luogo di $y^2+2yz+z^2$ il suo valore $5^8 t^{10}$, si avrà:

$$\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)^2-5\left(\frac{5^7 t^{10}}{2}\right)^2=r^5.$$

Nella nostra Hp $\frac{1}{2}(y^2+z^2)$ e $\frac{1}{2}\cdot 5^7\cdot t^{10}$ sono degli N_1; d'altronde poichè il 1° membro è della forma p^2-5q^2, il suo divisore r dovrà essere della forma stessa, sicchè si potrà fare $r=f^2-5g^2$; poi facendo $(f+g\sqrt{5})^5=F+G\sqrt{5}$, ciò che dà:

$$F=f(f^4+50f^2g^2+125g^4)$$
$$G=5g(f^4+10f^2g^2+5g^4),$$

si avrà $r^5=F^2-5G^2$, e per conseguenza:

$$\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)^2-5\left(\frac{5^7 t^{10}}{2}\right)=F^2-5G^2.$$

Per ottenere una soluzione generale di questa equazione, bisognerà prendere due numeri m ed n tali che si abbia: $(y\pm 4\sqrt{5})^k=m+n\sqrt{5}$, k essendo un N_1;

questi N_1 soddisferanno in generale l'equazione $m^2 - 5n^2 = 1$; e si potrà supporre:

$$\frac{y^2+z^2}{2} + \frac{5^7 t^{10}}{2}\sqrt{5} = (F + G\sqrt{5})(m + n\sqrt{5});$$

ciò che darà:

$$\frac{1}{2}\cdot(y^2+z^2) = mF + 5nG,$$
$$\frac{1}{2}\cdot 5^7 t^{10} = mG + nF.$$

c) Queste formole contengono un'infinità di soluzioni, poichè si può prendere per k un N_1 qualunque; ma queste soluzioni in numero infinito sono solamente suscettibili di cinque forme diverse. Infatti, qualunque sia l'esponente k, sarà sempre di una delle cinque forme: $5i$, $5i \pm 1$, $5i \pm 2$. Ma osservasi che la parte indeterminata $5i$ può sopprimersi, essendo compresa nell'espressione di r^5; poichè si può fare: $(f + g\sqrt{5})(9 \pm 3\sqrt{5}) = f' + g'\sqrt{5}$, e si avrà di nuovo $r = f'^2 - 5g'^2$; sicchè basterà di mettere f' e g' in luogo di f e g nei valori di F e G. Quindi non resta che a considerare i cinque valori $k = 0, \pm 1, \pm 2$, ai quali corrispondono per m ed n i valori seguenti:

$$m = 1,\ \ 9,\ \ 161; \qquad n = 0,\ \ \pm 4,\ \ \pm 72.$$

d) Si osserva ancora che nell'equazione $\frac{1}{2}\cdot 5^7\cdot t^{10} = mG + nF$, ove G è sempre un $N_1 5$, il termine nF non può essere un $N_1 5$ se non lo è n; poiche r essendo primo con $5t$, ed il suo valore essendo $f^2 - 5g^2$, f non può essere un $N_1 5$, e per conseguenza F non può essere un $N_1 5$. Dunque dei cinque valori di n, non si può ammettere che il valore $n = 0$, che corrisponde ad $m = 1$; ciò che darà per sola soluzione ammissibile:

$$\frac{1}{2}\cdot 5^7\cdot t^{10} = G = 5g(f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4)$$

o

$$\frac{1}{2}\cdot 5^6\cdot t^{10} = g(f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4).$$

In questa equazione i due fattori del 2° membro sono primi fra loro, ed è necessario supporre g un $N_1 2$; poichè se g fosse un $N_1 2 + 1$, f dovrebbe essere un $N_1 2$, ed il 2° membro della nostra equazione sarebbe un $N_1 2 + 1$, mentre che il 1° è divisibile per 2^9, poichè t è un $N_1 2$; se ne concluderà che l'equazione precedente non può essere scomposta in due altre che nel modo seguente, in cui si suppone $t = 2ur'$; $g = 5^6 . 2^9 . u^{10}$, $f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4 = r'^{10}$. Nella 2ª equazione il 1° membro può mettersi sotto la forma: $(f^2+5g^2)^2 - 5(2g^2)^2$; dunque il suo divisore r' deve essere della forma $p^2 - 5q^2$; e lo stesso si ha per r'^2, e per conseguenza si potrà fare: $r'^2 = f'^2 - 5g'^2$; e quindi si avrà: $r^{10} = F'^2 - 5G'^2$, F' e G' essendo delle funzioni simili ad F e G; si avrà dunque l'equazione:

$$(f^2+5g^2)^2 - 5(2g^2)^2 = F'^2 - 5F'^2;$$

in cui $2g' = 5^{12} . 2^{19} . u^{20}$; e come sopra si troverà che la sola soluzione ammissibile è:

$$5^{11} . 2^{19} . u^{20} = g'(f'^4 + 10f'^2 g'^2 + 5g'^4).$$

Facendo ancora $u = u'r''$, r'' essendo primo con $10u'$, questa equazione non potrà scomporsi in altre due che così:

$$g' = 5^{11} \cdot 2^{19} u'^{20},$$
$$f^{14} + 10f^{12} g^{12} + 5g^{14} = (r'')^{20}.$$

e) Così si ricade sulle equazioni che son sempre della stessa forma e la cui serie può prolungarsi indefinitamente.

Ora avendo fatto successivamente $x = -5tr$, $t = 2ur'$, $u = u'r''$, $u' = u''r'''$ etc. ne segue che $t = 2ur' = 2u'r'r'' = 2u''r'r''r'''$ etc. sicchè il numero dei fattori r aumenta continuamente nell'espressione di t. Ciascuno di questi fattori determinati da un'equazione della forma: $r^{10m} = f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4$, ove f e g sono degli N_1 sempre crescenti, poichè si ha: $g' = \frac{1}{2}(2g^2)^2$, $f^2 > 5g'^2$, è certamente maggiore di 1; e non può come un N_1 essere minore di 2. Dunque supponendo anche che la serie u, u', u'',... avrebbe per limite 1, il valore di t composto di un numero infinito di fattori 2, r', r'', r'''..., che non possono essere minori di 2, supererà tosto ogni quantità data, ciò che non può accordarsi colla supposizione fatta, che i valori primitivi di x, y, z siano dati in N_1 finiti. Dunque l'equazione proposta è impossibile nel 1° caso, in cui si suppone che una delle indeterminate sia ad un tempo un $N_1 2$ e un $N_1 5$.

2° caso, in cui x è un $N_1 2 + 1$.

f) Allora le due indeterminate y e z saranno l'una pari e l'altra dispari, e la 2ª dell'equazione (1) si potrà mettere sotto la forma

$$\left(y^2 - \frac{1}{2} yz + z^2\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2} yz\right)^2 = 5r^5,$$

in cui si vede che $\frac{1}{2} yz$ è sempre un N_1 e che $y^2 - \frac{1}{2} yz + z^2$ deve essere un $N_1 5$; infatti si ha

$$y^2 - \frac{1}{2} yz + z^2 = (y+z)^2 - 5\left(\frac{1}{2} yz\right) = 5^8 t^{10} - 5\left(\frac{1}{2} yz\right).$$

L'equazione precedente può dunque scriversi così:

$$\left(\frac{1}{2} yz\right)^2 - 5\left(\frac{y^2 - \frac{1}{2} yz + z^2}{5}\right)^2 = -r^5;$$

e poichè il numero impari r è divisore di un numero della forma $p^2 - 5q^2$, in cui p e q son primi fra loro, sarà esso medesimo della stessa forma e così $-r$; poichè si ha che ogni N_1 della forma $p^2 - 5q^2$ è allo stesso tempo della forma $5a^2 - b^2$; si può quindi supporre $-r = f^2 - 5g^2$, e facendo come sopra,

$$(f + g\sqrt{5})^5 = F + G\sqrt{5},$$

si avrà $-r^5 = F^2 - 5G^2$, e l'equazione da risolvere sarà:

$$\left(\frac{1}{2} yz\right)^2 - 5\left(\frac{y^2 - \frac{1}{2} yz + z^2}{5}\right)^2 = F^2 - 5G^2.$$

Supponendo di nuovo $m + n\sqrt{5} = (9 \pm 4\sqrt{5})^x$, la risoluzione generale di questa equazione si otterrà facendo

$$\frac{1}{2}yz + \frac{y^2 - \frac{1}{2}yz + z^2}{5} \cdot \sqrt{5} = (F + G\sqrt{5})(m + n\sqrt{5}),$$

ciò che dà:

$$\frac{1}{2}yz = mF + 5nG,$$

$$\frac{1}{5}(y^2 - \frac{1}{2}yz + z^2) = mG + nF.$$

Da queste due equazioni si hanno:

$$\frac{1}{2}(y+z)^2 = (m+n)F + (m+5n)G,$$

ovvero

$$5^7 t^{10} = (m+n)F + (m+5n)G.$$

g) Poichè G è sempre un $N_1 5$ e che F non lo è, questa equazione non può sussistere, a meno che $m + n$ non sia un $N_1 5$. Ora dai cinque valori di m ed n qui sopra riportati, si trova che questa condizione non può essere soddisfatta che supponendo $m = 9$, $n = -4$, ciò che darà:

$$5^7 t^{10} = 5F - 11G,$$

o dividendo per 5 e sostituendo i valori di F e G:

$$5^6 t^{10} = f^4(f - 11g) + 10f^2g^2(5f - 11g) + 5g^4(25f - 21g).$$

Si vede da questa equazione che $(f - g)$ deve essere divisibile per 5; sia dunque $f = g + h$, h essendo un numero divisibile per 5; e si avrà

$$f + g\sqrt{5} = h + g(2 + \sqrt{5}),$$

sicchè si potrà fare direttamente:

$$F + G\sqrt{5} = [h + g(1 + \sqrt{5})]^5 = h^5 + 5h^4g(1+\sqrt{5}) + 28h^3g^2(3+\sqrt{5}) + 80h^2g^3(2+\sqrt{5})$$
$$+ 40hg^4(7 + 3\sqrt{5}) + 16g^5(11 + 5\sqrt{5}).$$

D'onde si deducono i valori separati di F e G; ma siccome non si ha bisogno che della quantità $F - \frac{11}{5}G$, si potrà mettere in questa equazione $-\frac{11}{5}$ in luogo di $\sqrt{5}$, e quindi si avrà:

$$F - \frac{11}{5}G = h(h^4 - 6h^3g + 16h^2g^2 - 16hg^3 + 16g^4),$$

e per conseguenza:

$$5^6 t^{10} = h(h^4 - 6h^3g + 16h^2g^2 - 16hg^3 + 16g^4).$$

h) Già si sa che h è un $N_1 5$ e che g non lo è, ed osservando di più che h deve essere un $N_1 2 + 1$, e che così i due fattori del 2° membro son primi fra loro, la sola maniera di soddisfare a questa equazione è di scinderla in altre due così:

$$h = 5^9 u^{10},$$
$$h^4 - 6h^3 g + 16h^2 g^2 - 16hg^3 + 16g^4 = r'^{10},$$

ciò che suppone $t = ur'$, r' essendo primo con $5u$.

La 2ª equazione può essere messa sotto la forma:

$$r'^{10} = (h^2 - 3gh + 6g^2)^2 - 5(gh - 2g^2)^2;$$

da cui si vede che r' deve essere della forma $p^2 - 5b^2$; e così r'^2 deve avere la stessa forma; si potrà dunque fare

$$r'^2 = f'^2 - 5g'^2;$$

ciò che darà $r'^{10} = F'^2 - 5G'^2$; e si soddisfarà generalmente all'equazione precedente facendo

$$h^2 - 3hg + 6g^2 = mF' + 5nG',$$
$$gh - 2g^2 = nF' + mG';$$

ciò che dà infine h^2 o:

$$5^{12} u^{20} = (m + 3n)F' + (3m + 5n)G'.$$

Poichè G' è un $N_1 5$ e che F' non lo è, questa equazione non può sussistere a meno che $m + 3n$ non sia un $N_1 5$. I soli valori di m ed n possibili per ciò sono $m = 161$, $n = -72$; ciò darà dividendo per 5:

$$5^{11} u^{20} = \frac{123}{5} G' - 11F',$$

o sostituendo i valori di F' e G':

$$5^{11} u^{20} = f'^4 (123g' - 11f') + 10f'^2 g'^2 (123g' - 55f') + 5g'^5 (123g' - 275f').$$

i) Da questa equazione si vede che $3g' - f'$ è divisibile per 5; sia dunque $f' = 3g' - h'$, si avrà:

$$F' + G'\sqrt{5} = [-h' + g'(3 + \sqrt{5})]^5,$$

o facendo lo sviluppo

$$F' + G'\sqrt{5} = -h'^5 + 5h'^4 g'(3 + \sqrt{5}) - 20h'^3 g'^2 (7 + 3\sqrt{5}) +$$
$$+ 80h'^2 g'^3 (g + 4\sqrt{5}) - 40h' g'^4 (47 + 21\sqrt{5}) +$$
$$+ 16g'^5 (123 + 55\sqrt{5}).$$

Moltiplicando tutto per -11 e ponendo in luogo di $11\sqrt{5}$ il valore fittizio $-\frac{123}{5}$, si avrà $\frac{123}{5} G' - 11F'$, ovvero

$$5^{11} u^{20} = h'(11h'^4 - 42h'^3 g' + 64h'^2 g'^2 - 48h' g'^3 + 16g'^4).$$

Ora h' essendo un $N_1 5$ e g' non essendolo, questa equazione non può scindersi in due altre che così:

$$h' = 5^{11} u'^{20}$$
$$11h'^4 - 42h'^3 g' + 64h'^2 g'^2 - 48h' g'^3 + 16g'^4 = r''^{20},$$

ciò che suppone $u = u'r''$ ed r'' primo con $5u'$.

Questa ultima equazione può essere messa sotto la forma:

$$4r''^{10} = (8g'^2 - 12g'h' + 7h'^2)^2 - 5h'^4;$$

d'onde ne consegue che r'' deve essere della forma $p^2 - 5q^2$, e così r''^4; dunque si può fare $r''^4 = f''^2 - 5g''^2$, ciò darà $r''^2 = F''^2 - 5G''^2$. Ora sia $4 = \mu^2 - 5\nu^2$, μ e ν essendo degli $N_1 2 + 1$, si potrà supporre:

$$8g'^2 - 12\,g'h' + 7h'^2 + h'^2\sqrt{5} = (F'' + G''\sqrt{5})(\mu + \nu\sqrt{5});$$

ciò darà:

$$h'^2 = \mu G'' + \nu F''.$$

Ma poichè h' e G'' sono degli $N_1 5$ e che F'' non lo è, questa equazione non può sussistere a meno che ν non sia un $N_1 5$. E siccome si ha in generale:

$$\mu + \nu\sqrt{5} = (3 + \sqrt{5})(m + n\sqrt{5}),$$

ciò che dà:

$$\mu = 3m + 5n \quad , \quad \nu = m + 3n,$$

non si potrà avere che $m = 161$, $n = -72$; da cui risulta $\mu = 123$, $\nu = -55$, di maniera che si avrà h^{12} o $5^{22}u''^{40} = 123\,G'' - 55\,F''$.

k) Così ricadiamo sopra una equazione simile all'equazione già considerata $5^{12}u^{20} = 123G' - 55F'$; d'onde ne consegue che le stesse trasformazioni potranno essere continuate all'infinito; ciò che supporrà infiniti i valori primitivi delle indeterminate. Poi avendo fatte successivamente:

$$x = -5tr, \qquad t = ur', \qquad u = u'r'', \qquad u' = u''r''' \ldots \text{etc.},$$

si avrà

$$t = ur' = u'r'r'' = u''r'r''r''' = \ldots \text{etc.};$$

sicchè il numero dei fattori r aumenta continuamente nell'espressione di t.

Questi fattori sono determinati da equazioni, che si possono ridurre alla stessa forma, e cioè

$$r'^{10} = r^2 + 5rh^2 + 5h^4, \qquad r''^{20} = r'^4 + 5r'^2h'^2 + 5h'^4 \text{ etc.};$$

d'altra parte si ha

$$h = 5^6u^{10}, \qquad h' = 5^{11}u'^{20}, \qquad h'' = 5^{21}u''^{40} \text{ etc.};$$

sicchè la serie h, h', h'' ... etc. è rapidamente crescente, anche supponendo che i numeri u, u', u'' ... etc. abbiano 1 per limite. Dunque i numeri r, r', r'' ... etc. sempre maggiori di 1, non potranno essere minori di 2; e da ciò ne consegue che t diverrà infinito.

Dunque l'equazione $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ non ammette alcuna soluzione in N_1.

l) Ora è dimostrato che l'equazione $x^n + y^n + z^n = 0$ non può aver luogo per n, che è un $N_1 2 + 1$, delle forme $N_1 5$ e $N_1 3$. Rispetto agli altri casi del teorema di Fermat, non sembrano potersi dimostrare coi metodi impiegati per il 3° e 5° grado; si sa solamente che la soluzione, se ne avessimo una, non potrebbe essere data che per numeri grandissimi.

14. Nuova dimostrazione del teorema di Fermat nel caso del 3° grado.

a) Al solito supporremo che esistano tre N_1: x, y, z positivi o negativi, che soddisfano l'equazione:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0,$$

colla condizione che siano due a due primi fra loro, e quindi due sono degli $N_1 2 + 1$ ed il 3° è un $N_1 2$.

Ora vedremo quali consegnenze risultano da questa Hp; divideremo la dimostrazione in tre parti.

1ª. L'uno dei numeri x, y, z deve essere un $N_1 3$.

Infatti ogni numero non un $N_1 3$, positivo o negativo, è della forma $3m \pm 1$ ed il suo cubo $27m^3 \pm 27m^2 + 9m \pm 1$ è della forma $9n \pm 1$. Se dunque nessuno dei tre numeri x, y, z non è un $N_1 3$, la somma dei loro cubi $x^3 + y^3 + z^3$ dovrà essere di una delle quattro forme $9n \pm 1$, $9n \pm 3$ e non potrebbe per conseguenza ridursi a zero. Dunque uno dei tre numeri x, y, z è necessariamente un $N_1 3$.

2ª. Quella delle indeterminate che è un $N_1 2$, è ad un tempo un $N_1 3$.

Sia z un $N_1 2$ e sia $z = -2^m u$, u essendo un $N_1 2 + 1$; sicchè si ha l'equazione:

$$x^3 + y^3 = 2^{3m} u^3;$$

io dico che u è un $N_1 3$.

Infatti supponiamo, se è possibile, che u non sia un $N_1 3$; il 1° membro $x^3 + y^3$ è il prodotto di due fattori $x + y$ e $x^2 - xy + y^2$, il quale non può avere che 3 per divisore comune (vedi Oss. del n. 7); e poichè 3 non divide il 2° membro $2^{3m} u^3$, ne consegue che questi due fattori son primi fra loro. Il loro prodotto deve essere un cubo; se d'altra parte si osserva che $x^2 - xy + y^2$ è sempre un $N_1 2 + 1$, se ne concluderà che 2^{3m} deve essere fattore di $x + y$; così si dovrà porre:

$$x + y = 2^{3m} \alpha^3,$$
$$x^2 - xy + y^2 = \beta^3;$$

ciò che suppone $u = \alpha\beta$, β essendo un N_1 primo con α.

Ora se si mette la 2ª equazione sotto questa forma:

$$\beta^3 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2;$$

si vede che il 2° membro essendo della forma $p^2 + 3q^2$; il suo divisore β, che è un $N_1 2 + 1$, dovrà essere della stessa forma. Facendo dunque $\beta = f^2 + 3g^2$, poi

$$(f + g\sqrt{-3})^3 = F + G\sqrt{-3},$$

ciò che dà

$$F = f(f^2 - 9g^2)$$
$$G = 3g(f^2 - g^2),$$

si avrà

$$\beta^3 = F^2 + 3G^2;$$

sicchè si soddisferà generalmente all'equazione precedente facendo:

$$\frac{x+y}{2} = F, \qquad \frac{x-y}{2} = G;$$

ciò che darà:

$$x = f^3 + 3f^2 g - 9fg^2 - 3g^3,$$
$$y = f^3 - 3f^2 g - 9fg^2 + 3g^3.$$

Ora z essendo supposto non un $N_1 3$, bisognerà che uno dei numeri x ed y sia un $N_1 3$; ciò che esige che anche f sia un $N_1 3$. Ma allora i due numeri x ed y saranno divisibili per 3, come z; ciò che è contro l'Hp.

Dunque l'indeterminata z se è un $N_1 2$ sarà pure un $N_1 3$ e si dovrà fare in generale $z = -2^m . 3^n . u$, u essendo primo con 6; sicchè l'equazione proposta sarà sempre della forma $x^3 + y^3 = 2^{3m} . 3^{3n} . u^3$.

3ª. L'equazione $x^3 + y^3 = 2^{3m} \cdot 3^{3n} \cdot u^3$ è impossibile.

Infatti supponiamo per un momento che essa possa essere soddisfatta, senza che nessuna delle indeterminate sia nulla, i due fattori del 1º membro, cioè $x + y$ e $x^2 - xy + y^2$, hanno per divisor comune 3 e non una potenza più elevata di 3, come si è mostrato al n. 7; d'altra parte il 2º fattore è un $N_1 2 + 1$; sicchè la nostra equazione necessariamente si scinderà in altre due così:

$$x + y = 2^{3m} \cdot 3^{3n-1} \alpha^3$$
$$x^2 - xy + y^2 = 3\beta^3,$$

e si avrà ad un tempo $u = \alpha\beta$.

La 2ª di queste equazioni può scriversi così:

$$\beta^3 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2;$$

d'onde ne consegue che β è ancora della forma $p^2 + 3q^2$. Facendo adunque come sopra:

$$\beta = f^2 + 3g^2 \quad \text{e} \quad \beta^3 = F^2 + 3G^2,$$

si avrà l'equazione

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2 = F^2 + 3G^2;$$

a cui si soddisferà generalmente prendendo

$$\frac{x-y}{2} = F, \qquad \frac{x+y}{6} = G.$$

Quest'ultima, facendo le sostituzioni, dà

$$2^{3m-1} \cdot 3^{3n-3} \cdot \alpha^3 = g(f^2 - g^2).$$

In questa equazione, in cui $f^2 - g^2$ è un $N_1 2 + 1$, poichè $f^2 + 3g^2$ è pure un $N_1 2 + 1$, bisogna che g sia un $N_1 2^{3m-1}$; sia dunque

$$g = 2^{3m-1}A, \qquad f + g = B, \qquad f - g = C;$$

si avrà

$$(3^{n-1}\alpha)^3 = ABC.$$

Ora perchè il prodotto ABC è un cubo ed i fattori A, B, C sono due a due primi fra loro, bisogna che ciascuno di essi sia un cubo; così dovrà farsi

$$A = \lambda^3, \qquad B = \mu^3, \qquad C = \nu^3;$$

ciò che darà

$$f + g = \mu^3, \qquad f - g = \nu^3, \qquad g = 2^{3m-1} \cdot \lambda^3,$$

e ad un tempo $\lambda\mu\nu = 3^{n-1}\alpha$. Da cui si ha l'equazione:

$$\mu^3 - \nu^3 = 2g = 2^{3m}\lambda^3,$$

simile alla proposta; in cui bisogna osservare che i tre numeri λ, μ, ν devono contenere il fattore 3^{n-1}. Ora da quello che si è mostrato nella seconda parte, il termine $2^m\lambda$ già divisibile per 2, è necessariamente anche divisibile per 3; dunque bisogna fare $\lambda = 3^{n-1}\theta$, ciò che darà

$$\mu^3 - \nu^3 = (2^m \cdot 3^{n-1}\theta)^3.$$

Così dall'equazione $x^3 + y^3 = (2^m . 3^n u)^3$, in cui una delle indeterminate è un $N_1 3^n$, si deduce una equazione simile, ove la indeterminata corrispondente è un $N_1 3^{n-1}$. Continuando dunque queste trasformazioni tante volte, quante sono le unità di n, si perverrà ad un'ultima trasformata $x'^3 + y'^3 = z'^3$, nella quale nessuno dei numeri x', y', z' non sarà un $N_1 3$. Questa equazione è impossibile in virtù della prima parte; dunque l'equazione proposta $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ è similmente impossibile.

§ X.

Nota sulla impossibilità dell'equazione $x^5 + y^5 + z^5 = 0$.

1. In questa nota mi propongo di dare una dimostrazione semplice e breve della impossibilità di risolvere in N_1 l'equazione:

(1) $$x^5 + y^5 + z^5 = 0.$$

2. Nella (1) uno dei tre numeri x, y, z lo supponiamo sempre negativo e per semplicità li supponiamo due a due primi fra loro; perciò due di essi saranno della forma $N_1 2 + 1$ ed il terzo un $N_1 2$; e sia z il $N_1 2$; allora possiamo porre

(2) $$\begin{cases} x + y = 2p \\ x - y = 2q\,; \end{cases}$$

da cui si ha:

(3) $$\begin{cases} x = p + q \\ y = p - q. \end{cases}$$

Dalle (3) si vede che anche p e q son primi fra loro e l'uno di essi è un $N_1 2$ e l'altro un $N_1 2 + 1$.

Sostituendo nella (1) i valori dati dalle (3) si ha:

(4) $$2p\,[p^4 + 5q^2\,(q^2 + 2p^2)] + z^5 = 0.$$

3. Ora supponiamo che p sia un $N_1 2 + 1$; allora q è un $N_1 2$: ma anche $p^4 + 5q^2\,(q^2 + 2p^2)$ è un $N_1 2 + 1$; ma per ipotesi pure il prodotto

$$p\,[p^4 + 5q^2\,(q^2 + 2p^2)]$$

sarebbe un $N_1 2 + 1$; ma esso è uguale a $-z^5 : 2$, che è un $N_1 16$; dunque ne consegue che p non può essere un $N_1 2 + 1$; perciò p sarà un $N_1 2$, e quindi q sarà un $N_1 2 + 1$.

4. Ora possiamo porre

(5) $$\alpha^2 = q^2 + 2p^2\,;$$

dalla quale si vede che α è un $N_1 2 + 1$, ed è soddisfatta da:

(6) $$\begin{cases} p = 2ab, \\ q = 2a^2 - b^2, \\ \alpha = 2a^2 + b^2. \end{cases}$$

Allora la (4) prende la forma

$$2p\,[(p^2)^2 + 5\,(q\alpha)^2] + z^5 = 0. \tag{7}$$

Osservo che essendo p e q primi fra loro, ed essendo $\alpha^2 = q^2 + 2p^2$ e perciò α un $N_1 2 + 1$, ne consegue che p, q ed α sono primi due a due fra loro. Per potere poi stabilire quando anche $2p$ e $p^4 + 5\alpha^2 q^2$ siano primi fra loro, bisogna distinguere due casi.

5. 1° caso, p non è un $N_1 5$.

Allora $2p$ e $p^4 + 5\alpha^2 q^2$ son primi tra loro, ed affinchè il termine

$$2p\,[(p^2)^2 + 5\,(q\alpha)^2],$$

che comparisce nella equazione (7), sia una potenza quinta di un N_1, come lo è $-z^5$, a cui esso è uguale, è necessario e sufficiente che si abbia:

$$\begin{cases} 2p = s^5, \\ p^4 + 5\alpha^2 q^2 = r^5. \end{cases} \tag{8}$$

Ora faremo vedere che r è della forma $m^2 + 5n^2$; e perciò si potrà sempre porre:

$$p^2 + q\alpha\sqrt{-5} = (m + n\sqrt{-5})^5, \tag{9}$$

ove m ed n sono degli N_1 primi fra loro, essendolo p, q ed α. Sviluppando il 1° membro della (9) e poi eguagliando fra loro le parti reali e fra loro le parti immaginarie avremo:

$$\begin{cases} p^2 = m^5 - 50m^3n^2 + 125mn^4 = m\,(m^4 - 50m^2n^2 + 125n^4), \\ q\alpha = 5m^4n - 50m^2n^3 + 25n^5 = 5n\,(m^4 - 10m^2n^2 + 5n^4). \end{cases} \tag{10}$$

Da quest'ultima si vede che q od α è un $N_1 5$.

I valori dati per p^2 e $q\alpha$ dalle (10) insieme all'altro $r = m^2 + 5n^2$ soddisfano la 2ª dell'equazioni (8). Infatti facendovi la sostituzione abbiamo:

$$(m^5 - 50m^3n^2 + 125mn^4)^2 + 5\,(5m^4n - 50m^2n^3 + 25n^5)^2 = m^{10} + \\ + 25m^8n^2 + 250m^6n^4 + 1250m^4n^6 + 3125n^2m^8 + 3125n^{10} = (m^2 + 5n^2)^5.$$

Dunque è vero che r è della forma $m^2 + 5n^2$.

Anche qui bisogna distinguere due casi: 1° m non è un $N_1 5$; 2° m è un $N_1 5$.

1° caso, m non è un $N_1 5$.

Allora m ed $m^4 - 50m^2n^2 + 125n^4$ son primi fra loro, e quindi affinchè sia possibile di risolvere in N_1 l'equazione:

$$p^2 = m\,(m^4 - 50m^2n^2 + 125n^4),$$

è necessario che sia:

$$\begin{cases} m = t^2, \\ m^4 - 50m^2n^2 + 125n^4 = u^2. \end{cases} \tag{13}$$

Ora si sa (*) che quest'ultima equazione non si può risolvere in N_1. Dunque in questo caso non essendo possibile di risolvere in N_1 la 2ª delle (13), che è conseguenza della (1), ne viene anche che la (1) non si potrà risolvere in N_1.

(*) Vedi *Comptes rendus des sciences de l'Academie des sciences*, t. 9. — 1839. „Mémoire de Mathématique sur le dernier théorème de Fermat „ par M. Lamé etc.

2° caso, m è un $N_1 5$.

Allora dalle (10) ne viene che p ed α sono degli $N_1 5$; il che non può essere, essendo p, q ed α primi due a due fra loro. Dunque ecc.

6. 2° caso, p è un $N_1 5$.

Sapendosi che q od α è un $N_1 5$ e che p, q ed α sono primi due a due fra loro, ne consegue che p non può essere un $N_1 5$. Dunque ecc.

7. Da quanto precede risulta dimostrato che la equazione $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ non può essere risolta in N_1; e da ciò ne consegue che non possono essere risolte in N_1 le equazioni della forma:

$$x^n + y^n + z^n = 0,$$

ove n è un $N_1 5$.

8. A me pare che si possa dimostrare l'impossibilità di risolvere in N_1 la 2ª dell'equazioni (13) in questo modo:

L'equazione:

$$m^4 - 50m^2n^2 + 125n^4 = u^2 \tag{13'}$$

si può scrivere così:

$$(m^2 - 25n^2)^2 - (4n)^4 = u^2 + (12n^2)^2 + (10n^2)^2. \tag{14}$$

Ora si può sempre porre:

$$m^2 - 25n^2 = \beta^2, \tag{15}$$

nella quale basta fare:

$$\begin{cases} m = a^2 + b^2, \\ 5n = 2ab, \\ \beta = a^2 - b^2. \end{cases} \tag{16}$$

Di più si può sempre porre:

$$u^2 + (12n^2)^2 + (10n^2)^2 = \gamma^2; \tag{17}$$

nella quale basta porre:

$$\begin{Bmatrix} u = c^2 + d^2 - e^2 \\ 12n^2 = 2ce \\ 10n^2 = 2de \\ \gamma = c^2 + d^2 + e^2 \end{Bmatrix} \quad \text{od anche} \quad \begin{cases} u = 61c^2 - d^2, \\ n^2 = cd, \\ \gamma = 61c^2 + d^2; \end{cases} \tag{18}$$

e così la (13) assume la forma:

$$\beta^4 - (3n)^4 = \gamma^2,$$

la quale come si sa (Vedi § I e IV) non può essere soddisfatta in N_1.

§ XI.

Per maggiore intelligenza della memoria del Kummer (§ VII) consultare:

1°. Pei numeri Bernoulliani:

a) L'opera recente Saalschütz (*Vorl. über die Bern. Zahlen.* Berlin, 1893).

b) Glaischer (*Mess. of Math.*, 1876).

c) Seidel (*Müch. Ak.* 1877).

d) Radicke (*Die Recursionsformeln für die Bern und Eul. Zahlen.* Halle 1880).

e) Haussner (*Gött. Nach.*, 1893; *Zeitschrift. f. Math*).

2°. Pei numeri ideali del Kummer:

a) KUMMER " Zur Theorie der complexen Zahlen „ e " Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren „. Memorie 15 e 16 a pagg. 319 e 327 nel *Jornal* de CRELLE, Vol. 35. Berlin, 1847.

b) DIRICHLET (Acc. di Berlino, 1840, 1841, 1846).

c) DEDEKIND (*Ueber die Anzahlen der Ideal-Classen ecc.*, Braunschweig, 1877; *Ueber den Zusamm, rwischen der Theorie der Ideale* ecc. *Mem. di Göttingen*, t. XXIII; " Sur la th. des nombres alg. „ *Bull.* de DARBOUX, 1ª s., t. XI, e 2ª s., t. I, (1877).

d) FUCHS (*Crelle*, LXV).

e) SELLING (*Zeitsch. f. Math.* 1865).

f) ZOLOTAREFF *Liouville*, 1880).

g) Per una esposizione di tutta la teoria si può utilmente vedere l'ultima parte della 3ª edizione della *Teoria dei Numeri* di DIRICHLET-DEDEKIND tradotto in ital. dal *Faifofer*. Venezia 1881) ecc.

§ XII.

1°. Il Kummer oltre la memoria qui riportata al § VII, ha pubblicato le seguenti memorie, che hanno stretta attinenza coll'ultimo teorema di Fermat:

a) De æquatione: $x^{2\lambda} + y^{2\lambda} = z^{2\lambda}$ per numeros integros resolvenda. (Vedi *Journal de Crelle*, V, XVII, pp. 203-209, 1837).

b) Beweis des Fermatschen Zatzes der Unmöglichkit von $x^\lambda - y^\lambda = z^\lambda$ für eine ünendliche Anzahl Primzahlen λ. Berlin, Bericht, 1847; pp. 132, 139, 140, 141, 305, 319.

c) Théorème de Fermat et manuscrit Arabe. *Nouv. Ann. Math.* 1850, t. IV, pp. 386, 392.

2°. Il Legendre oltre le memorie dei §§ IV e IX ha pubblicato i seguenti lavori, che hanno pur essi stretta attinenza coll'ultimo teorema di Fermat:

A) Vedi *Essai sur la théorie des nombres,* second edition. Paris, 1808.

a) Quatrième partie.

Méthodes e recherches diverses. — § 1. Théoremès sur le puissances des nombres.

α) L'aire d'un triangle rectangle en nombres entiers ne pourrait être egale á un quarré.

β) La formule $x^4 + 2y^4$ ne peut être un quarré.

γ) Aucun nombre triangulaire, excepté 1, n'est égal à un biquarré, n'est égal à un cube.

δ) La somme ou la différence de deux cubes inegaux ne peut être double d'un cube.

B) Vedi " Mémoires de l'academie royale des sciences de l'institut de France „ année 1823, tome VI. Paris, 1827.

b) Recherches sur quelques objets d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat.

α) L'équation $x^3 + y^3 = 2^{3m} . 3^{3n} u^3$ est impossible.

β) De l'équation $x^3 + y^3 = 2^m z^3$.

γ) De l'équation $x^3 + y^3 = Az^3$.

δ) Théorèmes d'analyse.

Dott. DIONISIO GAMBIOLI.

Sul prodotto di due matrici rettangolari coniugate

1. Diremo *coniugate* due matrici rettangolari A e B, aventi rispettivamente m e p orizzontali ed n e q verticali ($m \leq n$, $p \leq q$), quando è soddisfatta la relazione

$$n - m = q - p \tag{1}$$

ed inoltre, supposto $n \leq q$, le verticali di A corrispondono ordinatamente alle verticali di B rispettivamente di rango $s_1, s_2, \ldots, s_n$, intendendo questi numeri disposti in ordine crescente.

In particolare due matrici *simili* sono coniugate, giacchè per esse è $m = p$ ed $n = q$ e quindi la (1) è soddisfatta ed inoltre si corrispondono le verticali d'ugual rango.

Se con α indichiamo uno qualunque dei determinanti di ordine m appartenenti alla matrice A e con β la matrice formata colle verticali di B che corrispondono a quelle che entrano in α, assieme alle $q - n$ verticali che non hanno le corrispondenti in A, è facile vedere che β resulterà una matrice quadrata. Infatti l'ordine di α è m, quindi in β entrano $m + q - n$ verticali, numero che, per la (1), è uguale a p, cioè al numero delle orizzontali. Converremo che tanto le orizzontali quanto le verticali che entrano a formare i determinanti α e β conservino in questi lo stesso ordine di successione che hanno nelle matrici A e B.

Due tali determinanti li diremo *omologhi* e chiameremo *prodotto* delle due matrici rettangolari coniugate A e B la somma dei determinanti di ordine m di A moltiplicati rispettivamente per i loro omologhi in B, e scriveremo

$$A \,.\, B = \Sigma \alpha \,.\, \beta. \tag{2}$$

Convenendo di indicare col medesimo numero (secondo indice) due verticali corrispondenti di due matrici coniugate, avremo per esempio

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{22} & a_{24} & a_{25} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{22} & a_{25} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{45} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \end{vmatrix}.$$

2. Il prodotto delle due matrici coniugate A e B può essere espresso anche mediante un unico determinante d'ordine p.

Siano infatti

$$\begin{vmatrix} a_{1s_1} \dots a_{1s_n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{ms_1} \dots a_{ms_n} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{1q} \\ \dots\dots \\ b_{p1} \dots b_{pq} \end{vmatrix}$$

le due matrici coniugate A e B e poniamo

$$c_{ir_k} = a_{ks_1} b_{is_1} + a_{ks_2} b_{is_2} + \dots + a_{ks_n} b_{is_n}, \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \dots, m \\ i = 1, 2, \dots, p \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Il determinante

$$\mathrm{P} = \begin{vmatrix} c_{1r_1}\, c_{1r_2} \dots c_{1r_m}\, b_{1r_{m+1}} \dots b_{1r_p} \\ c_{2r_1}\, c_{2r_2} \dots c_{2r_m}\, b_{2r_{m+1}} \dots b_{2r_p} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{pr_1}\, c_{pr_2} \dots c_{pr_m}\, b_{pr_{m+1}} \dots b_{pr_p} \end{vmatrix}$$

esprime, prescindendo dal segno, il prodotto delle matrici coniugate A e B.

Per ottenere esattamente detto prodotto basta permutare le verticali in modo che i secondi indici resultino disposti nell'ordine naturale.

Immaginando sostituite alle c le loro espressioni date dalla (3), possiamo decomporre il determinante P nella somma di determinanti del tipo

$$\begin{vmatrix} a_{1s_{j_1}} b_{1s_{j_1}} & a_{2s_{j_2}} b_{1s_{j_2}} \dots a_{ms_{j_m}} b_{1s_{j_m}} & b_{1r_{m+1}} \dots b_{1r_p} \\ a_{1s_{j_1}} b_{2s_{j_1}} & a_{2s_{j_1}} b_{2s_{j_2}} \dots a_{ms_{j_m}} b_{2s_{j_m}} & b_{2r_{m+1}} \dots b_{2r_p} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{1s_{j_1}} b_{ps_{j_1}} & a_{2s_{j_2}} b_{ps_{j_2}} \dots a_{ms_{j_m}} b_{ps_{j_m}} & b_{pr_{m+1}} \dots b_{pr_p} \end{vmatrix}$$

e quindi in termini della forma

$$a_{1s_{j_1}} a_{2s_{j_2}} \dots a_{ms_{j_m}} \begin{vmatrix} b_{1s_{j_1}} \dots b_{1s_{j_m}}\, b_{1r_{m+1}} \dots b_{1s_p} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{ps_{j_1}} \dots b_{ps_{j_m}}\, b_{pr_{m+1}} \dots b_{pr_p} \end{vmatrix} \tag{4}$$

in cui $j_1, j_2, \dots, j_m$ rappresentano una disposizione ad m ad m *senza ripetizione* degli n numeri $1, 2, \dots, n$. Facendo variare $j_1, j_2, \dots, j_m$ in tutti i modi possibili e sommando si otterrà il determinante P.

L'espressione (4) equivale evidentemente alla seguente:

$$(-1)^{\mu+\nu} a_{1s_{j_1}} a_{2s_{j_2}} \dots a_{ms_{j_m}} . \beta$$

in cui β rappresenta un determinante di ordine p appartenente alla matrice B, che si ottiene da quello che si trova nell'espressione (4) permutando opportunamente le verticali, μ indica il numero delle inversioni che presenta il gruppo $j_1, j_2, \dots, j_m$, considerato quale una permutazione degli m numeri che vi figurano, e ν il numero delle inversioni che nella permutazione $s_{j_1}, s_{j_2}, \dots, s_{j_m}, r_{m+1}, \dots, r_p$ le s formano colle r.

Permutando in tutti i modi possibili i *medesimi* indici $j_1, j_2, \dots, j_m$ otterremo $m!$ termini di P, la cui somma sarà

$$(5) \qquad (-1)^\nu \alpha . \beta,$$

essendo α il determinante della matrice A omologo al determinante β.

Applicando il medesimo procedimento a tutte le espressioni che si ottengono dalla (4) e che corrispondono ai sistemi di m valori diversi delle j, otterremo altre espressioni analoghe alla (5), nelle quali il valore di ν è sempre il medesimo; avremo quindi

$$\mathrm{P} = (-1)^\nu \Sigma\alpha . \beta$$

ossia, per la (2),

$$\mathrm{A} . \mathrm{B} = (-1)^\nu \mathrm{P}$$

come avevamo asserito.

Abbiamo per es.:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{22} & a_{24} & a_{25} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \end{vmatrix} = (-1)^8 \begin{vmatrix} c_{12} & c_{14} & b_{11} & b_{13} \\ c_{22} & c_{24} & b_{21} & b_{23} \\ c_{32} & c_{34} & b_{31} & b_{33} \\ c_{42} & c_{44} & b_{41} & b_{43} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12}b_{12} + a_{14}b_{14} + a_{15}b_{15} & b_{13} & a_{22}b_{12} + a_{24}b_{14} + a_{25}b_{15} \\ b_{21} & a_{12}b_{22} + a_{14}b_{24} + a_{15}b_{25} & b_{23} & a_{22}b_{22} + a_{24}b_{24} + a_{25}b_{25} \\ b_{31} & a_{12}b_{32} + a_{14}b_{34} + a_{15}b_{35} & b_{33} & a_{22}b_{32} + a_{24}b_{34} + a_{25}b_{35} \\ b_{41} & a_{12}b_{42} + a_{14}b_{44} + a_{15}b_{45} & b_{43} & a_{22}b_{42} + a_{24}b_{44} + a_{25}b_{45} \end{vmatrix}.$$

3. Ogni minore di P, in cui figurano elementi composti, si può esprimere mediante il prodotto di due matrici coniugate che si deducono assai facilmente dalle due matrici date A e B. Un tale minore è, a meno del segno, anche minore del determinante che si ottiene moltiplicando le due matrici coniugate A e B.

Supponiamo che si tratti d'un minore M d'ordine h, nel quale gli elementi della diagonale principale siano

$$c_{\varrho_1 r_{\sigma_1}}, \; c_{\varrho_2 r_{\sigma_2}}, \dots, c_{\varrho_\lambda r_{\sigma_\lambda}}, \; b_{\varrho_{\lambda+1} r_{\sigma_{\lambda+1}}}, \dots, b_{\varrho_h r_{\sigma_h}}.$$

È facile verificare che questo minore, salvo il segno, si otterrà moltiplicando le matrici coniugate A′, B′ che si deducono rispettivamente da A e B, sopprimendo nella prima tutte le orizzontali di rango differente da $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\lambda$ e nella seconda le orizzontali di rango differente da $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$ e fra le verticali, che non hanno la corrispondente in A, quelle il cui rango è diverso da $r_{\sigma_{\lambda+1}}, r_{\sigma_{\lambda+2}}, \dots, r_{\sigma_h}$.

Basterà poi disporre in M le verticali secondo l'ordine naturale per ottenere esattamente il prodotto delle due matrici coniugate A', B'.

Così, riferendoci all'esempio considerato nell'articolo precedente, abbiamo

$$\begin{vmatrix} b_{31} & a_{23}b_{32}+a_{24}b_{34}+a_{25}b_{35} \\ b_{41} & a_{22}b_{42}+a_{24}b_{44}+a_{25}b_{45} \end{vmatrix} = \left| a_{32}\, a_{34}\, a_{25} \right| \cdot \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{24} & b_{25} \\ b_{41} & b_{42} & b_{44} & b_{45} \end{vmatrix}.$$

4. Per mostrare un esempio in cui può intervenire utilmente la considerazione delle coppie di matrici rettangolari coniugate, proponiamoci il seguente problema:

Sia D *un determinante d'ordine* n *e da esso deduciamo il determinante* D_m *d'ordine* $\binom{n}{m}$, *i cui elementi siano i minori d'ordine* m *di* D, *disposti in modo che in una stessa orizzontale o verticale di* D_m *figurino tutti i minori ottenuti colle medesime orizzontali o verticali di* D *ed ordinati così che nella diagonale principale compariscano i minori principali d'ordine* m *del dato. Da un minore qualsivoglia d'ordine* h *di* D_m *deduciamo poi il determinante* $\delta^{(k)}$, *sostituendo agli elementi di* $h-k$ *orizzontali i loro complementi algebrici in* D.

Vogliamo esprimere il valore del determinante $\delta^{(k)}$ *mediante il primitivo* D *ed i suoi minori d'ordine* m.

Indichiamo con $\Delta^{(k)}$ il determinante che si ottiene da D_m sostituendo a tutti gli elementi appartenenti alle $\binom{n}{m}-k$ orizzontali, che non hanno alcun elemento in $\delta^{(k)}$, i loro complementi algebrici in D. È chiaro allora che $\delta^{(k)}$ è un minore d'ordine h di $\Delta^{(k)}$.

Sostituiamo in questo determinante l'unità a tutti gli elementi della diagonale principale, situati sulle orizzontali non appartenenti alla matrice che comprende il minore $\delta^{(k)}$, e lo zero a tutti gli altri elementi di queste stesse orizzontali; inoltre poniamo zero al posto degli elementi che $\Delta^{(k)}$ ha in comune con D_m e che non appartengono a $\delta^{(k)}$.

Con ciò otteniamo un determinante $\Delta_1^{(k)}$ equivalente a $(-1)^{r+s}\delta^{(k)}$, in cui r ed s indicano rispettivamente la somma dei numeri che esprimono il rango delle verticali e delle orizzontali che figurano in $\delta^{(k)}$.

Moltiplichiamo questo determinante per D_m, dopo aver praticato in entrambi il medesimo spostamento di orizzontali in modo che in $\Delta_1^{(k)}$ figurino per prime quelle orizzontali che concorrono alla formazione di $\delta^{(k)}$; evidentemente il valore del prodotto non subisce alcuna alterazione ed è quindi uguale a

$$(-1)^{r+s}\delta^{(k)}D_m.$$

Eseguendo la moltiplicazione per orizzontali e scambiando nel determinante prodotto le orizzontali colle verticali, si ottiene un determinante nel quale $h-k$ verticali hanno gli elementi nulli ad eccezione dell'elemento che si trova sulla diagonale principale e che resulta uguale a D.

È quindi facile dedurre che, sviluppando il determinante ottenuto per prodotti di minori contenuti in quelle $h-k$ verticali, si otterrà

$$H'H \,.\, D^{h-k},$$

dove H′ ed H sono due matrici rettangolari coniugate, di cui la prima è formata cogli elementi di D_m che figurano in $\delta^{(k)}$ e la seconda si ottiene sopprimendo in D_m tutte le orizzontali che contengono quegli elementi che in $\delta^{(k)}$ sono stati sostituiti coi loro complementi algebrici in D e disponendo in questa le orizzontali e le verticali in modo che la matrice comune alle prime k orizzontali ed alle prime h verticali sia identica ad H′.

Le due matrici ora menzionate sono coniugate perchè H′ contiene h verticali e k orizzontali, H contiene $\binom{n}{m}$ verticali ed $\binom{n}{m}-h+k$ orizzontali e quindi la relazione (1) è soddisfatta; in esse sono poi corrispondenti quelle verticali i cui elementi appartengono ad una medesima verticale di D_m (cioè le verticali d'ugual rango).

Possiamo quindi scrivere

$$(-1)^{r+s}\delta^{(k)}D_m = H'H \,.\, D^{h-k},$$

e poichè è noto (teorema di Sylvester) (*) che $D_m = D^{\binom{n-1}{m-1}}$, deduciamo infine

$$\delta^{(k)} = (-1)^{r+s} H'H \,.\, D^{h-k-\binom{n-1}{m-1}}. \tag{6}$$

Abbiamo così provato che

Un determinante $\delta^{(k)}$ *d'ordine* h, *dedotto da* D_m *nel modo detto, è uguale (in valore assoluto) alla potenza* $\left[h-k-\binom{n-1}{m-1}\right]^{ma}$ *del determinante primitivo* D, *moltiplicata per il prodotto di due matrici rettangolari coniugate, di cui una è formata cogli elementi di* D_m *che figurano in* $\delta^{(k)}$ *e l'altra s'ottiene sopprimendo in* D_m *quelle orizzontali che contengono gli elementi i cui complementi algebrici in* D *entrano in* $\delta^{(k)}$ *e disponendo in questa le orizzontali e le verticali in modo che le prime* k *orizzontali e le prime* h *verticali formino una matrice identica ad* H′. *In queste due matrici coniugate sono poi corrispondenti le verticali d'ugual rango.*

Se supponiamo $h=\binom{n}{m}$, $\delta^{(k)}$ diventa il determinante $\Delta^{(k)}$, prima considerato, e quindi, osservando che in tal caso abbiamo $r=s$, e che inoltre la matrice H′ diventa identica alla matrice H, dalla (6) otteniamo

$$\Delta^{(k)} = H^2 \,.\, D^{\binom{n-1}{m}-k}. \tag{7}$$

(*) E. PASCAL, *I determinanti*, § 22. Manuali Hoepli.

Resta così dimostrato che

Il determinante $\Delta^{(k)}$, che si deduce da D_m sostituendo agli elementi di $\binom{n}{m}-k$ orizzontali i loro complementi algebrici in D, è uguale al quadrato della matrice formata cogli elementi di D_m che figurano in $\Delta^{(k)}$, moltiplicato per la potenza $\left[\binom{n-1}{m}-k\right]^{ma}$ di D.

In particolare, per $m=1$, resulta $D_1 = D = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$; quindi $\delta^{(k)}$ è un determinante che si ottiene da un minore d'ordine h di D, sostituendo agli elementi di $h-k$ orizzontali i loro complementi algebrici in D, e $\Delta^{(k)}$ è un determinante che si deduce da D sostituendo agli elementi di $n-k$ orizzontali i loro complementi algebrici.

In tal caso abbiamo dunque, applicando le (6) e (7) e supponendo che in $\delta^{(k)}$ e $\Delta^{(k)}$ entrino gli elementi di D che appartengono alle orizzontali di rango $s_1, s_2, \ldots, s_k$,

$$\delta^{(k)} = (-1)^{r+s} \begin{vmatrix} a_{s_1 r_1} \ldots a_{s_1 r_h} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{s_k r_1} \ldots a_{s_k r_h} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{\sigma_1 r_1} & \ldots a_{\sigma_1 r_h} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{\sigma_{n-h+k} r_1} & \ldots a_{\sigma_{n-h+k} r_h} \end{vmatrix} . D^{h-k-1}$$

in cui i numeri $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-h+k}$ differiscono dai numeri che esprimono il rango delle orizzontali di D che contengono quegli elementi che in $\delta^{(k)}$ sono stati sostituiti coi loro complementi algebrici, e

$$\Delta^{(k)} = \begin{vmatrix} a_{s_1 1} \ldots a_{s_1 n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{s_k 1} \ldots a_{s_k n} \end{vmatrix}^2 . D^{n-k-1}.$$

Cuneo, dicembre 1900.

Dott. LUIGI CARLINI.

LA RISOLUZIONE COMPLETA DEL TETRAGONO PIANO

Dicesi *tetragono piano* il sistema di 4 punti e delle 6 congiungenti posti in un medesimo piano. In esso si distinguono i 6 *lati* concorrenti tre a tre nei 4 *vertici* ed i 6 *angoli principali* formati dalla loro mutua inclinazione.

I 12 elementi di misura per comodità di studio li supporremo sempre aggruppati nel modo seguente; tre lati formeranno il *triangolo* detto *di base* o la *base del tetragono* di cui a, b, c, sono i lati ed A, B, C, gli angoli opposti, gli altri tre lati saranno concorrenti nel quarto *vertice* D e li diremo a', b', c' e formano i tre angoli opposti α, β, γ.

Dalla geometria elementare e dalla trigonometria è noto come del triangolo, dati tre elementi, fra cui sia compreso almeno un lato, si possono determinare i tre incogniti mediante le tre relazioni

$$A + B + C = \pi, \tag{1}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}, \tag{2}$$

oppure

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \tag{3}$$

e l'analoga.

È pure noto come fra gli elementi lineari del tetragono piano esiste la relazione (*)

$$\begin{vmatrix} 0, & c^2, & b^2, & a'^2, & 1 \\ c^2, & 0, & a^2, & b'^2, & 1 \\ b^2, & a^2, & 0, & c'^2, & 1 \\ a'^2, & b'^2, & c'^2, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

In altro nostro lavoro tuttora inedito (**) abbiamo trovato esistere fra gli elementi lineari ed angolari del tetragono piano le relazioni seguenti:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi, \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned} a' &= \frac{bc}{q} \operatorname{sen}(\alpha - A) \\ b' &= \frac{ca}{q} \operatorname{sen}(\beta - B) \\ c' &= \frac{ab}{q} \operatorname{sen}(\gamma - C), \end{aligned}\right. \tag{6}$$

dove il valore di q è dato da una qualunque delle seguenti espressioni:

$$\left\{\begin{aligned} q^2 &= a^2 \operatorname{sen}^2 \beta + b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2ab \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos(\gamma - C) \\ q^2 &= b^2 \operatorname{sen}^2 \gamma + c^2 \operatorname{sen}^2 \beta + 2bc \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma \cos(\alpha - A) \\ q^2 &= c^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + a^2 \operatorname{sen}^2 \gamma + 2ca \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \alpha \cos(\beta - B). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

In altro lavoro abbiamo pure ottenuto le seguenti relazioni fra gli elementi del tetragono piano:

$$\left\{\begin{aligned} a' &= \frac{b \operatorname{sen} C}{k} \operatorname{sen}(\alpha - A) = \frac{c \operatorname{sen} B}{k} \operatorname{sen}(\alpha - A) \\ b' &= \frac{c \operatorname{sen} A}{k} \operatorname{sen}(\beta - B) = \frac{a \operatorname{sen} C}{k} \operatorname{sen}(\beta - B) \\ c' &= \frac{a \operatorname{sen} B}{k} \operatorname{sen}(\gamma - C) = \frac{b \operatorname{sen} A}{k} \operatorname{sen}(\gamma - C), \end{aligned}\right. \tag{8}$$

dove il valore di k è dato da una qualunque delle seguenti espressioni:

$$\left\{\begin{aligned} K^2 &= \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2(\beta - B) + \operatorname{sen}^2\beta \operatorname{sen}^2(\alpha - A) + 2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}(\alpha - A) \operatorname{sen}(\beta - B) \cos C \\ K^2 &= \operatorname{sen}^2\beta \operatorname{sen}^2(\gamma - C) + \operatorname{sen}^2\gamma \operatorname{sen}^2(\beta - B) + 2 \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}(\beta - B) \operatorname{sen}(\gamma - C) \cos R \\ K^2 &= \operatorname{sen}^2\gamma \operatorname{sen}^2(\alpha - A) + \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2(\gamma - C) + 2 \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\gamma - C) \operatorname{sen}(\alpha - A) \cos B \end{aligned}\right. \tag{9}$$

(*) *Periodico di Matematica*, 1886, LORIA, "Intorno ad alcune relazioni fra distanze" p. 88

(**) *Atti R. Accademia dei Lincei*, fasc. giugno 1899. G. DELITALA, "Formole definitive di risoluzione del problema di Pothenot".

Fra le due incognite ausiliarie q e K si ha quindi la relazione

$$\frac{q}{K} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}. \tag{10}$$

Dalle precedenti formule si deducono facilmente le seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{aa'}{bb'} &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha - A)}{\operatorname{sen}(\beta - B)} \\ \frac{bb'}{cc'} &= \frac{\operatorname{sen}(\beta - B)}{\operatorname{sen}(\gamma - C)} \\ \frac{cc'}{aa'} &= \frac{\operatorname{sen}(\gamma - C)}{\operatorname{sen}(\alpha - A)}; \end{aligned}\right. \tag{11}$$

e quindi la doppia eguaglianza

$$\frac{aa'}{\operatorname{sen}(\alpha - A)} = \frac{bb'}{\operatorname{sen}(\beta - B)} = \frac{cc'}{\operatorname{sen}(\gamma - C)} = \frac{2\Omega}{K}. \tag{12}$$

Inoltre dalle (1) e (5) si deduce:

$$(\alpha - A) + (\beta - B) + (\gamma - C) = \pi. \tag{13}$$

Si osserva che fra gli elementi del tetragono piano, oltre le tre relazioni del triangolo base esistono quattro relazioni distinte per es. le (5) e (6) oppure le (5) e (8); quindi dati cinque dei suoi elementi si possono in generale determinare gli altri sette incogniti.

È notevole l'analogia fra le formule di risoluzione del triangolo rettilineo e quelle del tetragono piano, inoltre i quattro casi di risoluzione del triangolo corrispondono ai quattro casi principali di risoluzione del tetragono.

Infatti nel triangolo sono dati:

1° Caso. — La base (lato) e due angoli (a, B, C).
2° „ „ „ un lato e un angolo opposto (a, b, B).
3° „ „ „ un lato e un angolo compreso (a, b, C).
4° „ „ „ e due lati (a, b, c).

Nel tetragono i dati sono:

1° Caso. — La base (triangolo) e due angoli (t, β, γ).
2° „ „ „ un lato e l'angolo opposto (t, b', β).
3° „ „ „ un lato e un angolo adiacente (t, b', γ).
4° „ „ „ e due lati (t, b', C').

Qualora i dati del problema fossero cinque lati, si potrebbe calcolare direttamente il sesto lato mediante la relazione (4), e quindi calcolare gli elementi angolari colle note formule di trigonometria.

Esaminiamo brevemente come l'uso delle nostre formule conduce alla risoluzione del tetragono piano nei quattro casi principali accennati:

1° Caso. — I dati sono: t (ossia tre elementi del triangolo basso) β e γ; e si devono trovare gli altri elementi incogniti del tetragono. Si ricava l'angolo α dalla (5); quindi si possono calcolare i tre lati a', b', c' applicando le formule (6), oppure la (8), previo il calcolo di q o di K.

2° Caso. — I dati sono: la base t, un lato b' e l'angolo opposto β. Si può far uso delle (6) e (7) oppure delle formule (8) e (9).

Dalla seconda delle formule (6) per es. si ricava:

$$q = \frac{ca}{b'} \operatorname{sen}(\beta - B);$$

che sostituito nella terza della (7) ci dà un'espressione che contiene le sole incognite angolari α e γ, e ricordando la (5) si possono queste determinare. Crediamo che il modo più semplice di risolvere l'equazione trigonometrica (7) sia il seguente: dalla (5) si deduce

$$\operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \gamma + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma \cos \beta;$$

si ha

$$q^2 = c^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + a^2 \operatorname{sen}^2 \gamma + 2ac \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma \cos(\beta - B);$$

quindi

$$\frac{q^2}{\operatorname{sen}^2 \beta} = \frac{cz^2 + a^2 + 2acz \cos(\beta - B)}{z^2 + 1 + 2z \cos \beta},$$

ponendo $z = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \gamma}$. Si ha così un'equazione di 2° grado completa rispetto a z, le cui radici diremo z_1 e z_2, ed il problema presenta in generale due soluzioni. (*)

Ricavati i valori degli angoli α e γ si ricade nel 1° Caso.

3° Caso. — I dati sono: la base t, un lato b' e un angolo adiacente γ.

Si osserva che nel triangolo DBA si conoscono due lati b', c e l'angolo, opposto al lato c, per cui colle note formule di trigonometria si determina l'angolo $\widehat{DAB}$, e quindi il lato a' del tetragono. Ciò fatto, della relazione $\frac{\operatorname{sen}(\alpha - A)}{\operatorname{sen}(\beta - B)} = \frac{aa'}{bb'}$ si ricava

$$\frac{\operatorname{sen}[(\gamma - C) + (\alpha - A)]}{\operatorname{sen}(\alpha - A)} = \frac{bb'}{aa'};$$

da cui si ottiene:

$$\cos(\gamma - C) + \operatorname{sen}(\gamma - C) \cot(\alpha - A) = \frac{bb'}{aa'}$$

dalla quale si ricava l'angolo α, poi si ricaverà l'angolo β.

4° Caso. — I dati sono la base t del tetragono e due lati b', c'.

Del triangolo DBC si conoscono i tre lati b', c', a; quindi colle formule di trigonometria si determina l'angolo α e si ricade così nel caso precedente.

Tralasciamo di esaminare i molti altri casi che si possono presentare nella risoluzione del tetragono piano, secondo le varie combinazioni dei dati dei suoi elementi, sembrando sufficiente gli esempi trattati.

Sassari, novembre 1900.

Prof. Giuseppe Delitala.

(*) Sarà: $\frac{\operatorname{sen}(\beta + \gamma)}{\operatorname{sen} \gamma} = z$ ossia: $\cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cot \gamma = z$ da cui si ricava γ.

PICCOLE NOTE

1°. Una formola per il calcolo della radice quadrata. — Si indichi con a un numero (positivo) maggiore dell'unità e con r la sua radice quadrata a meno di $\frac{1}{k}$ per difetto, sicchè si abbia

$$(1) \qquad \sqrt{a} = r + \varepsilon \quad \text{con} \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{k} \text{ e } k > 1.$$

Dalla (1) si trae $\varepsilon^2 + 2r\varepsilon + (r^2 - a) = 0$. Indicando con ε ed α le due radici di questa equazione in ε e con S_h la somma delle potenze simili $\varepsilon^h + \alpha^h$, si ha subito

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} - \alpha = \varepsilon^n \frac{\varepsilon - \alpha}{\varepsilon^n + \alpha^n}.$$

Supponendo n pari risulta

$$0 < \frac{\varepsilon - \alpha}{\varepsilon^n + \alpha_n} < \frac{\varepsilon - \alpha}{\alpha^n} < \frac{-2\alpha}{n\alpha} \leq 1.$$

Quindi si può scrivere

$$\frac{S_{n+1}}{S^n} - \alpha = \theta\varepsilon^n \quad \text{con} \quad 0 < \theta < 1.$$

Combinando questa equazione colla (1) e colla $\varepsilon + \alpha = S_1 = -2r$ si ricava

$$\sqrt{a} = -r - \frac{S_{n+1}}{S_n} + \theta\varepsilon^n.$$

Da questa si può ricavare una formola abbastanza pratica per calcolare la radice di un numero con grande approssimazione.

Come è noto la somma delle potenze n-sime delle radici dell'equazione

$$x^2 - px + q = 0$$

è data da

$$S_n = \Sigma (-1)^s \frac{n(n-s-1)\ldots(n-2s+1)}{\underline{|r}} p^{n-2s} q^s$$

Per ogni valore di n si può avere dalla (2) una formola atta al calcolo di $\sqrt{a}$ coll'approssimazione di $\frac{1}{k^n}$.

Avendo fatte parecchie applicazioni pratiche di questo metodo per calcolare la radice di un numero, mi è sembrato che la via migliore da seguire sia quella di usare, magari reiteratamente la formola che risulta dalla (2) per $n=2$, che è quella che abbiamo in vista. Si ha

$$\sqrt{a}=\frac{2ar}{r^2+a}+\theta\varepsilon^2. \text{ (*)}$$

Con questa formola, conoscendo $\sqrt{a}$ a meno di $\frac{1}{k}$, mediante una prima applicazione si calcola a meno di $\frac{1}{k^2}$; con una seconda applicazione a meno di $\frac{1}{k^4}$; con una terza a meno di $\frac{1}{k^8}$ ecc. Essa è applicabile anche nei casi comuni di estrazione di radice, quando si usino alcuni ovvi artifici per avere un'approssimazione minore dell'unità, ma ho creduto non inutile additarla specialmente per quei casi in cui occorra ottenere un'approssimazione molto grande. Se per es. una Tavola dà la radice dei numeri a meno di $\frac{1}{100000}$, con questa formula si ottiene abbastanza rapidamente l'approssimazione di $\frac{1}{10000000000}$.

In un prossimo articolo spero di poter estendere questo metodo almeno al calcolo della radice cubica.

Modena, 9 gennaio 1901.

Dott. ROBERTO VOLPI.

2°. Dimostrazione geometrica di una formula di analisi combinatoria. — Scopo della presente Nota è di dare una dimostrazione geometrica della formula:

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n}+\binom{n}{n}=2^n$$

che è una tra le numerosissime che intercedono tra i coefficienti binomiali.

A tale intento in un spazio a n dimensioni S_n si prendano n S_1 uscenti da un S_0 e tra di loro indipendenti, tali cioè che (k essendo uno qualunque dei numeri $2, 3, \ldots, n$), k di essi, qualunque, non appartengano mai ad un S_{k-1}. Avremo così una figura S, di cui l'S_0 e gli spazi di dimensione inferiore ad n ottenuti combinando questi S_1 uno ad uno, due a due, ... $n-1$ ad $n-1$, si diranno gli elementi. Da questa figura l'intero spazio rimarrà diviso in 2^n regioni corrispondenti ai 2^n ennaedri che si ottengono combinando in modo opportuno n ad n le $2n$ semirette uscenti da S_0: ed è facile riconoscere che da una regione qualsivoglia R_p si potrà sempre passare ad un'altra pure qualsivoglia R_q, attraversando un determinato elemento di S. Invero l'ennaedro corrispondente ad R_q è costituito da n raggi, i quali potranno essere tutti o in parte prolungamenti di quelli dell'ennaedro corrispondente ad R_p. Nel primo caso le due regioni saranno opposte e si potrà passare dall'una all'altra attraversando l'elemento S_0: nel secondo se sono in numero di h i raggi comuni ai due ennaedri, essi individueranno un S_h, attraversando il quale passeremo dall'R_p all'R_q. Si aggiunga inoltre che, partendo da una regione R_p ed attraversando un elemento S_h di S, si passa sempre ad un'altra determinata regione R_q: invero quest'ultima corrisponde all'ennaedro di cui h raggi sono comuni a quello corrispondente ad R_p e i rimanenti $n-h$ sono i prolungamenti di quelli non comuni.

(*) Questa formula in modo più laborioso può ricavarsi dalla celebre formula di Wronski, che dà lo sviluppo in frazione continua di $\left(1+\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Da tutto questo segue che fissata una delle 2^n regioni, rimane pure fissata una corrispondenza univoca e senza eccezione tra gli elementi di S e le rimanenti $2^n - 1$ regioni, e quindi il numero totale degli elementi di S sarà $2^n - 1$. Avremo cioè, essendo $\binom{n}{h}$ il numero degli S_h di S:

$$\sum_{0}^{n-1}{}_h \binom{n}{h} = 2^n - 1,$$

o anche

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

come si voleva.

Pisa, gennaio 1901.

Enrico Picciolı.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 228, 238, 240

528. *Sulla tangente in un punto* M *di una parabola di fuoco* F *si prendano due punti* M', M'', *tali che sia* MM' = MM'' = MF. *Il luogo di questi punti* M', M'' *è una cubica. Si trovi l'area compresa fra questa curva e il suo asintoto.*

E.-N. Barisien.

Correzione del prof. G. Mola alla risoluzione pubblicata nel n. precedente.

Non è esatto dire che la perpendicolare elevata dal fuoco F sull'asse della parabola sia l'asintoto della curva descritta dai punti M_1 e M_2. Essendo

$$FM_1 = \frac{ais^{\varphi}}{\operatorname{sen}\frac{2\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}},$$

e detto E il punto nell'asse proiezione di M_1, la grandezza del segmento FE è data da

$$FE = \frac{a\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{2\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}}.$$

Ma $\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\varphi = 4\operatorname{sen}^3\frac{\varphi}{3} - 3\operatorname{sen}\frac{\varphi}{3}$; onde sostituendo e riducendo, si otterrà

$$FE = \frac{a}{2\cos^2\frac{\varphi}{3}} - 2a.$$

Per valori decrescenti di φ da $\frac{\pi}{2}$ a zero, FE cresce negativamente, e acquista il massimo valore quando φ è zero, cioè quando M_1 si trova infinitamente lontano dall'asse. Allora il valore di FE è $-\frac{3a}{2}$. Dunque l'asintoto della curva è la perpendicolare elevata da questo punto E, pel quale $EF=\frac{3a}{2}$.

Trasportando l'origine in E, la curva M_1 viene tracciata dall'estremo del vettore EM_1. E si avrà l'equipollenza

$$EM_1=\frac{3a}{2}+\frac{ai\varepsilon^{\varphi}}{\cos\frac{\varphi}{3}\ \mathrm{sen}\,\frac{2\varphi}{3}};$$

e però, nella formola

$$\partial A=\frac{i}{4}\,(M_1 cj\,\partial M_1-\partial M_1\,cjM),$$

a M_1 e cjM_1 dobbiamo sostituire i valori.

$$M_1=\frac{3a}{2}+\frac{ai\varepsilon^{\varphi}}{\cos\frac{\varphi}{3}\ \mathrm{sen}\,\frac{2\varphi}{3}}\quad,\quad cjM=\frac{3a}{2}-\frac{ai\varepsilon-\varphi}{\cos\frac{\varphi}{3}\ \mathrm{sen}\,\frac{2\varphi}{3}},$$

ma immutati rimangano quelli di ∂M_1 e $cj\partial M_1$.

Si otterrà, dopo fatte tutte le riduzioni,

$$\partial A=\frac{a^2}{8}\left(\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{\partial\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{3}}-\frac{\partial\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{3}}\right),$$

che, integrata tra i limiti O e $\frac{\pi}{2}$, dà $A=\frac{\sqrt{3}\,a^2}{9}$; onde tutta l'area domandata è $\frac{2\sqrt{3}}{9}\,a^2$.

Essa è la decima parte dell'area innanzi trovata della superficie compresa tra la curva ed il segmento BB'.

Risoluzione del Prof. V. Retali.

L'equazione polare della parabola data riferita al fuoco è

$$\rho=\frac{a}{\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}}$$

e siccome l'angolo della tangente in M con l'asse polare è $\frac{\theta}{2}$, prendendo per assi l'asse della parabola e la perpendicolare nel fuoco F, le equazioni parametriche del luogo cercato sono

$$x=\frac{a}{\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}}\left(\cos\theta\pm\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$y=\frac{a}{\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{sen}\,\theta\pm\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)$$

nelle quali possiamo prendere i segni superiori; ponendovi $\theta = 4\varphi$ esse divengono

$$x = a(\cot\varphi \cot 2\varphi - 1)$$
$$y = a(\cot\varphi + \cot 2\varphi)$$

fra le quali eliminando φ, troviamo per equazione del luogo

$$(1) \qquad y^2(2x + 3a) = a(3x + 4a)^2:$$

una cubica della quarta classe crunodale, col nodo nel punto A $\left(-\frac{4a}{3}, 0\right)$; *tocca la parabola data nel punto all'infinito* (*) *ed ha per asintoto d'inflessione la retta* $x = -\frac{3a}{2}$. La (1) ponendovi $y = \pm ix$ diviene $(x + 2m)^3 = 0$ dunque: *le rette isotrope uscenti dal fuoco della parabola sono tangenti stazionarie della cubica e i flessi corrispondenti sono le intersezioni della parabola colla direttrice;* in altre parole: la retta dei flessi è la direttrice della parabola, il flesso reale è all'infinito e il fuoco della parabola è pure il (solo) fuoco della cubica.

Trasportando parallelamente gli assi coordinati nel nodo la (1) prende la forma

$$y^2(6x + a) = 27ax^2:$$

Le tangenti nel punto doppio A sono $y = \pm x 3\sqrt{3}$, la lunghezza della semiordinata focale $\overline{FB}$ è $4a : \sqrt{3}$ e l'area compresa fra l'arco AB della cubica, l'asse e l'ordinata $\overline{FB}$ è espressa da

$$(A) = 3\sqrt{3a}\int_0^{\frac{4a}{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{6x + a}} = \frac{10a^2\sqrt{3}}{9}$$

come trova, per altra via, il prof. Mola. La metà dell'area compresa fra la cubica e il suo asintoto è invece

$$(A)' = \int_0^{-\frac{a}{6}} \frac{x\,dx}{\sqrt{6x + a}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}.$$

Se teniamo conto del segno abbiamo

$$(A) + (A)' = a^2\sqrt{3}$$

ossia: *l'area della cubica compresa fra l'asintoto e l'ordinata focale è otto volte quella del triangolo equilatero di lato eguale alla distanza focale della parabola.*

538. *Si considerino tutti i triangoli* ABC, *di cui la* BC *è fissa e di cui il vertice* A *si sposta sopra una retta parallela a* BC. *Dimostrare che:*

1° *il luogo dell'ortocentro e quello del centro del circolo dei nove punti del triangolo* ABC *sono due parabole;*

2° *il luogo del punto di Lemoine del triangolo* ABC *è un'ellisse.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del Sig. Prof. Ugo Fornari.

1°. Il luogo degli ortocentri dei triangoli aventi un lato fisso e altezza costante rispetto a questo lato è una parabola.

(*) Secondo la classificazione del Cayley vi sono nove specie di cubiche crunodali: La cubica studiata in questa nota è una varietà della 4ª specie.

Sia $BC = \alpha$ il lato fisso, $AM = \delta$ l'altezza costante. Sia H una posizione dell'ortocentro, $BH = \rho$ il suo raggio vettore. Pongasi inoltre $BM = y\alpha$, $HM = x\delta$, $AC = \beta$. Si avrà

(1) $$\rho = y\alpha - x\delta, \qquad \beta = \delta + (1-y)\alpha,$$

donde

$$\int\rho\beta = y\int\alpha\delta - x\delta^2 + y(1-y)\alpha^2 - x(1-y\int\delta\alpha.$$

Ora per le condizioni del problema ($AM \perp BC$, $BH \perp AC$) si ha

$$\int\rho\beta = 0, \qquad \int\alpha\delta = 0,$$

e l'equazione scritta si riduce alla

$$0 = -x\delta^2 + y(1-y)\alpha^2,$$

d'onde

$$x = my(1-y),$$

posto

$$m = \frac{\alpha^2}{\delta^2}.$$

Si ha dunque, sostituendo nella (1),

$$\rho = y\alpha + my(y-1)\delta = y(\alpha - m\delta) + y^2 . m\delta$$

che è della forma

$$\rho = \xi t + \frac{1}{2}\eta t^2$$

e quindi rappresenta una parabola. (Cfr. Tait, *Traité des Quaternions*, pag. 28.)

2°. Il luogo dei centri dei circoli de' nove punti dei triangoli stessi è pure una parabola.

Mantenute le notazioni precedenti, si ha che il centro del circolo dei nove punti è il punto medio O della congiungente il punto medio P di BC col punto medio L di AH. Posto $BO = \rho'_1$ si avrà

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(\alpha + PL) = \frac{1}{2}(\alpha + PM + ML) = \frac{1}{2}\left[\alpha + \left(y - \frac{1}{2}\right)\alpha - \frac{1}{2}(1-x)\delta\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\alpha\left(y + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\delta + \frac{m}{2}y(1-y)\delta\right] = \frac{1}{2}\left[y\left(\alpha + \frac{m\delta}{2}\right) - y^2\frac{m\delta}{2} + \frac{1}{2}(\alpha - \delta)\right].$$

Se prendiamo come origine dei vettori del luogo cercato il centro F del circolo dei nove punti corrispondente al triangolo rettangolo A_1BC, essendo chiaramente

$$BF = \frac{1}{4}(\alpha - \delta),$$

l'equazione del luogo diventa

$$\rho = \frac{1}{2}\left[y\left(\alpha + \frac{m\delta}{2}\right) - y^2\frac{m\delta}{2}\right] = z\left(\alpha + \frac{m\delta}{2}\right) - z^2 . m\delta$$

che è ancora l'equazione di una parabola.

Si noti che nella prima parabola $\alpha - m\delta$ è un vettore tangente alla parabola nell'origine B e $m\delta$ è un vettore diametro, pure condotto per l'origine: analogamente nella seconda parabola, gli stessi elementi sono rappresentati da $\alpha + \frac{m\delta}{2}$ e da $m\delta$. (Cfr. Tait, *Traité des Quaternions*, pag. 29 e seg.)

540. *Risolvere le equazioni*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}=0$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}=0$$

M. Chini.

Generalizzazione e risoluzione del sig. Attilio Crepas, R. U. di Pavia.

Generalizzazione. — 1° Caso. Consideriamo l'equazione

$$\sum_1^s{}_r \frac{1}{x+a_{1r}}+\sum_1^s{}_r \frac{1}{x+a_{2r}}+\ldots+\sum_1^s{}_r \frac{1}{x+a_{mr}}=0. \tag{1}$$

del grado $ms-1$

Posto in generale

$$f_p(x)=(x+a_{p1})(x+a_{p2})\ldots(x+a_{ps}),$$

ed indicando con $f_p'(x)$ la derivata di $f_p(x)$ rispetto ad x, la (1) diviene

$$\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+\ldots+\frac{f'_m(x)}{f_m(x)}=0. \tag{2}$$

Supponiamo ora che si abbia identicamente

$$f_1'(x)=f_2'(x)=\ldots=f'_m(x),$$

ossia che, indicando in generale con cK la somma dei prodotti h ad h delle quantità a_{p1}, a_{p2}, … a_{ps} si abbia, qualunque sia p,

$$c_1=\mathrm{K}_1,\ c_2=\mathrm{K}_2,\ldots c_{s-1}=\mathrm{K}_{s-1}.$$

L'equazione (2) si scinde allora nelle due equazioni

$$f_1'(x)=0 \tag{3}$$

$$\frac{1}{f_1(x)}+\frac{1}{f_2(x)}+\ldots+\frac{1}{f_m(x)}=0. \tag{4}$$

La (3) è un'equazione del grado $s-1$, e però ammetterà $s-1$ radici che saranno reali e semplici, se reali e diseguali sono i valori a_{pr} per ogni valore di p.

Essendo poi, per l'ipotesi fatta,

$$f_p(x)=x_s+\mathrm{K}_1 x^{s-1}+\ldots+\mathrm{K}^{s-1}x+a_{p1}a_{p2}\ldots a_{ps},$$

ponendo

$$x^s+\mathrm{K}_1 x^{s-1}+\ldots+\mathrm{K}_{s-1}x=y, \tag{5}$$
$$a_{p1}a_{p2}\ldots a_{ps}=a_p,$$

l'equazione (4) diviene

$$\frac{1}{y+a_1}+\frac{1}{y+a_2}+\ldots+\frac{1}{y+a_m}=0,$$

equazione che ammette $m-1$ radici y, il valore di ciascuna delle quali, sostituito nella (5), dà luogo ad s valori della x.

Si hanno quindi $s(m-1)$ radici, che insieme alle $s-1$ date dall'equazione (3), danno $sm-1$ soluzioni dell'equazione (1), dunque: La risoluzione di un'equazione del grado $sm-1$ del tipo (1) si riduce alla risoluzione di $m+1$ equazioni, delle quali una del grado $s-1$, un'altra del grado $m-1$ e $m-1$ del grado s.

Se le quantità a_{pr} sono reali e diseguali, pure reali e diseguali saranno le radici dell'equazione.

In particolare per $m=2$, $s=2$, $a_{11}=0$, $a_{12}=-3$, $a_{21}=-1$, $a_{22}=-2$, si ha la prima delle equazioni proposte:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0,$$

ove si ha

$f_1(x)=x(x-3)$; $f_2(x)=(x-1)(x-2)$; $x^2-3x=y$; $f_1'(x)=f_2'(x)=2x-3$;

quindi risulta

$$2x-3=0, \quad \text{da cui} \quad x_1=\frac{3}{2},$$

e

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{y+2}=0, \quad \text{da cui} \quad y=-1,$$

e perciò dall'equazione

$$x^2-3x+1=0$$

si ottiene

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Similmente l'equazione

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}=0,$$

per la quale è $s=2$. $m=3$, $a_{11}=0$, $a_{12}=-5$, $a_{21}=-1$. $a_{22}=-4$, $a_{31}=-2$, $a_{32}=-3$, risolta dà per radici:

$$x_1=\frac{5}{2} \quad \text{e} \quad x_{2,3,4,5}=\frac{5\pm\sqrt{\dfrac{35\pm 8\sqrt{7}}{3}}}{2}.$$

2° Caso. — Consideriamo ora un'equazione del tipo

$$\text{(1)} \qquad \sum_1^s{}_r \frac{1}{x+a_{1r}}+\sum_1^s{}_r \frac{1}{x+a_{2r}}+\ldots+\sum_1^s{}_r \frac{1}{x+a_{m-1,r}}+\frac{1}{x+t}=0.$$

Tenendo le notazioni adoperate precedentemente, la (1) diviene

$$\text{(2)} \qquad \frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+\ldots+\frac{(x+t)^{s-1}}{(x+t)^s}=0.$$

Supposto ora che si abbia, qualunque sia p,

$$c_r = \binom{s}{r} t^r \quad \text{per} \quad r = 1, 2, \ldots s-1,$$

si ha

$$f_1'(x) = f_2'(x) = \ldots = s(x+t)^{s-1};$$

e quindi l'equazione (2) si scinde nell'equazioni

(3) $$(x+t)^{s-1} = 0$$

(4) $$\frac{s}{f_1(x)} + \frac{s}{f_2(x)} + \ldots \frac{1}{(x+t)^s} = 0.$$

La (3) per x dà $s-1$ valori eguali a $-t$, che non soddisfano all'equazione (1). La (4) poi, posto come nel 1° caso

(5) $$f_p(x) = y + a_p,$$

diviene

(6) $$\frac{s}{y+a_1} + \frac{s}{y+a_2} + \ldots + \frac{1}{y+t^s} = 0,$$

che risolta rispetto ad y dà $m-1$ valori, ciascuno dei quali sostituito alla y nella (5) dà luogo ad s valori di x. Si hanno quindi in tutto $s(m-1)$ radici. Onde la soluzione di un'equazione del tipo (1) dipende dalla soluzione di m equazioni, di cui una del grado $m-1$ e $m-1$ del grado s.

In particolare l'equazione

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} = 0,$$

risoluta col metodo indicato, dà

$$x_{1,2,3,4} = 2 \pm \sqrt{\frac{15 \pm \sqrt{145}}{10}}.$$

Altre risoluzioni dei proff. Ugo Fornari di Varese, G. Santorelli di Napoli, A. Massa e R. Volpi di Modena.

QUISTIONI PROPOSTE

541. Per uno dei punti di intersezione di due elissi uguali, concentriche ed aventi gli assi omologhi normali, si conducano le tangenti alle due elissi: queste determinano con un asse un triangolo la cui area è costante per ogni coppia di elissi uguali, concentriche, omofocali colle precedenti e similmente poste.

F. Sibirani.

542. Ad un circolo di diametro AB si conduca in A una tangente d. Da un punto variabile P di d si conduca la seconda tangente al circolo PC; le rette PB e AC si tagliano in un punto D. Si trovi geometricamente il luogo di questo punto.

A. DROZ-FARNY.

543. Due coniche poste in un medesimo piano diconsi mutuamente *associate* rispetto a due punti (poli di associazione) se ogni raggio condotto per l'uno o l'altro di essi le sega in quattro punti armonici. Ciò posto, determinare lo inviluppo dei piani che segano due superficie di second'ordine date secondo due coniche associate. Luogo dei poli di associazione.

544. Due coniche fra di loro bitangenti si dicono *coniugate* l'una all'altra (rispetto al loro polo di contatto) se ognuna di esse è polare reciproca di se stessa rispetto all'altra; ciò posto, si sechino due superficie di second'ordine date secondo due coniche coniugate e si determinino i poli di contatto.

545. I tre punti C, B, A sono in linea retta (B fra C ed A) e facciamo rotolare simultaneamente due cerchi eguali di diametro BA, in direzioni opposte, l'uno sul cerchio (C, B) (*) l'altro sulla circonferenza concava (C, A); il punto B del primo cerchio genera una epicicloide BE, ed il punto A del secondo una ipocicloide AI: dimostrare che la retta |EI| congiungente i due punti corrispondenti nelle due curve così tracciate, rimane sempre parallela al diametro del cerchio mobile quando è nella sua posizione iniziale.

546. Costruire la curva

$$\rho = a \cos\theta\,(\tan^2\theta + \mathrm{L}\tan\theta)\,.\cos\theta$$

e determinarne la pedale negativa rispetto al polo.

547. Costruire la curva

$$\rho = a \operatorname{sen}\frac{2\theta}{3}\sqrt{2\cos\frac{2\theta}{3}},$$

e determinarne la pedale negativa rispetto al polo.

548. Trovare la pedale rispetto al polo

a) della sviluppata della spirale d'Archimede ($r = a\theta$);

b) della sviluppata della spirale iperbolica ($r\theta = a$).

549. Sieno O il centro, V un vertice e P un punto arbitrario di una lemniscata (di Bernoulli), T la proiezione ortogonale di O sulla tangente nel punto P: dimostrare che $\widehat{VOT} = 3\widehat{VOP}$, e concluderne una costruzione semplice per tracciare la tangente in un punto della lemniscata.

(*) Di centro C e raggio $\overline{CA}$.

550. La pedale di un'elica cilindrica rispetto a un punto dell'asse del cilindro come polo, è una spirale posta sopra un'iperboloide di rotazione a una falda. Proiezione di questa spirale iperboloidica sopra un piano normale all'asse del cilindro.

551. Determinare la curva tale che il prodotto delle distanze di un suo punto arbitrario e della corrispondente tangente da un polo fisso abbia un valore costante.

552. Dati in un piano due punti fissi O, A, facciamo corrispondere a un punto variabile P le due intersezioni P_1, P_2 del raggio OP col cerchio di centro P e passante per A. Dimostrare che se P descrive una retta g, il luogo della coppia di punti P_1, P_2 è in generale una cubica G^3_6 della sesta classe, passante per O, tangente in A alla perpendicolare ad $|OA|$ e tangente nei punti ciclici alle rette isotrope uscenti da O. Costruire l'asintoto reale della cubica; i due rimanenti antitangenziali di O; le intersezioni di G^3_6 con g e le tangenti in questi punti. Esaminare i casi particolari seguenti:

a) la retta g passa per O o per $\underline{A}$;

b) è la mediatrice del segmento $\overline{OA}$;

c) è all'infinito.

553. Dati in un piano due punti fissi O, A, facciamo corrispondere a un punto variabile P_1 la intersezione P del raggio $|OP_1|$ colla mediatrice del segmento $\overline{AP_1}$. Dimostrare che se P_1 descrive una retta h, il luogo di P è, in generale, una cubica razionale con un punto doppio in O, passante pei due antipunti (*) di O, A ed avente un fuoco semplice in A. Determinare le tangenti nel punto doppio e le intersezioni della cubica colla retta h. Caso particolare in cui h passa per A.

V. Retali.

554. Per dimostrare le formole

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^m bx - \cos^m cx}{x}\, dx = \begin{cases} \log \dfrac{c}{b}, \text{ per } m \text{ dispari} \\ \left(1 - \dfrac{1\,.\,3\,.\,5 \ldots (m-1)}{2\,.\,4\,.\,6 \ldots m}\right) \log \dfrac{c}{b}, \text{ per } m \text{ pari.} \end{cases}$$

D. Besso.

(*) Le due coppie di rette isotrope uscenti da O e A si segano, oltre che nei punti ciclici, in due punti, imaginari coniugati, se O ed A son reali, denominati (Cayley) *antipunti* della coppia OA. Coppie di punti associati del sig. Darboux.

(V. R).

BIBLIOGRAFIA

S. PINCHERLE. — *Esercizi sulla Geometria Elementare* (pagg. 130 con 50 inc. Manuali Hoepli, 1897).

I. GHERSI. — *Metodi facili per risolvere i problemi di Geometria Elementare* (pagg. 190 con 126 inc. Manuali Hoepli, 1900).

La raccolta del ch. prof. Pincherle, come avverte egli nella prefazione, è complemento necessario agli altri due manuali *Geometria Pura* e *Geometria Metrica*. Questi, evidentemente, non hanno carattere di veri libri scolastici, almeno per l'insegnamento secondario; ma, compilati con parsimonia diligente, contengono soltanto le prime nozioni razionali di Geometria, per servire allo scopo della ricca collana dei *manuali Hoepli*, che è quello di rendere accessibili, a tutti, argomenti scientifici o letterari od in genere attinenti alla vita pratica. Così si spiega che in tale Raccolta del Pincherle si leggano molte definizioni, comuni ad ogni libro di Geometria Elementare, e che fra le 590 questioni proposte o risolute, vi sieno: almeno 123 proprietà e 25 problemi, necessariamente trattati in ogni testo anche molto elementare destinato a scuole secondarie; almeno 30 esercizi, i quali sono deduzioni immediate od applicazioni dirette e che in una scuola potrebbero essere proposti alla lavagna; ed invece circa 95 esercizi, che riguardano nozioni proprie soltanto dei corsi complementari di Geometria. (1)

Pertanto, non si può giudicare il volumetto con criteri didattici, i quali richiederebbero ciò, che l'A. non si è proposto; ossia, fra parecchie altre cose: designazione non dubbia dei corsi, ai quali la Raccolta è destinata; ordine diverso, almeno per alcune teorie e parecchie questioni, secondo il giudizio della più parte dei migliori trattatisti; (2) maggior ricchezza e maggior varietà di teoremi e di problemi adatti ad esercitare gli allievi di corsi iniziali o complementari, specialmente per le proprietà fondamentali; (3) preferenza alle questioni, che gli esperti dell'insegnamento secondario attestano più interessanti e più utili ai giovani, per analogia di procedimenti con altre questioni trattate e quindi per intuizione più rapida; razionale avviamento, nelle questioni meno semplici.

Ma, trattandosi di un libro non scritto per le scuole, è doveroso l'astenersi da qualunque esame d'indole didattica: non si può, dunque, fare altro che felicitarsi coll'attività non comune del ch. professore, la quale gli ha permesso, con

(1) Quadrangolo e quadrilatero completo (118-120); def. prec. il 279; omotetia e centri di similitudine (279-295, 480); assi radicali, potenze (306-314, 508-510); luoghi geometrici, massimi e minimi per superficie e perimetri di triangoli (321-341); poliedri regolari possibili (411-412); geometria sulla sfera e triangoli polari (434-438); centri di similitudine di due sfere (441); costruzioni di formole (463-471); massimi e minimi (473, 474, 555, 586-588); inversione (511, 516, 580-582); limite infinito (551).

(2) Per es.: dopo i poliedri, si parla di costruzioni elementari della Stereometria.

(3) Mancano o sono molto scarsi gli esempi specialmente per l'equivalenza e per i punti notevoli di un triangolo: la ragione addotta dall'A. nella pref. non giustifica questa insufficenza, se si tiene conto del numero esuberante delle questioni proprie di ogni sviluppo teorico anche elementare.

gli studi scientifici e le gravi cure dell'insegnamento universitario e di altri uffici scolastici, anche la produzione dei cinque *manualetti Hoepli* aventi carattere di volgarizzazione non scolastica delle Matematiche elementari.

Il titolo del Manuale del sig. ing. I. Ghersi non può essere accettato. Non esistono *metodi facili* o difficili per se stessi, ma metodi di più o meno *facile applicazione*, quando questa è possibile, o che rendono più o meno *facile la risoluzione:* un metodo riesce facile o difficile, secondo che è adatto o no alla questione, che si tratta; se là, dove la natura di un problema e l'esercizio non consigliano ad es. il metodo della similitudine, io m'incaponisco ad usarlo, troverò delle difficoltà nella risoluzione, e potrò forse giungere a questa con un'abilità dovuta in buona parte al lungo studio, ma che nessuno può nè esigere, nè insegnare. L'applicazione dell'Algebra alla Geometria, che l'A. colloca probabilmente fra i metodi cosidetti non facili, dacchè non ne fa parola, torna forse in molte questioni più difficile, per esprimermi secondo il sig. Ghersi, che il metodo dei luoghi geometrici o quello della similitudine?. Sono cose evidenti e notorie. Lo stesso A. incrimina (pag. 157) l'infelice titolo del suo lavoro.

In questo Manuale del Ghersi — non adattato punto, sotto alcun rapporto, all'altro del Pincherle — sono poi errati completamente il piano e tutta la condotta del libro, per l'evidente mancanza d'una concezione netta dello scopo del Manuale e forse anche per non sufficiente esperienza dell'insegnamento. Per ciò, oltrechè per i difetti intrinseci e gravi di sostanza e di forma che rileverò, il libro non ha le qualità più indispensabili, per essere accolto nelle nostre scuole, secondo il desiderio dell'A. (v. prefazione) e dell'Editore (v. listino d'accompagnamento).

Esso non può dirsi destinato agli allievi dei corsi iniziali di Geometria, quali sono il primo biennio degli Istituti Tecnici ed i Licei, per le seguenti ragioni:

1ª. Non solo si suppone che l'alunno abbia studiata tutta la Planimetria e non ignori Stereometria (pag. 96), ma anche che si sia esercitato molto sulla prima; poichè, a cominciare dal capitolo introduttorio " Dei luoghi geometrici ", si applicano indifferentemente tutte le teorie elementari planimetriche ed anzi si prediligono le questioni meno semplici [1] o piuttosto difficili [2] e si sfruttano proprietà non fondamentali, che sono vera materia di esercizi [3] e non sempre di esercizi adatti ai corsi iniziali. [4]

2ª. Sino dal principio, l'A. fa generalizzazioni non sempre ovvie, varianti nelle condizioni del problema e discussioni non sempre facili, talora anzi accennandole appena; [5] ed afferma analogie di risoluzione non sempre manifeste o non molto prossime. [6]

---

(1) I problemi 74-78, 80-81 ecc. di costruzioni di cerchi sono più semplici che 6, 8, 9 ecc. del capitolo primo; i problemi 82, 87, 102 di determinazione di punti e di rette sono più facili che gli analoghi 23, 26, 27, 29 ecc.; il problema 103 è più facile che gli altri 38-41.

(2) Problemi 26, 38-44, 50.

(3) Problemi 19, 60, 52.

(4) Problema 8.

(5) Problema 4 (oss.), 42, ecc. E non si sa spiegare come l'A., mentre si propone uno scopo determinato, quello, cioè, di ammaestrare all'esame della figura ed all'introduzione di linee ausiliarie, supponendo anzi che il lettore non abbia l'idea semplice di luogo (data soltanto a pag. 80), si preoccupi di generalizzazioni e di discussioni, anche accennandole appena come nel probl. 4: in poche righe (oss., pag. 35), egli afferma la generalizzazione ed una variante nelle condizioni del problema 26, per cui F. 1. C., ad es., dedica più numeri.

(6) Così, nell'oss. al problema 5: « ciò è tanto più male, inquantochè il probl. 5 è solo posto in dipendenza con altro, che segue.

3ª. Non è esposto il metodo di applicazione dell'Algebra e della Goniometria (semplice capitolo dell'Algebra) alla Geometria, richiesto dal carattere dell'insegnamento della Matematica negli Istituti Tecnici e prescritto dai recenti programmi anche per i Licei. [1]

4ª. Il libro non dà alcun esempio di problemi nè di Stereometria, nè di Trigonometria propriamente detta, che è un capitolo della Geometria Elementare prescritto pure per i Licei.

5ª. Vi si parla di coniche [2] e della possibilità che esse si presentino in problemi elementari, accennando, come a cosa nota, al problema della determinazione, con riga e compasso, dei punti d'incontro d'una conica con una retta ed all'altro delle tangenti ad una conica da un punto; mentre la teoria elementare delle coniche non costituisce oggetto di studio nei Licei e si dà soltanto elementarmente, colla debita misura, nella quarta classe della Sezione F. M. degli Istituti Tecnici.

Nè il Manuale può essere adatto ai corsi complementari di Geometria, quali sono i secondi bienni degli Istituti Tecnici, oltrechè per le ragioni 3ª e 4ª precedenti, anche per queste altre:

1ª. Per gli alunni, che hanno già appreso i fondamenti della Geometria elementare, e si sono abbastanza esercitati su di essi, non è necessaria, ma superflua o dannosa l'esposizione sistematica delle soluzioni; basta un indirizzo, più o meno spinto, a seconda delle difficoltà: dopo due o più anni di studio della Geometria, debbono pur sapere trattare almeno una questione semplice, tanto più se è avviata, ed intendere od intuire cose non difficili, senza che sieno loro indicati, col pericolo di disabituarli dal pensare, i passaggi più chiari e più agevoli.

2ª. Per gli stessi alunni, molte questioni ovvie del libro sono necessariamente note, dopo un primo studio razionale di proprietà geometriche e di esercizi intorno a queste: essi debbono conoscere già non solo l'uso delle figure ausiliarie, il completamento o la decomposizione delle figure, ma anche il metodo analitico e l'applicazione dei luoghi alla risoluzione di problemi non difficili. Nè, del resto, questo Manuale può loro giovare ad approfondire o chiarire metodi e teorie noti.

3ª. Manca l'esposizione di metodi interessanti, quali sono la simmetria, il metodo cosidetto del problema contrario, il movimento e l'inversione.

Oltre a tutto ciò, di qualunque scuola si tratti, il libro del Ghersi, anche indipendentemente dagli appunti che seguono, non può dirsi *scolastico* nel senso legittimo della parola: non può avere l'accesso nelle scuole per alcuna porta. Non sarà mai scolastico un libro, che contenga gli sviluppi di centinaia d'esercizi, tanto meno poi se questi sono trattati poco bene: gli alunni di qualunque corso razionale di Matematiche, al pari di quelli dei corsi complementari, dei quali si disse sopra, debbono imparare gradatamente a fare da sè, a vedere le cose prossime senza troppe indicazioni. Per conseguenza, chiariti metodi e teorie, presentati

---

(1) Si prestavano bene all'applicazione dell'Algebra alla Geometria i probl. 4, 10, 12, 25 ecc.: ed altri per l'applicazione della Goniometria alla Geometria, ossia come esercizi di Trigonometria propriamente detta: anzi, si poteva avere così il modo di raffrontare utilmente le soluzioni geometriche con quelle algebriche e trigonometriche, cosa più utile che il dare, di uno stesso esercizio, due o più soluzioni geometriche talora basate su proprietà estranee all'insegnamento elementare od infatto non differenti.

(2) Ellisse (144), parabola (70, 93, ecc.), iperbole (9 e 22 bis).

alcuni esempi come tipi di soluzioni, gli esercizi, che si propongono, dovranno sempre essere soltanto avviati, più o meno a seconda della difficoltà e del corso cui si destinano, e graduati in ordine progressivo di difficoltà: onde, una Raccolta destinata a corsi iniziali non può mai giovare a corsi complementari. Raccolte del genere di questa del Ghersi, con tutti gli esercizi sviluppati, non graduati, e non adattati con abilità pedagogica ad un certo grado d'insegnamento, entreranno sempre nelle scuole furtivamente, nelle mani degli alunni, che vogliono scansare la fatica del lavoro prescritto. È il difetto grave di molte Raccolte francesi, assolutamente antididattiche; alcune delle quali però sono pensate davvero e, fatta astrazione dal carattere di un libro scolastico, veramente pregevoli. Come mai non ha badato a ciò l'intelligente, accorto e benemerito editore Hoepli?

Con questa mancanza completa di adattabilità del libro del Ghersi a determinate scuole ed anzi in genere alle scuole, si possono spiegare in esso: la nessuna progressione di difficoltà nei problemi già rilevata e la deficienza di ordine; [1] la poca chiarezza e la poca precisione di tutte le generalità (pagg. 1-10, 75-79, 157) ed in special modo di quelle sul metodo analitico (pagg. 9, 10) e sull'applicazione dei luoghi geometrici (pagg. 91-92, 78-79), [2] là dove si richiedeva una sintesi lucida, vigorosa e rapida, per imprimere limpidamente i concetti fondamentali; la poca cura nell'applicare metodicamente agli esercizi e far risaltare da questi la verità delle cose dette nell'esposizione teorica dei metodi, allo scopo di chiarire e rafforzare quelle cose; [3] la preoccupazione di cercare, in principio, problemi

---

(1) In realtà non si capiscono le questioni facilissime 47, 48, 60, ecc. e le altre (necessariamente note all'alunno) 72, 73 ecc. dopo alcuni problemi, fra' primi, relativamente difficili. Non sono, certo, bene scelti i 65-66, per dare esempi elementari di ricerca di luoghi, tanto più che la risoluzione dei problemi seguenti è basata in generale sui luoghi fondamentali: non era poi necessario presentare i problemi meno facili 69-71 per spiegare il modo di applicare i luoghi alla risoluzione dei problemi, quando tale modo doveva poi risultare più che chiarito, almeno per casi elementari, dai problemi 27-125. Ed è molto strano questo fatto: si pone avanti la considerazione di *punti singolari* per determinare i luoghi geometrici, non già nei problemi di semplice determinazione di luoghi (62-67), ma proprio nel problema 68, primo degli esempi di applicazione dei luoghi: così, mentre si vuole fornire esempi per fare intendere l'utilità dei luoghi, se ne cerca uno, cui si deve applicare qualche luogo sconosciuto o certo non facile. Perchè mai non si suppone noto il luogo 64, che non manca in alcun trattato, mentre si ritengono noti i luoghi 6, 7, 12, 14, che non costituiscono materia di sviluppo teorico e sono veri esercizi? È poi molto male che, ad un dato punto, si rimandi a problemi, che *seguono*: in 4, si rimanda a 21; dopo il problema di *Castiglione* (40): si pone il caso particolare semplice 103: ecc. E ciò è ancor più male, perchè non sempre i rimandi sono precisi e determinati bene. Nel problema 8, discussione ed esame dei casi particolari sono frammisti alla risoluzione.

(2) Per spiegare ciò che io intendo con questa affermazione riguardo al metodo analitico, non posso che rimandare alle opere di Duhamel, Lacroix, Lamè, Serret, Daugo, Laisant ed alle sintesi fatte con maestria dai nostri buoni autori Sannia e D'Ovidio, De-Paolis, Veronese, Lazzeri e Bettazzi. È inesatto l'appellativo di *artifizio* (pag. 10) per l'introduzione di linee ausiliarie, poichè queste ed in generale la composizione e la decomposizione delle figure, almeno nei casi semplici adatti a scuole secondarie, riescono abbastanza naturali. Ma a pag. 29 l'A. trova troppo compromettente tale titolo e parla di *piccolo artifizio*. È fuori di luogo, in un libro elementare, l'accenno poco chiarito alla necessità generale di uno speciale *acume geometrico* (pag. 10), non necessario per problemi elementari propri di corsi delle scuole secondarie: vedi Laisant. *La mathématique*, pagg. 187-188. È inopportuna e non chiara l'osservazione che il metodo dei luoghi geometrici non è sempre di facile applicazione e conduce per via tortuosa (pag. 156); tale affermazione, del resto, è giustificata soltanto da quelle questioni, che sono intruse. Non abbastanza intelligibile per gli allievi la distinzione fra impossibilità assoluta e relativa (pag. 4), fra problemi *possibili nella loro essenza* (?) e quelli, che non lo sono; non chiara la distinzione di casi particolari e generali, a pag. 145.

(3) In generale, non è precisa e netta la trattazione analitica: non si addestra certo all'esame della figura ed al metodo analico lo studioso con la lettura di questo libro, che vorrebbe essere un manuale espositivo di metodi ed esempi della risoluzione dei problemi geometrici. Quando ci si propone lo scopo di ammaestrare i giovani, tutto dev'essere misurato, chiaro, preciso, graduale, perchè conduca al fine; epperciò, trattandosi di analisi, si deve avere anche cura di non affermare cosa alcuna per poi dimostrarla e di non condurre il lettore attraverso molti passaggi senza farne in-

meno comuni e meno facili, mentre molti dei più ovvii si sarebbero prestati meglio — per porre in evidenza lo studio e le cautele necessari alla pratica dell'esame della figura ed all'introduzione di linee ausiliarie — e, certo, dalla bontà dell'esposizione avrebbero acquistato aria di freschezza; il nessun accenno alle relazioni fra' problemi del libro e fra essi ed altri, che si suppongono noti; [1] la sproporzione, per difficoltà e per estensione, fra il primo capitolo introduttivo e gli altri tre di applicazioni ed esempi; insomma, la mancanza di criteri e metodo didattici, indispensabili in un libro " scritto per gli allievi delle nostre scuole secondarie e non per i dilettanti o per gli studenti delle scuole superiori „ (pag. 6).

Io non so intendere l'opportunità del capitolo primo. In questo — mentre il volumetto comprende 146 numeri di questioni — si risolvono più di 20 problemi, per presentare esempi d'esame della figura, d'introduzione di linee ausiliarie, di composizione e decomposizione delle figure, e poi si dànno oltre 41 questioni per esempi delle cosidette soluzioni con artificio; come se si potesse imparare, con lungo esercizio, a fare l'esame della figura senza bisogno di ricorrere a tali soluzioni con artificio e di applicare alcuno dei metodi esposti in seguito ed altri non indicati nel libro e come se, senza di questi, fosse possibile esercitarsi sulle soluzioni dette dall'A. con artifizio. [2] Ricorrervi tacitamente per 60 problemi è un po' troppo. E si vuole ammaestrare gli alunni nelle cose proprie d'ogni buon corso iniziale, quali sono l'esame della figura e l'introduzione di linee ausiliarie, supponendo in essi cognizioni ampie e complete di Planimetria e dei metodi di risoluzione e sveltezza sufficiente all'intelligenza dei problemi più difficili del libro, tanto da dire *superflui* rilievi interessanti; per potere poi sveltire gli stessi alunni, nei metodi chiamati *facili* dall'A. " i luoghi e la similitudine „, con esempi semplici

---

tendere a tempo la ragione: si devono fare rilievi di fatti e da questi dedurre conseguenze. Nel problema 3, soltanto dopo di aver determinato CDB, si dice che quest'angolo deve servire a costruire il triangolo CDB, mentre l'A. era in dovere di far subito rilevare che la costruzione del triangolo domandato poteva farsi dipendere da quella del triangolo CDB, del quale si conoscevano due lati e si poteva cercare d'esprimere un angolo coi dati: così, si ammaestra all'esame della figura. Nel problema 7, si afferma, in principio della soluzione, una proprietà, di cui si fa la dimostrazione, senza che il lettore sappia a che gioverà tale proprietà, la qual cosa gli viene detta in fine esponendogli la costruzione: questo non è certo esame della figura. Nel problema 38, si afferma che il triangolo ADE è isoscele, per poi dimostrarlo. Nel problema 35, che si prestava benissimo come esempio di analisi, l'A. conduce subito le perpendicolari e descrive il cerchio, invece di fare i rilievi. Nel problema di *Castiglione* (40), bellissimo esempio di *riduzione* e come tale presentato nella Raccolta di F. I. C (numeri 51-53), si sciupa subito tutta la bellezza della riduzione affermando " vediamo di introdurre nella fig. un elemento noto „ (pag. 52). Peggio ancora: qualche volta l'A. avvia il procedimento analitico, per ricredersi subito dando un'esposizione sintetica (49). Riguardo poi all'introduzione di linee ausiliarie, si può osservare che: alcune volte essa è meno propria di qualche altro metodo (in 28, si presentavano subito il metodo algebrico e quello della similitudine, piuttosto che le tre costruzioni non molto diverse dipendenti dall'ausiliaria EF); la soluzione di qualche problema del primo capitolo non è veramente conseguenza di linee ausiliarie condotte (nel 61, le linee ausiliarie non suggeriscono la soluzione; ma l'avere intuito questa come conseguenza di una proprietà ci fa usare quelle linee). Infine, nei primi due esempi di determinazione dei luoghi (62, 63), l'A. non si preoccupa di applicare bene e completamente uno dei due criteri esposti a pag. 79; ma lo fa in 64.

(1) Il 52 è un'applicazione immediata di un problema più semplice ed interessante, non esposto nel Manuale. Doveva in qualche modo essere rilevato che i problemi 10-15, 20-22, 144,... sono dello stesso tipo, perchè il procedimento risolutivo dipende dalla condizione comune della *somma data* e dal conseguente fatto di portare questa su di un lato.

(2) In 1, si applica tacitamente un luogo, per determinare C; in 3, lo stesso luogo per determinare A. Tale luogo e parecchi altri sono applicati nei problemi 5, 6, 26 (dato da F. I. C. come applicazione di luoghi nel n. 102), 51, ecc. Nei problemi 29, 30, l'A. si vale della simmetria. In 38, si indica un inviluppo. Si applica la similitudine in 25 (dato appunto da F. I. C. come applicazione della similitudine nel n. 211).

ed anche esposti nel più elementare dei trattati! Certo qualche Raccolta, ad esempio quella di F. I. C., premette ad una grossa mole di esercizi (abbastanza ordinati, almeno secondo un trattato) un capitolo introduttivo sui metodi di risoluzione, che contiene le più difficili, più interessanti e delicate questioni e può dirsi un libro a sè; ma quella Raccolta è fra' *livres du maître!* Non pare credibile che l'A. non sia stato colpito da tale difetto, molto grave in un libro, che egli voleva destinato ad allievi di scuole secondarie, sia pure dei corsi iniziali o dei complementari.

La mancanza di chiarezza e di precisione d'idee, (1) già rilevata per le generalità, si nota pur troppo anche in molti problemi, talora come conseguenza di un'esposizione difettosa e di una forma infelice; (2) non sono rare le espressioni e le indicazioni poco buone e non accettabili. (3) Qualche affermazione è pure errata. (4)

Lascia molto a desiderare la discussione, (5) la quale, per i criteri generali e le particolarità del procedimento, meritava certamente un capitolo a parte, almeno quanto gli argomenti del primo capitolo e certo molto più degli altri dell'Appendice, i quali ultimi necessariamente lo studioso ha già considerato, nei problemi precedenti del libro, come conseguenza immediata delle proprietà del capitolo primo. Non sarebbe sfuggita all'A. la convenienza del parallelo colla discussione completa

---

(1) Nel probl. 49, si parla di direzione data BE, mentre doveva dirsi: retta data BE. Nel probl. 63, si afferma senz'altro che il punto O appartiene al luogo, mentre per esso il rapporto delle distanze è 0/0. A pag. 98, riga 5, non si capisce tutto il periodo (senza verbo). Nel problema 16, doveva chiarirsi l'affermazione che la segante GH e le altre due FG, FH sono le massime condotte per i vertici. Nel problema 65, non si dice perchè le EF, FG si intersecano su CD e si applica una costruzione non fondamentale. A pag. 78, si parla in generale di *punti singolari* come utili per studiare i luoghi, senza dire che cosa sieno, mentre sarebbe stato preferibile che, volendo, si accennasse ad essi durante la risoluzione di qualche problema: anzi, a pag. 91 si accenna impropriamente a *posizioni* (?) d'un punto singolare (senza, del resto, averne dato un esempio); sicchè l'alunno, per determinare un luogo, dovrebbe pensare a punti, che non conosce. Rimane sempre a vedere se e quanto giovi, in un corso elementare, l'obbligo della considerazione di punti singolari per determinare i luoghi. Non si intende, a pag. XI della prefaz., l'accenno ai *sistemi* degli autori italiani ed alla sua *via opposta:* a qual sistema appartiene il pregevole volume di *Aicardi* sul triangolo?

(2) Nel probl. 3, è detto "dall'esame della figura relativa al problema supposto risolto risulta che portando AD = AB si ha....", mentre doveva dirsi "fatto AD = AB, dall'esame ecc.". A pag. 35, riga 1, è scritto: una *relazione* fra questa *lunghezza* ed il *triangolo*. Si usano lettere, senza dire che cosa rappresentino: ad es., C' nel probl. 52. Altri errori di forma: a pag. 32, riga 7, la proposizione "infatti oltre all'avere AB = BC la BM è perpendicolare..." non va, perchè il soggetto di prima (ora sottinteso) è *il triangolo*. Ma, per giudicare questo libro dal lato della forma, che non è l'ultimo requisito di un testo destinato ad alunni di scuole secondarie, basta leggere le righe 8-10 a pag. 92.

(3) Espressioni non accettabili: *triangoletto* (pag. 14, riga 17); *può ridursi* al seguente, invece di "è il seguente" (15, oss.); il *mezzo* di un segmento, invece del punto medio (pag. 28); triangolo *definitivo*, invece di domandato (pag. 50); individuato *perfettamente* (pag. 75, riga 15): ecc. Non è da approvarsi l'uso promiscuo delle maiuscole, per indicare segmenti, rette e punti.

(4) A pag. 29, è detto che I va all'infinito, nel qual caso del resto non si avrebbe indeterminazione: I diviene indeterminato, perchè l'intersezione di due rette allora coincidenti AD, MI; l'indeterminazione risulta dalla mancanza di una condizione. Si legge pure: la mediana BD darà la direzione del lato BC, invece di "la mediana BD dà il lato BC". A pag. 51, riga 13, è scritto "NP parallela a CD", mentre NP congiunge due parti noti N, P. A pag. 76, riga ultima, è detto "luoghi non soltanto di punti, ma anche di *rette*, che si chiamano *inviluppi*": I luoghi di rette sono superficie, mentre gli inviluppi sono luoghi di punti comuni alle posizioni successive della retta mobile.

(5) La discussione non è sempre esposta sistematicamente. Alcune volte, pare un esame di casi particolari o di qualche caso particolare (23), il che fa parte della discussione, ma non è tutta la discussione. Nel probl. 30, invece di discussione, si doveva scrivere *rilievo*, come fa F. I. C. (problema 1520); poichè vi si parla del numero delle soluzioni, non di possibilità del problema ed anzi non si nota neanche che, assumendo un punto arbitrario D, si è reso il problema determinato, mentre secondo l'enunciato ammetteva infinite soluzioni. Non sempre la condotta della discussione è d'accordo coi dati del problema: così, nel probl. 17, si vuole che la retta domandata *seghi i lati* AB, AC e poi si parla di possibilità d'incontri coi prolungamenti.

e sistematica dell'Algebra, se egli nei suoi Metodi non avesse dato l'ostracismo all'applicazione dell'Algebra alla Geometria.

Con più opportunità della citazione relativa a Lemoine per cose non inerenti al libro, l'A. avrebbe dovuto citare gli autori italiani, che lo hanno preceduto nell'esposizione dei metodi, e che la trattano bene ed abbastanza compiutamente.

L'edizione è bella; le figure nitide, secondo la regola dei manuali Hoepli: si notano soltanto pochi errori di stampa.

Ho letto molto attentamente questi due manuali del Pincherle e del Ghersi, spinto dal bisogno di consigliare alle mie classi un libro, che contenga, coll'esposizione dei metodi di risoluzione dei problemi geometrici, anche sufficienti ed adatti esempi, abilmente avviati con buoni criteri didattici o soltanto proposti, dei quali difetta il pregevole volumetto del ch. prof. Bettazzi. Disilluso malamente, ho dovuto confessare che i due predetti manuali, per l'esclusivismo e l'esilità del primo, per i gravi vizi del secondo e per la mancanza di legame fra essi, [1] non possono rappresentare, presi insieme, un libro di metodi e di esempi adattabile, in qualche modo, ad ogni trattato ed a scuole secondarie ed abbastanza buono. Perciò mi sono deciso a dare pubblicità a questi cenni, per il dovere di attestare, fuori d'Italia, stante la meritata fama di cui gode l'Editore, che libri del genere de' Metodi del Ghersi non sono accetti nelle scuole italiane, nelle quali la Matematica è insegnata con coscienza e con serietà di criteri didattici.

Mi auguro di poter presto tributare meritate lodi, per altro libro di Matematica, al sig. I. Ghersi, che so autore di apprezzati Manuali sul *ciclismo*, su *argomenti industriali* e su *questioni casalinghe*.

S. Ortu Carboni.

Annuaire pour l'an 1901 publié par le Bureau des longitudes. — Paris. Gauthier-Villars.

Il *Bureau des longitudes* creato dalla Convenzione nell'anno 1795 pubblica ogni anno questo annuario ricco di notizie di ogni genere.

Quello per l'anno 1901 oltre alle consuete notizie sul calendario, alle tavole astronomiche, di pesi e misure, di monete, di ammortamento e interesse, a importanti note geografiche e statistiche, ecc., contiene i seguenti articoli:

Cornu. — *Il trasporto della forza.*

Poincaré. — *Rapporto all'Accademia sul progetto di revisione dell'arco di meridiano di Quito.*

Lacroy. — *Notizia sulla conferenza internazionale tenuta all'osservatorio di Parigi nel luglio 1900.*

Bassot. — *Notizia storica sulla fondazione del sistema metrico.*

---

[1] Il *Pincherle*, non a torto, applica senza reticenze i luoghi geometrici sino dal probl. 19, cioè appena cominciato lo studio della retta. Il *Ghersi* ritiene *sbagliato* anche *il sistema* del *Pincherle*, che dà pochissimi esempi risoluti interamente e propone la maggior parte delle questioni, suggerendo al più qualche schiarimento od un piccolo indirizzo.

Bouquet de La Grye. — *Nota sulla XIII conferenza dell'Associazione internazionale geodesia tenuta a Parigi dal 25 sett. al 6 ott. sotto la presidenza del sig Faye.*

Janssen. — *Nota sui lavori all'osservatorio del Monte Bianco nel 1900.*

— — *I progressi dell'areonautica.* Discorso pronunciato il 15 sett. 1900 all'apertura tenuto a Meudon.

K.

DA GIORNALI E RIVISTE

Bulletin de sciences math. et phisyques élém. fondé par *B. Niewenglowski.*

Anno V, Fasc. 11° (1 marzo 1900). — *L. G.*, Sulle dimostrazioni dei teoremi. — *Bonnefoy,* Osservazioni sulle equazioni irrazionali (si occupa della discussione delle soluzioni di equazioni con radicali quadratici). — *E. Rebussel,* Proiezione della normale a una conica sul raggio vettore. (Prova che detta proiezione è terza proporzionale dopo i due semiassi.) — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 12° (15 marzo 1900). — *L. G.*, Sulla nozione di senso. (Osserva che la nozione di *senso* degli angoli è una nozione sperimentale. Per evitarla, accenna alla teoria delle equipollenze e dei vettori.) — *P. Leverrier,* Sull'inversione d'un sistema di due circoli. — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 13° (1 aprile 1900). — *L. G.*, Geometria metrica. (Espone la teoria dei rapporti e proporzioni indipendentemente dai numeri, definendo le operazioni sui rapporti in modo da poterli adoperare come i numeri.) Questa teoria si appoggia su due noti teoremi, uno dei quali è il seguente: " Se sui lati di un angolo O si " prendono rispettivamente le coppie di segmenti $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ e $\overline{OA'}$, $\overline{A'B'}$ in modo che " le rette AA', BB' sieno parallele, esse rimarranno parallele, comunque varii l'an" golo O ". Per dimostrarlo il prof. Gérard si è servito della stereometria; ma dopo aver notato che *Hilbert* ne fa a meno, perchè considera soltanto l'angolo retto, l'A. propone anche una dimostrazione planimetrica.) — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 20° (15 luglio 1900). — *E. N. Barisien,* Su un problema di ricreazione geometrica. — *G. De Rocquigny-Adanson,* Sulle progressioni aritmetiche. — Questioni proposte. — Questioni risolute. — Bibliografia (si parla di opere di *E. Bagnoli* e di *C. Burali-Forti*).

Anno VI, Fasc. 1° (1 ottobre 1900). — *E. Rebuffel* e *L. Gerard,* Sul teorema di Poncelet. (Tratta dei circoli cofasciali. Rende rigorosa la dimostrazione di Harz coll'introduzione dei segni: e la estende alle coniche.) — *A. Droz-Farny,* Nota d'aritmetica sullo sconto. (Se A è il capitale ed E e E' rispettivamente lo sconto in fuori e lo sconto in dentro per un tempo *t*, trova la relazione: $\frac{1}{A}+\frac{1}{E}=\frac{1}{E'}$, di cui dà un' interpetrazione geometrica.) — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 2° (15 ottobre 1900). — *M. Néollier,* Volume del tetraedro. (Servendosi della trigonometria, trova la nota formula del volume in funzione delle lunghezze degli spigoli.) — *G. De Rocquigny-Adanson,* Sulle progressioni aritmetiche. (Considera le proprietà di un quadro formato da file di numeri in progressioni aritm. tutte col primo termine 1, e aventi per ragioni numeri pari 2, 4, 6 ecc.) — *M. G. Fontené,* Sulle altezze di un tetraedro. (Dimostra alcuni teoremi di Steiner, di Joachimstal, di Painvin, ecc. e riferendosi a una questione del Concorso generale di mat. elem. del 1897 fa alcune interessanti osservazioni.) — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 3° (1 novembre 1900). — *M. G. Fontené,* Sulle altezze di un tetraedro (cont.) — *L. G.,* Problema della carta. (Discussione completa del problema di Pothenot.) — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 4° (1 novembre 1900). — *L. G.,* Equazioni di primo grado. (Prova che dato un sistema di n equazioni con n incognite, quando si sia trovato con qualunque metodo un sistema di n valori per queste, esso costituirà una soluzione del sistema dato, purchè non si sieno eseguite che certe operazioni.) — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 5° (1 dicembre 1900). — Note e corrispondenza. (*Barisien* si occupa delle mediane di un triangolo. *Plakowo* propone la dimostrazione diretta del teorema: " Le perpendicolari costruite dai punti medi dei lati del triangolo ortico d'un " triangolo dato ai lati di questo, concorrono in un medesimo punto „. *L. G.* dimostra i teoremi di Poncelet relativi all'ellisse e all' iperbole. *Rebuffel* comunica alcune identità per lo studio delle variazioni del polinomio di terzo grado.) — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 6° (15 dicembre 1900). — *E. Rebuffel,* Teorema sulle bisettrici di un triangolo. (Due dimostrazioni elementarissime del teorema: " In un triangolo al " maggior angolo corrisponde la minor bisettrice „.) — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 7° (1 gennaio 1901). — *E. Rebuffel,* Nota sulla geometria del circolo. (Osservazioni sulla potenza d'un punto rispetto ad un circolo.) — *L. G.,* Teorema di Poncelet, e quadrilatero circoscrittibile (v. fasc. 5°). — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute. — Bibliografia. (Si parla della *Storia delle matematiche* di J. Boyer.)

Journal de mathém. élém. publié par *H. Vuibert.*

Anno XXIV, fasc. 12° (15 marzo 1900). — *A. Goulard,* Teoria elementare dei polinomi interi. (Dimostra il noto principio d'identità di due polinomi interi.)

Fasc. 13° e 14° (1 e 15 aprile 1900). — *M. Veyssière,* Studio della frazione razionale di secondo grado $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$. (È uno studio elementare e completo di questa funzione, delle sue variazioni, de' suoi massimi e minimi ecc. ecc.).

Fasc. 15° (1 maggio 1900). — *C. Bioche,* Nota sull'equilibrio d'una carrucola. (Corregge il comune ragionamento che si fa per stabilire le condizioni d'equilibrio.)

Fasc. 16° (15 maggio 1900). — *G. Rech,* Sul volume della piramide.

Fasc. 20° (15 luglio 1900). — *G. Fleury,* Studio delle variazioni della funzione $\frac{a'x^2 + b'x + c'}{ax^2 + bx + c}$.

Anno XXV, **fasc.** 2° (15 ottobre 1900). — *Ch. Bioche,* Su certe equazioni di quarto grado. (Fa notare la *ragione* per cui l'equazioni biquadratica e reciproca di prima e seconda specie si risolvono con equazioni di secondo grado, e le considera come casi particolari di uno più generale.)

Fasc. 4° (15 novembre 1900). — *A. Goulard,* Note sulle equazioni razionali. (Trova la condizione necessaria, ma non sufficente, affinchè l'equazione della forma $\Sigma \frac{f_r(x)}{\varphi_r(x)} = 0$ ammetta la soluzione $x = a$, che annulla uno dei denominatori φ.)

Fasc. 6° (15 dicembre 1900). — *L. Tripard,* Nonsensi da evitare nelle operazioni sulle grandezze. (Riporta dimostrazioni comuni, dove è confusa la grandezza col numero che la misura.)

Fasc. 7° (1 gennaio 1901). — *I. Monsallut,* Nota su un teorema di Geometria. (Dimostra il teorema di Ceva, indipendentemente dal teorema di Menelao.)

In questi e negli altri numeri, molti esercizi e problemi.

E. Nannei.

Nouvelles Annales de Math. par M. M. *C. A. Laisant* et *X. Antomari;* Paris, Gautier-Villars, éditeur.

Serie III, T. XIX, fasc. 1° (gennaio 1900). — Risultato del secondo Concorso delle N. A. pel 1899. (Il premio è stato assegnato ai sigg. *Duporcq* e *Gallucci*). — Riassunto delle principali formole delle funzioni ellittiche. — *Ed. Collignon,* Problemi sul metodo inverso delle tangenti. — *M. Efimov,* Le Serie nella Pangeometria. — Certificati di Studi superiori delle Fac. di Sc. sessione di luglio 1899 (*Chlermont, Grenoble, Lilla, Marsiglia*). — Risoluz. di quistioni (*Ripert*). — Quistioni proposte (1833).

Fasc. 2° (febbraio 1900). — Sulle equazioni fondamentali della teoria della superficie, riferite a due triedri birettangoli supplementari mobili. — *M. Bauer,* Osservazioni sulla teoria dei Gruppi finiti (l'A. generalizza alcuni teoremi del sig. Frobenius sul numero di certi sotto-gruppi). — *Lagrange,* Sulle cubiche strofoidali (l'A. chiama strofoidali quelle cubiche circolari per le quali i punti ciclici sono una coppia di punti coniugati: esse formano la rete del piano semplice corrispondente alle rette del piano doppio in una certa trasformazione doppia del terz'ordine e genere uno, (*) non considerata dal sig. Lagrange). — Certificati di

(*) Dati in un piano due punti fissi O ed A facciamo corrispondere a un punto P, i due punti P_1, P_2 intersezioni della retta |OP| col cerchio di centro P e passante per A: quando P descrive una curva Σ il luogo dei due punti P_1 P_2 è un'altra curva Σ' chiamata *strofoidale* di Σ rispetto ai poli O, A. Assumendo OA per asse dell x, O per origine delle coordinate rettangolari, se (x, y) son le coordinate di P, le formole della trasformazione (doppia, del terz'ordine e genere uno) sono, ponendo per brevità $\Omega = [(x-a)^2 + y^2](x^2 + y^2)$ ed $\overline{OA} = a$,

$$x : y : 1 = \xi(\xi^2 + \eta^2 \pm \sqrt{\Omega}) : \eta(\xi^2 + \eta^2 \pm \sqrt{\Omega}) : \xi^2 + \eta^2$$
$$\xi : \eta : 1 = x(x^2 + y^2 - a^2) : y(x^2 + y^2 - a^2) : 2(x^2 + y^2 - ax).$$

La *curva limite* $\Omega = 0$ si spezza nelle due coppie di rette isotrope uscenti da O e da A: i sette punti fondamentali (del piano semplice) sono: O, due riuniti in A sulla perpendicolare ad |OA|, e le due coppie riunite nei punti ciclici sulle rette isotrope uscenti da O. Le rette del piano si trasformano nelle cubiche dette strofoidali dal sig. *Lagrange;* in particolare ai raggi del fascio O corrispondono le strofoidi della rete. Nella trasformazione inversa le rette del piano dànno cubiche razionali con un punto doppio in O ecc. La *trasformazione congiunta* è la inversione considerata nelle mie quistioni 422, 423, 424 (*Period.*, an. 1898), 463, 464, 466 467 (ibid., an. 1899) e altrove.

studi sup. sessione di luglio 1899, (Poitiers, Rennes, Tolosa). — *Rouché*, Recensione del "*Traité de Nomographie*" del sig *d'Ocagne*. — Risol. di quistioni; 360, 448, 495 (*un abbonato*), 496 (*G. Fontené*), 1788 (*V. Retali*). — Quistioni proposte (1834-1836).

Mathésis, recueil mathématique etc., par M. M. *P. Mansion* et *J. Neuberg*, Gand, A. Hoste, éditeur.

Serie II, tomo X fasc. 1° (gennaio 1900). — *E. Cesàro*, Osservazioni sopra alcune quistioni di Geometria intrinseca. — *A. Droz-Farny*, Sopra tre parabole associate a un triangolo. — Note matematiche (*Stuyvaert, Neuberg, Orlando, A. Gob*). — Risol. geometrica della quistione di Geom. analitica posto al concorso generale del 1899 (*). — Risoluzioni delle quistioni proposte 889, 939 (*Neuberg*), 1096 (*Hacken, Jerabek*), 1106 (*Emmerich*). — Quistioni di esame. — Quistioni proposte (1251-1256).

Fasc. 2° (febbraio 1900). — *H. Mandart*, Note sulle coniche. — *E. Cesàro*, Osservazioni ecc., (seguito). — Note matematiche (*Neuberg*). — Risoluzioni delle quistioni 785 (*Emmerich, Neuberg*), 1217, 1219, 1237, 1245 (*Emmerich*). — Quistioni di esame (926-934), (la 931 è estratta dal *Suppl. al Periodico di Mat.*, dec. 1899). — Quistioni proposte (1257-1260).

Fasc. 3° (marzo 1900). — *E. Cesàro*, Osservaz. ecc. (continuazione e fine). — *Droz-Farny*, Sopra la parabola associata a un triangolo. — Note matematiche (*Pirondini, Gob*). — Bibliografia. — Cenni biografici (Tchebychef, 1821-1893). — Risoluz. delle quistioni 781 (*Neuberg*), 1066 (*Droz-Farny, Barisien* e *Déprez*), 1069 (*Colart, Déprez, Andrien* e *Barisien*), 1230, 1236. — Quistioni d'esame (935-937). — Quistioni proposte (1261-1264).

Fasc. 4° (aprile 1900). — *Wasteels*, Sulla rappresentanza proporzionale. — *Barisien*, Sui triangoli inscritti in un'ellisse e circoscritti a un cerchio comentrico (seguito, v. T. IX, pag. 269). — Note matematiche (*Neuberg*). — Bibliografia. — Risoluz. delle quistioni 785 (*Espanet*), 1075 (*Emmerich*), 1150 (*Droz*), 1235 (*Cardoso-Laynes* e *Gob*), 1241, 1242. — Quistioni di esame (938-941). — Quistioni proposte (1265-1268).

Fasc. 5° (maggio 1900). — *Andrien*, Sul punto di Fagnano. — *L. Orlando*, Sulla sviluppante di cerchio e la spirale logaritmica. — Cenno biografico (F. Brioschi, 1824-1897). — *Barisien*, Sui triangoli inscritti ecc. (v. fasc. 4°). — Risoluz. delle quistioni 387 (*Emmerich*), 1098 (*Barisien*), 1214 e 1234 (*Retali*), 1221, 1243. — Quistioni proposte (1269-1272).

Fasc. 6° (giugno 1900). — *A. Emmerich*, Sul triangolo pseudo-isoscele (proprietà del triangolo ABC le cui bisettrici esterne BE, CD sono eguali senza che si abbia AB = AC). — Note matematiche (*Neuberg, Couturier, Barisien*). — *Barisien*, Sui triangoli ecc. (continuazione e fine). — Risoluzione delle questioni 1002 (*Retali*), 1050, 1071, 1092 (*Cristesco*), 1216 (*Soons*), 1258. — Quistione di esame (950-951). — Quistioni proposte (1273-1276).

Fasc. 7° (luglio 1900). — *Y. A. Third*, Sui triangoli triomologici. — *P. M.*, Divisione di un angolo in n parti eguali. — *Neuberg*, Il nostro supplemento. (Cenno sopra le due Memorie di *V. Retali* e *G. Tarry* annesse come supplemento a questo

(*) Una elegante dimostrazione diretta del teorema di cui si occupa il sig. Gob, fu data dal Jonquières a pag. 84 (fig. 8) dei suoi *Mélanges de Geometrie pure* (1856).

fasc.). — *P. Mansion*, Sopra una formula combinatoria. — Bibliografia. — Risoluzioni delle quistioni 1085 (*Mandart*), 1234, 1249 (*Gérard* e *Barisien*), 1251 (*Retali* e *Couturier*), 1253, 1256. — Quistioni d'esame (952-955). — Quistioni proposte (1277-1280). — Il supplemento di 30 pag. contiene: *V. Retali*, Sopra una trasformazione geometrica, pag. 1-22; *G. Tarry*, Le permutazioni quadrate di base 6, pag. 23-30. (*Mem. della società reale di scienze di Liège*, 3ª serie, t. II. 1900).

Fasc. 8º (agosto-settembre, 1900). — *S. Realis*, Quistioni di teoria dei numeri. — *Stuyvaert*, Il teorema di Chasles sulle cubiche gobbe. — *P. Mansion*, Area delle sinusoidi e formula di Wallis. — Bibliografia. — *Neuberg*, Concorso generale nel 1899, quistione di geometria analitica. — Risoluzione delle questioni 1215 e 1231 (*Emmerich*), 1238, 1259 (*Retali*), 1268. — Quistioni d'esame (956-961). — Quistione proposte (1281-1288).

V. R.

*PUBBLICAZIONI MATEMATICHE ITALIANE RECENTI

Bartolucci L., Manuale d'Aritmetica e principii d'algebra per gli alunni delle scuole tecniche. Seconda edizione. Firenze, Bemporad, 1899. L. 2.

Bartolucci L., Piccolo manuale d'Algebra per gli alunni delle scuole tecniche. Seconda edizione. Firenze, Bemporad, 1900. L. 0,50.

Bettazzi R., I problemi di aritmetica pratica. Trattatello ad uso degli allievi maestri e degli insegnanti di scuole elementari e secondarie inferiori. Torino, Paravia, 1900. L. 1,20.

Gremigni M., Nozioni di Geometria solida ad uso delle scuole tecniche, con un formulario. Firenze, Bemporad, 1900. L. 0,80.

Lavaggi, Calcolo infinitesimale. Lezioni dettate nell'anno 1899-900 nella R. Università di Parma, compilate per cura di *S. Buroni*. Disp. 54. Parma, lib. Zafferri, 1899-900.

Ohler C., Lezioni pratiche sulle quattro operazioni aritmetiche nello spazio numerico da 1 a 10 secondo il metodo del prof. A. W. Grube. Versione dal tedesco del prof. *A. Ambrosini*. Torino, Paravia, 1900. L. 1,50.

Sala L., Letture sulle proporzionalità in ragione inversa fra le derivate e gli integrali particolari della serie di Taylor, e sui rapporti derivatori e integratori che scaturiscono da quelle proporzionalità. Milano, Suppl. al *Politecnico*, tip.-lit. degli Ingegneri. 1900.

Valle G., Introduzione all'algebra elementare. Brescia, Racca, 1900. L. 0,50.

Vecchi V., Geometria descrittiva. Lezioni dettate nella R. Università di Parma nell'anno 1899-900 e compilate per cura di *E. Beggi*. Disp. 34. Parma, lib. Zafferri, 1899-900.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 29 gennaio 1901.

Gli aggruppamenti prospettivi e proiettivi di 2°, 3° e 4° ordine

È nota l'importanza della teoria degli aggruppamenti proiettivi di ordine n, che il De-Paolis pose a fondamento di una teoria puramente geometrica delle linee a superficie algebriche, nelle sue memorie sull'argomento, che, sebbene incompiute, ottennero un premio postumo dalla R. Accademia dei Lincei.

Gli aggruppamenti proiettivi sono stati studiati da molti matematici, come apparisce dall'elenco di pubblicazioni stampato alla fine della presente nota, nel quale ho indicato i principali lavori che io conosco sull'argomento.

Con questa nota mi propongo di portare un modesto contributo alla teoria degli aggruppamenti proiettivi, del 3° e 4° ordine, mostrando con metodo puramente geometrico come le loro proprietà fondamentali divengano assai facili ed intuitive, deducendole da quelle degli aggruppamenti prospettivi; la qual cosa era già stata dimostrata da Schubert analiticamente soltanto per gli aggruppamenti proiettivi del 3° ordine. Scopo principale di questa nota del resto è quello di familiarizzare i lettori del Periodico con questi concetti e di agevolare così lo studio dei lavori di maggior mole.

---

1. Definizioni. — I. *Essendo* $r_1, r_2, \ldots r_n$, (B) n *rette ed uno spazio* [p] (*) *appartenenti ad uno spazio* $[n+p]$, *tali che due qualunque di essi non abbiano un punto comune si chiama* aggruppamento prospettivo *di ordine* n *e specie* $p+1$ *l'insieme di tutti i gruppi* G_n *di* n *punti che si ottengono come intersezioni delle* n *rette* $r_1, r_2, \ldots r_n$ *con gli spazi* $[n+p-1]$ *che contengono* (B). *Questo spazio* [p] *si dice* base *dell'aggruppamento.*

Indicherò un tale aggruppamento col simbolo $(A_{p+1})_n$ od anche $(A_B)_n$.

II. *Essendo* $r_1, r_2 \ldots r_n$ *rette di uno spazio* $[n-1]$, *chiamo* aggruppamento prospettivo di ordine n *e* specie 0 *l'insieme dei gruppi* G_n *di* n *punti che si ottengono come intersezioni delle* n *rette date con gli spazi* $[n-2]$ *contenuti in* $[n-1]$.

Indicherò un tale aggruppamento col simbolo $(A_0)_n$ oppure $(A)_n$.

(*) Seguendo la notazione introdotta da Schubert, indico col simbolo [p] uno spazio lineare a p dimensioni. Così [0], [1], [2], [3] rappresentano un punto, una retta, un piano, uno spazio ordinario.

In questa nota mi occuperò solo di quegli aggruppamenti prospettivi che sono contenuti nello spazio ordinario; cioè di quelli di specie >0, pei quali $n+p \leq 3$, e di quelle di specie 0 pei quali $n-1 \leq 3$ ovvero $n \leq 4$. Tutti i casi possibili sono dunque:

$$n=2 \begin{cases} p+1=1 \\ p+1=2 \end{cases}$$
$$n=3 \begin{cases} p+1=0 \\ p+1=1 \end{cases}$$
$$n=4 \quad p+1=0.$$

I. — Aggruppamenti prospettivi di 2° ordine.

2. Date due rette r_1, r_2 nello spazio ed un fascio di piani di asse (B), i piani di questo fascio tagliano le r_1, r_2 in coppie di punti che formano un aggruppamento prospettivo $(A_2)_2$ di 2° ordine e specie 2. Se le rette r_1, r_2 sono in un piano π, al fascio di piani possiamo sostituire il fascio di rette intersezioni dei medesimi col piano π, ed otteniamo l'aggruppamento prospettivo $(A_1)_2$ di 2° ordine e specie 1. Ogni punto P_i di r_i determina un punto P_h di r_h, che si chiama il suo *polo*.

L'$(A_2)_2$ è la proiettività ordinaria, l'$(A_1)_2$ è la prospettività ordinaria, le proprietà delle quali son notissime; ci limitiamo ad enunciare soltanto quelle che ci occorreranno nel seguito.

I. *Un* $(A_2)_2$ *è individuato da tre dei suoi gruppi; un* $(A_1)_2$ *da due.* Tutti i possibili $(A_2)_2$ costituiscono dunque un sistema ∞^3.

II. *Affinchè un* $(A_2)_2$ *diventi un* $(A_1)_2$ *è necessario e sufficiente che le due punteggiate abbiano un elemento unito.*

III. *Un* $(A_2)_2$ *è singolare quando è costituito dalle coppie formate da un punto* O_1 *di* r_1 *con un punto qualsiasi di* r_2 *e da un punto* O_2 *di* r_2 *con un punto qualsiasi di* r_1.

Si dice allora che i punti O_1, O_2 sono *apolari*, e che l'aggruppamento si spezza in due aggruppamenti del 1° ordine costituiti dai punti O_1 e O_2.

Si ottiene per es. un $(A_2)_2$ singolare quando la retta (B) incontra le r_1, r_2. I due punti d'incontro O_1, O_2 di B con r_1 e r_2 sono i suoi punti apolari.

Quando ad un punto P_i di r_i corrispondono due punti di r_h, corrispondono ad esso tutti i punti di r_h, e la proiettività è singolare e si spezza in P_i ed in un punto P_h di r_h.

IV. *Se le* r_1, r_2 *coincidono, e due loro elementi si corrispondono in doppio modo, l'*$(A_p)_2$ *è un'involuzione* I_{p_2}.

Un'involuzione è individuata da due dei suoi gruppi.

Un'involuzione possiede due gruppi, ciascuno costituito da un elemento doppio. Se i due punti doppi coincidono l'involuzione è *singo-*

lare ed è costituita da quell'elemento preso con un punto qualunque della retta.

V. Due aggruppamenti non singolari $(A'_2)_2$, $(A''_2)_2$ sulle stesse rette r_1, r_2 hanno in comune due e due soli gruppi distinti o coincidenti, o gli hanno in comune tutti. Se sono singolari possono avere anche in comune tutti i gruppi formati da un determinato elemento dell'una retta con tutti quelli dell'altra.

II. — Aggruppamenti prospettivi di 3° ordine.

3. Prese nello spazio tre rette r_1, r_2, r_3, ed una stella di piani (di centro O) ogni piano della stella determina sulle tre rette una terna di punti P_1, P_2, P_3. *Tutte queste terne di punti formano un aggruppamento prospettivo* $(A_1)_3$ *del 3° ordine e di specie 1.*

Presi due punti P_1, P_2 sulle rette r_1, r_2 resta determinato il punto corrispondente P_3, intersezione di r_3 col piano P_1P_2O, che si dice *polo* del gruppo (P_1, P_2). Lo stesso può ripetersi per ogni coppia di punti presi su due qualunque delle rette date.

Preso un punto, per es. P_1, su una delle rette date, r_1, resta individuato un fascio di piani avente per asse P_1O e per conseguenza su r_2, r_3 un $(A_2)_2$, i cui gruppi sono tutti e soli quelli che con P_1 formano gruppi dell'A_{p_3}, e che si dice *aggruppamento polare di* P_1.

Se le tre rette r_1, r_2, r_3 giacciono in un piano π, che non contiene O, possiamo sostituire ai piani della stella le rette di π. Allora ogni gruppo dell'$(A_1)_3$ è formato dalle intersezioni di r_1, r_2, r_3 con una retta arbitraria, ed otteniamo un *aggruppamento prospettivo* $(A_0)_3$ *di 3° ordine e di specie* 0. I gruppi di punti che con un punto qualsiasi P_1 di r_1 formano un gruppo di $(A_0)_3$ formano un aggruppamento prospettivo di 2° ordine e 1ª specie *polare di* P_1.

Un aggruppamento prospettivo $(A_1)_3$ *di 3° ordine e specie 1 è individuato da tre dei suoi gruppi.*

Infatti i tre gruppi individuano tre piani, i quali s'incontrano in un punto O, centro della stella che dà origine all'aggruppamento.

I gruppi di un aggruppamento prospettivo $(A_0)_3$ *o* $(A_1)_3$ *di 3° ordine e specie 1 sono* ∞^2.

Infatti ogni gruppo è individuato da due punti scelti ad arbitrio su due rette rispettivamente. Inoltre i gruppi stessi corrispondono univocamente ai piani di una stella.

4. Una coppia di punti sopra due delle rette r_1, r_2, r_3 si dice *apolare*, se forma un gruppo dell'aggruppamento non con un solo, ma con tutti i punti della retta rimanente.

Sopra ognuna delle coppie di rette che si possono formare colle r_1, r_2, r_3 *esistono due gruppi apolari.*

1°. Consideriamo un $(A_1)_3$, e sia s_1 la retta che passa per O e incontra r_h, r_k, e poniamo $P_{h,i}=(r_h s_i)$. Per $OP_{h,i}P_{k,i}$ passano infiniti piani, e quindi ogni punto di r_i forma un gruppo dell'$(A_1)_3$ con $P_{h,i}$, $P_{k,i}$ ossia $P_{h,i}P_{k,i}$ sono apolari.

Inoltre il piano Or_i è tagliato dalle r_h, r_k nei punti $P_{h,k}$, $P_{k,h}$, dunque ogni punto di r_i forma un gruppo dell'$(A_1)_3$ con $P_{h,k}$, $P_{k,h}$. Dunque anche questi due punti formano un gruppo apolare. — Riepilogando

$$\left.\begin{matrix} P_{2,1}\ ,\ P_{3,1} \\ P_{2,3}\ ,\ P_{3,2} \end{matrix}\right\} \text{ è un gruppo apolare per } r_2\ ,\ r_3$$
$$\left.\begin{matrix} P_{3,2}\ ,\ P_{1,2} \\ P_{3,1}\ ,\ P_{1,3} \end{matrix}\right\} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad r_3\ ,\ r_1$$
$$\left.\begin{matrix} P_{1,3}\ ,\ P_{2,3} \\ P_{1,2}\ ,\ P_{2,1} \end{matrix}\right\} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad r_1\ ,\ r_2.$$

2°. Consideriamo ora un $(A_0)_3$, cioè esaminiamo il caso in cui le tre rette sono i lati di un trilatero. Le coppie apolari sono formate dai vertici convenientemente combinati e precisamente nel modo seguente, avendo posto $P_i=(r_h, r_k)$,

$$\left.\begin{matrix} P_1\ ,\ P_1 \\ P_3\ ,\ P_2 \end{matrix}\right\} \text{ è un gruppo apolare per } r_2\ ,\ r_3$$
$$\left.\begin{matrix} P_2\ ,\ P_2 \\ P_1\ ,\ P_3 \end{matrix}\right\} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad r_3\ ,\ r_1$$
$$\left.\begin{matrix} P_3\ ,\ P_3 \\ P_2\ ,\ P_1 \end{matrix}\right\} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad r_1\ ,\ r_2.$$

5. Finora abbiamo supposto che le rette r_1, r_2, r_3 sieno in posizione generale. Esaminiamo qualche caso particolare. Se due rette, per es. r_1, r_2, concorrono in un punto, i due punti $P_{1,3}$, $P_{2,3}$ coincidono ma nulla dobbiamo variare a quanto abbiamo detto.

Se tutte e tre le rette passano per un punto i sei punti $P_{i,h}$ coincidono.

Se le tre rette s_1, s_2, s_3 coincidono (cioè se O appartiene alla quadrica individuata da r_1, r_2, r_3) allora $P_{i,h}$, $P_{i,k}$ coincidono ed i due gruppi apolari di ogni coppia di rette coincidono.

Se due rette, per es. r_1, r_2, ed il centro O stanno in un piano π, tagliato in P_3 da r_3, l'aggruppamento $(A_0)_3$ si spezza in un aggruppamento di 2° ordine ed in uno di 1°.

Infatti ogni gruppo G_2 dell'aggruppamento $(A_1)_2$ determinato dal fascio di centro O sulle r_1, r_2 forma un gruppo G_3 dell'$(A_1)_3$ con qualsiasi punto di r_3, e il punto P_3 forma un gruppo G_3 dell'$(A_1)_3$ con ogni coppia di punti delle r_1, r_2. In questo caso diremo che l'$(A_1)_3$ è *degenere.*

Lo stesso avviene se, essendo le tre rette r_1, r_2, r_3 sghembe, il punto O è situato sopra una di esse per es. su r_3.

In tal caso infatti l'aggruppamento $(A_2)_2$ determinato su r_1, r_2 dal fascio di piani che ha per asse r_3 forma un gruppo G_3 con ogni punto di r_3, e il punto O di r_3 forma un gruppo G_3 con ogni coppia di punti su r_1, r_2.

Finalmente supponiamo che r_1, r_2 s'incontrino, ed O sia sopra una di esse, per es. su r_1.

In tal caso, posto $O = P_1$, $r_2 r_1 = P_2$, $r_3, (r_1 r_2) = P_3$, è facile vedere che l'aggruppamento si riduca a tre aggruppamenti proiettivi del 1° ordine P_1, P_2, P_3 perchè l'$(A_1)_3$ si compone di tutti i gruppi formati da uno dei tre punti suddetti P_i con due punti arbitrari delle r_h, r_k.

In questo caso l'aggruppamento si dice *singolare*.

Se due delle tre rette r_1, r_2, r_3, per es. r_1, r_2, coincidono, ad ogni punto P_3 di r_3 corrisponde l'involuzione identica formata da tutti i punti della r_1 contati due volte; ad ogni punto P_1 di r_1 corrisponde la proiettività singolare i cui punti apolari sono P_1 (su r_2) e $P_{3,2}$ (o $P_{3,1}$) (su r_3). Due punti P_1, P_2 su r_1 (o r_2) individuano l'unico punto $P_{3,2}$ il quale dunque è *apolare* per l'$(A_2)_2$, essendo indeterminata l'A_p, ad essa corrispondente. Due punti P_1, P_3 su r_1, r_3 determinano su r_2 lo stesso punto P_1.

Se tutte e tre le rette coincidono allora ad ogni punto P_1 corrispondono *tutte le possibili coppie* P_2, P_3, ecc.

6. I gruppi di un $(A_1)_3$ corrispondono univocamente, come abbiamo detto, ai piani di una stella (o alle rette di un piano). Ai piani di un fascio contenuti in questa stella corrispondono quindi ∞' gruppi dell'$(A_1)_3$ che costituiscono un fascio che chiameremo del *1° sistema*.

I gruppi di un fascio sono caratterizzati dalla seguente proprietà. I loro punti generano tre punteggiate proiettive su r_1, r_2, r_3, nelle quali

$P_{2.1}$, $P_{3.1}$ sono corrispondenti su r_2, r_3
$P_{3,2}$, $P_{1.2}$ " " " r_3, r_1
$P_{1,3}$, $P_{2.3}$ " " " r_1, r_2.

I fasci di 1ª specie di gruppi di un $(A_1)_3$ sono ∞^2. Due gruppi dell'$(A_1)_3$ individuano un fascio del 1° sistema.

Similmente esistono ∞^2 coni quadrici col vertice in O tangenti alle rette r_1, r_2, r_3. I piani tangenti ad uno di essi corrispondono ad un fascio di gruppi dell'$(A_1)_3$. I gruppi di questo fascio sono caratterizzati dalle seguenti proprietà. I loro elementi generano su r_1, r_2, r_3 tre punteggiate proiettive, nelle quali

$P_{2,3}$, P_{32} sono corrispondenti su r_2, r_3
$P_{3,1}$, P_{13} " " " r_3, r_1
$P_{1,2}$, P_{21} " " " r_1; r_2.

Chiameremo questi fasci del 2° *sistema*.

Anche i fasci del 2° sistema sono ∞^2. Due gruppi dell'$(A_2)_2$ individuano un fascio del 2° sistema.

Due fasci dello stesso sistema hanno un solo elemento comune. Due fasci di sistema diverso ne hanno due.

III. — Aggruppamenti proiettivi di 3° ordine - Fasci.

7. Sieno date tre rette o tre forme di prima specie qualsiansi, f_1, f_2, f_3, e stabiliamo tre corrispondenze proiettive fra gli elementi di queste ed i punti di tre rette r_1, r_2, r_3 collegati da un aggruppamento prospettivo del 3° ordine di specie 0 o 1.

Anche fra gli elementi di f_1, f_2, f_3 viene stabilita una speciale corrispondenza, per la quale una coppia di elementi, presi su due delle forme date, individua uno ed un solo sull'altra; ogni elemento di una forma determina infinite coppie delle altre due i cui elementi si corrispondono proiettivamente.

Diremo che tutti i gruppi formati con tre elementi delle f_1, f_2, f_3, corrispondenti a tre elementi di un gruppo dell'$(A_1)_3$ o $(A_0)_3$ sulle rette r_1, r_2, r_3 forma un *aggruppamento proiettivo del 3° ordine*, e lo indicheremo colla scrittura A_{p_3}.

In questo A_{p_3} esistono in generale sei elementi (due su ciascuna retta) che, combinati due a due formano i sei gruppi apolari.

Se però l'aggruppamento prospettivo da cui deriva è degenere o singolare, è esso pure degenere o singolare cioè si spezza in un A_{p_2} e in un A_{p_1}, oppure in tre A_{p_1}.

8. Da quanto abbiamo detto nei §§ precedenti resta dimostrata l'esistenza di aggruppamenti proiettivi del 3° ordine.

Prescindendo ora da qualsiasi costruzione geometrica definiamo l'aggruppamento proiettivo del 3° ordine nel modo seguente.

Si chiama aggruppamento proiettivo del 3° ordine, e s'indica con A_{p_3}, *la totalità dei gruppi* G_3 *di tre elementi, appartenenti a tre forme di 1ª specie* f_1, f_2, f_3 *rispettivamente, i quali soddisfano alle seguenti condizioni:*

1°. *Ogni coppia di elementi* P_i, P_h *presi su* f_i, f_h *individua (in generale) un solo elemento* P_k *della* f_k, *che con essi forma un gruppo* G_3. *Si dice che* P_k *è il polo di* P_i, P_h.

2°. *Ogni elemento* P_i *di* f_i *individua* ∞^1 *coppie* G_2 *di elementi su* f_h, f_k, *costituenti una* A_{p_2}, *i quali formano con* P_i *un gruppo* G_3 *dell'*A_{p_3}. *Tale* A_{p_2} *si dice polare di* P_2.

Dimostreremo fra poco che ogni A_{p_3} così definito si può ottenere nel modo indicato nel § 7.

9. *Sulle tre forme* f_1, f_2, *collegate da un* A_{p_3} *non degenere esistono sei punti (tre per ciascuna) che, combinati convenientemente, costituiscono due coppie apolari per ogni coppia di forme; oppure ne esistono infiniti.*

1°. Due elementi M'_3, M''_3 di f_3 determinano su f_1, f_2 due aggruppamenti proiettivi di 2° ordine A'_{p_2}, A''_{p_2}, i quali (in generale) hanno in comune due gruppi A_1, A_2 e B_1, B_2 distinti o coincidenti.

I due gruppi $A_1A_2M'_3$, $A_1A_2M''_3$ appartengono all'A_{p_3}, e quindi la proiettività A_{p_2} polare di A_1 è singolare, e ogni punto della f_3

forma con A_1, A_2 un gruppo dell'A_{p_3}, ossia (A_1, A_2) è un gruppo apolare dell'A_{p_3} su f_1, f_2, cioè appartiene a tutti gli aggruppamenti di 2° ordine polari degli elementi di f_3. Lo stesso può dirsi per B_1, B_2. Risulta da ciò che l'A_{p_2} polare di A_1 è singolare, e si spezza in due A_{p_1}, uno dei quali è formato da A_2 con tutti i punti di f_3 e l'altro da un punto speciale A_3 di f_3 con tutti i punti di f_2. In simil guisa ragionando su B_1, B_2 si trova un punto B_3 su f_3.

Risulta da ciò che A_1, A_3 e B_1, B_3 sono apolari per f_1, f_3, perchè con ogni punto di f_2 formano un gruppo di A_{p_3}. Inoltre B_2, A_3 e A_2, B_3 sono gruppi apolari per f_2, f_3. Infatti, poichè A_1, A_3 e B_1, B_2 sono apolari, i due gruppi A_1, B_2, A_3, B_1, B_2, A_3 appartengono all'A_{p_3}, ed allora il gruppo B_2, A_3, individuando due e quindi gli ∞^1 punti di f_1, è apolare.

2°. Se gli aggruppamenti A'_{p_2}, A''_{p_2} polari di M'_3, M''_3 hanno più di due coppie comuni, essi coincidono. Le coppie A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2; ... di questo aggruppamento sono dunque tutte apolari, cioè formano un gruppo G_3 dell'A_{p_3} con qualsiasi elemento di f_3.

Il punto A_1, per es., ha per polare un aggruppamento singolare, che si spezza nell'A_{p_1} formato da A_2 con tutti gli elementi di f_3 e nell'A_{p_1} formato da un elemento A_3 di f_2 con tutti gli elementi di f_2. Questo elemento A_3 è apolare, cioè forma un gruppo di A_{p_3} con ogni coppia di elementi di f_1, f_2. Infatti alla coppia $A_3 B_2$ corrispondono A_1 e B_1 e quindi tutti gli elementi di f_1; per conseguenza anche ad ogni coppia $A_3 B_1$ corrispondono tutti gli elementi di f_1.

In questo caso si può dire che l'A_{p_3} è *degenere* e si spezza in un A_{p_1} su f_3 e in un A_{p_2} su f_1, f_2; oppure che A_3 e tutte le coppie di questo A_{p_2} sono apolari.

Se anche l'A_{p_2} si spezza in due A_{p_1}, allora l'A_{p_3} è *singolare*. Esso è individuato da tre elementi O_1, O_2, O_3 ed è formato dai gruppi che risultano da uno qualunque di questi elementi O_i con una coppia di elementi delle altre due forme.

10. *Un* A_{p_3} *non degenere è individuato quando si conoscono le sue sei coppie apolari (supposto che non sieno coincidenti) ed un suo gruppo.*

Sieno $P_{1,3}, P_{1,2}$; $P_{2,1}, P_{2,3}$; $P_{3,2}, P_{3,1}$ i sei elementi di f_1, f_2, f_3 che combinati due a due costituiscono le coppie apolari e M_1, M_2, M_3 un gruppo dell'A_{p_3}.

La proiettività polare, per es., di M_3 è determinata, perchè deve contenere le coppie P_{13}, P_{23}; P_{12}, P_{21}; M_1, M_2. Sia D_2 l'elemento corrispondente ad un punto arbitrario D_1 di f_1 in questa proiettività. Allora anche la proiettività corrispondente a D_1 è determinata, poichè in essa sono coppie corrispondenti P_{21}, P_{31}; P_{23}, P_{32}; D_2, M_3 ecc.

11. *Un aggruppamento proiettivo* A_{p_3} *è individuato, quando si conoscono gli aggruppamenti* A'_{p_2}, A''_{p_2} *polari di due elementi* P_i', P_i'' *ed un gruppo* G_3 (P_1, P_2, P_3).

Infatti è facile vedere che è determinato l'A_{p_2} polare di un punto M_h di f_h.

Siano M_k', M_k'' i poli di P_h rispetto ad A'_{p_2} e A''_{p_2}. Allora ciascuna delle coppie (P_i', M_k'), (P_i'', M_k''), (P_i, P_k) formano con P_h un gruppo dellA_{p_3}, ossia appartengono all'aggruppamento polare di P_h. Così si possono riguardare come noti gli aggruppamenti polari di P_h e P_k.

Sia ora M_h un punto qualunque di f_h e M_k', M_k'', M_i i suoi poli rispetto ad A'_{p_2}, A''_{p_2} e all'aggruppamento polare di P_k. Ciascuna delle tre coppie (P'_i, M'_k), (P''_i, M''_k), (M_i, P_k) forma con M_h un gruppo dell'A_{p_3}, ossia esse appartengono all'aggruppamento polare di M_h e lo determinano.

Infine sia M_i un punto arbitrario di f_i e M'_k, M''_k, M'''_k i suoi poli rispetto ai tre aggruppamenti polari di tre punti M'_h, M_h'', M''_h. Le tre coppie (M'_h, M'_k), (M_h'', M''_k) (M_h''', M_k''') individuano l'aggruppamento polare di M_i.

Segue da ciò che

Gli aggruppamenti proiettivi del terzo ordine sono ∞^7.

Infatti per determinare un A_{p_3} occorrono tre condizioni necessarie ad individuare l'A'_{p_2}, tre per l'A''_{p_2} ed uno per il gruppo $(P_1 P_2 P_3)$.

12. Consideriamo un A_{p_3}. Ad ogni punto di f_3, per es., è coordinato uno ed un solo A_{p_2}. Tutti questi A_{p_2} costituiscono un *fascio*.

I gruppi comuni a due A_{p_2} sono comuni a tutti gli A_{p_2} del fascio, e ne formano la *base*.

Tali gruppi sono evidentemente tutti e soli i gruppi apolari su f_1, f_2. Se dunque l'A_{p_3} non è degenere, essi sono due soli; se l'A_{p_3} è degenere sono infiniti. In questo caso il fascio si dice *singolare*.

La base di un fascio di A_{p_2} non singolare è costituita da due gruppi di elementi distinti o coincidenti, quella di un fascio singolare dagli ∞' gruppi formati da un elemento di f_1 (o f_2) e da tutti quelli di f_2 (o f_1).

In un fascio di A_{p_2} esistono due e due soli A_{p_2} singolari.

Questi sono evidentemente i due determinati dai punti apolari $P_{1,3}$, $P_{2,1}$ e $P_{1,2}$, $P_{2,3}$.

Esiste uno ed un solo fascio di A_{p_2} *che contenga due aggruppamenti* A'_{p_2}, A''_{p_2} *dati.*

Essendo f_1, f_2 i due sostegni dei due aggruppamenti dati, si prenda un'altra forma di 1ª specie f_3 e costruiamo l'aggruppamento del 3º ordine A_{p_3}, nel quale A'_{p_2}, A''_{p_2} sono gli aggruppamenti polari di due elementi P'_3, P''_3 e (P_1, P_2, P_3) è un altro gruppo.

Gli aggruppamenti polari degli elementi di f_3 formano un fascio che contiene A'_{p_2}, A''_{p_2}. Restando fissi A'_{p_2}, A''_{p_2}, (P_1, P_2) e variando P'_3, P''_3, P_3 si hanno $\infty^3 A_{p_3}$, i quali però individuano lo stesso fascio su f_1, f_2. Infatti se a P'_3, P''_3, P_3 sostituiamo gli elementi Q'_3, Q''_3, Q_3, mediante una proiettività in cui sia

$$(P'_3\, P''_3\, P_3) \barwedge (Q'_3\, Q''_3\, Q_3)$$

il nuovo A_{p_3} si trasforma nel primo e i due fasci su f_1, f_2 sono identici.

Dal teorema precedente risulta.

Due A_{p_2} *individuano un fascio.*

Se due fasci di A_{p_3} *hanno due aggruppamenti comuni, coincidono.*

13. *Ogni aggruppamento proiettivo* A_{p_3} *del 3° ordine si può dedurre da un aggruppamento* $(A_0)_3$ *o* $(A_1)_3$ *prospettivo.*

1ª. *Dimostrazione.* — I. Supponiamo A_{p_3} non degenere e individuato dalle sue coppie apolari, costituite dai sei punti P_{ih}, e da un suo gruppo M_1, M_2, M_3 (§ 10).

Si prendano tre rette r_1, r_2, r_3 sghembe due a due ed un punto O; essendo s_i la retta che passa per O e incontra r_h, r_k, si ponga $P'_{ih} = r_i s_h$ e siano M'_1, M'_2, M'_3 i punti d'incontro di r_1, r_2, r_3 con un piano arbitrario condotto per O. Si stabiliscano tre proiettività fra f_1, f_2, f_3 e r_1, r_2, r_3 rispettivamente in guisa che sia

$$(P_{12}\,P_{13}\,M_1) \barwedge (P'_{12}\,P'_{13}\,M'_1)$$
$$(P_{23}\,P_{21}\,M_2) \barwedge (P'_{23}\,P'_{21}\,M'_2)$$
$$(P_{31}\,P_{32}\,M_3) \barwedge (P'_{31}\,P'_{32}\,M'_3).$$

È allora evidente che l'aggruppamento proiettivo, che si ricava dall'$(A_1)_3$ prospettivo rispetto al centro O sulle tre rette $r_1 . r_2 . r_3$ per mezzo delle suddette proiettività, è precisamente l'A_{p_3} dato.

Similmente si prenda un trilatero r_1, r_2, r_3 ed una secante che tagli i lati nei punti M_1, M_2, M_3. Poniamo $P_i = r_h r_k$, e si stabiliscano tre proiettività fra f_1, f_2, f_3 e r_1, r_2, r_3 rispettivamente, in modo che sia

$$(P_{12}\,P_{13}\,M_1) \barwedge (P_3\,P_2\,M'_1)$$
$$(P_{23}\,P_{21}\,M_2) \barwedge (P_1\,P_3\,M'_2)$$
$$(P_{31}\,P_{32}\,M_3) \barwedge (P_2\,P_1\,M'_3).$$

È allora evidente che l'A''_{p_3} che si deduce dall'$(A_0)_3$) prospettivo su r_1, r_2, r_3 per mezzo di queste proiettività è precisamente l'A_{p_3} dato.

II. Supponiamo l'A_{p_3} degenere.

Sia P_1 il suo punto apolare su f_1, e $P'_2 P'_3$; P''_2, P''_3. P'''_2, P'''_3 tre coppie apolari su f_2, f_3.

Prendiamo una retta r_1 e due rette coincidenti r_2, r_3. Su questa siano H'_2, H''_2, H'''_2 tre punti arbitrari e si stabilisca la proiettività in guisa che sia

$$(P'_2\,P''_2\,P'''_2) \barwedge (H'_2\,H''_2\,H'''_2)$$
$$(P'_3\,P''_3\,P'''_3) \barwedge (H'_2\,H''_2\,H'''_2)$$

ed una proiettività fra f_1 ed r_1 in guisa che P corrisponda ad $r_1 r_2$ (oppure al punto d'incontro di r_1 colla retta che passa per O ed incontra r_1, r_2). Allora l'A_{p_3} è precisamente quello che ottiene dall'A'_{p_3} singolare su r_1, r_2, r_3 per mezzo di detta proiettività.

2ª *Dimostrazione.* — Sia dato un A_{p_3} su tre rette r_1, r_2, r_3, e siano $(P_{12}, P_{21})(P_{13}, P_{23})$ i due gruppi apolari sulle rette $r_1 . r_2$. Questi gruppi saranno comuni a tutti gli aggruppamenti proiettivi del 2° ordine polari dei punti di r_3.

Preso un punto arbitrario O sulla retta $s = P_{12} P_{21}$, si consideri una retta arbitraria r'_3 situata nel piano $OP_{13} P_{23}$. È evidente allora che la stella di piani di centro O determina sulle tre rette r_1, r_2, r'_3 un aggruppamento prospettivo $(A_1)_3$ che ha $(P_{12}, P_{21})(P_{13}, P_{23})$ per coppie apolari sulle rette r_1, r_2.

Il fascio degli A_{p_2} polari dei punti di r'_3 rispetto a questa $(A_1)_3$ coincide con quelle dei fasci polari dei punti di r_3 rispetto all'A_{p_3} dato.

Infatti l'A_{p_2} polare di un punto P_3 di r_3 è individuato da un suo gruppo (P_1, P_2) (essendone già dati altri due gruppi). Il piano $OP_1 P_2$ taglia r_3 in un punto P'_3 il cui aggruppamento polare rispetto ad $(A_1)_3$ contiene le coppie $(P_1, P_2)(P_{12}, P_{21})(P_{13}, P_{23})$ e quindi coincide con A_{p_2}.

Segue da ciò che, se si determinano nella stessa guisa tre coppie $(P_3, P'_3)(Q_3, Q'_3)(R_3, R'_3)$ sulle rette r_3, r'_3, e si stabilisce la proiettività fra r_3 e r'_3 in modo che sia

$$(P_3\, Q_3\, R_3) \barwedge (P'_3\, Q'_3\, R'_3)$$

l'A_{p_3} dato si trasforma nell'$(A_0)_3$.

IV. — Involuzioni di 3° ordine.

14. Supponiamo di avere un A_{p_3} qualunque, e che le f_1, f_2 coincidano. L'A_{p_2} su f_1, f_2 corrispondente ad un punto P_3 qualsiasi contiene le due coppie (P_{13}, P_{23}), (P_{12}, P_{21}). Affinchè tale A_{p_2} sia involutorio, qualunque sia P_3, è necessario e sufficiente che gli elementi suddetti si corrispondano in doppio modo, e poichè due involuzioni non hanno che una coppia comune, bisogna che coincidano

$$P_{13}, P_{21} \quad \text{e} \quad P_{12}, P_{23}.$$

Similmente, supposto che coincidano f_1, f_2, f_3, affinchè tutte le A_{p_2} determinate dai punti di f_1 su f_2, f_3, siano involuzioni, è necessario e sufficiente che coincidano

$$P_{21}, P_{32} \quad \text{e} \quad P_{23}, P_{31};$$

e perchè siano involuzioni tutte le A_{p_2} determinate dai punti di f_2 su f_1, f_3, è necessario e sufficiente che coincidano

$$P_{32}, P_{13} \quad \text{e} \quad P_{31}, P_{12}.$$

Quando sono verificate due delle condizioni suddette, è verificata la terza, ed allora l'A_{p_3} si dice un'*involuzione* e si indica col simbolo I_3.

Dunque affinchè un A_{p_3} sia involutorio è necessario e sufficiente che coincidano

$$P_{13}, P_{21}, P_{32} \quad \text{e} \quad P_{23}, P_{31}, P_{12}.$$

Ne segue:

In un'involuzione del 3° ordine esiste una ed una sola coppia apolare.

Un'involuzione del 3° ordine è determinata, se si conosce la coppia apolare (Q, Q') *e un suo gruppo* $G_3\,(A_1, A_2, A_3)$.

Infatti un punto A_i ha per polare un'involuzione del 2° ordine di cui Q, Q' e A_h, A_k sono due coppie ($i, h, k = 1, 2, 3$), ed è quindi interamente determinata.

Preso allora un punto B_2 sulla retta r si potrà determinare il suo coniugato B_3 nella involuzione polare di A_1 (che cioè contiene le coppie Q, Q' e A_2, A_3). Allora anche B_2 individua un'involuzione di cui Q, Q' e $A_1 B_3$ sono due coppie.

Volendo allora il polo della coppia B_2, C_3 arbitraria, basterà trovare il punto coniugato a C_3 in questa involuzione.

V. — Aggruppamenti prospettivi di 4° ordine di specie 0.

15. Sieno date quattro rette r_1, r_2, r_3, r_4 sghembe fra loro due a due, e si considerino gli ∞^3 piani dello spazio. Ognuno di questi piani π incontra le quattro rette r_1, r_2, r_3, r_4 in quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4, tali che tre di essi determinano il quarto. Questi ∞^3 gruppi di punti formano un $(A_0)_4$.

Essendo i, h, k, l gl'indici 1, 2, 3, 4 scritti in un ordine qualunque risulta che *in generale*:

Tre punti P_i, P_h, P_k sulle rette r_i, r_h, r_k individuano un punto P_l della r_l, che si dice *polo* del gruppo (P_i, P_h, P_k).

Due punti P_i, P_h delle r_i, r_h determinano su r_k, r_l un $(A_2)_2$, *polare* del gruppo (P_i, P_h).

Un punto P_i di r_i determina su r_h, r_k, r_l un $(A_1)_3$, *polare* di P_i.

Un gruppo di tre, due o un punto si dice *apolare* quando non verifica le condizioni precedenti.

16. *Sopra ogni terna di rette r_i, r_h, r_k esistono due fasci di gruppi apolari.*

Se s è una retta che incontra r_i, r_h, r_k, (ossia una generatrice della quadrica $r_i r_h r_k$) i tre punti $P_i = sr_i$, $P_h = sr_h$, $P_k = sr_k$ non individuano un solo, ma ∞^1 piani, e quindi tutti i punti della r_l. Dunque (P_i, P_h, P_k) è un gruppo apolare.

Similmente ogni piano π per r_l determina tre punti P_i', P_h', P_k', che formano una terna apolare, poichè ad esso corrisponde qualunque punto di r_l. Si ottiene così un secondo fascio di elementi. Dunque per ogni terna di $r_i\ r_k\ r_h$ esistono due fasci di terne apolari.

I punti di ciascun fascio determinano sulle rette r_i, r_h, r_k tre punteggiate proiettive.

I due fasci di terne apolari hanno due gruppi comuni.

Infatti esistono due rette s', s'' che incontrano r_i, r_h, r_k, r_l. I piani $r_l s'$, $r_l s''$ determinano due gruppi del secondo fascio *apolare*, che appartengono anche al primo fascio.

Ponendo $r_i s' = O_i'$, $r_i s'' = O_i''$, i due gruppi di punti (O_1', O_2', O_3', O_4') $(O_1'', O_2'', O_3'', O_4'')$ godono delle seguenti proprietà.

Una coppia O_i', O_h' ha per polare l'aggruppamento singolare formato dai punti O_k', O_l'.

Un punto qualunque O_i' ha come polare un A_{p_3} singolare, che si spezza nei tre O_h', O_k', O_l'.

17. Esaminiamo ora qualche caso particolare.

I. Siano r_1, r_2, r_3, r_4 generatrici di una serie rigata. — Tutte le rette che si appoggiano a tre di esse, incontrano anche la quarta e sono le generatrici dell'altro sistema della quadrica.

In questo caso esiste un fascio di gruppi (O_1, O_2, O_3, O_4), che godono delle proprietà esposte nel § precedente.

I due fasci di terne apolari su r_i, r_h, r_k coincidono col fascio di terne O_i, O_h, O_k.

II. Se due rette r_i, r_h s'incontrano in un punto O_{ih}, le rette che si appoggiano a r_i, r_h, r_k sono quelle del fascio che ha per centro O_{ih} e per piano $\pi_k = O_{ih}\, r_k$, e quelle del fascio che ha per sostegno $\pi_{ih} = r_i\, r_h$ e per centro il punto $\pi_{ih}\, r_k$.

In questo caso la proiettività stabilita su r_i, r_h, r_k dai gruppi delle terne apolari è degenere.

Tutti i punti O_k di r_k hanno per corrispondente su r_i e r_h il punto O_{ih}. Tutti i punti di r_i hanno per corrispondente su r_k il punto $\pi_{ih}\, r_k$, su r_h il punto O_{ih} e il punto sulla proiezione da π_{ih}, r_k ecc.

Per le altre terne di rette r non esistono singolarità.

I due gruppi $(O_1'O_2'O_3'O_4')$ e $(O_1''O_2''O_3''O_4'')$ sono dati dalla retta che passando per O_{ih} incontra r_k e r_l e dalla retta del piano π_{ih} che unisce i punti d'incontro di questa con r_k e r_l.

III. Se tre rette r_i, r_h, r_k passano per un punto O_{ihk} ma non stanno in un piano, esiste un fascio di rette (quelle che passano per O_{ihk} e incontrano r_l) che le incontrano tutte e quattro. Dunque il fascio di elementi $(O_1\, O_2\, O_3\, O_4)$ è degenere, coincidendo sempre O_i, O_h, O_k con O_{ihk}.

IV. Se tre rette r_i, r_h, r_k giacciono in un piano π_l ma non passano per un punto, esistendo un fascio di rette, che incontrano le r_i, r_h, r_k, r_l, avente π_l per sostegno e $P_l = r_l\, \pi_l$ come centro. A tutti i punti di r_l corrisponde il medesimo A_{p_3} prospettivo sulle $r_i\, r_h\, r_k$.

Il fascio di elementi (O_1, O_2, O_3, O_4) è degenere coincidendo sempre O_l con P_l.

18. I gruppi di un $(A_0)_4$ corrispondono univocamente ai piani dello spazio. Da ciò discendono queste conseguenze.

1°. I piani di un fascio di piani determinano un *fascio di gruppi* (P_1, P_2, P_3, P_4) appartenenti all'$(A_0)_4$. I punti delle singole rette costituiscono quattro punteggiate proiettive.

Similmente i piani tangenti ad un cono quadrico, tangente alle r_1, r_2, r_3, r_4 determinano un fascio di gruppi appartenenti all'$(A_0)_4$. I singoli elementi generano punteggiate proiettive.

Siccome le rette sono ∞^4 e ogni punto dello spazio è vertice d'∞^1 coni quadrici tangenti alle quattro rette abbiamo:

Esistono due sistemi di ∞^4 fasci di gruppi appartenenti ad un A_{p_4}. *Li chiameremo rispettivamente di prima e seconda specie.*

2°. *I piani di una stella determinano una rete di gruppi di* A_{p_4}. *In un* A_{p_4} *esistono* ∞^8 *reti di gruppi.*

Un fascio di gruppi di prima specie ed una rete hanno in generale un sol gruppo comune.

Un fascio di gruppi di seconda specie ed una rete hanno in generale due gruppi comuni.

VI. — Aggruppamenti proiettivi di 4° ordine - Fasci.

19. Siano ora f_1, f_2, f_3, f_4 quattro forme qualunque di 1ª specie, e stabiliamo quattro proiettività fra esse e le quattro rette r_1, r_2, r_3, r_4 collegate da un $(A_0)_4$.

Anche fra gli elementi di f_1, f_2, f_3, f_4 viene stabilita una corrispondenza, per la quale tre elementi scelti ad arbitrio sulle f_i, f_h, f_k ne individuano uno su f_l: due elementi scelti su f_i, f_h individuano un A_{p_2} su $f_k\, f_l$ ecc. Si hanno dunque per i gruppi di elementi delle f_1, f_2, f_3, f_4 le stesse proprietà, che valgono per i gruppi dell'$(A_0)_4$ sulle rette r_1, r_2, r_3, r_4. Diremo che questi gruppi formano un aggruppamento proiettivo A_{p_4}.

Questi A_{p_4} godono di proprietà analoghe a quelle degli $(A_0)_4$ prospettivi, e presentano gli stessi casi particolari di singolarità e degenerazione.

20. Prescindendo ora da qualsiasi costruzione geometrica, definiamo l'aggruppamento proiettivo del 4° ordine nel modo seguente.

Si chiama aggruppamento proiettivo del 4° ordine, e s'indica col simbolo A_{p_4}, *la totalità dei gruppi* G_4 *di 4 elementi appartenenti a quattro forme di prima specie* f_1, f_2, f_3, f_4, *i quali soddisfano alle seguenti condizioni:*

1°. *I gruppi* G_3, *che con un elemento* P_i *di* f_i *formano un gruppo* G_4 *dell'*A_{p_4}, *costituiscono un aggruppamento proiettivo del 3° ordine, che si dice* POLARE *di* P_i.

2°. *I gruppi* G_2 *che con due elementi* P_i, P_h *di* f_i, f_h *formano un gruppo* G_4 *dell'*A_{p_4}, *costituiscono un aggruppamento proiettivo del 2° ordine, che si dice* POLARE *di* P_i. P_h.

3°. *Esiste* (in generale) *un solo elemento* P_l *di* f_l *che con tre elementi* P_i, P_h, P_k *di* f_i, f_h, f_k *forma un gruppo dell'*A_{p_4}. P_l *si dice* POLARE *del gruppo* (P_i, P_h, P_k).

Le ultime due condizioni sono evidentemente conseguenze della prima.

Dimostreremo che ogni A_{p_4} di questa natura si può ricavare da uno prospettivo nel modo indicato nel § precedente.

21. *Per ogni elemento* P_i *di* f_i *esistono due coppie di elementi di* f_h, f_k *che con* P_i *formano un gruppo apolare per l'*A_{p_4}.

Sia dato un A_{p_4} su quattro forme f_1, f_2, f_3, f_4. Due elementi P'_4, P''_4 di f_4 determinano due A_{p_3} che ammettono ∞^1 elementi comuni.

Infatti preso un punto arbitrario P_3 di f_3, le coppie P'_4, P_3 e P''_4, P_3 determinano su f_1, f_2 due A'_{p_2}, A''_{p_2} che hanno (in generale) due gruppi comuni A_1, A_2 e B_1, B_2. Ne segue che $A_1A_2P_3P'_4$ e $B_1B_2P_3P''_4$ sono gruppi di A_{p_4}, e quindi il gruppo $A_1A_2P_3$ è apolare. Lo stesso può dirsi di $B_1B_2P_3$.

22. *Un aggruppamento proiettivo del 4° ordine A_{p_4} è individuato, quando si conoscono gli aggruppamenti A'_{p_3}, A''_{p_3} polari di due elementi P'_4, P''_4 e un suo gruppo* (P_1, P_2, P_3, P_4).

L'A_{p_3} polare di P_h è interamente determinato dai dati suddetti. Infatti esso deve contenere i gruppi G_2 formati da P'_4 coi gruppi dell'A'_{p_2} polare di P_h rispetto ad A'_{p_3}, da P''_4 coi gruppi dell'A''_{p_2} polari di P_h rispetto ad A''_{p_3} e il gruppo (P_i, P_k, P_l) (§ 11).

Parimente è determinato l'aggruppamento polare di un punto arbitrario M_h di f_h. Infatti esso deve contenere i gruppi G_2 formati da P'_4 o P''_4 con i gruppi dell'A'_{p_2} o A''_{p_2} polari di M_h rispetto ad A'_{p_3}, A''_{p_3}, ed un gruppo formato da P_4 con un gruppo G_2 polare di M rispetto all'A_{p_3} polare di M_h.

Infine è facile vedere che è determinato anche l'aggruppamento polare di un punto M_4 di f_4. Segue da ciò.

Gli aggruppamenti proiettivi del 4° ordine sono ∞^{15}.

Infatti per determinare A'_{p_3}, A''_{p_3} e il gruppo $(P_1P_2P_3P_4)$ occorrono rispettivamente 7, 7, 1 condizioni, poichè dei quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 tre sono arbitrari.

23. Dato un A_{p_4}, tutti gli aggruppamenti polari di f_4, per es., si dice che costituiscono un *fascio.*

I gruppi comuni a due aggruppamenti di un fascio sono i gruppi apolari di f_1, f_2, f_3, ed appartengono anche a tutti gli altri aggruppamenti del fascio. Dunque tutti gli aggruppamenti di un fascio hanno in comune gli ∞^1 gruppi di due fasci.

Esiste uno ed un sol fascio che contiene due aggruppamenti A'_{p_3}, A''_{p_3} dati ad arbitrio

La dimostrazione di questo teorema è identica a quella del § 12.

In altre parole: due A'_{p_3}, A''_{p_3} individuano un fascio. Se due fasci hanno due aggruppamenti comuni coincidono.

24. *Ogni A_{p_4} si può trasformare in uno prospettivo* $(A_0)_4$.

Sia dato un A_{p_4} su quattro rette f_1, f_2, f_3, f_4; esso determina un fascio di A_{p_3} su f_1, f_2, f_3. Consideriamo due aggruppamenti A_{p_3}, A'_{p_3} polari di due punti U_4, V_4, e siano (H_1, H_2) (H'_1, H'_2) le coppie apolari per A_{p_3} e (K_1, K_2) (K'_1, K'_2) le coppie apolari per A'_{p_3} su f_1, f_2.

Scelto un punto O su H_1H_2 ed uno O_1 su K_1K_2, sia r_3 la retta comune ai piani $OH'_1H'_2$, $O_1K'_1K'_2$. Si possono trasformare A_{p_3}, A'_{p_3} in due prospettivi su f_1, f_2, r_3 rispetto ai centri O, O_1 (§ 13).

Considerando ora l'$(A_0)_4$ prospettivo su $f_1, f_2, r_3, r_4 = (OO_1)$, questo individua su f_1, f_2, r_3 un fascio di A_{p_3}, che ha col precedente due aggruppamenti comuni. I due fasci dunque coincidono, e quindi tutti gli aggruppamenti A_{p_3} del fascio precedentemente considerato su f_1, f_2, r_3 sono prospettivi.

Sia S_1, S_2, S_3 un gruppo polare di un punto S_4 di f_4. Allora stabilita una proiettività fra f_4 e r_4 in guisa che sia

$$(U_4 V_4 S_4) \barwedge (O O_1 S'_4)$$

essendo S'_4 il punto comune a r_4 ed al piano $S_1 S_2 S'_3$ (S'_3 corrispondente di S_3 su r_3) l'A_{p_4} si trasforma nell'$(A_0)_4$ prospettivo.

25. *In ogni* A_{p_4} *esistono due gruppi* (H_1, H_2, H_3, H_4), (K_1, K_2, K_3, K_4) *tali che tre punti qualunque di un gruppo formano una terna apolare.*

Trasformato A_{p_4} in uno $(A_0)_4$ prospettivo, i gruppi suddetti sono quelli determinati dalle rette che si appoggiano sui sostegni.

Chiameremo i gruppi suddetti *gruppi base.*

Per mezzo del teorema precedente si può semplificare la trasformazione di un A_{p_4} in uno prospettivo $(A_0)_4$, quando si conoscano i gruppi base.

Sieno (H_1, H_2, H_3, H_4), (K_1, K_2, K_3, K_4) i gruppi base, (R_1, R_2, R_3, R_4), un gruppo appartenente ad A_{p_4}.

Scelte quattro rette sghembe due a due r_1, r_2, r_3, r_4, sieno $(H'_1 H'_2, H'_3, H'_4$ e $K'_1, K'_2, K'_3, K'_4)$ i punti d'incontro di esse colle corde comuni e R'_1, R'_2, R'_3, R'_4 i punti d'incontro con un piano arbitrario.

Stabilite fra f_i ed r_i quattro proiettività in guisa che sia

$$(H_i K_i R_i) \barwedge (H'_i K'_i R'_i)$$

si trasforma l'A_{p_4} nell'$(A_0)_4$ prospettivo.

VII. — Involuzioni di 4° ordine.

26. Consideriamo un A_{p_4} su quattro rette f_1, f_2, f_3, f_4, e supponiamo che f_3 e f_4 coincidano.

Prendiamo una coppia di punti P_1, P_2 su f_1, f_2, e siano H_3, H_4 e K_3, K_4 le due coppie che con P_2 formano un gruppo apolare per f_2, f_3, f_4. Affinchè l'A_{p_4} determinata da P_1, P_2 sia involutoria, qualunque sia P_1, è necessario e sufficiente che coincidano H_3, K_4 e H_4, K_3. Se questa condizione è verificata, essa è verificata anche supponendo che P_2 vari sulla f_2. Infatti H_3, H_4, K_3, K_4 percorrono su f_3 punteggiate proiettive a P_2, e quindi fra loro, e siccome una coppia si corrisponde in doppio modo, tutte si corrispondono in doppio modo.

In simil guisa, supposto che f_1, f_2, f_3, f_4 coincidano tutte, si può stabilire la condizione affinchè tutte le proiettività su $f_i f_k$ determinate da due punti di f_0 siano involuzioni.

Allora diremo che l'A_{p_4} è un'*involuzione* I_4.

Bibliografia.

AUGUST. — *De superficibus tertii ordinis;* Diss. inaug. — Berolini 1862.

SCHUBERT. — *Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden,* Math-Ann. Bd XVII.

LE PAIGE — *Mémoire sur quelques applications de la théorie de formes algebriques;* Mémoires couronnés publiés par l'Acad. R. des sciences de Belgiques. T. XLII; 1859.

— — *Note sur l'hanographie des troisieme ordre* Bulletin de l'Acad. de Belgique. III série. T. V. 1883.

CASTELNUOVO. — *Studio sull'omografia di seconda specie;* Atti del R. Ist. Veneto. Serie VI. T. V.

THIEME. — *Die definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme.* — Zeitschrift für Mat. und Phisik, Bd. 24.

WIENER. — *Rein geometrischen Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden;* Darmstadt 1885.

SCHUMACHER. — *Die Punktsysteme auf der Geraden und ihre Anwendung zur Erzeugung der Algebraischen ebenen Curven;* Journal für die reine und Angewandte Mat. T. 110 e 111 Berlin 1892-1893.

BENNO KLEIN. — *Theorie der trilinear-simmetrischen Elementargebilde.* Marburg. Elvert'sche Buchandlung. 1881.

— — *Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde;* Theil I. *Das Tripelnetz.* Ann. di Mat. S. II. T. 18. Milan 1890. Theil II. *Das Tripelgebiet.* Ann. di Mat. S II. T. 19. Milano 1891.

DE PAOLIS. — *Dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire fra i loro elementi;* Memorie della società dei XL. Serie III. T. VII. 1889.

— — *Le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª specie;* Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino. Serie II. T. XLII. 1892.

— — *Teoria delle corrispondenze proiettive e degli aggruppamenti proiettivi nelle forme fondamentali a due dimensioni;* Rend. della R. Acc. dei Lincei. Serie V. Volume III. 1894.

G. LAZZERI.

NOTA SULLA CONCOIDE DI DE SLUSE (*)

Sieno O un punto e d una retta fissa; una retta mobile, passante per O incontra d in P; si prendano su OP due segmenti eguali PM e PM' tali che sia

$$\mathrm{OP} \times \mathrm{MP} = \mathrm{OP} \times \mathrm{PM'} = \mathrm{K}^2 \,(\text{cost.});$$

il luogo dei punti M e M' si compone di due *concoidi* dette di *de Sluse* (si suppone M posto fra P ed O).

Indichiamo con $\mathrm{OA} = a$ la distanza di O dalla retta d; prendiamo O per polo ed OA per asse polare.

L'equazione polare della concoide, luogo di M, sarà

$$\frac{a}{\cos\theta}\left(\frac{a}{\cos\theta} - r\right) = k^2,$$

(*) Questa nota mi è stata suggerita dalla generalizzazione data dal sig. CARDOSO-LAYNES, del teorema della quistione 1897 dell'*Intermédiaire des mathématiciens*.

ossia

(1) $$r=\frac{a^2-k^2\cos^2\theta}{a\cos\theta}.$$

L'equazione polare della concoide luogo di M' è analogamente

$$\frac{a}{\cos\theta}\left(r-\frac{a}{\cos\theta}\right)=k^2,$$

ossia

(2) $$r=\frac{a^2+k^2\cos^2\theta}{a\cos\theta}.$$

Le equazioni (1), (2) in coordinate cartesiane divengono

(3) $$ax(x^2+y^2)=(a^2-k^2)x^2+a^2y^2$$

(4) $$ax(x^2+y^2)=(a^2+k^2)x^2+a^2y^2.$$

Queste due concoidi, che possono chiamarsi *gemelle*, sono cubiche circolari unicursali, dotate di asse di simmetria ed hanno ambedue per assintoto la retta d.

La curva (4), qualunque siano i valori di a e di k ha sempre la stessa forma; ha un vertice con la tangente parallela a d ed un punto isolato in O.

La curva (3) ha forma analoga alla curva (4), quando è $k<a$; se è invece $k=a$, essa diviene la *cissoide retta* avente OA per tangente di regresso; se poi è $k>a$, allora ha un punto doppio e un vertice. In quest' ultimo caso si ha una curva del genere della strofoide retta. D'altra parte per $k^2=2a^2$ la curva (3) è effettivamente una *strofoide retta*.

Le due equazioni (3) e (4) si possono scrivere

(5) $$y^2=x^2\left[\frac{\left(a-\frac{k^2}{a}\right)-x}{x-a}\right].$$

(6) $$y^2=x^2\left[\frac{\left(a+\frac{k^2}{a}\right)-x}{x-a}\right].$$

Le due concoidi (5) e (6) hanno dunque un'equazione del tipo

(7) $$y=x\sqrt{\frac{\alpha-x}{x-\beta}}.$$

Osservazione. — Le *concoidi di de Sluse* possono anche definirsi come *podarie di una parabola rispetto a un punto del suo asse.*

Ricerchiamo alcune formule e proprietà delle curve (7) per applicarle poi alle curve (5) e (6), facendo

(8) $$\alpha=a\mp\frac{k^2}{a}\quad \beta=a.$$

I. *Calcolo dell'area finita compresa fra la curva* (7) *ed il suo assintoto.* Si può porre

$$\frac{\alpha-x}{x-\beta}=\tan^2\varphi;$$

da cui

$$x = \alpha \cos^2 \varphi + \beta \operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$y = x \tan \varphi = \alpha \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \frac{\beta \operatorname{sen}^3 \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = 2(\beta - \alpha) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi.$$

Ma il differenziale dell'area U, racchiusa fra la curva l'asse delle x e due ordinate, ha per espressione

$$d\mathrm{U} = y\, dx = 2(\beta - \alpha)[\alpha \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi + \beta \operatorname{sen}^4 \varphi]\, d\varphi.$$

Se integriamo fra $x = \beta$ e $x = \alpha$, cioè fra $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = 0$, si ha per l'area totale

$$\mathrm{U} = 4(\alpha - \beta)\left[\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi\, d\varphi + \beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \varphi\, d\varphi\right].$$

Ma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{16} \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \varphi\, d\varphi = \frac{3\pi}{16},$$

dunque

$$\mathrm{U} = \frac{\pi(\alpha - \beta)(\alpha + 3\beta)}{4}. \tag{9}$$

S'intende bene che quando la curva (7) ha un punto doppio, l'area U indica la differenza fra l'area della *foglia* e l'area compresa fra il resto della curva e l'assintoto, avendo queste due aree segno contrario.

Se è $\alpha = -3\beta$, l'equazione (7) diviene

$$y = x\sqrt{\frac{x + 3\beta}{\beta - x}}. \tag{10}$$

Questa è l'equazione della *trisettrice di Mac-Laurin*, e siccome si ha in tal caso $\mathrm{U} = 0$, resulta che *l'area della foglia della trisettrice di Mac-Laurin è equivalente all'area compresa fra il resto della curva e il suo assintoto.*

Sostituendo i valori di α e β dati dalla (8) nella (9) si ha

$$\mathrm{U} = \frac{\pi k^2}{4a^2}(k^2 \mp 4a^2). \tag{11}$$

Le due concoidi (5) e (6) hanno dunque rispettivamente per area

$$\mathrm{U}_1 = \frac{\pi k^2}{4a^2}(k^2 - 4a^2) \quad , \quad \mathrm{U}_2 = \frac{\pi k^2}{4a^2}(4a^2 + k^2). \tag{12}$$

La prima mostra che se è $k < 2a$, *l'area compresa fra le due concoidi che sono assintotiche l'una all'altra è* $2\pi k^2$.

Se è $k > 2a$ quest'area è $\frac{\pi k^4}{2a^2}$.

Se è $k=2a$, $U_1=0$, la curva (5) è una *trisettrice di Mac-Laurin.* L'area compresa fra questa curva e la sua gemella è $8\pi a^2$.

Se è $k=a$, la (5) è una *cissoide retta;* la sua area e quella della curva gemella sono respettivamente

$$U_1=\frac{3\pi a^2}{4} \quad , \quad U_2=\frac{5\pi a^2}{4}.$$

L'area compresa fra le due curve è dunque $2\pi a^2$.

Se è $k=a\sqrt{2}$, la (5) è una *strofoide retta;* la sua area e quelle delle curve gemelle sono respettivamente

$$U_1=\pi a^2 \quad , \quad U_2=3\pi a^2.$$

L'area compresa fra le due curve è $4\pi a^2$.

II. *Equazione della tangente e della normale in un punto della curva* (7).

L'equazione (7) può scriversi

$$x(x^2+y^2)=\alpha x^2+\beta y^2.$$

Ponendo $y=tx$, si ha per le coordinate di un punto, in funzione di t:

$$x=\frac{\alpha+\beta t^2}{1+t^2} \quad , \quad y=\frac{\alpha t+\beta t^3}{1+t^2}. \tag{13}$$

L'equazione della tangente in questo punto è

$$(X-x):\frac{dx}{dt}=(Y-y):\frac{dy}{dt}. \tag{14}$$

Ma

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2(\beta-\alpha)t}{(1+t^2)^2} \quad , \quad \frac{dy}{dt}=\frac{\alpha(1-t^2)+\beta(3t^2+t^4)}{(1+t^2)^2}; \tag{15}$$

quindi sostituendo con i valori (13) e (15) nella (14), si trova per l'equazione della tangente

$$X\{\alpha(1-t^2)+\beta(3t^2+t^4)\}+2y(\alpha-\beta)t=(\alpha+\beta t^2)^2. \tag{16}$$

L'equazione della normale nel medesimo punto (13) è

$$(X-x)\frac{dx}{dt}+(Y-y)\frac{dy}{dt}=0$$

ossia

$$2(\beta-\alpha)tX+Y[\alpha(1-t^2)+\beta(3t^2+t^4)]=t(\alpha+\beta t^2)[\beta(t^2+2)-\alpha]. \tag{17}$$

Le formole (16) e (17), nelle quali t non è altro che $\tan\varphi$, usata precedentemente, sono di assai facile applicazione.

Nei casi particolari seguenti si ha:

1°. $\alpha=0$ *(Cissoide retta).*
Tangente $X(3t^2+t^4)-2tY=\beta t^4$.
Normale $2tX+Y(3t^2+t^4)=\beta t^3(t^2+2)$.

2°. $\beta=-\alpha$ *(Strofoide retta).*
Tangente $X(1-4t^2-t^4)+4tY=\alpha(1-t^2)^2$.
Normale $4tX-Y(1-4t^2-t^4)=-\alpha t(1-t^2)(t^2+3)$.

3°. $\alpha = -3\beta$ *(Trisettrice di Mac-Laurin).*

Tangente $X(t^4 + 6t^2 - 3) - 8tY = \beta(t^2 - 3)^2$.

Normale $8tX + Y(t^4 + 6t^2 - 3) = \beta t(t^2 - 3)(t^2 + 5)$.

III. *Da un punto* (X, Y) *si conducano le quattro tangenti e si abbassino le cinque normali alla cubica* (7); *trovare i coefficienti angolari delle rette che congiungono l'origine* O *ai punti di contatto delle tangenti ed ai piedi delle normali.*

Le equazioni (16) e (17), ordinate rispetto a t, dànno:

$$(18)\quad \beta t^4(X-\beta)+t^2[X(3\beta-\alpha)-2\alpha\beta]+2(\alpha-\beta)tY+\alpha(X-\alpha)=0.$$

$$(19)\quad \beta^2t^5-3Yt^4+2\beta^2t^3-Y(3\beta-\alpha)t^2+\{\alpha(2\beta-\alpha)-2(\beta-\alpha)X\}t-\alpha Y=0.$$

Se indichiamo con t_1, t_2, t_3, t_4 i coefficienti angolari dati dalla (18) e con T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 quelli dati dalla (19), avremo:

$$(20)\quad \Sigma t_1 = 0 \quad , \quad \Sigma t_1t_2 = \frac{X(3\beta-\alpha)-2\alpha\beta}{\beta(X-\beta)},$$

$$\Sigma t_1t_2t_3 = \frac{2(\beta-\alpha)Y}{\beta(x-\beta)} \quad , \quad t_1t_2t_3t_4 = \frac{\alpha(X-\alpha)}{\beta(Y-\beta)}.$$

$$(21)\quad \Sigma T_1 = \frac{Y}{\beta} \quad , \quad \Sigma T_1T_2 = 2 \quad , \quad \Sigma T_1T_2T_3 = \frac{Y(3\beta-\alpha)}{\beta^2},$$

$$\Sigma T_1T_2T_3T_4 = \frac{\alpha(2\beta-\alpha)-2(\beta-\alpha)X}{\beta^2} \quad , \quad T_1T_2T_3T_4T_5 = \frac{\alpha Y}{\beta^2}.$$

Ne derivano moltissime proprietà di luoghi geometrici come i seguenti:

1°. Si ha $\Sigma t_1 = 0$, $\Sigma T_1T_2 = 2$.

2°. Il luogo dei punti (X, Y) tali che le espressioni Σt_1t_2, $\Sigma t_1t_2t_3$, $\Sigma t_1t_2t_3t_4$, ΣT_1, ΣT_1T_2, $\Sigma T_1T_2T_3$, $\Sigma T_1T_2T_3T_4$, $T_1T_2T_3T_4T_5$ sieno costanti, sono linee rette.

3°. Il luogo dei punti tali che sia

$$t_1t_2t_3t_4 + T_1T_2T_3T_4T_5 = \text{cost.}$$

è un' *iperbole equilatera.*

Per mezzo delle (20) e (21) si potrebbero trovare moltissimi altri luoghi geometrici analoghi costituiti da coniche.

IV. *Si conduce per ogni punto* M *della curva* (7) *la retta* OM *che incontra l'assintoto in* P. *La perpendicolare condotta in* P *all'assintoto incontra la normale in* M *in un punto* N *e la tangente in* M *in un punto* T. *Il luogo del punto* N *è una* parabola; *quello del punto* T *è una* quintica.

La retta OP, avendo per equazione $Y = tX$, facendo $X = \beta$, si ha per l'ordinata del punto P il valore $t\beta$. L'equazione della retta condotta in P perpendicolarmente all'assintoto è dunque

$$(22)\qquad Y = t\beta.$$

Il luogo del punto N si ottiene eliminando t fra le equazioni (17) e (22), e si ha

$$2(\beta-\alpha)\frac{X}{\beta} + \frac{Y^2}{\beta^2}(3\beta-\alpha) + \frac{Y^4}{\beta^3} + \alpha = \frac{(\alpha\beta+Y^2)}{\beta^2}\left[\frac{Y^2}{\beta} + (2\beta-\alpha)\right],$$

ovvero, dopo fatte le riduzioni e dopo aver soppresso il fattore $(\beta-\alpha)$:

$$Y^2+2\beta X-\alpha\beta=0 \tag{23}$$

che rappresenta una parabola avente per asse Ox, ed il cui vertice ha per coordinate

$$X=\frac{\alpha}{2} \quad , \quad Y=0.$$

Il luogo del punto T si ottiene analogamente, eliminando t fra le (16) e (22). Si ha così la *quintica:*

$$X[Y^4+\beta(3\beta-\alpha)\;Y^2+\alpha\beta^3]=\beta[Y^4+2\beta^2Y^2+\alpha^2\beta^2]. \tag{24}$$

Le espressioni racchiuse nelle due parentesi quadre sono divisibili l'una per l'altra se si ha

$$\frac{3\beta-\alpha}{2\beta}=\frac{1}{\alpha}=1 \quad \text{o} \quad \alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2=0 \quad , \quad (\alpha-\beta)(\alpha-2\beta)=0.$$

È dunque soltanto per $\alpha=\beta$, cioè, quando la cubica (7) si decompone in tre rette, che l'equazione (24) si riduce alla retta $x=\beta$.

Osservazione. — La parabola (23), relativa alla concoide (5), ha per equazione

$$Y^2+2aX-a^2+k^2=0 \tag{25}$$

La parabola analoga relativa alla concoide (6) ha per equazione

$$Y^2+2aX-a^2-k^2=0. \tag{26}$$

Le quintiche (24) relative alle concoidi (5) e (6) hanno rispettivamente per equazioni

$$XY^4+aXY^2\left(2a+\frac{k^2}{a}\right)+a^3X\left(a-\frac{k^2}{a}\right)=aY^4+2a^3Y^2+a^3\left(a-\frac{k^2}{a}\right)^2, \tag{27}$$

$$XY^4+aXY^2\left(2a-\frac{k^2}{a}\right)+a^3X\left(a+\frac{k^2}{a}\right)=aY^4+2a^3Y^2+a^3\left(a+\frac{k^2}{a}\right)^2. \tag{28}$$

Supponendo che k vari mentre l'assintoto comune alle due concoidi (5) e (6) rimane fisso, si trova per il luogo dei punti d'incontro delle quintiche (27) e (28) la cubica

$$X(Y^2-a^2)+2a^3=0. \tag{29}$$

V. *Luogo dei punti d' incontro della tangente in* M *alla concoide* (5) *con la tangente in* M' *alle concoidi gemelle* (6).

L'equazione (16), dando ad α, β i valori dati dalla (8), ed avendo k^2 successivamente i segni $-$ e $+$, diviene

$$X\left[a(1+t^2)^2-\frac{k^2}{a}(1-t^2)\right]-\frac{2Yk^2t}{a}=\left[a(1+t^2)-\frac{k^2}{a}\right]^2$$

$$X\left[a(1+t^2)^2+\frac{k^2}{a}(1-t^2)\right]+\frac{2Yk^2t}{a}=\left[a(1+t^2)+\frac{k^2}{a}\right]^2.$$

Queste due equazioni, risolute rispetto ad X ed Y, dànno per le coordinate di un punto del luogo

$$X = a + \frac{k^4}{a^3(1+t^2)^2} \quad , \quad X(1-t^2) + 2tY = 2a(1+t^2).$$

Facendo $t = \tan\varphi$, le precedenti equazioni divengono

$$(X-a)\,a^3 = K^4 \cos^4\varphi \quad , \quad X\cos 2\varphi + Y \operatorname{sen} 2\varphi = 2a$$

Resta ora da eliminare φ fra le due ultime equazioni: la prima di esse dà

$$1 + \cos 2\varphi = \frac{2a}{k^2}\sqrt{a(X-a)}.$$

Sostituendo il valore di $\cos 2\varphi$ nella seconda e rendendo razionale l'equazione ottenuta, si trova per l'equazione del luogo

$$\left[(X^2+Y^2)\left\{\frac{4a^3}{k^4}(X-a)+1\right\} + 4aX + 4a^2 - Y^2\right]^2 =$$
$$= \frac{16a^3}{k^4}(X-a)(X^2+Y^2+2aX)^2.$$

Questa rappresenta una *sestica unicursale*, che ha un punto doppio e due assintoti.

Le coordinate di un punto della curva, in funzione di φ, sono

$$(30) \qquad X = a + \frac{k^4}{a^3}\cos^4\varphi \quad , \quad Y = \frac{2a - a\cos 2\varphi - \frac{k^4}{a^3}\cos^4\varphi\cos 2\varphi}{\operatorname{sen} 2\varphi}.$$

Per $\varphi = 0$ si ha

$$X = a + \frac{k^4}{a^3} \quad , \quad Y = \infty.$$

Per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ si ha

$$X = a \qquad , \qquad Y = \infty.$$

La curva ha dunque due assintoti paralleli $X = a + \frac{K^4}{a^3}$ e $X = a^3$. Essa è costituita da due rami che si tagliano in un punto sull'asse $Y = 0$.

Si può facilmente determinare l'area della curva (30). Si ha

$$\frac{dU}{d\varphi} = Y \cdot \frac{dX}{d\varphi}.$$

Ma

$$\frac{dX}{d\varphi} = -\frac{4k^4}{a^3}\cos^3\varphi \operatorname{sen}\varphi,$$

dunque

$$\frac{dU}{d\varphi} = \frac{2k^4}{a^3}\cos^2\varphi\left[\frac{k^4}{a^3}\cos^4\varphi\cos 2\varphi + a\cos 2\varphi - 2a\right],$$

ossia

$$\frac{dU}{d\varphi} = \frac{2k^4}{a^3}\left[\frac{2k^4}{a^3}\cos^8\varphi - \frac{k^4}{a^3}\cos^6\varphi + 2a\cos^4\varphi - 3a\cos^2\varphi\right].$$

L'area totale U compresa fra la curva e i suoi assintoti è dunque

$$U = \frac{4k^4}{a^3}\left[\frac{2k^4}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8\varphi d\varphi - \frac{k^4}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi d\varphi + \right.$$

$$\left. + 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi - 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi\right].$$

Ma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi = \frac{3\pi}{16},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi d\varphi = \frac{5\pi}{32} \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8\varphi d\varphi = \frac{35\pi}{256},$$

dunque

$$U = \frac{3\pi k^4 (5k^4 - 16a^4)}{32a^6}.$$

Se è $k = \frac{2a}{\sqrt[4]{5}}$, è $U = 0$, cioè l'area compresa fra la curva e uno degli assintoti è equivalente all'area compresa fra il resto della curva e l'altro assintoto.

Se è $k = a$ la curva (5) è una cissoide retta. La (30) è allora una curva analoga alla curva gemella (6) avente lo stesso vertice e lo stesso assintoto di questa. In tal caso si ha

$$U = \frac{33\pi a^2}{32}.$$

VI. *Luogo dei punti d'incontro della normale in* M *alla concoide* (5) *con la normale in* M' *alla concoide gemella* (6).

L'equazione (17), dando ad α, β i valori dati dalla (8), e k avendo successivamente i segni — e +, diviene

$$2tX\frac{k^2}{a} + Y\left[a(1+t^2)^2 - \frac{k^2}{a}(1-t^2)\right] = t\left[a^2(t^2+1)^2 - \frac{k^4}{a^2}\right],$$

$$-2tX\frac{k^2}{a} + Y\left[a(1+t^2)^2 + \frac{k^2}{a}(1-t^2)\right] = t\left[a^2(t^2+1)^2 - \frac{k^4}{a^2}\right];$$

da cui, risolvendo rispetto a X e Y:

(31) $$Y = t\left[a - \frac{k^4}{a^3(1+t^2)^2}\right].$$

(32) $$X = \frac{Y(1-t^2)}{2t} = \frac{(1-t^2)}{2}\left[a - \frac{k^4}{a^3(1+t^2)^2}\right].$$

Dalla (32) si deduce

(33) $$4t^2X^2 = Y^2[(1+t^2)^2 - 4t^2]$$

$$4t^2(X^2+Y^2) = Y^2(1+t^2)^2,$$

e sostituendo il valore

$$\frac{1}{(1+t^2)^2} = \frac{Y^2}{4t^2(X^2+Y^2)}$$

nella (31), si ha

$$Y = at - \frac{k^4 Y^2}{4a^3(X^2+Y^2)t},$$

ossia

$$at^2 - tY - \frac{k^4 Y^2}{4a^3(X^2+Y^2)} = 0.$$

Eliminando t fra questa e l'equazione

$$t^2 Y + 2tX - Y = 0,$$

si ha per l'equazione del luogo proposto:

$$8a^3(X^2+Y^2)(Y^2+2aX)[2a^3(X^2+Y^2)+k^4X] = [k^4Y^2 - 4a^4(X^2+Y^2)]^2.$$

Questa rappresenta una *sestica bicircolare* ed unicursale con un punto quadruplo nell'origine.

Per $Y=0$ si ha $X=0$, $X=\frac{a^4-k^4}{2a^3}$ (punto doppio).

Per $X=0$ si ha $Y=0$, $Y=\frac{k^4-4a^4}{4a^3}$.

Gli assintoti paralleli all'asse delle x vanno a distanza infinita, cioè la curva ha due rami parabolici.

Se $k=a$, la (5) è una cissoide retta e la sestica ha una cuspide in O.

E. N. BARISIEN.

Sulle leggi operative dell'Aritmetica

Già da qualche anno nei libri di aritmetica proposti per le scuole secondarie (*) vediamo adottata la massima di definire le operazioni aritmetiche sopra i numeri interi mediante le così dette *leggi di formazione* e di dimostrare poi rigorosamente le proprietà caratteristiche di dette operazioni eliminando qualsiasi aiuto intuitivo, qualsiasi deduzione che non sia logica conseguenza delle leggi di formazione e delle proprietà precedentemente dimostrate.

Mi sembra però che tale scopo si potrebbe più facilmente e sicuramente conseguire col simbolismo di cui ora dò un cenno: simbo-

(*) P. GAZZANIGA, *Libro d'aritmetica e d'algebra elementare*, terza edizione. Padova, 1900.

lismo che, oltre a mettere meglio in luce l'essenza delle leggi di formazione e le analogie fra le varie operazioni, mi sembra possa essere utile anche per rendere più difficile l'incosciente ricorso ad aiuti intuitivi, per dare una più intima conoscenza del meccanismo delle operazioni, per aprire eventualmente la via ad una teorica generale delle operazioni stesse.

§ I.

1. Sia data la *successione naturale dei num.*: $1, 2, 3, \ldots, a, \ldots$ ed indichiamo col simbolo a_s il *successivo* del numero a.

2. Se due scritture A e B indicano le stesso numero, si dice che A *eguale a* B e si scrive: $A = B$.

3. Da $A = B$ e $B = C$ possiamo dunque concludere che $A = C$. Se una scrittura A indicante un numero a fa parte di una scrittura C indicante un numero c, si intende che in C venga posto a in luogo di A; quindi, se $A = B$ e D si ottiene da C colla semplice sostituzione di A con B, è necessariamente $C = D$. Invece poi di: " $A_1 = A_2, A_2 = A_3, \ldots, A_i = A_{i_s}$ *e quindi* $A_1 = A_{i_s}$ " si scrive compendiosamente: " $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_{i_s}$ ".

4. Indichiamo ora col simbolo: $f_1(a, b)$ il numero che si ottiene dai numeri dati a e b mediante la seguente *legge di formazione*:

$$f_1(a, 1) = a_s \quad , \quad f_1(a, b_s) = (f_1(a, b))_s.$$

Indichiamo poi successivamente coi simboli:

$$f_2(a, b),\ f_3(a, b), \ldots, f_{i_s}(a, b), \ldots$$

i numeri ottenuti colle *leggi di formazione:*

$$\begin{aligned} f_2(a, 1) &= a \quad , \quad f_2(a, b_s) = f_1(f_2(a, b), a); \\ f_3(a, 1) &= a \quad , \quad f_3(a, b_s) = f_2(f_3(a, b), a); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ f_{i_s}(a, 1) &= a \quad , \quad f_{i_s}(a, b_s) = f_i(f_{i_s}(a, b), a); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(*)} \end{aligned}$$

5. Dimostriamo le *principali proprietà di tali operazioni.*

(I) $$f_1(f_1(a, b), c) = f_1(a, f_1(b, c)).$$

Per $c = 1$ essa è vera perchè:

$$f_1(f_1(a, b), 1) = (f_1(a, b))_s = f_1(a, b_s) = f_1(a, f_1(b, 1));$$

ammessa per $c = x$ essa è vera anche per $c = x_s$ perchè:

$$\begin{aligned} f_1(f_1(a, b), x_s) &= (f_1(f_1(a, b), x))_s = (f_1(a, f_1(b, x)))_s = \\ &= f_1(a, (f_1(b, x))_s) = f_1(a, f_1(b, x_s)); \end{aligned}$$

essa è dunque vera sempre.

(II) $$f_1(a, b) = f_1(b, a).$$

(*) È ovvio notare l'identità dei simboli: a_s, $f_1(a, b)$, $f_2(a, b)$, $f_3(a, b)$ rispettivamente coi noti simboli: $a + 1$, $a + b$, $a \cdot b$, a^b.

Per $a=b=1$ essa è evidente; ammessa per $a=1$ e $b=x$ essa è vera anche per $a=1$ e $b=x_s$ perchè:

$$f_1(1, x_s)=(f_1(1, x))_s=(f_1(x, 1))_s=(x_s)_s=f_1(x_s, 1);$$

essa è dunque vera sempre per $a=1$; ammessa poi per $a=y$ essa è vera anche $a=y_s$ perchè:

$$f_1(y_s, b)=f_1(f_1(y, 1), b)=f_1(y, f_1(1, b))=f_1(y, f_1(b, 1))=$$
$$=f_1(f_1(y, b), 1)=f_1(f_1(b, y), 1)=f_1(b, f_1(y, 1))=f_1(b, y_s);$$

essa è dunque vera sempre.

(III) $$f_2(f_1(a, b), c)=f_1(f_2(a, c), f_2(b, c)).$$

Per $c=1$ essa è vera perchè:

$$f_2(f_1(a, b), 1)=f_1(a, b)=f_1(f_2(a, 1), f_2(b, 1));$$

ammessa poi per $c=x$ essa è vera anche per $c=x_s$ perchè:

$$f_2(f_1(a, b), x_s)=f_1(f_2(f_1(a, b), x), f_1(a, b))=f_1(f_1(f_2(a, x), f_2(b, x)), f_1(a, b))=$$
$$=f_1(f_2(a, x), f_1(f_2(b, x), f_1(b, a)))=f_1(f_2(a, x), f_1(f_1(f_2(b, x), b), a))=$$
$$=f_1(f_2(a, x), f_1(a, f_2(b, x_s)))=f_1(f_1(f_2(a, x), a), f_2(b, x_s))=f_1(f_2(a, x_s), f_2(b, x_s));$$

essa è dunque vera sempre.

(IV) $$f_2(a, b)=f_2(b, a).$$

Per $a=b=1$ essa è evidente; ammessa per $a=1$ e $b=x$ essa è vera anche per $a=1$ e $b=x_s$ perchè:

$$f_2(1, x_s)=f_1(f_2(1, x), 1)=(f_2(x, 1))_s=x_s=f_2(x_s, 1);$$

essa è dunque vera sempre per $a=1$; ammessa poi per $a=y$ essa è vera anche per $a=y_s$ perchè:

$$f_2(y_s, b)=f_2(f_1(y, 1), b)=f_1(f_2(y, b), f_2(1, b))=$$
$$=f_1(f_2(b, y), f_2(b, 1))=f_1(f_2(b, y), b)=f_2(b, y_s);$$

essa è dunque vera sempre.

(V) $$f_2(a, f_1(b, c))=f_1(f_2(a, b), f_2(a, c)).$$

Infatti:

$$f_2(a, f_1(b, c))=f_2(f_1(b, c), a)=f_1(f_2(b, a), f_2(c, a))=f_1(f_2(a, b), f_2(a, c)).$$

(VI) $$f_2(a, f_2(b, c))=f_2(f_2(a, b), c).$$

Per $c=1$ essa è vera perchè:

$$f_2(a, f_2(b, 1))=f_2(a, b)=f_2(f_2(a, b), 1);$$

ammessa poi per $c=x$ essa è vera anche per $c=x_s$ perchè:

$$f_2(a, f_2(b, x_s))=f_2(a, f_1(f_2(b, x), b))=f_1(f_2(a, f_2(b, x)), f_2(a, b))=$$
$$=f_1(f_2(f_2(a, b), x), f_2(a, b))=f_2(f_2(a, b), x_s);$$

essa è dunque vera sempre.

(VII) $$f_3(a, f_1(b, c))=f_2(f_3(a, b), f_3(a, c)).$$

Per $c=1$ essa è vera perchè:

$$f_3(a, f_1(b, 1)) = f_3(a, b_s) = f_2(f_3(a, b), a) = f_2(f_3(a, b), f_3(a, 1)) :$$

ammessa per $c=x$ essa è vera anche per $c=x_s$ perchè:

$$f_3(a, f_1(b, x_s)) = f_3(a, (f_1(b, x))_s) = f_2(f_3(a, f_1(b, x)), a) =$$
$$= f_2(f_2(f_3(a, b), f_3(a, x)), a) = f_2(f_3(a, b), f_2(f_3(a, x), a)) = f_2(f_3(a, b), f_3(a, x_s)) ;$$

essa è dunque vera sempre.

In modo affatto analogo si avrebbe potuto dimostrare la (V) servendosi solo della (I).

(VIII) $$f_3(f_2(a, b), c) = f_2(f_3(a, c), f_3(b, c)).$$

Vale una dimostrazione affatto analoga a quella usata per la (III).

(IX) $$f_3(a, f_2(b, c)) = f_3(f_3(a, b), c).$$

Vale una dimostrazione affatto analoga a quella usata per la (VI).

(X) $$f_4(a, f_1(b, c)) = f_3(f_4(a, b), f_3(a, c)).$$

Per $c=1$ essa è vera perchè:

$$f_4(a, f_1(b, 1)) = f_4(a, b_s) = f_3(f_4(a, b), f_3(b, 1)) ;$$

ammessa per $c=x$ essa è vera anche per $c=x_s$ perchè:

$$f_4(a, f_1(b, x_s)) = f_4(a, (f_1(b, x))_s) = f_3(f_4(a, f_1(b, x)), a) =$$
$$= f_3(f_3(f_4(a, b), f_3(a, x)), a) = f_3(f_4(a, b), f_3(f_3(a, x), a)) =$$
$$= f_3(f_4(a, b), f_3(a, x_s)) ;$$

essa è dunque vera sempre.

(XI) $$f_4(a, b_s) = f_3(a, f_3(a, b)).$$

Infatti:

$$f_4(a, b_s) = f_4(a, f_1(1, b)) = f_3(f_4(a, 1), f_4(a, b)) = f_3(a, f_3(a, b)).$$

6. *Osservazioni.* — L'operazione f_4 si può dunque ricondurre tosto alla f_3. Ogni espressione in cui siano indicate solo le 4 prime operazioni si può quindi facilmente ridurre ad una in cui siano indicate solo le prime 3; le espressioni così ottenute sono però in generale assai più complicate delle primitive e non facilmente riducibili sotto forma più semplice. Così, ad es.:

$$f_4(f_2(a, b), c_s) = f_3(f_2(a, b), f_3(f_2(a, b), c)),$$
$$f_4(a, f_2(b_s, c_s)) = f_4(a, f_1(f_2(b_s, c), b_s)) = f_4(a, (f_1(f_2(b_s, c), b))_s) = f_3(a, f_3(a, f_1(f_2(b_s, c), b))).$$

Per le operazioni f_4 e successive non si conoscono formole semplici (*) analoghe a quelle dimostrate per le prime 3. Fa eccezione la formola (X) che però è già meno semplice delle analoghe (V) e (VII).

Per nessuna poi delle operazioni $f_3, f_4, f_5, \ldots$ è vera in generale la formola $f_i(a, b) = f_i(b, a)$ che vale invece per le operazioni f_1 ed f_2; infatti, ad es., se i non è 1, si ha: $f_{i_s}(1, 1) = 1$, $f_{i_s}(1, x_s) = f_i(f_{i_s}(1, x), 1) =$

(*) V. nota di WOELPCKE nel *Giornale di Crelle:* Vol. 42, pag. 87.

$= f_{i_s}(1, x)$ e quindi in generale $f_{i_s}(1, b) = 1$ mentre invece $f_{i_s}(b, 1) = b$. Per le operazioni f_3 ed f_4 c'è però l'eccezione $f_i(2, 4) = f_i(4, 2)$ che poi, ad es. per la f_5, non vale più. Infatti osserviamo anzitutto che, essendo $f_1(2,2) = (f_1(2, 1))_s = 3_s = 4$ ed $f_{x_s}(2,2) = f_x(f_{x_s}(2, 1), 2) = f_x(2, 2)$, si ha in generale $f_i(2, 2) = 4$. Ora:

$$f_3(4, 2) = f_3(f_3(2, 2), 2) = f_3(2, f_3(2, 2)) = f_3(2, 4),$$
$$f_4(4, 2) = f_3(4, 4) = f_3(f_4(2, 2), f_3(2, 2)) = f_4(2, f_1(2, 2)) = f_4(2, 4).$$
$$\begin{aligned} f_5(2, 4) &= f_4(f_5(2, 3), 2) = f_4(f_4(f_5(2, 2), 2), 2) = f_4(f_4(4, 2), 2) = \\ &= f_3(f_4(4, 2), f_4(4, 2)) = f_3(f_4(4, 2), f_3(4, 4)) = f_4(4, f_1(4, 2)) = \\ &= f_3(f_4(4, 4), f_3(4, 2)) = f_3(f_5(4, 2), f_3(4, 2)) \; [> f_5(4, 2) : \text{§ II, 6}]. \end{aligned}$$

§ II.

1. Invece di $(n_s)_s, ((n_s)_s)_s, \ldots$ scriveremo più semplicemente: $n_{ss}, n_{sss}, \ldots$

2. Dati due numeri distinti a e b avrà luogo uno ed uno solo di questi due casi: o b nella successione naturale dei numeri segue a, oppure a segue b. Nel primo caso b è un numero della successione: $a_s, a_{ss}, a_{sss}, \ldots$; esiste cioè un numero r tale che $f_1(a, r) = b$ e si dice che $a <$ (*è minore di*) b. Nel secondo caso a è un numero della successione: $b_s, b_{ss}, b_{sss}, \ldots$; esiste cioè un numero r tale che $f_1(b, r) = a$ e si dice che $a >$ (*è maggiore di*) b. *Per a e b è dunque vera una ed una sola delle proposizioni $a < b$, $a > b$ le quali dinotano l'esistenza di un numero r tale che rispettivamente sia: $f_1(a, r) = b$, $f_1(b, r) = a$.*

3. Dalle definizioni date si vede tosto che: $b >$ o $< a$ *secondo che* $a <$ o $> b$. Facilmente inoltre si vede che, *se $a > b$ e $b > c$ si ha che $a > c$*: infatti dalle ipotesi si ha $f_1(b, r) = a$, $f_1(c, s) = b$ e quindi $a = f_1(f_1(c, s), r) = f_1(c, f_1(s, r))$, donde infine $a > c$. È poi evidente che: *ogni numero a o $= 1$ o > 1.*

4. Se due scritture A e B indicano due numeri distinti a e b si dice che A $>$ *o* $<$ B *secondo che* $a >$ *o* $< b$.

5. Date dunque più scritture ciascuna delle quali indichi uno ed un sol numero, si vede tosto che per due qualunque d'esse *è vera una ed una sola delle proposizioni* $M > N$, $M = N$, $M < N$ e che $N >, =$ *o* $< M$ *secondo che* $M <, =$ *o* $> N$. È inoltre evidente che, se $M >$ o $= N$ ed $N > P$ oppure se $M > N$ ed $N = P$ si ha che $M > P$ e quindi che: *se* $M \geq (>$ *o* $=) N$ *ed* $N \geq P$, $M \geq P$, *il segno* $=$ *valendo solo se* $M = N = P$. È chiaro quindi pure che: *se* $M \leq (<$ *o* $=) N$ *ed* $N \leq P$, $M \leq P$, *il segno* $=$ *valendo solo se* $M = N = P$: infatti, se $M \leq N$ ed $N \leq P$, si ha $P \geq N$ ed $N \geq M$ e quindi $P \geq M$ cioè $M \leq P$. Anche qui poi invece di scrivere, ad es.: " $A = B, B \geq C, C > D$ *e quindi* $A > D$ " si scrive compendiosamente: " $A = B \geq C > D$ ".

6. Ricordiamo che: $f_1(a,b) > a$; $f_{i_s}(a,1) = a$; se $b > 1$, $f_2(1, b) = b > 1$; se $b > 1$ ed $i > 2$, $f_i(1, b) = 1$. Dimostriamo che per $a > 1$ e $b > 1$ si ha: $f_i(a, b) > a$. Tale formola è infatti vera per $i = 1$ e basterà quindi dimostrarla vera per $i = x_s$, ammesso che sia vera per $i = x$. Ma si ha $f_{x_s}(a, 1) = a$ ed ammesso che sia $f_{x_s}(a, y) \geq a$ si ha che $f_{x_s}(a, y_s) > a$: infatti, essendo $a > 1$, si ha $f_{x_s}(a, y) \geq a > 1$ e quindi

$f_{x_s}(a, y_s) = f_x(f_{x_s}(a, y), a) > f_{x_s}(a, y) \geq a$. La $f_{x_s}(a, b) > a$, e quindi anche la $f_i(a,b) > a$, è dunque vera sempre se $a > 1$ e $b > 1$. Concludendo si ha che: *$f_i(a,b) \geq a$, il segno $=$ valendo solo se $i > 1$ e $b = 1$ oppure se $i > 2$ ed $a = 1$.*

7. *Se $a > b$, $f_1(a, c) > f_1(b, c)$ ed $f_1(c, a) > f_1(c, b)$.* Infatti, se $a > b$, si avrà $a = f_1(b, r)$ e quindi $f_1(c, a) = f_1(c, f_1(b, r)) = f_1(f_1(c, b), r) > f_1(c, b)$ ed $f_1(a, c) = f_1(c, a) > f_1(c, b) = f_1(b, c)$. Se $a > b$, $f_i(a, c) > f_i(b, c)$; se $a > b$ e $c > 1$, $f_i(c, a) > f_i(c, b)$. Queste proprietà sono già dimostrate per $i = 1$; basterà quindi dimostrarle per $i = x_s$ ammesso che siano vere per $i = x$. Ma la $f_{x_s}(a, c) > f_{x_s}(b, c)$ è vera per $c = 1$ perchè: $f_{x_s}(a, 1) = a > b = f_{x_s}(b, 1)$; ammessa per $c = y$ è vera per $c = y_s$ perchè: $f_{x_s}(a, y_s) = f_x(f_{x_s}(a, y), a) > f_x(f_{x_s}(b, y), a) \geq f_x(f_{x_s}(b, y), b) = f_{x_s}(b, y_s)$; è vera dunque sempre. La $f_{x_s}(c, f_1(b, r)) > f_{x_s}(c, b)$ è vera per $r = 1$ perchè, essendo $c > 1$ e quindi anche $f_{x_s}(c, b) \geq c > 1$, si ha:

$$f_{x_s}(c, f_1(b, 1)) = f_{x_s}(c, b_s) = f_x(f_{x_s}(c, b), c) > f_{x_s}(c, b);$$

ammessa per $r = y$ è vera per $r = y_s$ perchè:

$$f_{x_s}(c, f_1(b, y_s)) = f_{x_s}(c, (f_1(b, y))_s) > f_{x_s}(c, f_1(b, y)) > f_{x_s}(c, b);$$

è dunque vera sempre. È quindi vera anche la $f_{x_s}(c, a) > f_{x_s}(c, b)$ poichè, essendo $a > b$, si ha $a = f_1(b, r)$ donde appunto:

$$f_{x_s}(c, a) = f_{x_s}(c, f_1(b, r)) > f_{x_s}(c, b).$$

Ricordiamo poi che: $f_1(1, a) > f_1(1, b)$; $f_2(1, a) = a > b = f_2(1, b)$; se $i > 2$, $f_i(1, a) = 1 = f_i(1, b)$. Possiamo insomma concludere che: *se* $\mathrm{a} > \mathrm{b}$, *si ha che* $\mathrm{f_i(a, c) > f_i(b, c)}$ *ed* $\mathrm{f_i(c, a) \geq f_i(c, b)}$, *il segno $=$ valendo solo se* $\mathrm{i} > 2$ *e* $\mathrm{c} = 1$.

8. *Secondo che* $\mathrm{A} >, =$ *o* $< \mathrm{B}$, $f_i(\mathrm{A}, \mathrm{C}) >, =$ *o* $< f_i(\mathrm{B}, \mathrm{C})$: infatti se $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ si sa che $f_i(\mathrm{A}, \mathrm{C}) = f_i(\mathrm{B}, \mathrm{C})$; se $\mathrm{A} > \mathrm{B}$, sarà $a > b$ e quindi $f_i(\mathrm{A}, \mathrm{C}) = f_i(a, c) > f_i(b, c) = f_i(\mathrm{B}, \mathrm{C})$; se $\mathrm{A} < \mathrm{B}$, sarà $\mathrm{B} > \mathrm{A}$, donde; $f_i(\mathrm{B}, \mathrm{C}) > f_i(\mathrm{A}, \mathrm{C})$ e quindi infine $f_i(\mathrm{A}, \mathrm{C}) < f_i(\mathrm{B}, \mathrm{C})$. — *Secondo che* $\mathrm{f_i(A, C)} >, =$ *o* $< \mathrm{f_i(B, C)}$, $\mathrm{A} >, =$ *o* $< \mathrm{B}$: infatti, ad es., se $f_i(\mathrm{A}, \mathrm{C}) > f_i(\mathrm{B}, \mathrm{C})$ non può essere $\mathrm{A} \leq \mathrm{B}$ perchè sarebbe $f_i(\mathrm{A}, \mathrm{C}) \leq f_i(\mathrm{B}, \mathrm{C})$; sarà dunque appunto $\mathrm{A} > \mathrm{B}$.

9. Analogamente si dimostra che: *se* $\mathrm{C} > 1$, $\mathrm{f_i(C, A)} >, =$ *o* $< \mathrm{f_i(C, B)}$ *secondo che* $\mathrm{A} >, =$ *o* $< \mathrm{B}$ e che reciprocamente: *se* $\mathrm{C} > 1$, $\mathrm{A} >, =$ *o* $< \mathrm{B}$ *secondo che* $\mathrm{f_i(C, A)} >, =$ *o* $< \mathrm{f_i(C, B)}$. *Tali proposizioni valgono anche se* $\mathrm{C} = 1$ *ed* $\mathrm{i} \leq 2$; *non valgono più se* $\mathrm{C} = 1$ *ed* $\mathrm{i} > 2$, perchè allora, qualunque sia D, si ha $f_i(1, \mathrm{D}) = 1$.

10. *Se $a > 1$ e $b > 1$, si ha $f_i(a, b) > b$.* Tale formola è infatti vera per $i = 1$ poichè $f_1(a, b) = f_1(b, a) > b$; è vera per $b = 1$ poichè $f_i(a, 1) \geq a > 1$; ammessa vera tanto per $i = x$ e b qualsiasi, quanto per $i = x_s$ e $b = y$ essa è vera anche per $i = x_s$ e $b = y_s$ poichè essendo $f_{x_s}(a, y) > y$, si ha $f_{x_s}(a, y) \geq y_s$ e quindi:

$$f_{x_s}(a, y_s) = f_x(f_{x_s}(a, y), a) \geq f_x(y_s, a) > y_s;$$

essa è dunque vera sempre [è vera per $i = 1$ ed, ammessa per $i = x$, è vera per $i = x_s$ poichè è vera per $i = x_s$ e $b = 1$ ed, ammessa per $i = x_s$ e $b = y$, è vera per $i = x_s$ e $b = y_s$]. Avendosi poi sempre $f_1(a, b) > b$

ed $f_{i_s}(c_s, 1) = c_s > 1$, possiamo concludere che: $\mathrm{f}_i(\mathrm{a}, \mathrm{b}) > \mathrm{b}$ *purchè non sia contemporaneamente* $\mathrm{i} > 1$ *ed* $\mathrm{a} = 1$, nel qual caso si ha $f_2(1, b) = b$ e, se $i > 2$, $f_i(1, b) = 1$.

11. Se $a > 1$ e $b > 1$, $f_{i_s}(a, b) \geq f_i(a, b)$, il segno $=$ valendo solo se $a = b = 2$. Tale formola è infatti vera per $b = 2$ poichè si ha $f_{i_s}(2, 2) = f_i(2, 2) = 4$ e per $a > 2$, $f_{i_s}(a, 2) = f_i(a, a) > f_i(a, 2)$; è vera per $i = 1$ poichè si ha $f_2(a, 2) \geq f_1(a, 2)$ ed ammessa per $i = 1$ e $b = y$ è vera per $i = 1$ e $b = y_s$ poichè si ha:

$$f_2(a, y_s) = f_1(f_2(a, y), a) \geq f_1(f_1(a, y), a) > f_1(f_1(a, y), 1) = f_1(a, y_s);$$

ammessa poi tanto per $i = x$ e b qualsiasi, quanto per $i = x_s$ e $b = y$ essa è vera anche per $i = x_s$ e $b = y_s$ poichè, essendo $a > 1$ ed $y = b > 1$, si ha $f_1(a, y) > a \geq 2$ e quindi:

$$f_{x_{ss}}(a, y_s) = f_x(f_{x_{ss}}(a, y), a) \geq f_{x_s}(f_{x_s}(a, y), a) > f_x(f_{x_s}(a, y_s), a) = f_{x_s}(a, y_s).$$

Essa è dunque vera sempre. Ne segue quindi tosto che: *se* $\mathrm{a} > 1$ *e* $\mathrm{b} > 1$ *ed* $\mathrm{j} > \mathrm{i}$, $\mathrm{f}_j(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \geq \mathrm{f}_i(\mathrm{a}, \mathrm{b})$, *il segno* $=$ *valendo solo se* $\mathrm{a} = \mathrm{b} = 2$. Infatti:

$$f_{i_{(1,x_s)}}(a, b) = f_{(i_{(1,x)})_s}(a, b) \geq f_{i_{(1,x)}}(a, b) \text{ ed } f_{i_{(1,1)}}(a, b) = f_{i_s}(a, b) \geq f_i(a, b).$$

§ III.

1. Dati due numeri a e b: se esiste *un numero* r *tale che* $\mathrm{f}_i(\mathrm{r}, \mathrm{b}) = \mathrm{a}$ *lo indicheremo col simbolo* $\mathrm{f}_i(\bar{\mathrm{a}}, \mathrm{b})$; se esiste *un numero* s *tale che* $\mathrm{f}_i(\mathrm{b}, \mathrm{s}) = \mathrm{a}$ *lo indicheremo col simbolo* $\mathrm{f}_i(\mathrm{b}, \bar{\mathrm{a}})$. (*)

2. Non possono esistere due numeri distinti r e $\rho > r$ indicati dal simbolo $f_i(\bar{a}, b)$: infatti si avrebbe: $f_i(\rho, b) > f_i(r, b)$ ed $f_i(\rho, b) = a = f_i(r, b)$, il che è assurdo. Analogamente si dimostra che, se non è contemporaneamente $i > 2$ ed $a = 1$, non possono esistere due numeri distinti s e $\sigma > s$ indicati dal simbolo $f_i(b, \bar{a})$. Avendosi poi, per $i > 2$, $f_i(1, s) = 1$, possiamo dunque concludere che *i simboli* $\mathrm{f}_i(\mathrm{b}, \bar{\mathrm{a}})$ *ed* $\mathrm{f}_i(\mathrm{b}, \bar{\mathrm{a}})$ *non possono indicare due numeri distinti, eccettuato per* $\mathrm{i} > 2$ *il simbolo* $\mathrm{f}_i(1, \bar{1})$ *che può indicare un numero qualsiasi e che supporremo sempre escluso dalle nostre considerazioni.*

3. Per la definizione stessa dei simboli ora introdotti possiamo dire che, se esistono i numeri da essi indicati, si ha che:

$$f_i(f_i(\bar{a}, b), b) = a \quad \text{ed} \quad f_i(b, f_i(b, \bar{a})) = a$$

e quindi anche che:

$$f_i(f_i(\bar{a}, b), \bar{a}) = b \quad \text{ed} \quad f_i(\bar{a}, f_i(b, \bar{a})) = b.$$

Ne segue pure tosto [§ II, 6 e 10]: che $f_i(\bar{a}, b) \leq a$ ed $f_i(b, \bar{a}) \leq a$

(*) È ovvio notare l'identità dei simboli: $f_1(\bar{a}, b)$ oppure $f_1(b, \bar{a})$, $f_2(\bar{a}, b)$ oppure $f_2(b, \bar{a})$, $f_3(\bar{a}, b)$, $f_3(b, \bar{a})$ rispettivamente coi noti simboli: $a - b$, $a : b$, $\sqrt[b]{a}$, $\lg_b a$.

e che *condizione necessaria per l'esistenza dei numeri* $f_i(\bar{a}, b)$ *ed* $f_i(b, \bar{a})$ *si è che sia* $a \geq b$. È chiaro poi anche che:

$$f_i(\overline{f_i(a,b)}, b) = a \text{ ed } f_i(a, \overline{f_i(a,b)}) = b;$$

che
$$f_{i_s}(a, \bar{a}) = 1 \text{ ed } f_{i_s}(\bar{a}, 1) = a;$$

che
$$f_i(\bar{4}, 2) = f_i(2, \bar{4}) = 2; \ldots.$$

4. Facilmente si dimostrano [§ II, 8 e 9], se esistono i numeri indicati dai simboli, le seguenti *proprietà*. *Secondo che* $A >, = o > B$, *si ha che* $f_i(\bar{A}, C) >, = o < f_i(\bar{B}, C)$: infatti, secondo che $A >, = o < B$, si ha che $f_i(f_i(\bar{A}, C), C) >, = o < f_i(f_i(\bar{B}, C), C)$ e quindi che $f_i(\bar{A}, C) >, = o < f_i(\bar{B}, C)$. — *Secondo che* $A >, = o < B$, *si ha che* $f_i(A, \bar{C}) <, = o > f_i(B, \bar{C})$: infatti, se, ad es., $A > B$, non può essere $f_i(A, \bar{C}) \geq f_i(B, \bar{C})$ perchè allora sarebbe: $C = f_i(A, f_i(A, \bar{C})) > f_i(B, f_i(A, \bar{C})) \geq f_i(B, f_i(B, \bar{C})) = C$. — *Secondo che* $A >, = o < B$, *si ha che* $f_i(C, \bar{A}) >, = o < f_i(C, \bar{B})$ *ed* $f_i(\bar{C}, A) <, = o > f_i(\bar{C}, B)$: se non è $C = 1$ ed $i > 2$ valgono dimostrazioni affatto analoghe; per $i > 2$ è poi chiaro che i simboli $f_i(1, \bar{D})$ ed $f_i(\bar{1}, D)$ non indicano nessun numero. — Si vede poi tosto che *sono vere anche le quattro proprietà reciproche:* infatti, se, ad es., $f_i(A, \bar{C}) > f_i(B, \bar{C})$, non può essere $A \geq B$ perchè allora sarebbe $f_i(A, \bar{C}) \leq f_i(B, \bar{C})$.

5. Abbiamo poi infine [§ II, 11] che: *se* $j > i$ *e* $B > 2$, $f_j(\bar{A}, B) < f_i(\bar{A}, B)$ *ed* $f_j(B, \bar{A}) < f_i(B, \bar{A})$: infatti non può essere $f_j(\bar{A}, B) \geq f_i(\bar{A}, B)$ perchè allora sarebbe

$$A = f_j(f_j(\bar{A}, B), B) \geq f_j(f_i(\bar{A}, B), B) > f_i(f_i(\bar{A}, B), B) = A;$$

analogamente si dimostra l'altra formola.

6. Dalle proprietà (II) e (IV) del § I si vede tosto che: *per* $i \leq 2$, *se esiste un numero indicato da uno dei simboli* $f_i(\bar{p}, q)$ *ed* $f_i(q, \bar{p})$ *lo stesso numero è indicato anche dall'altro simbolo e si ha quindi* $f_i(\bar{p}, q) = f_i(q, \bar{p})$. È chiaro quindi che, ad es., abbiamo:

$$f_1(\bar{a}, 1) = f_1(1, \bar{a}) = a \quad \text{ed} \quad f_2(\bar{a}, 1) = f_2(1, \bar{a}) = a.$$

7. Dalla definizione di $>$ [§ II, 2] si ha che *condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del numero indicato dai simboli* $f_1(\bar{a}, b)$ *ed* $f_1(b, \bar{a})$ *si è che sia* $a > b$; ove poi tal numero esista, per *trovarlo* bisogna porre in $f_1(b, x)$ successivamente $x = 1, 2, 3, \ldots$ finchè si trova il numero r cercato tale che $f_1(b, r) = a$.

8. Per *trovare,* ove esista, il numero $f_2(\bar{a}, b) = f_2(b, \bar{a})$ basta porre in $f_2(b, x)$ successivamente $x = 1, 2, 3, \ldots$; essendo $f_2(b, x) \geq x$, si troveranno così dei numeri maggiori d'ogni numero assegnato e quindi s'incontrerà o il numero r cercato tale che $f_2(b, r) = a$, o un numero p tale che $f_2(b, p) < a < f_2(b, p_s)$ nel qual caso il numero r non esiste poichè, essendo $f_2(b, p) < a$, $f_2(b, r) = a$, $f_2(b, p_s) > a$, dovrebbe essere $p < r < p_s$, il che è assurdo.

9. Analogamente si vede che, se $i = 2$, per *trovare,* ove esista, il numero $f_i(\bar{a}, b)$ basta porre in $f_i(x, b)$ successivamente $x = 1, 2, 3, \ldots$; s'incontrerà così o il numero r cercato tale che $f_i(r, b) = a$, o un numero p tale che $f_i(p,b)<a<f_i(p_s,b)$ nel qual caso il numero r non esiste. Così pure, se $i>2$ ed $a=1$, per *trovare* $f_i(a,\bar b)$ si considera $f_i(a,x)$ e s'incontrerà o l'r tale che $f_i(a,r)=b$, o un p tale che $f_i(a,p)<b<f_i(a,p_s)$ nel qual caso l'r cercato non esiste; $f_i(1,\bar c_s)$ non indica poi nessun numero ed $f_i(1,\bar 1)$ indica un numero qualsiasi, come già si è detto.

10. Dalle proprietà del § I si deducono poi le seguenti *formole*, che facilmente si possono successivamente verificare e per la cui validità si deve naturalmente presupporre che esistano i numeri indicati dai simboli che in esse compaiono. Le formole sono:

1. $f_1(f_1\overline{(a,b)},c)=f_1(a,f_1(\bar b,c))$,
2. $f_1(f_1\overline{(\bar a,b)},c)=f_1(\bar a,f_1(b,c))$,
3. $f_1(f_1\overline{(a,b)},c)=f_1(\bar a,f_1(b,\bar c))$;
4. $f_2(f_1(\bar a,b),c)=f_1(f_2\overline{(a,c)},f_2(\bar b,c))$,
5. $f_2(f_1\overline{(a,b)},c)=f_1(f_2(\bar a,c),f_2(\bar b,c))$,
6. $f_2(f_1\overline{(\bar a,b)},c)=f_1(f_2\overline{(\bar a,c)},f_2(\bar b,c))$;
7. $f_2(f_2\overline{(a,b)},c)=f_2(a,f_2(\bar b,c))$,
8. $f_2(f_2\overline{(\bar a,\bar b)},c)=f_2(\bar a,f_2(b,c))$,
9. $f_2(f_2\overline{(a,b)},c)=f_2(\bar a,f_2(b,\bar c))$;
10. $f_3(a,f_1(\bar b,c))=f_2(f_3\overline{(a,b)},f_3(a,c))$;
11. $f_3(f_2(\bar a,b),c)=f_2(f_3\overline{(a,c)},f_3(b,c))$,
12. $f_3(f_2\overline{(a,b)},c)=f_2(f_3(\bar a,c),f_3(\bar b,c))$,
13. $f_3(f_2\overline{(\bar a,b)},c)=f_2(f_3\overline{(\bar a,c)},f_3(\bar b,c))$;
14. $f_3(a,f_2\overline{(b,c)})=f_1(f_3(a,\bar b),f_3(a,\bar c))$,
15. $f_3(a,f_2(\bar b,c))=f_1(f_3\overline{(a,\bar b)},f_3(a,\bar c))$;
16. $f_3(f_3\overline{(a,b)},c)=f_3(f_3(\bar a,c),b)$;
17. $f_3(f_3\overline{(a,b)},c)=f_3(a,f_2(\bar b,c))$,
18. $f_3(f_3\overline{(\bar a,b)},c)=f_3(\bar a,f_2(b,c))$,
19. $f_3(f_3\overline{(a,b)},c)=f_3(\bar a,f_2(b,\bar c))$;
20. $f_3(a,f_3\overline{(b,c)})=f_2(f_3(a,\bar b),c)$,
21. $f_3(a,f_3\overline{(\bar b,c)})=f_2(f_3\overline{(a,\bar b)},c)$;
22. $f_4(a,f_1(\bar b,c))=f_3(f_4\overline{(a,b)},f_3(a,c))$;
23. $f_4(a,\bar b)=(f_3\overline{(a,f_3\overline{(a,\bar b)})})_2$;

ed altre immediatamente deducibili da queste.

La verifica è poi facile ed il metodo è sempre lo stesso [§ III, 1 e 3; proprietà del § I; formole precedenti quelle che si dimostra]. Per la 10, ad es., abbiamo:

$$f_2(f_3(a,f_1(\bar b,c)),f_3(a,c))=f_3(a,f_1(f_1(\bar b,c),c))=f_3(a,b);$$

per la 13 abbiamo:

$$f_3(f_2(f_3\overline{(\bar a,c)},f_3(\bar b,c)),c)=f_2(\overline{f_3(\bar a,c),c}),f_3(f_3(\bar b,c),c))=f_2(\bar a,b);$$

per la 15 abbiamo:

$$f_3(a,f_1(\overline{f_3(a,\bar b)},f_3(a,\bar c)))=f_2(\overline{f_3(a,f_3(a,\bar b))},f_3(a,f_3(a,\bar c)))=f_2(\bar b,c);$$

per la 19 abbiamo:

$$f_3(f_3(\bar a,f_2(b,\bar c)),c)=f_3(\overline{f_3(a,c)},f_2(b,\bar c))=f_3(a,f_2(\bar c,f_2(b,\bar c))=f_3(a,b);$$

per la 21 abbiamo:

$$f_3(a,f_2(\overline{f_3(a,\bar b)},c))=f_3(\overline{f_3(a,f_3(a,\bar b))},c)=f_3(\bar b,c);$$

per la 22 abbiamo:

$$f_3(f_4(a,f_1(\bar b,c)),f_3(a,c))=f_4(a,f_1(f_1(\bar b,c),c))=f_4(a,b);$$

per la 23 abbiamo infine:

$$f_4(a,(f_3\overline{(a,f_3\overline{(a,\bar b)})})_2)=f_3(a,f_3(a,f_3(a,\overline{f_3(a,\bar b)})))=f_1(a,f_3(a,\bar b))=b.$$

555. Supponendo sempre fissi i due vertici BC di un triangolo se il terzo vertice A descrive una retta, il luogo del punto K (di Lemoine) è una conica passante per O (punto medio del lato BC) e bitangente all'ellisse E^2 della quistione precedente.

Se A descrive un cerchio non ortogonale al cerchio O^2, della quistione precedente, il luogo di K è una ellisse bitangente a E^2.

In generale se A descrive una conica, il luogo di K è una curva razionale del quart'ordine quadritangente all'ellisse E^2 e con un punto doppio in O: determinarne gli altri due punti doppi.

V. Retali.

BIBLIOGRAFIA

H. Poincaré — *Électricité et optique. La lumière et les théories électrodynamiques.* Paris, Carrè e Naud, 1901. Seconda edizione.

Le prime 340 pagine di questa seconda edizione sono una ristampa fedele delle corrispondenti della prima (1891); le altre contengono una esposizione delle teorie di Hertz e di Lorentz, ed alcune note complementari, scritte a proposito di osservazioni dell'A. sulla teoria di Larmor.

Furono invece soppressi in questa edizione il capitolo *sulla verificazione sperimentale delle ipotesi di Maxwell*, l'altro *sulla unità della forza elettrica* e quelli relativi alla *descrizione dell'esperienze di Hertz* colle *note* che la seguivano.

Poichè l'autore raccolse già queste dottrine e queste ricerche in un volume, pubblicato nel 1893, sulle *oscillazioni elettriche*, mentre in un altro volumetto del 1899, *La théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes*, scrisse quasi una preparazione elementare alla lettura del libro precedente, e, per la parte sperimentale, anche dell'opera che ci sta sott'occhio. (V. *Periodico*, Anno XV, pag. 38.)

Il nome dell'illustre autore non ci obbliga che ad un breve cenno dell'opera sua; la quale contiene l'esposizione critica, fatta com'egli solo poteva fare, di quanto vi è d'importante e di recente sulle moderne teorie dell'elettricità e della luce.

Queste ebbero veramente la loro origine, quando un attento esame delle analogie fra i fenomeni elettrici e quelli calorifici fece ritenere impossile di considerare l'elettricità come un particolare movimento della materia ponderabile. Il Maxwell, persuaso che la spiegazione di quei fenomeni dovesse essere cercata nelle proprietà e nel moto di una particolare materia, abbandonò, per il primo, la teoria dei due fluidi, a cui tanto peso (almeno come parafrasi dei fatti) avevano conferito i lavori dei più celebri fisici matematici da Poisson in poi; e si rifece a sviluppare e a completare dal punto di vista matematico la teoria di un solo fluido di Franklin e di Epino, che il nostro Volta aveva sempre fedelmente seguito e di cui anche il Cavendish aveva tentato una trattazione matematica.

Ma fino allora quella teoria ammetteva l'esistenza di azioni a distanza, mentre le idee del nostro Mossotti sui dielettrici, riprese ed illustrate dalle ricerche sperimentali del Faraday, portavano ad attribuire alle modificazioni avvenute nello spazio che separa due corpi elettrizzati, i fenomeni che questi presentano. Perciò la teoria del Maxwell si volge ad esaminare la costituzione di questo spazio interposto e del fluido in esso contenuto. Il fenomeno della polarizzazione rotatoria magnetica, il primo dei molteplici fatti elettro-ottici scoperti, conduce naturalmente a identificare il fluido elettrico coll'etere luminoso; e così, dapprima in Inghilterra si sviluppa completamente l'ipotesi già accennata dal Newton nella sua *Ottica:* che la produzione dell'elettricità sia il resultato del movimento di un principio etereo; se pure non si vuol ricordare coi lavori anteriori del Lorentz un saggio di teoria elettromagnetica della luce.

Nella recentissima teoria di Lorentz l'elettricità aderisce alla materia; i fenomeni elettrici sono dovuti a piccoli corpi solidi, gli *ioni* od *elettroni*, che carichi di una quantità costante di elettricità e disseminati in ogni corpo, semplici oppure complessi, si spostano senza deformarsi nell'interno dei conduttori, mentre non possono che oscillare intorno alla loro posizione d'equilibrio nell'interno dei dielettrici. In egual modo la teoria di Maxwell suppone elastica l'*elettricità* contenuta nei dielettrici ed inerte quella contenuta nei conduttori, senza però che si veda bene la ragione di questa differenza.

Nella teoria di Larmor all'elettrone vengono sostituite altre ipotesi sulle particelle di etere; questo è costituito da vortici infinitesimi, o almeno le sue particelle sono dotate di elasticità rotazionale; alla sua inerzia sono attribuiti i fenomeni d'induzione elettro-magnetica, mentre le rotazioni delle sue particelle producono le ordinarie correnti voltaiche.

Oltre queste teorie che danno una rappresentazione materiale dei fenomeni, altre ve ne sono, nelle quali i fatti vengono collegati ad una o più formole che rappresentano, sia l'azione mutua di due elementi di corrente, sia le componenti del flusso d'induzione, ricavate alla lor volta da formole che esprimono la forza elettromotrice d'induzione e che sono d'accordo coll'esperienza.

Tale è la teoria di Hertz, il quale ha conservato solamente l'equazioni stabilite dal Maxwell, trascurando ogni idea concreta sulla natura dell'elettricità; anche perchè l'oscuro trattato di quest'ultimo, contiene piuttosto un insieme di teorie, che lo sviluppo di una teoria omogenea, la quale da un punto di partenza ben determinato deduca armonicamente la spiegazione dei vari fenomeni che s'intendono di collegare. Le teorie infatti dello spostamento elettrico (cap. II), della costituzione cellulare dei dielettrici (cap. III), che fa seguito alla teoria del Mossotti, delle tensioni e pressioni che sviluppandosi nel fluido contenuto dai dielettrici danno origine alle attrazioni elettrostatiche (cap. IV), non solo presentano gravi difficoltà ma sono anche impossibili a conciliarsi.

Il punto di vista dell'Hertz, puramente analitico, dovrebbe essere ben accetto al Poincaré, il quale nella sua elegante e geniale introduzione, come in altre sue pubblicazioni, insiste su questo fatto: siccome da un noto teorema discende che trovata una spiegazione meccanica di una classe di fenomeni, se ne possono immaginare infinite altre egualmente plausibili, sembrerebbe sufficiente per spiegare meccanicamente un fenomeno, l'aver dimostrato la *possibilità* di una tale spiegazione meccanica, e la ricerca del *meccanismo* particolare che vi soddisfa dovrebbe dai fisici propriamente detti esser lasciata ai metafisici. Non differentemente, in sostanza, si esprimeva Newton ai suoi tempi, scrivendo: I filosofi moderni nelle loro speculazioni fisiche immaginano delle ipotesi per spiegare meccanicamente ogni cosa, e rinviano le altre cause alla metafisica.

Checchè ne sia delle obiezioni che si potrebbero, forse, fare a questo giudizio dell'A., sta il fatto che l'equazioni dell'Hertz come quelle dell'Helmholtz, che comprendono le teorie di Neumann e di Weber come casi particolari e la teoria di Maxwell come caso limite, non rendono ragione dei fenomeni di aberrazione, del trasporto delle onde luminose per effetto della materia ponderabile, etc., pur soddisfacendo ai principii fondamentali della dinamica.

Mentre la teoria di Lorentz, la quale è una immagine materiale dei fenomeni elettrici, *sebbene non soddisfi al principio dell'eguaglianza fra l'azione e la reazione*, è la sola che permette di collegare i fatti osservati, fino a quello recentissimo di Zeemann, e quindi è la sola, conclude l'A., che conviene conservare, *almeno provvisoriamente*.

Ma è evidente che una teoria in disaccordo colla terza legge della dinamica non può dichiararsi soddisfacente; e che bisognerà quindi, presto o tardi, modificare profondamente le idee fin'ora ammesse, senza però che si possa nemmeno oscuramente prevedere in qual senso.

L'opera del nostro A. s'indirizza a chi già possiede sufficienti cognizioni fisico-matematiche; e, come tutti i suoi precedenti lavori, non è l'opera di un matematico a cui la fisica serve di pretesto per degli sviluppi analitici; poichè delle ricerche sperimentali, anche le più minute, egli fa tesoro per i continui raffronti colle conseguenze teoriche.

Talvolta egli non fa che ricordare gli enunciati piuttostochè riassumere teoremi e dottrine già note (cap. I e IV ad es.); tal'altra (cap. V) appena accenna i principi necessari al suo scopo, che è sempre quello di tracciare le linee fondamentali delle singole teorie. Queste vengono però sempre collegate fra loro, quando è possibile, e di ognuna l'A., completando quell'esame che già si trova iniziato nel trattato del Maxwell, pone singolarmente in luce le difficoltà e ritrova ed accenna i *desiderata* a cui dovrebbe soddisfare.

Nella parte prima, esposte le leggi dell'elettrostatica, delle correnti di conduzione, del magnetismo, elettro-magnetismo, elettro-dinamica e induzione, l'autore stabilisce l'equazioni del campo magnetico e svolge la teoria elettromagnetica della luce. Nel capitolo sulla polarizzazione rotatoria magnetica, oltre la teoria di Maxwell, oscura come ognun sa, accenna a quelle di Poitier e di Rowland, ed al fenomeno, non ancora bene spiegato, di Kerr.

Seguono le teorie elettrodinamiche di Ampère, Weber, Helmholtz nella parte seconda; e nella terza e quarta le altre a cui già abbiamo accennato, insieme ad alcune osservazioni sulle sfere pulsanti del Bjerknes.

Tale è lo spirito ed il piano di quest'opera elevata, che tratta a fondo un soggetto da cui sembra debba dipendere, non solo una maggiore e più perfetta conoscenza dei fenomeni elettrici, ma altresì qualche cognizione sul meccanismo di quella misteriosa forza attrattiva della materia; la quale da tre secoli preoccupa gli spiriti più vigorosi, e sconcerta, come dice il Boys, per la sua generalità assoluta, per la nessuna sua relazione cogli altri agenti fisici, per il suo modo di propagazione istantanea, a distanza, ed attraverso tutti i mezzi, materiali o no.

Se, come crede il Cornu, noi siamo alla vigilia di qualche grande scoperta, è soltanto dagli studi dei fisici e dei matematici sull'elettricità che potrà venire la luce desiderata. Poichè il meccanismo di trasmissione di una forza è intimamente collegato ai fenomeni di propagazione nel mezzo che ne è la sede; e poichè questi fenomeni sono accessibili nello studio dell'elettricità, meglio che nello studio di qualsiasi altro agente fisico.

L'opera quindi s'indirizza non soltanto ai fisici matematici propriamente detti, ma anche, o forse in special modo, ai fisici sperimentali, ai quali spetta pur sempre il controllo e l'ultima parola sulle teorie dei primi. E sono, nel libro, numerosi gli accenni a verificazioni sperimentali possibili.

R. Pitoni.

Grassi. — *Elementi di geometria descrittiva*, per uso della R. Accademia Navale e dei RR. Istituti Tecnici. Livorno, Belforte, 1901. (Testo pagine 264, tavole 58).

Questo libro destinato a servire di guida agli allievi della R. Accademia Navale è fatto in conformità dei programmi di quell'Istituto e contiene un ampio sviluppo della proiezione di Monge e quotata e una trattazione sommaria della proiezione centrale e dell'assonometria con applicazioni alla teoria delle ombre.

Nell'introduzione si trova, insieme ad altri argomenti, un rapido cenno sull'omologia, omotetia, affinità, che vengono poi utilmente applicate nel seguito.

Da questi brevi cenni si capisce come l'opera contenga assai più di quanto occorre per gl'Istituti tecnici, tuttavia potrebbe anche essere adottato in queste scuole, omettendo quanto non è richiesto dai programmi.

L'esposizione chiara e semplice, l'accuratezza dell'edizione, la nitidezza delle figure renderanno il libro ben accetto agli studiosi.

G. L.

DA GIORNALI E RIVISTE

Proceedings of the Edimburgh Mathematical Society.

Vol. XVII, Session 1898-99. — *W. L. Thomson*, Teoria geometrica delle funzioni iperboliche. — *G. A. Gibson*, Rivista delle " Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, von Moritz Cantor „ 3ᵉʳ (Schluss) Band. 3ᵗᵉ Abtheilung 1727-1758, con teoremi speciali riguardo alla controversia dell'" *Analyst* „. — *Ch. Tweedie*, Nota sui teoremi di ineguaglianza che si collegano al limite esponenziale $\lim\limits_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. — *R. F. Muirhead*, Su una dimostrazione di Eulero per teorema del binomio per il caso di esponenti negativi e frazionari. — *Id.* Nota sulle frazioni continue. — *Id.* Sulla dimostrazione del teorema del binomio quando l'esponente è positivo ed intero. — *T. B. Sprague*, Sul problema delle otto regine. — *Tait*, Distribuzione centrobarica su una superficie sferica. — *J. A. Third*, Sistemi di circoli analoghi ai circoli di Tucker. — *Id.* Sistemi di coniche connesse col triangolo. — *Id.* Sistemi di sfere connesse col tetraedro.

Vol. XVIII, Session 1899-1900. — *G. E. Crawford*, Dimostrazione elementare del teorema che la media aritmetica di più numeri positivi è maggiore della loro media geometrica. — *R. F. Muirhead*, Spezzamento di due triangoli in ugual numero di triangoli rispettivamente simili. — *J. A. Third*, Due trasformazioni geometriche. — *L. Crawford*, Sul calcolo di un determinante. — *A. D. Russell*, Caso speciale dello spezzamento di due triangoli in triangoli rispettivamente simili. — *Dr. Peddie*, Dimostrazione elementare del teorema del potenziale per uno strato sferico uniforme. — *R. F. Muirhead*, Osservazioni alla precedente dimostrazione. — *J. Dougall*, Determinazione della funzione di Green per mezzo delle armoniche cilindriche o sferiche. — *G. A. Gibson*, Nota sulle ineguaglianze fondamentali connesse con e^x e x^m. — *E. Collignon*, Nota su un problema di Geometria. — *Id.* Nota sulle dimostrazioni per mezzo della proiezione in Trigonometria, e Geometria analitica. — *C. A. Laisant*, Problema della sezione in ragione data. — *W. E. Philip*, Piccola estensione del Teorema di Eulero sulle funzioni omogenee. — *Id.* Dimostrazione generale del Teorema di addizione in Trigonometria. — APPENDICE: *G. A. Gibson*, Proporzioni - Il V libro degli elementi di Euclide.

The Mathematical Gazette.

Vol. I, N. 22, luglio 1900. — *C. A. Scott*, Sulla geometria di posizione di Staudt (continuazione). — Piccola Nota: *R. F. Davis*, Sul cilindroide. — *Id.* Sulla parabola.

Vol. I, N. 23, 1900. — *W. H. Macaulay*, Le leggi della dinamica e la loro trattazione nei libri di testo (continua). — Bibliografia. — Piccole Note: *J. H. Hooker*, Dimostrazione geometrica delle formule di $\cos\frac{A}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{A}{2}$. — *W. J. Johnston*, Dimostrazione della formula: $\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B-C)}$. — *A. C. L. Wilkinson*, Dimostrare che $1 \geqq \cos A+\cos B+\cos C \geqq \frac{3}{2}$ quando A, B, C sono angoli di un triangolo.

Vol. I, N. 24, dicembre 1900. — *W. H. Macaulay*, (continuazione vedi numero precedente). — Bibliografia. — Piccole Note: *J. V. Thomas*, Dimostrazioni geometriche delle formule $\sqrt{1+\operatorname{sen}A}+\sqrt{1-\operatorname{sen}A}=2\cos\frac{A}{2}$, $\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\operatorname{sen}\frac{A}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 A}}{\operatorname{tang} A}=\operatorname{tang}\frac{A}{2}\ (A<90°)$. — *R. F. Davis*, Un triangolo con due bisettrici interne uguali è isoscele. — *W. E. Hartley*, In ogni triangolo sferico ABC, si ha: $\operatorname{sen} a \cot c=\operatorname{sen} B \cot C+\cos a \cos B$. — *J. M. Dyer*, Su un luogo di un fuoco di una certa conica inscritta in un triangolo.

Vol. II, N. 1, gennaio 1901. — *R. F. Davis*, Due esempi sull'eliminazione. — *J. Brill*, Nota sulla soluzione delle equazioni cubiche e biquadratiche. — Bibliografia. — Piccole Note.

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.

Vol. XXXV, disp. 7-15. — *A. Tanturri*, Un problema di geometria numerativa sulle varietà algebriche, luogo di ∞^1 spazi. — *G. Scorza*, Sopra le corrispondenze (p, p) esistenti sulle curve di genere p a moduli generali. — *O. Tedone*, Sulle equazioni delle vibrazioni dei corpi elastici in coordinate curvilinee. — *G. Lauricella*, Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie. — *T. Boggio*, Un teorema di reciprocità sulle funzioni di Green di ordine qualunque. — *E. D'Ovidio*, Commemorazione di E. Beltrami. — *E. Holmgren*, Sur un théorème de M. Volterra sur l'inversion des intégrales définies. — *G. Scorza*, Sopra le curve coniche di uno spazio lineare qualunque e sopra certi loro covarianti quartici. — *F. Severi*, Ricerche sulle coniche secanti delle curve gobbe.

Rendiconto del R. Istituto lombardo di scienze e lettere.

Serie II, vol. XXXIII, fasc. 7-15. — *E. Ciani*, Un teorema sopra la quartica di Klein. — *T. Cazzaniga*, Note critiche sulla teoria degli integrali curvilinei e di superficie. — *M. Chini*, Sui fattori integranti di una o più forme differenziali di grado n a m variabili. — *L. Berzolari*, Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche. — *E. Pascal*, La teoria delle equazioni ai differenziali totali di 3° ordine. — *D. Gigli*, Sulle superficie elicoidali e rigate dello spazio ellittico. — *U. Amaldi*, Sulle sostituzioni lineari commutabili. — *T. Vignoli*, Del linguaggio scientifico. — *L. Berzolari*, Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche. — *C. Severini*, Sulle equazioni differenziali ordinarie contenenti un parametro arbitrario.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze lettere ed arti.

Tomo LIX, Serie VIII, tomo II, disp. 4-8. — *T. Boggio*, Integrazioni dell'equazione $\Delta^2\Delta^2 = 0$ in una corona circolare ed in uno strato sferico. — *F. Levi Civita*, Funzioni armoniche e trasformazioni di contatto.

Atti e memorie della R. Accademia di scienze lettere ed arti di Padova.

Nuova serie, vol. XVI, disp. 1-3. — *F. D'Arcais*, Un problema di calcolo di probabilità.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.

Serie V, tomo VIII, fasc. 1. *C. Arzelà*, Sulle serie di funzioni. Parte I.

Atti della R. Accademia lucchese di scienze lettere ed arti.

Tomo XXX. — *R. Bettazzi*, La pratica nell'insegnamento della matematica.

Atti della R. Accademia di scienze lettere ed arti di Palermo.

Serie III, vol. V. — *E. Soler*, Sulla rappresentazione geodetica di talune superficie. — *Id.* Nuovi studi sopra una certa deformata della sfera.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

Tomo XIV, fasc. 6°. — *Cremona*, Commemorazione di Eugenio Beltrami (continuazione e fine). — *Castelnuovo* e *Enriquez*, Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi. — Estratti dei verbali.

Il Bollettino di matematiche e di scienze fisiche e naturali diretto da *A. Conti*.

Anno II, N. 1 contiene: *Bettazzi*, Le indicazioni nella risoluzione dei problemi. — *Murer*, Estensione alle frazioni dei teoremi sulla divisibità. — *Ciamberlini*, Sullo zero. — *Id.* Didattica per la Scuola elementare. — Rivista bibliografica. — *Genovesi*, Corrispondenza.

Il N. 2 contiene: Ringraziamenti reali. — *Ortu Carboni*, La raccolta di esercizi nell'insegnamento della geometria. — *Ciamberlini*, Una lezione di disegno nella scuola elementare. — *Scoto*, Rivista storica. — Rivista bibliografica. — *Ciamberlini*, Didattica per le scuole elementari.

Il Pitagora diretto da G. Fazzari.

Anno VII, fasc. 1-2 contiene: *Burali-Forti*, Sui simboli di Logica Matematica (Nota 5). — *Ciamberlini*, Sulla definizione della somiglianza delle figure. — *Ceretti*, Pel calcolo mentale. — *Testi*, Relazione dei lavori presentati al concorso 1900. — *Droz-Farny*, Nota di geometria. — *Palatini*, Le proprietà formali delle operazioni fondamentali con numeri razionali. — *De Zolt*, Dimostrazione di due teoremi algebrici fondamentali. — *Dedekind*, Continuità e numeri irrazionali, trad. di *L. Certo* (cont.) — *Gambioli*, Nota su alcune equazioni indeterminate. — Varietà.

*PUBBLICAZIONI MATEMATICHE ITALIANE RECENTI

E. Scotti, Elementi di Geometria ad uso dei corsi complementari. Torino, tip. Salesiana, 1900. L. 1.

P. Cardani, Fisico matematica. Lezioni dettate nell'anno scolastico 1899-900 nella R. Università di Parma e compilate per cura di *S. Duroni*. Parma, lit. Zafferri, 1899-900.

E. Fabbri, Il teorema dell'integrale di Cauchy: contributo alla storia critica dell'analisi. Bologna, Zamorani e Albertazzi, 1900.

E. Verdelli, Lezioni di aritmetica razionale. Piacenza, Piacentini, 1900.

C. Marenghi, Sulle figure simili e particolarmente sui poligoni piani simili. Camerino, Borgarelli, 1900.

D. Giordano, Nozioni di aritmetica razionale esposte per uso del Ginnasio superiore. Ragusa Inferiore, V. Criscione, 1900. L. 1.

E. P. Gazzaniga, Aritmetica generale e divisioni ordinarie, speciali e mobili; configurazioni numeriche e numeri primi, divisioni e frazioni periodiche; nuovi studi e teoremi. Bergamo, Fratelli Bolis, 1900. L. 5.

D. Pizzarello, Sulle funzioni trascendenti intere. Messina, tip. dell'Epoca, 1900.

A. Pensa, Sull'influenza di alcune singolarità di superficie sul genere numerico e sul bigenere P, con applicazioni alla determinazione di superficie razionali di 3° ordine. Mondovì, tip. Vescovile, 1900.

R. Viti, Sulla teoria matematica della previdenza. Conferenza. Roma, tipografia Balbi, 1900.

G. D'Amico, Aritmetica: insegnamento pratico secondo il metodo intuitivo: ad uso degli insegnanti elementari. Melfi, Gineo, 1899.

E. Bertolotti, Lezioni di Calcolo infinitesimale. Lezioni dettate nel 1899-900 nella R. Università di Modena. Modena, lit. Pizzolotti, 1899-900.

C. Carrone, Le congruenze del 2° ordine senza linee singolari e le loro superficie focali studiate mediante una trasformazione doppia. Casarice, 1900.

G. Ricci, Lezioni di algebra complementare. Verona-Padova, Drucker, 1900. Lire 10.

F. Niceli, Lezioni di geometria descrittiva, tenute nella R. Università di Modena nel 1899-900, lit. Pizzoletti, 1899-900.

CARLO HERMITE

Il 24 Decembre 1892 gli scolari di **Carlo Hermite** festeggiarono con straordinaria solennità il 70° anniversario della nascita del sommo matematico; ed a queste onoranze si associarono gli scienziati di tutto il mondo, poichè la gloria di lui non appartiene alla sola Francia, ma onora tutta l'umanità. Così la morte di lui, avvenuta il 14 Gennaio scorso, è un lutto per la scienza di tutti i paesi.

È impossibile parlare adeguatamente del monumento imperituro, che egli ha eretto a sè stesso colle innumerevoli memorie relative a tutti i rami dell'analisi; che il suo genio gli ha permesso di profondere per più di mezzo secolo in tutti i giornali di Francia e degli altri paesi, fra i quali ci piace ricordare gli *Annali di matematica* e gli *Atti dell'Accademia di Torino.* Ci limitiamo ad accennare di volo i più importanti fra i suoi lavori.

Fino dal 1843 egli iniziò brillantemente la sua carriera scientifica coi lavori sulla divisione delle funzioni abeliane, che, in forma di lettere Jacobi, volle inseriti nella raccolta delle proprie memorie.

Ideò nel 1852 la rappresentazione tipica delle forme binarie e la teoria dei covarianti associati, ed in questo campo fu degno emulo di Sylvester e Cayley.

Dette una dimostrazione del tutto nuova e puramente aritmetica dei celebri teoremi di *Sturm* e *Cauchy* sulla separazione delle radici di un'equazione algebrica.

Nel 1858, risolvè coll'aiuto delle funzioni ellittiche l'equazione del 5° grado, precedendo di poco il Kronecker ed il Brioschi.

Nel 1873 dimostrò la trascendenza del numero e, e la sua scoperta permise a Lindmann di dimostrare la trascendenza di π e la conseguente impossibilità della quadratura del circolo.

Infine per quasi tutta la vita si occupò con successo delle funzioni trascendenti e specialmente delle funzioni doppiamente periodiche.

Oltre che per le scoperte, l'opera di **Hermite** fu sommamente utile alla scienza per la fecondità dei metodi da lui ideati; per la volgarizzazione delle grandi scoperte di Gauss, Abel, Jacobi, Cauchy, che in mezzo secolo avevano trasformato la scienza matematica; per la squisita gentilezza e bontà d'animo, che lo fecero prodigo di incoraggiamento e di aiuti verso gli studiosi di tutti i paesi che a lui ricorrevano.

Fu in rapporti di cordiale amicizia coi maggiori matematici di tutto il mondo, e in particolare con quelli del nostro paese, che ora ne piangono la perdita.

ERRATA-CORRIGE.

Anno XVI, fasc. III. — Pag. 126, linea 31, invece di β leggere φ; e alla linea 41, dopo *ipotenusa* inserire: Si può sempre supporre che a non sia commensurabile con b.

Fasc. IV, pag 193, linea 21, deve aggiungersi: ad eccezione delle verticali del determinante β, che non hanno la corrispondente in A, le quali occuperanno i medesimi posti che occupano in quello che corrisponde al primo dei determinanti d'ordine m di A. — Nella stessa pagina in fondo, nell'ultimo determinante devesi eseguire lo scambio dei secondi indici 3 e 4.

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 30 Marzo 1901.

TEORIA ELEMENTARE DEL COMPLESSO LINEARE

Il fascicolo di febbraio del giornale *Mathesis*, contiene una breve nota nella quale il sig. Stuyvaerts con un nuovo metodo elementare e semplicissimo espone i fondamenti della teoria dei complessi lineari.

Scopo di questo articolo è di far conoscere ai lettori del *Periodico* il metodo suddetto, la cui parte essenziale è riportata quasi integralmente nel § 2, e di portare ad esso alcune modificazioni che rendono lo studio dei complessi ancora più elementare, poichè ho potuto fare a meno di adoperare anche il concetto di proiettività e di rapporto anarmonico, al quale ha dovuto ricorrere il citato autore, limitandomi a supporre note le poche nozioni metriche su rette e piani, che si studiano nei Licei.

---

1. Teorema. — *È possibile stabilire una corrispondenza univoca fra i punti ed i piani dello spazio in modo che ogni punto* P *individui un piano* π *che passa per esso, e viceversa* π *individui* P.

Una tale corrispondenza si può stabilire in infiniti modi; a noi basterà dare un esempio.

Si scelgano tre rette arbitrarie p, p', r sghembe a due a due. Preso un punto arbitrario P si faccia ad esso corrispondere un piano π individuato dalla retta a_1 che, passando per P, si appoggia a p, p' e dal punto A_1 d'incontro della r con la retta b_1 individuata dai punti d'incontro di p, p' col piano Pr.

Da questa costruzione risulta che, dato il piano π, il punto P ad esso corrispondente si troverà come incontro della retta a_1, che passa per i punti d'incontro di p, p' con π, e del piano che passa per la r e per la retta che, passando per πr, si appoggia a p, p'.

Definizione. — *Una tale corrispondenza si dice involutoria.*

Ogni punto P si dice *polo* del suo piano corrispondente π, e questo *piano polare* di P.

Con questa e con moltissime altre costruzioni si può ottenere la corrispondenza richiesta.

Corollario. — *Tutte le rette che, passando per un punto* P, *giacciono nel suo piano polare* π *rispetto ad una corrispondenza univoca involutoria costituiscono un sistema di rette tale che ogni fascio di rette ne contiene una sola, o è formato interamente di rette del sistema.*

Sia F un fascio di centro P in un piano α. Se α non coincide col piano π polare di P, la sola retta $\alpha\pi$ del fascio F appartiene al sistema considerato. Se α coincide con π tutte le rette del fascio F appartengono al sistema.

Osservazione. — Se la retta r incontra p, è facile vedere che non esiste più la corrispondenza univoca sopra indicata, poichè in tal caso ad ogni punto A corrisponde il fascio Ap, e se A è su p il piano corrispondente è indeterminato.

2. Definizione. — *Si chiama* **complesso lineare** *un sistema di rette tale che ogni fascio di rette contenga una ed una sola retta del sistema o sia formato di rette tutte appartenenti al sistema.*

Il sistema di rette che incontrano una retta data o quello delle rette determinate da una corrispondenza univoca e involutoria, come nel § precedente, verificano evidentemente le condizioni precedenti.

Teorema I. — *Le rette di un complesso che passano per un punto* A *o formano un fascio, o sono tutte quelle della stella di centro* A.

Le rette di un complesso situate in un piano α *o formano un fascio o sono tutte quelle del piano* α.

Per ogni punto A passano infinite rette del complesso, poichè ogni fascio di centro A ne contiene o una o infinita.

Se a_1, a_2 sono due rette del complesso passanti per A, ogni retta del fascio determinato da esse appartiene per la data definizione al complesso. Se esiste un'altra retta a_3 del complesso fuori del piano a_1a_2, ogni altra retta a della stella di centro A appartiene pure al complesso. Infatti il piano a_3a incontra il piano a_1a_2 in una retta a_4 del complesso, perciò anche tutte le rette del fascio a_3a_4 (ed in particolare a) appartengono al complesso.

Definizioni. — *Un punto si chiama* **ordinario** *o* **singolare**, *secondo che è centro di un fascio, o di una stella formata di rette del complesso. Nel primo caso il piano del fascio si dice* **polare** *del punto.*

Un piano si chiama **ordinario** *o* **singolare**, *secondo che contiene un fascio di rette del complesso, o tutte le sue rette sono del complesso. Nel primo caso il centro del fascio si dice* **polo** *del piano dato.*

Teorema II. — *Se esiste un punto singolare, ne esiste almeno un secondo.*

Se esiste un piano singolare, ne esiste almeno un secondo.

Sia P un punto singolare, α un piano qualunque non passante per P ed A il polo di α. Poichè tutte le rette di α passanti per A ed AP appartengono al complesso, anche ogni altra retta della stella di centro A appartiene al complesso, e quindi A è un punto singolare.

Teorema III. — *Se due punti* P_1, P_2 *sono singolari, ogni punto della retta* $r = P_1P_2$ *è singolare, e tutti i piani per* r *sono singolari.*

Se due piani π_1, π_2 *sono singolari, ogni piano per la retta* $r = \pi_1\pi_2$ *è singolare, e tutti i punti della* r *sono singolari.*

Conduciamo per il punto M della r una retta arbitraria a, e su essa prendiamo un punto N. Le rette NP_1, NP_2 appartenendo al complesso, anche la a, che fa parte del fascio individuato da esse, appartiene al complesso. Dunque M è singolare.

Ogni piano per la r è pure singolare, poichè tutte le sue rette appartengono al complesso.

TEOREMA IV. — *Se tre punti non in linea retta sono singolari, tutti i punti dello spazio sono singolari.*

Se tre piani, che non passano per una retta, sono singolari, tutti i piani dello spazio sono singolari.

Sieno P_1, P_2, P_3 tre punti singolari non in linea retta, ed M un punto arbitrario fuori del loro piano. Le rette MP_1, MP_2, MP_3 appartengono al complesso e non sono in un piano, perciò M è un punto singolare.

Se N è un punto del piano $P_1 P_2 P_3$, si dimostra egualmente che è singolare, perchè le tre rette NP_1, NP_2, NPM, non situate in un piano, appartengono al complesso.

COROLLARIO. — *In un complesso o non esistono punti (e piani) singolari, o sono singolari tutti quelli di una retta, o sono singolari tutti i punti (e piani) dello spazio.*

Se sono singolari tutti i punti di una retta r e tutti i piani che passano per essa, il complesso è costituito da tutte le rette che incontrano r. Si dice allora che esso è *speciale*, e che r è il suo *asse*.

Se sono singolari tutti i punti dello spazio, tutte le rette dello spazio appartengono al sistema, ed allora non abbiamo più un vero complesso.

Se non esistono punti e piani singolari, esiste corrispondenza univoca involutoria, senza eccezioni, fra i punti e i piani dello spazio.

In ciò che segue colla parola *complesso* indicheremo sempre il complesso senza punti singolari, se non sarà esplicitamente detto il contrario.

3. TEOREMA. — *Se* A *è polo di* α, *ogni punto di* α *deve avere un piano polare passante per* A.

Infatti se B è un punto di α la retta AB appartiene al complesso, e quindi il piano polare di B contiene questa retta, e passa per A.

COROLLARI. — 1°. *I punti di una retta del complesso hanno per polari i piani che passano per essa.*

Se r è una retta del complesso, ogni punto P di essa ha un piano polare che contiene la r. I piani polari di due punti qualunque non possono coincidere, perchè se coincidessero, il piano sarebbe singolare.

2°. *Ogni retta* r, *non appartenente al complesso, individua una retta* r' *inviluppo dei piani polari dei punti di* r *e luogo di poli dei piani per* r.

Siano A, B due punti arbitrari di r; i loro piani polari, non passando per r, si tagliano secondo una retta r'. Se M è un punto qualunque di r', esso ha per piano polare MAB, poichè MA, MB sono rette del complesso. In altre parole la r' taglia i piani per r nei loro poli.

In simil guisa si dimostra che la r taglia i piani per r' nei loro poli.

DEFINIZIONE. — *Due rette* r, r' *ciascuna delle quali è il luogo dei poli* *dei piani che passano per l'altro si dicono* **reciproche** *o* **polari** *rispetto al complesso.*

Corollari. — 3°. *Se una retta del complesso incontra una retta* r, *incontra anche la sua reciproca; viceversa ogni retta che incontra due rette reciproche appartiene al complesso.*

4°. *Tutte le rette di un piano* α *hanno per reciproche quelle della stella che ha per centro il polo* A *di* α.

4. Teorema I. — *Un complesso è individuato da due rette* p, p' *reciproche rispetto ad esso e da una sua retta* r, *purchè* p, p', r *sieno sghembe due a due.*

Infatti per determinare il piano polare di un punto A o il polo di un piano α basta evidentemente eseguire le costruzioni del § 1.

Le tre rette p, p', r possono essere scelte ad arbitrio.

Teorema II. — *Un complesso è individuato da 5 sue rette sghembe due a due.*

Siano r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 cinque rette sghembe due a due. Esistono due sole rette p, p' che si appoggiano a r_1, r_2, r_3, r_4. Il complesso cercato è quello che ha p, p' per rette reciproche e che contiene la retta r.

Corollario. — *Date cinque rette* r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 *sghembe due a due, e che non incontrano una stessa retta, sieno* p_i, p'_i *le due rette che le incontrano tutte, esclusa la* r_i.

Le cinque rette che passano per un punto P *e incontrano una coppia di rette* p_i, p'_i *giacciono in un piano* π *(polare di* P*).*	*Le cinque rette che giacciono in uno stesso piano* π *e incontrano una coppia di rette* p_i, p'_i, *passano per un punto* P *(polo di* π*).*

5. Le rette del piano all'infinito hanno per reciproche le rette che passano per il polo del piano stesso, e che per conseguenza sono parallele.

Teoremi. — 1°. *Il luogo dei poli di un fascio di piani paralleli è una retta che si chiama* **diametro coniugato** *a questi piani.*

2°. *Tutti i diametri sono paralleli.*

3°. *Esiste un diametro perpendicolare ai piani ai quali è coniugato. Esso si chiama* **asse del complesso.**

L'asse del complesso si trova facilmente nel modo seguente. Costruito il diametro d coniugato ad una serie di piani paralleli, si conducano i piani perpendicolari a d; il diametro coniugato a questo è l'asse.

4°. *Tutte le rette del complesso che incontrano l'asse sono perpendicolari all'asse; viceversa tutte le rette, che sono perpendicolari all'asse e l'incontrano, appartengono al complesso.*

5°. *Ogni retta che incontra due rette reciproche e l'asse è perpendicolare all'asse.*

Infatti se una retta incontra due rette reciproche, appartiene al complesso, e se incontra l'asse, deve essere perpendicolare ad esso.

6. Teoremi. — I. *Due rette reciproche giacciono in due piani paralleli all'asse.*

Sieno p, p' due rette reciproche, π, π' i piani condotti l'uno per p parallelo a π', l'altro per p' parallelo a p. La retta comune a π, π', incontrando p, p', appartiene al complesso, e siccome è situata nel piano all'infinito, passa per il polo di questo piano. Dunque l'asse del complesso è parallelo a π, π'.

II. *La retta, che è perpendicolare a due rette reciproche e le incontra, è pure perpendicolare all'asse e l'incontra.*

Se una retta r è perpendicolare alle rette reciproche p, p', è anche perpendicolare ai piani paralleli π, π', che passano per esse, e quindi anche all'asse. Incontrando poi p, p', deve incontrare anche l'asse.

7. Teorema. — *Un complesso è individuato dal suo asse e da una sua retta.*

Questo teorema è un caso particolare del teorema I del § 4, poichè dare l'asse equivale ad assegnare una coppia di rette reciproche.

8. Teorema. — *Se si sposta un complesso, facendo scorrer l'asse su se stesso, o eseguendo una rotazione attorno all'asse, il complesso scorre su se stesso.*

1°. Facendo scorrere l'asse su se stesso, anche ogni diametro scorre su se stesso, e quindi il piano polare α di un punto A situato su uno di questi diametri viene a coincidere col piano polare α' (ad esso parallelo) di un altro punto A' situato sullo stesso diametro.

Dunque ogni retta del complesso viene a coincidere con un'altra retta del complesso stesso, ossia questo *scorre* su se stesso.

2°. Sia a l'asse del complesso, r una retta del complesso la quale incontri due piani arbitrari π, π', condotti per a, in due punti A, A' egualmente distanti dall'asse, B, B' le proiezioni di A, A' su a.

Le rette AB, A'B' (§ 5, Teorema 4°) appartengono al complesso, r pure appartiene al complesso, dunque i piani polari di A, A' sono rispettivamente $\alpha = AA'B$, $\alpha' = A'AB'$. Ora se si rovescia il diedro $\pi\pi'$, in modo che B vada in B' e viceversa, si vede che il tetraedro ABA'B' viene a coincidere con se stesso in modo che lo spigolo AB coincide con lo spigolo A'B'. Ciò prova che il diedro $\pi\alpha$ è eguale al diedro $\pi'\alpha'$; dunque i piani polari di punti equidistanti dall'asse fanno diedri eguali coi piani individuati dai punti stessi e dall'asse.

Ne segue che facendo rotare la figura attorno all'asse, in guisa che un punto A prenda la posizione A_1, il piano polare del punto A coincide col piano polare di A_1.

9. Teorema. — *Se* A *è un punto di una retta* x *perpendicolare all'asse* a *in un punto* O, *e si pone* OA = d *e s'indica con* φ *l'angolo che il piano polare di* A *(passante per* x*) fa col piano* ax, *si ha la relazione*

$$d \,.\, \tan\varphi = costante$$

Consideriamo il piano π' perpendicolare al piano ax condotto per a, e sia α il piano polare di A che taglia π' secondo una retta che passa per O. Su questo si prenda un punto A′ alla distanza d' dall'asse, e sia O′ la proiezione di A′ sull'asse. È evidente che AOA′, AO′A′ sono i piani polari di A e A′ rispettivamente, e che gli angoli φ, φ' che essi fanno con π e π' sono $\varphi = \widehat{O'OA'}$, $\varphi' = \widehat{OO'A}$. Dai triangoli rettangoli AOO′, A′OO′ si ricava, posto $OO' = h$,

$$\tan\varphi = \frac{d'}{h}, \qquad \tan\varphi' = \frac{d}{h},$$

e quindi

$$d \,.\, \tan\varphi = d' \,.\, \tan\varphi' = \text{costante}$$

e così, tenuto conto del teorema del § 6, il teorema è dimostrato.

10. Il teorema del § precedente ci dà una costruzione del complesso, che ci permette di farci un' idea del modo col quale esso è costituito.

Poichè ogni retta deve incontrare un piano dato, basterà scegliere un piano π qualunque per l'asse, e costruire tutti i fasci di rette del complesso che hanno per centri i punti del medesimo.

A tale scopo si conduca una retta x perpendicolare all'asse in un punto O. Se è data una retta del complesso, potremo determinare l'angolo φ relativo ad un punto A di φ, e per mezzo di esso la costante che comparisce nel teorema precedente.

Per mezzo di essa potremo determinare tutti i fasci di rette del complesso che hanno per centri i punti di x.

Si otterranno poi i fasci relativi ai punti di ogni altra retta del piano π parallelo ad x, considerando che i punti situati su un diametro, hanno i piani polari paralleli.

G. Lazzeri.

UN NOTEVOLE SPECCHIO DI NUMERI

1. Si formi uno specchio (A) di numeri ponendo nella prima linea l'unità; nella seconda due unità; nella terza il doppio di ciascun elemento della seconda, aumentato dell'elemento a sinistra; nella quarta il triplo di ciascuno elemento della terza, aumentato da quello immediatamente a sinistra. In generale, se con $\alpha_{i,j}$ intendiamo l'elemento di posto i-esimo della linea j-esima, sia

(1)
$$\alpha_{i,j} = (j-1)\,\alpha_{i,j-1} + \alpha_{i-1,j-1}.$$

Ecco alcune linee dello specchio (A)

1					
1	1				
2	3	1			
6	11	6	1		
24	50	35	10	1	
120	274	225	85	15	1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

2. Dimostriamo subito che

gli elementi della h-*esima linea di* (A) *sono i coefficenti delle successive potenze di* m *fino alla* h-*esima nel polinomio di* h-*esimo grado in* m, *cui dà luogo lo sviluppo del prodotto*

$$m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+h-1).$$

Ammettendo che ciò sia vero per $h=k-1$, mostreremo che è vero anche per $h=k$, e poichè la cosa si verifica per $h=1,2,3$, essa sarà provata in generale.

Sia dunque

$$m(m+1)\ldots(m+k-2)=\alpha_{1,k-1}m+\alpha_{2,k-1}m^2+\ldots+\alpha_{k-1,k-1}m^{k-1}.$$

Moltiplichiamo per $m+k-1$; otterremo

$$m(m+1)(m+2)\ldots(m+k-2)(m+k-1)=(k-1)\,\alpha_{1,k-1}m+$$
$$+\left\{(k-1)\,\alpha_{2,k-1}+\alpha_{1,k-1}\right\}m^2+\left\{(k-1)\,\alpha_{3,k-1}+\alpha_{2,k-1}\right\}m^3+\ldots$$
$$+\left\{(k-1)\,\alpha_{k-1,k-1}+\alpha_{k-2,k-1}\right\}m^{k-1}+\alpha_{k-1,k-1}m^k,$$

e per la (1)

(2) $$m(m+1)(m+2)\ldots(m+k-1)=\alpha_{1,k}m+\alpha_{2,k}m^2+\ldots+\alpha_{k,k}m^k.\,(*)$$

Se poniamo nella (2) $m=1$, otteniamo

(3) $$1.2.3\ldots k=\alpha_{1,k}+\alpha_{2,k}+\ldots+\alpha_{k,k}.$$

Onde:

La somma degli elementi della k-*esima linea di* (A) *è uguale a* k!

Ponendo invece $m=-1$ si ha

(4) $$0=-\alpha_{1,k}+\alpha_{2,k}-\alpha_{3,k}+\ldots+(-1)^k\alpha_{k,k}.$$

Onde:

In ogni linea di (A) *la somma degli elementi di posto pari è uguale a quella degli elementi di posto dispari.*

Poichè la (1) per $i=1$ diventa

(5) $$\alpha_{1,j}=(j-1)\,\alpha_{1,j-1},$$

si deduce evidentemente:

Il primo elemento della linea k-*esima è uguale a* k-1!

(*) Osserviamo una volta per sempre che qualunque sia r, $\alpha_{r,r}=1$.

3. Con un procedimento del tutto analogo a quello tenuto per la dimostrazione della prima proposizione, si dimostra che:

gli elementi della **k**-*esima linea di* (A) *moltiplicati per* $(-1)^{k-i}$, *essendo* i *il numero d'ordine degli elementi stessi, sono i coefficienti delle successive potenze di* m *nel polinomio di* **k**-*esimo grado in* m, *cui dà luogo lo sviluppo del prodotto*

$$(6) \qquad m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-k+1).$$

È adunque

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1) = (-1)^{k+1}\alpha_{1,k}m + (-1)^{k-2}\alpha_{2,k}m^2 - \ldots + (-1)^{2k-1}\alpha_{k-1,k}m^{k-1} + \alpha_{k,k}m^k.$$

In particolare, se n è intero,

$$n! = (-1)^{n+1}\alpha_{1,n}n + (-1)^{n+2}\alpha_{2,n}n^2 + \ldots + \alpha_{n,n}n^n.$$

Possiamo anche esprimere $n!$ mediante le successive potenze di qualsiasi intero $h < n$.

Consideriamo il prodotto

$$(7) \qquad m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n);$$

allora, se h è un numero intero e positivo minore di n, scindiamo il prodotto (7) nei fattori

$$m(m+1)\ldots\ldots(m+h-1) \quad \text{e} \quad (m+h)(m+h+1)\ldots\ldots(m+n),$$

il primo dei quali è uguale a

$$(8) \qquad \alpha_{1,h}m + \alpha_{2,h}m^2 + \ldots + \alpha_{h,h}m^h,$$

ed il secondo a

$$(9) \qquad \alpha_{1,n-h+1}(m+h) + \alpha_{2,n-h+1}(m+h)^2 + \ldots + \alpha_{n-h+1,n-h+1}(m+h)^{n-h-1}.$$

Cerchiamo nel prodotto di (8) per (9) il coefficiente di m. Esso sarà, com'è facile vedere,

$$\alpha_{1,h}(\alpha_{1,n-h+1}h + \alpha_{2,n-h+1}h^2 + \ldots + \alpha_{n-h-1,n-h+1}h^{n-h-1}).$$

Ma d'altra parte, sviluppando nel solito modo, il coefficiente di m è $\alpha_{1,n+1} = n!$

Onde:

Se h *ed* n *sono numeri interi, ed* $h < n$, *sussiste l'eguaglianza*

$$(10) \qquad n! = \alpha_{1,h}(\alpha_{1,n-h+1}h + \alpha_{2,n-h+1}h^2 + \ldots + \alpha_{n-h+1,n-h+1}h^{n-h+1}).$$

4. Il prodotto (6), a seconda che si considera come prodotto di k numeri crescenti oppure di k numeri decrescenti, è uguale a

$$(11) \qquad \alpha_{1,k}m + \alpha_{2,k}m^2 + \ldots + \alpha_{k,k}m^k,$$

oppure

$$(12) \qquad (-1)^{k+1}\alpha_{1,k}(m+k-1) + (-1)^{k+2}\alpha_{2,k}(m+k-1)^2 + \ldots + \alpha_{k,k}(m+k-1)^k.$$

Possiamo intanto dire:

Nel polinomio di k*-esimo grado ordinato per le potenze ascendenti (esclusa la potenza ad esponente nullo) di un numero qualunque* m, *aventi per coefficienti ordinatamente gli elementi della* k*-esima linea dello specchio* (A), *si può sostituire ad* m, $m + k - 1$, *purchè si moltiplichi ogni coefficiente* $\alpha_{s,k}$ *per* $(-1)^{k-s}$.

Cerchiamo in (12) il coefficiente della potenza s-esima di m.

Esso è

$$\binom{s}{s}(-1)^{k+s}\alpha_{s,k} + \binom{s+1}{s}(-1)^{k+s+1}\alpha_{s+1,k}(k-1) + $$
$$+ \binom{s+2}{s}(-1)^{k+s+2}\alpha_{s+2,k}(k-1)^2 + \ldots + \alpha_{k,k}\binom{k}{s}(k-1)^{k-s},$$

il quale per l'identità di (11) e (12) sarà uguale a $\alpha_{s,k}$.

Onde abbiamo le relazioni

$$\sum_{i=0}^{i=k-s}\binom{s+i}{s}(-1)^{k+s-i}\alpha_{s+i,k}(k-1)^i = \alpha_{s,k}$$
$$\sum_{i=1}^{i=k-s}\binom{s+i}{s}(-1)^{k+s-i}\alpha_{s+i,k}(k-1)^i = 0 \text{ per } k+s \text{ pari}$$
$$\sum_{i=1}^{i=k-s}\binom{s+i}{s}(-1)^{k+s+i}\alpha_{s+i,k}(k-1)^i = 2\alpha_{s,k} \text{ per } k+s \text{ dispari.}$$

5. Poichè è

$$\prod_{i=0}^{i=k-1}(x-i) = \sum_{i=1}^{i=k}(-1)^{k+i}\alpha_{i,k}x^i,$$

si può dire che:

L'equazione di k° *grado che ammette per radici i numeri* 0, 1, 2 ... k − 1 è

$$(-1)^{k+1}\alpha_{1,k}x + (-1)^{k+2}\alpha_{2,k}x^2 + \ldots + \alpha_{k,k}x^k = 0.$$

E poichè è

$$\prod_{i=0}^{i=k-1}(x+i) = \sum_{i=1}^{i=k}\alpha_{i,k}x^i,$$

si deduce che:

L'equazione di k° *grado, che ammette per radici i numeri* 0, −1, −2, ... −(k − 1) è

$$\alpha_{1,k}x + \alpha_{2,k}x^2 + \alpha_{3,k}x^3 + \ldots + \alpha_{k,k}x^k = 0.$$

6. Denotiamo con $s_{h,n}$ $(h < n)$ la somma dei $\binom{n-1}{h}$ prodotti dei numeri 1, 2, 3 ... $n-1$ combinati ad h ad h in tutti i modi possibili. Dalle relazioni che corrono fra i coefficienti e le radici di un'equazione, deduciamo che

$$s_{h,n} = \alpha_{n-h,n}.$$

Secondo questa relazione

$$\alpha_{nn} = s_{o,n},$$

e siamo però condotti a porre

$$s_{o,n} = 1.$$

Discende adunque che:

Nello specchio (A) *l'elemento* $\alpha_{h,k}$ *è uguale alla somma dei prodotti dei numeri* $1, 2, 3 \ldots k-1$ *combinati a* $k-h$ *a* $k-h$ *in tutti i modi possibili.*

La (1) diviene

(13) $$s_{i,j} = (j-1)\, s_{i-1,j-1} + s_{i,j-1}\,.$$

La (3) riceve l'interpretazione seguente:

La somma di tutte le $s_{h,k}$ *relative ad* $h = 0, 1, 2, 3, \ldots k$ *è uguale a* k:

E la (4) dimostra che:

La somma delle $s_{h,k}$ *relative ad* h *nullo e pari è uguale alla somma delle* $s_{h,k}$ *relative ad* h *dispari, quando si faccia successivamente* $h = 0, 1, 2, \ldots k$.

7. Se nella (1) si pone in particolare $i = j-1$, si ha

$$\alpha_{j-1,j} = (j-1)\, \alpha_{j-1,j-1} + \alpha_{j-2,j-1}\,.$$

Per $j = 2, 3, \ldots m$ si ha

$$\alpha_{1,2} = 1$$
$$\alpha_{2,3} = 2\, \alpha_{2,2} + \alpha_{1,2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{m-1,m} = (m-1)\, \alpha_{m-1,m-1} + \alpha_{m-2,m-1}\,.$$

Sommando membro a membro

$$\alpha_{m-1,m} = s_{1,m} = \sum_{n=1}^{n=m-1} n\alpha_{n,n} = \frac{(m-1)\,m}{2}\,.$$

Poniamo nella (1) $i = j-2$; con ciò si ottiene

$$\alpha_{j-2,j} = (j-1)\, \alpha_{j-2,j-1} + \alpha_{j-3,j-1}\,.$$

Con un processo analogo a quello tenuto or ora, si ottiene

$$\alpha_{m-2,m} = \sum_{n=1}^{n=m-2} (n+1)\, \alpha_{n,n+1} = \sum_{n=1}^{n=m-2} \frac{n\,(n+1)^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=m-2} (n^3 + 2n^2 + n).$$

Ora si sa essere (cfr. CESÀRO, *Corso d'Anal. Alg.*, cap. XLI, § 4)

$$\sum_1^p n^2 = \frac{p^3}{3} + \frac{p^2}{2} + \frac{p}{6}\,,$$
$$\sum_1^p n^3 = \frac{p^4}{4} + \frac{p^3}{2} + \frac{p^2}{4}\,.$$

Tenendo conto di queste formule,

$$\alpha_{m-2,m} = s_{2,m} = \frac{1}{24}\,(3m^4 - 10m^3 + 9m^2 - 2m).$$

Se si pone nella (1) $i = j-3$ e $i = j-4$, e si hanno presenti le relazioni

$$\sum_1^p n^4 = \frac{p^5}{5} + \frac{p^4}{2} + \frac{p^3}{3} - \frac{p}{30}$$
$$\sum_1^p n^5 = \frac{p^6}{6} + \frac{p^5}{2} + \frac{5p^4}{12} - \frac{p^2}{12}$$
$$\sum_1^p n^6 = \frac{p^7}{7} + \frac{p^6}{2} + \frac{p^5}{2} - \frac{p^3}{6} + \frac{p}{42}$$
$$\sum_1^p n^7 = \frac{p^8}{8} + \frac{p^7}{2} + \frac{7p^6}{12} - \frac{7p^4}{24} + \frac{p^2}{12}\,,$$

si trova

$$\alpha_{m-3,m} = s_{3,m} = \frac{1}{48}(m^6 - 7m^5 + 17m^4 - 17m^3 + 6m^2)$$

$$\alpha_{m-4,m} = s_{4,m} = \frac{1}{5760}(15m^8 - 180m^7 + 830m^6 - 1848m^5 + 2015m^4 - \\ - 900m^3 + 20m^2 + 48m).$$

Abbiamo così espresse le somme dei prodotti dei primi m numeri interi combinati in tutti i modi possibili ad 1 ad 1; a 2 a 2; a 3 a 3; a 4 a 4, in funzione di m. Si potrebbe ancora, seguendo il procedimento tenuto sopra, esprimere le $s_{h,m}$ in funzione di m, qualunque sia h, poichè si possono calcolare, per qualsiasi q intero, (*) le $\sum\limits_{n=1}^{n=p} n^q$ da cui dipendono.

8. Possiamo esprimere $\sum\limits_1^m n^3$ mediante i numeri dello specchio (A). Infatti

$$\alpha_{m,m+2} - \alpha_{m-1,m+1} = s_{2,m+2} - s_{2,m-1} = \frac{m^3}{2} + m^2 + \frac{m}{2},$$

onde

$$\sum_1^m n^3 = \frac{m}{2}(\alpha_{m,m+2} - \alpha_{m-1,m+1}) = \frac{m}{2}(s_{2,m+2} - s_{2,m+1}).$$

9. Vogliamo dimostrare che il valore del determinante

$$D = \begin{vmatrix} s_{n,n+1} & s_{n-1,n+1} \dots\dots & s_{n-k+1,n+1} \\ s_{n+1,n+2} & s_{n,n+2} \dots\dots & s_{n-k+2,n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{n+k-1,n+k} & s_{n+k-2,n+k} \dots\dots & s_{n,n+k} \end{vmatrix}$$

è $(n!)^k$.

Per dimostrare ciò, prendiamo prima in considerazione un determinante Δ, in cui gli elementi della prima linea siano t numeri

$$\beta_1, \beta_2 \dots \beta_t,$$

e gli elementi delle altre linee siano derivati dai numeri β in modo che, se $A_{m,n}$ è l'elemento appartenente alla linea m-esima ed alla n-esima colonna, sia

$$A_{m,n} = \lambda_m A_{m-1,n} + A_{m-1,n-1}$$

(λ_m numero qualunque).

Si prova allora facilmente che

$$\Delta = \beta_1^t.$$

(*) Denotando con $B_1, B_2, B_3 \dots$ i numeri di Bernoulli (Cesàro, *l. c.*) si ha

$$\sum_{n=1}^{n=p} n^q = \frac{p^{q+1}}{q+1} + B_1 p^q + \frac{1}{2} q B_2 p^{q-1} + \frac{1}{3}\binom{q}{2} B_3 p^{q-2} + \frac{1}{4}\binom{q}{3} B_4 p^{q-3} + \dots + B_q p.$$

Del resto si possono calcolare queste somme in altri modi: cfr. Pincherle, *Algebra Compl.* Parte I, § 67.

Ma il determinente D per la relazione (1) è dello stesso tipo di Δ, epperò il suo valore sarà

$$(s_{n,n+1})^k = (n!)^k .$$

10. Si abbia la progressione aritmetica

$$1+d,\ \ 1+2d,\ \ 1+3d, \dots 1+nd$$

e si considerino i primi m termini.

Dopo quanto abbiamo detto, è facile provare che la somma dei $\binom{m}{h}$ prodotti degli m termini detti, combinati in tutti i modi possibili (che indicheremo con $S_{h,m}$) è data da

$$S_{h,m} = \binom{m}{h} + \binom{m-1}{h-1} s_{1,m+1} d + \binom{m-2}{h-2} s_{2,m+1} d^2 + \dots$$
$$+ \binom{m-h-1}{1} s_{h-1,m+1} d^{h-1} + s_{h,m+1} d^h.$$

Si dimostra facilmente che:

la somma delle $S_{h,m}$ *relative ad* h *nullo o pari è uguale alla somma delle* $S_{h,m}$ *relative ad* h *dispari, quando si faccia* $h = 0.1.2.3\dots m$.

Infatti

$$S_{0,m} = 1$$
$$-S_{1,m} = -\left\{\binom{m}{1} + s_{1,m+1} d\right\}$$
$$S_{2,m} = \binom{m}{2} + \binom{m-1}{1} s_{1,m+1} d + s_{2,m+1} d^2$$

. . . .

$$(-1)^h S_{h,m} = (-1)^h \left\{\binom{m}{h} + \binom{m-1}{h-1} s_{1,m+1} d + \dots + \binom{m-h+1}{1} s_{h-1,m+1} d^{h-1} + \right.$$
$$\left. + s_{h,m+1} d^h \right\}$$

. . . .

$$(-1)^m S_{m,m} = (-1)^m \left\{\binom{m}{m} + \binom{m-1}{m-1} s_{1,m+1} d + \dots + s_{m-1,m+1} d^{m-1} + s_{m,m+1} d^m \right\}.$$

Sommando membro a membro, ordiniamo il secondo membro per le potenze di d: ogni coefficiente è della forma

$$s_{\nu,m+1} \sum_{k=\nu}^{k=m} (-1)^k \binom{m-\nu}{k-\nu},$$

che è evidentemente nullo.

Onde

$$\sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h S_{h,m} = 0,$$

che è quanto volevasi provare.

FILIPPO SIBIRANI.

Bologna, dicembre 1900.

SULLA RICERCA DEI POLIGONI REGOLARI

che possono decomporsi in poligoni pure regolari

1. Indicando con L ed S respettivamente l'ordine e la specie di un dato poligono regolare, che chiameremo P, e con

$$l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n,$$
$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$$

le quantità analoghe per gli n poligoni della scomposizione, $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ che concorrono in uno stesso vertice di P, avremo la relazione:

$$\sum_1^n \frac{l_r - 2s_r}{l_r} 180^\circ = \frac{L - 2S}{L} 180^\circ. \tag{1}$$

ovvero

$$2 \sum_1^n \frac{s_r}{l_r} - (n-1) = \frac{2S}{L} \tag{1'}$$

la quale, di per sè sola, lascia indeterminato il problema che vogliamo risolvere. Infatti prendendo per unità di misura degli angoli 180°, e indicando per brevità nella (1), con $\frac{a}{b}$, e con $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, respettivamente il valore del 2° membro, e quelli degli n termini del primo, si vede subito che in infiniti modi può essere soddisfatta la relazione,

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}; \tag{2}$$

perchè, se l_r ed s_r indicano respettivamente l'ordine e la specie dell'r^{mo} poligono, l'eguaglianza

$$\frac{(l_r - 2s_r)}{l_r} = \frac{a_r}{b_r},$$

che può mettersi sotto la forma

$$\frac{s_r}{l_r} = \frac{b_r - a_r}{2b_r}, \tag{2'}$$

mostra che per ognuno degli infiniti valori che si deducono dalla (2) per la frazione $\frac{a_r}{b_r}$, e quindi per a_r e b_r, si possano trovare infiniti valori per l_r ed s_r capaci di soddisfare alla relazione precedente; il che prova appunto che in infiniti modi si può scomporre l'angolo al vertice di un dato poligono regolare in n angoli, eguali respettivamente agli angoli al vertice di altrettanti poligoni pure regolari.

Esempio. — Per il tetradecagono di 2ª specie si ha: $\frac{a}{b} = \frac{L - 2S}{L} = \frac{5}{7}$; volendo ora scomporre l'angolo di questo poligono, ad es., in quattro parti, eguali respettivamente agli angoli di 4 poligoni regolari, si potranno prendere a caso i rapporti $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$, coll'unica condizione che la somma di queste tre frazioni sia inferiore a $\frac{5}{7}$, e prendere poi

$$\frac{a_4}{b_4} = \frac{5}{7} - \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3}\right).$$

Facendo per es. $\frac{a_1}{b_1}=\frac{1}{8}$; $\frac{a_2}{b_2}=\frac{5}{12}$; $\frac{a_3}{b_3}=\frac{3}{20}$; si trova $\frac{a_4}{b_4}=\frac{19}{840}$; e quindi, per la (2'),

$$\frac{s_1}{l_1}=\frac{1439}{2880}\ ;\ \frac{s_2}{l_2}=\frac{431}{864}\ ;\ \frac{s_3}{l_3}=\frac{179}{360}\ ;\ \frac{s_4}{l_4}=\frac{1499}{3024},$$

ossia basta prendere quattro poligoni regolari qualunque, pei quali i rapporti fra la specie e l'ordine siano respettivamente eguali ai rapporti numerici precedentemente trovati, perchè essi, nel concorrere alla scomposizione di un angolo del poligono di P, non si sovrappongano nè lascino lacune tra di loro.

Ciò premesso veniamo a determinare tutte le soluzioni del problema generale proposto, distinguendo la ricerca in due parti: nella prima ci occuperemo del caso in cui nessuno dei vertici dei poligoni di $p_1, p_2, p_3, \ldots . p_n$ cade sui lati del poligono P; nella seconda, invece, toglieremo affatto questa limitazione.

2. Per la prima parte della ricerca cominceremo ad osservare che il lato di ciascun poligono della scomposizione, che sta intorno al perimetro di P, deve essere eguale a quello dello stesso P; e siccome un poligono regolare intrecciato è concavo rispetto a ciascuno dei suoi lati, così non è possibile di rendere i poligoni $p_1, p_2, \ldots p_n$ adiacenti ai lati di P, se questo non è di 1ª specie, senza che non si sovrappongano in parte tra di loro.

Ciò porta a concludere che, nel caso di cui ora ci occupiamo, il poligono P non può essere che di prima specie. Parimente tutti i poligoni della scomposizione che stanno intorno al perimetro di P debbono essere di prima specie. Infatti, se in un vertice di P concorresse un solo poligono e questo fosse intrecciato, allora, o alcune parti di questo uscirebbero al di fuori di P, oppure si presenterebbero in P delle lacune; se invece vi concorressero almeno due poligoni, e uno di questi, almeno, fosse intrecciato, si presenterebbero delle sovrapposizioni fra i poligoni; dovendo esser dunque tutti i poligoni di prima specie, la relazione (1') può, in questo caso, mettersi sotto la forma

$$2\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}+\ldots+\frac{1}{l_n}\right)-\left(n-1\right)=\frac{2}{L};\qquad(3)$$

ed osservando poi che deve essere $2\sum_1^n\frac{1}{l_r}>n-1$, e che il massimo valore di $\sum_1^n\frac{1}{l_r}$ si ottiene quando tutte le l sono eguali a 3, nel qual caso deve aversi

$$\frac{2n}{3}>n-1\qquad\text{ossia } n<3,$$

si conclude che in ciascun vertice di P non possono concorrere più di due poligoni regolari. Dopo ciò la (3) può ridursi all'altra

$$L=\frac{2l_1\,l_2}{2(l_1+l_2)-l_1\,l_2}.\qquad(4)$$

Escludendo ora le infinite soluzioni che si otterrebbero quando si supponesse una delle l eguale a zero, il che darebbe luogo, come si deduce dalla (3), non ad una scomposizione, ma ad un semplice ricoprimento di P con un poligono eguale ad esso, si vede facilmente che la (4) è verificata solamente per i tre seguenti sistemi di valori:

I. $\begin{cases}l_1=3\\ l_2=3\end{cases}$ $L=6$; II, $\begin{cases}l_1=3\\ l_1=4\end{cases}$ $L=12$; III, $\begin{cases}l_1=3\\ l_2=5\end{cases}$ $L=30$.

Ora osserviamo che la relazione (1) impone una condizione necessaria ai soli poligoni della scomposizione che sono disposti a guisa di corona lungo il perimetro di P, ma nulla ci dice per ciò che riguarda i poligoni interni; affinchè dunque sieno accettabili i precedenti sistemi di valori, è necessario di verificare che la porzione di P che rimane ancora scoperta, è alla sua volta scomponibile in poligoni regolari. Ora ciò si verifica facilmente per le soluzioni trovate. Infatti per la I, la corona perimetrale di 6 triangoli ricopre totalmente l'esagono. Per la II, la corona di 6 quadrati e di 6 triangoli, lascia scoperto un esagono regolare. Infine per la III, la corona di 15 triangoli e di 15 pentagoni, lungo il perimetro del triacontagono regolare, lascia scoperto un poligono di 30 lati ad angoli salienti e rientranti, i primi dei quali hanno ciascuno il valore di $360^\circ - 2 \times 108^\circ - 60^\circ = 84^\circ$, che è appunto l'angolo del pentadecagono stellato di 4ª specie.

Riassumendo possiamo dunque dire che, sotto le ipotesi fatte, si hanno le soluzioni:

I. — Esagono	scomposto in	6 triangoli.
II. — Dodecagono	"	6 triangoli, 6 quadrati, un esagono (fig. 1).
III. — Triacontagono	"	15 triangoli, 15 pentagoni, un pentadecagono di 4ª specie (fig. 2).

Si osservi che l'esagono interno della fig. 1 potrebbe alla sua volta scomporsi in 6 triangoli equilateri in conformità della soluzione I.

3. Veniamo ora ad occuparci della scomposizione di P, nella supposizione che lungo il perimetro di esso cadano dei vertici di $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$. In questa ricerca supporremo dapprima che P sia di 1ª specie, poi di specie superiore, e per ognuno di questi due casi supporremo successivamente che tutti i poligoni della scomposizione sieno di prima specie oppure no. Ricorderemo ancora che in tutto ciò che segue quando parleremo di poligoni della scomposizione intenderemo generalmente di riferirci a quei poligoni che stanno intorno al perimetro di P; e quindi perchè ognuna delle soluzioni che troveremo sia accettabile, è necessario verificare sempre che la parte di P che rimane scoperta, dopo i poligoni della corona, è alla sua volta scomponibile in poligoni regolari.

Caso I. - *I poligoni* P *e* $p_1, p_2, \ldots p_n$ *sono di prima specie.*

Per questa ricerca dovremo determinare anzitutto gli aggruppamenti di poligoni pei quali la somma degli angoli concorrenti in uno stesso punto di un lato di P eguaglia 180°. Per questi dovremo avere:

$$\sum_1^n \frac{180\,(l_r - 2)}{l_r} = 180$$

da cui, $n = 1 + 2\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} + \ldots + \frac{1}{l_n}\right)$ che dà luogo alle seguenti soluzioni:

$$n = 3, \quad 1 = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \quad ; \quad l_1 = l_2 = l_3 = 3 \qquad (5)$$

$$n = 2, \quad 1 = 2\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) \quad ; \quad \begin{cases} l_1 = l_2 = 4 & (6) \\ l_1 = 3,\ l_2 = 6 & (7) \end{cases}$$

Esaminiamo ora i due sottocasi seguenti:

1°. *In ciascun vertice di* P *concorre un solo poligono.* — Con questa ipotesi la (5) e la (6) non possono dar luogo che alla scomposizione di un triangolo e di un quadrato respettivamente in p^2 triangoli e p^2 quadrati, essendo p il numero dei poligoni adiacenti a ciascun lato di P. La scomposizione relativa al triangolo si può osservare nella fig. 10 quando si supponga scomposto in triangoli l'esagono centrale.

La (7) può dar luogo alla scomposizione di un triangolo o di un esagono in triangoli ed esagoni.

Quanto al triangolo, nella supposizione che gli esagoni ed i triangoli si separino a vicenda, abbiamo una scomposizione in

$$\frac{p(p-1)}{2}+\frac{(p+1)(p+2)}{2}=p^2+p+1 \text{ triangoli, e } \frac{p(p+1)}{2} \text{ esagoni (fig. 3).}$$

Nella supposizione, invece, che ogni triangolo sia adiacente per un sol lato ad un esagono, come mostra la fig. 4, il triangolo P risulta scomposto in p^2 esagoni e in $3p^2$ triangoli. Da quest'ultima scomposizione si può dedurre una varietà supponendo di sostituire un esagono a 6 triangoli concorrenti in uno stesso punto, ed in tal caso P contiene

$$p^2+\frac{(p-2)(p-1)}{2}=\frac{3}{2}p(p-1)+1 \text{ esagoni,}$$

e $3p^2-3(p-2)(p-1)=3\{3p-2\}$ triangoli.

In tutte queste formule p rappresenta il numero degli esagoni adiacenti a ciascun lato del triangolo P.

Quanto all'esagono esso può essere decomposto, come mostra la fig. 5, cioè in modo analogo al triangolo della fig. 3; questa scomposizione dà luogo a $3p(p+1)+1$ esagoni, e a $6p(p+1)$ triangoli, ove p rappresenta il numero dei triangoli che insistono sopra ciascun lato dell'esagono P.

2°. *In ciascun vertice di* P *concorrono due poligoni.* — In questa ipotesi la (5) fornisce una scomposizione in $6p^2$ triangoli per il solo esagono (fig. 7).

La (6) non può dar luogo ad alcuna scomposizione.

La (7) dà una scomposizione dell'esagono in triangoli ed esagoni come mostra la fig. 6. Essa può riguardarsi come composta di 6 triangoli analoghi a quello rappresentato dalla fig. 4, e quindi si hanno $6p^2$ esagoni e $18p^2$ triangoli.

Supponendo poi di aver sostituito un esagono a 6 triangoli concorrenti in uno stesso punto, i numeri precedenti divengono rispettivamente:

$$9p(p-1)+6+6(p-1)+1=3p(3p-1)+1 \text{ esagoni;}$$
$$18(3p-2)-36(p-1)-6=6(3p-1) \text{ triangoli.}$$

In queste formule p rappresenta il numero degli esagoni adiacenti a ciascun lato di P.

Alle risoluzioni precedentemente trovate potrebbero aggiungersi anche quelle che si ottengono decomponendo nei modi sopra enumerati, i triangoli i quadrati e l'esagono, che entrano nella scomposizione del decagono regolare (fig. 1).

Caso II. - *Il poligono* P *di prima specie, e* $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ *non tutti di prima specie.*

Potremo distinguere in due questo caso:

1°. *I vertici dei poligoni della scomposizione non cadono sui lati, ma sui vertici di* P. Se in ciascun vertice di P concorressero due poligoni intrecciati, questi, come abbiamo già osservato al principio del num. 2, non potrebbero essere adiacenti tra di loro nè adiacenti ai lati di P; ciò porta a concludere che fra essi e i due lati di P che concorrono in quel vertice, dovrebbero essere inseriti gli angoli di almeno tre poligoni ordinari di prima specie. Ma abbiamo già veduto allo stesso num. 2 che in ciascun vertice di P non possono concorrere più di due poligoni ordinari; dunque è inammissibile la supposizione ora fatta, e per conseguenza in quel vertice non può aversi che un solo poligono stellato (che chiameremo π) in unione a due altri poligoni ordinari non diversi da due triangoli, o da un triangolo ed un quadrato, o da un triangolo ed un pentagono. Ora io dico che in un angolo rientrante R (angolo esterno) di π non può concorrere alcun poligono stellato.

Infatti chiamando con α, β, λ, rispettivamente l'angolo al vertice, l'angolo esterno rientrante R, e il numero dei lati del poligono π, dovremo avere $\alpha = \beta - \frac{360}{\lambda}$. Ma se in R potesse concorrere un poligono stellato, questo dovrebbe essere accompagnato almeno da due poligoni ordinari i quali, anche nel caso più favorevole di triangoli equilateri, condurrebbero per β ad un valore superiore a $120°$, e quindi per α (poichè $\lambda \geq 6$) ad un valore superiore a $60°$; valore questo che associato con quello dei due poligoni, che con π concorrono in uno stesso vertice di P, verrebbe a superare un angolo piatto. Si conclude dunque che in un angolo rientrante esterno di π non può concorrere che un solo poligono.

Possiamo ora dimostrare che i due poligoni che insieme a π concorrono in uno stesso vertice di P, non possono essere che due triangoli equilateri.

Infatti, se essendo l'uno un triangolo equilatero, l'altro fosse un pentagono, il valore β dell'angolo rientrante R, non potrebbe essere che di $108°$, e quindi quello di α, $36°$; ma allora non sarebbe la somma degli angoli dei tre poligoni che concorrono in P, $(60° + 36° + 108°)$ inferiore a $180°$. Se l'altro poligono fosse invece un quadrato, e quindi $\beta = 90°$ e $\alpha = 45°$, si giungerebbe alla medesima conclusione. Infine dico che l'angolo β non può essere che di $60°$. Infatti la serie dei poligoni che fa seguito (lungo il lato di π) al triangolo che concorre in un vertice di P, non può essere formata che di triangoli e di esagoni, e quindi l'angolo β non potrebbe essere che di $60°$ o $120°$; ma se fosse $\beta = 120°$ sarebbe $\alpha = 60°$, e quindi la somma degli angoli dei tre poligoni che concorrono in P, eguaglierebbe $180°$; non resta dunque per β che l'unico valore di $60°$.

Di qui si conclude facilmente che π deve essere dello stesso ordine di P e che questi due poligoni debbono avere i vertici in comune. Per la soluzione del problema dovremo dunque cercare quelle coppie P e π di poligoni pei quali gli spazi che rimangono scoperti in P, dopo che in coincidenza dei vertici di questo si sono posti quelli di π, sieno tanti triangoli equilateri. Ora per soddisfare a queste condizioni basta porre

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{180\,(L-2)}{L} - \frac{180\,(L-2s)}{L}\right\} = 60°$$

che dopo fatte le riduzioni assume la forma, $3s - L = 3$ la quale è soddisfatta per $s = 1$ e $L = 0$, e quindi per tutti i valori di

$$\left.\begin{array}{l} s = 1 + \theta \\ L = 3\,\theta \end{array}\right\} \qquad (8)$$

ove θ rappresenta un numero intero qualunque. Osserviamo poi che se L è pari si deve avere

$$s \leq \frac{L-2}{2}$$

quindi $1 + \theta \leq \frac{3\theta - 2}{2}$ e per conseguenza $\theta \geq 4$.

Se invece L è dispari dovremo pure avere

$$s \leq \frac{L-1}{2}$$

quindi $1 + \theta \leq \frac{3\theta - 1}{2}$, e conseguentemente $\theta \geq 3$. Tutte le soluzioni del problema sono quindi

$$\left\{\begin{array}{l} L = 9,\quad 12,\quad 15,\quad 18,\quad 21,\quad 24,\quad 27,\quad 30, \ldots \\ s = 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad 9,\quad 10,\quad 11, \ldots \end{array}\right. \qquad (9)$$

che sono in numero infinito. La figura corrispondente alla 2ª soluzione (dodecagono di 1ª, scomposto in un dodecagono di 5ª e in 12 triangoli equilateri) può vedersi nella parte più interna (fig. 8).

2°. *Nei vertici di* P *non concorre alcun poligono stellato, ma concorrono invece sui lati dello stesso* P. Il poligono P dovendo avere i suoi angoli ricoperti da poligoni ordinari, non potrà essere che *triangolo, quadrato, esagono, dodecagono, triacontagono;* e quindi i poligoni della scomposizione non potranno essere che *triangoli, quadrati, pentagoni, esagoni.*

Siccome due poligoni stellati non possono risultare adiacenti per un lato senza presentare delle sovrapposizioni, così in un punto dei lati di P, non potranno concorrere che un poligono stellato e due ordinari, dei quali ultimi uno almeno dovrà essere un triangolo. Se dunque nella relazione

$$\sum_1^3{}_r \frac{180\,(l_r - 2s_r)}{l_r} = 180$$

poniamo $l_1 = 3$ con $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$, e riduciamo, avremo

$$\frac{1}{l_2} + \frac{s_3}{l_3} = \frac{2}{3}$$

che ammette le soluzioni:

$$1^a;\quad l_1 = 3,\quad l_2 = 3,\quad l_3 = 3n,\quad s_3 = n,\quad \alpha_3 = 60°,\quad \beta_3 = 60° + \frac{120°}{n}$$

$$2^a;\quad l_1 = 3,\quad l_2 = 4,\quad l_3 = 12n,\quad s_3 = 5n,\quad \alpha_3 = 30°,\quad \beta_3 = 30° + \frac{30°}{n}$$

$$3^a;\quad l_1 = 3,\quad l_2 = 5,\quad l_3 = 15n,\quad s_3 = 7n,\quad \alpha_3 = 12°,\quad \beta_3 = 12° + \frac{24°}{n}$$

essendo α_3 l'angolo al vertice del poligono stellato e β_3 il suo angolo esterno rientrante.

Nella prima soluzione non si può fare che $n = 2$, nel qual caso si hanno le due soluzioni rappresentate dalle fig. 7 e 10, quando in esse si faccia astrazione dalle linee tratteggiate.

La soluzione 2ª e 3ª non sono accettabili perchè per gli angoli esterni rientranti del poligono stellato resultano sempre dei valori che non possono associarsi respettivamente con quelli dell'angolo del quadrato e del pentagono per formare un angolo piatto.

Caso III. - *Il poligono* P *è stellato e tutti i poligoni della scomposizione che stanno intorno al perimetro di* P, *sono di prima specie.*

Con ragionamento analogo a quello fatto al num. 2 per stabilire la formula (4) si trova che nel caso attuale la formula ora detta diviene

$$L = \frac{2\,l_1\,l_2}{2\,(l_1 + l_2) - l_1\,l_2}\,S\,,$$

e siccome per le sole coppie di valori (3,3; 3,4; 3,5) che si possono attribuire ad l_1 e l_2, l'espressione frazionaria assume valori interi, si deduce che L è un multiplo di S, vale a dire che P non può essere un poligono stellato vero e proprio, ma un poligono regolare intrecciato, resultante dall'insieme di un certo numero di poligoni ordinari del medesimo ordine. Vediamo ora se fra questi poligoni, che chiameremo derivati e pei quali considereremo il solo perimetro esterno astraendo per conseguenza dalle sovrapposizioni, ve ne sono alcuni scomponibili in poligoni regolari di prima specie. Ricordando le soluzioni già trovate al num. 2 è chiaro che questi poligoni derivati non possono essere costituiti che dall'intrecciamento o di triangoli, o di quadrati, o di esagoni, o di dodecagoni, o di triacontagoni regolari. Chiamando allora α l'angolo concavo del poligono intrecciato P, e osservando che $L = mS$ si ha

$$\alpha = 360 - \frac{180\left\{L - 2(S-1)\right\}}{L} = \frac{180\left\{S(m+2)-2\right\}}{mS} = \frac{180}{m}\left\{(m+2) - \frac{2}{S}\right\} \tag{11}$$

ove m non può prendere che i valori 3, 4, 6, 12, 30. Si osservi che per un dato valore di m, α assume il valore massimo per $S = 2$.

Affinchè poi questo angolo α possa scomporsi in angoli di poligoni regolari, è necessario che si abbia, tenendo conto della (11)

$$\sum_1^p \left(1 - \frac{2}{l_r}\right) = 1 + \frac{2(S-1)}{mS}$$

ovvero

$$(p-1) - 2\sum_1^p \frac{1}{l_r} = \frac{2(S-1)}{mS} \tag{12}$$

da cui si deduce anche che

$$\sum_1^p \frac{1}{l_r} > \frac{1}{2}\left(p - \frac{m+2}{m}\right) \tag{13}$$

ove p rappresenta il numero dei poligoni che con uno dei loro angoli concorre a ricoprire l'angolo α. Facciamo ora tutte le ipotesi intorno ai valori di m, e per ognuno di questi assegnamo a p tutti i valori possibili in modo da soddisfare, per valori convenienti di S, alla (12).

Per $m = 3$, P è formato dall'intrecciamento di 5 triangoli; $240° \leq \alpha \leq 300°$, e fra i poligoni che concorrono in α, i due adiacenti ai lati di quest'angolo non possono essere che triangoli od esagoni. Assegnando ora a p i valori compatibili colla (13) e fra questi tenendo solo quelli che soddisfano alla (12) si trovano le soluzioni seguenti:

1ª	$p = 4$	$s = 2$	$l_1 = l_2 = l_3 = 3.$	
2ª	»	$s = 4$	$l_1 = l_2 = l_3 = 3;$	$l_4 = 4$
3ª	»	$s = 10$	$l_1 = l_2 = l_3 = 3;$	$l_4 = 5$
4ª	$p = 3$	$s = n$	$l_1 = l_2 = 3;$	$l_4 = 3n$
5ª	$p = 2$	$s = 2$	$l_1 = l_2 = 6.$	

Per $m=4$ il poligono P è formato dall'intrecciamento di quadrati; $220° \leq \alpha < 270°$, e i poligoni adiacenti ai lati di quest'angolo non possono essere che quadrati; in questo caso si ha l'unica soluzione

6ª	$p = 3,$	$s = 3$	$l_1 = l_2 = 4;$	$l_3 = 3.$

Per $m=6$ il poligono P è costituito da esagoni intrecciati fra di loro; $210° \leq \alpha < 240°$, e i poligoni adiacenti ai lati di questo angolo o sono triangoli od esagoni. Si hanno quindi le soluzioni:

7ª	$p = 3$	$s = 2$	$l_1 = l_2 = 3,$	$l_3 = 4$
8ª	»	$s = 5$	$l_1 = l_2 = 3,$	$l_3 = 4.$

Per $m = 12$ ed $m = 30$ non si trova alcuna soluzione accettabile.

La 1ª soluzione corrisponde all'esagono stellato (due triangoli equilateri intrecciati) scomposto in triangoli equilateri; esso può riscontrarsi nell'esagono stellato che comparisce nella fig. 7, nel quale la scomposizione predetta è messa in evidenza per mezzo di linee tratteggiate.

La 2ª, ad un dodecagono stellato di 4ª specie (quattro triangoli equilateri intrecciati fra di loro) che può ottenersi prendendo il dodecagono scomposto nel modo indicato dalla fig. 1, e completandolo col sormontarne ciascun lato con un triangolo equilatero. Anche nella fig. 8 si può riscontrare, nella sua parte interna, rappresentata la soluzione 2ª, quando si supponga di aver messo al posto del dodecagono ordinario quello rappresentato dalla figura 1.

Per la 3ª soluzione si ha un triacontagono di 10ma specie (dieci triangoli intrecciati) di cui la scomposizione può essere rappresentata dalla fig. 2, quando il perimetro venga sormontato lungo ognuno dei suoi lati da un triangolo equilatero.

La 4ª soluzione corrisponde al caso di un poligono stellato formato da quanti si vogliano triangoli equilateri intrecciati fra di loro, il quale poligono viene scomposto in un poligono ordinario del medesimo ordine di quello intrecciato (che si ottiene riunendo consecutivamente i vertici rientranti), e in tanti triangoli equilateri che sono sovrapposti a ciascun lato del poligono ordinario ora detto. Nella parte interna della figura 8 si può avere la rappresentazione corrispondente al caso di 4 triangoli intrecciati (dodecagono di 4ª specie) quando si consideri la parte che rimane dopo i triangoli equilateri, come semplice dodecagono ordinario.

Per la 5ª, si ha un esagono stellato (2 triangoli intrecciati) scomposto in triangoli ed esagoni; essa è rappresentata dalla fig. 9.

Per la 6ª, si ha un dodecagono stellato di 3ª specie (tre quadrati intrecciati) scomposti in 12 quadrati, 12 triangoli e un dodecagono ordinario. Questa soluzione si può riscontrare nella fig. 8.

La 7ª corrisponde al caso di un dodecagono di 2ª specie (due esagoni intrecciati) scomposto in 24 triangoli equilateri, in 12 quadrati e in un dodecagono stellato di 4ª specie, scomposto nel modo corrispondente alla soluzione 6ª. Anche questa soluzione è compresa nella fig. 8.

La soluzione 8ª corrisponde al caso del triacontagono di 5ª specie formato dall'intreccio di 6 esagoni regolari. Lungo il perimetro di esso si può formare una corona di triangoli e di pentagoni in modo che due di quest'ultimi concorrano in ciascun angolo saliente; e due triangoli, separati da un pentagono, in ciascun angolo del poligono P. Si può poi aggiungere un triacontagono di 13ª specie concentrico a P e in modo che i suoi angoli salienti vengono ad inserirsi fra i due pentagoni che con due triangoli concorrono in uno stesso punto interno di P, completando in tal modo con questi poligoni un angolo giro. Ma dopo ciò rimangono ancora scoperti in P, 30 triangoli isosceli (con angoli di 72° e di 36°) che non possono scomporsi in poligoni regolari. La soluzione 8ª deve quindi rigettarsi.

Si osservi che la soluzione 1ª, 2ª, 3ª, quando si supponga di lasciare indecomposto respettivamente l'esagono, il dodecagono, il triacontagono centrale, rientrano tutte nella soluzione 4ª.

Riassumendo possiamo dunque dire che i poligoni scomponibili forniti dal caso III sono: 1° una serie infinita di poligoni stellati formati dall'intreccio di n triangoli; (il caso di $n = 2$ ammette due scomposizioni; fig. 7 (esagono stellato interno) e fig. 9); 2° il dodecagono stellato formato da 3 quadrati; 3° il dodecagono stellato formato da due esagoni.

Caso IV. - *Il poligono* P *è stellato e non tutti i poligoni della scomposizione sono di 1ª specie.*

Con ragionamenti perfettamente identici a quelli fatti al principio del II caso si prova che se il poligono stellato π ha in comune un vertice con P, deve essere dello stesso ordine di questo poligono e avere con esso tutti i vertici in comune;

e si prova pure che i quadrilateri che rimangono scoperti, contenendo tre angoli di 60°, devono avere due lati per diritto e quindi ridursi a triangoli. Ciò porta a concludere che il poligono P non può essere di prima specie, e quindi la ricerca di cui ora ci occupiamo rientra in quella già trattata nella prima parte del caso II.

Il poligono π abbia invece i suoi vertici nei vertici degli angoli rientranti di P, e sia dello stesso ordine di questo poligono. Perchè i quadrilateri che rimangono scoperti sieno allora scomponibili in triangoli, è necessario che sieno delle losanghe cogli angoli opposti di 120°, oppure dei quadrati. Conservando quindi la notazione L, S e λ, σ respettivamente per l'ordine e la specie di P e π, dovremo avere, se gli angoli di 120° sono quelli al vertice di P e quelli esterni rientranti di π,

$$\frac{180\left\{\lambda-2(\sigma-1)\right\}}{\lambda}=120^{\circ}; \qquad \lambda=6(\sigma-1)$$

$$180\frac{\left\{L-2S\right\}}{L}=120^{\circ}; \qquad L=6S.$$

Si hanno quindi le infinite soluzioni:

$$\begin{cases} L=12, & 18, \quad 24, \quad 30, \quad 36, \ldots. \\ S=2, & 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \ldots \end{cases}$$
$$\begin{cases} \lambda=12, & 18, \quad 24, \quad 30, \quad 36, \ldots. \\ \sigma=3, & 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \ldots. \end{cases}$$

Il poligono P, in questo caso, risulta sempre come intrecciamento di un certo numero di esagoni. Nella fig. 8 si può riscontrare la prima delle soluzioni ora trovate; dodecagono di 2ª specie (2 esagoni intrecciati) scomposto in un dodecagono di 3ª specie (3 quadrati intrecciati) e in 24 triangoli equilateri.

Se al contrario gli angoli al vertice di P e quelli rientranti (esterni) di π sono di 60° dovremo avere

$$\frac{180\left\{\lambda-2(\sigma-1)\right\}}{\lambda}=60^{\circ}; \quad \lambda=3(\sigma-1)$$

$$\frac{180\left\{L-2S\right\}}{L}=60^{\circ}; \qquad L=3S$$

e quindi le infinite soluzioni

$$\begin{cases} L=9, & 12, \quad 15, \ldots. \\ S=3, & 4, \quad 5, \ldots. \end{cases}$$
$$\begin{cases} \lambda=9, & 12, \quad 15, \ldots. \\ \sigma=4, & 5, \quad 6, \ldots. \end{cases}$$

La seconda soluzione può ancora riscontrarsi nella fig. 8 (dodecagono di 4ª specie formati di 4 triangoli intrecciati), scomposto in un dodecagono di 5ª specie e in 24 triangoli equilateri.

Infine se la losanga è un quadrato, si trova nello stesso modo:

$$\lambda=4(\sigma-1), \qquad L=4S, \qquad S=\sigma-1,$$

e quindi le infinite soluzioni:

$$\begin{cases} L=8, & 12, \quad 16, \quad 20, \quad 24, \ldots. \\ S=2, & 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \ldots. \end{cases}$$
$$\begin{cases} \lambda=8, & 12, \quad 16, \quad 20, \quad 24, \ldots. \\ \sigma=3, & 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \ldots. \end{cases}$$

La seconda soluzione si può vedere rappresentata nella stessa fig. 8; dodecagono di 3^a specie (3 quadrati intrecciati), scomposto in un dodecagono di 4^a specie (4 triangoli intrecciati) e in 12 quadrati.

Si può infine riscontrare che se il poligono π non è nelle condizioni precedentemente ammesse rispetto a P, le parti di P che rimangono scoperte, non possono in ogni caso essere scomponibili in poligoni regolari.

Applicazioni.

Le soluzioni trovate pei dodecagoni regolari, si prestano agevolmente per trovare con metodo intuitivo alcune formule relative ai dodecagoni medesimi.

1°. L'area del dodecagono equivale, (fig. 1), a quelle di 6 quadrati, più quelle di 12 triangoli equilateri dello stesso lato; indicando quindi con l questo lato e con S l'area del dodecagono, abbiamo

$$S = 6l^2 + 12\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 3l^2(2+\sqrt{3}). \tag{14}$$

2°. Dalla semplice ispezione della fig. 1 si ricava ancora che

$$S = 3\,ABCDEO = 3(ABCDO + COD);$$

ma $COD = ODG + GDC + OGC = ODG + OGH + OHA = AODGHA = AFDCBA$

e quindi sostituendo questo valore di COD nella precedente, abbiamo

$$S = 3\,AODF = 3R^2$$

essendo R il raggio del circolo circoscritto al dodecagono.

3°. Dal confronto delle due espressioni di S si ricava:

$$R = l\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{l}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

4°. La superficie totale del prisma esagonale le cui faccie laterali sono dei quadrati (questo corpo appartiene ad una delle due serie infinite di corpi d'Archimede) eguaglia quella del dodecagono il cui lato è uguale allo spigolo del prisma.

5°. Dalla 2^a delle soluzioni (9) si ricava che il dodecagono regolare può essere scomposto in 12 triangoli equilateri ed in un dodecagono di 5^a specie; e, (fig. 1), può pure scomporsi in 12 triangoli equilateri ed in 6 quadrati; si deduce quindi che l'area del dodecagono stellato di 5^a specie equivale a 6 volte quella del quadrato costruito sul lato del dodecagono ordinario iscritto nello stesso cerchio.

6°. Dalla fig. 8, si ricava che chiamando con l il lato dei triangolini e dei quadratini della scomposizione, e con L_2, L_3, L_4 respettivamente il lato del dodecagono di 2^a, 3^a, 4^a specie, e con S_2, S_3, S_4 le aree respettive di questi stessi poligoni, si trova facilmente:

$$L_2 = l(2+\sqrt{3}); \quad S_2 = 6l^2(2\sqrt{3}+3) = 6L^2(2\sqrt{3}-3)$$
$$L_3 = l(3+\sqrt{3}); \quad S_3 = 6l^2(\sqrt{3}+3) = L^2(3-\sqrt{3})$$
$$L_4 = l(3+\sqrt{3}); \quad S_4 = 6l^2(\sqrt{3}+1) = L^2(\sqrt{3}-1).$$

M.^{te} di Cammarata (Sicilia), Luglio 1900.

A. Andreini.

PRINCIPII DI LOGICA

PARTE I. — **Principii di logica espressi in linguaggio comune.**
PARTE II. — **Gli stessi espressi in simboli, eseguendo la via tracciata dalla** *Rivista di Matematica*.

Certamente per l'esposizione di proposizioni, per lo svolgimento di dimostrazioni, non è necessaria la scrittura simbolica, nello stesso modo che non è necessaria la scrittura algebrica per l'esposizione di proposizioni d'aritmetica, per dimostrazioni di esse, per risoluzione di problemi d'aritmetica.

Ma la scrittura algebrica è un mezzo utilissimo ed importantissimo per esporre e ricordare proposizioni d'aritmetica, per indicare regole le quali con grande facilità ci fanno passare da una proposizione ad un'altra, ci danno lo svolgimento di dimostrazioni e la soluzione di problemi: analogamente la scrittura ideografica, già stabilita dalla *Rivista di Matematica*, è un mezzo utilissimo ed importantissimo per esporre e ricordare forme di ragionamento, per indicare regole le quali con grande facilità ci fanno passare da una proposizione ad un'altra, da una forma di ragionamento ad altra forma, e ci danno lo svolgimento di dimostrazioni.

Senza la scrittura algebrica non si sarebbero ancora trovate tante proposizioni e la soluzione di certi problemi sarebbe possibile a pochi: e senza la scrittura ideografica certe forme di ragionamento o sarebbero ancora rimaste inavvertite o non si sarebbero ancora trovate: vedasi a proposito gli studi della *Rivista di Matematica*.

§ 1. — Classi - Negazione e partizione di classi - Relazioni fra classi.

1. Ad ogni *cosa* e ad ogni *classe di cose* si fa corrispondere un segno o complesso di segni, una voce o complesso di voci: questi segni e queste voci sono i mezzi di trasmissione delle idee.

Per es. nomi di cose: punto P; retta r; cerchio a; Pietro; padre di Antonio; ecc.... nomi di classi; pnt (r) (si legga punti della r); punto (a); Italiani; Europei; scolari diligenti; uomo; cose contenute in questa stanza; angeli; alunni di questa scuola ecc. ecc.

2. Fissata una classe, si acquista subito l'idea dell'altra classe che comprende tutte le cose eccettuate quelle della classe fissata: una di queste due classi può chiamarsi *negazione* dell'altra.

Per amore di brevità, leggendo i segni « $\equiv$ » « ( ) » per identità, per preposizione « di » o « del », si potrà scrivere per es.:

Negazione (cose contenute in questa stanza) $\equiv$ Tutte le cose eccettuate quelle della stanza ≡ Tutte le cose esterne alla stanza. Negazione (classe degli angeli) ≡ Tutte le cose che non sono angeli.

3. Data una classe è facile acquistare l'idea d'una seconda classe che sia una parte, determinata o indeterminata, della prima: la seconda classe si potrebbe chiamare *particolare rispetto alla prima*, o, *particolare della prima;* e la prima classe si potrebbe chiamare *universale rispetto alla seconda*, o, *universale della seconda.*

Per es. rispetto alla classe «poligoni», le classi particolari indeterminate sono espresse da «molti poligoni» «alcuni poligoni» «qualche poligono» ecc.

Invece «poligoni; triangoli; triangoli isosceli; triangoli equilateri; triangoli equilateri con un vertice in A» sono classi tali che ognuna è particolare determinata rispetto alle classi precedenti, ed è universale rispetto alle seguenti.

4. Osservazioni. — 1ª. *Per varietà di linguaggio alle due classi indicate al n. 3 si applica una delle seguenti espressioni: la prima classe comprende o contiene la seconda: la seconda è compresa o contenuta nella prima: la prima è maggiore della seconda: la seconda può contenere meno individui ma più idee: ciò che appartiene alla seconda apparterrà pure alla prima: non può una cosa appartenere alla seconda senza che appartenga alla prima: tutto ciò che appartiene alla seconda apparterrà ad entrambe le classi: non esiste cosa che appartenga alla seconda e alla negazione della prima: ecc. ecc.*

2ª. *Ordinariamente si indica la negazione d'una data classe premettendo ad essa il segno «non». La negazione della negazione d'una classe data non è altro che la data.*

3ª. *La particolare di una particolare di una classe data è sempre particolare della data. La universale di una universale di una classe data è sempre universale della data.*

4ª. *La negazione di una parte di una data classe comprende la negazione della data più l'altra parte della data: vale a dire (considerando che ad una parte di una classe data corrisponde l'altra parte della data) una parte di una classe e la negazione della classe sono particolari rispetto alla negazione dell'altra parte: ossia, la negazione di una parte di classe è universale tanto rispetto all'altra parte quanto rispetto alla negazione della classe.*

Per es. chiamiamo α la classe dei punti del cerchio qui segnato, compresi quelli della circonferenza; α' una parte e α'' la rimanente di α; e per semplicità limitiamo il complesso delle cose ai punti del piano cosicchè negazione (α) ≡ esterno del cerchio; evidentemente si ha che la «negazione (α')» comprende la «negazione (α)» e la classe α''.

5ª. *La negazione d'un individuo (cosa) nel senso di non esistenza, è un non senso cioè un assurdo. Negare, il corpo che cade od è caduto sotto i nostri sensi, un certo cerchio, una certa cosa di cui abbiamo nozione, è lo stesso che esprimere nello stesso tempo, l'esistenza e la non* *esistenza, l'essere e non essere, e ciò si chiama appunto assurdo: così affermare, un triangolo con quattro vertici, un uomo privo di ogni senso, ecc. è lo stesso che esprimere l'assurdo. Quando diciamo per es. Dio, affermiamo un prodotto della nostra mente, e dobbiamo dire che questo prodotto ha un'esistenza, e sarebbe assurdo la sua negazione nel senso di non esistenza. La frase « Dio non esiste » è un modo abbreviato per esprimere che quella cosa o prodotto della nostra mente corrispondente alla voce « Dio », non ha certe proprietà (per es. forma, realtà fisica, potenzialità ecc. ecc.) che si vorrebbero da alcuni attribuirgli. Se un tale dicesse, la retta non esiste, egli vorrebbe intendere che la cosa di cui ha la nozione espressa dalla voce « retta » non ha poi le proprietà che da altri si vorrebbero attribuirle. Negare una legge fisica, per es. la gravità, equivarrebbe ad affermare che una certa cosa che ha esistenza, come concezione della mente, non ha poi la proprietà di appartenere alla classe delle cose del mondo fisico. Alcune volte pare che si indichi la non esistenza d'una cosa, ma veramente non si fa altro che, prima intendere questa cosa come una classe di cose identiche ad essa e poi la negazione di questa classe. Nella proposizione « Dio è mortale » cambiando il soggetto in ciò che pare la negazione di Dio ma che in sostanza non è altro che la negazione della classe « enti identici a Dio », si ottiene « non Dio, è mortale » cioè « tutto ciò che non è Dio è mortale ».*

6ª. *Chiamando, per convenzione, una classe qualunque, particolare di se stessa; universale di se stessa, (ciò è poi lo stesso che dire, una classe è contenuta in se stessa e contiene se stesso); si potrà esprimere ciò che in logica si dice prodotto di classi, somma di classi, nel seguente modo:*

Il *prodotto* di due classi date è quella classe *particolare* di entrambe e tale che qualunque altra classe *universale* di essa non è più *particolare* di entrambe le date.

La *somma* di due classi date è quella classe *universale* di entrambe e tale che qualunque altra classe *particolare* di essa non è più *universale* di entrambe le date.

5. Le relazioni fra due classi le rappresenteremo graficamente con coppie di cerchi: a tal fine o limiteremo il complesso delle cose ai punti del piano; o intenderemo che i punti del cerchio, compresa la circonferenza, rappresentino gl'individui d'una classe, ed i punti esterni rappresentino i rimanenti individui ossia la negazione della classe.

Una coppia di cerchi di cui il primo è sempre a ed il secondo variabile è b_1 o b_2 o b_3 o b_4 o b_5 si presenta in cinque casi ben distinti: i quali così si possono esprimere:

1º Caso. — a *contiene* b_1: *ossia la classe* a *è universale di* b_1.

2º Caso. — a *contiene* b_2 *ed è contenuto in* b_2: *ossia* a *è nello stesso tempo universale e particolare di* b_2: *ossia la classe* a *è uguale alla* b_2.

3º Caso. — a *è contenuto in* b_3: *ossia la classe* a *è particolare di* b_3.

4º Caso. — a *nè contiene nè è contenuto in* b_4, *ma però* a, b_4 *hanno elementi in comune: ossia,* a *non è nè universale nè particolare di* b_4, *ed esistono individui comuni alle classi* a, b_4.

5° Caso. — a *nè contiene nè è contenuto in* b_5, *di più* a, b_5 *non hanno elementi in comune: ossia,* a *non è nè universale nè particolare di* b_5, *e non esistono individui comuni alle classi* a, b_5.

Osservazione 1ª. — *L'espressione « esistono individui comuni alle classi* a, b: *ossia, la coesistenza delle classi* a, b *non è assurda: ossia, il prodotto logico delle classi* a, b *non è nullo » indica uno dei primi quattro casi senza distinguere quale. L'espressione « Non esistono individui comuni alle classi* a, b: *ossia, la coesistenza delle classi* a, b *è assurda: ossia, il prodotto logico delle classi* a, b *è nullo » indica distintamente il 5° caso.*

Osservazione 2ª. — *Quando fra le classi* a, b *si verifica il 2° o 4° o 5° caso, allora nelle espressioni che indicano la relazione logica fra due classi si possono commutare fra loro le dette classi* a, b. *Ma quando fra le classi* a, b *si verifica il 1° o 3° caso, allora nelle dette espressioni non si possono commutare dette classi; però quando si volessero nelle dette espressioni commutare le due classi* a, b *bisognerà commutare fra loro anche i termini « contiene; è contenuto » oppure i termini « universale; particolare » espressi o sottintesi.*

6. Per l'osservazione 4ª del n. 4 facilmente si vede che, volendo nel discorso introdurre le classi le quali sono negazione delle a, b_1..., i precedenti cinque casi si possono così esprimere in modo abbreviato coll'introduzione del segno «$\sim$» per indicare « negazione di classe ».

1° Caso. — $\sim$a *è contenuta in* $\sim b_1$: *ossia, la classe* $\sim$a *è particolare di* $\sim b_1$.

2° Caso. — $\sim$a è *contenuta in* $\sim b_2$ *e contiene* $\sim b_2$: *ossia,* $\sim$a *è nello stesso tempo particolare e universale di* $\sim b_2$: *ossia la classe* $\sim$a *è uguale alla* $\sim b_2$.

3° Caso. — $\sim$a *contiene* $\sim b_3$: *ossia, la classe* $\sim$a *è universale di* $\sim b_3$.

4° Caso. — $\sim$a *nè è contenuto in, nè contiene* $\sim b_4$, *ma però* $\sim$a, $\sim b_4$ *hanno elementi in comune: ossia,* $\sim$a *non è nè particolare nè universale di* $\sim b_4$, *ed esistono individui comuni alle classi* $\sim$a, $\sim b_4$.

5° Caso. — $\sim$a *nè è contenuto in, nè contiene* $\sim b_5$, *di più* $\sim$a, $\sim b_5$ *hanno elementi in comune: ossia,* $\sim$a *non è nè particolare nè universale di* $\sim b_5$, *ed esistono individui comuni alle classi* $\sim$a, $\sim b_5$.

Si ha quindi la seguente regola in generale:

In una relazione fra due classi, si possono sostituire alle classi le corrispondenti negative purchè si commutano i termini « contiene; è contenuto » oppure i termini « universale; particolare » espressi o sottintesi.

§ 2. — Proposizioni categoriche - Necessità logiche.

1. La *Proposizione categorica* è una coppia di cose separate da « è » o « sono » o da altri segni equivalenti i quali si possono considerare come funzioni o relazioni di coesistenza fra le due cose: la prima di queste è un individuo od una classe e si chiama *soggetto;* la seconda è sempre una classe e si chiama *attributo.*

OSSERVAZIONE. — *Osservando che: l' individuo può anche essere espresso come fosse una classe e precisamente una classe di individui identici; che la classe di individui identici può anche essere espressa come un individuo; si comprende che: le proposizioni* singolari, *così chiamate perchè il loro soggetto è un individuo, possono prendere anche la forma di coppia di classi separate da « sono »:*

Alcune proposizioni singolari hanno l'attributo espresso sotto forma di individuo: In generale si può anche dire che ogni proposizione categorica è determinata da una coppia di classi.

2. Due proposizioni categoriche si dicono *identiche* quando, fatta astrazione dalla forma linguistica e grammaticale, hanno soggetti identici e attributi identici.

Per es.: La proposizione categorica singolare avente per soggetto il punto P e per attributo la classe dei punti della retta r, si esprime con una delle seguenti proposizioni identiche: P appartiene alla r: P sta su r: ad r appartiene P: r contiene P: r passa per P: r è rtt (P,): ecc.

Per es.: La relazione fra le due classi a, b_1, vedasi § 1 n. 5, si esprime con una delle seguenti identiche proposizioni chiamate *universali affermative* perchè il soggetto non viene espresso come parte di classe ma si bene come una classe seguita dal segno « è contenuto », e poi l'attributo non vien indicato col segno di negazione: Tutti i punti di b_1 sono punti di a: il cerchio b_1 è contenuto nel cerchio a: a contiene, o comprende, b_1: se x è punto di b_1, allora, x è punto di a: $x \varepsilon b_1$. si deduce. $x \varepsilon a$: non esiste individuo di b_1 che non sia individuo di a: non esiste alcun individuo che appartenga a b_1 e alla $\sim a$: non esiste individuo comune alla due classi b_1, $\sim a$: il prodotto logico delle due classi b_1, $\sim a$ è nullo.

La proposizione « alcuni (molti, diversi, vari...) alunni di questa scuola sono diligenti » vien detta *proposizione particolare* indeterminata *affermativa* perchè il soggetto ha la forma di una classe particolare indeterminata di altra classe, e l'attributo non viene espresso col segno di negazione: e in linguaggio comune vien anche così indicata: esistono alunni di questa scuola i quali sono diligenti: in questa scuola si trova qualche alunno diligente: possiamo dividere questa scolaresca in due parti distinte o classi separate e in modo che una (realmente esistente, ossia non nulla, ossia contenente almeno un individuo) abbia tutti alunni diligenti cioè sia contenuta nella classe dei diligenti; l'altra abbia tutti alunni non diligenti, cioè sia contenuta nella classe dei non diligenti.

3. Data una proposizione categorica, facendo, in qualche modo, secondo qualche norma, variare la coppia di classi di cui è formata, si ottengono tante altre *proposizioni derivate dalla data* secondo quel modo, secondo quella norma.

Per es. alla classe soggetto si potrebbe sostituire, la sua negazione, un'altra che rispetto ad essa sia particolare o universale, la negazione di una sua parte, in generale una classe derivata in qualche modo dalla classe soggetto: analogamente per la classe attributo: contemporaneamente si possono fare variazioni su entrambe le classi soggetto ed attributo. Fra le dette possibili variazioni hanno importanza le quattro seguenti:

1ª all'attributo sostituire la sua negazione

2ª al soggetto e all'attributo sostituire le rispettive negazioni

3ª al soggetto sostituire l'attributo, e all'attributo sostituire il soggetto

4ª al soggetto sostituire una determinata classe particolare rispetto al soggetto.

A queste quattro variazioni, considerate come operazioni che si possono premettere ad ogni proposizione senza curarsi per ora della verità o falsità del resultato, si danno i rispettivi nomi: *opposizione, contrarietà, inversione, partizione.*

Alle stesse, considerate come risultati ottenuti facendo sulla proposizione data le dette operazioni, si danno i rispettivi nomi di proposizione *opposta, contraria, inversa, particolare,* rispetto alla data, o della data.

Per es.: Data la proposizione di cui il soggetto sia la classe dei triangoli isosceli, e l'attributo sia la classe dei triangoli isogoni e limitato il complesso delle cose alla classe dei triangoli, si avrà:

opposizione (ogni triangolo che è isoscele, è isogonio) $\equiv$ Ogni triangolo che è isoscele, non è isogonio

contrarietà (ogni triangolo che è isoscele, è isogonio) $\equiv$ Ogni triangolo non isoscele, non è isogonio

inversione (ogni triangolo che è isoscele, è isogonio) $\equiv$ Ogni triangolo che è isogonio, è isoscele

partizione (ogni triangolo che è isoscele, è isogonio) $\equiv$ I triangoli che sono isosceli e nel semipiano α, sono isogoni.

Osservazione. — *Per ragioni grammaticali il segno « non » o altro equivalente che deve indicare la negazione d'una classe, spesso, invece di unirsi alla classe si mette prima del verbo o prende un posto speciale secondo la natura della lingua ed il modo di fraseggiare; ma ciò e altre modificazioni grammaticali si devono considerare estranee alla natura logica delle proposizioni. Facilmente sui risultati precedenti, come su qualunque altra proposizione, si possono ripetere le dette operazioni.*

4. Possiamo immaginare un gruppo di queste operazioni fatte successivamente su una proposizione data e sui risultati che successivamente si ottengono; indi confrontare il risultato ottenuto colla proposizione data. Così indicando con P la proposizione categorica data e segnando il punto invece della parentesi o preposizione « del; della; di » facilmente si verifica che:

opposizione . opposizione (P) $\equiv$ P

contrarietà . contrarietà (P) $\equiv$ P

inversione . inversione (P) $\equiv$ P

opposta . contraria (P) ≡ contraria . opposta (P)
opposta . inversa (P) ≡ inversa . opposta . contraria (P) ≡ inversa . contraria . opposta (P)
inversa . opposta . (P) ≡ opposta . inversa . contraria (P) ≡ opposta . contraria . inversa (P)
contraria . inversa (P) ≡ inversa . contraria (P)
particolare . particolare (P) ≡ particolare (P)
particolare . opposta (P) ≡ opposta . particolare (P)
« particolare . contraria (P) » differisce dalla « contraria . particolare (P) » per il solo soggetto e precisamente il soggetto della seconda è universale di quello della prima
« particolare . inversa (P) » differisce dalla « inversa . particolare (P) » in quanto che questa seconda ha il soggetto universale rispetto a quello della prima, ed ha l'attributo particolare rispetto a quello della prima.

Osservazione 1ª. — *Resta inteso che, volendo generalizzare le quattro operazioni su dette anche per le proposizioni singolari (cosa importante solo per quanto riguarda l'opposizione) bisogna osservare che:*

la negazione dell'individuo soggetto deve essere intesa nel modo indicato a § 1 n. 4, osservazione 5ª;

si considera la partizione dell'individuo soggetto sempre eguale allo stesso individuo: per l'inversione è necessario che l'attributo sia una classe di individui identici, cioè per l'inversione è necessaria l'identità tra il soggetto e l'attributo.

Per es. le due seguenti proposizioni singolari una inversa dell'altra « Dio è Onnipotente: l'Onnipotente è Dio » esprimono l'identità delle due cose corrispondenti ai termini « Dio: Onnipotente ».

Osservazione 2ª. — *Una data proposizione categorica e quelle che si ottengono facendo sulla data le prime tre operazioni « opposizione, contrarietà, inversione » da sole o accoppiate, formano un gruppo di otto proposizioni distinte. Con la quarta operazione « partizione determinata » su ognuna delle precedenti, si ottengono altre otto proposizioni.*

Osservazione 3ª. — *Devesi badare a non confondere « la partizione » con la* « partizione indeterminata ».

Per es. rispetto alla data proposizione « Gli Europei appartengono alla razza bianca » queste due altre « Gl'italiani appartengono alla razza bianca » « alcuni Europei, diversi Europei, esistono degli Europei che, appartengono alla razza bianca » son tali che la prima è particolare della data cioè al soggetto della data venne sostituito una sua determinata classe particolare, mentre la seconda è particolare indeterminata della data.

Per es.: Inteso a, b come al § 1 n. 5; e a_1 per parte determinata di a cioè per classe compresa in a; e data la proposizione « ogni a è b », allora, la proposizione « ogni a_1 è b » è particolare della data; mentre la proposizione « alcuni a, diversi a, molti a, esistono degli a tali che, appartengono a b » è particolare indeterminata della data.

5. Rispetto al sentimento ogni proposizione categorica è detta *vera*, o, è detta *falsa*. Ad una data proposizione categorica si associa il *sentimento del vero* o il *sentimento del falso* a seconda della natura della coppia di classe di cui è formata. Circa le altre proposizioni, derivate dalla data per mezzo delle quattro operazioni su dette, si osserva che: qualcuna potrà essere indipendentemente o vera o falsa a seconda della natura della detta coppia di classe, e tutte le altre sono vere o false solo per *necessità logiche*; vale a dire, per acquistare il sentimento del vero o del falso su tutte queste altre non è più necessario considerare la natura delle due classi, ma basta osservare quelle poche che già si sono dette vere o false dipendentemente dalla natura delle classi. A proposito di questa osservazione si hanno le seguenti « necessità logiche », o, seguenti « Principii di logica fra le proposizioni categoriche ». principii che qui indicheremo con Pp seguito da numero romano.

Pp I. — Principio d'opposizione delle singolari.

Presa una coppia di proposizioni singolari opposte, si dirà che: se una proposizione è vera, l'altra è necessariamente falsa; se una è falsa l'altra è necessariamente vera. Con altre parole, due proposizioni singolari opposte non possono essere entrambe vere nè entrambe false.

Indicando per es. con P una proposizione singolare si avrà che:

« P è vero » è lo stesso che « opposta (P) è falso »
« P è falso » è lo stesso che « opposta (P) è vero »

Pp II. — Principio d'opposizione delle non singolari.

Presa una coppia di proposizioni categoriche non singolari ma opposte si dirà che: se una è vera, l'altra è necessariamente falsa; se una è falsa allora la particolare indeterminata dell'altra è necessariamente vera. Con altre parole, due proposizioni non singolari ma opposte non possono essere entrambe vere: di più una di esse e la particolare indeterminata dell'altra non possono essere entrambe false.

Per es. indicando con a, b le classi dei punti di due cerchi, prendendoli nel senso indicato a § 1 n. 5 e adottando il segno $\sim$ per negazione, si avrà che:

« vero che: ogni a è b » sarà necessariamente « falso che: ogni a è $\sim b$ »
« falso che: ogni a è b » » » « vero che: qualche a è $\sim b$ »
« vero che: ogni a è $\sim b$ » » » « falso che: ogni a è b »
« falso che: ogni a è $\sim b$ » » » « vero che: qualche a è b.

Con altre parole, indicando con q una proposizione categorica non singolare si ha che: i due casi « vero q » « vero opposto q » sono tali che uno esclude necessariamente l'altro:

i due casi « falso q » « falso particolare indeterminata . opposto (q) » sono tali che uno esclude necessariamente l'altro:

i due casi « falso opposto (q) » « falso particolare indeterminata (q) sono tali che uno esclude necessariamente l'altro.

Osservazione. — *Nel* Pp II *non si escludono i casi in cui due proposizioni categoriche non singolari ma opposte siano entrambe false.*

Per es. inteso a, b_4, b_1 come venne indicato a § 1 n. 5 e 6, le due seguenti proposizioni « ogni a è b_4 » « ogni a è $\sim b_4$ » sono una opposta dell'altra ed entrambe false.

Analogamente dicasi per queste due « ogni a è b_1 » « ogni a è $\sim b_1$ ».

Pp III. — Principio di inversa della contraria; oppure di contraria della inversa; oppure 1ª legge delle inverse.

Presa una coppia di proposizioni tali che una sia l'inversa della contraria dell'altra, o, ciò che è lo stesso, la contraria dell'inversa dell'altra, si ha: Se una è vera, l'altra è necessariamente vera; se una è falsa, l'altra è necessariamente falsa. Con altre parole, chiamando *equivalenti* due proposizioni che sono necessariamente o entrambe vere o entrambe false, si dirà: ogni proposizione è equivalente alla contraria della sua inversa.

Per es. inteso a, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 come viene indicato a § 1 n. 5 e 6, si hanno: le seguenti coppie di proposizioni una contraria dell'inversa dell'altra ed entrambe vere:

« b_1 è contenuto in a »	« $\sim a$ è contenuto in $\sim b_1$ »
« b_2 è contenuto in a . simultaneamente . a è contenuto in b_2 »	« $\sim a$ è contenuto in $\sim b_2$. simultaneamente . $\sim b_2$ è contenuto in $\sim a$ »
« a è contenuto in b_3 »	« $\sim b_3$ è contenuto in $\sim a$ »

le seguenti coppie di proposizioni una contraria dell'inversa dell'altra ed entrambe false:

« a è contenuto in b_4 »	« $\sim b_4$ è contenuto in $\sim a$ »
« b_4 è contenuto in a »	« $\sim a$ è contenuto in $\sim b_4$ »
« a è contenuto in b_5 »	« $\sim b_5$ è contenuto in $\sim a$ »
« b_5 è contenuto in a »	« $\sim a$ è contenuto in $\sim b_5$ ».

Osservazione. — *Ricordando che ogni proposizione categorica si può ridurre alla forma « classe* a *contenuta nella classe* b » *nella qual forma si dice che* a *è classe particolare di* b, *si comprende facilmente come questo* Pp III *non sia che un modo di esprimere la regola già indicata a* § 1 n. 6. *Anzi ricordando la semplicissima osservazione* 4ª *del* n. 4 *si comprende come questo* Pp III *non sia che una forma data al significato della detta osservazione.*

Varallo, 10 gennaio 1901.

(Continua) Pietro Buffa.

Sui summultipli delle grandezze di 1°, 2° e 3° genere

Il compianto De Paolis, in una sua lettera del 23 Dicembre 1885, m'indicava parecchi punti dei suoi *Elementi di Geometria*, i quali parevano a lui aver bisogno di modificazioni od aggiunte. Le sue osservazioni potrebbero dar luogo a lungo e vario discorso; ma io intendo fermarmi soltanto sopra una di esse: la 14ª. Con questa egli rispondeva ad una obbiezione, che io avevo mossa contro la dimostrazione da lui data (pag. 435) dell'esistenza del summultiplo di un arco circolare secondo un qualunque numero intero. Chi legga infatti quella dimostrazione, vede che nell'ultima ineguaglianza ($3AC' < A'B' - AB$) il segno $<$ deve mutarsi in $>$, il che infirma l'asserzione immediatamente seguente. Egli, reputando giusta l'obbiezione, modificava convenientemente la dimostrazione; la quale veniva così ad accordarsi con quella già data nella 6ª edizione degli *Elementi di Geometria di Sannia e d'Ovidio;* dimostrazione valida per una grandezza di 1°, 2° e 3° genere, (*) qualora questa ammetta i summultipli secondo 2, 4, 8, ...; ed infatti in tale forma generale l'abbiamo enunciata nelle successive edizioni. L'ipotesi dell'esistenza dei summultipli secondo 2, 4, ... fu adottata anche dal De Paolis nella dimostrazione rettificata.

Nè agli egregi professori Lazzeri e Bassani è riuscito di evitarla, sebbene essa non figuri a pag. 248 del loro Trattato, e sebbene durante la dimostrazione si supponga tacitamente esistere una grandezza minore della grandezza data, poi una grandezza non maggiore della metà della precedente, e così via. Essi invero ottengono due variabili in corrispondenza univoca, la 1ª sempre maggiore della 2ª ed aventi una differenza indefinitamente decrescente; ma ciò non basta per dirle *convergenti*, non avendo anche dimostrato (come la definizione di variabili convergenti anche da essi adottata esige) che la 1ª sia decrescente e la 2ª crescente.

Non sarà dunque inutile che io qui esponga in modo generale e rigoroso, ad uso dei giovani, le due dimostrazioni cui ho accennato.

Prima dimostrazione.

Sia A la grandezza data di 1°, 2° o 3° genere, la quale ammetta i summultipli secondo m, m^2, m^3, ... e sia n un numero intero diverso da queste potenze di m.

Esisteranno due potenze successive di m fra le quali sia compreso n, e sia

$$m^{\nu-1} < n < m^{\nu}.$$

(*) Chiamo di 1° *genere* le grandezze del tipo dei segmenti, di 2° quelle del tipo dei poligoni piani, di 3° quelle del tipo degli archi o settori circolari.

Pongo $\quad m^p - n = q, \quad$ onde $\quad m^p = n + q.$

Esisteranno le grandezze (*)

$$B \doteq \frac{A}{m^p}, \quad C \doteq q\frac{B}{m^p} \doteq \frac{qB}{m^p}, \quad D \doteq q\frac{C}{m^p} \doteq \frac{qC}{m^p}, \ldots;$$

e le grandezze della successione

$$B, \ C, \ D, \ldots$$

decresceranno indefinitamente, perchè ciascuna è q volte la m^pma parte della precedente.

Ora si ha successivamente

$$\begin{aligned} A &\doteq m^p\, B \doteq (n+q)\, B \doteq nB + qB, \\ A &\doteq nB + m^p\, C \doteq nB + (n+q)\, C = n\,(B+C) + qC, \\ A &\doteq n\,(B+C) + m^p\, D \doteq n(B+C+D) + qD, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

e quindi sorge una variabile crescente, i cui stati successivi sono

$$nB, \ n\,(B+C), \ n\,(B+C+D), \ldots$$

tutti $<\cdot$ A.

Essendo $nm > m^p > q$, oltre questa variabile crescente, si può costruire un'altra variabile decrescente, i cui stati successivi, tutti $\cdot >$ A, siano

$$nB + nmB, \ n\,(B+C) + nmC, \ n\,(B+C+D) + nmD, \ldots.$$

Queste due variabili sono convergenti; poichè la loro differenza acquista gli stati successivi

$$(nm-q)\,B, \ (nm-q)\,C, \ (nm-q)\,D, \ldots,$$

i quali decrescono indefinitamente, come B, C, D, ...

E le due variabili hanno per limite A, visto che A è compresa fra l'una e l'altra.

Ora delle dette due variabili esistono i summultipli secondo n, e sono rispettivamente

$$\begin{matrix} B, & B+C, & B+C+D, \ldots, \\ (m+1)\,B, & B+(m+1)\,C, & B+C+(m+1)\,D, \ldots; \end{matrix}$$

dunque essi costituiscono anche due variabili convergenti; e però (giusta il postulato che due variabili convergenti hanno sempre un limite) essi avranno un limite, il quale avrà A per multiplo secondo n, cioè sarà summultiplo di A secondo n.

Seconda dimostrazione.

Nelle ipotesi fatte esistono le grandezze

$$b \doteq \frac{A}{m}, \quad c \doteq \frac{b}{m}, \quad d \doteq \frac{c}{m}, \ldots, (^{**})$$

ed esistono nb, nc, nd, ...

(*) Adopero i segni $\doteq$ *(equivalente a)*, $\cdot >$ *(prevalente a)*, $<\cdot$ *(suvvalente a)*. Per grandezze di 1° genere essi si riducono a $=$ *(eguale a)*, $>$ *(maggiore di)*, $<$ *(minore di)*.

(**) La dimostrazione vale anche se si suppongono esistere le grandezze $b \doteq \frac{A}{m}, \ c \doteq \frac{b}{m'}, \ d \doteq \frac{c}{m''} \ldots$

Esistono due multipli successivi di nb fra i quali sia compresa A, e sia

$$p \,.\, nb \leq\cdot \mathrm{A} <\cdot (p+1) \,.\, nb,$$

onde

$$n \,.\, pb \leq\cdot \mathrm{A} <\cdot n \,.\, (p+1)\, b.$$

Del pari, esistono due multipli successivi di nc fra i quali sia compresa A, e sia

$$p' \,.\, nc \leq\cdot \mathrm{A} <\cdot (p'+1) \,.\, nc,$$

onde

$$n \,.\, p'c \leq\cdot \mathrm{A} <\cdot n \,.\, (p'+1)\, c.$$

Così si può continuare indefinitamente.

Ora si osservi che, essendo $b \doteq mc$, si ha

$$n \,.\, pmc \doteq n \,.\, pb \leq\cdot \mathrm{A},$$

e però dev'essere

$$n \,.\, pmc \leq\cdot n \,.\, p'c,$$

ossia

$$n \,.\, pb \leq n \,.\, p'c.$$

Ed analogamente, essendo

$$n \,.\, (p+1)\, mc \doteq n \,.\, (p+1)\, b \cdot> \mathrm{A},$$

dev'essere

$$n \,.\, (p+1)\, mc \cdot\geq n \,.\, (p'+1)\, c,$$

ossia

$$n \,.\, (p+1)\, b \cdot\geq n \,.\, (p'+1)\, c.$$

Dunque con questo procedimento si ottengono due variabili: la 1ª crescente, i cui stati successivi sono

$$n \,.\, pb, \quad n \,.\, p'c, \ldots,$$

e la 2ª decrescente, i cui stati successivi sono

$$n \,.\, (p+1)\, b, \qquad n \,.\, (p'+1)\, c, \ldots$$

La 1ª variabile si conserva $\leq\cdot$ A, e la 2ª $\cdot\geq$ A. Inoltre la loro differenza acquista gli stati successivi

$$nb, \ nc, \ldots,$$

ciascuno dei quali è summultiplo del precedente secondo m; ond'essa decresce indefinitamente.

Dunque le dette due variabili sono convergenti, ed hanno per limite A. Di esse esistono i summultipli secondo n, cioè

$$\begin{gathered} pb, \ p'c, \ldots, \\ (p+1)\, b, \ (p'+1)\, c, \ldots, \end{gathered}$$

che formano due altre variabili convergenti, e quindi hanno un limite, il cui multiplo secondo n è A; cosicchè codesto limite è summultiplo di A secondo n.

Merita di esser notato che se, invece di supporre $b \doteq \frac{A}{m}$, $c \doteq \frac{b}{m}, \ldots$, si suppone $b <\cdot \frac{A}{m}$, $c <\cdot \frac{b}{m}, \ldots$, non si può applicare il precedente ragionamento. Poichè, essendo $b \cdot> mc$, sarà $n\,.\,pmc <\cdot n\,.\,pb$, e quindi si è sicuri che $n\,.\,pmc \leq\cdot n\,.\,p'c$, ma non che $n\,.\,pb \leq\cdot n\,.\,p'c$. Nè, del pari, si è sicuri che risulti $n\,.\,(p'+1)\,c \leq\cdot n\,.\,(p+1)\,b$.

Ciò dipende dal fatto, che la scelta di $b, c, \ldots$ non è regolata da una legge fissa, in guisa che ciascuna grandezza sia individuata dal suo posto, come si richiede quando si adopera una successione di grandezze.

In questioni simili non vi è cautela che basti.

Ad esempio, lo stesso *de Paolis*, a pag. 445, per dimostrare che una grandezza data A ha sempre una *misura* rispetto ad una data unità u con cui sia incommensurabile, fa un ragionamento analogo al precedente; prende, cioè, di A un multiplo $n\mathrm{A} \cdot> u$, e determina due multipli di u tali che

$$mu <\cdot n\mathrm{A} <\cdot (m+1)\,u,$$

onde

$$\frac{m}{n}\,u <\cdot \mathrm{A} <\cdot \frac{m+1}{n}\,u,$$

con

$$\frac{m+1}{n}\,u - \frac{m}{n}\,u \doteq \frac{1}{n}\,u.$$

È chiaro, egli soggiunge, che, aumentando n, la differenza $\frac{1}{n}\,u$ decresce indefinitamente, e che gli stati *successivamente decrescenti* di $\frac{m+1}{n}\,u$ e gli stati *successivamente crescenti* di $\frac{m}{n}\,u$ si possono considerare come stati successivi di due variabili convergenti, che hanno per limite A.

Or bene: non è evidente che vi siano codesti stati successivamente decrescenti o crescenti delle due variabili.

Ma una consimile menda devo confessare trovarsi anche nei miei *Elementi* (10ª edizione, pag. 348).

Ivi infatti, trattandosi la medesima questione della misura, è detto in sostanza che gli stati della variabile $\frac{m}{n}\,u$, *disposti in un ordine conveniente*, sono crescenti, e che quelli di $\frac{m+1}{n}\,u$, *disposti in un ordine conveniente*, sono decrescenti. Ora nemmeno qui si è sicuri di poter disporre i detti stati negli ordini richiesti, poichè si tratta di successioni *indefinite*.

Tanto nel caso del *De Paolis*, quanto nel mio, la difficoltà si toglie certamente col prendere per n successivi valori, ciascuno dei quali sia multiplo del precedente.

E. D'Ovidio.

PICCOLE NOTE

Sull'esagono di Pascal e sull'esalatero di Brianchon. — Il prof. Diego Fellini (*) ha dimostrato che è sempre possibile risolvere i seguenti problemi:

" *Date cinque rette* a, b, c, d, e, *determinarne una sesta* f *in modo che l'esagono semplice* a b c d e f *sia ad un tempo esagono di* Pascal *ed esalatero di* Brianchon ".

" *Dati cinque punti* A, B, C, D, E, *determinarne un sesto* F *in modo che l'esagono semplice* A B C D E F *sia ad un tempo esalatero di* Brianchon *ed esagono di* Pascal ".

Premesso questo, si possono dimostrare i seguenti teoremi:

Teorema 1°. — *Se* a, b, c, d, e, f *sono i lati di un esalatero semplice* φ *di* Brianchon, *ad un tempo esagono di* Pascal, *i lati non consecutivi determinano sei punti*

$$ac,\ bd,\ ce,\ df,\ ea,\ fb,$$

che sono i vertici di un esagono semplice φ' *di* Pascal, *che è ad un tempo esalatero di* Brianchon.

Teorema 2°. — *Se* A, B, C, D, E, F, *sono i vertici di un esagono semplice* Φ *di* Pascal, *ad un tempo esalatero di* Brianchon, *i vertici non consecutivi determinano sei rette*

$$AC,\ BD,\ CE,\ DF,\ EA,\ FB,$$

che sono i lati di un esalatero semplice Φ' *di* Brianchon, *che è ad un tempo esagono di* Pascal.

Sia O il punto per il quale passano le rette

$$p \equiv ab\,.\,de$$
$$q \equiv bc\,.\,ef$$
$$r \equiv cd\,.\,fa$$

congiungenti i vertici opposti ed o la retta alla quale appartengono i punti

$$\mathrm{P} \equiv ad, \quad \mathrm{Q} \equiv be, \quad \mathrm{R} \equiv cf$$

intersezioni delle coppie di lati opposti di φ.

φ' *è esalatero di Brianchon.* — Si considerino i due trilateri abf, dec: essi hanno i lati omologhi

$$(a,\ d), \quad (b,\ e), \quad (f,\ c)$$

che s'incontrano rispettivamente nei tre punti P, R, Q della retta o, e perciò le rette

$$p\ ,\ r\ ,\ x \equiv bf\ .\ ce,$$

congiungenti i vertici omologhi s'incontrano in un punto.

In modo analogo considerando le coppie di trilateri

$$bca,\ efd\ \ ;\ \ cdb,\ fae,$$

si dimostra rispettivamente che le rette

$$p\ ,\ q\ ,\ y \equiv ac\ .\ df$$

e

$$q\ ,\ r\ ,\ z \equiv bd\ .\ ea$$

passano per un punto.

Ma per ipotesi le rette p, q, r s'incontrano in o, quindi le rette x, y, z, congiungenti i vertici opposti di φ', passano anch'esse per questo punto.

(*) *Periodico di Matematica*, Tomo XIV, maggio-giugno 1899.

φ' *è esagono di Pascal.* — Si considerino i due triangoli

$$fa\ .\ fb\ .\ ae \quad \text{e} \quad cd\ .\ ce\ .\ bd:$$

in essi le rette r, x, z, congiungenti i vertici omologhi, passano per lo stesso punto o, e perciò i punti P, R, X, intersezioni dei lati omologhi, sono in linea retta. In modo analogo, dalla considerazione delle coppie di triangoli

$$ab\ .\ ac\ .\ bf \quad , \quad de\ .\ df\ .\ ce$$

e

$$bc\ .\ bd\ .\ ac \quad , \quad ef\ .\ ea\ .\ df,$$

si dimostra rispettivamente che i punti

P, Q, Y e Q, R, Z

appartengono ad una retta. Ma per ipotesi i punti P, Q, R, sono sulla o, quindi i punti X, Y, Z, intersezioni dei lati opposti di φ', appartengono anch'essi a questa retta.

Corollario 1°. — *Se* a, b, c, d, e, f *sono i lati di un esalatero semplice di* Brianchon, *che è ad un tempo esagono di* Pascal, *le rette non consecutive determinano sei punti*

ac, bd, ce, df, ea, fb

che appartengono ad una conica.

Corollario 2°. — *Se* O *ed* o *sono rispettivamente punto di* Brianchon *e retta di* Pascal *di* φ, *essi sono tali anche per* φ'.

Corollario 3°. — *Il punto* O *e la retta* o *sono polo e polare rispetto alle coniche* C *e* C' *circoscritte a* φ *ed a* φ'.

Teorema 3°. — *Se* a, b, c, d, e, f *sono i lati di un esalatero semplice* φ *di* Brianchon, *ad un tempo esagono di* Pascal, *i punti di contatto dei lati sono i vertici di un esagono semplice* φ'' *di* Pascal, *che è pure esalatero di* Brianchon.

Corollario 1°. — *Se* A, B, C, D, E, F *sono i vertici di un esagono semplice di* Pascal, *che è ad un tempo esalatero di* Brianchon, *i punti non consecutivi determinano sei rette*

AC, BD, CE, DF, EA, FB

che sono tangenti ad una conica.

Corollario 2°. — *Se* o *ed* O *sono rispettivamente retta di* Pascal *e punto di* Brianchon *di* ψ, *essi sono tali anche per* ψ'.

Corollario 3°. — *La retta* o *ed il punto* O *sono polare e polo rispetto alle coniche* K *e* K' *circoscritte a* ψ *ed a* ψ'.

Teorema 4°. — *Se* A, B, C, D, E, F *sono i vertici di un esagono semplice* ψ *di* Pascal, *ad un tempo esalatero di* Brianchon, *le tangenti condotte per i vertici sono i lati di un esalatero semplice* ψ'' *di* Brianchon, *che è pure esagono di* Pascal.

Questi due teoremi non sono altro che i risultati contenuti nei n. 3 e 4 della sopracitata memoria.

Corollario. — *Il punto* O *è il polo della retta* o *rispetto alla conica* C'' *circoscritta a* φ''.

Teorema 5°. — *Se* a, b, c, d, e, f *sono i lati di un esalatero semplice* φ di Brianchon, *ad un tempo esagono di* Pascal, *i punti di contatto dei lati non consecutivi determinano sei rette, che sono i lati di un esalatero semplice* φ''' di Brianchon, *che è pure esagono di* Pascal.

Corollario. — *La retta* o *è la polare del punto* O *rispetto alla conica* K'' *circoscritta a* ψ''.

Teorema 6°. — *Se* A, B, C, D, E, F *sono i vertici di un esagono semplice* ψ *di* Pascal, *ad un tempo esalatero di* Brianchon, *le tangenti nei vertici non consecutivi determinano sei punti che sono i vertici di un esagono semplice* ψ''' *di* Pascal, *che è pure esalatero di* Brianchon.

φ''' *è esalatero di Brianchon.* — Infatti, i vertici di φ''' sono rispettivamente i poli dei lati di φ' rispetto alla conica C″ e poichè i lati opposti di questo s'incontrano in tre punti della retta *o*, così i vertici opposti di quello sono congiunti da tre rette che passano per il punto O, polo della retta *o* rispetto C″.

φ''' *è esagono di Pascal.* — Infatti i lati di φ''' sono rispettivamente le polari dei vertici di φ' rispetto alla conica C″, e poichè i vertici opposti di questo sono congiunti da tre rette che passano per il punto O, così i lati opposti di quello s'incontrano in tre punti della stessa retta *o*, polare del punto O rispetto C″.

Corollario. — *Il punto* O *è il polo della retta* o *rispetto alla conica* C‴ *circoscritta a* φ'''.

Corollario. — *La retta* o *è la polare del punto* O *rispetto alla conica* K‴ *circoscritta a* ψ'''.

Nel caso particolare in cui $\varphi \equiv \psi$ abbia i lati opposti paralleli, lo stesso accade di φ', φ'', φ''', ψ', ψ'', ψ'''. Allora la retta *o* diventa la retta all'infinito del piano ed O il centro delle coniche iscritte e circoscritte.

Ermanno Fabbri.

Sopra una proprietà delle linee giacenti su di una superficie di rotazione. — In una nota pubblicata nelle *Nouvelles Annales de Matematiques* (Novembre 1899) ho trovato analiticamente che se una linea è situata sopra un cono di rotazione, in ogni punto il coseno dell'angolo che essa fa coll'asse del cono è uguale al coseno dell'angolo che fa colla generatrice moltiplicato pel coseno dell'angolo (costante) che la generatrice fa coll'asse: qui darò una semplicissima dimostrazione geometrica di detta proprietà riferendomi, invece che al cono circolare a una qualsivoglia superficie di rotazione.

Sia perciò S una tal superficie, *l* una linea di essa, M un punto di *l* e *t* la tangente relativa, *m* la tangente al meridiano passante per M. Si conduca per M la parallela *a* all'asse e si consideri il triedro che ha il vertice in M e che ha per costole, questa parallela, *t* ed *m*: in detto triedro, come si riconosce facilmente, è retto il diedro che ha per costola *m*; per cui, segando con una sfera di centro M, si ottiene un triangolo sferico rettangolo; applicando ad esso un noto teorema di trigonometria sferica si ha subito:

$$\cos(ta) = \cos(tm) \,.\, \cos(ma)$$

cioè:

“Se una linea giace sopra una superficie di rotazione il coseno dell'angolo sotto cui sega l'asse uguaglia il prodotto del coseno dell'angolo sotto cui taglia il meridiano pel coseno dell'angolo del meridiano e dell'asse„.

Manifestamente se l'angolo che il meridiano fa coll'asse è costante, S è un cono circolare e si ritorna al teorema accennato in principio. In tal caso è facile riconoscere che si ha:

“Se una linea di un cono di rotazione sega sotto angolo costante le generatrici di un cono circolare, essa taglia conseguentemente sotto angolo costante le generatrici del cilindro che la proietta dal punto all'infinito dell'asse„.

E. Piccioli.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 545, 547, 550^bis, 551^bis E 554 (*)

545. *I tre punti* C, B, A *sono in linea retta* (B *fra* C *ed* A) *e facciamo rotolare simultaneamente due cerchi eguali di diametro* BA, *in direzioni opposte, l'uno sul cerchio* (C, B) *l'altro sulla circonferenza concava* (C, A); *il punto* B *del primo cerchio genera una epicicloide* BE, *ed il punto* A *del secondo una ipocicloide* AI: *dimostrare che la retta* |EI| *congiungente i due punti corrispondenti nelle due curve così tracciate, rimane sempre parallela al diametro del cerchio mobile quando è nella sua posizione iniziale.*

RETALI.

Risoluzione del sig. Ugo Fornari di Varese.

Basta osservare che scelti come assi di riferimento la retta CA (asse delle x) e la Cy perpendicolare ad essa in C, detti a e b respettivamente i raggi del cerchio fisso e di quello mobile, ω l'anomalia del centro del cerchio mobile, si ha per l'epicicloide

$$y = (a + b)\,\mathrm{sen}\,\omega - b\,\mathrm{sen}\,\frac{a+b}{b}\,\omega$$

e per l'ipocicloide (contraddistinguendo con apici gli elementi corrispondenti)

$$y_1 = (a_1 - b_1)\,\mathrm{sen}\,\omega_1 - b_1\,\mathrm{sen}\,\frac{a_1 - b_1}{b_1}\,\omega_1 .$$

Nel caso nostro $b = b_1$, $a_1 = a + 2b$, e quindi $a_1 - b_1 = a + b$.

Quindi per $\omega = \omega_1$ si avrà

$$y = y_1,$$

che dimostra la proprietà enunciata.

Altra risoluzione del sig. G. Mola di Campobasso.

547. *Sieno* O *il centro,* V *un vertice e* P *un punto arbitrario di una lemniscata (di* BERNOUILLI), T *la proiezione ortogonale di* O *sulla tangente nel punto* P: *dimostrare che* $\widehat{VOT} = 3\,\widehat{VOP}$, *e concludere una dimostrazione semplice per tracciare la tangente in un punto della lemniscata.*

RETALI.

Risoluzione del sig. Pietro Di Stefano R. U. di Catania.

Essendo $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ l'equazione della lemniscata, se indichiamo con α l'angolo che la normale nel punto $(\rho\theta)$ forma coll'asse della x, si ha

$$\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{\dfrac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta}{\dfrac{d\rho}{d\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + \rho\cos\theta} = \frac{a^2\,\mathrm{sen}\,2\theta\cos\theta + \rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta}{a^2\,\mathrm{sen}\,2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \rho^2\cos\theta},$$

ovvero, sostituendo a ρ^2 il suo valore:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,3\theta.$$

Per costruire la tangente alla curva in un punto P, basta condurre per O una retta OS tale che sia $\widehat{VOS} = 3\,\widehat{VOP}$, e da P la perpendicolare ad OS; questa è la tangente richiesta.

(*) Nel num. precedente fu omesso per errore il nome del sig. Pietro Di Stefano fra i risolutori delle quistioni 542 e 540.

550.[bis] *Costruire un triangolo dati due vertici e il centro del circolo di Feuerbach.*

RETALI.

Risoluzione del sig. Roberto Occhipinti, R. U. di Palermo.

Analisi. — Siano m, n le lunghezze note delle proiettanti il centro M del circolo di Feurbach del triangolo incognito ABC sul lato noto BC e sulla perpendicolare condotta a BC dal suo punto di mezzo O (coordinate di M); è noto allora che, chiamando ξ, η rispettivamente l'altezza AP relativa a BC e la distanza OP (coordinate di A), si ha: (*) $m=\frac{\xi}{2}$, $n=\frac{\eta^2-\xi^2+a^2}{4\eta}$ dove $a=\overline{OB}$. Da questo sistema semplicissimo si ricava: $\xi=2m$, $\eta=2n\pm\sqrt{4n^2+4m^2-a^2}$. Determinati ξ e η si può costruire il triangolo rettangolo OPA e quindi ABC. Il problema ha due soluzioni ed è possibile solo quando $4n^2+4m^2-a^2>0$.

Costruzione. — *a)* Le formole precedenti conducono alla seguente costruzione: Si costruisca il triangolo rettangolo di cateti $2n$, $2m$; indi quello di cateto a e di ipotenusa eguale all'ipotenusa di quello così costruito; l'altro cateto si aggiunga a $2n$ o si sottragga da esso: si avranno così due segmenti q, q_1; infine si costruisca il triangolo rettangolo di cateti $2m$, q (oppure $2m$, q_1); esso sarà il triangolo OPA (od OPA_1) ed allora i triangoli ABC, A_1BC sono i richiesti.

b) La costruzione seguente è più semplice: Si costruisca il triangolo rettangolo di cateto OB e di ipotenusa 2OM; l'altro vertice O' è evidentemente il centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC ed O'B ne è il raggio

Il vertice A deve stare su questo cerchio, deve inoltre stare sulla perpendicolare ad AC condotta dal punto dove il cerchio OM seca BC, dunque i punti A, A_1 d'intersezione rappresentano il terzo vertice del triangolo richiesto.

Altra risoluzione del sig. Giorgio Levi, R. L. di Prato.

551.[bis] *Costruire un triangolo dati due vertici ed il punto di Lemoine.*

RETALI.

Risoluzione del sig. Roberto Occhipinti, R. U. di Palermo.

Analisi. — Siano m, n le lunghezze note delle proiettanti il punto K di Lemoine del triangolo incognito ABC sul lato noto BC e sulla perpendicolare condotta a BC dal punto di mezzo O di esso (coordinate di k); è noto allora che, chiamando ξ, η rispettivamente l'altezza AP relativa a BC e la distanza OP (coordinate di A), si ha: $m=\frac{4a^2\xi}{\xi^2+\eta^2+3a^2}$, $n=\frac{2a^2\eta}{\xi^2+\eta^2+3a^2}$. Risolvendo questo sistema rispetto a ξ e η, si ha:

$$\xi=\frac{am}{N^2}\left\{2a\pm\sqrt{4a^2-3N^2}\right\},\ \eta=\frac{2an}{N^2}\left\{2a+\sqrt{4a^2-3N^2}\right\},$$

dove $a=OB$, $N^2=m^2+4n^2$. Determinati ξ ed η, si può costruire il triangolo rettangolo OPA, e quindi ABC. Il problema ha evidentemente quattro soluzioni, ed è possibile solo quando $4a^2-3N^2>0$.

Costruzione. — Le formole precedenti conducono alla seguente costruzione: Si costruisca l'espressione $2a\pm\sqrt{4a^2-3N^2}=M$ mediante due triangoli rettangoli: uno di cateti $m, 2n$ e l'altro di ipotenusa a e di cateto $N\sqrt{3}$; indi N^2, portando sui lati di uno degli angoli costruiti; a partire dal vertice S, i segmenti SR, ST uguali

(*) Veggasi la risoluzione del prof. V. Retali della quistione 588 nel *Periodico di Matematica*, anno XVI, pag. 261.

ad 1, N sopra un lato, ed ST' = N sull'altro; indi conducendo da T la TU parallela ad RT'; sarà SU = N². Se invece si portano sui lati dello stesso angolo, a partire da S, i segmenti SV, SW uguali ad N^3, m sur un lato, ed SK = a sull'altro e poi si conduce WH parallela a VK, sarà $S = \frac{am}{N^2}$. Infine se sui lati dello stesso angolo si portano, sempre a partire da S, i segmenti SR, S2 eguali rispettivamente ad 1 ed M sur un lato ed SH sull'altro e poi si conduce LS' parallela ad RH, sarà SS' = ξ. Per costruire η non occorre altro che la analoga costruzione di $\frac{2an}{N^2}$ e del prodotto $\frac{2an}{N^2}\left\{2a \pm \sqrt{4a^2 - 3N^2}\right\}$.

Non resta che a costruire il triangolo rettangolo OPA di cateti ξ, η.

Altre risoluzioni dei sigg. U. Fornari di Varese, e prof. G. Mola di Campobasso.

554. *Dimostrare le formole*

$$\int_0^\infty \frac{\cos^m bx - \cos^m cx}{x}\,dx = \begin{cases} \log\frac{c}{b}, & \textit{per m dispari} \\ \left(1 - \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots\ldots m}\right)\log\frac{c}{b}, & \textit{per m pari.} \end{cases}$$

D. Besso.

Risoluzione del sig. Aldo Finzi di Mantova.

Dalle formole

$$\cos^m z = \frac{1}{2^{m-1}}\left\{\cos mz + m\cos(m-2)z + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)z + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{m(m-1)\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2\ldots\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}\cos z\right\},\ \text{per } m \text{ impari}$$

$$\cos^m z = \frac{1}{2^{m-1}}\left\{\cos mz + m\cos(m-2)z + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)z + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1}{2}\,\frac{m(m-1)\ldots\frac{m+2}{2}}{1.2\ldots\frac{m}{2}}\right\},\ \text{per } m \text{ pari}$$

si traggono le seguenti:

$$\int_0^\infty \frac{\cos^m bx - \cos^m cx}{x}\,dx = \frac{1}{2^{m-1}}\sum_{r=0}^{r=\frac{m-1}{2}}\binom{m}{r}\int_0^\infty \frac{\cos(m-2r)bx - \cos(m-2r)cx}{x}\,dx$$

per m impari,

$$\int_0^\infty \frac{\cos^m bx - \cos^m cx}{x}\,dx = \frac{1}{2^{m-1}}\sum_{r=0}^{r=\frac{m-2}{2}}\binom{m}{r}\int_0^\infty \frac{\cos(m-2r)bx - \cos(m-2r)cx}{x}\,dx$$

per m pari. Ora è

$$\int_0^\infty \frac{\cos(m-2r)bx - \cos(m-2r)cx}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\cos bz - \cos cz}{z}\,dz = \log\frac{c}{b};$$

e però notando che si ha

$$\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{r=0}^{r=\frac{m-1}{2}}\binom{m}{r} = \frac{1}{2^{m-1}}\,\frac{1}{2}\,2^m = 1,$$

per m impari, e

$$\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{r=0}^{r=\frac{m-2}{2}}\binom{m}{r}=\frac{1}{2^{m-1}}\,\frac{1}{2}\left\{2^m-\binom{m}{\frac{m}{2}}\right\}=1-\frac{1}{2^m}\binom{m}{\frac{m}{2}}=1-\frac{1.3.5...(m-1)}{2.4.6...m},$$

per m pari, risultano le

$$\int_0^\infty \frac{\cos^m bx-\cos^m cx}{x}\,dx=\begin{cases}\log\frac{c}{b}\text{, per } m \text{ impari}\\ \left(1-\frac{1.3.5...(m-1)}{2.4.6.....m}\right)\log\frac{c}{b}\text{, per } m \text{ pari}\end{cases}$$

che si dovevano dimostrare.

(Il calcolo dell'integrale $\int_0^\infty \frac{\cos bz-\cos cz}{z}\,dz$ si fa ricorrendo a noti artifizi, pel tramito d'integrali doppi, e l'ometto perchè può vedersi nei trattati.)

QUISTIONI PROPOSTE (*)

556. Le uniche funzioni, finite e continue, di una variabile indipendente x, che soddisfino alla condizione:

$$f(x_1+x_2)f(x_1-x_2)=f^2(x_1)-f^2(x_2),$$

dove x_1 ed x_2 sono due valori qualunque di x, sono le seguenti:

$$ax,\quad c\operatorname{sen} ax,\quad c\left(a^x-\frac{1}{a^x}\right)$$

con a, c costanti arbitrarie. CHINI.

557. Trovare l'inviluppo delle parabole che hanno per fuoco il fuoco di una parabola fissa, e per direttrici le tangenti della parabola stessa.

558. Dimostrare che

$$e^x\left(x-\frac{x^2}{2.\underline{|2}}+\frac{x^3}{3.\underline{|3}}-\frac{x^4}{4.\underline{|2}}+\ldots\right)=$$

$$=x+\frac{1+\frac{1}{2}}{\underline{|2}}x^2+\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\underline{|3}}x^3+\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\underline{|4}}x^4+\ldots$$

559. Se un circolo passa pel vertice di una parabola, è tangente ad essa in P e la taglia in Q, il centro di curvatura corrispondente a P si trova sulla normale nel punto Q.

GREENSTREET.

560. In un triangolo ABC i vertici B, C sono fissi e l'angolo $\widehat{A}$ è costante. Trovare l'inviluppo delle simediane uscenti da A.

(*) Nelle quistioni proposte nel n. V sono stati ripetuti i n.i da 550 a 554 che già erano stati adoperati nel n. IV. Si indichino le quistioni del n. V coi n.i 550bis ... 554bis, 555.

561. Dimostrare che la curva ottenuta eliminando θ fra le due equazioni

$$x = a(6\theta + 6\theta^2 - 8\theta^3 - 3),$$
$$x^2 + y^2 - 13a^2 + 12a^2\theta = 0$$

è unicursale, che la sua area è $30\pi a^2$ ed il suo perimetro $48a$.

562. Dimostrare che se è $a > b$ l'area della curva rappresentata dall'equazione

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2} \pm \sqrt{b^2 - x^2}$$

è eguale a $2\pi b^2$.

563. Dimostrare che il quoziente dei due integrali

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{sen}^2\theta \cos^2\theta \, d\theta}{(a^2\mathrm{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2 (a^4\mathrm{sen}^2\theta + b^4\cos^2\theta)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{sen}^2\theta \cos^2\theta \, d\theta}{(a^2\mathrm{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta)(a^4\mathrm{sen}^2\theta + b^4\cos^2\theta)^2}$$

è uguale ad ab.

E. N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Andrew Russell Forsyth (membro del Collegio della Trinità a Cambridge). — *Trattato sulle Equazioni differenziali,* capitoli dieci: prima versione dall'inglese di A. Arbicone. — Raffaello Giusti edit. Livorno, 1901; pagg. XI-327, in-8, L. 7.

Non intendo fare un esame critico; ma, avendo letto con piacere ed apprezzato molto questa traduzione italiana, che appare ora contemporaneamente all'edizione inglese, sono lieto di poterne dare l'annuncio, che tornerà gradito agli allievi delle nostre Facoltà matematiche ed in generale a tutti gli studiosi ed ai professionisti colti, pei quali la teoria delle equazioni differenziali è di interesse capitale.

Chi ha dovuto consultare più trattati e pubblicazioni periodiche, per avere una discreta conoscenza di tale argomento, apprezzerà, quanto si conviene, l'importanza della traduzione, della quale il dott. Arbicone ha avuto la felice idea e che egli ha fatto con molta cura.

L'Autore dichiara che, con questo libro, ha voluto dare un'introduzione allo studio delle equazioni differenziali, la cui teoria generale con altre elevate questioni, che ad essa si connettono, egli espone nella sua opera *Teoria delle equazioni differenziali* (in corso di pubblicazione, Cambridge, tip. dell'Università: ne sono apparsi tre volumi): epperciò, *non presupponendo nel lettore alcuna conoscenza del soggetto, limitandosi a valori reali per le variabili e prendendo dalla teoria delle funzioni a variabili reali soltanto i teoremi più semplici,* in questo Trattato *espone i processi più noti e validi per ottenere l'integrale effettivo delle equazioni.* Ma chi considera gli sviluppi di alcuni capitoli — ad es.: la derivata di SCHWARZ; la forma di THOMSON; l'equazione di BESSEL; la funzione G di GAUSS; parecchi metodi e forme tipiche per le equazioni alle derivate parziali di prim'ordine, di second'ordine e di ordine superiore; ecc. — riconosce subito che, rispetto alle ordinarie esposizioni, questo libro, che il sig. RUSSEL FORSYTH chiama un'introduzione, è un vero e ricco trattato, più che sufficiente perchè abbiano conoscenza chiara ed estesa dell'interessante teoria quelli, che ignari di essa non possono ricercare gli ultimi sviluppi particolari, e specialmente tutti coloro, che debbono giovarsene per le applicazioni. Certo, la lettura del Trattato di RUSSELL FORSYTH presenta, degli studi antichi e moderni sull'argomento — da quelli di EULERO, BERNOULLI, GAUSS, LAGRANGE, RICCATI, LAPLACE, LEGENDRE, CAUCHY, MONGE ai recenti di ABEL, JACOBI, KUMMER, RIEMANN, CAYLEY, STURM, THOMSON, TODHUNTER, ecc., — quanto basta, perchè si possa essere avviati bene all'esame speciale delle singole questioni ed alle ricerche.

In ciascuno dei dieci capitoli, si hanno numerosi ed interessanti esempi, che sono in parte dovuti all'Autore ed in parte ricavati dalle memorie degli esami dell'Università di Cambridge o da libri e memorie degli autori, che più si occuparono dell'argomento e che il RUSSELL FORSYTH costantemente cita. Senza dubbio, per l'uso e l'illustrazione dei metodi (non sempre per sè stessi facili, sovratutto a chi incomincia lo studio delle equazioni differenziali), la ricca collezione di esempi rappresenta un pregio rilevante ed anzi speciale di questo Trattato. Interessano pure molto alcuni cenni bibliografici, specialmente per la serie ipergeometrica e per le equazioni alle derivate parziali.

L'esposizione piana e nello stesso tempo rigorosa, l'ordine delle teorie e dei metodi hanno quei pregi, che tutti ammirano in altri autori inglesi, ad esempio, in TODHUNTER e CAYLEY.

Perchè chi coltiva l'Analisi sia indotto a leggere la traduzione del dott. ARBICONE, basta ch'io dia le indicazioni dei capitoli, ponendo in rilievo qualcuno fra i punti più notevoli e meno comuni in altre esposizioni di questa Teoria:

CAPITOLO I. - *Introduzione.*

CAPITOLO II - *Equazioni differenziali del primo ordine.* — Sei tipi; metodo per ottenere l'integrale singolare dalla primitiva, luogo inviluppo, luogo nodale, luogo delle cuspidi; metodo per ricavare direttamente l'integrale singolare dall'equazione differenziale, luoghi dei punti di contatto; ecc.

CAPITOLO III. - *L'equazione lineare generale a coefficienti costanti.* — Proprietà generali; metodi per ottenere la funzione complementare; metodi per avere, in alcuni casi, l'integrale particolare; integrazione dell'equazione lineare omogenea.

CAPITOLO IV. - *Metodi diversi.* — Integrazione di $y^{(n)} =$ funzione di $y^{(n-1)}$; equazioni esatte lineari o non; derivata di SCHWARZ; metodo della variazione dei parametri; forma di WILLIAM THOMSON; valore del determinante, che dà la condizione per l'indipendenza di un certo numero d'integrali particolari dell'equazione lineare generale; depressione dell'ordine, quando si conoscono degli integrali particolari; traiettorie; ecc.

CAPITOLO V. - *Integrazione per serie.* — Equazione di LEGENDRE; equazione di BESSEL; proprietà delle funzioni J; equazione di RICCATI; relazioni fra l'equazione di Bessel e quelle di LEGENDRE e di RICCATI; soluzioni simboliche; ecc.

CAPITOLO VI. - *La serie ipergeometrica.* — Gruppo di 24 integrali particolari e loro divisione in sei classi; funzione G di GAUSS; applicazione della derivata schwarziana per l'equazione differenziale, alla ricerca dei casi d'integrabilità sotto forma finita; ecc.

CAPITOLO VII. - *Integrazione con integrali definiti.* — Teorema sull'integrazione con integrali definiti dell'equazione lineare generale e casi speciali; applicazione all'equazione della serie ipergeometrica e primitiva di quest'equazione sotto forma d'integrale definito; ecc.

CAPITOLO VIII. - *Equazioni ordinarie ai differenziali totali.* — Metodi d'integrazione di RICHELOT e di CAUCHY per l'equazione ellittica di EULERO; generalizzazione di quest'equazione e metodo d'integrazione di JACOBI — Equazioni ai differenziali totali e metodi d'integrazione per i casi, nei quali è o no soddisfatta la relazione per l'esistenza di una primitiva; interpretazione geometrica, famiglia di curve; equazioni ai differenziali totali con n variabili; equazioni non lineari — Equazioni simultanee, con coefficienti costanti e con coefficienti variabili; integrazione delle equazioni del moto d'una particella sotto l'azione di una forza centrale.

CAPITOLO IX. - *Equazioni alle derivate parziali del prim'ordine.* — Equazione lineare di LAGRANGE — Quattro forme tipiche; metodo di CHARPIT e LAGRANGE per l'integrazione dell'equazione generale contenente due variabili indipendenti ed applicazione alle forme tipiche ed all'equazione lineare di LAGRANGE — Metodo di JACOBI per l'integrazione dell'equazione generale del prim'ordine con n variabili indipendenti — Equazioni simultanee alle derivate parziali.

CAPITOLO X. — (Metodo di MONGE per integrare $Rr + Ss + Tt = V$; trasformazioni di LAPLACE dell'equazione lineare; metodo di POISSON per una forma speciale dell'equazione omogenea — Equazione lineare a coefficienti costanti; classe di equazioni omogenee; metodi diversi — Integrazione per serie di $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$. — Intregrazione col metodo di AMPÈRE per l'equazione $Rr + Ss + Tt + U.\,(rt - s^2) = V$: equazioni che debbono essere soddisfatte da una W e forma generale di W — Ecc.

All'Autore ed all'Editore, presento l'augurio che l'esito di questo Trattato sia tale da indurli ad offrirci tradotta la *Teoria delle equazioni differenziali* del RUSSELL FORSYTH e — specialmente nell'interesse di chi deve non coltivare, ma applicare questi studi — alcuni altri pregevoli trattati, tedeschi ed inglesi, per diversi rami od argomenti speciali d'Analisi e di Geometria.

S. ORTU CARBONI.

É. LEMOINE. — *La géométrographie dans l'éspace ou Stéréométrographie.*

Il sig. Lemoine di Parigi, ben noto ai matematici per la sua geometria recente sul triangolo, nel dicembre scorso ha presentato all'Accademia delle Scienze di Parigi una breve nota, nella quale espone un saggio dell'estensione allo spazio ordinario della sua Geometrografia, dando nuova prova di originalità, di novità e di personalità. Il Lemoine espose per la prima volta il suo metodo per le figure piane, in una memoria, letta nel 1888 al Congresso di Orano; tenendo conto poi dei lavori del Bernès, del Tarry e del Mackay, e facendo anche applicazioni alla geometria descrittiva, ne diede una esposizione quasi completa in una memoria presentata alla Società fisico-matematica di Kasan (1897). Riconosciutasi l'importanza pratica della Geometrografia nella costruzione effettiva dei disegni, per le applicazioni sue alla geometria descrittiva ed alle proiezioni ortogonali parallele, essa fu introdotta nell'insegnamento superiore e secondario anche in Italia, specialmente per mezzo del Jung a Milano, del Burali Forti a Torino e del Nannei a Bari, ottenendo efficace aiuto nell'insegnamento della geometria.

Il Lemoine imagina per la sua stereometrografia due istrumenti ideali, convenzionali, corrispondenti alla riga ed al compasso della geometrografia; essi sono il *planografo (planque)* e lo *sferografo (sférètre)* per tracciare piani e sfere, come servono riga e compasso per tracciare rette e circonferenze. Alle notazioni R_1, $2R_1$, R_2, C_1, $2C_1$, C_2 e C_3, già accettate in geometrografia, aggiunge le seguenti; P_1 = far passare il planografo per un punto; $2P_1$ = far passare il planografo per due punti o per una retta; $3P_1$ = far passare il planografo per tre punti, o per una retta ed un punto, o per due rette che si tagliano o per una data curva piana P_2 = tracciare il piano: S_1 = mettere una punta dello sferografo in un punto determinato; S_2 = mettere una punta dello sferografo in un punto indeterminato di una linea o di una superficie tracciata; S_3 = tracciare la sfera. Chiamato poi *coefficiente di semplicità* o *semplicità* il numero totale delle operazioni fatte, cioè la somma dei coefficienti dei simboli, e *coefficiente di preparazione* o *preparazione* la somma dei coefficienti delle operazioni di preparazione, cioè C_1, C_2, R_1, P_1, S_1, S_2, passa ad esaminare due costruzioni del problema: " per un punto A tracciare un piano perpendicolare ad una retta BC, „ ottenendo i seguenti risultati:

1°. Op. $(C_1 + C_3 + 6P_1 + 3P_2 + 2S_1 + 2S_3)$. Sempl. 15. Prep. 9; 1 circonferenza, 3 piani, 2 sfere;

2°. Op. $(3P_1 + P_2 + 2S_1 + 2S_2 + 2S_3)$. Sempl. 11. Prep. 6; 1 piano, 2 sfere.

Il Lemoine chiude la sua nota, affermando che non sarà difficile estendere la geometrografia allo spazio ad n dimensioni, ed avverte che una nota più importante della presente sarà inserita nei Rendiconti dell'Associazione francese per il progresso delle Scienze (Congresso di Parigi, 1900).

L'egregio prof. Nannei, dando nel *Pitagora* (anno 1898) una breve esposizione della Geometrografia, terminava promettendo che egli ne avrebbe studiata l'estensione allo spazio. E sono lieto di associare ora al nome chiaro del Lemoine quello del collega ed amico prof. Nannei. Egli ha già condotto a buon punto il suo studio (che mi auguro pubblicato presto) ottenendo gli stessi risultati del Lemoine; egli pure fa uso di un planografo e di uno sferografo, identico il primo al *planque*, diverso il secondo dallo *sphérètre*. Infatti il Lemoine, parlando di punte *(mettre une pointe du sphérètre)* fa pensare ad una forma analoga a quella del compasso, mentre il Nannei ha imaginato per il suo sferografo la forma di mezzo cerchio di raggio variabile, cosicchè si traccia la sfera, mettendo il centro dell'istrumento nel punto che sarà centro di essa, e facendo rotare il semicerchio intorno al diametro applicando cioè il solito metodo della generazione dei solidi di rotazione. Tale diversità non produce, come è naturale, alcuna differenza nei resultati.

U. Ceretti.

DA GIORNALI E RIVISTE

Nel num. 3, vol. XIV del **Journal Sciencias Mathematicas e Astronomicas** pubblicato dal Ch. prof. *F. Gomes Teixeira* a Coimbra, leggesi quanto segue, a riguardo del **Sunto di Planimetria** del prof. *S. Ortu Carboni*, edito da R. Giusti:

" Questo volumetto fa parte di una raccolta di manuali pubblicati dalla Casa Editrice R. Giusti di Livorno col titolo di *Biblioteca degli Studenti*. Tratta di Geometria piana e, malgrado il suo piccolo formato (116 pag.) contiene quanto occorre a quelli che studiano tale scienza per coltura scientifica generale. Ma anche a chi si prefigge lo studio della geometria elementare come preparazione a studi matematici più estesi, può questo libretto riescire utile come primo inizio. A tal fine l'autore omise certe teorie minuziose, che trovansi in libri di Geometria più estesi, e che gli studiosi stentano a capire quando ancora non sono iniziati. Fece quindi una esposizione ed una scelta tale dei precetti e li dispose in modo che questa omissione non abbia per effetto uno studio incompleto della scienza presa a trattare. Al contrario, i precetti dati si seguono e si coordinano in modo da formare un complesso armonico. Aggiungasi che l'esposizione della materia è chiara quanto può occorrere in un libro destinato a principianti. „

Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires fondé par *M. B. Niewenglowski.*

Anno VI, N. 8, 15 gennaio 1901. — *Ch. M.*, Sull'inversione. — *L. G.*, Sulle dimostrazioni geometriche. (Critica di diverse note dimostrazioni). — Questioni risolute. — Questioni proposte.

N. 9, 1 febbraio 1901. — *E. Rebuffel*, Sulla geometria del circolo. (Potenze d'un punto di un piano rispetto a tre circoli d'uno stesso fascio: e angoli d'un circolo con i circoli d'un fascio). — *L. G.*, Sulle dimostrazioni geometriche (cont.). — Corrispondenza (*E. Lebon* fa notare un teorema sulle progressioni geometriche del prof. *Dufour*). — Preparazione agli esami. — Questioni risolute. — Questioni proposte.

N. 10, 15 febbraio 1901. — *E. Rebuffel*, Posizioni relative d'una retta e d'un iperbole (Stabilisce la distribuzione tra punti di una retta interni ed esterni ad un'iperbole, cercando di evitare il concetto di continuità). — *L. G.*, Variazioni di alcune funzioni. (Dimostra che se $P = a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n$ è il prodotto di $m + n$ fattori positivi tali che nessuno dei primi m sia maggiore di nessuno degli ultimi n: e se $Q = c_1 c_2 \dots c_m d_1 d_2 \dots d_n$ è il prodotto di $m + n$ fattori positivi di cui la somma sia eguale alla somma dei fattori di P, e di più è $c_s \leq a_s$ $(s = 1, 2, 3 \dots n)$ e insieme $d_r \geq b_r$ $(r = 1, 2, 3 \dots n)$; allora se tutti i fattori di P non sono eguali ai corrispondenti fattori di Q è sempre $P > Q$. Ne deduce come esempio dell'applicazione che può avere questo teorema nella teorica elementare dei massimi e minimi, che il massimo di $x^m (a - x)^n$ si ha per $x = \frac{m + n}{am}$). — Preparazione agli esami. — Questioni risolute. — Questioni proposte.

N. 11, 1 marzo 1901. — *L. G.*, Variazioni di $(x - a)^m (x - b)^n (x - c)^p$ ecc., (Applica il teorema dimostrato nel fasc. precedente allo studio di altre funzioni. — Preparazione agli esami. — Questioni risolute. — Questioni proposte.

N. 12, 15 maggio 1901. — *L. G.*, Assiomi geometrici (fa noto il sistema di assiomi *completo* e *irriducibile* di Hilbert, citando a proposito i lavori di Burali-Forti e di Peano). — Preparazione agli esami. — Questioni risolute. — Questioni proposte (alcune sono tolte dal *Supplemento al Periodico di Matematica*).

Journal de Mathématiques élémentaires de *H. Vuibert*.

Anno XXV, N. 8, 15 gennaio 1901. — *A. Vacquant*, Studia l'equazione $\text{sen}\, x + \cos x + \text{tg}\, x + \cot x + \sec x + \text{cosec}\, x = a$. (*)

N. 10, 15 febbraio 1901. — *V. Hioux*, Nota sulla parabola. (Considera la parabola come inviluppo di una retta, che intercetta sui lati di un angolo costante due segmenti, tra le cui misure p e q sussiste la relazione $ap + bq = l^2$ essendo a, p, l lunghezze date). — *M. Lévy*, Discorso pronunziato alla seduta pubblica annuale dell'Accademia delle Scienze. (Constata l'immenso progresso scientifico conseguito nel secolo XIX).

N. 11, 1 marzo 1901. — *A. Goulard*, Nota d'Aritmetica e d'Algebra. (Dimostra che la somma e il prodotto di due numeri commensurabili non possono essere ambedue interi, se questi due numeri non sono interi). In questo e negli altri fascicoli non citati, numerosi esercizi e problemi.

L'Enseignement Mathématique (Revue internationale. Directeurs M.M. *C. A. Laisant* e *H. Fehr*).

Anno III, N. 1, 15 gennaio 1901. — *Fr. Pietzker*, L'insegnamento matematico in Germania durante il XIX secolo. — *A. Gallardo*, Le matematiche e la biologia. — *Ch. Méray*, Corrispondenze internazionali in *esperanto*. (**) — *Hoffbauer*, Su una terminologia comparativa del punto e della retta. — *H. Dellac*, Sull'espressione: *similitudine inversa* nella Planimetria. — Cronaca. — Corrispondenza. — Bibliografia.

E. N.

(*) V. *Supplemento al Periodico di Matematica*, 18ª quistione a concorso (Anno III - Fasc. IV, Febbraio 1900).

(**) L'*esperanto* è una nuova lingua internazionale proposta dal Dr. Zamenhof.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Anno VI (1900), fasc. 1°. — *F. Pietzker*, Il principio del nuovo secolo. — *R. Schwalbe*, La nautica in relazione all'insegnamento. (L'A. dimostra come le nozioni sulla nautica abbiano relazione con molte materie d'insegnamento e specialmente con la storia per ciò che riguarda le battaglie navali; con la matematica, (v. anche fasc. 5° del 1899) alla quale tali nozioni offrono eccellente materia d'esercizio; con la fisica, di cui quasi ogni parte presenta dei legami con la nautica; con la geografia che comprende un capitolo di nautica, cioè la oceanografia). — *F. Pietzker*, Esempi di calcoli. (Si discute sopra esempi del modo logicamente più opportuno di disporre le operazioni dovendo calcolare il valore di una data espressione). — Notizie scolastiche ed universitarie. — Relazioni di adunanze. — Mezzi d'insegnamento. — Recensioni di libri relativi a scienze naturali.

Fasc. 2° (1900). — Ordine del giorno del IX congresso tenuto ad Amburgo dall' " Associazione per il miglioramento dell'insegnamento della matematica e delle scienze naturali ", — *R. Schwalbe*, La nautica ecc. (continuazione, v. fasc. 1°). — *E. Meyer*, Sulla posizione di rette e piani nello spazio. (L'A. si propone di mostrare come possano coordinarsi le proposizioni che riguardano la posizione di rette e piani nello spazio in modo da ottener la maggior brevità possibile nell'esposizione di questa parte della stereometria, ch'egli giudica poco attraente per gli alunni e gl'insegnanti, proponendo d'impiegare il tempo che così viene a risparmiarsi p. e. ad una breve introduzione di geometria descrittiva). — *A. Richter*, La nautica in relazione all'insegnamento della fisica. — Notizie scolastiche ed universitarie. — Associazioni e adunanze. — Recensioni di libri relativi a scienze naturali ed alla nautica e dell'Algebra elementare ad uso dei Licei e degli Istituti Tecnici (1° biennio) e degli Elementi del calcolo algebrico ad uso delle Scuole Normali del professore M. Nassò.

Fasc. 3° (1900). — *H. Schotten*, Scienza e scuola. (L'A. si propone di fissare quale sia il vero intimo scopo delle scuole superiori, ed in quali relazioni si trovino queste con la scienza). — *Schafheitlin*, Le definizioni nella trigonometria con un'aggiunta a questo scritto di F. Pietzker. (Si fa la critica del libro " Sui diversi modi di porre i fondamenti della trigonometria " di Haentzschel). — *Grüber*, Misura della sfera. — Relazione sul IX congresso dell' " Associazione per il miglioramento, ecc. " (v. fasc. 2°). — Notizie scolastiche ed universitarie. — Associazioni e adunanze. — Mezzi d'insegnamento (relazioni sopra tavole murali). — Recensioni di libri relativi alle scienze naturali e dei seguenti: — 1° *P. Bachmann*, Teoria dei numeri, parte 4ª, Leipzig, 1898, Teubner. — 2° *Arved Fuhrmann*, Applicazione del calcolo infinitesimale nelle scienze naturali, nell'alta scienza delle costruzioni e nella tecnica, Berlin, Ernst. — 3° *Ed. Maiss*, Problemi sul calore ed inclusivamente sulla teoria meccanica del calore e sulla teoria cinetica dei gas, Wien 1898, successori Pichler. — 4° *H. Schotten*, Insegnamento della matematica.

F. Palatini.

ERRATA-CORRIGE DEI FASCICOLI PRECEDENTI.

Pag. 211, linea ultima	invece di $\overline{CA}$	leggasi $\overline{CB}$.
" 271, " 20	" " 3° ordine	" 5° ordine.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 12 giugno 1901.