Indice Articoli Anno 1899

PRIMO CONGRESSO

tenuto dai Professori di matematica delle scuole secondarie

AD INIZIATIVA DELL' ASSOCIAZIONE « MATHESIS »

Torino, 9-14 Settembre 1898.

Elenco dei Professori presenti al Congresso

Soci di " Mathesis ".

1. Bettazzi prof. Rodolfo, R. Liceo e R. Accademia Militare, Torino.
2. Buffa prof. Pietro, R. Istituto Tecnico, Nocera Inferiore.
3. Bustelli prof. Anton Maria, R. Provveditore, Aquila.
4. Buzzi prof. Omobono, Direttore Scuole Normali, Forlì.
5. Castellano prof. Filiberto, R. Accademia Militare, Torino.
6. Certo prof. Luigi, R. Liceo Vittorio Emanuele, Palermo.
7. Ciabò prof. Giorgio, Preside del R. Istituto Tecnico, Bergamo.
8. Ciamberlini prof. Corrado, R. Liceo, Fermo.
9. De Amicis prof. Enrico, R. Istituto Tecnico, Brescia.
10. De Zolt prof. Antonio, R. Liceo Parini, Milano.
11. Fabris prof. Vittorio, R. Istituto Tecnico, Mantova.
12. Ferrari prof. Francesco, R. Liceo Galvani, Bologna.
13. Frizzo prof. Giacomo, R. Provveditore, Forlì.
14. Garrone prof. Luigi, R. Liceo, Vercelli.
15. Gazzaniga prof. Paolo, R. Liceo, Padova.
16. Giudice prof. Francesco, R. Istituto Tecnico, Genova.
17. Gremigni prof. Michele, R. Liceo Galilei, Firenze.
18. Imperato prof. Fortunato, R. Istituto Nautico, Pian di Sorrento.
19. Lazzeri prof. Giulio, R. Accademia Navale, Livorno.
20. Marangoni prof. Gio. Batta, R. Ginnasio, Bassano.
21. Nannei prof. Enrico, R. Istituto Tecnico, Bari.
22. Nassò prof. Marco, Seminario Valsalice, Torino.
23. Palatini prof. Francesco, R. Istituto Tecnico, Sondrio.
24. Piazza prof. Saulle, R. Istituto Tecnico, Milano.
25. Riboni prof. Giovanni, R. Istituto Tecnico, Milano.
26. Sola prof. Filippo, R. Liceo, Carmagnola.

Non Soci.

1. Aychino prof. Edoardo, Istituto Tecnico pareggiato, Casale.
2. Bardelli prof. Giuseppe, Preside R. Istituto Tecnico, Milano.
3. Berzolari prof. Luigi, R. Università, Torino.
4. Borio prof. Agostino, aggiunto R. Liceo Gioberti, Torino.
5. Candido prof. Giacomo, Lecce.
6. Canizza prof. Francesco, R. Istituto Tecnico, Palermo.
7. Cardoso-Laynes prof. Giulio, Istituto Nazionale, Livorno.
8. Crepas prof. Emilio, R. Ginnasio, Ceva.
9. D'Ovidio prof. Enrico, R. Università, Torino.

10. Eugenio prof. Vito, Preside R. Istituto Tecnico, Palermo.
11. Fagnano prof. Francesco, R. Ginnasio Gioberti, Torino.
12. Felizatti prof. Edoardo, assistente R. Università, Torino.
13. Ferrari prof. Achille, Preside Istituto Tecnico, Torino.
14. Ferro prof. Giovanni, R. Ginnasio Cavour, Torino.
15. Giuliano Severino, licenziato in Matematiche, Torino.
16. Gerbaldi prof. Francesco, R. Università, Palermo.
17. Mezzana prof. Niccolò, R. Liceo, Savona.
18. Mocagatta Celestina, Torino.
19. Mortara prof. Eugenio, R. Scuola Tecnica, Parma.
20. Occella prof. Federico, R. Liceo, Casale.
21. Oseletto prof. Tersilla, R. Scuola Normale femminile, Firenze.
22. Padoa prof. Alessandro, R. Liceo, Pinerolo.
23. Peano prof. Giuseppe, R. Università, Torino.
24. Puntoni prof. Pietro, R. Liceo, Spezia.
25. Segre prof. Corrado, R. Università, Torino.
26. Teglio dott. Emilio, Torino.
27. Vacca dott. Giovanni, assistente R. Università, Torino.
28. Veronese prof. Giuseppe, R. Università, Padova.
29. Vailati prof. Giovanni, assistente R. Università, Torino.
30. Volterra prof. Vito, R. Università, Torino.

Elenco dei Professori aderenti al Congresso

Soci di " Mathesis ".

1. Bettini prof. Bettino, Liceo pareggiato, Osimo.
2. Burali-Forti prof. Cesare, R. Accademia Militare, Torino.
3. Caminati prof. Pietro, R. Istituto Tecnico, Foggia.
4. Fazzari prof. Gaetano, R. Liceo Umberto I, Palermo.
5. Fenoglio prof. Luigi, R. Istituto Tecnico, Torino.
6. Marchesini prof. Alessandro, R. Liceo, Massa Carrara.
7. Mariscotti prof. Luigi, R. Ginnasio, Caltanisetta.
8. Marsaglia prof. Natale, R. Liceo, Potenza.
9. Panizza prof. Francesco, R. Liceo, Como.
10. Poinelli prof. Giuseppe, R. Ginnasio, Mondovì.

Non Soci.

1. Amaldi prof. Italo, R. Istituto Tecnico, Aquila.
2. Bacchiani prof. Giovanni, Cesena.
3. Campetti prof. Adolfo, R. Accademia Militare, Torino.
4. Chini prof. Mineo, R. Istituto Tecnico, Pavia.
5. Cumani prof. Guglielmo, R. Scuola Tecnica, Vasto.
6. De Montel prof. Enrico, R. Istituto Tecnico, Bari.
7. Foa prof. Raffaele, Casal Monferrato.
8. Galli-Jognotta prof. Giulio, R. Scuola Tecnica, Castelfranco Veneto.
9. Greggio prof. Pietro, R. Scuola Tecnica Caboto, Venezia.
10. Malesani prof. Gaetano, R. Scuola Tecnica Caboto, Venezia.
11. Malfer prof. Floreste, R. Scuola Tecnica, Acireale.
12. Mandoli prof. Castruccio, Liceo pareggiato, Cava dei Tirreni.
13. Martini-Zuccagni prof. Aroldo, Livorno.
14. Modigliano prof. Cesare, R. Istituto Tecnico, Torino.
15. Pittarelli prof. Giulio, R. Università, Roma.
16. Ramorino prof. Angelo, R. Accademia Militare, Torino.
17. Santacroce prof. Giuseppe, Scuola Normale e Professionale, Foggia.

VERBALI DEL CONGRESSO

Seduta prima.

Torino, giovedì 9 settembre, ore 16.

Alle ore 16, in una sala della Scuola d'applicazione degli Ingegneri, il professor GIUDICE, a nome del professor BETTAZZI presidente del Comitato dell'Associazione «MATHESIS,» saluta con sentite parole i colleghi che risposero all'invito dell'Associazione e comunica il seguente telegramma:

Grave lutto domestico obbligami lontano Torino; spero essere costà seduta lunedì. Saluto colleghi: auguro frutto lavori adunanza.

BETTAZZI.

GIUDICE propone di mandare, a nome dell'assemblea, un affettuoso saluto al collega, augurando di averlo presto a partecipare ai lavori comuni.

In seguito propone di proclamare a presidente il professore commendator ENRICO D'OVIDIO, preside della facoltà di matematica della R. Università di Torino; e a vice-presidenti, i professori PEANO e SEGRE, della stessa facoltà.

Propone inoltre a segretari i professori CASTELLANO e VACCA. *L'assemblea approva all'unanimità.*

In assenza del professor D'OVIDIO, il professor PEANO assume la presidenza e dichiara aperta l'adunanza.

Fa l'appello dei presenti affinchè serva come reciproca presentazione.

Il PRESIDENTE dà la parola al professor GIUDICE, che deve riferire sulla questione 1ª dell'ordine del giorno.

GIUDICE legge la sua relazione su tale questione:

Data la possibilità della fusione della geometria piana colla solida, proporre un programma che permetta agli insegnanti la libera scelta fra il metodo della fusione e quello della separazione.

Tale relazione, che è unita agli *Atti* del Congresso, si chiude col proporre al voto dell'assemblea le seguenti quistioni:

1° *Rispondere alla domanda: è conveniente concedere possibilmente all'insegnante la libertà di scegliere fra il metodo separatista ed il fusionista?*

2° *Fissare un programma, che stabilisca con precisione, ma molto concisamente, la ripartizione tra i vari anni di corso dell'insegnamento della geometria piana e solida.*

3° *Proporre la compilazione di un programma molto dettagliato,* *che sia sviluppo di quello fissato, e fare istanza presso il Ministero della P. I. perchè solleciti questa compilazione.*

Dopo la relazione il PRESIDENTE apre la discussione.

IMPERATO è contrario, per esperienza, alla fusione.

FRIZZO osserva come l'uso dei due metodi in iscuole diverse possa costituire un inconveniente per le famiglie che, ad anno incominciato, sono obbligate a trasferirsi da una città ad un'altra.

PADOA. Non crede del caso di votare la prima parte delle conclusioni del Relatore, parendogli essere necessario dimostrare prima con convenienti programmi e discussione dei medesimi la possibilità di seguire i due metodi.

PALATINI. Non crede assolutamente possibile la libertà di scelta tra un metodo e l'altro, se la materia non è condensata in un anno.

BUSTELLI. Osserva come la discussione dei programmi si connetta colla distribuzione della materia nei varî anni, e quindi alla questione 4ª di cui egli è relatore.

DE AMICIS. Riferisce su quanto ha già deliberato l'Associazione « MATHESIS » nelle sue adunanze particolari, ed insieme col professor LAZZERI espone varî argomenti in favore della fusione, citando in proposito le opere in questo senso del compianto professore De Paolis e dei professori Lazzeri e Bassani.

LAZZERI. Crede che si possa giungere alla libertà di scelta separandò la geometria in due parti: *geometria pura* e *geometria metrica,* che dovrebbero formare argomento di due anni distinti di corso.

PADOA. È assolutamente contrario, per ragioni didattiche, all'insegnamento della geometria in un solo anno; osserva che è necessario anche in conformità alla distribuzione della matematica del ginnasio, ripartire la geometria in parecchi anni, ed in ciascuna parte mescolare gli elementi di *geometria piana* con quelli di *geometria solida.*

GIUDICE *(relatore).* Desidera che il programma sia molto conciso. al fine di lasciare la massima libertà.

GIULIANO. Osserva come nei programmi accennati manchi un cenno sulla *geometria descrittiva.*

Dopo viva discussione sulla opportunità della votazione sul paragrafo primo delle conclusioni, a cui prendono parte i professori CARDOSO-LAYNES, DE AMICIS, GIUDICE, CIAMBERLINI, LAZZERI, si conviene di adottare l'interpretazione data alla parola *fusione* nell'adunanza di Recanati.

CIAMBERLINI ne dà lettura:

Per fusione deve intendersi un metodo didattico secondo il quale fin da principio si studiano simultaneamente gli argomenti affini di geometria piana *e* solida, *e si vengono in seguito applicando le proprietà dell'una o dell'altra per trarne il maggiore vantaggio possibile.* (*Bollettino III,* pag. 6.)

In seguito si riprende la discussione se si debba o no votare la prima parte dell'ordine del giorno proposto dal Relatore, ed a questa prendono parte i professori De Amicis, Castellano, Marangoni, Lazzeri, Padoa, De Zolt.

Il Presidente mette ai voti la prima parte della proposta Giudice. *È approvata in questi termini:*

È conveniente modificare possibilmente i programmi in modo che sia concessa all'insegnante la libertà di scegliere fra il metodo separatista ed il fusionista.

Bardelli. Dichiara di essersi astenuto non avendo ancora potuto formarsi una convinzione sull'argomento.

Veronese intervenuto nel frattempo si fa rileggere l'ordine del giorno votato, e quindi fa una estesa dissertazione sui diversi metodi di presentare i fondamenti della *geometria elementare*. Accenna al metodo seguito nelle sue ultime pubblicazioni; osserva come dal congresso debbano partire proposte concrete, perchè possano essere sostenute dai legislatori e prese in considerazione dalle autorità competenti. Accetta in massima l'ordine del giorno.

Lazzeri ricorda che i vantaggi che si ottengono dalla fusione si possono riassumere così:

1º risparmio di tempo, trattando insieme argomenti affini di *geometria piana e solida*;

2º semplificazione di alcune dimostrazioni di planimetria coll'aiuto di considerazioni stereometriche;

3º miglior coordinamento delle varie materie.

Il secondo argomento, che è il più importante, è quello a cui si fa meno attenzione.

Si insiste da quattordici anni nel dire che l'unico vantaggio ottenuto è quello di semplificare la costruzione della quinta parte dell'angolo piatto, come asserivano il professor Palatini un anno fa ed il professor Angeleri pochi giorni or sono. Insiste invece nel far notare che ciò non è vero, e che coll'aiuto della fusione si è resa molto semplice ed indipendente dalla teoria delle proporzioni, tutta la teoria dell'equivalenza e quella degli assi radicali con innumerevoli problemi che si collegano a queste quistioni.

In seguito ai discorsi dei professori Veronese e Lazzeri s'impegna una animata discussione tra i professori Giudice, Lazzeri, Veronese, De Amicis.

Il Presidente dichiara come, dopo la dotta discussione avvenuta, sia il caso di passare alla seconda parte dell'ordine del giorno del professor Giudice; però, dietro richiesta del professor Palatini, domanda la controprova sulla votazione avvenuta, in seguito alla quale risulta che l'ordine del giorno *era stato approvato ad unanimità, con una astensione già notata.*

Aperta la discussione sulla seconda parte dell'ordine del giorno, dopo alcune osservazioni in merito dei professori Lazzeri e Padoa, il professore Bustelli osserva come la questione dei programmi rientri nella questione 4ª, di cui egli è relatore, e propone che si discuta dopo di quella.

Il Presidente pone ai voti la chiusura della discussione e la proposta Bustelli. *Sono approvate.*

In fine il Presidente avverte i congressisti che sono in distribuzione due opuscoli del professor Burali-Forti.

1° *Les postulats pour la géométrie d'Euclide et de Lobatschewsky.*

2° *Sulla questione 3ª proposta da* Mathesis.

Ed uno del professor Piazza:

Sull' insegnamento della matematica nella sezione di commercio e ragioneria dell' Istituto tecnico.

Dopo di che si scioglie la seduta.

f.to Peano.

Seduta seconda.

Torino, venerdì 10 settembre, ore 15.

Il professor D'Ovidio, assumendo la presidenza del congresso, ringrazia con eloquenti parole l'assemblea di averlo voluto a quel posto. Considera questa nomina come un omaggio reso alla facoltà di Matematica, di cui egli è decano.

Proclama l'alta importanza dell'insegnamento secondario della Matematica e per la sua efficacia sulla cultura nazionale e per la sua influenza ed intima connessione coll'insegnamento superiore. Le facoltà di matematica sono direttamente interessate ai lavori promossi dall'Associazione « Mathesis, » ed egli, come padre, come insegnante e cittadino, si compiace di questa operosità, ed è riconoscente all'assemblea di aver voluto, col proclamarlo presidente, riconoscere l'interessamento che ha sempre dimostrato per questi studi.

È all'ordine del giorno la questione 2ª cioe:

Uniformità nel linguaggio e nelle notazioni della matematica elementare. Fissare i vocaboli da adottarsi definitivamente per gli enti pei quali se ne usano più di uno: stabilire quali vocaboli e quali notazioni possono abolirsi senza danno.

Il Presidente concede la parola al professore De Amicis, relatore, il quale svolge la prima parte della sua relazione riferentesi all'aritmetica e all'algebra, che sarà allegata agli atti.

Il presidente professore D'Ovidio propone che, prima che il relatore completi la sua relazione sulla parte geometrica, si apra la discussione sulla parte svolta. *L'assemblea approva.*

Vari congressisti esprimono la loro opinione sulle idee esposte dal relatore.

Giudice accenna alla convenienza di stabilire il nome di ogni operazione, e di dare poi colla medesima radice i nomi ai termini colla desinenza in *ando* ed in *ore.* (Esempio: logaritmicando e logaritmicatore; moltiplicando e moltiplicatore ecc.)

Padoa parlando della necessità di un segno che dice *è un* (come l'ε del *Formulaire de Mathématique*) per scrivere che un numero è multiplo di un altro, evitare l'errore in cui cade chi in quel senso adopera il segno (=).

Accenna alla possibilità di adoperare un segno solo (una croce colle due aste non egualmente lunghe) che rotando successivamente di 45^0 nel piano possa rappresentare i segni delle diverse operazioni, e leggermente modificato (per esempio senza il tratto) rappresentare le operazioni inverse. Fa osservare come la sua proposta possa semplificare diciture e ragionamenti e rendere alla mente dei giovani allievi più evidenti certe relazioni tra le diverse operazioni.

Propone la soppressione delle parole che indicano il risultato delle operazioni, bastando leggere la scrittura $a+b$, $a-b$. ab invece di dire somma differenza, prodotto.

Trova inutile l'insegnamento nelle scuole della teoria delle proporzioni e complicata la terminologia relativa.

Giudice, per quanto trovi ingegnose le idee del Padoa sui segni rotanti, non le approva.

De Amicis combatte l'idea del professore Padoa di sopprimere i nomi che esprimono il risultato delle operazioni: dice che la matematica non deve diventare la scienza dei muti; ritiene che giovi conservare nelle scuole la teoria aritmetica delle proporzioni, perchè facilita la memoria; la stessa teoria è indispensabile per le grandezze.

Padoa conviene col De Amicis sulla necessità di conservare la teoria delle proporzioni tra le grandezze, ma insiste nel ritenerla inutile tra i numeri.

Mortara desidera che si mantenga nella scuola lo studio delle proporzioni e propone la sostituzione della parola *scomporre* alla parola *dividere*.

Il presidente professore D'Ovidio fa notare che probabilmente la maggior parte dei congressisti non saranno in grado di votar subito le proposte del relatore, mancando il tempo ad un serio e ponderato esame.

De Amicis propone che l'Associazione « Mathesis » dirami un questionario sulle proposte fatte a tutti i congressisti.

D'Ovidio osserva che si potrebbe dire *assoluto*.

Frizzo desidera conoscere con quali mezzi il congresso cercherà di eseguire le deliberazioni che si prenderanno.

Giudice ritiene che i professori aderenti al congresso dovrebbero impegnarsi ad adottare nelle pubblicazioni e nell'insegnamento i deliberati del congresso approvati a maggioranza.

Lazzeri osserva che la diffusione delle deliberazioni si otterrà per mezzo del Bollettino.

Bustelli con calde parole di elogio encomia la relazione De Amicis; conviene col presidente D'Ovidio sulla impossibilità morale di addivenire ad una immediata votazione.

Peano propone che si chiuda questa discussione con un voto di plauso al professore De Amicis per la sua importante e dotta relazione.

In seguito il professore De Amicis espone la seconda parte della sua relazione.

A questo punto, stante l'ora tarda, il presidente professore D'Ovidio propone di sospendere la seduta e per intanto di deliberare la stampa integrale della importante relazione De Amicis. *L'assemblea approva all'unanimità.*

Il Presidente fa distribuire ai Congressisti una parte stampata della relazione del professore commendatore A. M. Bustelli sulla questione 4ª, che sarà letta e discussa nei giorni successivi.

Dopo di che l'assemblea si scioglie.

f.to D'Ovidio.

Seduta terza.

Torino, lunedì 12 settembre, ore 15.

Apre la seduta il vice-presidente Segre.

Il segretario Vacca legge il verbale della seduta di venerdì 9 settembre. Dopo una breve osservazione del professore Veronese il verbale è approvato.

Quindi il segretario professor Castellano legge il verbale della seduta di sabato 10 settembre.

Su proposta del Presidente si omette il sunto della relazione De Amicis, essendone stata deliberata la stampa integrale.

Con ciò il verbale della seconda seduta è approvato.

In seguito a domanda del professor Frizzo, che vuole schiarimenti sul modo con cui saranno votate posteriormente le proposte del relatore De Amicis, il Presidente professore Segre fa notare la difficoltà grandissima di votare anche con schede un gran numero di modificazioni alle notazioni e diciture in uso.

De Amicis ripete la sua proposta di mandare il questionario a ciascuno dei congressisti che risponderanno per *si* e per *no*.

De Zolt esprime il voto che le modificazioni si riducano al minor numero possibile, rispettando il carattere storico delle notazioni e dei segni e l'autorità di uomini illustri che li hanno adoperati. (Es. Bellavitis $\triangleq$ per *equipollente*; Beltrami *tg* per *tang*. etc.)

Bettazzi propone di rimandare la discussione alle ulteriori adunanze di Mathesis, promovendone l'esame e le eventuali aggiunte sul Bollettino dell'Associazione. *La proposta Bettazzi è approvata all'unanimità.*

Bettazzi comunica le adesioni dei professori Pittarelli, Bettini, Caminati, i quali salutano, dolenti di non potere intervenire.

Certo, relatore della questione 5ª, giustifica con un telegramma la sua assenza per indisposizione, ed incarica lo stesso professor Bettazzi di leggere la sua relazione nel caso che egli non possa intervenire nella seduta di mercoledì 14 settembre.

Fazzari direttore del *Pitagora*, incarica per lettera il professor Nannei di rappresentare il giornale.

Uguale incarico è dal professor CAPELLI trasmesso al professor BETTAZZI per il *Giornale di Battaglini*.

Il *Circolo matematico di Palermo* incarica a rappresentarlo i professori PEANO e GERBALDI.

LAZZERI, CANDIDO e CARDOSO-LAYNES dichiarano di rappresentare il *Periodico di matematica* e il relativo *Supplemento*.

MARANGONI rappresenta la *Scuola secondaria* di Milano.

Il presidente professor SEGRE interpreta i sentimenti dell'assemblea dando il benvenuto al professor BETTAZZI, presidente del Comitato dell'Associazione « MATHESIS » e felicitandosi dell'opera sua come organizzatore del Congresso.

BETTAZZI ringrazia.

Il presidente professor SEGRE in seguito all'interpellanza del professor MARANGONI sulla necessità di fissare una seduta speciale per discutere le proposte presentate dai soci, propone di interrompere alle ore 17 la discussione sulla quistione 3ª (se non sarà esaurita) per discutere in seguito le proposte importantissime a cui accenna il professor MARANGONI. *Questa proposta è approvata.*

Concede quindi la parola al professor CIAMBERLINI relatore sulla questione 3ª, che è così concepita:

I libri di testo dal punto di vista scientifico e didattico. Errori che vi dominano, mezzi perchè si limiti per quanto si può il danno che tali errori arrecano alla scuola. Questa relazione è unita agli atti.

Terminata la lettura della prima parte della relazione relativa ai libri di testo delle scuole elementari, il presidente mette in discussione le proposte del professor Ciamberlini.

Dopo breve discussione, cui prendono parte il PRESIDENTE ed i professori NANNEI e BETTAZZI, *si approva* il seguente ordine del giorno del professor BETTAZZI:

Si fa voto che l' Associazione MATHESIS *promuova la pubblicazione di un periodico destinato agli insegnanti delle scuole elementari, inspirato ai principi rigorosi della matematica.*

Quindi il professor CIAMBERLINI legge la 2ª parte della sua relazione.

Il presidente professor SEGRE ha parole di vivo encomio per la elaborata relazione del professor Ciamberlini: comunica quindi ai Congressisti che:

1°. Il professor PEANO terrà la sua conferenza sul tema: *Conversazione sul Formulario di matematica* alle ore 10 del giorno 13 settembre in una sala dell'Università.

2°. Il professor LORIA terrà la sua conferenza col tema: *La storia della matematica come anello di congiunzione tra l'insegnamento secondario e l'insegnamento universitario* alla stessa ora e nello stesso luogo, il giorno 15 settembre.

BETTAZZI espone il contenuto dell'opuscolo del professor BURALI-FORTI sulla questione 3ª ed osserva che le conclusioni dell'opuscolo concordano in massima con quelle del relatore.

Dopo viva discussione, cui prendono parte i professori SEGRE. VERONESE, BETTAZZI, NANNEI, BUSTELLI, *si approva alla unanimità* l'ordine del giorno Ciamberlini così modificato:

*Si fa voti che l'*Associazione Mathesis *dedichi una parte del suo Bollettino o promuova su altro giornale uno studio critico dei libri di testo pubblicati o da pubblicarsi.*

Castellano propone che sia pubblicata integralmente la relazione Ciamberlini.

Alle osservazioni del professor Bettazzi, che le condizioni finanziarie di Mathesis non potranno forse permettere questa serie di integrali pubblicazioni, il presidente risponde che l'assemblea dovrebbe deliberare di far voto che si trovi il modo che questi lavori siano dati alle stampe. *Tale proposta è approvata.*

Esaurita così la discussione sulla questione 3ª, il presidente mette in discussione le proposte particolari dei soci:

La 1ª di esse, inviata dal professore Angeleri, assente, è così formulata:

Fare uffici presso il Ministero, perchè fra gli ispettori centrali vi sia anche un professore di matematiche di scuole secondarie.

Dopo un'animata e viva discussione tra i professori Marangoni, De Amicis, Gremigni, Bustelli, Veronese, Frizzo e Nannei, da cui risulta che dei dodici ispettori centrali, undici sono professori di lettere ed uno di scienze fisiche e naturali, e nessuno di matematica, si fanno voti dai diversi oratori che in detto ispettorato siano chiamati professori di matematica, versati nelle questioni che interessano l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie.

Messa ai voti la proposta Angeleri modificata da Nannei in questi termini:

L'Assemblea fa voti che tra gli ispettori centrali sieno chiamati anche professori di matematica, in equa proporzione, è approvata all'unanimità.

Marangoni riferisce sulla seconda questione da lui proposta:

Necessità di introdurre la prova scritta di matematica in tutte le classi dell'attuale ginnasio liceo.

Osserva come, per la mancanza di prova scritta, la matematica non sia in queste scuole tenuta nella considerazione che le spetta: colla prova scritta insegnanti ed allievi troveranno facilitato l'esercizio del loro dovere.

Potrà l'insegnante con compiti ed esercizii adattati alla maggioranza degli allievi, mettere in vista l'importanza della applicazione; all'obbiezione che negli esami si copia facilmente il lavoro di matematica, osserva che anche facilmente si copiano altri temi.

Piazza è contrario alla prova scritta non soltanto nelle scuole classiche, ma anche nelle tecniche, per la impossibilità in cui si trovano i professori di impedire che si copii; crede l'insegnamento possa raggiungere il suo scopo con frequenti esercizii fatti durante l'anno a casa ed in iscuola sulla lavagna.

Crepas è contrario alla proposta Marangoni. Ha ottenuto buoni risultati anche senza la prova scritta, nella quale molte volte anche ottimi allievi falliscono.

D'Ovidio è fermamente convinto della utilità della prova scritta. Cita il fatto che quando il ministero lasciò libera ai giovani la scelta tra la prova scritta di greco e quella di matematica — per addivenire ad una graduale soppressione del greco — la maggioranza di essi scelse il tema greco, ciò che prova essere forse più facile copiare il tema greco, che quello di matematica. Gli pare che non si siano pensati tutti i modi di rendere efficace ed utile la prova scritta di matematica.

Si possono dare agli allievi in uno stesso esame temi diversi, perchè l'insegnamento delle matematiche deve ottenere per risultato che ogni allievo da solo, dinnanzi ad una questione che non esiga che un pensiero, un ricordo, un'applicazione delle cose studiate, sia in grado di risolverla.

La diversità dei temi, che recherebbe gravi difficoltà in un esame di classificazione, non presenta inconvenienti negli esami che debbono costituire soltanto una prova d'idoneità.

De Amicis cita l'opinione del professor Globus contraria ai temi scritti, per l'impossibilità di impedire che si copii. Egli è contrario alla prova scritta anche per le scuole e gli istituti tecnici. Il professore deve con altri mezzi imprimere nella mente degli allievi l'importanza della materia insegnata.

Parlano ancora in favore della prova scritta i professori Marangoni, Veronese, il quale domanda una proposta semplice, perchè possa con maggior speranza di successo essere sostenuta presso le autorità.

Parlano inoltre in vario senso i professori De Zolt, Garrone, Bustelli, Bettazzi, D'Ovidio ecc. finchè è approvata la proposta Marangoni così modificata dal professore D'Ovidio:

Il Congresso proclama la necessità di introdurre la prova scritta di matematica in tutte le scuole, circondata da tutte quelle garanzie che possono assicurarne la sincerità, per esempio togliendo l'unicità del tema per tutti i candidati.

Il proponente Marangoni espone la 3ª questione.

Necessità di portare l'insegnamento delle matematiche nel Ginnasio Liceo ad un minimum di tre ore settimanali per classe, e ciò anche conservando i programmi attuali.

Dopo breve discussione, a cui prendono parte i professori Segre, Mortara, Gremigni e Bustelli, si conviene di rimandare la proposta alla seduta di martedì 13 settembre, in cui si tratta della ripartizione dell'insegnamento della matematica tra le diverse scuole.

Marangoni riferisce sulla questione 4ª da lui proposta, cioè che:

Nelle circolari, nei programmi e nei regolamenti sparisca la distinzione tra le materie principali e le materie secondarie, non ultima causa del poco profitto dell'insegnamento matematico nelle scuole.

Dopo lunga ed animata discussione, a cui prendono parte i professori Veronese, Mortara, Piazza, Marangoni, Castellano, Bettazzi, Frizzo, Bustelli, D'Ovidio, quest'ultimo, col professor Veronese, propongono il seguente ordine del giorno:

Considerato il carattere spiccatamente razionale ed educativo della matematica, e considerato che essa è materia essenziale per il passaggio a tutto un ordine di studi superiori, si fa voti che nelle circolari, nei *programmi e nei regolamenti essa non sia considerata come materia di secondaria importanza.*

Bettazzi si dichiara lieto di votare quest'ordine del giorno che rispecchia le idee espresse in un memoriale che l'Associazione « Mathesis » ha inviato al Ministero.

Messo ai voti quest'ordine del giorno è approvato all'unanimità.

Dopo di che il Presidente dichiara chiusa la seduta.

f.to Segre.

Seduta quarta.

Torino, martedì 13 settembre, ore 15.

Alle ore 15 il Presidente professor D'Ovidio apre la seduta.

Il Segretario Vacca legge il verbale, che dopo brevi osservazioni è approvato.

Lazzeri propone che si pubblichino integralmente in un volume i rendiconti dettagliati del Congresso, colle relazioni sui temi. Per sopperire alle spese di tale pubblicazione propone che si apra tra i presenti una sottoscrizione per l'acquisto del volume; il cui prezzo si può approssimativamente supporre che varierà da 3 a 5 lire.

Alesio, segretario del Congresso Pedagogico, osserva che si pubblicherà un volume nel quale saranno contenute in esteso le discussioni dell'intero congresso pedagogico, ed il riassunto di quelle avvenute nelle sottosezioni.

Dopo osservazioni dei professori Candido e Bettazzi, il quale ultimo fa riflettere che, oltre alla pubblicazione del congresso pedagogico, sarà sempre utile ed opportuna anche la pubblicazione di rendiconti più estesi del congresso indetto da « Mathesis »; su iniziativa del presidente si *approva la proposta Lazzeri.*

Il Presidente annuncia che gli intervenuti, i quali desiderano acquistare i rendiconti del Congresso possono sin d'ora farlo, sottoscrivendo un'apposita scheda.

Si passa quindi alla discussione della quistione già posta all'ordine del giorno, presentata alla Presidenza dal professore Imperato:

Se sia opportuno nello studio dell'aritmetica dar maggiore sviluppo al calcolo materiale numerico, nell'intento di rendere più spediti i calcoli mentali e numerici e non poche operazioni algebriche: in particolare se sia opportuno spingere la tavola pitagorica sino al 15 ed apprendere i quadrati sino al 20 ed i cubi sino al 10.

Il proponente svolge la sua tesi. Egli vuole che l'insegnamento di aritmetica nelle scuole elementari venga limitato allo studio delle quattro operazioni dell'aritmetica sui numeri interi e sui numeri decimali, allo studio del sistema metrico, e ad alcune nozioni sulle frazioni ordinarie. Vuole che si tolgano dalle scuole elementari lo studio delle proporzioni e gli elementi di geometria. Crede che nella vita pratica le proporzioni non servano: che serva invece assai la speditezza nel calcolo numerico. Crede essere utile invece far cenno nelle scuole elementari degli antichi sistemi di misure usati nelle varie regioni d' Italia.

Passa poi ad altre sue proposte, che egli presenta in un ordine del giorno d'accordo col professore Marangoni, ed osserva che l'aritmetica non è abbastanza curata nelle scuole elementari; propone che nelle Commissioni d'esame di licenza delle scuole elementari si trovi un professore di matematica. Quanto alle nozioni geometriche, egli crede che siano dannose anzichè utili agli studii ulteriori, le nozioni per lo più confuse ed inesatte acquistate nelle scuole elementari.

Padoa crede che gli inconvenienti, che il professore Imperato lamenta, provengano dal doppio scopo a cui deve soddisfare la scuola elementare: essere fine a sè stessa, e preparazione a studii superiori. È certo che gli insegnanti delle Scuole superiori preferiscono che vi giungano degli allievi i quali, anzichè un ricco bagaglio di cognizioni, abbiano il sicuro possesso di poche nozioni fondamentali; ma d'altra parte coloro che non proseguono gli studii oltre le scuole elementari, qualora si diminuisse ancora il ristretto programma di aritmetica delle Scuole elementari, ne risentirebbero grave danno.

Il solo modo di togliere questo inconveniente sarebbe per lui quello di aggiungere un anno d'insegnamento complementare per coloro che non continuano gli studi, dopo le scuole elementari.

Presenta in questo senso una proposta, che però dopo osservazione del Presidente che essa uscirebbe dall'ordine del giorno, egli stesso ritira.

Infine fa voti affinchè sia ristabilito l'esame obbligatorio d'ammissione al ginnasio.

Ciamberlini osserva che la proposta del professore Imperato non cambia in sostanza i vigenti programmi per l'insegnamento dell'aritmetica nelle scuole elementari. Osserva che è impossibile togliere dalle scuole stesse quei rudimenti di geometria che vi si insegnano, essendo strettamente connessi all'insegnamento del sistema metrico decimale (metro quadrato, metro cubo, litro etc.) Osserva che già nella terza classe elementare si fa cenno degli antichi sistemi di misura delle varie regioni.

Crepas vuole che il professor Imperato includa nel suo ordine del giorno che all'esame di licenza dalle scuole elementari intervengano due professori uno di matematica ed uno di lettere.

Marangoni insiste nella sua proposta (che è la seconda dell'ordine del giorno Imperato), accettando la modificazione del professore Crepas.

Imperato accetta che nelle scuole elementari rimanga l'insegnamento dei rudimenti della geometria in quanto essi servono all'insegnamento del sistema metrico; mantiene però le altre parti del suo ordine del giorno, accettando anche la modificazione del professore Crepas.

De Zolt osserva che l'insegnamento dei rudimenti della geometria è indispensabile nelle scuole elementari: se vi sono cattivi trattati, specialmente nella parte geometrica, non ne mancano di buoni e rigorosi.

Posto ai voti l'ordine del giorno Imperato si approvano successivamente la prima e la seconda parte ed a debole maggioranza la terza parte.

L'ordine del giorno Imperato, colle modificazioni approvate, dice: *Si fa voti:*

1° Che dagli attuali programmi di matematica delle scuole elementari vengano eliminate le proporzioni e la regola del tre, ma che l'insegnamento della matematica sia dato in guisa che i giovanetti siano atti ad eseguire colla maggiore speditezza e correttezza possibile un calcolo numerico e facili quesiti della vita pratica.

2° Che delle commissioni di esame di licenza delle scuole elementari facciano parte anche un professore di lettere ed un professore di matematica delle scuole secondarie.

3° Che nell'insegnamento dell'aritmetica così nelle scuole primarie come nelle secondarie inferiori si dia maggiore sviluppo al calcolo materiale numerico, nell'intento di rendere più spediti i calcoli mentali e numerici e non poche operazioni algebriche, epperciò nelle prime si spinga la tavola per la moltiplicazione fino al 15, e nelle seconde si facciano apprendere i quadrati fino al 20 ed i cubi fino al 10.

Riboni svolge quindi la sua proposta: *che sia concesso anche ai licenziati agrimensori degli Istituti Tecnici di adire alla facoltà matematica, esclusivamente però per le Scuole di applicazione degli Ingegneri.*

Lo svolgimento della suesposta proposta è allegato agli atti.

Il Presidente professore D'Ovidio dichiara di astenersi dalla votazione. Dichiarano pure di astenersi i professori De Zolt, Ciabò, Castellano.

Veronese, per avvalorare la proposta del professore Riboni ricorda che dalle statistiche da lui fatte a Padova, Roma ed al Politecnico di Milano risulta che non sussiste la pretesa superiorità nelle scuole di matematica dell'università dei giovani provenienti dal liceo su quelli degli istituti tecnici; è vero anzi il contrario. Avendo parlato col professore Cremona, non gli consta che egli abbia una opinione così ostile agli istituti tecnici, quale gli viene di solito attribuita.

Crepas propone, e l'assemblea accetta, che si rimandi la votazione a dopo lo svolgimento della relazione Bustelli.

Il relatore professor Bustelli sulla questione 4ª: *Ripartizione dell'insegnamento della matematica fra i vari gradi e le varie specie di scuole secondarie* legge la sua relazione. Essa è allegata agli atti.

Terminata la lettura della relazione stessa, il presidente professore D'Ovidio ringrazia l'oratore per la sua poderosa relazione.

Buffa fa alcune osservazioni, alle quali risponde il relatore, su alcune denominazioni di cui il professore Bustelli ha fatto uso.

Il presidente D'Ovidio, stante l'ora tarda, scioglie la seduta, rinviando al domani il proseguimento della discussione.

f.to D'Ovidio.

Seduta quinta.

Torino, mercoledì 14 settembre, ore 15.

Apre la seduta il vice-presidente professore PEANO. Il segretario VACCA legge il verbale, che è approvato.

Il professor DE AMICIS, il professore ALESIO ed altri vorrebbero ritornare sulla terza parte della proposta IMPERATO che riguarda il calcolo mentale; ma il Presidente interrompe la discussione, perchè argomento già esaurito nella seduta precedente.

Riaperta la discussione sulla relazione BUSTELLI, parlano in vario senso i professori CANDIDO. PIAZZA, DE ZOLT. BUSTELLI, MARANGONI, CREPAS. LAZZERI ecc. facendo tutti notare l'impossibilità in cui si trovano i congressisti, stante la brevità del tempo e l'importanza dell'argomento, di discutere la relazione e votare le proposte Bustelli.

E propongono la sospensiva, senza pregiudizio delle proposte subordinate e posposte alla relazione Bustelli.

Il Presidente mette ai voti *l'ordine del giorno* DE ZOLT così concepito:

L'assemblea delibera di sospendere ogni discussione sulla relazione Bustelli, la quale dovrà costituire argomento di discussione, che avrà la precedenza sopra ogni altro, nel prossimo congresso di MATHESIS *che fin d'ora si delibera, e le cui modalità saranno in seguito fissate.*

Esso è *approvato all'unanimità.*

A questo punto il professor LAZZERI, anche a nome di altri firmatari, presenta l'ordine del giorno che segue:

Il congresso fa voti affinchè la materia dell'attuale insegnamento geometrico sia distribuita nei modi seguenti:

nei Licei: 1° anno — *Proprietà di posizione e di eguaglianza.*
2° anno — *Equivalenza, similitudine.*
3° anno — *Misura, Trigonometria Piana.*

negl'Istit. tecnici: 1° anno — *Proprietà di posizione ed eguaglianza.*
2° anno — *Equivalenza, similitudine e misura.*
3° e 4° anno — *Trigonometria e teorie complementari.*

Il congresso inoltre fa voti che nelle prime tre classi del Ginnasio sia dato un conveniente insegnamento di Geometria intuitiva, e che l'insegnamento della Geometria nelle due classi superiori sia ordinato in guisa da servire di introduzione e di preparazione all'insegnamento liceale.

Firmati: E. NANNEI — E. DE AMICIS — G. VERONESE — G. LAZZERI — F. IMPERATO — C. CIAMBERLINI — F. PALATINI — C. SEGRE — G. CARDOSO-LAYNES — G. CANDIDO — G. B. MARANGONI — MORTARA.

Il Presidente lo pone in discussione.

Parlano in vario senso i professori DE ZOLT, LAZZERI, BETTAZZI, GREMIGNI, CASTELLANO, CANDIDO, DE AMICIS, PIAZZA, OCCELLA ecc.

finchè il Presidente pone ai voti la sospensiva, che il professor Gremigni propone per non contradire a quella già deliberata sulla questione 4ª, alla quale questione l'attuale è subordinata: la sospensiva è approvata con 15 voti favorevoli. 8 contrarii.

Il Presidente, in seguito alle deliberazioni della seduta precedente, pone in discussione la proposta MARANGONI sulla

Necessità di portare l'insegnamento delle matematiche nel Ginnasio Liceo ad un minimum di tre ore settimanali per classe, e ciò anche conservando i programmi attuali.

DE AMICIS e GIUDICE credono che questa proposta debba essere sospesa come quella presentata dal professore Lazzeri: ma la proposta Marangoni messa ai voti *è approvata a maggioranza.*

Anche la proposta Riboni. che l'assemblea aveva preso impegno di votare in questa seduta, e che si riferiva alla *ammissione alla facoltà di Ingegneria degli studenti di agrimensura, è approvata con 11 voti favorevoli, 1 contrario,* avendo dichiarato di astenersi dal voto i professori De Zolt, Peano. Ciabò. Occella. Castellano, Fabris.

DE AMICIS dichiara di essersi astenuto dal votare i due ultimi ordini del giorno, perchè gli pare che non potevano essere messi in votazione, dopo aver approvata la sospensiva Bustelli.

Il presidente dà la parola al professore PIAZZA sulla sua proposta.

Insegnamento della matematica nella sezione di commercio e ragioneria dell' istituto tecnico, la cui relazione è allegata agli atti.

In seguito a varie osservazioni dei professori BUSTELLI, NANNEI, LAZZERI e PIAZZA si conviene di sospendere ogni deliberazione e di rimandare la deliberazione dell'argomento al prossimo congresso dopo le proposte Bustelli.

In seguito il Presidente dà la parola al professore CERTO che legge la sua relazione sulla questione 5ª. (Allegata agli atti.)

Modificazioni da introdursi nell'ordinamento degli studii matematici universitari, affine di ottenere buoni insegnanti secondarii.

La lettura della relazione è accolta da vivissimi e prolungati applausi.

Il Presidente professore PEANO ringrazia il relatore a nome dell'Assemblea e dice che la fede, che il professore Certo ha dimostrato nel trionfo della logica matematica, è per lui una delle più belle soddisfazioni.

Dopo viva discussione a cui prendono parte i professori BETTAZZI, D'OVIDIO (giunto da poco). NANNEI. il Presidente Peano osserva l'impossibilità, stante la brevità di tempo, di discutere le proposte del professore Certo: si conviene di sospendere anche questa discussione e di rimandare questa questione al prossimo congresso, dopo aver dato un voto di plauso, ed una approvazione complessiva alle proposte del relatore.

L'assemblea delibera di dare alle stampe integralmente le relazioni dei professori Bustelli e Certo.

DE ZOLT propone che avanti di chiudere il primo congresso si stabilisca il tempo e il luogo per un secondo.

DE AMICIS. si associa, e propone che per sede del futuro congresso si scelga Livorno, città che si presta per la sua centralità, e che è sede del *Periodico di matematica*. Dopo breve discussione si approva all'unanimità, su proposta del Bettazzi, di affidare all'Associazione « Mathesis » la cura di organizzare un secondo congresso non più tardi del 1901, e di stabilirne la sede.

In seguito il Presidente saluta i Congressisti ed encomia vivamente l'Associazione « Mathesis » per l'opera sua.

Il segretario Castellano partecipa ai Congressisti una lettera del professore Segre che, assente per indisposizione, manda ai colleghi un cordiale saluto.

Su proposta del professore Bettazzi l'assemblea delibera di inviare il seguente telegramma:

Ministro Istruzione. Roma

Insegnanti matematica raccolti Torino adunanza promossa Associazione Mathesis, *chiudendo lavori inviano rispettoso saluto E. V., augurando voglia accogliere loro proposte per migliorare importantissimo insegnamento scienza matematica scuole secondarie.*

D'Ovidio, *Presidente Adunanza*
Bettazzi, *Presidente* Mathesis.

Dopo di che la seduta è sciolta, e il Congresso è dichiarato chiuso.

f.to Peano.

ALTRE NOTIZIE SUL CONGRESSO

Il giorno 13, a ore 10, in una sala della R. Università, cortesemente concessa dal signor Rettore, e dinanzi ad un rilevante numero di Congressisti, il Professore Giuseppe Peano della R. Università di Torino, tenne la conferenza annunziata durante il Congresso. In essa presentò il n. 2 del Vol. II del " Formulaire de Mathématiques " pubblicato dalla *Revue de Mathématiques* sotto la sua direzione: ne espose il contenuto, e, date le necessarie indicazioni per renderne possibile la lettura a chi non fosse abituato all'uso dei simboli di logica coi quali esso è scritto, ne lesse alcune proposizioni, illustrandole opportunamente, e facendo così risaltare i pregi della scrittura simbolica in confronto alla frequente incertezza ed imprecisione del linguaggio ordinario. Vivi applausi accolsero l'oratore alla fine della conferenza.

* * *

Il giorno 15, alla stessa ora e nella stessa località, il Professore Gino Loria della R. Università di Genova lesse a moltissimi Congressisti la sua conferenza annunziata nella quarta seduta. Fu accolto in fine da generali applausi e dal voto del Professor D'Ovidio che egli stesso sia il primo a realizzare la sua idea nella Università dove insegna. La sua conferenza è allegata agli *Atti*.

Al termine della sua lettura venne, fra gli applausi, data comunicazione del seguente telegramma pervenuto dopo la chiusura del Congresso dal Prof. Veronese.

Professore D'Ovidio,

Dolente mie occupazioni abbiano impedito assistere banchetto, mando mio plauso benemerita "Associazione Mathesis *" per opera felicemente iniziata a vantaggio insegnamento matematico secondario, che quale deputato e professore asseconderò con tutte mie forze.*

Veronese.

***

Il giorno 14, ma soltanto dopo la chiusura del Congresso, pervenne al Presidente dell'Associazione la seguente lettera:

Chiarissimo Signor Presidente.

Non potendo intervenire all'adunanza di domani (14 settembre) mi permetto comunicarle quanto desiderei esporre in relazione alla quistione 4ª, pregandola di dar lettura di queste poche righe agli egregi colleghi:

" Essendo la dotta conferenza tenuta il 13 settembre dal Professore Bustelli una risposta del medesimo alla quistione 4ª piuttosto che una vera relazione, avrei piacere che fosse data se non lettura almeno comunicazione anche delle risposte da altri inviate, convinto che dal raffronto di proposte di varia indole più facilmente possa nascere una buona conclusione ".

Con la massima stima mi dico

Francesco Palatini
Socio di *Mathesis.*

***

Il 19 settembre pervenne la seguente risposta al telegramma inviato all'onorevole Ministro della Pubblica Istruzione.

Professore Enrico D'Ovidio. — *Università di* Torino.

Ringrazio per cortese saluto assicurando lei e presidente benemerita Associazione Mathesis *che assai volentieri prenderò in esame le proposte intese migliorare insegnamento delle matematiche nelle scuole secondarie.*

Ministro Baccelli.

***

Il 7 ottobre il presidente dell'Associazione, anche a nome del presidente del Congresso professor D'Ovidio, indisposto, presentò all'onorevole Ministro Baccelli, allora in Torino, quelli fra i voti del Congresso che riflettevano l'ordinamento scolastico e i programmi, e che l'assemblea aveva approvati almeno con notevole maggioranza. L'onorevole Ministro promise di esaminarli e di dare opera al miglioramento in genere dell'insegnamento secondario, non appena avesse risoluta la questione della riforma dell'insegnamento superiore.

LA STORIA DELLA MATEMATICA

COME ANELLO DI CONGIUNZIONE FRA L'INSEGNAMENTO SECONDARIO E L'INSEGNAMENTO UNIVERSITARIO

Lettura pronunciata a Torino addì 15 Settembre 1898

dinanzi all'Associazione « MATHESIS » fra gl'insegnanti di scuole medie dal Prof. GINO LORIA

EGREGI COLLEGHI,

Da parecchi scienziati e pedagogisti, specialmente di Germania e d'Italia, venne segnalato, quale inconveniente a cui urge porre riparo, il fatto che allorquando un giovane, esauriti gli studi universitari e conseguita l'agognata Laurea in Matematica, entra come insegnante in una scuola secondaria, avverte un senso di scoraggiante isolamento, somigliante a quello che prova colui il quale muove il passo in una contrada che gli sia sconosciuta e straniera. In disparte egli deve mettere quei metodi generali ed elevati che i suoi maestri di jeri gli avevano additato come pari in potenza alle bibliche trombe, dinnanzi a cui caddero per incanto le mura di Gerico, chè ben presto egli li ravvisa inadeguati allo scopo, e d'altronde egli ignora con quali surrogarli. Lungi da sè egli deve cacciare gli scritti che gli furono amici fedeli ed ajutanti efficaci durante quattro anni, nè sa a quali rivolgersi, perchè lo dirigano o sorreggano nella sua nuova missione.

È questa una condizione perfettamente analoga a quella in cui trovansi i giovani uscenti dalle nostre Facoltà di lettere; essi, nello abbandonare le aule universitarie per recarsi ad insegnare gli elementi delle letterature classiche, cadono nella tormentosa alternativa o di abbandonare, come utensili inservibili, i procedimenti che sono caratteristica e vanto della moderna filologia per altri di cui ignorano il congegno, oppure di adoperare nel loro insegnamento metodi talmente sproporzionati allo scopo, da rievocare il ricordo dell'uomo combattente una formica con una clava!

L'inconveniente che ho segnalato merita senza dubbio di venire seriamente considerato e sarebbe assai desiderabile che fosse tolto, rendendo più amichevoli e stretti i rapporti fra l'insegnamento universitario e l'insegnamento secondario. Tuttavia è per me un obbligo imprescindibile e ad un tempo un vero piacere il dichiarare come le conseguenze di esso siano passeggiere, epperò non possiedano una estrema gravità; lo dimostra la numerosa e brillante coorte di giovani professori, usciti recentemente dalle nostre Università ed oggi occupanti con plauso le cattedre di matematica nelle nostre scuole medie; essi, col loro insegnamento, improntato ad un misurato spirito innovatore, malgrado le opposizioni non rare che incontrano da parte di chi non dovrebbe dar loro che incoraggiamenti ed ajuti, efficacemente cooperano a che il livello della coltura matematica senza posa si elevi. Possano la coscienza della efficacia dei loro nobili sforzi e la soddisfazione di sentire la loro opera debitamente apprezzata spronarli a perseverare!

Non ostante la limitata gravità della screpolatura segnalata nel nostro edificio scolastico, dal momento che esiste, è doveroso di pensare a toglierla. Tale scopo hanno appunto le Scuole di Magistero annesse ad alcune Facoltà di Scienze. Ma, sintantochè il relativo diploma non sia per un giovane titolo indispensabile per ottenere l' inscrizione del proprio nome nell'*Annuario del Ministero della pubblica istruzione,* quell' istituto, se ha diritto ad un posto fra i palliativi, non merita per fermo il grado di rimedio efficace. Questo d'altronde non deve cercarsi in un abbassamento del livello dell' insegnamento superiore, se non si vuole che la Università cessi di essere la vigile custode e la sapiente amministratrice del patrimonio scientifico della nazione, di essere un vivajo perenne di cultori della scienza. Nè tampoco è da pensare ad un'elevazione dell'insegnamento secondario, il quale, come è ora, corrisponde, almeno nelle sue linee generali, alla maturità che possiedono ed al grado di coltura che devono conseguire coloro a cui è destinato. Non resta dunque che aggiungere al quadro delle materie d'insegnamento nei nostri Atenei una categoria di lezioni capaci di richiamare e fissare l'attenzione dei laureandi sopra i temi che dovranno quotidianamente trattare, quando occuperanno un posto nell' insegnamento classico o tecnico. Tale indirizzo avrebbe un corso biennale sulla storia della matematica, di cui io vorrei venissero arricchiti i programmi delle nostre Facoltà di Scienze. È questa una proposta che io presento essendo convinto che nulla serva meglio a sradicare errori inveterati, nulla aiuti meglio nella ricerca della propria strada didattica, che la storia degli oggetti stessi da insegnare; è un progetto in cui si rispecchia una massima di Napoleone, il quale lasciò scritto che *la storia è base delle scienze morali, fiaccola della verità, distruggitrice di pregiudizi;* è un suggerimento che già altra volta ebbi l'occasione di dare(*) e che venne accolto da varie parti con un favore evidente e per me assai incoraggiante. Sono appunto tali accoglienze oneste e liete di cui venne onorata la mia proposta, che mi consigliarono ed animarono a svolgerla colla debita larghezza; e ciò, non soltanto affinchè essa sia intesa conformemente alle mie intenzioni e quindi giudicata a dovere, ma anche per segnalare alcune ricerche che è d'uopo compiere prima di poterla attuare. Per far tutto ciò non mi

(*) Veggasi l'articolo " Matematica „ pubblicato due anni or sono nel *Dizionario illustrato di pedagogia,* diretto dai professori Martinazzoli e Credaro.

si poteva presentare occasione più propizia di quella offertami dall'onorevole invito che mi venne rivolto di prender parte ai lavori dell'Associazione *Mathesis;* invito riboccante di seduzione e lusinghe, e che non ebbi la forza di rifiutare, benchè io mi riconosca privo delle qualità necessarie per adempiere il còmpito che mi sono addossato; invito pel quale rivolgo al Chiarissimo Presidente di questo florido sodalizio i ringraziamenti più vivi e sinceri.

I.

La storia della scienza in varie epoche e da differenti scrittori venne intesa in modi assai differenti.

Alcuni — disconoscendo totalmente essere la storia, non soltanto racconto di effetti, ma anche ricerca di cause — ritennero essere unico ufficio dello storico l'esporre sotto forma brillante, accessibile a tutti, l'andamento generale del pensiero matematico, additando i punti salienti e quelli di regresso, i punti d'inflessione e quelli di diramazione che presenta la trajettoria da esso descritta, infiorando il loro discorso con aneddoti più o meno piccanti, che essi certamente avrebbero banditi come fantastici se si fossero arrestati a studiarne la genesi, ed enunciando delle massime generali, per dimostrare la verità delle quali sarebbero state necessarie appunto quelle indagini minute ed esatte da cui essi rifuggivano. Sorsero così degli edifici di regola monumentali, spesso di bell'aspetto, ma privi di solidità; edifici che riducevansi, si può ben dire, alla sola facciata. La parte veramente scientifica della storia veniva in tal modo sagrificata alla parte artistica. È questo il metodo a cui i matematici dell'*Enciclopedia* diedero tanta rinomanza e tanta diffusione col magistero di uno stile mirabile. Un corso sulla storia della matematica informato a tal metodo non corrisponderebbe evidentemente all'intento pel quale io ne suggerisco l'introduzione; esso infatti trascurerebbe il necessario per il superfluo, il principale per l'accessorio.

Altri storici, scegliendo come base la celebre massima di Carlyle: *la storia del mondo non è che la biografia dei grandi uomini*, equipararono la storia della scienza ad una collezione di biografie dei più fortunati pionieri del progresso, degli eroi dello spirito umano. Così intesa la storia della matematica può fungere quale ottimo diversivo da occupazioni più faticose, può anche far la parte di efficacissimo incentivo allo studio, se venga scritta da una persona che tenga fra le proprie mani la penna di Arago, ma non possiede quel carattere altamente educativo della mente, di cui deve essere dotato qualsia insegnamento superiore.

Alcuni storici si proposero di esporre le vicende che ebbero le scienze esatte presso un popolo determinato o in tutto il mondo dal dì della creazione in poi. Ora è chiaro che — eccezion fatta per la storia della matematica greca, e forse per questa soltanto — dato il meraviglioso sviluppo che ebbero le scienze del numero e della estensione, date le innumerevoli divisioni e suddivisioni che esse oggi presentano, tali trattazioni della storia non possono indirizzarsi che a chi abbia già compiuti i propri studi ed in conseguenza possieda quella maturità di intelligenza e quella vastità di coltura che sono indispensabili per orizzontarsi in uno qualunque dei campi che costituiscono la ricchezza della matematica odierna. (*)

Ma vi è ancora un'altra maniera di concepire la storia della scienza; essa s'inspira al grande principio della ripartizione del lavoro e fu adottata — per non citare che i modelli più celebri — dal Cossali in Italia, dallo Chasles in Francia ed in Germania dal Nesselmann. Chi vi si attiene sceglie una branchia speciale dello scibile matematico, ne scopre le scaturigini od almeno ne risale finchè è possibile il corso, ne segue con cura lo svolgimento, ne sorprende le successive modificazioni di sostanza e di forma, ne osserva le relazioni con altre branchie per rivelare quali influenze reciproche siansi manifestate, non senza trascurare di porgere notizie intorno alla vita ed alle opere delle più eminenti personalità nelle quali s'imbatte, ed intorno alle condizioni politiche, sociali e letterarie dei mezzi intellettuali in cui quella branchia ha prosperato. Un siffatto insegnamento della storia, se venga condotto in modo da attingere l'altezza di una vera filosofia della scienza, se venga organizzato in maniera tale che una considerevole profondità ne compensi la limitata estensione, varrà a completare la coltura matematica dei nostri laureandi e fors'anche a soddisfare il desiderio che molti hanno di vedere in Italia continuate le nobili tradizioni di Guglielmo Libri e Baldassare Buoncompagni.

Uno qualunque dei rami che oggi presenta il grand'albero della matematica può dar materia ad un capitolo almeno di un corso architettato nello stile che ho testè caratterizzato. Ma volendo che tal corso raggiunga lo scopo supremo pel quale io ne chiedo l'introduzione nelle Facoltà di Scienze, volendo cioè che esso serva di anello di congiunzione fra l'insegnamento universitario e l'insegnamento secondario, farebbe mestiere sceglierne i tèmi nella matematica elementare: i soggetti geometrici dovrebbero dar materia al corso di un intero anno, quelli aritmetici al corso di un altro, come ora mi volgo ad esporre con qualche dettaglio.

II.

Il fondamento del corso sulla storia della geometria elementare dovrebbe essere, a parer mio, una esposizione particolareggiata degli *Elementi* di Euclide, dalla quale venisse messa a nudo l'intima struttura di quest'opera magistrale e in pari tempo ne fossero rivelate le particolarità di stile, dalla quale risultassero tanto i metodi d'indagine, quanto i procedimenti di esposizione usati dal celebre Alessandrino.

(*) Credo superfluo arrestarmi a sconsigliare un corso di storia modellato sulla notissima opera del Kästner; esso non sarebbe che un arido ed infecondo catalogo di opere di matematica.

Così sarebbe di sommo interesse il porre in piena luce quale parte fondamentale rappresentino i problemi nel sistema euclideo e lo spiegare come e perchè Euclide scrupolosamente si attenga al precetto di non adoperare nelle dimostrazioni se non costruzioni già insegnate, come e perchè i seguaci di Legendre lo abbiano cancellato dal codice regolatore dell'insegnamento geometrico. Sarebbe anche assai opportuno, epperò consigliabile, uno studio accurato del *valore pratico* delle soluzioni che si leggono negli *Elementi;* per dichiarare il mio pensiero osservo che nella soluzione di qualunque problema è necessario distinguere nettamente *semplicità teorica* da *semplicità pratica:* dico teoricamente più semplice quella soluzione che fondasi sul minor numero di teoremi, invece praticamente più semplice quella che esige un minor numero di operazioni geometriche ed aritmetiche. Orbene è facile dimostrare che le soluzioni di Euclide eccellono tutte per semplicità teorica, ma non tutte per semplicità pratica, il che non deve far meraviglia, perchè la maggior parte delle costruzioni contenute negli *Elementi* altro non sono che dimostrazioni dell'esistenza di certe figure. La constatazione di tali importanti particolarità del metodo euclideo porgerebbe l'occasione propizia, non soltanto per insegnare le soluzioni praticamente più convenienti dei problemi fondamentali della geometria elementare, non soltanto per esporre i fondamenti de *La geometria del compasso* di Lorenzo Mascheroni, ma eziandio per far conoscere, almeno la quintessenza di quel complesso di norme, atte a misurare la semplicità di una costruzione geometrica, che il sig. Lemoine ha di recente riunita in un corpo di dottrina, a cui impose il nome di *geometrografia,* e che non dovrebbe rimanere sconosciuta ad alcun insegnante presente o futuro.

Altro punto importantissimo che l'insegnante dovrebbe rilevare negli *Elementi* di Euclide è la teoria delle proporzioni e la soluzione geometrica ivi insegnata di tutte le equazioni quadratiche: gli sarebbe così offerto il destro di tracciare le linee fondamentali di una disciplina, ormai collocata a riposo per constatata inabilità a prestare ulteriori servigi; alludo a quel metodo per sciogliere graficamente i problemi di primo e secondo grado, a cui lo Zeuthen impose il nome assai espressivo di *algebra geometrica.* Similmente dovrebbero venire segnalate in Euclide le prime applicazioni di un altro metodo ancor più celebre ed oggi pure posto nel museo delle anticaglie: parlo del *metodo di esaustione,* il quale condusse Archimede a quelle scoperte che tramanderanno il suo nome, circondato di gloria, alla più lontana posterità.

Anche la forma in cui sono redatti gli *Elementi* di Euclide è meritevole di un esame minuzioso, se non altro per sradicare un pregiudizio assai diffuso. È nota a tutti la rigida uniformità dello stile euclideo, nella quale a taluno parve quasi di scorgere un riflesso delle linee severe del Partenone; per ogni teorema, dopo l'enunciato, vengono indicate le condizioni a cui debbono soddisfare i dati, quando sia necessario limitarne l'arbitrarietà, segue la ripetizione dell'enunciato sulla figura e quindi la costruzione, seguita dalla dimostrazione; questa finisce coll'enunciato invertito, al quale tengon dietro le sacramentali parole « come dovevasi dimostrare »; similmente pei problemi. Ora questa inalterabile regolarità di stile che di consueto si considera come una concezione euclidea od almeno come un prodotto del genio greco, non è una cosa nè l'altra. La si ritrova infatti, non soltanto negli scritti superstiti di un astronomo un po' anteriore ad Euclide — Autolico da Pitana — ma anche, benchè meno perfetta, nella così detta *Arte di Eudosso,* conservata in un papiro del Museo del Louvre a Parigi, e, allo stato embrionale, nel celebre *Manuale del calcolatore,* che leggesi in un antichissimo papiro egiziano appartenente al British Museum di Londra. Se dunque si vuole ad ogni costo stabilire una relazione fra la forma sotto cui ci si presentano le proposizioni degli *Elementi* di Euclide e lo stile di qualche edificio, il termine di paragone si deve ricercare non già sulle rive dell'Ellesponto, ma piuttosto su quelle del Nilo, non già nei Propilei, ma piuttosto nelle Piramidi!

Tali indagini intorno agli stadi di sviluppo che attraversò lo stile geometrico, non sono le uniche investigazioni collegate agli *Elementi,* che abbiano diritto ad essere considerate come parte integrante di un corso di storia sulla geometria elementare. Altre, non meno essenziali, hanno per intento di rilevare la evoluzione che subì la materia trattata negli *Elementi,* hanno per attori i geometri greci precursori di Euclide, hanno per fine supremo di estirpare un altro inveterato preconcetto, quello cioè che la geometria sia uscita dal capo di Euclide, armata di scudo e lancia, come Minerva uscì dal capo di Giove. La perdita, mai abbastanza deplorata, delle opere storiche di due celebri discepoli di Aristotele — Eudemo di Rodi e Teofrasto da Lesbo —, la mancanza di altri antichi lavori congeneri, la esiguità di documenti di quell'epoca, rendono estremamente difficile la ricostruzione della geometria greca pre-euclidea. Ciò non ostante, ricorrendo alle informazioni più attendibili intorno ai popoli che precorsero i Greci sul cammino della civiltà — e specialmente intorno agli Egiziani, che i Greci a ragione consideravano come loro maestri in geometria — e scrutando i monumenti scritti che la classica antichità ci ha tramandati, si giunge a formarsi un concetto abbastanza esatto dell'opera scientifica di Euclide e a dimostrare che il suo trattato, ben lungi dal figurare nella letteratura matematica come un picco isolato in una vasta pianura, ci si presenta quale uno dei componenti di un'intera catena di montagne, i cui ultimi contrafforti si spingono al di là dei confini dell'Europa.

III.

Ricostruito per tal modo l'albero genealogico degli *Elementi,* ed esposto, in base alla posizione ufficiale di Euclide nel Museo di Alessandria, il perchè essi divennero le Pandette dell'insegnamento geometrico, lo storico ha il dovere di demolire un'altra leggenda, quella cioè che gli *Elementi* siano stati considerati nell'antichità un'opera tanto superiore alla critica, da rendere ingiustificato e vano qualunque tentativo inteso a migliorarla.

Tale intangibilità dell'opera di cui ci occupiamo è un parto dell'accesa fantasia dei ciechi adoratori venuti dopo il Rinascimento, dei primi adepti di quella schiera di credenti i quali si fecero una bandiera del manto reale di Euclide. Ciò è dimostrato dal notissimo commento di cui il filosofo neo-platonico Proclo corredò il I libro di Euclide. Infatti da esso apprendesi che gli Epicurei irriverentemente sostenevano che il teorema: « la somma di due lati di qualunque triangolo è maggiore del terzo, » non abbisogna di dimostrazione, essendo evidente *persino ad un asino;* esso inoltre dà notizia di un gran numero di modificazioni sostanziali ai fondamenti della geometria, suggerite da un altro sommo scienziato dell'antichità, Apollonio Pergeo. Nè basta. Proclo insegna pure un tentativo fatto dal celebre astronomo Claudio Tolomeo per migliorare la teoria delle parallele, *« l'écueil et le scandale des éléments de la géométrie ».* (*) Tale conato non va certo ascritto fra i maggiori titoli di gloria di colui che rappresenta nella storia dell'astronomia greca una parte analoga a quella che il destino affidò ad Euclide nella storia della geometria. Tuttavia esso ha diritto di venir segnalato come inaugurante la ricchissima letteratura sopra il troppo famoso postulato.

Se ad esso altri abbiano tenuto dietro immediatamente ci è ignoto, chè per trovar notizia di qualche seguace di Tolomeo bisogna lasciare i Greci per gli Arabi, bisogna saltare a piè pari quattordici secoli di storia; così s'incontra in Nasir-Eddìn uno che s'arrabatta a sormontare una difficoltà oggi dimostrata invincibile. Rimesso in onore lo studio della geometria dopochè, dissipata la tenebra medievale, fu reso possibile a tutti, mediante la stampa, lo studio degli *Elementi,* divenne legione il manipolo di coloro a cui arrise la prospettiva di rabberciare l'edificio euclideo nell'unico punto di solidità incerta. Analizzare tutti i mezzi che a tal uopo vennero adoperati, dedurne la spiegazione del fatto che il fine proposto non venne conseguito, descrivere i risultati che tuttavia per tal modo si raggiunsero, in particolare mostrare come vide la luce la geometria non euclidea, ecco un còmpito al quale non può sottrarsi lo storico della matematica elementare. Che egli assoggettandovisi compia opera altamente istruttiva, che egli getti un solido ponte fra l'Università e la Scuola media, non è chi non vegga. Ma ciò che importa rilevare si è che per comporre questa parte del suo corso all'insegnante non basterà ricorrere alla letteratura storica moderna — pur tanto ricca di scritti sulla geometria non-euclidea! — ma dovrà intraprendere il faticoso studio delle fonti più antiche; giacchè, se furono già scoperte e valutate le più cospicue investigazioni a cui devono la vita le geometrie di Lobatschewsky e di Riemann, restano ancora da studiare moltissime fra le innumerevoli opere che servirono per l'istruzione geometrica della gioventù dal Rinascimento sino alla fine del secolo XVIII.

(*) Nota espressione del d'Alembert.

Tale studio non è certo esente da fatiche e da spine, ma promette allori non scarsi a chi saprà compierlo con scienza e coscienza; permettetemi pertanto, o Signori, di consigliarlo a chiunque abbia interesse a conoscere l'evoluzione del pensiero matematico, a chiunque senta il proprio cuore palpitare all'idea di presentare al mondo qualche documento ancora vergine: la recente esumazione del Padre Saccheri, stella perduta nel cielo matematico, basti a calmare l'apprensione di qualche mio ascoltatore, che io sia in questo momento invaso dal *furore dell'inedito,* malattia oggi tanto diffusa!

La ricerca che io suggerisco, varrà inoltre a gettare qualche sprazzo di luce sopra un altro problema storico sul quale mi piace di fissare la Vostra attenzione, quello cioè di determinare le differenti direzioni in cui, nelle varie epoche e presso i vari popoli, procedette l'insegnamento della geometria. Mentre nel 1566 il decano del Collegio Reale di Parigi sosteneva innanzi al Parlamento la necessità di revocare il professore di matematica, per ciò solo che, ignorando il greco, non era in grado di insegnare gli *Elementi,* due secoli e mezzo più tardi vediamo nella stessa Francia venire esposto, poi acquistar favore, in seguito venire combattuto e da ultimo abbandonato il metodo algebrico-geometrico di Legendre, in deciso contrasto con quello purissimo di Euclide. Ai giorni nostri, dopochè il Bretschneider in Germania, il Méray in Francia (*) ed il de Paolis in Italia bandirono una crociata contro la scolastica separazione tra planimetria e stereometria, vediamo il pacifico universo dei geometri diviso in due campi, quello dei fusionisti e quello degli anti-fusionisti, campi analoghi, quantunque più agitati, a quelli in cui il mondo degli analisti venne diviso, allorquando fu additata la convenienza di abbattere la barriera separante il calcolo differenziale dal calcolo integrale. Orbene si manifestarono anche in passato queste od altre divergenze di opinioni? a quali idee e per merito di quali persone o di quali circostanze arrise la vittoria? Sono questi problemi di cui non è mestieri dimostrare l'alto interesse. Industriandosi a risolverlo si giungerà senza dubbio a dissotterrare e rimettere in circolazione qualche procedimento dimenticato, qualche buona idea su cui oggi si stende il velo di un melanconico oblio. Limitandosi al nostro paese, lo storico arriverà a decidere se nei tempi calamitosi in cui l'Italia non veniva considerata che come una espressione geografica, fosse almeno libera ed una nell'investigazione scientifica; se i nostri antichi oppressori, non paghi di annoverare fra i delitti il pronunciare il sacro nome di patria, imponessero anche al pensiero matematico certe strade determinate; e, prendendo il posto che il Libri lasciò vacante, (**) egli giungerà a dimostrare come sotto il cielo che vide nascere il Fibonacci, il Tartaglia ed il Cardano,

---

(*) Colgo quest'occasione per richiamare l'attenzione dei miei compatrioti sopra i *Nouveaux éléments de géométrie* pubblicati fin dal 1874 dal Méray, nei quali la fusione è praticata; agli stessi concetti si è di recente inspirato questo eminente scienziato nel redigere le applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, che chiudono degnamente le sue *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale.*

(**) È noto che l'*Histoire des sciences mathématiques en Italie* si arrestò al IV vol., per ragioni che è carità non ricordare.

anche dopo la morte di Galileo, non vegetasse un popolo dimentico delle sue glorie più pure, non si stendesse una desolante terra di morti.

IV.

Compiuta la narrazione della diversa fortuna che ebbero gli *Elementi* di Euclide, lo storico deve volgersi ad esporre quali complementi essi abbiano ricevuto dall'epoca greco-alessandrina in poi. A tale scopo, per quanto concerne la planimetria, egli dovrà presentare un catalogo illustrato delle ricchezze racchiuse nelle opere superstiti di Erone e nella *Collezione matematica* di Pappo d'Alessandria, e descrivere come siasi costituita l'odierna « geometria del triangolo, » nuova diramazione della geometria elementare che a nessuno è omai lecito di ignorare: così verranno incidentalmente segnalate al futuro insegnante due abbondantissime fonti a cui potrà attingere ispirazione nel formulare le questioni da proporre come esercizî ai propri discepoli.

Con maggiore ragione e maggiore larghezza lo storico deve tracciare un quadro delle amplificazioni e dei miglioramenti di cui ebbe a gioire la parte stereometrica degli *Elementi*, la quale, notoriamente, più di tutto il resto rimane lontana dalla perfezione. Così gli sarà offerta propizia occasione per riprodurre in compendio gli stadî di successivo sviluppo che attraversò la teoria dei poliedri per opera di Archimede, Ipsicle e Pappo nell'antichità, di Keplero, Descartes ed Eulero in tempi a noi più vicini, di Cauchy e Poinsot nell'epoca nostra; nonchè per segnalare quali memorabili progressi abbia fatto compiere Archimede alla teoria dei corpi rotondi, nei famosissimi suoi libri *Su la sfera ed il cilindro*, sfruttando il metodo di esaustione che egli dotò di un'isperata potenza.

Con i libri testè ricordati il geometra di Siracusa insegnò, fra altre cose, gli elementi essenziali per la misura del volume e della superficie della sfera e delle sue parti. Ora nasce spontanea la domanda: le proprietà descrittive delle figure tracciate sulla superficie di una sfera, delle quali Euclide non si occupa, rimasero forse sconosciute agli antichi? La risposta è negativa. Ma va notato come la scoperta di quelle proprietà appartenga in gran parte, non già a geometri di professione, ma a persone che all'astronomia consacrarono il fiore del loro ingegno. La contemplazione del cielo in una notte serena — quali eran quelle proverbiali dell'Ellade — conduce naturalmente ad assimilare la volta celeste alla superficie di una sfera, avente per centro il centro della terra: gli è il partito al quale si appigliarono i primi astronomi che ricordi la storia. Essi, ignorando la scienza dei moti e delle forze, si limitarono a proporsi la descrizione dei fenomeni celesti, lasciando il compito di spiegarli ai loro pronipoti in possesso delle leggi della dinamica. Da ciò ebbero lo stimolo allo studio della geometria della sfera, della *Sferica*, come allora si chiamava. Inaugurato da persone di cui l'ingrata indifferenza dei posteri non conservò nemmeno il nome — eppure fra esse si trovava probabilmente un'individualità eminente, Eudosso da Cnido! — ristretto nei primordi alla considerazione di circoli massimi e circoli minori, di meridiani e paralleli, esso acquistò i lineamenti definitivi sotto cui ci si presenta nelle opere di Teodosio da Tripoli e Menelao da Alessandria, allorquando venne avvertita la perfetta corrispondenza che vige fra la geometria piana e la geometria sferica, ove si convenga di associare metodicamente ad ogni retta del piano un circolo massimo della sfera.

I progressi dell'astronomia ben presto mostrarono come la Sferica fosse bensì un ausiliare prezioso, ma non però sufficiente in ogni contingenza; insufficiente ad esempio si manifestò a chi per primo ebbe la sublime idea di tentare la determinazione col mezzo di numeri dell'andamento dei fenomeni celesti. Nacque in conseguenza e si raffermò la convinzione di essere indispensabile il possesso di una tavola delle lunghezze delle corde di una circonferenza, servendosi della quale, dati certi elementi di un triangolo, gli altri potevano venir calcolati. La *Composizione matematica* o, come ordinariamente si chiama, l'*Almagesto* di Tolomeo ci tramandò i metodi con cui tale tavola venne costruita ed adoperata dagli antichi; per ciò — nonchè per altre ragioni su cui mi è forza sorvolare — l'analisi del grande codice astronomico dei Greci deve occupare un bel posto nel corso del quale vado svolgendo il programma: se l'insegnante avrà cura di segnalare le proposizioni di trigonometria sferica note al tempo in cui esso venne redatto, e quelle che furono aggiunte poi, riuscirà ad agevolare ai suoi discepoli il maneggio di un importante ramo di matematiche col quale pochi hanno oggi dimestichezza, e se egli non si isdegnerà di arrestarsi sull'algoritmo usato da Tolomeo, li famigliarizzerà coi mezzi usati dai Greci per effettuare i calcoli aritmetici.

E qui mi sia concesso di attrarre l'attenzione dei valorosi colleghi che a me d'intorno veggo sul metodo adoperato — certamente non inventato — da Tolomeo per stabilire i teoremi fondamentali della trigonometria sferica. (*) Il pernio attorno al quale si aggira tutto il congegno da lui architettato è il noto teorema di Menelao sul triangolo sferico tagliato da una trasversale. Applicandolo convenientemente, il celebre astronomo arriva a risolvere un triangolo sferico in tutti i casi che incontra; similmente si potrebbe procedere negli altri casi. Ora poichè il teorema di Menelao sulla sfera è un'immediata conseguenza dell'analogo nella geometria del piano e questo si stabilisce mediante semplicissime considerazioni sopra triangoli simili, il procedimento espositivo di Tolomeo, grazie alla sua uniformità, alla sua forza ed alla sua semplicità, è dotato di un eminente valore didattico; ond'è sorprendente e deplorevole che esso sia stato abbandonato e poi dimenticato. Perciò io esprimo il voto che qualche prossimo espositore della trigonometria sferica, lasciando le usate forme, svolga completa-

(*) Più minuti ragguagli sopra tale argomento si troveranno nel III Libro della mia opera su *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, di prossima pubblicazione.

mente l'idea di cui si giovò Tolomeo, dandoci una trattazione completa di tale disciplina sulla base del teorema di Menelao; il giorno in cui tale desiderio sarà soddisfatto, verrà offerto un nuovo esempio degli utili insegnamenti che ancor possono dare le opere antiche, verrà illustrato il concetto che Leibniz esprimeva con le parole seguenti: *la verità è più diffusa di quanto si pensi, ma spessissimo è nascosta, avvolta, affievolita, mutilata, corrotta da aggiunte. Col rilevare le tracce di verità presso gli antichi ed i predecessori si caverà il diamante dalla sabbia, la luce dalle tenebre e si riuscirà a formare una filosofia perenne.*

Dopo questa breve digressione, che spero mi sarà perdonata, riprendo il filo interrotto della mia esposizione schematica della storia della geometria. Ed osservo che, mentre l'*Almagesto* di Tolomeo fa fede della somma di cognizioni sulla trigonometria sferica possedute dagli antichi, una analisi microscopica di molte altre opere appartenenti alla letteratura greca prova come ad essi non rimanessero sconosciute molte delle proposizioni che si considerano oggi come parti integranti della trigonometria rettilinea: basterebbe a dimostrarlo il fatto che, nel teorema di Tolomeo sul quadrilatero inscritto, si trovano, allo stato di germe in procinto di sbocciare, le formule per l'addizione e la sottrazione, la duplicazione e la bisezione delle funzioni circolari. Quantunque tali elementi sparsi non basterebbero a costruire per intero un trattato di trigonometria piana, pure essi devono venire segnalati ai giovani studenti, specialmente per merito del metodo con cui sono dimostrati i relativi teoremi, metodo schiettamente geometrico, che è in aperta opposizione con quello a cui accordano la preferenza i moderni, i quali trasformarono una disciplina essenzialmente geometrica, quale è la trigonometria, in un armeggio di formule ben disciplinate ed eleganti. Il raffronto fra i due metodi, ove sia fatto con la profondità sufficiente per raggiungere il grado di studio comparativo fra i due aspetti sotto cui si può considerare ed insegnare la trigonometria, famigliarizzando i futuri insegnanti con una importante questione didattica, porgerà loro senza dubbio vital nutrimento. Ad essi dovrebbe da ultimo essere fatto vedere per qual modo e per opera di chi sia avvenuta la sostituzione metodica dei *seni* alle *corde* e la conseguente trasformazione in una scienza completa delle poche sparse proposizioni trigonomiche note ai Greci e da essi applicate.

V.

A questo punto l'insegnante può dire di avere segnalate le principali vicende che accompagnarono l'evoluzione de' varî rami della geometria elementare. Tuttavia prima di considerare come esaurito il suo cómpito, oppure, se il tempo gli mancasse, come proemio alla storia dell'aritmetica, dovrebbe narrare la storia dei tre maggiori problemi che si proposero gli antichi, additando le più cospicue indagini che da essi rampollarono. A voi tutti è noto che il prof. Klein, in una serie di bellissime conferenze, già tradotte nelle principali lingue d'Europa ed aventi appunto l'intento di servire di base ad un trattato di amicizia, ad un'alleanza fra l'insegnamento medio ed il superiore, espose con la lucidità e la suggestività che caratterizzano ogni scritto di quel gran maestro, l'ultima fase di sviluppo di quei problemi. Ma anche le fasi precedenti, per l'influenza benefica che esercitarono e per i risultati importanti che diedero, meritano di venire accuratamente caratterizzate, ed io potrei suggerire, come aiuti a chi intendesse descriverle, non meno di tre pregievoli lavori nei quali le più antiche fra esse sono ottimamente delineate. (*) La descrizione delle altre non deve venir passata sotto silenzio, se non si vuol commettere una solenne ingiustizia. Ma per ciò sono necessarie estese ricerche sulle opere dei geometri posteriori a Descartes; se esse saranno condotte a dovere guideranno a conseguenze di qualche rilievo. Alcuni tentativi da me fatti in questo senso, servendomi soltanto delle opere di Huygens, mi autorizzano a garantire colui che vi si accingesse di non perdere tempo e fatica; e per non domandarvi di credere ad una semplice asserzione cito un fatto.

Chi di voi percorse in questi ultimi anni le *Nouvelles Annales* e il periodico *Mathesis* conoscerà una certa curva di cui i nostri vicini d'oltre Frejus hanno il monopolio, a cui essi danno il nome di « strofoide » e della quale scopersero una folla di proprietà notevoli e buon numero di applicazioni; però, quello che nessuno, per quanto mi costa, ha osservato si è che la strofoide appartiene tanto alla categoria costituita dalle curve risolutrici del problema della trisezione dell'angolo, quanto a quella formata dalle linee capaci di sciogliere quello della moltiplicazione del cubo. Orbene un'attenta lettura del carteggio di Huygens (**) rivela questo fatto interessante, facendo apparire il celebre geometra olandese pari a

...... quei che va di notte,
Che porta il lume retro e sè non giova
Ma dopo sè fa le persone dotte.

VI.

Tutte le idee che campeggiano nella matematica traggono, in ultima analisi, la loro origine da due osservazioni fondamentali. Consiste la prima nel constatare che qualsia corpo solido possiede, indipendentemente da tutte le sue qualità fisiche — colore, temperatura, stato elettrico, ecc. — una forma determinata, la quale, ove non intervengano violenti cause perturbatrici, è invariabile e quindi per quell'oggetto caratteristica. La seconda osservazione concerne un gruppo di

(*) REIMER, *Historia problematis de cubi duplicatione* (Gottingae, 1798); MONTUCLA, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (2e éd., Paris, 1831); A STURM, *Das delische Problem* (Linz, 1895, 1896, 1897).

(**) *Oeuvres complètes de C. Huygens*, T. I (La Haye, 1887) p. 235 e 238. V. una mia noticina nel fascicolo di Dicembre 1898 del periodico *Mathésis*.

cose e consiste nel notare che, se si fa astrazione da tutte le proprietà fisiche di queste ed anche dalla loro forma, quel gruppo conserva un *quid* specifico che chiamiamo *numero* di quelle cose.

Il concetto di forma di un corpo scientificamente svolto diede vita alla scienza dell'estensione, alla *geometria;* invece l'idea di numero è la madre dall'*aritmetica* tutta.

Le esperienze quotidiane di qualsiasi persona intelligente guidano tanto spontanemente alla concezione delle più semplici figure geometriche e suggeriscono così naturalmente l'idea d'investigare le loro proprietà, che è impossibile dire chi sia stato il primo individuo od il primo popolo che coltivò la geometria, e quale sia stata l'epoca che la vide nascere.

Similmente, le occasioni al contare sono tanto frequenti e la relativa operazione è talmente connaturata al nostro meccanismo mentale, che vano riuscirebbe ogni tentativo di redigere la fede di nascita dell'aritmetica. Ben se n'avvide Platone, il quale, a chi pretendeva si attribuisse ad un tal Palamede l'arte del conteggio, argutamente rispose: « E che forse Agamennone, senza Palamede, avrebbe ignorato quanti piedi aveva!.... » Ma se, pertanto, si cercherebbe indarno di scoprire chi prima dei Greci, prima dei Fenici — che i Greci salutavano loro maestri di aritmetica — abbia coltivata la scienza dei numeri, è possibile e ad un tempo sommamente interessante il determinare quali mezzi gli uomini si creassero per effettuare, a voce o per iscritto, i calcoli sempre più complicati che il consorzio civile ed i progressi della scienza imponevano. Notoriamente tali mezzi sono la numerazione parlata e la numerazione scritta. La descrizione di essi dovrebbe formare — secondo il mio modo di vedere — il proemio indispensabile ad un corso sulla storia dell'aritmetica e dell'algebra; proemio nel quale dovrebbe prender posto una notizia particolareggiata dei segni numerali usati dai popoli più antichi, dai Greci e dai Latini, una esposizione del problema che Archimede ha risolto nell'*Arenario,* ed una narrazione del come vennero introdotte in Europa le cifre oggi in uso presso tutti i popoli civili.

Come alla descrizione di qualunque macchina deve tener dietro l'indicazione del modo di servirsene, così all'enumerazione dei principali sistemi di numerazione deve seguire una esposizione dell'aritmetica pratica presso gli antichi — con speciale riguardo alla estrazione delle radici quadrate e cubiche — e presso i moderni: da essa si dovrebbe apprendere l'invenzione e l'uso delle frazioni continue e la *instauratio ab imis fundamentis* che l'aritmetica pratica subì per l'invenzione dei logaritmi; altri giudichi se qui potrebbe trovar posto un cenno sulle macchine aritmetiche, che, a partire dall'epoca di Pascal, vennero inventate. Quello che a me pare si è che tale parte del corso che propongo, ove fosse fatta a dovere, varrebbe forse a vincere la ripugnanza pei calcoli aritmetici, assai comune nei giovani e così lamentata, ripugnanza che rende deserti tanti nostri osservatori astronomici e che a molti fa apparire falsa od almeno esagerata la esclamazione di Gauss: « quale e quanta poesia vi è in una tavola di logaritmi! »

Risposto così alla domanda « con quali mezzi si è calcolato nelle varie epoche? », lo storico deve abbandonare l'aritmetica pratica per l'aritmetica teorica, a fine di rispondere all'altra domanda « che cosa conobbero i differenti popoli, in varie epoche, intorno ai numeri ed alle loro proprietà? » A questo scopo comincerà a segnalare il misticismo di cui venne ravvolta l'aritmetica nella scuola di Pitagora, senza tacere come ivi siasi intuito essere tutti i fenomeni fisici governati da leggi matematicamente esatte, come pertanto in quella scuola esista in embrione il nostro indirizzo scientifico. seguendo il quale si cerca in ogni fenomeno l'elemento numerico e si ritiene, con Leonardo da Vinci, che le scienze siano tanto più vere quanto meglio s'informano ai metodi della matematica. Narrerà poi come l'aritmetica — forse sotto l'influenza delle esortazioni e dei consigli di Platone — abbia cambiato aspetto per presentarsi, prima quale una appendice della geometria in Euclide, in seguito, quale una disciplina autonoma in Nicomaco e Diofanto.

Sopra questo secondo scienziato farà mestieri arrestarsi a lungo, giacchè la sua maggiore opera fa, rispetto all'aritmetica ed all'algebra, un ufficio perfettamente analogo a quello che. nella storia della geometria, rappresentano gli *Elementi* di Euclide. Ivi infatti si trova la prima radice del nostro algoritmo algebrico; ivi un gran numero di problemi di analisi determinata ed indeterminata risolti con artifici estremamente ingegnosi; ivi applicate parecchie proposizioni dell'odierna teoria dei numeri. Sicchè da essa traggono origine due rami fondamentali di matematica: l'algebra e la teoria dei numeri. La prima nacque quando i germi esistenti nell'opere di Diofanto vennero fecondati al contatto di popoli Orientali; la seconda divenne una vera « chimica dei numeri » (*) quando si avvertì la distinzione fra problema determinato e problema indeterminato e quando si vide essere assai più interessante lo scoprire le proprietà dei numeri, che industriarsi a sciogliere questioni scelte a capriccio. La prima ebbe il suo maggiore sviluppo quando venne trasportata in Europa; la seconda celebrò i suoi maggiori trionfi quando Fermat, studiando appunto l'opere di Diofanto, enunciò quelle bellissime proposizioni, a dimostrar le quali si sforzarono geometri di primo ordine quali Eulero e Lagrange. Legendre, Dirichlet e Kummer. Seguendo minutamente la figliazione di queste idee, riannodando sapientemente l'antico col nuovo, lo storico arriverà a mettere in luce la continuità perfetta del pensiero matematico attraverso i secoli.

Ma l'opera di Diofanto gli suggerirà altresì una bella questione da consigliare ai suoi discepoli: concedetemi, o Signori, di segnalarvela prima di prendere commiato da Voi. I problemi trattati da Diofanto sono in gran parte indeterminati; il geometra greco ne trova di regola soltanto una soluzione particolare, però con metodi che quasi sempre permettono di ottenerne infinite altre. Per l'analista moderno ciò non basta; egli esige si assegni il grado di generalità dei risultati conseguiti e si dia la massima estensione a quelli che ancor

(*) Espressione di Kummer.

non la possiedono; in alcuni casi tale complemento indispensabile all'opera di Diofanto venne somministrato da Eulero; ma, nella maggioranza dei casi, quella questione si presenta dinanzi agli occhi dell'esploratore animoso col fascino ineffabile emanante da una terra incognita.

Quanto ebbi l'onore di esporvi, o Colleghi egregi, sarà senza dubbio sufficiente a chiarire sopra quale piano io vorrei architettate le lezioni universitarie sulla storia delle matematiche elementari. Se non discendo a particolari più minuti, gli è che temo di abusare del Vostro tempo prezioso, distraendovi da occupazioni più feconde; gli è che sono certo essere tutti Voi in grado di colmare le lacune che ho lasciate, di colorire il quadro del quale non volli tracciare se non le linee fondamentali, di valutare le mie proposte e quindi giudicare se siano da accettare o da respingere, da appoggiare o da combattere. A Voi che spendete tutte le forze del Vostro ingegno alla diffusione del sapere, al miglioramento delle condizioni intellettuali della nostra Gran Madre, io volli sottoporre almeno uno schizzo delle idee, pel trionfo delle quali da alcuni anni vo combattendo; a Voi che nelle controversie di didattica matematica, io considero come tribunale supremo. Ed ora che la mia parte è finita, nella coscienza della purezza delle mie intenzioni, colla fede incrollabile di un apostolo fervente, io attendo serenamente, ma non senza trepidanza, il Vostro verdetto.

RELAZIONE SULLA PRIMA QUISTIONE

proposta dal Comitato dell'Associazione "MATHESIS„

Data la possibilità della fusione della geometria piana colla solida, proporre un programma che permetta agli insegnanti la libera scelta fra il metodo della fusione e quello della separazione.

Egregi Colleghi,

La questione 1ª non ha, secondo me, una grande importanza sostanziale; per questo la mia relazione sarà fredda, e non avrei accettato di farla, se non fossi convinto che l'indifferenza del relatore giovi più che non nuoccia alla ricerca del meglio. Io non sono separatista, perchè, avendo un anno (1886-87) adottato il De Paolis nel R. Liceo V. E. di Palermo, ho potuto constatare che il metodo della fusione offre dei vantaggi; ma, per gli inconvenienti che pur presenta questo metodo, non sono neppure fusionista. Certamente non si può dire che un semplice ravvicinamento di proposizioni affini, nel piano e nello spazio, sia conveniente per ogni riguardo, perchè, per fissare stabilmente e con chiarezza nella mente degli scolari le diverse proprietà ed i varii ragionamenti, giova molto il darne di simili a distanza per ribadirle quando il ricordo potrebbe esser confuso ed affievolito od anche scomparso: e mi pare d'altra parte, che in un insegnamento elementare non si possa trarre gran profitto dal principio di dualità.

A me parrebbe opportuno adottare la fusione solo dove si presenta spontanea, per es. nella simmetria nella similitudine, che si fondano sostanzialmente, nel piano e nello spazio, su queste due proposizioni: 1ª due angoli a lati paralleli di stesso verso sono uguali, 2ª le diagonali d'un trapezio si tagliano nel rapporto delle basi. Per poter far questo basterebbe esporre in principio, nelle generalità, le proposizioni più semplici sull'intersezione di piani e rette, ciò che permetterebbe anche di ricorrere allo spazio per dimostrar semplicemente delle proposizioni di planimetria.

Riconosco peraltro, e questo anzi mi par quasi indiscutibile, che la libertà di scelta nel metodo, permettendo all'insegnante di seguire la via ch'egli preferisce, renderebbe l'insegnamento più spontaneo e più vivo; cosicchè, per gli scolari, riuscirebbe meno pesante e più efficace. Questa ragione è più che sufficiente per mettere in evidenza l'importanza didattica della questione 1ª, la quale si risolverebbe immediatamente, se la distribuzione della materia d'ogni insegnamento tra i varii anni di corso si potesse fare affatto arbitrariamente in ciascuna scuola, e presenta invece serie difficoltà, se, specialmente per evitare in parte gli inconvenienti causati dai traslochi, si esige che l'accennata distribuzione sia la stessa negli istituti congeneri. È appunto in questo senso che, per l'ordinamento attuale della scuola e per durevoli ragioni d'equità, va studiata la questione; ed in questo senso la studiano infatti quelli, che se ne occupano o direttamente od indirettamente.

Il Prof. BETTAZZI (*Period. di Mat.* 1891) propone che l'insegnamento della Geometria nelle scuole classiche sia così ripartito:

1° Anno di liceo (o 5ª di ginnasio). Generalità. Uguaglianze e disuguaglianze. Relazioni di posizione.

2° Anno di liceo (o tra 1° e 2°). Teorie dell'equivalenza, delle proporzioni e della misura.

E si potrebbe proporre la stessa ripartizione per il primo biennio dell'istituto tecnico.

Il Prof. BIASI presenta un saggio di programmi per l'insegnamento della geometria nelle scuole medie superiori, pei due metodi della fusione e della separazione. Ripartisce l'insegnamento in tre anni.

Il Prof. BUZZI osserva che il metodo della fusione è già in vigore, in certo qual modo, nei giardini d'infanzia e nelle scuole elementari: dice che solamente studiando nell'evoluzione storica lo sviluppo parallelo della planimetria e della stereometria, si può trovare una guida sicura per ricavare metodo e programma.

Il Prof. CATANIA, che pratica da tre anni il metodo della fusione nel Liceo e non ha potuto fare la stessa cosa nell'istituto tecnico, dove pure insegna, ritiene che la questione, così come è posta, non possa aver soluzione soddisfacente. Presenta programma ed orario per l'insegnamento della Matematica nelle varie scuole, classiche e tecniche.

Il Prof. IMPERATO presenta un programma di geometria unico pei licei e pei tre primi anni d'istituto tecnico. È separatista per esperienza.

Il Prof. PALATINI presenta un programma di geometria diviso in due anni.

Questi cenni si riferiscono alle comunicazioni trasmessemi dalla Presidenza di Mathesis: le cinque ultime son manoscritte d'occasione. Tutte, se s'eccettua quella del Prof. BUZZI, che non dà nessun programma, e quella di BIASI, che mette nel 2° anno la misura nel piano, pongono in ultimo tutta la teoria della misura. Acconsentendo che la misura sia trattata in fine, si potrebbe avere una soluzione comoda anche attenendosi per es. agli *Elementi di Geometria* dei Prof. Lazzeri e Bassani, che sono didatticamente e scientificamente ben fatti. Molti però dei separatisti ed alcuni dei fusionisti considerano come un grave inconveniente il posticipare la teoria della misura. Ho quindi preparato un nuovo programma da discutersi cogli altri, ed è questo:

1° Anno (liceo ed istituto tecnico). Generalità sulle figure piane e solide: proprietà, uguaglianze e disuguaglianze. Intersezione di circoli, rette, piani e sfere. Massima comune misura. Rapporto razionale ed irrazionale. Area di poligoni. Quadrati e rettangoli di segmenti divisi in parti. Rapporti di lati di triangoli fra loro equiangoli. Teorema di Pitagora e conseguenze.

2° Anno (liceo ed istituto tecnico). Volume di poliedri. Ciclometria e Sferometria. Poligoni e poliedri regolari.

3° Anno (liceo ed istituto tecnico). Simmetria. Proporzionalità. Similitudine. Teorie complementari di Geometria piana e solida.

4° Anno (istituto tecnico). Sezioni coniche.

La parte assegnata al 1° Anno, che può sembrare eccessiva, si svolgerà invece molto comodamente, se, insegnandola, si seguiranno quei metodi semplici, che si convengono ad una prima classe di scuola media. Pare, da qualche tempo, che tutti gli sforzi sian diretti a render difficile ed antipatico, per gli scolari, lo studio della Geometria. Si posticipa l'introduzione d'alcuni postulati e si complicano altri, rendendo così necessarie delle discussioni relativamente oscure e lunghe, che si potrebbero evitare, e creando difficoltà, che allungano ed oscurano molte dimostrazioni. Mi sembra che le verità fondamentali si debbono porre il più presto possibile per poterle utilizzare subito, e si debbono dare le proprietà veramente utili con semplicità e chiarezza, curando solo che le dimostrazioni siano rigorose. Le difficoltà create artificiosamente, disgustando lo scolaro, l'allontanano dallo studio ed assorbono del tempo, che dovrebbe invece essere impiegato per vincere le difficoltà inevitabili, per es. per svolgere con sufficiente chiarezza e con rigore la teoria dei rapporti irrazionali. La riduzione dei postulati, l'esame delle varie maniere di concatenazione, lo studio delle questioni astruse si deve pur fare nelle scuole, ma in quelle di magistero, di dove debbono uscire giovani preparati per l'insegnamento medio e pronti a rispondere alla feconda curiosità degli scolari più intelligenti. L'insegnamento elementare deve essere diretto dall'intuito, e quello medio deve accettar per guida l'utilità pratica. Soltanto l'insegnamento superiore può varcare i confini del sensibile ed elevarsi fin dove può portarlo la libera intelligenza.

Le teorie complementari sono poste in fine del 3° anno, in fine cioè dell'ordinario Corso di geometria elementare. Per esse sarà bene concedere libertà all'insegnante, che potrà anche ritornare su qualche argomento, per es. su quello dell'equivalenza, per far vedere da quali postulati possano venir liberate alcune proposizioni, ciò che servirà anche a risvegliare negli studenti il criterio critico-analitico ed a vivificare in essi l'amore per la matematica pura.

La mia relazione è finita. Ora non resta che discutere; ed, affinchè la discussione non rimanga senza frutto, mi parrebbe conveniente la seguente procedura:

1°. Rispondere alla domanda: è conveniente concedere possibilmente all'insegnante la libertà di scegliere tra il metodo separatista ed il fusionista?

2°. Fissare un programma, che stabilisca con precisione, ma molto concisamente, la ripartizione tra i varii anni di corso dell'insegnamento della geometria piana e solida.

3°. Proporre la compilazione di un programma molto dettagliato, che sia sviluppo di quello fissato, e far istanza presso il Ministero della P. I. perchè solleciti questa compilazione.

Se riusciremo in questo, allora saremo a buon punto e potremo gioirne per la nostra *Mathesis*.

Prof. Francesco Giudice.

RELAZIONE SULLA TERZA QUISTIONE

proposta dal Comitato dell'Associazione " MATHESIS ".

Libri di testo dal punto di vista scientifico e didattico. Errori che vi dominano, mezzi perchè si limiti, per quanto si può, il danno che tali errori arrecano alla scuola.

EGREGI COLLEGHI,

Pochi soci hanno presentato in tempo qualche studio su questa III questione: i professori BUZZI e CARDOSO-LAYNES che hanno mandato direttamente alcune osservazioni al Presidente della nostra Associazione, e il prof. BETTINI che fece pervenire a me un suo scritto prima dell'adunanza tenuta a *Recanati* nel giugno scorso. Ma, considerazioni importanti sull'argomento si son venute facendo sempre e in lavori scientifici e didattici, e un po' anche nelle adunanze parziali promosse dall'Associazione *Mathesis;* cosicchè, o egregi Colleghi, io ho avuto il modo di conoscere i pensieri di parecchi altri di voi, e di essi mi son giovato assai per questo mio studio.

Per seguire un certo ordine, credo conveniente parlar dapprima rapidamente delle scuole primarie e poi di quelle secondarie, benchè alcune considerazioni d'indole generale possano valere sì per le une che per le altre.

***

Riguardo alle scuole elementari, giova anzitutto, per poter poi correre più dirittamente, e senza inciampi, nella discussione, rispondere alla domanda: i libri di testo hanno da essere obbligatori in tutte le classi? La Commissione Centrale si pronunziò chiaramente su tale questione fin dal settembre 1894, e le proposte ch'essa fece furono subito approvate e attuate dal Ministero. Si disse in sostanza: come volete che i bambini della prima classe, che alla fine dell'anno scolastico arrivano sì e no a legger qualche parola senza sillabare, che quelli della seconda e della terza per i quali la lettura è ancora una cosa quasi tutta materiale, poco più di un semplice esercizio degli occhi e degli organi vocali, possano comprendere un libro d'aritmetica? Costretti a studiarne qualche pagina, essi non riusciranno che a fare un esercizio mnemonico di nessuna utilità: impareranno, per es., a recitare correntemente definizioni più o meno scientifiche dell'unità e del numero, come inopportunamente si trovano in qualche trattatello, ma ciò non li aiuterà affatto a risolvere, con la necessaria speditezza, i quesiti più comuni della vita. Quindi, con saggio provvedimento, si stabilì di non permettere, nelle scuole elementari inferiori, l'uso, come libro di testo, di un trattato d'aritmetica. « Soltanto la viva voce del maestro, si disse giustamente, (*) « soltanto l'uso giornaliero e graduale della lavagna può permettere « di adattare lo studio dell'aritmetica alle condizioni delle scuole e « di farlo seguire parallelamente allo sviluppo dell'intelligenza, per « modo che questo le dia e ne riceva ad un tempo, aiuto; e solo « per tal via sarà possibile, dall'apprendimento meccanico delle più « elementari osservazioni, pervenire a poco alla volta a raccogliere « le cognizioni apprese in regole generali, che non siano formule « astratte insegnate a priori, ma il risultato di elementari osserva« zioni, abilmente suscitate dal maestro su fatti comuni e sempli« cissimi, e perciò atte ad essere conservate nella memoria ».

Quanto però al corso elementare superiore fu proposto e approvato che l'insegnamento orale del maestro sia aiutato e fermato nella mente degli alunni mediante la parola scritta d'un libro, al quale gli alunni stessi possano e sappiano ricorrere quando per il succedersi delle nozioni acquistate, o per il tempo trascorso, o per altra ragione, l'impressione ricevuta dalla viva voce del maestro si sia affievolita o mescolata con altre per modo da lasciar sorgere dubbiezza o confusione.

A queste disposizioni, tuttora in vigore, si opporrebbe, per la parte che riguarda il corso elementare superiore, il prof. Buzzi che si dichiara contrario ai libri di testo in generale. « Il più delle « volte, egli dice, il libro non rappresenta le idee dell'insegnante, « la cui opera rimane intralciata. O il professore elimina il testo, « o il testo elimina il professore. Il libro costituisce il pericolo di « esercizi puramente mnemonici, fomentando la disattenzione in « classe, perchè la lezione si trova su di esso ». Ciò in parte è giusto; ma mi pare che il prof. Buzzi parli in modo un po' troppo assoluto. Gli si potrebbe anzitutto rispondere col dilemma. O l'insegnante è capace, o no. Se è capace, comincerà collo scegliere un libro che rappresenti il più che è possibile le sue idee, e che quindi non intralci del tutto la sua opera. All'efficacia dell'insegnamento concorreranno anzi, allora, due forze: quella dell'insegnante e quella del libro, e questo e quello si aiuteranno a vicenda, e, allorchè se ne presenterà l'occasione, ciascuno farà l'errata-corrige all'altro. L'insegnante incapace non potrà, naturalmente, che far male in ogni caso; peggio però farà senza nessuna guida. E neppure si rimedierebbe così alla lamentata disattenzione; chè il lavoro materiale dello scrivere non è nell'alunno quasi mai accompagnato da concentrazione vera. Si andrebbe incontro ad una perdita non indifferente di tempo; si rinuncierebbe al vantaggio di quell'esercizio continuo che conduce gradatamente l'alunno ad intendere anche un libro di scienza. Che dire poi dei tristi effetti che negli insegnanti svogliati produrrebbe la completa abolizione del testo? Chi parlerà più a costoro

(*) V. la relazione della Commissione per i libri di testo per le scuole elementari (*Bollettino* del Ministero della P. I. a. 1894).

degli utimi metodi d'insegnamento, riconosciuti migliori? Quanto alle scuole elementari, la proscrizione del testo d'aritmetica dal corso superiore sarebbe pericolosa anche perchè lascierebbe ai maestri una completa libertà nella scelta d'un libro da poter servire ad essi di guida nell'insegnamento. I maestri hanno tutti, chi più, chi meno, bisogno d'una guida. E potrebbe avvenire, più facilmente di quanto ora non accada, appunto perchè non si eserciterebbe nessun controllo diretto, che molti di essi, o per indolenza, o per ignoranza, o per risparmio di spesa, accettassero per buono qualunque libro, anche pieno zeppo di errori, e ad esso conformassero il loro insegnamento.

Ammesso dunque che, per l'una o l'altra delle ragioni esposte, se non per tutte insieme, ci voglia il testo pel corso elementare superiore, domandiamoci: come dovrà esser fatto un tal libro? Naturalmente, e a questo punto non potremo che trovarci tutti d'accordo, esso dovrebbe svolgere il programma intero, in modo pratico e facile, senza offender la scienza, cui dovrebbe sempre inspirarsi; esser scevro non solo da errori, ma anche da improprietà di linguaggio e da ogni inesattezza; informarsi al metodo oggettivo e sperimentale; dare equo e proporzionato svolgimento alle varie parti; contenere degli esercizi graduati, pratici, interessanti, mai quelli ingegnosamente complicati che spaventano lo scolaro e lo disamorano dallo studio.

Ma, salvo poche eccezioni, i libri che entrano nelle nostre scuole non son fatti così. Si crede da molti che per trattare cose elementarissime basti un po' di pedagogia. Nulla di più falso. Occorre esser veri maestri di metodo e di esperienza; occorre sopratutto esser padroni della materia. La Commissione Centrale dei libri di testo, nell'esame che fece l'anno scorso dei trattati d'aritmetica delle scuole elementari, constatò che fra essi primeggiano per ordine, chiarezza e precisione, per l'appunto quelli che son opera di matematici valenti. E invero, i 12 libri che si approvarono definitivamente portano nomi in generale notissimi anche nel campo scientifico; mentre ben pochi degli autori dei 16 trattati di cui, indulgentemente, si permise l'uso per un anno, figurano nell'annuario della Pubblica Istruzione tra gl'insegnanti di matematiche.

Una caccia piuttosto accanita delle inesattezze e degli errori che ricorrono in tali libri si è andata facendo in questi ultimi tempi. Ne rilevò parecchi gravi il prof. BUSTELLI nella sua opera *l'insegnamento dell'aritmetica e della geometria nelle scuole primarie e popolari* (*); ne feci una lista anch'io alcuni anni sono in un più modesto lavoro (**); se ne sono pubblicati elenchi nel Bollettino dell'Ass. « *Mathesis* » e nel periodico « Il *Pitagora* »; ultimamente ne ho trovata una raccolta più estesa in un recente libro del professore FRIZZO (***).

Passiamo insieme in rassegna alcuni di questi spropositi. I più lamentati, e non pertanto i più sparsi, sono quelli che provengono dalla confusione dei numeri sui quali si opera colle grandezze che

(*) Città di Castello, Lapi, 1889.
(**) *Sull'insegnamento dell'aritmetica pratica nelle scuole primarie*, Fermo, Baker, 1895.
(***) *L'insegnamento della matematica nelle scuole primarie e popolari*, Verona, F.lli Drucker, 1898.

essi rappresentano. Non soltanto chilometri che si moltiplicano per giorni; chilogrammi che moltiplicati per 10, 100, 1000 si trasformano in *hg, dg, g;* metri lineari che moltiplicati per metri lineari si cangiano in metri quadrati; ma, metamorfosi più strane ancora, ettolitri che, divisi, diventano barili; arance che saltan fuori, non si sa come, da divisioni di lire. Nella risoluzione dei problemi si ritorni al ragionamento scritto, valido sussidio anche alla composizione italiana, e si raccomandi sopratutto che, nelle indicazioni delle operazioni, non si scrivano le diverse specie delle grandezze rappresentate dai numeri, se si vogliono evitare tali errori. Mentre le operazioni dell'aritmetica non si fanno o non si dovrebbero fare che sui numeri, i nostri scolari, dice umoristicamente il prof. Bettini, sommano litri come vecchi beoni, sottraggono lire come tanti cassieri, moltiplicano uomini rubando così il mestiere alle loro madri!

Comunissime nei libri destinati alle scuole elementari sono le *false eguaglianze* colle quali si vorrebbero riepigolare delle serie di operazioni.

Ma errori più gravi si commettono in geometria. — Proposti e risoluti da maestri, da libri e da giornali didattici si trovano spesso dei quesiti in cui, dati ad arbitrio due numeri, si chiede l'area del poligono regolare di dato numero di lati, colla condizione che uno di quei numeri sia il valore del lato, l'altro quello dell'apotema, e ciò senza punto *interpellar le parti,* come direbbe il prof. Bustelli, per vedere se esse andrebbero d'accordo. Affinchè nel proporre gli esercizi relativi all'area dei poligoni regolari, il maestro non commetta questi deplorevoli errori sarebbe bene che in ogni libro di testo fosse indicato, per alcuni poligoni regolari, il rapporto tra il valore dell'apotema e quello del lato.

Molti confondono le regole per la misurazione delle superficie dei solidi con quelle per il calcolo dei loro volumi. Ho visto più volte, per es., trovar l'area della superficie laterale della piramide regolare moltiplicando il perimetro della base per metà dell'altezza; e, *viceversa,* trovarne il volume moltiplicando l'area della base per un terzo dell'apotema!

Ma dove si pecca assai più è nelle definizioni di cui voglio darvi alcuni saggi. — *Cilindro circolare è un solido che ha per basi due circoli e lateralmente una superficie curva.* Forse l'autore avrà voluto generalizzare così la definizione per avere il piacere di dire che anche una botte, per es., ha la forma cilindrica! — *Cono circolare è un solido che ha per base un cerchio e lateralmente una superficie curva che va sempre più restringendosi finchè termina in un punto.* Non si può dir meglio di così, se ad ogni costo si vuole che anche un corno, per es., abbia la forma conica! — *Sfera è un poliedro regolare di un numero infinito di facce che saranno tanto piccole da confondersi l'una coll'altra.* Non importa se non si è così in armonia col fatto che di poliedri regolari non se ne hanno che cinque! — Mi pare che questi saggi possano bastare! Ora io domando: ma non sarebbe meglio di non darle affatto, nelle scuole elementari, le definizioni, piuttosto che correr pericolo di metterne insieme come queste? Che male vi sarebbe? Non basta che nella mente degli alunni restino chiari ed esatti i concetti delle varie forme geometriche e le loro principali proprietà, cui si perviene con continue presentazioni e descrizioni delle figure? La definizione scientifica sarà indispensabile nelle scuole secondarie superiori, ove ha da essere il fondamento della ragionata ricerca delle proprietà relative alla figura di cui si tratta. Nelle scuole primarie, ove è da sfuggirsi tutto ciò che è formalismo, essa è inutile, perchè nulla aggiunge in realtà al concetto che l'alunno si è formato, in altro modo, di ciascuna figura. Che importa, ad es., che lo scolaro non sappia recitare una definizione esatta della piramide, quando egli sa rintracciare questo solido in mezzo a molti altri, e quando sa farne, a mano libera, un disegno da cui si scorge che ha conoscenza esatta della figura?

Ma torniamo ai libri di testo. — Come tener conto di tutte le improprietà di linguaggio, di tutte le osservazioni inopportune per un insegnamento primario che in molti di essi si contengono? Si confonde quasi sempre l'*area* colla *superficie,* il *volume* col *solido.* In un trattatello, invece di *misure delle superficie* ho trovato *misure delle aree!* Non si dovrebbe dire neanche *misure dei volumi,* ma *misure dei solidi.* E poichè tra lunghezza e linea, v'è convenzionalmente la stessa differenza che tra area e superficie, tra volume e solido così si dovrebbe dire che il *m,* il *dm* sono *misure lineari,* e non già *misure delle lunghezze.* — In un libretto, in cui l'A., molto inopportunamente, vuol fare sfoggio di erudizione matematica presa senza dubbio a prestito da qualche libro di scienza, ho trovato: *la retta, secondo alcuni valenti matematici, non si può definire; due punti* NON CONSECUTIVI *di una retta la dividono in tre parti;* e perfino: *si badi che una quantità divisa per zero è eguale all'* ∞ ! Non bisogna scherzare coll'∞! Con questa frase, che è del prof. CERRUTI, il professor BUSTELLI sintetizzò le censure contro i concetti nebulosi sempre, morbosi spesso, e, comunque, prematuri in un insegnamento elementare, di poligono infinitilatero, numero infinito di lati infinitesimi, e via dicendo, di cui qualche autore vuol far uso nel parlar di cerchi, di coni, di cilindri e di sfere. — Dalla raccolta di forme erronee ed inesatte che si trova nell'opera citata del prof. FRIZZO, tolgo: In un voluminoso corso di Pedagogia premiato da un congresso pedagogico è riportata la tavola seguente:

$$m^3 = \text{chilolitro} = \text{tonnellata di mare}$$
$$\text{ettolitro} = \text{quintale metrico, ecc.!}$$

Avevo ragione di dire che non basta saper un po' di pedagogia per fare un buon trattato d'aritmetica!

E, da ultimo, per darvi un'idea di quanti e quali errori si possano accumulare in uno stesso libro, vi riferirò alcune delle tante *corbellerie geometriche* messe giù in un trattatello da persona che vive in mezzo ai maestri: da un ispettore scolastico. Non sarà, egregi Colleghi, un *per finire* breve, nè esilarante, ma per questa volta avrete pazienza. Quest'ispettore ha dato anch'egli le definizioni generalizzate del cono e del cilindro: quelle del corno e della botte! «La « superficie è un piano chiuso tra diversi lati. Lo spazio chiuso tra le

« linee di una figura si chiama area. Volendo trovare approssimativa-
« mente l'area d'un piccolo segmento (*spazio* compreso tra una corda e
« il suo arco) basta moltiplicare la corda per metà della saetta. Trat-
« tandosi di grandi segmenti, l'area si ottiene moltiplicando la corda
« per $\frac{3}{4}$ della saetta. Questa regola anzi è preferibile, come quella
« che ci fa avere un valore dell'area del segmento assai prossimo
« al vero. *(Chi si contenta, gode!)*. — La parte più alta della pira-
« mide, che finisce in punta, si chiama vertice, e quelle dove le
« facce si uniscono si dicono i lati. — Il prisma è un corpo termi-
« nato da due basi eguali e da tante facce rettangolari quanti sono
« i lati di queste basi. — Il poliedro si dice regolare, quando ha
« tutte le facce eguali. — Un piano che taglia la sfera passando
« per il suo centro si dice circolo massimo, ... ». — Ma è ormai tempo di passare in più *spirabil aere!*

Questi, egregi Colleghi, sono alcuni degli errori più comuni che compariscono in molti libri destinati a maestri e a fanciulli, errori gravi, come vedete, che gli alunni portano con sè nelle scuole secondarie, e che difficilmente si riescono poi ad estirpare. Or, quali mezzi si dovranno mettere in opera per limitare, più che si può, il danno che essi arrecano? Anche quando si sarà riusciti ad ottenere che nella scuola entrino soltanto i libri buoni, e a ciò penserà la Commissione centrale, rimarranno i giornali didattici, nei quali coloro che si erigono a maestri dei maestri incorrono anch'essi molto spesso negli stessi spropositi. E questi bisognerà tener d'occhio il più che è possibile, e, senza riguardi, mettere all'indice, quando se ne siano riconosciuti i difetti. Ma è necessario che tutti ci sottoponiamo con buona volontà a questo lavoro di depurazione. Non bisogna disdegnare, egregi Colleghi, l'abbiccì dell'insegnamento che, anche in Italia, ha attratto matematici valenti come il Pincherle, il Gerbaldi, il Frattini. Quando si pensi che milioni di persone debbono conoscere le operazioni fondamentali dell'aritmetica, mentre a pochi soltanto può interessare il teorema di Pitagora, ognuno si persuade che è della più alta importanza rivolgere le nostre cure ai primi elementi.

L'Associazione « Mathesis » deve esercitare un'influenza diretta, energica, continua sull'insegnamento della matematica nelle scuole elementari, senza di che essa non potrà mai raggiungere completamente lo scopo per cui è sorta. E per ciò non basta far discussioni tra noi per accordarci sui metodi migliori che si devono seguire nell'insegnare. Occorre che i nostri studi sian fatti conoscere, per la parte che li riguarda, a tutti i maestri. Naturalmente, quest'intento non si potrà raggiungere pubblicando soltanto nel Boll.° di « Mathesis » i resoconti delle nostre adunanze. Ben altro ci vuole! Si tratta, voi lo sapete, di più di 50 mila maestri! Il mezzo migliore potrebbe essere, secondo me, quello d'un periodico d'aritmetica e di geometria fatto esclusivamente per uso degli insegnanti elementari e degli allievi delle scuole normali; periodico che dovrebbe sorgere e vivere sotto gli auspici della nostra Associazione, e in cui i soci più esperti nella didattica delle scuole primarie dovrebbero non soltanto suggerire le norme per un buon insegnamento, ma rilevare altresì le inesattezze e gli errori che ricorrono in libri e periodici, per mettere in guardia i maestri. L'Associazione « Mathesis » non dovrebbe perciò sobbarcarsi ad alcuna spesa; ma dovrebbe, ben inteso, rifuggir anche da qualunque atto che, pur lontanamente, potesse far sospettare essere in noi l'intenzione di fare una speculazione. Se ne affidi la pubblicazione a qualche Casa editrice che si assuma l'obbligo di stampare il giornaletto a suo danno o vantaggio, colla condizione principale che il prezzo d'abbonamento sia minimo, inferiore a quello che si usa per gli altri periodici congeneri. L'autorità di tal periodico non potrebbe esser disconosciuta da alcuno. L'Associazione « Mathesis », benchè non conti tra i soci che pochi insegnanti di scuole normali (6 su 147, e ciò è male), accoglie fortunatamente persone di riconosciuta valentia nella didattica delle scienze esatte, alcune delle quali, non solo per la fama acquistatasi con importanti lavori, ma anche per l'alto posto che occupano, sarebbero in grado di far presto conoscere il periodico, e di assicurarne la vita. Ricordo in special modo il Bustelli, il Valeri, il Frizzo, regi provveditori agli studi. Col concorso di queste forze il nostro intento non fallirebbe!

***

Passiamo alle scuole medie. — Qui, per fare uno studio esatto, ordinato sarebbe bene dividere i libri di testo in vari gruppi, potendo essi riferirsi o all'insegnamento pratico dell'aritmetica dei corsi inferiori, o all'insegnamento razionale, della matematica in genere, di quelli superiori, o anche all'insegnamento pratico-razionale della geometria nelle scuole tecniche e professionali. Ma mi pare che in questo modo il lavoro riuscirebbe assai lungo; e io devo pur pensare, egregi Colleghi, a non annoiarvi troppo! Farò dunque così: fisserò rapidamente alcuni criteri generali che, fin dalle prime pagine, dovrebbero regolare i libri di testo per ciascuno dei tre gruppi; poi parlerò, nello stesso tempo, senza confondere, degli errori scientifici e didattici che si commettono dai libri in genere e in particolare da alcuni cattivi; da ultimo suggerirò quei mezzi che, a parer mio, potrebbero limitare i danni che tali errori arrecano alle scuole.

Poichè l'aritmetica del corso medio inferiore non è, o non dovrebbe essere, che continuazione e compimento delle nozioni già apprese nelle prime scuole, mi pare che per i libri di testo del primo gruppo possa valere, in massima, tutto quanto si è detto per quelli delle scuole elementari. Essi devono prefiggersi il doppio scopo di dare agli alunni in modo pratico, ma pur rigoroso, tutte le cognizioni richieste, e di renderli capaci di poter seguire più tardi, con profitto, il corso razionale degli elementi di matematica.

Quanto agli altri libri, occorre intenderci bene sopra un punto essenziale. Seguiteremo a dire che nell'insegnamento medio superiore vanno osservate tutte le regole di PASCAL (ricordate anche da DE PAOLIS nei suoi *Elem. di Geometria*) fra cui v'è anche quella di non definire alcuna delle cose talmente cognite per se stesse che non vi siano termini più chiari per spiegarle, e di non dimostrare alcuna delle cose talmente evidenti per sè stesse che non vi sia nulla di più chiaro per provarle? Ma i libri di testo non cercano di definire anche le cose che sono o sembrano chiarissime, e, se non ci riescono, non affermano essi, con manifesto rincrescimento, non già che è inutile definirle, ma che non si può o non si sa definirle? Quali proposizioni potrebbero dirsi più evidenti di queste, per esempio: il segmento è invertibile, il cerchio ha un sol centro, che tuttavia si trovano dimostrate nei trattati elementari? Gli sforzi fatti dai migliori autori per accomodare le prime pagine dei loro libri, per cambiar oggi quel che ieri poteva sembrare definitivo, provano che alle suddette regole non si bada più in un corso razionale di matematica elementare. E ad esse non si può, non si deve infatti badare se, come ormai tutti pensiamo, l'insegnamento della matematica razionale deve consistere nel definire colla massima precisione (sia direttamente, sia assegnando un sistema di proprietà dalle quali tutte le altre possano essere logicamente dedotte) tutti gli enti geometrici o analitici che si sottopongono allo studio, e le relazioni tra gli enti stessi, che devono essere il fondamento d'ogni singola teoria; e, come fu anche dichiarato nell'adunanza di Sassari dello scorso aprile, e come fu convenuto in quella di Recanati, nel distinguere le proposizioni in *indeducibili* (di cui deve esser fatta una enunciazione esplicita) e *deducibili*, e non già in *evidenti* e *bisognevoli di dimostrazione*, come si usava una volta. La vecchia distinzione dovrà soltanto esser presa per base in un insegnamento pratico-razionale, com'è quello della geometria nelle scuole tecniche e professionali, giacchè sarebbe vano costringere gli alunni di questi ad esaurire le loro forze e il loro tempo in sottigliezze. Non sarà qui, è vero, del tutto facile distinguere nettamente le proprietà evidenti da quelle che non son tali, e potrà accadere che i libri di testo per tali scuole non vadano completamente d'accordo su ciò. Ma sarà questione di pochi punti, e il buon senso e l'esperienza dell'insegnante vi rimedieranno.

A questi principî fondamentali debbono informarsi i libri di testo delle scuole secondarie, e, mentre per tutti è da richiedersi la massima chiarezza, senza prolissità, per modo che siano alla portata della cultura e dell'intelligenza degli alunni, per quelli destinati all'insegnamento razionale è da esigersi specialmente che non siano mai applicate proposizioni non ancora ammesse o dimostrate; che gli enunciati e le dimostrazioni dei teoremi, non che le risoluzioni dei vari quesiti, siano valevoli per tutti i casi particolari che possono presentarsi, dei quali, se occorre, dovrà esser fatta un'analisi completa; e che le definizioni poste da principio non siano poi dimenticate, per modo che qualche ente abbia più tardi, inaspettatamente, delle proprietà in più o meno di quelle che gli furono accordate nella definizione o che sono conseguenze di queste.

Ora chiediamo: son fatti così i nostri trattati? Si attengono essi tutti a queste norme?

Con frase felice, il mio amico Bettini afferma che, salvo poche rare eccezioni, i trattati scientifici elementari, di qualunque specie essi siano, son tutti buoni ... *se si cominciano a leggere dal II capitolo.* Il guaio maggiore, egli dice, e talvolta unico, si riscontra nel I capitolo. — È proprio così: proprio nei fondamenti peccano, qual più, qual meno, anche molti dei buoni libri di testo. Quelli destinati all'insegnamento medio superiore vi passano sopra un po' leggermente, senza tener conto degli studi più recenti fatti su di essi; quelli del corso inferiore presentano assai spesso l'inconveniente di estendersi troppo su particolari che riguardano la metafisica della scienza.

Recentemente ebbi occasione di riunire insieme alcune obiezioni che si possono muovere contro i principî posti dagli ordinari trattati di geometria razionale elementare(*): non son cose tutte nuove, ma le accennerò tuttavia perchè rientrano nella questione. — Da quasi tutti si comincia coll'ammettere il *postulato degli enti geometrici,* che, così com'è posto ordinariamente, contiene concetti logici inutili o mal determinati. — Vi si dice per es.: lo spazio è omogeneo. Ma che vuol dire *omogeneo? Egualmente costituito,* dicono tutti. Ora, starà bene che il dizionario si esprima così; ma al geometra, che si occupa di enti ideali, a nulla serve il dizionario comune, neppure se esso porta i nomi autorevoli del Fanfani o del Rigutini! Se lo spazio non è che il luogo di cui i corpi occupano una parte, di che cosa sarà costituito? E, ammesso anche che di *qualche cosa* sia composto, quale sarà il significato da darsi a quell'avverbio *egualmente?* Non potrà qui trattarsi se non di eguaglianza geometrica, giacchè è un ente geometrico lo spazio. Ma, a tal punto, è detto forse in che consiste l'eguaglianza geometrica? — Vi si ammette tacitamente il concetto della *divisione in parti.* Ma quando è che un ente è diviso in parti? E perchè alcuni degli ordinari trattati ammettono questo concetto, e poi, dopo essersene valsi, tentano di definirlo per mezzo del punto e del moto? — (A questo punto apro una breve parentesi. Qualcuno forse potrà dire che queste sono pedanterie. No, rispondo subito, non vi sono pedanterie nella matematica razionale. Non si adontino però gli autori dei buoni libri di testo che sono più o meno colpiti da queste osservazioni. Non si riscontrano dei nei anche nelle migliori opere d'arte?). — Si dice da alcuni: corpo è *ogni* parte dello spazio. Ora, volendo che la geometria abbia riscontro negli enti reali, sarà bene chiamar corpo anche una parte illimitata dello spazio, per esempio il diedro, o ciascuna delle parti in cui il piano o la superficie sferica dividono lo spazio? D'altra parte, considerando il corpo come un ente limitato, qual'è

(*) " Il nuovo indirizzo della geometria razionale elementare „ (*Rivista scientifica*, n. XXX, Firenze, 1898).

il concetto che noi abbiamo di esso guardando gli oggetti del mondo esteriore, e definendo la superficie come l'ente che limita o divide in parti un corpo, come si potrà dire che il piano è una superficie se non v'è alcun corpo da esso limitato? — Si dice: sono superficie gli enti che dividono in parti i corpi, sono linee gli enti che dividono in parti le superficie. Ma, come osservò già il prof. BETTAZZI (*), e come osservò anche il prof. CARDOSO-LAYNES, è ciò sempre rispondente al vero? Ad esempio, l'ente che divide una falda dall'altra di una superficie conica è esso una linea? — A proposito del postulato degli enti geometrici, il prof. PEANO (**), dopo aver indicato le difficoltà che s'incontrano nel dare i concetti degli enti geometrici affermò che « queste difficoltà si evitano facilmente « col non parlare di solido, superficie, linea in generale, ma parlando « solamente della retta, del piano, della sfera, . . . cioè di quelle linee « superficie e solidi, che compaiono effettivamente in geometria ele- « mentare, lasciando alla matematica superiore lo studio di questi « enti in generale. Liberatici così dai concetti inutili e mal deter- « minati, l'esame dei concetti fondamentali di geometria acquista « notevole semplicità ».

Non voglio, egregi Colleghi, intrattenervi su altre inesattezze (del genere per es. di questa: diconsi corpi i luoghi occupati dagli enti materiali: dicesi che due corpi coincidono se occupano lo stesso luogo; da cui discenderebbe: *due luoghi coincidono se occupano lo stesso luogo*) inesattezze che spesso s'incontrano nei primi capitoli di geometria, e neppure sull'obbiezione che potrebbe muoversi contro la definizione: *si dice che due figure coincidono quando ogni punto di una qualunque di esse appartiene all'altra,* in seguito alla quale, per esempio, il sistema dei cerchi concentrici e complani coinciderebbe con un fascio di raggi dello stesso piano; e perciò, secondo tali autori, queste figure dovrebbero ritenersi eguali. Ma c'è una questione assai importante sui fondamenti della geometria, e le discussioni che si son fatte intorno ad essa non possono non avere un'eco in questo Congresso. Intendo dire di quella relativa alla definizione di eguaglianza basata sul postulato del movimento, in cui si riscontrerebbe un errore logico grave, nientemeno che una petizione di principio. E che effettivamente la petizione di principio vi sia è stato dimostrato nel modo il più chiaro, per es. dal prof. MARANGONI (***); lo dimostra indirettamente anche il fatto che qualche trattatista ben noto ha finito col non dare più affatto alcuna definizione di eguaglianza, cadendo però così in altro errore grave, più grave ancora di quello che alcuni commettono nel porre a capo della teoria dell'equivalenza la così detta definizione: *due superficie si dicono equivalenti se hanno eguale estensione,* cui non corrisponde nessun concetto geometrico determinato. Se adunque, l'ordinario postulato del movimento ci conduce inesorabilmente ad un errore logico quando in base ad esso si

(*) " I postulati e gli enti geometrici " (*Periodico di Matematica*, a. I).

(**) Nella sua nota: " Sui fondamenti di Geometria " (*Rivista di Matematica*, Vol. IV, pag. 51).

(***) *Il concetto di uguaglianza in Geometria e gli Elementi* del prof. Veronese (Padova, Fratelli Gallina, 1897).

vuol definire l'eguaglianza delle figure, e se, come dice il prof. LORIA (*), per nessun conto, nell'insegnamento della matematica razionale, il rigore scientifico deve cedere dinanzi al desiderio di evitare le difficoltà, perchè non ci poniamo d'accordo nell'accettare, per quanto è possibile, le modificazioni che a tal riguardo sono già state introdotte nei fondamenti? Non soltanto la petizione di principio si eviterebbe, ma qualche altro guaio ancora.

A perfetta imagine e somiglianza di quelli di geometria razionale sono fatti i primi capitoli di molti trattatelli che dovrebbero servire per uso delle scuole professionali e tecniche. E questo è, senza dubbio, un errore didattico grave. Come pretendere che dei giovanetti, usciti da poco dalle scuole elementari, s'innamorino dello studio della Geometria, se si comincia e si seguita a infastidirli con considerazioni, di cui essi non arrivano a comprender l'importanza? Ma, se presteranno attenzione, essi non potranno trattener le risa, quando si vorrà loro spiegare che se due rette d'un piano hanno un sol punto comune i raggi di ciascuna sono da parti opposte rispetto all'altra; o, come trovo perfino in qualche libro, quando si vorrà loro dimostrare che il segmento è invertibile!

Quanto ai libri d'aritmetica e d'algebra rarissimi sono quelli nei quali il concetto di numero, le relazioni fondamentali di eguaglianza e diseguaglianza, le definizioni delle varie operazioni sieno date esattamente, volta per volta, per ogni ente che si pone in campo, in guisa che si possano poi applicare con rigore le regole del calcolo logico. Benchè abbastanza si sia detto e ripetuto ormai su quei *non sensi* (come li chiama il prof. BURALI-FORTI), ai quali si suol dare ad esempio il nome di definizione di numero intero, di eguaglianza, ecc.; benchè si sia indicata chiaramente la via che si deve seguire per evitarli, essi seguitano generalmente ad apparire nelle prime pagine dei trattati più recenti e anche nelle nuove edizioni dei vecchi. In libri d'aritmetica pur buoni per altre ragioni si trova per es.: *Numero (intero) è una parola che esprime quante cose sono in una collezione.* Ma, se i numeri non sono che parole, starà bene di parlar poi di parola maggiore di un'altra, di parole somma, differenza, prodotto, quoto di altre parole? — *Il numero è un ente ideale che serve a rappresentare una grandezza in relazione a una grandezza unitaria.* Come potrà esser presa per base d'una teoria una definizione così vaga? — In qualche trattato d'algebra si chiama in aiuto l' ∞ *(numero maggiore di qualunque numero dato!)* per poter dire quando un numero reale è maggiore di un altro o per definire la somma di due numeri reali. *Conveniamo di dir maggiore di un numero qualunque altro che* CADE *tra il primo e* $+\infty$. *Diremo somma di un numero con uno positivo quel numero cui si perviene contando in seguito al primo e verso* $+\infty$ *tanti termini quante sono le unità del secondo.* — Per giustificare che di due numeri negativi è maggiore quello che ha valor numerico minore, si aggiunge ordinariamente:

(*) " Della varia fortuna d'Euclide in relazione con i problemi dell'insegnamento geometrico elementare " (*Period. di Mat.* a. VIII, p. 81).

invero, chi ha 100 di debito è più ricco di chi deve 200. Ora, ciò può far colpo sugli alunni, ma non giustifica nulla, perchè, se alla frase *più ricco* si sostituisce l'altra *meno povero,* l'esempio non è più in accordo colla relazione di diseguaglianza. — E, per ragione analoga, neppure la regola dei segni della moltiplicazione può esser giustificata, come fa qualcuno, dall'esempio di un problema.

Fatte queste considerazioni generali sui libri di testo in rapporto ai fondamenti della scienza, esaminiamoli nello svolgimento delle varie parti per vedere se si attengano alle norme indicate.

Di proposizioni enunciate e dimostrate senza la necessaria cura dei casi particolari ne ho trovate un po'dappertutto, tanto che tempo fa potei farne una raccolta, copiandole dai libri di testo più comuni. In parecchi trattati di geometria ho trovato per es. gli enunciati seguenti.

In un triangolo, la bisettrice di un angolo esterno INCONTRA *il prolungamento del lato opposto in un punto tale che le sue distanze dagli estremi del lato sono proporzionali agli altri due lati;*

Il luogo dei punti che hanno da due punti distanze proporzionali a due segmenti dati è la circonferenza, ecc. (dove si passa sotto silenzio il caso in cui i 2 segmenti dati sono eguali);

Se una retta è parallela ad un'altra di un piano, la prima è parallela al piano (naturalmente dovrebbe dirsi ... *la prima è parallela al piano o giace in esso.* Non è quindi esatto il dire come fa qualcuno: *la condizione necessaria e* SUFFICIENTE *perchè una retta sia parallela ad un piano è che sia parallela ad una retta del piano*);

Due angoli coi lati paralleli giacciono in piani paralleli (dovrebbe aggiungersi: *o in uno stesso piano.* Siccome gli angoli potrebbero esser piatti, questo teorema dovrebbe, a rigore, essere enunciato così: *due angoli non piatti coi lati paralleli giacciono in uno stesso piano o in piani paralleli,* giacchè due angoli piatti coi lati paralleli in generale giacciono in due piani che si tagliano);

Una retta non può avere in comune col contorno di un poligono convesso più di due punti. (Si deve dire: *una retta non può avere in comune col contorno di un poligono convesso più di due punti, se non ne contiene un lato);*

La superficie descritta da un segmento in una rotazione intorno ad un asse con cui sta in uno stesso piano senza essere tagliato è equivalente al rettangolo della proiezione del segmento sull'asse e della circonferenza che ha per raggio, ecc. (Fa eccezione il caso in cui il segmento è perpendicolare all'asse di rotazione);

E ho trovato anche: *le diagonali d'un parallelogrammo o d'un parallelepipedo son diseguali; la proiezione di una retta su di un piano è un'altra retta; per tre punti passano innumerevoli sfere; per i vertici d'un parallelepipedo retto passa sempre una sfera e una sola; ogni piano che passa per una di due rette sghembe taglia l'altra; le tangenti comuni a due cerchi che si tagliano s'incontrano in un punto della retta dei centri;* ecc.

Questi esempi bastano per mostrare quanta cura si deve avere nel porre tutte le limitazioni necessarie, affinchè gli enunciati dei teoremi non soffrano eccezioni. Ma non si devono porre peraltro delle limitazioni inutili. Per es. il teorema: *se due linee rette che si incontrano sono parallele a due altre che pure s'incontrano ma non nel medesimo piano, l'angolo contenuto dalle prime due è eguale all'angolo contenuto dalle altre due* (Euclide, L. XI, prop. X), così com'è enunciato, potrebbe far credere all'alunno che esso valga solo pel caso in cui le rette non siano nel medesimo piano (tanto più che in geometria piana Euclide non dimostra il corrispondente teorema).

Ecco poi alcuni esempi di dimostrazioni geometriche in cui non sono contemplati tutti i casi che possono darsi. — *Un quadrangolo convesso ABCD è circoscrittibile se la somma di due lati opposti è eguale alla somma degli altri due.* Questo teorema si dimostra da molti così: « il cerchio tangente ai lati CB, BA, AD non sia tan- « gente a CD. Si conduca da C la tangente al cerchio che *incontri* « il lato AD in D', ecc. » Contro questa dimostrazione si può obiettare: e se la tangente condotta dal punto C non incontra il lato AD? Evidentemente, per questo caso, la dimostrazione non reggerebbe più. Alcuni autori conducono la tangente parallela a CD, e la dimostrazione che ne risulta è esente da qualsiasi obiezione. — Qualche autore dimostra che *archi diseguali sottendono corde diseguali nello stesso senso,* e pone come corollario: *il diametro è la massima corda.* Ciò non è esatto, giacchè la dimostrazione ordinaria del teorema pel caso di due corde (non diametri) non si adatta al caso in cui una di esse è un diametro. Per la stessa ragione non è esatto dedurre che il diametro è la massima corda dal teorema: *la corda più vicina al centro è la maggiore.* Bisogna che i teoremi relativi alle corde siano dimostrati anche pel caso dei diametri, se valgono anche per questo caso, o enunciati in modo da escludere questo caso, se per esso non valgono, o se, pur valendo, si preferisce di trattare il caso particolare separatamente. — Parecchi autori, dopo aver distinto i poligoni in *intrecciati* e *non intrecciati,* in *concavi* e *convessi,* non fanno alcuna avvertenza sulla specie dei poligoni che vogliono poi studiare, e danno più tardi dei teoremi sui poligoni in generale che non valgono però per tutti i poligoni, o che, se valgono per tutti, sono ordinariamente dimostrati soltanto per quelli convessi. Per es., quegli autori che non dichiarano esplicitamente di limitarsi ai poligoni convessi non potrebbero poi affermare in generale che *unendo un punto interno di un poligono con tutti i vertici, il poligono resta decomposto in triangoli; che le diagonali uscenti da due vertici omologhi di due poligoni simili li dividono in triangoli simili;* ecc. — Qualche autore afferma che l'ordinaria costruzione di un poligono in altro equivalente con un lato di meno si può applicar sempre anche se il poligono non è convesso. Ciò non può dirsi; giacchè se C, D, E sono tre vertici consecutivi di un poligono non convesso, e se dal vertice intermedio D si conduce la parallela alla diagonale CE, può darsi che questa parallela non incontri nessuno dei lati del poligono che hanno le estremità in C e in E, o che li incontri soltanto dopo aver incontrato altri lati del poligono. E in questi casi l'ordinaria costruzione non è applicabile. — In un libro di testo molto diffuso trovo pel teorema: *due angoli coi lati egualmente diretti sono eguali,* una dimostrazione basata sull'eguaglianza dei triedri, che quindi vale solo pel caso in cui i due angoli sono situati in piani diversi. Seguendo tal libro rimane dubbio se due angoli complani coi lati egualmente diretti siano eguali, giacchè lo stesso A. non dimostra affatto il teorema corrispondente in Geometria piana.

Poca cura dei casi particolari si ha anche nell'aritmetica e nell'algebra. Molti autori non considerano affatto il caso del divisore nullo (nonostante quanto giustamente disse il prof. BETTAZZI nel suo articolo: *sull'impossibilità di certe divisioni e sull'equivalenza delle equazioni* (*)), nè tengono conto di questo caso in certi teoremi, i quali appunto si fondano sulla divisione. Si dice senz'altro $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ senza dire che cosa succede se $a=0$; si ripete da qualcuno, pel teorema relativo al resto della divisione per $x-a$, la vecchia dimostrazione basata sopra una identità che si fà valere senz'altro, per $x=a$; per risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} a\,x^2+b\,xy+c\,y^2&=d,\\ a'x^2+b'xy+c'y^2&=d' \end{aligned}$$

si pone $y=xz$, e nessun autore avverte che, allorchè è possibile la ipotesi $x=0$, non esiste corrispondentemente un valore finito per l'incognita ausiliara z (cosicchè quando sia $cd'=dc'$, non è lecito porre $y=xz$, chè, in tal caso, si perderebbero le soluzioni $x=0$, $y=\pm\sqrt{\frac{d}{c}}$). — Parecchi danno la definizione: *la potenza con esponente zero di una base qualunque è eguale all'unità*, senza dir nulla esplicitamente pel caso in cui la base è eguale a zero. — Da alcuni si dice: *elevando ambo i membri di un'equazione alla stessa potenza s'introducono soluzioni estranee*, mentre ad es. elevando al quadrato ambo i membri dell'equazioni:

$$\begin{aligned} \sqrt{x}&=4,\\ 2x+3&=-2x+7 \end{aligned}$$

si ottengono equazioni equivalenti. — Altri dicono: *elevando alla stessa potenza ambo i membri di un'equazione s' introducono* IN GENERALE *soluzioni estranee*. La frase *in generale* che figura in questo enunciato meriterebbe alcune considerazioni, giacchè, come osservò anche il prof. SEGRE, essa viene spesso usata nei trattati elementari, senza che se ne diano sempre le spiegazioni necessarie. In questo teorema non si trova a proposito, se non si è svolta la teoria dei numeri complessi. Invero nel campo dei numeri reali, le due equazioni:

$$A=B\,;\quad A^m=B^m$$

sono equivalenti se m è dispari; e se m è pari, la seconda, oltre alle soluzioni della prima, avrà anche quelle dell'altra $A=-B$, posto che questa ne abbia. Non è vero dunque che *in generale* la seconda equazione ha altre soluzioni oltre quelle della prima. E come

(*) *Periodico di Matematica*, anno I.

se si dicesse che un numero intero qualunque è in generale pari, mentre v'è egual probabilità che esso sia pari o dispari.

La frase *in generale (il più delle volte, ordinariamente,)* che spesso accompagna una proposizione matematica, è posta per significare che c'è qualche caso speciale in cui la stessa proposizione non ha luogo. Quindi il ragionamento che si deve fare per giungere a stabilire con tutta esattezza la proposizione di cui si tratta si deve comporre di due parti, nella prima delle quali s'ha da provare che nel *maggior* numero dei casi la proprietà sussiste, mentre nella seconda si devono indicare tutti i casi in cui essa non sussiste egualmente. Occorrerebbe però, se non erro, che la frase *in generale* fosse matematicamente definita, in guisa che non si avesse alcun dubbio sul suo significato. Qualcuno potrebbe osservare che è inutile dare per essa una definizione apposta, e che basta prendere il significato che le attribuisce il dizionario. Se ad es. è dato il numero 99, e a rappresenta un numero intero sottoposto alla condizione di non superare 100, vi sono 98 casi nei quali il numero a è minore di 99 e 2 soltanto in cui ciò non ha luogo. Quindi in questo esempio si ha *in generale* $a > 99$, e in particolare $a \geqq 99$. Ma non sempre nello studio dell'algebra si può, secondo me, decidere se in una data questione il numero dei casi, in cui succede un certo fatto, sia maggiore del numero di quelli in cui lo stesso fatto non accade. Se a e b sono due numeri dati arbitrariamente, v'è un numero *non finito* di casi in cui essi sono diseguali, e anche un numero non finito di casi in cui sono eguali e, nello studio elementare dell'algebra, non si dice quale dei due sia il maggiore.

Riguardo alle definizioni trovo che, dopo averle poste, spesso alcuni autori dimenticano quanto hanno detto in esse.

Esempi. Tempo fa (*) feci osservare che, mentre secondo tutti gli autori l'equazione apparisce dapprima come il contrapposto della identità, più tardi il nome di equazione viene esteso tacitamente anche all'eguaglianza identica. E proposi perciò di dare per l'equazione e per i sistemi di equazioni delle definizioni più larghe.

Tutti gli autori da me consultati dicono che il simbolo $\sqrt[n]{a}$ rappresenta *ogni* numero la cui potenza n^{ma} è eguale ad a. Ma, dopo aver dato questa definizione, senza aggiunger più nulla sul significato di $\sqrt[n]{a}$, dichiarano ad es. che l'equazione

$$\sqrt{x} = -4$$

non ha nessuna soluzione. — Il prof. BETTINI rileva giustamente che, stando attaccati alla locuzione: *il 1° e il 2° termine di una proporzione si dicono inversamente proporzionali al 4° e al 3°*, non sarebbe poi vero che, *se due corde di un cerchio, si tagliano, i segmenti dell'una sono inversamente proporzionali a quelli dell'altra.* — Il professore CARDOSO-LAYNES osserva che parecchi autori, dopo aver detto

(*) *Periodico di Matematica*, anno XII "Sulle definizioni di equazione e di sistemi di equazione".

che la retta è *indefinita,* definiscono le parallele *due rette complane che* PROLUNGATE INDEFINITAMENTE *non s' incontrano.* — Ma una mancanza di rispetto ancor più grave alle definizioni è questa. Un libro di testo dà per le parallele la definizione ordinaria (rette complane che non s' incontrano) e poi, poco dopo, pone e dimostra il *teorema* (!): *due rette parallele giacciono sempre in uno stesso piano.*

Molto spesso si applicano proposizioni non ancora enunciate o dimostrate. Esempi. Parecchi autori di Geometria dimostrano l'equivalenza dei parallelogrammi di egual base e altezza applicando tacitamente il postulato d'Archimede che enunciano più tardi. — Il prof. BETTINI ricorda che in alcune aritmetiche, per dimostrare la regola del m. c. m. si applica il teorema non ancora enunciato nè dimostrato: se un numero divide un prodotto di due fattori ed è primo con uno di essi, divide l'altro. — Si segue ancora da qualcuno la vecchia dimostrazione relativa alla generatrice d'una frazione decimale periodica, applicando a questa la regola (non dimostrata) della moltiplicazione di un numero decimale per una potenza di 10. — In un trattato di geometria si ammette che nessuna parte di un angolo è eguale all' intero e si pretende di ricavarne che l'angolo è invertibile. Ma in che modo? Se l'angolo (ab) non si potesse far coincidere con (ba) che cosa avverrebbe? Che uno dei due angoli (ab) e (ba) sarebbe eguale ad una parte dell'altro; ma non si contradirebbe la proprietà ammessa che l'angolo non è eguale ad una *sua parte.* Neppure dal postulato dell'angolo si può, secondo me, ricavare, come alcuni fanno, che il segmento è rovesciabile. Si dice: « Facciasi ruotare il segmento AB in un piano passante per esso « una volta attorno ad A, un'altra volta attorno a B. Sia C uno « dei punti comuni alle circonferenze descritte da A e B. Invertendo « l'angolo CAB, il punto B va in C, e C in B, perchè i due seg- « menti AB, AC sono due posizioni di uno stesso segmento. Così il « segmento BC s' inverte, e poichè esso non è che una posizione « del segmento AB, ne segue che AB è invertibile ». Ora si può obiettare che, affermando che dopo il secondo movimento il punto C va in B, si viene ad ammettere che il segmento AB non può coincidere con una sua parte, e quindi che nessun segmento è eguale ad una sua parte, proprietà che è data in seguito come corollario.

Seguitando la rassegna degli errori e delle inesattezze più comuni, credo necessario, egregi Colleghi, richiamare la vostra attenzione anche sui seguenti.

In parecchi trattati d'algebra elementare si fa la convenzione: *quando una frazione, per tutti i valori delle lettere che essa contiene assume un medesimo valore* K, *e per valori particolari delle stesse lettere assume la forma* $\frac{0}{0}$, *si ammette che alla frazione spetti il valore* K *anche per questi valori particolari delle lettere.* Questa convenzione è pericolosa. Difatti in un libro di testo (che non è poi il solo) si dice ad esempio: « Risolvendo l'equazione:

$$« \qquad \frac{a^2}{x-1} = \frac{a^3 + 2x - 1}{x^2 - 1} - \frac{a}{x+1},$$

« si ha:

$$x = \frac{a^3 - a^2 + a - 1}{a^2 + a - 2}$$

« e supposto $a = 1$ si avrebbe:

$$x = \frac{0}{0};$$

« ma i due termini della frazione son divisibili per $a-1$, per cui « essa si riduce ad

$$x = \frac{a^2 + 1}{a + 2}$$

« e per $a = 1$ si ottiene $x = \frac{2}{3}$ ». Ora io osservo che per $a = 1$ la equazione diventa:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x+1},$$

la quale in realtà è indeterminata.

Il prof. Bettini fa notare che ordinariamente il segno $=$ separa numeri o espressioni eguali soltanto approssimativamente, per es.:

$$\sqrt{2} = 1{,}41,$$
$$\log 2 = 0{,}3010300.$$

Nell'ordinario linguaggio algebrico s'incontrano parecchie inesattezze. Quasi tutti gli autori, per es., denominano le potenze secondo i loro esponenti. Ciò può dar luogo a qualche equivoco. Ognuno vede subito infatti che le frasi *potenze crescenti, potenze decrescenti*. invece di potenze con esponenti crescenti o decrescenti, possono indurre l'alunno a credere che il valore di una potenza debba necessariamente aumentare o diminuire col crescere o diminuire dell'esponente. Ad errori analoghi possono condurre le frasi *potenza intera, frazionaria, positiva, negativa, pari, dispari, massima, minima*, ecc., invece di potenza con esponente intero, frazionario, positivo, ecc. Che cosa possono pensare per esempio i nostri alunni di un teorema come il seguente, che tolgo da un trattato d'algebra: *tutte le potenze positive o negative di un numero positivo sono positive?* Benchè usate da tutti gli autori da me consultati, non credo possano essere giustificate in alcun modo le frasi: *numero piccolo a piacimento, numero sufficientemente grande, numero piccolissimo*, ecc., che specialmente si incontrano nella teoria degl'irrazionali e in quella dei limiti. Anzitutto queste frasi non sono necessarie. Invero, allorchè nella teoria degl'irrazionali si dimostra, per esempio che una certa differenza può esser minore di qualsivoglia numero (positivo), s'intende che la differenza stessa può esser minore di un numero *anche piccolissimo*, se la frase *anche piccolissimo* avesse un significato. Ma quali sono i numeri piccolissimi? Quali i grandissimi? Nè si dica che l'uso di queste frasi sia consigliato da ragioni didattiche, perchè si può anche osservare che gli alunni, usandole, possono pervenire alla falsa conclusione dell'esistenza di numeri assolutamente piccolissimi o grandissimi.

Non posso tacere d'un grosso errore trovato in un trattato dovuto a persona che ha nome molto conosciuto tra gli autori di libri di testo. L'A., dopo aver detto che le definizioni non dovrebbero contener nulla di *sovrabbondante* (è questa una questione di molta importanza in cui entrerei volentieri se non avessi il timore di uscir fuori d'argomento) dice che, per ragioni di opportunità didattica, una buona definizione può anche contenere qualche cosa di più di quanto è strettamente necessario, com'è ad esempio quella che ordinariamente si dà pel poligono regolare, mentre volendo star proprio alla lettera del concetto logico e rigoroso di definizione bisognerebbe dire: *un poligono di* n *lati chiamasi regolare quando è equilatero ed ha* n — 3 *angoli consecutivi eguali*. Ciò è falso manifestamente, chè per esempio per $n = 4$ si avrebbe che un quadrangolo è regolare se è equilatero.

Poichè risolvere un sistema di equazioni significa trovarne *tutte* le soluzioni, è grave errore se in pratica si trascurano alcune di esse. Nella raccolta degli esercizi dell'*Heiss* sono molti errori di questo genere, che si trovano ripetuti in parecchi dei nostri trattati d'algebra. Si dice per esempio che il sistema:

$$\begin{aligned} xy + yz + xz &= 3xyz, \\ yz + 2xz + 3xy &= -4xyz, \\ 3xy + 2yz + xy &= 4xyz, \end{aligned}$$

ha due soluzioni una delle quali è $x = y = z = 0$ e l'altra si ottiene col dividere ambo i membri delle 3 equazioni per xyz; mentre il sistema ha anche tutte le soluzioni che si ottengono col dare valori eguali a zero a due qualunque delle tre incognite, e un valore qualsivoglia alla terza.

Ma questi errori sono ben poca cosa in confronto di altri grossolanissimi che compariscono in certi libri. Alcuni trattatelli di geometria non si contentano, per esempio, d'insegnare che *dai postulati e dalle definizioni si deducono gli assiomi; che se una retta ha due punti in un piano coincide con esso; che l'angolo piatto divide il piano in due parti eguali; che il rapporto di due grandezze omogenee* A *e* B *è il loro quoto* A : B (A : B *il loro rapporto diretto,* B : A *il loro rapporto inverso*), ecc.; ma pretenderebbero anche di dimostrare che *da un punto si può condurre una sola parallela ad una retta* (senza premettere altro postulato per la teoria delle parallele); e perfino, come fa osservare anche il prof. CARDOSO-LAYNES, di estrarre la radice quadrata non da numeri ma da grandezze, giacchè dalla relazione geometrica:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$

ricavano:

$$BC = \sqrt{(AB)^2 + (AC)^2},$$

senza aver trattato prima della misura delle superficie. Si può avere indulgenza per tali libri? Che dire poi di altri destinati ad insegnamento più elevato, qual'è quello del liceo o dell'istituto tecnico, nei quali non solo manca il rigore logico, ma sono anche dimenticati i precetti più elementari della grammatica? In una *seconda edizione* MIGLIORATA di un trattato d'algebra tolgo per esempio. *Il simbolo* 0 *lo considereremo definito dall'eguaglianza* $(+1)+(-1)=0$ il *quale* (!) *separa i numeri positivi dai numeri negativi. Se da* 5 *si voglia togliere* -8, *dopo aver contato da* 1 *a* 5 *nel senso positivo, si debbono nel medesimo senso contare altre* 8 *unità, perchè se per togliere le unità positive si deve tornare indietro, per togliere quelle negative bisogna che si prosiegua in avanti:* $a+b$ *significa contare* a *unità nel senso positivo a cominciare da* 1 *e proseguire contando altre* b *unità e si arriva così a trovare* $a+b$ *unità.* Vi si confondono spesso i numeri coi loro valori assoluti: *Per far la riduzione dei termini simili, si trova prima la somma dei coefficienti positivi, poi quella dei negativi, dalla maggior somma si toglie la minore,* ecc. Vi si dimostra la proprietà distributiva della moltiplicazione $(a-b+c)\,m=am-bm+cm$ pel solo caso in cui m è intero (va notato che nella dimostrazione data dall'A. si legge: *se* m *è negativo, i segni dei termini* am, — bm, + cm *cambiano, perchè il moltiplicando deve ripetersi come addendo* m *volte in senso opposto.* — Per dimostrare che (1) $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}$ si dice: *è chiaro che se due quantità sono eguali, le loro potenze* n^{me} *sono eguali, quindi il teorema rimane dimostrato, se, elevando alle* n^{me} *potenze i due membri della* (1) *si hanno quantità eguali.* E giù di questo passo: *una eguaglianza algebrica non si altera se ad una lettera si sostituisce un'altra; due espressioni diconsi eguali, se si possono ridurre a due numeri eguali in valore e forma; se due potenze di grado pari sono eguali, le radici sono eguali* SOLAMENTE *in valore assoluto; se un'equazione contiene più radicali, questi spariscano coll'inalzare successivamente a quadrato ambo i membri delle successive equazioni; come non havvi nessuna relazione di eguaglianza e di diseguaglianza tra i numeri razionali e gl'irrazionali, così non può esservene tra i reali e gl'immaginari; affinchè una equazione di 2° grado abbia reali ambedue le radici, è necessario che i segni dei suoi termini facciano una variazione e una permanenza; se ciascun membro di un'eguaglianza si compone di un termine razionale e di un termine irrazionale, saranno eguali i razionali tra loro e gli irrazionali tra loro; le potenze negative di un numero maggiore di* 1 *decrescono col crescere dell'esponente;* ecc. ecc. Eppure, per quanto mal fatto, non è questo il peggiore dei trattati d'algebra elementare. Ne ho avuto uno nuovo in questi ultimi giorni, al quale non si può davvero augurare di giungere alla seconda edizione! L'A. dà per la grandezza la definizione di Grassmann e poi dice subito: *la grandezza di una quantità si ottiene misurandola;* afferma che *i numeri negativi sono la manifestazione di un errore commesso nell'accennare ad un'operazione di addizione e sottrazione mediante una locuzione impropria; che il limite di una quantità è quella quantità che si avvicina ad un'altra più di qualunque altra;* non dà alcun teorema sulla equivalenza delle equazioni, ma dice soltanto che la *soluzione* della equazione è appoggiata a questi assiomi: la somma delle parti è eguale al tutto; due quantità eguali ad una terza sono eguali tra loro; eseguendo identiche operazioni in entrambi i membri di una eguaglianza, l'eguaglianza non si altera; non tratta affatto la teoria degli irrazionali; chiama *rapporto* il confronto di due quantità; ecc.

Ma è ormai ora di terminare questa rassegna!

Indicati i mali, resta suggerirne i rimedi. Ecco il compito più arduo, egregi Colleghi! Anche pei medici la terapia delle malattie è sempre più difficile della diagnosi. E, giacchè ho nominato medici e malattie, permettetemi di classificare gli errori commessi dagli alunni in *sporadici* ed *epidemici*, con due brutte parole tolte dalla scienza medica. I primi dirò quelli che l'alunno fa da sè, spontaneamente, senza che ne abbia colpa nessuno fuori che lui. Esempi: $2^3 = 6$; i lati di un triangolo stanno tra loro come gli angoli opposti. A questi errori l'alunno è trascinato forse dall'abitudine di semplificare il più che è possibile; potendosi ritenere più semplice che 2^3 sia eguale $2 . 3$ che a $2 . 2 . 2$; più semplice che i lati siano proporzionali agli angoli opposti che ai seni degli angoli opposti. Epidemici dirò tutti gli altri errori, dei quali causa principale è precisamente il libro di testo. Veramente, a rigore, la tesi che devo trattare vorrebbe che io non parlassi che di questi ultimi, giacchè degli altri non è causa il libro. Ma che male vi sarà se dirò due parole anche di questi?

La cura per gli errori sporadici deve essere specialmente preventiva e si può riassumere così: premunire continuamente gli alunni contro gli errori stessi. Il medico curante non sia soltanto il maestro; ma un po' anche il libro. Un trattato recente di Geometria ha cominciato col dare il buon esempio, sottoponendo agli alunni esercizi utilissimi nell'intento di non farli cadere in circoli viziosi, o in altri errori logici. Ma io crederei che si dovesse far di più. Non potrebbe il libro di testo contenere opportune avvertenze là dove si sa che gli alunni sono più facili a cadere in errori? Se, per esempio, non appena dimostrato il teorema: in un triangolo a lato maggiore è opposto angolo maggiore, si domanda agli alunni che cosa succede degli angoli opposti quando un lato sia doppio di un altro, molto probabilmente parecchi risponderanno che l'angolo opposto al primo è doppio di quello opposto al secondo. Ebbene, perchè non premunirli subito contro questo probabile errore? Perchè non aggiungere, sia pure come esercizio, che se un lato di un triangolo è doppio d'un altro, l'angolo opposto al primo è più del doppio dell'angolo opposto al secondo? Avvertiti così, nello stesso modo, in ogni singolo caso, gli alunni cadranno più difficilmente in errori; se poi vi cadranno, la loro colpa sarà maggiore.

Quanto agli errori epidemici, è assai più difficile indicarne la cura. Il testo unico? Guai! Sarebbe un grave inciampo, la fine quasi per la produzione scientifico-didattica; farebbe strillar troppo; non soddisferebbe tutti i gusti. E poi, qual libro sarebbe superiore ad ogni critica? Anche quelli che, nei fondamenti e nel metodo, non lasciano nulla a desiderare, hanno qualche difetto: per es. quello di non aver saputo o potuto ancora conciliare completamente la scienza colla didattica.

Dunque il testo unico, no. Ma, allora, che cosa fare perchè nelle scuole entrino soltanto i libri migliori? Il prof. Cardoso-Laynes ci proporrebbe di nominare una commissione permanente di una ventina di membri almeno da scegliersi tra i soci o i non soci di « Mathesis, » che abbia l'ufficio di compilare ogni anno un elenco di libri di testo da potersi adottare utilmente. Ma! E la Commissione governativa? Se la nostra procederà completamente d'accordo con questa, la sua opera sarà inutile; e se vi sarà disaccordo? Cosa diranno quegli autori che, approvati da una delle due Commissioni, saranno bocciati dall'altra? E poi non pare che, col sottoporre agli insegnanti la lista dei libri di testo, si venga ad urtare un po' la loro suscettibilità, perchè, in certo modo, si verrebbe a ritenerli incapaci di fare una buona scelta da sè?

Nell'adunanza di Torino del febbraio scorso fu approvata la proposta di far pratiche perchè le relazioni della Commissione per la revisione dei libri di testo vengano pubblicate in un giornale, dove ogni professore possa esporre la propria opinione in proposito. Si può tentare di ottenere questo. Ma dubito fortemente che si riuscirà nell'intento. La Commissione dei libri di testo per le scuole elementari ha già espresso il suo parere negativamente a tal riguardo.

Ecco quanto proporrei io. L'Associazione « Mathesis » pubblica attualmente, ogni due mesi, un Bollettino, e le notizie che esso porta, propagate dai soci, riprodotte in parte in altri giornali, vengono direttamente o indirettamente a conoscenza della maggioranza degli insegnanti delle scuole medie. Questo Bollettino dovrebbe essere pubblicato più spesso, se è possibile ogni mese, e lasciando da parte le cose meno necessarie, dovrebbe ogni volta dedicare una parte agli studi critici sui libri di testo. Francamente, senza riguardi ad amicizie, senza livori di parte, animati soltanto dal bene inseparabile della scienza e della scuola, gl'insegnanti di buona volontà pubblicherebbero in questa rubrica gli elenchi degli errori più gravi, coi nomi degli autori che li hanno commessi. Non fu consigliata e già messa in pratica, con vantaggio grande degli alunni, l'idea di pubblicare elenchi di errori sporadici? Perchè non si ha da fare altrettanto per quelli epidemici? Il lavoro, che potrebbe essere iniziato anche subito, riuscirebbe senza dubbio utilissimo a tutti. A chi lo fa, perchè l'esame critico di un trattato è ottimo esercizio per la mente; agli insegnanti tutti, perchè potrebbero più facilmente procedere poi alla scelta del testo o guardarsi dagli errori che si trovassero in quello già adottato; agli autori, perchè in base a quegli elenchi potrebbero correggere e migliorare le loro opere.

Prof. Corrado Ciamberlini.

RELAZIONE SULLA QUARTA QUISTIONE

proposta dal Comitato dell'Associazione " MATHESIS „

Ripartizione dell'insegnamento della matematica elementare tra i vari gradi e le varie specie di scuole secondarie.

SOMMARIO. — I. Preambolo. — II. La matematica nel piano organico dell'istruzione secondaria. — III. La propedeutica matematica per le scuole secondarie inferiori, e la matematica razionale per le superiori. — IV. Le linee generali della ripartizione. — V. Le linee particolari corrispondenti alle singole discipline: *a)* la geometria; *b)* l'aritmetica; *c)* l'algebra. — VI. Conclusione.

I.

1. Ardua quanto rilevante, egregi colleghi, è la questione che ci occupa; ardua e rilevante così per le attinenze sue ai problemi, che tuttora si agitano, di ricostituzione organica delle nostre scuole primarie e mezzane, come per gli ostacoli che incontra, e non può non incontrare, l'applicazione dei nuovi processi e metodi voluti dal presente movimento d'idee intorno ai fondamentali concetti della matematica. D'altra parte, io, che da 23 anni, circa, chiuso già con gli anteriori 13 il periodo di magistero militante, mi son dovuto rassegnare in silenzio ad una vita scientifica di pure reminiscenze e di libazioni nelle poche ore di svago concesse dall'uffizio mio di provveditor di studi, avrei pur dovuto rinunziare all'incarico onde fui onorato. Ma un pensiero recatomi alla mente dal Venosino fece ch'io dicessi tra me e me: se non sarò buono ad altro, potrò forse, chi sa? riuscire a maggiormente eccitare ne' miei colleghi il desiderio, già vivo in essi, di proporre al governo centrale tale una risoluzione della questione, da soddisfare il meglio possibile ai presenti bisogni delle nostre scuole. E così, dopo aver tentennato parecchio, finii per accettare; ed oggi dinanzi a voi

> . . . . *fungar vice cotis, acutum*
> *reddere quae ferrum valet, exsors ipsa secandi.*

2. Credo necessario dichiararvi in prima rapidamente il pensier mio intorno ad alcune riforme, di cui tanto si è parlato e si parla, del piano organico de' nostri studi secondari, nel rispetto, precipuamente, dell'insegnamento matematico, discorrendo del quale non si può fare a meno di alcuni punti di orientazione nel piano stesso; ed io, naturalmente, ho scelto e fissato quelli che mi sembravano più acconci allo scopo. Dovrò, in secondo luogo, tenervi proposito del carattere che, secondo me, dovrebbe imprimersi e rimanere impresso all'insegnamento della matematica elementare distintamente

nelle scuole mezzane inferiori e nelle superiori. Dopo ciò, ed indicato il filo direttivo dello studio da me fatto, renderò ragione del disegno di ripartizione che avete sott'occhio,(*) a compiere il quale mi sono giovato assai delle particolari relazioni di alcuni soci, e dei risultati delle discussioni che in più occasioni ebbero luogo in adunanze promosse dall'Associazione « MATHESIS ». E così riuscirà naturamente divisa in tre principali parti la modesta mia relazione.

II.

3. Prima di tutto io mi schiero addirittura tra coloro che vogliono mantenuta la separazione dell'istruzione classica dalla tecnica, mantenuta per guisa che la biforcazione, come la chiamano, continui ad aver luogo subito dopo il periodo delle scuole elementari (un po' diversamente la pensavo parecchi anni fa, ma l'esperienza ammaestra). Nutro uguale affetto per entrambe le maniere d'istruzione; perocchè, se è dovere di noi italiani custodire con sollecita e religiosa cura il tesoro di quei nobili studi classici, nei quali si formò la robusta civiltà dei nostri padri, e i quali furono il balsamo vitale che preservò dalla barbarie e dalla corruzione la parte migliore del genere umano, dobbiamo in pari tempo sentir sempre il bisogno di porre e conservare accanto all'educazione togata e accademica a pro di coloro che possono aspirare ed aspirano, per la via delle università, ad un'alta scienza e a porsi in ischiera coi principali dotti della nazione, il bisogno, dico, di porre a fianco di codesta maniera di educazione un'altra più direttamente operosa, produttiva, strumentale per coloro, e sono i più, che hanno a menar la vita nei campi, nelle viscere dei monti, nelle officine e negli opifici, sulle navi, tra i vari rami di commercio e d'industria, o a dedicarsi all'esercizio di professioni liberali, attinenti ai vari rami d'ingegneria. Volendo essere razionalmente conservatori, dobbiamo essere altresì progressivi come la natura, come la società, come la ragione.

Tutto questo io ho voluto ricordare per concluderne poi che è appunto l'uguale affetto per le due forme d'istruzione quello che mi fa desiderare la separazione loro nel modo detto. Fondere insieme i due primi gradi d'istruzione classica e tecnica, l'attuale ginnasio inferiore e l'attuale scuola tecnica, in un sol corso comune: se col latino, riuscirebbe a totale scapito dei giovinetti che poi o abbandonassero gli studi o prendessero la via dell'istituto tecnico, i quali non resterebbero nè carne nè pesce rispetto al pochissimo latino appreso, mentre avrebbero potuto più proficuamente impiegare quel tempo; se senza latino, riuscirebbe a scapito totale dei giovinetti che poi prendessero la via del ginnasio superiore e del liceo, i quali

(*) Il disegno a cui si allude fu precedentemente stampato, tirandosene una cinquantina di copie, non per essere pubblicato, ma per essere distribuito, come fu, ai partecipanti al congresso, a fine di metterli meglio in grado di esaminare e valutare le proposte del relatore. Il disegno medesimo, con alcune variazioni arrecatevi dopochè era stato stampato, e con alcune note aggiuntevi a titolo di chiarimenti, costituisce la 6ª ed ultima delle proposte, alle quali si perviene nella conclusione della presente relazione (VI, 29).

dovrebbero incominciar lo studio del latino in età, in cui le regole grammaticali di quella lingua mal si sopportano e peggio si digeriscono; se, finalmente, col latino facoltativo, questo, come riuscirebbe sicuramente (e chi è pratico di scuole e di scolari non potrà contraddirmi) sinonimo di abolito, così riuscirebbe anche fomite continuo d'indisciplina, e quindi danno permanente all'istruzione dell'una e dell'altra schiera di giovinetti. Si mette innanzi la troppo tenera età in cui trovansi i giovinetti, compiuto il corso elementare, per potere scegliere tra le due forme d'istruzione quella che meglio loro convenga, e il conseguente danno che può derivare ad essi e alle rispettive famiglie da una scelta non corrispondente o alle condizioni economiche di queste o alle attitudini intellettuali di quelli. Potrei osservare e dimostrare, se i limiti e l'indole di questa relazione lo permettessero, che pericoli di tal fatta verrebbero, in gran parte almeno, scongiurati, quando famiglie, maestri di scuole elementari, direttori di scuole secondarie e, previ acconci ordinamenti direttivi, lo stesso governo centrale mettessero a base della educazione lo studio accurato, al dir di Dante, del *fondamento che natura pone,* delle attitudini, cioè, e delle tendenze naturali dimostrate dai giovinetti nella prima loro età: allora la scelta di cui parliamo verrebbe di molto e razionalmente agevolata. Capisco che in pratica anche certe norme, buone e giuste per sè stesse, possono a volta fallire; ma in questi casi i danni cagionati dalla sbagliata strada potrebbero in buona parte alleviarsi, quando, pur tenendo separati e distinti l'indirizzo e il carattere del ginnasio inferiore e della scuola tecnica, vi si ordinassero gl'insegnamenti omonimi ed affini per guisa da impedire sbalzi ed urti violenti nel passaggio di un alunno da uno ad altro ordine di studi.

4. Piuttosto un'altra importante questione resterebbe da risolvere quanto alla scuola tecnica.

Il ginnasio inferiore ha e deve avere a scopo essenziale, e quasi unico, quello di preparare al ginnasio superiore e al liceo: tutti in questo sono d'accordo. Nella scuola femminile complementare, che è una specie di scuola tecnica, può con unico ordinamento di studi raggiungersi il doppio scopo, un complemento di coltura generale per la donna e la preparazione alla scuola normale femminile, la quale, al pari della normale maschile, è da porsi nel novero delle scuole secondarie superiori, e da considerarsi quasi come una speciale separata sezione d'istituto tecnico. Ma nella scuola tecnica per i maschi può, così com'è costituita, raggiungersi proficuamente e contemporaneamente il triplice scopo voluto dai vigenti ordinamenti? Triplice scopo, ho detto; e cioè: 1°) di preparare all'istituto tecnico, e quindi anche alla scuola normale maschile; 2°) d'impartire un'istruzione pratica di cui possano giovarsi del pari così i giovinetti di classe agiata, ai quali per la condizione speciale dell'ingegno loro non si addicono gli studi classici, come quegli altri che, per la condizione civile ma non agiata delle famiglie, intendono darsi ai modesti impieghi amministrativi; 3°) di compiere in un triennio l'istruzione elementare di quei giovinetti del popolo minuto che dovrebbero poi andare alla bottega, all'officina, o dedicarsi ad un mestiere o ad un'arte fabbrile. Or bene, le statistiche hanno dimostrato che, se sono conseguibili con unico ordinamento di studi i primi due scopi, non è conseguibile con l'ordinamento medesimo il terzo. Intanto che cosa accade? Questo: che la scuola tecnica, forzata a dover servire in qualche modo a tutti e tre gli scopi, serve male ad ognun dei tre. Ma v'ha di peggio: v'ha il guaio che risentono, in ultima analisi, l'ordine morale e il sociale da quel ricco vivaio di giovani spostati che va formandosi nelle nostre scuole tecniche. Il fabbro, il muratore, il sarto, il calzolaio, il legnaiuolo, per l'insufficienza della scuola elementare, mandano i loro figliuoli a perfezionar gli studi nella scuola tecnica, quando pur non salti loro il ticchio di mandarli al ginnasio: nei genitori si desta allora l'ambizione di vedere i propri figli arrampicarsi su per le scuole superiori; i figli, ne' quali durante il triennio di studi si è sviluppata la ritrosia e, sarei per dire, la vergogna, il ribrezzo e l'odio per i lavori manuali, conseguita la licenza, non tornano, o tornano di assai mala voglia, alla bottega, all'officina, all'umile mestiere del padre. Non si creda veh! che io desideri il ritorno del tempo delle caste e delle privilegiate corporazioni di arti e mestieri, sebbene le vediamo oggi ripullulare sotto altre forme e mascherate da altri nomi; ma io penso che gli ostacoli naturali frapponentisi al passaggio di un cittadino da una condizione ad un'altra s'abbiano a rimuovere, se mai, non dalla mano artificiosa dello stato, che eserciterebbe con ciò una funzione non sua, ma dall'ingegno, dal lavoro e dalla volontà dell'individuo medesimo. Urge davvero, da parte dello stato, un provvedimento di riforma, perchè a questi lumi di luna *periculum est in mora;* ed è il pericolo delle conseguenze disastrose a cui andremmo incontro, quando ci trovassimo in uno spazio saturo di codeste miriadi di spostati e di malcontenti. E la riforma urgente, necessaria, a giudizio di tutti, perchè da un pezzo se ne parla, ma senza conclusioni pratiche, avrebbe ad esser questa: ordinare la scuola tecnica dei maschi secondo due tipi distinti, uno rispondente ai primi due scopi rilevati dianzi, l'altro, vera scuola di arti e mestieri, al terzo. (*)

Queste sono state le mie mire nell'occuparmi del modo di ripartizione, quantitativa e qualitativa, dell'insegnamento matematico per le scuole secondarie inferiori, riunendo, rispetto a tale insegnamento, in un sol gruppo il ginnasio inferiore, la scuola tecnica per i maschi e la scuola tecnica, o complementare, per le femmine, ferma sempre, quanto ad applicazioni e a metodo, la differenza specifica d'indirizzo tra scuola classica e tecnica, e, in particolare, tra scuola maschile e femminile.

(*) Su questi pensieri cade ora, come suol dirsi, qual cacio su' maccheroni, l'annunzio che fa il ministro Guido Baccelli nella sua circolare del 12 settembre 1898, n. 75, che ha per oggetto il *lavoro educativo*, e che è venuta in mia conoscenza dopo chiuso il congresso. Ecco le efficacissime parole colle quali il ministro formula la sua promessa: *La scuola tecnica, il generata com'è in un ginnasio senza il latino e il greco, dovrà presto ricostituirsi, per virtù del lavoro educativo, in corpo organico e fecondo, e risorgere varia di programmi e di ordini, come varie si offrono le condizioni delle sedi. In essa allora si svolgeranno i nuovi polsi e nuovi nervi; le sarà consentito di assidersi degnamente al posto che le si addice tra le istituzioni educative.* — Benissimo; ed auguriamoci che non soltanto *presto*, ma *prestissimo*, la promessa diventi un fatto compiuto.

5. Passo a dire delle scuole secondarie superiori.

Io, veramente, vorrei veder fuse in unico ordine di studi, da chiamarsi liceo, l'attuale classe 5^a ginnasiale, opportunamente modificata, e le attuali tre classi liceali, lasciandosi a costituire il ginnasio le attuali prime quattro classi, pur opportunamente modificate; di guisa che il corso ginnasiale quadriennale fosse il primo grado dell'istruzione secondaria classica, il corso liceale, pur quadriennale, ne fosse il secondo. In questo modo, s'intende, l'insegnamento matematico che si propone per l'attuale ginnasio inferiore andrebbe, senz'altra variazione, spartito in quattro anni, anzichè in tre; e analogamente dicasi dell'insegnamento per l'attuale ginnasio superiore e liceo. Ma quest'argomento lasciamolo, perchè mi farebbe oltrepassar di troppo i limiti del mio discorso. Considereremo il ginnasio e il liceo quali ora sono; e piuttosto parliamo della scuola normale e dell'istituto tecnico.

La scuola normale ha un fine ben determinato; e se per un rispetto può considerarsi quale una sezione d'istituto tecnico, il carattere suo speciale esige uno speciale insegnamento matematico, il quale però può esser della medesima estensione per le due scuole, la maschile e la femminile, salvo, s'intende, la differenza di trattamento tra le due scuole medesime per ciò che si attiene ad indirizzo, a metodo, ad applicazioni. All'insegnamento della matematica nella scuola normale maschile e femminile, ed anche nella complementare femminile, va congiunto, secondo i programmi governativi, l'insegnamento della economia domestica e computisteria, affidato e, secondo me, improvvidamente affidato, allo stesso maestro di matematica, al quale nessuna meraviglia, se continueranno a prevalere certe tendenze, nessuna meraviglia di veder commesso per ragion di economia anche l'insegnamento, per esempio, della ginnastica muscolare, considerata l'affinità di questa con la ginnastica del pensiero (la paternità della facezia, va notato, spetta all'uomo illustre che dirige i nostri lavori, se ben ricordate le brevi ma eloquentissime parole ch'ei pronunziò qui nel prender possesso dell'uffizio suo). Del resto, di economie e di computisterie non ho creduto di tener conto, e perchè mi manca la competenza di parlarne, e perchè, d'altronde, il nostro tema riguarda esplicitamente il solo insegnamento della matematica.

Le sezioni, dirò così, ordinarie dell'istituto tecnico sono le tre agronomica, commerciale e fisico-matematica; ed a queste ho rivolta la mia attenzione, lasciando da parte le sezioni industriali e gl'istituti nautici, avuto riguardo alla specialità loro, che richiederebbe, per poterne trattare *ex professo,* quella speciale e tecnica competenza che a me manca; il che va con maggior ragione osservato per le scuole industriali, aventi carattere locale, in quanto trovansi istituite con particolari ordinamenti nei centri industriali.

Le sezioni agronomica e commerciale conferiscono entrambe speciali diplomi professionali, e danno pur adito a scuole superiori, che sono una specie di università tecniche: la sezione agronomica alla scuola superiore di agricoltura, la sezione commerciale alla scuola superiore di commercio. La sola sezione fisico-matematica non conferisce verun diploma professionale; e mette direttamente al solo istituto tecnico superiore di Milano. Io penso, come pensano molti, e per ragioni notissime, che la sezione fisico-matematica abbia ragion d'esistere solo quando venga direttamente allacciata anche alle altre scuole d'applicazione per gl' ingegneri. Ciò potrebbe, parmi, conseguirsi: 1° separando completamente la scuola d'applicazione dalla facoltà matematica universitaria; 2° accrescendo di un anno, e portandola così da 3 anni a 4, la durata del corso della scuola d'applicazione; 3° accrescendo pur di un anno, e portandola così da 4 a 5, la durata del corso della sezione fisico-matematica. Allora l' insegnamento matematico elementare potrebbe ripartirsi tra i primi quattro anni, e sarebbe meglio digerito dagli alunni: nel 5° anno di sezione s'impartirebbe l'insegnamento matematico complementare. Agli studi della facoltà matematica universitaria si dovrebbe accedere per la sola via del liceo, a fine di conseguirvi poi la laurea dottorale; agli studi della scuola d'applicazione dovrebbe accedersi, di regola, per la via della sezione fisico-matematica d'istituto tecnico, a fine di conseguir poi il diploma d'ingegnere civile. Presentemente siedono agli stessi banchi di scuola nei primi due anni di facoltà matematica i licenziati dal liceo e i licenziati dalla sezione fisico-matematica d'istituto tecnico: i primi con intenti puramente scientifici ed istruiti nella matematica elementare con questi medesimi intenti; gli altri con intenti puramente professionali e preparati agli studi superiori con intenti di tale indole. Gl'inconvenienti che da una tale miscela derivino alla educazione scientifica degli uni e alla professionale degli altri, non avete bisogno vi sieno additati da me. La proposta congiunzione diretta della sezione fisico-matematica con la scuola d'applicazione farebbe poi cessare, vantaggio non ispregevole nel rispetto educativo, la indecente commedia, per limitarmi a chiamarla così, dell'esamuccio, *pro forma,* di latino, e soltanto orale, a cui vengono sottoposti i licenziati dalla sezione fisico-matematica quando dopo i primi due anni di facoltà vogliano continuar gli studi, anzichè nella scuola d'applicazione, nel secondo corso biennale di facoltà, a fine di conseguir la laurea. S'intende poi che, se e quando la proposta venisse accolta, anche la durata degli studi nell'istituto superiore di Milano dovrebbe essere ridotta da 5 a 4 anni.

Ciò premesso, vi dichiaro che per gl' istituti tecnici io mi sono occupato della sola matematica elementare, distribuendola, per tutte e tre le sezioni in comune, tra i quattro anni di corso: la sola differenza è questa, che la trigonometria, posta in quarto anno, sarebbe per i soli alunni della sezione fisico-matematica. L'estensione poi dell' insegnamento figura la medesima per il liceo e per l' istituto tecnico: dovrebb'esservi soltanto differenza di metodo e d' indirizzo in certe speciali teorie. Non mi son dato pensiero dei complementi di matematica, e per più ragioni: primieramente perchè la questione su cui ho l'onore di riferire è limitata alla matematica elementare; secondariamente perchè, se, nel caso più sfavorevole, le cose avessero a restar così, miglior partito sarebbe rafforzar l' insegnamento della matematica elementare, sopprimendo l'attuale complementare, che gli alunni dovrebbero ripetere nel primo anno di facoltà matematica; in terzo luogo perchè, nella fortunata ipotesi di accettazione della ripetuta proposta, mancherebbe ora il modo di fissare la qualità e quantità delle conoscenze destinate a far da anello di congiunzione della matematica elementare della sezione con la matematica superiore del primo anno di scuola d'applicazione. (*)

(*) SAUL PIAZZA, prof. di matematica nell'istituto tecnico di Milano, in un suo foglio a stampa, del quale fu differito ad altro congresso l'esame, propone per la sezione di commercio e ragioneria, 1°) che l'insegnamento stereometrico si riduca a semplici *nozioni*, e precisamente a *poco più che una semplice ripetizione di quanto i giovani già impararono nella scuola tecnica;* 2°) che l'insegnamento algebrico sia impartito *con metodo molto più pratico, dando massima importanza alle applicazioni dell'interesse composto e delle annualità;* 3°) che tra le materie d'insegnamento si aggiungano: per la parte aritmetico-algebrica *le permutazioni, disposizioni e combinazioni, il binomio di Newton per esponente intero e gli elementi del calcolo delle probabilità con qualche applicazione;* per la parte geometrica *le nozioni fondamentali sulle coordinate cartesiane, a solo scopo di render chiaro agli alunni il modo di poter rappresentare per punti con una curva una funzione qualunque, p. e. la mortalità nelle varie età* ecc.

Convengo pienamente sulla opportunità della terza proposta, e, quanto alla seconda, sulla opportunità altresì di trattare con una certa larghezza la teoria dell'interesse composto e delle annualità, compito però, quest'ultimo, da ripartirsi acconciamente tra i due maestri di matematica e di computisteria; e mi sembrano giuste e assennate le considerazioni del Piazza sulla importanza che pur dovrebbe darsi (ma, mi permetto di aggiunger io, *oculatamente*) anche tra noi, nella sezione di commercio e ragioneria, alla matematica detta *sociale*, avente principal fondamento nella teoria delle probabilità. I complementi matematici indicati saggiamente dal professore nella terza delle sue proposte troverebbero acconcia sede nella matematica assegnata, secondo le proposte mie, alla classe 4ª, e propriamente potrebbero prendere il posto della trigonometria rettilinea, assegnata alla sola sezione fisico-matematica; e vi troverebbero sede acconcia anche per la corrispondenza loro con gli *elementi di statistica*, assegnati appunto alla classe 4ª dal vigente programma governativo degli *Elementi di scienza economica*. Ma in veruna guisa io posso trovarmi d'accordo col Piazza sulla prima proposta, nè, per il modo com'ei la intende, sulla prima parte della seconda, perchè con esse si mira ad una notevole riduzione quantitativa e qualitativa dell'insegnamento della stereometria e dell'algebra elementari. Ei fonda le proposte sue sulle seguenti precipue considerazioni: 1°) *l'insegnamento della geometria solida*, ei dice, *fatto ai giovani della sezione di commercio e ragioneria con la stessa estensione che ai giovani delle altre sezioni, è ai primi perfettamente inutile nell'esercizio della loro professione;* 2°) *in quasi nessuna delle scuole commerciali all'estero, corrispondenti alle sezioni di commercio e ragioneria dei nostri istituti tecnici, havvi un programma di geometria, mentre essa s'insegna, come da noi, nelle scuole inferiori, corrispondenti alle nostre scuole tecniche;* 3°) quanto all'algebra, *se*, domanda il Professore, *può comprendersi, benchè molti vi sieno contrari, l'insegnamento completo della teoria degl'irrazionali ai giovani delle sezioni fisico-matematica e di agrimensura, si può davvero asserire utile ed opportuno pei giovani della sezione di commercio e ragioneria?* 4°) gli stessi *alunni* della sezione di commercio e ragioneria *danno poca importanza, ritenendolo quasi inutile, all'insegnamento* geometrico ed algebrico, che ricevono in comune cogli alunni delle altre due sezioni. — Del secondo di codesti quattro ordini di considerazioni vo' sbarazzarmi subito, perchè io credo che s'abbia a finire una volta con la imitazione pedissequa di tutto ciò che si fa all'estero, la quale è appunto una delle malattie che ci travagliano nell'ordinare e nel riordinare che facciamo delle nostre istituzioni educative e scolastiche: possibile che in cosiffatta opera non ci dovranno entrar mai per nulla i costumi nostri, la nostra indole, le nostre tradizioni? Ai rimanenti tre ordini di considerazioni del prof. Piazza mi sia lecito contrapporre le seguenti mie:

1°) Se avessero fondamento vero certe asserzioni del Piazza, e se prevalessero certi suoi criteri, bisognerebbe, a fil di logica e per senso di giustizia, farne anche applicazione, per esempio, all'insegnamento della fisica elementare, il quale per gli alunni della sezione di commercio e ragioneria dovrebb'essere notevolmente ridotto; e passando da uno ad altro ordine di studi, bisognerebbe nel liceo abbassar di molto, ad esempio, l'insegnamento del greco per i laureandi in matematica, quello della matematica elementare per i laureandi in lettere. E di questo passo dove andremmo a parare?

2°) *Altro è l'insegnamento classico ed altro il tecnico*, osserva il Piazza; e ne convengo anch'io, e ne conveniamo tutti. Ma in pari tempo, altra cosa sono le scuole d'arti fabbrili e altra le sezioni d'istituto tecnico, le quali avviano a professioni liberali, richiedenti una certa dose di coltura generale, differente sì sotto certi aspetti in quantità e qualità da quella dei licei, ma pur sempre organica e razionale; e di cosiffatta coltura sono parte integrante, per universale consenso, gli elementi di matematica contenuti entro i tradizionali confini. E non lo nega neanche il prof. Piazza, il quale riconosce l'*utilità* della matematica elementare *come mezzo efficacissimo allo scolgimento dell'intelligenza*, ma poi, parlando della stereometria, per giustificare la proposta sua di ridurla nel modo da lui suggerito, dice che *una parte di* codesto *utile i futuri ragionieri l'hanno già avuta con lo studio* della planimetria razionale. Ma, prima di tutto, perchè ai *futuri ragionieri* non farglielo conseguir per intiero codesto *utile?* Ed inoltre, non vede il Piazza che impartendo l'insegnamento razionale della planimetria e non facendo poi altro, quanto a stereometria, che riprodurre, o poco più, l'insegnamento dato nella scuola tecnica, si avrebbe una miscela geometrica di razionale e di pratico, con la quale si correrebbe serio pericolo di sfruttare quella stessa *parte di utile* già acquistata?

3°) Il Piazza parla *d'insegnamento completo della teoria degl'irrazionali*, che vorrebbe veder bandito, siccome non *utile* e non *opportuno*, dalla sezione di commercio e ragioneria. Ed avrebbe ragione quanto alla inopportunità di un *insegnamento completo*, degno di esser bandito anche dalle altre due sezioni; ma sta in fatto che il vigente programma governativo prescrive semplici *nozioni*

III.

6. Non v' ha dubbio, o signori, e lo sapete meglio di me, che il movimento d'idee matematiche del nostro secolo non s'abbia da annoverare tra i più poderosi de' quali si vanti la storia della scienza. Ma errerebbe grandemente chi giudicasse dell' importanza e della grandezza di tale movimento alla sola stregua de' nuovi veri acquistati e delle stesse nuove dottrine. V' ha un lato importantissimo per il quale l'odierna fase si differenzia dalle precedenti, ed è l'accurata e severa disamina dei principî, dei concetti fondamentali, dei metodi: in breve, l'applicazione della critica ad una scienza che prima si credeva intangibile. Nè la matematica avrà mai a temer nulla dalla critica. La matematica trovasi in una condizione, sarei per dire, privilegiata rispetto alle altre scienze tutte, condizione fattale dalla sua *intima perfezione teorica, della quale è testimonio irricusabile* (stacco queste parole dall' *Uno sguardo alle origini ed allo sviluppo della matematica pura* di ENRICO D' OVIDIO: Torino, 1889) *il fatto che dalla più lontana antichità sino a noi, delle successive conquiste fatte dalla matematica nessuna ha distrutto le precedenti. Quanti sistemi filosofici non si sono succeduti, ciascuno in antagonismo al precedente, da Talete e Platone al Cartesio, dal Kant all'Hegel e allo Spencer! E nelle scienze sperimentali, quante ipotesi inconciliabili tra loro non hanno successivamente imperato nella spiegazione dei fenomeni naturali da Aristotele al Darwin! Solo nel successivo sviluppo delle discipline matematiche nulla vi è stato da rinnegare, nulla da mutare sostanzialmente; ed il trionfo di concetti nuovi non ha infirmato mai le verità già acquisite, ma ne ha soltanto mutato il posto e la ragion logica, accresciuto o scemato il pregio e l'uso.*

Il lavoro di revisione o ispezione provocato dal nuovo indirizzo non è ancora compiuto, perocchè le lacune e i difetti, che esso ha condotto a poco a poco a scoprire nell'orditura generale della scienza, hanno rese necessarie nuove e delicate ricerche, che a loro volta hanno messo in luce altri punti scabrosi, o hanno dovuto arrestarsi dinanzi ad ostacoli non preveduti e neanche sospettati. In poco più di mezzo secolo d'indagini è stato fatto parecchio, non v'ha dubbio, ed i migliori tra i moderni trattati in uso presso di noi debbono l'origine loro agli sforzi di benemeriti e valenti autori, che hanno ritentata con soddisfacenti risultati l'esposizione dei primi elementi per armonizzarli col nuovo indirizzo, in cui si è messa la scienza. E qui parmi doveroso un atto di meritato plauso all'Associazione «MATHESIS», che in due anni, circa, dalla sua fondazione ha dato prove non dubbie del grande amor suo alla diffusione

---

sui numeri irrazionali e sulle operazioni ad essi relative; e non più che semplici nozioni sono quelle indicate nelle mie proposte.

4°) Quanto, infine, alla *poca importanza* che danno gli allievi ragionieri a quelle parti di matematica elementare, che essi ritengono *inutili*, mi scusi il prof. Piazza, ma qui vedo far capolino tendenze morbose, che il buon maestro, lungi dal secondare, dovrebbe anzi con tutte le sue forze reprimere e soffocare.

dei buoni metodi. Lode dunque a « MATHESIS », e lode, in particolare, al degno e benemerito suo presidente, Rodolfo Bettazzi. Ma, ripeto, se è molto ciò che si è conseguito, non è tale da poter bastare. Per quanto è dell'aritmetica e dell'algebra, limitandomi ad accennare, nel ristretto campo degli elementi, ai numeri irrazionali e ai complessi, e ai concetti di funzione e di continuità, converremo tutti nel riconoscere che ancora non può dirsi veramente appagato il desiderio d'una trattazione didascalica ordinata ed efficace di cotali argomenti, soddisfacente del pari ai bisogni delle scuole nei rispettivi ordini e gradi e alle esigenze della scienza. E parimente per ciò che si attiene alla geometria, non può dirsi ancora risoluto il problema di rannodare i primi anelli della sintesi moderna alla grandiosa tradizione euclidea, e meno ancora l'altro problema di dare a questa una forma che, senza offenderne i lineamenti classici, non escluda per sè stessa quella geometria che si fonde in un sol getto con la geometria proiettiva, della quale Euclide non era forse così ignaro come alcuni credono, e la quale, studiando le poche relazioni fondamentali semplicissime cui sono organicamente connessi i disparati fenomeni del mondo geometrico, si è impadronita degli elementi onde si traggono e si dispongono e collegano in bell'ordine e in ben delineati gruppi, e con la maggior possibile economia e nel modo il più semplice, le innumerevoli proprietà delle figure. Ora, è urgente compier l'accordo, in questi punti fondamentali, tra la scienza insegnata, sia pur quella delle scuole secondarie, e la scienza militante, ed impedire che gli alunni delle scuole classiche, che a questa si avviano, abbiano a dimenticare la prima istruzione avuta, anzichè farne tesoro e fondamento per gli studi ulteriori. D'altra parte, si badi, gli argomenti cui feci allusione non vanno riposti tra le considerazioni scientifiche d'ordine elevato o speciale, e meno ancora tra i processi variamente artificiosi, escogitati a fine di agevolare qualche applicazione teorica o pratica: nell'un caso e nell'altro l'istruzione secondaria classica non avrebbe in che giovarsene, e verrebbe anzi allontanata dal suo vero obbiettivo. Si tratta, invece, di considerazioni le quali, circoscrivendo entro limiti sempre più angusti il materiale, per così dire, meccanico della scienza, vanno diritte diritte all'analisi dei concetti; epperò, lungi dal rendere più astrusa o più tecnica la matematica elementare, tendono a ricondurla sul terreno dell'ordinario ragionare. Ed è anzi da riguardare come un accordo fortunato e veramente meraviglioso questo, in virtù del quale quei medesimi concetti che si sono venuti svolgendo dal lavoro dei dotti nelle più elevate regioni della scienza, e che dominano anche al presente le loro investigazioni, sono eziandio i più propri ad accrescere l'efficacia educativa dei primi elementi, eliminandone ogni inutile meccanismo e facendone un vero strumento di coltura generale.

Queste non sono cose nuove per sè stesse, lo so, nè io intendo di spacciarle per tali; pur tuttavia un carattere estrinseco di novità par che lo abbiano nel bisogno che ne sia oggi rinnovato il ricordo alla distanza di 24 anni dalla affermazione solenne, che di certi criteri faceva un'autorevole commissione (Enrico Betti, Luigi Cremona, Eugenio Beltrami, Felice Casorati, Eugenio Bertini), giudicatrice di un concorso a premi pe' migliori trattati elementari di aritmetica, algebra e geometria.

7. Ho detto che i nuovi sistemi mirano a ricondurre la matematica elementare nella strada del comun ragionare. Da qui parmi seguire la convenienza e l'opportunità di assegnare, così per l'istruzione classica come, ed a maggior ragione, per la tecnica, due periodi all'insegnamento della matematica, per guisa da aversi una propedeutica matematica per le scuole secondarie inferiori, una matematica razionale per le superiori: la propedeutica avrebbe in pari tempo tale carattere da concorrere con le altre materie d'insegnamento a fornire di una istruzione pratica i giovinetti, per i quali la scuola secondaria inferiore è il termine degli studi. Una tale convenienza ed opportunità, oltrechè dalle considerazioni fatte, è pur giustificata dai seguenti motivi. La matematica, al pari di qualunque altra scienza, ha fondamento ultimo nell'esperienza, e dovrà non dimenticar mai questa sua prima origine e i concetti empirici della valutazione dei fenomeni naturali attentamente osservati, i quali concetti, da purificarsi a poco a poco, da allargarsi e coordinarsi, hanno da essere come il canovaccio sul quale imbastire la scienza; perocchè l'*ingegno* nostro, osserva l'Alighieri,

> . . . . . . solo da sensato apprende
> ciò che fa poscia d'intelletto degno.
>
> (*Paradiso*, c. IV.)

V'ha, inoltre, una gran serie di fatti del mondo metrico e geometrico, famigliari a noi sin dall'infanzia, e coi quali siamo continuamente alle prese nel comun vivere. Questi fatti, anche solo limitandoci a registrarli, ordinarli e classificarli, costituiscono già per sè stessi un piccolo tesoro di conoscenze, produttivo di altre per le vie percettive e di un ragionar semplice e facile. Ma non basta. Il giovinetto, al suo primo entrar nella scienza e movendovi i primi passi, certamente non potrà non incontrare alcune difficoltà; e quando con certi metodi d'insegnamento a base di certi libri par che tutto corra facile e spedito, si tratta allora di quella facilità e speditezza, che si ottengono col sacrifizio del rigor logico. D'altra parte, invocando anche qui una sentenza del divin poeta, l'insegnamento scientifico,

> . . . . . se . . . . . sarà molesto
> nel primo gusto, vital nutrimento
> lascerà poi quando sarà digesto.
>
> (*Paradiso*, c. XVII.)

E perchè la matematica della scuola secondaria superiore trovi ben disposto lo stomaco del giovinetto ad una buona digestione, somministreremo a questo, per tempo, con la propedeutica matematica un po' di magnesia effervescente, salutare e gradevole.

8. Ma quali i caratteri distintivi delle due matematiche?

Il carattere di razionalità risulta, com'è noto, di due elementi costitutivi, il minimo possibil numero di postulati e il procedimento costantemente e rigorosamente deduttivo: postulati, ho detto; da non confondersi con gli assiomi, chiamati da Euclide *communes animi conceptiones.* Gli assiomi, in numero invariabile, sono proposizioni evidenti di evidenza logica e conseguenze necessarie e immediate dei primi due principî di ragione, quello d'identità e l'altro di contraddizione: i postulati, invece, sono l'enunciazione o di fatti accettati interamente sulla testimonianza dei sensi e in base dell'esperienza, o di fatti idealizzati per guisa da farli servire a scopi scientifici, ma idealizzati sempre con aderenza alla realtà. Il carattere di razionalità, come ognun di voi m'insegna, non ha nè può avere senso assoluto, per doppia ragione, scientifica e didattica. Nel rispetto scientifico, non essendo ancor dimostrato quanti e quali postulati irriducibili costituiscano il fondamento necessario e sufficiente della matematica, siamo liberi di creare tanti sistemi di matematica (e ciò va detto in particolar modo per la geometria), tutti logicamente rigorosi, quanti i sistemi diversi di que' postulati: de' quali quanto minore è o sarà per diventare il numero, tanto maggiore riuscirà il grado di razionalità della scienza: e qui sta il progredir di questa. Nel rispetto didascalico poi possiamo estendere, oltre lo stesso relativo bisogno, il numero dei postulati, senza far perder nulla alla scienza elementare della sua orditura; e ciò a fine di spianar meglio la via allo scolaro, conseguendo così un piccolo organismo matematico tanto più razionale, quanto minore sarà il numero di essi; e i vari gradi è uffizio del provvido maestro accomodarli alle condizioni della propria scolaresca e allo special fine di questa nei propri studi. Quando poi con la riduzione dei postulati si faccia anche prevalere, nel processo dei ragionamenti, sul metodo deduttivo l'induttivo o l'analogico, o l'induttivo e l'analogico insieme, fondati nell'esperienza e nella osservazione, avremo appunto la propedeutica matematica, o matematica sperimentale, pratica, induttiva che dir si voglia.

A proposito d'induzione, tra parentesi, non per voi, dotti ed esperti colleghi, che non ne avete punto bisogno, nè io d'altra parte mi son partito dall'Abruzzo con la presunzione di venir qua ad ammaestrare alcuno, ma, all'opposto, col desiderio di tornarvi ammaestrato; non per voi, ripeto, ma perchè certe recenti, così dette, *istruzioni,* accompagnanti certi programmi ufficiali di matematica, mi par che istruiscano pochino e maluccio, mi piace di annunziarvi che in un mio modesto studio, in corso di pubblicazione,(*) ho innestato un capitolo che tratta appunto del fondamento della induzione matematica, del suo valor logico e delle cautele da aversi nel farne uso.

La propedeutica matematica, del resto, darà luogo anch'essa, e più anzi della matematica razionale, a vari sistemi, trovandosi ciascun d'essi definito da un maggiore variabil numero di postulati e

(*) *La matematica e i fenomeni naturali: discorsi di cose vecchie e nuove a base di nuove e vecchie.* È pubblicato il *Discorso I* dei sette di cui si compone l'intero lavoro, e che ha per titolo: *I fenomeni naturali e le rappresentazioni matematiche.* Milano, E. Trevisini, 1898, L. 0,60.

dal grado di prevalenza del metodo induttivo sul deduttivo; e questi vari sistemi debbono naturalmente adattarsi ai vari stadi di educazione intellettuale, dal giardino d'infanzia in su, fino a quando il senso numerico e il geometrico dell'adolescente, e, più in generale, il senso della grandezza, attuato dal concetto organico di uguaglianza, abbia conseguito quel graduale sviluppo e disciplinamento che permetta di affrontare lo studio della matematica razionale, della quale la sperimentale, lungi dal costituire un inciampo o una resistenza, sarà anzi, ripeto, una salutare preparazione.

Ad avere una rappresentazione spiccata dell'insegnamento matematico ne' vari ordini di scuole, io non vo' ricorrere ai soliti cicli o circoli concentrici, alle onde di crescente ampiezza determinate dalla caduta di un sasso sulla superficie di un lago, e via dicendo. Sono metafore codeste che, se ci riflettiamo attentamente, non si prestano a quella rappresentazione compiuta che si desidera; e piuttosto, quando di metafore o allegorie rappresentative si senta proprio il bisogno, attingiamole al mondo biologico; e mi permetterete che io in tal caso ne faccia istanza all'ostetricia. Ecco, in breve: la placenta, l'embrione, il feto, il neonato a me pare che rappresentino a meraviglia, nei loro periodi di svolgimento, i quattro insegnamenti matematici del giardino infantile, della scuola elementare, (*) della secondaria inferiore, della secondaria superiore.

9. V'ha chi si preoccupa della possibilità che una matematica sperimentale abbia, per così dire, a materializzare la mente dei giovani, o indurvi stati morbosi, per i quali sia poi reso loro difficile il salire alla generalità dei concetti. Non escludo che tale disastro possa avverarsi. Ma perchè si avveri bisogna proprio che il maestro non voglia o non sappia tener bene in mano e adoperare a modo e con le debite cautele l'istrumento di cui trattasi, cioè il metodo di esperienza e di osservazione; e allora il fatto si spiega. Codesto strumento, al pari di tutti gli strumenti fini e delicati, certo ha, non si nasconde, un difetto grave, insanabile, che può pure riuscir fatale; e il difetto si appalesa sempre che lo strumento venga adoperato da inesperto o negligente artefice, il quale, certo, farebbe minor male se ne mettesse in opera uno di mediocre valore. Uno squisito rasoio inglese, messo in azione da un buon barbiere, mi rade d'un tratto i peli tutti del mento, che è un piacere, come ho provato stamane prima di presentarmi a voi: adoperato da un macellaio può con ugual prontezza recidermi la carotide; e chi fosse condannato a farsi radere dal macellaio, correrebbe, forse, minor pericolo se questi facesse uso di un rasoio comune. Si sa poi che il carattere di pratico o sperimentale nei primi stadi dell'insegnamento non s'ha a scambiar mai col carattere negativo di non ragionato o, peggio, di sragionato: vo' alludere all'arte di certuni, consistente nel celare a bella posta concetti erronei e paralogismi col pretesto di una facilità, apparente e insidiosa, apportatrice di danno, talvolta irriparabile, alla futura istruzione dei gio-

(*) Ottime, a giudizio mio, le recentissime *Norme ai maestri e alle maestre per insegnare l'aritmetica e la geometria nelle scuole elementari* di GIOVANNI GABRIERI. Milano, F. Trevisini, 1898, L. 1,50.

vani, e quasi sempre causa remota, sebbene occulta, di quella feroce antipatia che giovani, pur provvisti di molto e acuto ingegno, sentono e manifestano per la povera matematica, antipatia alimentata anche dal pregiudizio di molti, che sia necessaria una speciale disposizione per capire la matematica elementare. Se, com'è possibile e com'è voluto dal magistero della natura, ci limitiamo a seguire nelle istituzioni matematiche le più semplici e ovvie leggi del pensiero, facendone poi applicazioni ugualmente semplici, e ovvie, d'onde potrà sorgere il bisogno di singolari attitudini e disposizioni? Possiamo benissimo e dobbiamo esser pratici, quando addestriamo i giovinetti nelle regole del conteggio e nella percezione e classificazione di fatti e leggi geometriche, e possiamo e dobbiamo contentarci di idee rudimentali, riservandoci di raffinarle e compierle a poco a poco negli stadi ulteriori dell'insegnamento; ma in pari tempo l'elementare, il pratico, il popolare dobbiamo sempre guardarci da scambiarlo con la nozione erronea o superstiziosa e coi procedimenti illogici. L'insegnamento, e questa è norma generale, deve impartirsi per guisa che lo scolaro, avanzando nella vita e nello studio, abbia bensì da imparare altre cose, ma non sia obbligato a disimpararne veruna; abbia da poter andare sempre avanti, ma giammai tornare indietro; sia messo in condizione di progredire di verità in verità, ma non costretto mai a riconoscere falso ed assurdo ciò che da prima aveva dovuto creder vero. In altri termini, l'insegnamento deve consistere nella sementa dei principî, che, fecondati a poco a poco dalla riflessione e confermati, ampliati, compiuti via via dalla teoria e dalla pratica, trasformino il giovinetto in un uomo, senza che il sapere dell'uomo abbia mai da smentire la coscienza del giovinetto.

10. Nel mio disegno la propedeutica matematica per le scuole secondarie inferiori è di unico grado; la matematica razionale per le superiori di due. Le scuole ginnasiali superiori e le liceali da una parte, le sezioni d'istituto tecnico dall'altra, avrebbero, in un sol grado, una matematica razionale fondata nel sistema di postulati comunemente accettato; la matematica, invece, della scuola normale verrebbe costituita in un grado di razionalità alquanto minore, lasciando, beninteso, al maestro la cura di fare, nel numero e nella qualità di postulati, quell'accrescimento ch'ei crederà conveniente. Così, per un esempio, se le leggi commutativa e associativa della somma, commutativa e distributiva del prodotto, movendo dal postulato inevitabile che il numero per sè stesso è indipendente dall'ordine secondo cui le cose si contano, sono teoremi rigorosamente dimostrabili; io crederei però conveniente e opportuno che nella scuola normale le intere leggi medesime si enunciassero quali postulati. E governandosi in questo modo, il maestro non farebbe nulla che potesse turbare la coscienza intellettuale, dirò così, del ragazzo; perchè quelle leggi, specie la commutativa e l'associativa della somma, ci sono assai famigliari negli usi della vita, famigliari sin dalla fanciullezza, tantochè si sogliono battezzar per assiomi, sebbene tali non sieno.

Ho detto dianzi aversi a fondare nel sistema di postulati comunemente accettato la matematica razionale delle scuole ginnasiali superiori e delle liceali e delle classi d' istituto tecnico; ma qui è necessario che io offra qualche altra spiegazione a scanso di possibili malintesi. Alcuni giovani professori abbracciano sino all'estremo limite di rigore la massima di R. Dedekind, *doversi sempre dimostrare,* prima di prestarvi credenza, ciò che è dimostrabile: e fedeli a tale massima, ripongono anzitutto ogni lor cura nel tener desta continuamente l'attenzione degli alunni a dover distinguere in ogni passo i concetti primordiali, indefinibili, da quelli che di vera e propria definizione sono suscettibili, gli assiomi propriamente detti dai postulati, e questi dai teoremi. Ecco: a me sembra che nell'insegnamento possa e debba seguirsi una via intermedia. Già, una separazione netta tra codesti ordini di veri non è sempre possibile, perocchè tra un ordine e l'altro s' interpongono in noi, come avviene in tutti gli stati psichici nostri, delle sfumature, che non sempre permettono di veder le precise linee di confine. Se prendiamo, inoltre, a considerare una data teoria già svolta, e ci ripieghiamo col pensiero su noi medesimi, ci accorgeremo che, oltre quelli messi facilmente in evidenza, vi si annidarono, quasi ad insaputa nostra, un mucchio di concetti primordiali, assiomi e postulati, quelli almeno, per non parlar di altri, che hanno attinenza allo spazio e al tempo e ai medesimi stati psichici nostri. Ci persuaderemo altresì che numerosi sono i principî sui quali quella teoria riposa, tutti dimostrabili. ma non tutti dimostrati, in questo senso che sulla dimostrazione di alcuni di essi la nostra mente sorvola, e vi sorvola perchè que' principî, sebbene non propriamente assiomi nè postulati, rifulgono tuttavia di tali caratteri di evidenza, che si richiede una certa analisi per riuscire ad introdurre il dubbio nell'animo nostro; e il dubbio noi lo facciamo a pie' di quelli rampollare a solo fine di mettere in rilievo la ragione di ciò di cui già siamo persuasi. Si sa poi che non per tutte le menti è ugualmente rapido l'apprendimento della ragione di una cosa; e così vediamo che, mentre per alcuni, dotati di grande potenza d' intuito, un vero apparisce d'un tratto quasi un assioma, per altri no; e tra quelli e questi ha luogo, s' intende, una graduazione immensa. Ho detto *quasi un assioma,* perchè il sentimento immediato dell'evidenza, senza ombra di deduzione, noi tutti, qualunque sia il grado di nostra intelligenza, lo abbiamo soltanto negli assiomi propriamente detti: del rimanente, la deduzione sarà più o meno rapida, e per alcune menti quasi inavvertita, ma ha luogo sempre. Or bene, io sono assai lontano dal volere che sieno banditi certi studi di ripiegamento della mente nostra sopra sè stessa; li credo, anzi, di utilità incontestabile nelle scuole superiori di magistero, costituendo essi la parte filosofico-critica della scienza, e li stimo validissimi a scongiurare gli errori a cui possono menare induzioni incompiute o mal fondate, sulle quali non di rado lo spirito tende a riposar tranquillo. Però, quando si tratti d' insegnamento secondario, parmi artifizio pedagogico non ispregevole, anzichè sfruttare codeste, mi si lasci dir così, persuasioni inconscie degli alunni, trarne partito a profitto della teoria principale. La stanchezza, il senso di noia, la sonnolenza che lo studio della matematica ingenera in una gran parte degli alunni delle nostre scuole, derivano anche, io penso, dal troppo frazionamento di concetti. Il principiante, sforzandosi di afferrare e ritenere la moltiplicità di proposizioni che ne vengon fuori, le confonde spesso; e la proposizione principale, veduta così attraverso ad un mezzo annebbiato, stancante l'occhio della mente, finisce di necessità con essere mal compresa. Non è fuor d'opera ricordare qui l'avvertimento sapientissimo lasciatoci da Seneca: *Comprehendere, quemadmodum maxima, ita minima difficile est.... Idem enim vitii habet nimia quod nulla divisio. Simile confuso est quidquid usque in pulverem sectum est.* (Epist. LXXXIX, 3.) Insomma, dove persuasione già c'è, perchè insistere insegnando, in certo qual modo, l'arte di dubitare? Tiriamo diritto, invece, mirando alla teoria principale, da esporsi il più brevemente possibile e con la maggior possibile semplicità. Solo dopo assodata la teoria principale, se il tempo e la condizione intellettuale media della scolaresca lo permettano, potrà il maestro istituire un'analisi retrospettiva, esaminare i principi tacitamente ammessi, dimostrarli o semplicemente affermarli, secondo i casi, istradando così i giovani in un proficuo genere di meditazioni: ma, ripeto, nel primo percorso di strada non frapponiamo ostacoli. Mi si consenta d'insistere discendendo ad alcuni particolari, perchè a me preme non si dia alla raccomandata parsimonia una portata maggiore di quella che io desidero abbia. Se dovessero ascoltarsi i dettami di certuni, un libro di matematica elementare razionale dovrebb'essere una specie di polverizzatore, con l'attitudine anche a snidare, ovunque s'incontrino, e mettere in mostra ogni sorta di concetti primitivi, di assiomi e di postulati, e crear dubbi anche dove la mente non sia punto disposta a dubitare, creandoli, come s'è avvertito, per voluttà di dimostrare, ad imitazione di coloro, e ve n'ha parecchi, che vanno in cerca di nemici per provar poi il gusto di combatterli. Bel gusto eh! Dinanzi ad un libro cosiffatto il principiante si spaventa, non muove più passo libero, non azzarda più nulla, non tenta più nulla. Poco male se lo sbigottimento incoglie una rapa; ma può anche impadronirsi dell'animo di un giovine d'ingegno e di felici attitudini. Mi spiegherò con esempi, sempre nel desiderio che le mie idee non sieno svisate, ed a conferma che tra il *nimia* e il *nulla divisio* di Seneca ci può essere, e c'è, una via di mezzo. La legge commutativa e associativa della somma certamente va messa in evidenza, perchè legge fondamentale, e perchè deve premere di allontanare possibili errori provenienti da non esatto apprezzamento di essa. Si dovrà, per le vie riflesse, far vedere che assioma propriamente non è, e neanche, trannechè si tratti di numeri, un teorema da dimostrare: è bensì un postulato, una verità attinta all'esperienza e rispondente alla realtà fisica, verità che un procedimento naturale d'induzione e di analogia ci rende evidente. La legge stessa, in fine, non è applicabile ad ogni sorta di grandezze: e qui certo bisognerà mostrare quali tra esse, o in quali casi, godano di quella legge, e quali no. Qui dunque quella certa analisi è provvido ed opportuno che sia istituita; nell'esempio. invece, che sono per addurre, no. Dai *Preliminari* delle *Lezioni di aritmetica (Elementi della teoria dei numeri interi e frazionari)* di E. SADUN e C. SOSCHINO (Torino, 1893) stacco i due seguenti periodetti: *Quando, avendo gli oggetti* A, B, C, ... L, M, N *di un gruppo, si fanno loro corrispondere i numeri della serie dei numeri naturali in questo modo:* **uno** *ad* A, **due** *a* B, **tre** *a* C *ecc., si contano gli oggetti del gruppo. Avendo poi riguardo all'ordine nel quale si seguono gli oggetti,* A *si dice il* **primo** *oggetto,* B *il* **secondo,** C *il* **terzo,** *ecc.* — Non c'è bisogno di lente d'ingrandimento per accorgersi che là dentro que' due periodetti v'ha un brulichio di concetti primitivi. di concetti definibili, di assiomi e di postulati: il *gruppo.* l'*unione,* la *corrispondenza,* l'*ordine,* il *prima* e il *poi,* la *consecutività,* il *porre* e il *togliere,* ecc. Ma in questa prima nozione riflessa del contare. è necessario, è utile, è opportuno trarli fuori e proclamarli tutti. codesti concetti, o almeno qualcun di essi? I due autori hanno creduto di no, ed io penso com'essi. Invero, ne' due riportati periodi. che cosa di più innocuo, di più semplice, di più chiaro, di più famigliare a tutti, di più armonico con le nozioni e gli usi della vita abituale? Ma così non la pensa un severo critico, il quale in una sua recensione di cotesto libro lamenta l'*uso,* in esso, *dei concetti intuitivi di ordine e d'induzione completa, senza che il primo sia definito e il secondo enunciato.* Per questa ragione, e per questa soltanto. il critico infligge una specie di scomunica al libro, dichiarando *non potersi* questo *ritenere come un'aritmetica razionale e nemmeno come elementi di una teoria dei numeri, nel senso scientifico della parola.* Subito dopo, per altro, non so con quanta coerenza, ma forse a scopo d'indorar la pillola, chiama *piccoli e facilmente rimediabili* gli accennati difetti, e loda, e qui a buon diritto, la *chiarezza.* la *semplicità* e l'*ordine di esposizione* del libro stesso. Pare anzi che, secondo il critico stesso, l'aritmetica Sadun-Soschino sia la sola immune dai *tradizionali e grossolani errori e non-sensi:* tutte le altre, secondo lui. comprese le moderne, e niuna esclusa, ne rigurgitano (dobbiamo riferirci al tempo in cui la recensione fu scritta), e in tutte si lamenta la *mancanza assoluta di fondamenti.* Via. via, è troppo! Io conosco parecchi scritti dell'egregio critico, ne' quali al certo si ammirano la coltura vasta e soda di lui, l'acutezza dell'ingegno e lo zelo illuminato per l'insegnamento; ma non s'abbia a male se io gli manifesto sembrarmi che da codesto suo zelo e' si faccia talvolta trascinar tropp'oltre, sin quasi al punto d'inaugurare una specie di ipermetafisica, destando in altrui un certo qual senso di melanconia. di sconforto e, sarei per dire, di disperazione. E come no? Per citare un altr'esempio, al povero SALVATORE PINCHERLE, di nient'altro reo che di essersi permesso, ne' suoi *Elementi di aritmetica ad uso delle scuole secondarie inferiori* (notate bene: *scuole secondarie inferiori*), di essersi permesso, a chiarire il senso delle parole *addizione* e *sottrazione,* l'uso rispettivo dei verbi *riunire* e *togliere,* il critico medesimo, acceso di sdegno, gli fa: *E riunire che cosa significa?.... e togliere che cosa significa?* Osservate, all'opposto, ed ammirate lo spirito di savia moderazione ond'è compreso un altro critico, pur esimio, Giovanni Frattini, che nel *Periodico di Matematica* (vol. VI. 1891), parlando del libretto del Pincherle, si esprime così: *Pur di non venir meno al rigore scientifico che si è imposto, l'autore non è schivo di savie concessioni all'opportunità didattica.*

IV.

11. Passo ora a giustificare le linee generali della ripartizione che propongo.

Quelli che io sottometto all'esame vostro non sono programmi d'insegnamento, ma scheletri di programmi, libero, s'intende, chi insegna, d'impolparli a suo modo. Anzi, a proposito di programmi. desidero in prima che sappiate come io la penso. Saggio e provvido divisamento fu, in complesso, quello del ministro Ferdinando Martini, quando nel 1892 abolì per i ginnasi e licei i programmi ufficiali, *sostituendoli,* così egli si esprimeva, *con precisi e determinati limiti, e lasciando al maestro una saggia libertà di muoversi entro i confini tracciati.* Però in questa stessa buona riforma i limiti assegnati all'insegnamento matematico, e tuttora vigenti, non furono troppo buoni, nè riuscì troppo felice la ripartizione delle materie tra le varie classi; ed io conosco parecchi giovinetti licenziati dal ginnasio, i quali, non avendo voluto o potuto continuar gli studi al liceo, contrassero un eczema geometrico, nel quale si era andato a poco a poco trasformando il prurito destato in essi dal I° libro di Euclide, che è la sola particola geometrica assegnata al ginnasio. Però, prescindendo dalla matematica, il riordinamento martiniano, ripeto, fu, in complesso, saggio e provvido. Peccato che il Martini non estendesse la sua riforma agli altri ordini di scuole! Il ministro Baccelli nel 1894 seguì l'esempio del Martini, ma non ebbe la forza di andare più in là delle scuole elementari. Al Baccelli, tornato testè per la terza volta alla Minerva, mandiamo pure un augurio di lunga vita ministeriale, ma a patto ch'ei sottoscriva, con l'intervento di un notaio, una formale obbligazione di svincolare dai programmi anche l'insegnamento delle scuole secondarie tecniche e normali. Costringere i maestri a seguir tutti una medesima determinata via di passo uniforme fu, sino al 1892 per le scuole classiche, sino al 1894 per le elementari, ed è tuttora per le altre, uno dei precipui impedimenti, io penso, perchè non si avessero e non si abbiano libri interamente e per ogni rispetto buoni da parte anche dei migliori e più riputati autori. Se mai, quando proprio si volesse ritener la necessità di un programma ufficiale, come dicono, particolareggiato, dovrebbe questo modellarsi sopra un buon libro. All'opposto, i libri, per poter entrare nelle scuole, debbono o dovettero uniformarsi in tutto e per tutto al programma; e ne è così venuto, per molto tempo, che noi non abbiamo avuto (mi riferisco soprattutto alla matematica) nè buoni programmi nè, relativamente parlando, buoni libri. Dico *relativamente parlando,* perchè egregi autori hanno fatto quanto di meglio per loro si potesse, dati i programmi particolareggiati, ma non hanno potuto fare quanto avrebbero voluto. Fra essi, è vero, non mancarono uomini di gran coraggio che, senza troppo occuparsi nè preoccuparsi di programmi, composero libri che, secondo essi, avessero a corrispondere all'indirizzo e allo scopo di vere istituzioni matematiche ne' vari ordini di scuole; ma, come era da prevedere, cosiffatti libri non furono sempre i più fortunati. Come non compiangere, per citare un esempio solo tra parecchi, un pover uomo, avente scienza e coscienza, ma chiamato da forza irresistibile a scrivere un libriccino di matematica per le tre classi normali sul programma imposto nel 1897 dal ministro Giovanni Codronchi Argeli? Come non compiangere, ancor più dello scrittore, il povero maestro, obbligato ad insegnare nella classe prima normale gli *elementi di calcolo algebrico* con le *operazioni sulle* sole *quantità intere,* ma pur *con le equazioni di primo grado ad una incognita,* il tutto *con metodo induttivo* (notate bene, e ricordate quanto in proposito dissi dianzi), *e procurando* (notate bene ancor questo) *di mettere in grado il futuro maestro di analizzare e risolvere con facilità, rapidità e sicurezza svariate questioni* (Dio mio!) *di aritmetica,* ed obbligato poi, lo stesso infelice maestro, a dare l'anno successivo, e non prima, ai medesimi alunni, nella classe seconda, *con metodo che abbia rigore scientifico,* la teoria della *numerazione* e *l'analisi delle quattro operazioni* aritmetiche? Con voi qui, o signori, non ho bisogno di spiegarmi; ma mi spiegherò in altra sede, come suol dirsi.

12. Come vi dissi dunque, i miei sono semplici scheletri di programmi; e, anche per ragion di coerenza con l'accennatovi modo di vedere, non potevo regolarmi diversamente. D'altra parte, la matematica elementare ha i suoi naturali e tradizionali confini; e il professore, appena gli si accenni un argomento di quelli che integrano le istituzioni, vede subito e bene che cosa ei debba fare, o come e quanto debba estenderne il relativo insegnamento.

Ogni classe di ogni ordine di scuole ha lo scheletro della parte di matematica assegnatale: s'intende però, che non solo l'impolpamento, ma anche l'ordine secondo cui avranno a disporsi le ossa, è lasciato in libertà del maestro, libertà regolata e diretta dalla opportunità didattica. Io, naturalmente, nel descrivere ogni scheletro, dovevo incominciare dalle ossa del cranio, e venir giù giù sino a quelle degli arti inferiori. L'essenziale è che al termine dell'anno scolastico lo scheletro medesimo apparisca ritto e senza sostegni che lo reggano, o fili di ferro che ne tengano unite le ossa, ma impolpato e dotato di vita. Per altro, qua e là in ogni scheletro troverete, come eccezione alla regola, anche qualche muscolo: ciò accade, per uscir di metafora, rispetto a quei punti dell'insegnamento che, secondo me, richiedono una particolare attenzione da parte del maestro. Inoltre negli scheletri omonimi, per ritornare alla metafora, sebbene appartenenti a classi diverse o a diversi ordini di scuole, troverete, naturalmente, ripetuti pur col medesimo nome la maggior parte delle ossa; ma la grandezza di queste, la compattezza, la rigidezza, la resistenza ed altro debbono diversificare generalmente (non ho bisogno di spiegarmi) da uno ad altro ordine di scuole, da una ad altra classe.

13. Nella ripartizione delle materie di studio tra le varie classi di ciascun ordine di scuole superiori non mi sono dato verun pensiero di coordinamento con la fisica e la mineralogia rispetto ai soccorsi che a queste possano bisognare dalla matematica; perocchè sembrami poter provvedersi, temporaneamente almeno, anche con la matematica sperimentale appresa nelle scuole inferiori. Mi sono occupato della sola matematica, dividendola per guisa che in tutti gli ordini di scuole l'aritmetica, o l'aritmetica e l'algebra, si trovi interposta tra la geometria pura e la metrica, movendosi dalla geometria pura. La divisione della geometria elementare in pura e metrica fu introdotta provvidamente da Salvatore Pincherle nel 1881, presa la parola *metrica* non già in antitesi di geometria di posizione, ma nel significato particolare di trattazione indipendente da concetti di misura, mentre la geometria elementare, fondata com'è in ogni sua parte nel concetto di uguaglianza, è quasi per intero metrica nel significato generale di questa parola.

Se ne' primi due periodi rudimentali dell'insegnamento, il giardino d'infanzia e la scuola elementare, può reputarsi conveniente e necessario mantenere in associazione intima e costante le operazioni e i fatti numerici e geometrici, cessa la ragione di tale convenienza e necessità quando l'insegnamento deve cominciare ad assumere, come è nelle scuole secondarie inferiori, una forma sistematica, e maggiormente poi sistematica e determinata nelle scuole secondarie superiori. Aggiungete che le proprietà, diremo così, descrittive e costruttive delle figure e la loro sperimentazione debbono riuscire, io penso, di più facile e piacevole apprendimento che non le proprietà metriche e gli esercizi di calcolo. Di entrambe le discipline, quella del numero e l'altra dell'estensione, viene così ad ottenersi un insegnamento più intensivo, senza che l'una delle due distragga dall'altra. L'insegnamento misto e alternato, condotto per guisa che in ogni anno di corso procedano quasi di pari passo l'aritmetica, o l'algebra, e la geometria, io credo che ne allontani dallo scopo che ci proponiamo di raggiungere. Oggi, per esempio, vedremo interessarsi i ragazzi ad un teorema di geometria che stuzzichi il loro appetito; ma domani probabilmente un arido esercizio di calcolo, necessario e, per le rotaie in cui l'insegnamento trovasi, indifferibile, turberà l'appetito del giorno innanzi, il quale appetito per ridestarsi avrà bisogno di vermouth alla noce vomica. Nelle scuole classiche superiori poi e nell'istituto tecnico si rende maggiormente necessario che la geometria pura non venga punto distratta o turbata dall'aritmetica o dall'algebra; massimamente nelle scuole classiche, in considerazione del non facile passaggio che le attende dalla proporzionalità tra grandezze alla proporzionalità tra le loro misure. Anzi, in cosiffatto passaggio sta una delle ragioni che mi fanno prediligere il metodo della fusione, mercè cui verrebbe fatto una volta sola, con più solida preparazione, e non due come oggi, il passaggio stesso, che, se non è paragonabile al passaggio del mar rosso, non è però tale da prendersi a gabbo.

14. Ho toccato un argomento scottante, quello della fusione, lo so; ma lo lascerò quasi subito, perchè con questo po' po' di calore che vi si aggiunge (il centigrado segna qui dentro in questo momento la bellezza di 33°,5), correremmo davvero il pericolo di rimaner fusi qui tutti insieme: e già un esperimento, e fu una fortuna se ne uscimmo illesi, fu fatto il giorno 9 nella calorosa discussione cui diede luogo il tema appunto della fusione. Mi limiterò a brevi spiegazioni della fatta professione di fede fusoria.

Ecco, in prima: io amo la fusione, non la confusione. Non soltanto la planimetria, ma la stessa rettimetria ha esistenza propria e distinta. Nello stato presente della scienza la geometria della retta si riduce a ben meschina cosa se non usciamo dalla retta, a tanto meschina cosa che, chiusi in cotal modo, non siamo buoni neanche a trovare il punto medio di un segmento; la geometria del piano, invece, può andare e va molto in là senza bisogno di uscir da esso: e il progredir di ciascuna consisterà nel crescente numero di veri acquistabili senza uscire rispettivamente dalla retta e dal piano. Ma quando noi rimiriamo la scienza non in sè e per sè, bensì in ordine all'apprendimento nostro, vengon fuori allora le ragioni di opportunità didattica che consigliano la fusione, consistente soprattutto nello studio simultaneo degli argomenti affini di planimetria e stereometria con indirizzo al fecondo principio di dualità, *nulla essendovi in geometria* (osserva Luigi Cremona nella prefazione agli *Elementi di geometria proiettiva:* Roma, 1873) *che così accenda i principianti e li stimoli a far da sè, come il principio di dualità, ed importando quindi sommamente di darne loro la cognizione quanto più presto è possibile e di abituarli ad usarne con sicurezza.* E qui ci calza anche quanto già sapientemente osservava il Lacroix nell'*Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier. La conservation,* così egli, *de l'analogie entre les parties d'un même traicté est de la plus haute importance, puisqu'en même temps qu'elle aide la mémoire du lecteur, elle l'accoutume à généraliser ses idées.* Sono ormai 9 anni che in un mio scritto, (*) posta da prima la questione ne' suoi veri e precisi termini, procurai di rilevare cotali ragioni d'indole didattica consiglianti la fusione nelle stesse scuole elementari superiori. Rispetto poi alle scuole secondarie superiori, la fusione, nel senso dichiarato, è consigliata anche dal riflettere che, considerato lo stato presente della scienza e dei metodi d'insegnamento, ci si presentano spartite in quattro gruppi le proposizioni planimetriche: il primo di quelle che non ci è dato spiegare o dimostrare senza uscir dal piano; il secondo di altre la cui spiegazione o dimostrazione è resa più facile e semplice uscendo dal piano che non rimanendovi; il terzo di quelle la cui spiegazione o dimostrazione è resa, all'opposto, più facile e semplice rimanendo nel piano che non uscendone; il quarto

(*) *L'insegnamento dell'aritmetica e della geometria nelle scuole primarie e popolari* (Città di Castello, S. Lapi, 1889, L. 1.40), pag. 80 e seg.

ed ultimo di quelle che riguardano proprietà dipendenti da certi medesimi principî da cui dipendono le corrispondenti proprietà stereometriche, di guisa che le dimostrazioni date per queste non sono che una facile estensione delle dimostrazioni di quelle. (*)

15. Chiusa la breve digressione, torniamo all'argomento nostro, cioè alla convenienza che in tutti gli ordini di scuole l'insegnamento della geometria pura preceda quello dell'aritmetica, o dell'aritmetica e dell'algebra, al quale ultimo faccia seguito l'insegnamento della geometria metrica. Mi si obbietterà che lasciar gli alunni per lo spazio di uno o due anni senza insegnamento aritmetico o algebrico di sorta quando s'insegna geometria, senza insegnamento geometrico di sorta quando s'insegna aritmetica od algebra, può far dimenticar loro quanto avevano rispettivamente appreso nel precedente ordine di scuole. Ma è questo un pericolo che il maestro può scongiurare, se il voglia; e deve e può scongiurarlo. All'uopo sarà necessario e basterà ch'ei di quando in quando imponga esercizî intorno a cose studiate già in quel precedente ordine di scuole.

16. Darò compimento alla descrizione delle linee generali con un accenno alle ore settimanali d'insegnamento che si propongono.

Le 9 ore che, in complesso, verrebbero assegnate alle tre classi di scuole inferiori soverchiano di 3 le attuali del ginnasio inferiore: sono invece soverchiate di 2 da quelle della scuola tecnica, di 1 da quelle della scuola complementare. È da osservare, quanto al ginnasio inferiore, che il proposto aumento di orario è dovuto all'aggiunzione della geometria fisica.

Le 9 ore che si propongono, sempre in complesso, per la scuola normale soverchiano di 3 il vigente orario. Ma non saremo indiscreti pregando i maestri di calligrafia, di canto e di ginnastica di voler cedere, da buoni fratelli, alla matematica ciascuno un'ora del rispettivo orario. Se è vero, come sempre si dice e decanta, che nelle scuole normali l'insegnamento di capitale importanza è la pedagogia, che, quale astro benefico, illuminerebbe tutti gli altri, non dovrà usarsi un qualche riguardo alla matematica, che, a braccetto con la logica, è, ed è sul serio, la pedagogia della mente?

Le 15 ore proposte per le quattro classi d'istituto tecnico sono soverchiate di 6 dall'orario vigente; ma ricordiamo che è stato escluso l'insegnamento della matematica complementare per gli alunni della sezione fisico-matematica.

Finalmente le 16 ore per le cinque classi di ginnasio superiore e liceo soverchiano di 3 l'attuale orario. E qui, Dio non voglia, ma prevedo che incontreremo gravi ostacoli; tanto più che anche al ginnasio inferiore si recherebbe un aumento di orario. Da un pezzo, miei buoni amici, spira vento non propizio alla povera matematica.

(*) Un bellissimo ed efficacissimo studio è per me il *Pro fusione* di ENRICO DE AMICIS, prof. di matematica nell'istituto tecnico di Brescia: vedi *Bollettino* de l'Associazione " MATHESIS ", 1897-98, pag. 73. È anche notevole in questo scritto la forma vivace e talvolta un po' tagliente, ma pur sempre convenientissima. Vedo, e ne godo, che anche al mio amico De Amicis va molto a sangue il pensiero oraziano, così espresso nel lib. I delle satire:

. . . . *Ridiculum acri*
fortius et melius magnas plerumque secat res.

Di carezze e di baci ne ha sempre ricevuti e ne riceve a dovizia da tutti: un giorno la chiamano la ginnastica del pensiero, e la collocano al di sopra perfino della stessa logica; un altro la quadratrice delle teste; poi anche, con Aristotele, i manichi della filosofia; e poi le commettono altresì di *svolgere ed esercitare,* negli stessi ginnasi e licei, *lo spirito d'osservazione* dei giovani, e di *reintegrarvi,* in compagnia delle scienze fisiche e naturali, *la coltura dei tempi nostri,* essendo esse scienze, e con esse la matematica, così dicono, *opportune a rinvigorire il pensiero, cui danno senso e carattere di modernità.* Tutte belle e stupende cose, che si leggono in documenti ufficiali. Ma intanto? Intanto, fatta e promulgata, per i ginnasi e licei, la disorganizzante, almeno nel rispetto educativo, distinzione tra materie principali e materie secondarie, la matematica si colloca tra queste ultime; e quando agli esami, in applicazione del così detto criterio di maturità, la commissione dichiari maturo in complesso e promuova di classe o licenzi un giovine, sebbene giudicato deficientissimo, poni caso, in matematica, è fatta prescrizione tassativa di supplire senz'altro esame alla deficienza innalzando il voto di tanto quant'è necessario per l'approvazione legale, e segnando il nuovo voto nel registro e nell'attestato o nel diploma di promozione o di licenza. Si ricorre, evidentemente, a cosiffatto espediente offensivo, a dir poco, della serietà del magistero, per non cadere con documento pubblico nella contraddizione di dichiarare ad un tempo quel giovine maturo e immaturo negli studi di coltura generale. La legge del 12 luglio 1896, che, ministro Emanuele Gianturco, riordinava le scuole normali, metteva, è vero, la matematica tra le materie principali, in relazione a quel criterio di maturità; ma poco dopo, il regolamento per l'esecuzione della legge, distinguendo le materie principalissime dalle principali, lasciava la matematica e la storia tra le semplicemente principali; nè basta ancora, perchè poco altro dopo, ministro il Codronchi, le istanze della storia, per essere annoverata tra le principalissime, venivano accolte, quelle della matematica no.

V.

17. Non vi dispiaccia ora, o signori, di volgere uno sguardo ai lineamenti delle tre discipline di studio nei loro rispettivi gradi: la geometria, l'aritmetica e l'algebra.

a)

18. La geometria che io chiamo *fisica,* a meglio significare che i fatti geometrici s'abbiano in prima a studiare nei corpi e attorno ai corpi, è, in fondo, quella medesima che, sotto il nome di geometria *intuitiva,* con atto sapiente quanto provvido istituiva il Baccelli per il ginnasio inferiore nel 1881, quando la prima volta saliva alla Minerva, ma che poi nel 1884 cadde col cader di lui, come non infre-

quentemente succede delle salutari riforme. Il Baccelli però, risalito al potere nel 1893 e rimastovi sino al 1896, ebbe il torto di non far rivivere con sè quella sua figliuola. Lo faccia almeno ora, nella sua terza ascensione, ma lo faccia subito; e ne avrà il plauso e la riconoscenza degli istitutori. Gioverà intanto ricordar qui le efficacissime parole colle quali il Baccelli stesso nel 1881 definiva lo scopo e l'indole della geometria intuitiva. Ei si esprimeva così: *Lo scopo dell'insegnamento della geometria intuitiva nelle prime classi del ginnasio è di procurare ai giovinetti con metodi facili e, per quanto sia possibile, con prove di fatto, le prime e più importanti nozioni della geometria, nozioni che riescano acconce al regolare sviluppo del loro giovane intelletto, utili ad altre scienze positive che dovranno apprendere nel corso ginnasiale, ed opportune non solo ad aprire l'adito, ma a far desiderare lo studio razionale della stessa geometria, che è riservato al liceo.*

Il Baccelli, così parlando, era, si vede, penetratissimo, tra i detti della sapienza antica, dell'oraziano, che

segnius irritant animos demissa per aures,
quam quae sunt oculis subjecta fidelibus, et quae
ipse sibi tradit spectator . . . . :

e, tra i detti dei sapienti moderni, di quello autorevolissimo del nostro Cremona, il quale aveva già riconosciuto che il metodo intuitivo geometrico, usato a tempo e luogo, *lascia nella mente un cumulo di concetti indelebili.* Tutt'è che il maestro, con l'aiuto anche del disegno e di artifizî meccanici, tragga partito dai numerosi fatti geometrici che continuamente si presentano al ragazzo in casa, a scuola, per le strade, in chiesa, dovunque.

19. Un aureo libretto che traduce in atto il procedimento da doversi seguire nella geometria fisica è, per me, la *Geometria popolare* di C. L. LITTROW, recata nel nostro idioma, con note, da David Besso. Di cosiffatti procedimenti trattai anch'io in due libriccini, pubblicato il primo nel 1882,(*) l'altro nel 1889;(**) e vorrete, egregi colleghi, perdonare alla debolezza di un padre il ricordo ch'ei fa di due suoi figliuoli, perchè, miei cari, il sangue non è acqua.

Io credo, del resto, che, a rendere efficace l'insegnamento della geometria fisica, la scuola debba esser fornita di un gabinettino e laboratorio geometrico: compassi, doppi decimetri, righe, squadre, parallele, modelli di cartone, di legno, di fil di ferro; fili e superfici flessibili e inestendibili, superfici sviluppabili; figure solide a superficie rivoltabile; solidi compenetrantisi; apparecchi semplicissimi per la sperimentazione delle equivalenze in lunghezza, in area e, per mezzo di polveri finissime e scorrevolissime o di liquidi, in volume; modelli per la rappresentazione delle simiglianze, ed anche delle uguaglianze e delle simiglianze simmetriche, ecc. ecc. Gli esercizî poi di disegno e di costruzioni effettive dovrebbero campeggiare largamente.

(*) *L'insegnamento dell'aritmetica e della geometria nelle scuole ginnasiali e tecniche.* Roma, Paravia, 1882, L. 1,25.

(**) Vedi nota a pag. 77.

20. Una visitina, di quando in quando, al gabinetto e laboratorio geometrico farà bene ai giovani anche nel periodo d'insegnamento della geometria razionale, senza verun pericolo che le antiche reminiscenze possano comecchessia contaminarla. *Se il sistema logico geometrico* (così Giuseppe Veronese nella prefazione agli « Elementi di geometria »: Verona, 1897) *vuol essere indipendente dall'intuizione, ciò non significa che la vogliamo bandire dall'insegnamento: tutt'altro; desideriamo anzi che ogni proposizione ed ogni ragionamento sieno continuamente vivificati dall'intuizione spaziale, mediante l'osservazione di figure o modelli che aiutino lo svolgimento dell'immaginativa geometrica, sì che il ragionamento stesso apparisca agli alunni conseguenza più dell'intuizione che di una logica arida ed astratta.* (*) Gli esercizi di disegno dovrebbero sempre, o quasi, accompagnare anche la geometria razionale, specie la pura, e quasi venir fusi con essa; ma con accuratezza massima, perocchè una figura, se mal fatta o sgarbata, anzichè aiutare la facoltà immaginativa dell'alunno, la svia e la corrompe. Già, una compiuta educazione geometrica, anche per le scuole classiche, dovrebbe non andar mai disgiunta da esercizi di disegno; e poi si sa che il tracciamento effettivo ed accurato delle figure agevola di molto lo studio delle proprietà loro.

Che questi desiderabili rapporti fraterni tra il disegno e la geometria razionale possano degenerare in amplessi incestuosi, da riuscire d'impedimento alla generalità dei concetti, è un timore vano, da cui può soltanto esser compreso chi non pone mente all'indole e alla genesi vera delle nozioni geometriche e alle leggi del pensiero. Le geometriche non sono mai idee pure, com'è pura l'idea astratta e generale di numero: qualunque figura è qualcosa di determinato dello spazio, che apparisce mai sempre risultante di elementi collocati l'uno di seguito all'altro *juxta positionem,* come suol dirsi, esteriori l'uno all'altro, i quali nel calcolo possiamo bensì surrogare con segni astratti, ma che poi siamo obbligati ad immaginare quando li supponiamo contenuti entro limiti di forma inflessibile. Ciascuna di tali forme può dar luogo a relazioni numeriche astratte, ma essa per sè non cessa mai di essere un'immagine, un'immagine, per altro, generale, nel senso che è schematica. In vero, se la geometria tiene sempre desta in noi la facoltà d'intuizione, le immagini però che in noi si producono, e quindi quelle altresì che con imitazione disegniamo sulla carta, sono ben diverse dalle immagini propriamente empiriche. Io vedo un foglio di carta tutto sparso di caratteri; chiudo gli occhi, ed ho l'immagine del medesimo foglio: questa è un'immagine del tutto empirica, e rassomiglia in tutto la rappresentazione stessa dell'oggetto, avendo di questo presenti a me le dimensioni, il colore, le piccole irregolarità, le linee nere che formano i caratteri, ed altre particolarità; in breve, è l'im-

(*) Ho citato le parole del Veronese come quelle che, per l'autorità scientifica della persona che le ha proferite e per il nome ch'egli ha di rigorista in geometria, avvalorano le mie affermazioni; perocchè, del resto, io sento di non poter seguire interamente l'illustre geometra italiano (e ne dirò le ragioni nello studio già annunziatovi) quanto al nuovo sistema, da lui inaugurato, d'insegnamento della geometria elementare, sebbene, forse e in sostanza, sia soltanto il caso di dover dissipare certi malintesi.

magine individua dell'oggetto individuo. Al contrario, quando io immagino un triangolo, un cerchio, un prisma, l'immagine è individua perchè tale è il carattere di qualunque immagine, ma nel tempo stesso è generale in quanto è uno schema: tracciandola, non mi subentra l'idea della riproduzione, tratto per tratto, di un modello individuale dato, ma soltanto mi accorgo distintamente di realizzare una certa legge di generazione, che è l'essenza della figura immaginata. Con la indifferenza nostra di dare alle immagini geometriche dimensioni di diversa grandezza, veniamo ad attestare sempre meglio l'attività mentale nostra, mercè cui facciamo variare all'infinito le grandezze rappresentate, senza che svaniscano o restino modificate le proprietà e le relazioni delle forme. Ecco perchè e in qual senso l'immagine schematica è generale, consistendo la generalità sua nella legge genetica, che può indifferentemente realizzarsi dovunque nello spazio. Pertanto, ove il disegno geometrico non sia altro che la riproduzione fedele, il più possibile, di quelle stesse immagini che lo scolaro è obbligato a formarsi nella mente sua per l'apprendimento dei veri geometrici, come e perchè avrà da venirne pregiudizio alla generalità dei concetti?

21. Alle due geometrie dell'istituto tecnico e del ginnasio superiore e liceo, costituiti, come avvertii (III, 11), in uno stesso grado di razionalità, si è data anche la medesima estensione, come apparisce dai quadri; ed in entrambe si è fatto pure accenno ai *luoghi geometrici,* perchè il metodo che da questi ha nome riuscirà un salutare principio di avviamento e come una preparazione indispensabile ai moderni studi geometrici per gli aspiranti dottori di matematica, ed alla geometria analitica per essi e per gli aspiranti ingegneri.

Quanto a metodo d'insegnamento però, nelle due geometrie per le due categorie di alunni, mi è sembrato opportuno e necessario, per ragioni troppo evidenti, relative all'indirizzo diverso de' loro studi, proporre una differenza di trattazione nelle teorie dell'equivalenza e della simiglianza. In breve: io renderei obbligatorio nell'istituto tecnico il trattare la teoria dell'equivalenza col metodo euclideo; quindi indipendentemente da concetti di misura, ma movendo dalle nozioni comuni di lunghezza, area e volume, quali grandezze, e dalle pur comuni nozioni di uguaglianza e somma di lunghezze, di aree e di volumi, con le corrispondenti leggi commutativa e associativa, quali postulati. Mi sembrano eccellenti anche nel rispetto di questa maniera di trattazione le edizioni anteriori a quella, interamente rifatta, del 1886 degli *Elementi di geometria* di Achille Sannia ed Enrico D'Ovidio. Nelle scuole classiche superiori, invece, lascerei libero il maestro di seguire, nella teoria stessa dell'equivalenza, o il metodo euclideo o il moderno, consistente, questo, nel sostituire alle dette nozioni comuni tanti speciali concetti di equivalenza (in fondo poi non sono che altrettanti postulati aderenti al concetto generale primordiale di uguaglianza), quante le diverse grandezze, specificabili sotto determinati punti di vista. Quale dei due sistemi sia preferibile nel duplice rispetto, scientifico e didattico, è questione che a me sembra non ancora risoluta in modo soddisfacente. Non è il caso di parlarne qui oggi; ma io ne tratto a fondo, nel miglior modo che per me si possa, nel lavoro in corso di pubblicazione, che ebbi già l'onore di annunziarvi (III, 8). Nel qual lavoro mi occupo anche della dottrina della simiglianza e di quella delle grandezze proporzionali, in ordine a metodo. Frattanto dichiaro, come apparisce dai quadri, che io renderei obbligatorio nell'istituto tecnico il metodo che muove dalla teoria numerica della proporzionalità; all'opposto, renderei obbligatorio per le scuole classiche superiori il metodo euclideo, o altro che si ritenga ad esso equipollente. (*)

(*) Mi piace, per altro, di far qui accenno ai principi dai quali io moverò per costituire la teoria della proporzionalità.

Numero, quoto, quoziente e misura da un lato, ragione e rapporto dall'altro sono due classi di concetti che a me pare s'abbiano a tenere ben distinte. Il numero è quel che è, vale a dire, un concetto primordiale, indefinibile. La specificazione che se ne fa è nominale, dipendente, per altro, dalla specificazione reale dell'azione sul modulo: e anche intorno a ciò darò complete spiegazioni nel mio lavoro, sottoponendo al giudizio dei maestri di matematica elementare una nuova maniera di graduale allargamento del concetto di numero e, corrispondentemente, della teoria delle operazioni sui numeri. Quoto, quoziente e misura sono casi particolari distinti del numero e dei concetti nominalmente specifici di questo, come il rapporto è caso particolare della ragione. La ragione nel suo concetto generico non è numero nè risulta di numeri; il rapporto neanche esso per sè è numero, ma risulta essenzialmente di due numeri. Consideriamo le due grandezze g, g' finite e omogenee, che possono anche esser numeri. A me piace di denotare con $\begin{array}{c} g \\ | \\ g' \end{array}$, che si pronunzia *g sta traffrontata al* g', la ragione di g a g', e con g/g', che si pronunzia *g sta* (commisurata a) g' il rapporto di g a g'; conservando poi, in comune, la notazione $\frac{g}{m}$ $\left(\text{oppure } \frac{g'}{m}\right)$, $\frac{g}{g'}$, che si pronunziano ugualmente *g divisa* (partita in) m, *g divisa* (partita con) g', significanti rispettivamente il quoto, cioè la nuova grandezza γ che si ricava operando sopra g secondo $\frac{1}{m}$, divenendo così m la misura di g riferita a γ quale unità di misura, e il quoziente, cioè il numero m' secondo cui si deve operare su g' per riprodurre g, il quale m' è la misura di g riferita a g' quale unità di misura. Per ragione intendo, con Euclide, *quaelibet habitudo* tra g e g' *secundum quantitatem*. Per Euclide è un concetto primordiale quello di grandezza, come sono concetti primordiali quelli di uguaglianza, di maggiore e minor grandezza, e di somma e differenza di grandezze; e tacitamente viene assunto da lui come postulato che g, g' sono essenzialmente uguali o disuguali, e se disuguali, una di esse è essenzialmente maggiore o minore dell'altra. Nella nozione euclidea di ragione v'ha di oggettivo la presenza e la inseparabilità delle due grandezze g e g', di soggettivo la percezione della loro uguaglianza o disuguaglianza, a significare ciò che v'ha di minimo indispensabile nel rispetto loro valutativo. Quando l'*habitudo secundum quantitatem* tra g e g' è, in particolare, *secundum mensuram*, la ragione diventa rapporto; nel quale abbiamo la percezione simultanea della misura h di g riferita a g' come unità, e della misura $\frac{1}{h}$ di g', riferita a g. Ho detto che g e g' possono anche esser due numeri n, n'. In tal caso la ragione $\begin{array}{c} n \\ | \\ n' \end{array}$ ci darà la percezione della uguaglianza o disuguaglianza dei numeri n, n'. Questi sono anche rappresentati dalle loro misure rispettive $\frac{n}{n'}$, riferita ad n' come unità, $\frac{n'}{n}$ riferita ad n; ed abbiamo nel rapporto n/n' la percezione simultanea di cotali misure. Finalmente, nel quoto $\frac{n}{n'}$ (n partito in n') abbiamo il nuovo numero $\frac{1}{n'}$ n, divenendo il numero n' la misura del numero n riferita a $\frac{1}{n'}$ n come ad unità; e nel quoziente $\frac{n}{n'}$ (n partito con n') abbiamo il numero h secondo cui si deve operare sul numero n' per riprodurre n, il qual numero h è poi la misura del numero n riferita al numero n'.

Il rapporto g/g' delle due grandezze matematiche g, g' è, a sua volta, esso stesso una grandezza matematica, potendovisi applicare i due concetti di uguaglianza e di somma di rapporti, di maggiore e di minor rapporto e di differenza di rapporti, e potendosi altresì stabilire gli assiomi e i postulati concernenti il rapporto molteplice e il summolteplice. Ma allora, pur rimanendo sempre sottintesa la diversità specifica tra rapporto e quoziente, tra rapporto e quoto, la teoria delle proprietà dei rapporti, delle relazioni loro e delle loro operazioni viene a coincidere, corrispondentemente, con la teoria delle frazioni; talchè potrà provvidamente sopprimersi la teoria dei rapporti e delle proporzioni per rapporto, come trattato speciale separato dalla teoria delle frazioni, avendo cura di comprendere in questa tra le proprietà delle uguaglianze di frazioni quelle che nei trattati ordinari corrispondono alle proprietà delle proporzioni, e ricordando di far passare dallo stato la-

22. Nella geometria razionale della scuola normale e, a più forte ragione, nella geometria fisica della scuola secondaria inferiore, non solo le proprietà geometriche concernenti la simiglianza, ma anche quelle che si riferiscono all'equivalenza, dovrebbero, come apparisce dai quadri, aver fondamento nel concetto di misura e ricevere svolgimento da esso. L'abito di riferire una cosa ad un'altra omogenea. intuendo così la misura di una di esse per mezzo dell'altra, è un abito istintivo, che, ben diretto e disciplinato, è fonte di molte ed utili conoscenze geometriche; e per la scuola normale, e, a maggior ragione, per la secondaria inferiore, avuto riguardo all'indole e all'indirizzo loro, sarà necessario e basterà s'interrompa e si freni codesto abito durante il solo periodo dello studio delle proprietà di congruenza.

S'intende che nel subordinare l'equivalenza alla misurazione dovremo però quanto alle lunghezze circolari, alle aree e ai volumi (non parlo delle lunghezze rettilinee e delle grandezze angolari, perchè in entrambe esse l'equivalenza è anche congruenza) premettere corrispondentemente: 1° la dimostrazione della costanza del rapporto della circonferenza al diametro; 2° la trasformazione del parallelogrammo in rettangolo di ugual base e di uguale altezza, e la decomposizione del primo in due triangoli uguali; 3° la trasformazione del prisma in prisma retto di ugual base e di uguale altezza, ed in particolare del parallelepipedo in parallelepipedo retto di ugual base e di uguale altezza, e poi analogamente del retto in rettangolo, ed inoltre la decomposizione del parallelepipedo in due prismi triangolari equivalenti, da trasformarsi a loro volta in prismi retti uguali, e la decomposizione di un prisma triangolare in tre piramidi triangolari equivalenti. Va poi con sè che l'accennato triplice procedimento sarà, almeno prevalentemente, sperimentale nella scuola secondaria inferiore, razionale nella scuola normale.

---

tente al libero le diversità specifiche tra rapporto e frazione, tra uguaglianza di frazioni e proporzione, tutte le volte che si tratterà di questioni concernenti grandezze proporzionali. In nessun caso però potremo omettere la teoria speciale e distinta delle ragioni e delle proporzioni per ragione. La ragione di due grandezze matematiche omogenee e finite è anch'essa una grandezza matematica. Euclide, per mezzo degli equimolteplici, vi applicò il concetto di uguaglianza e l'altro di maggiore e minor ragione; anzi li applicò anche al paragone tra la ragione di due grandezze omogenee e quella di due grandezze eterogenee alle prime. Non si curò di applicarvi il concetto di somma, ma, quasi in compenso di questo, applicò il concetto di ragion composta. A lui bastava l'applicazione di cotali concetti per edificare la teoria delle grandezze proporzionali e delle figure simili. Ma, volendo, si potrebbe benissimo precisare in tutta la generalità, mercè l'intervento del concetto di limite, il significato dell'espressione $\genfrac{}{}{0.5pt}{}{g}{g'} + \genfrac{}{}{0.5pt}{}{g_1}{g'_1}$, e, stabilendo poi gli assiomi o i postulati concernenti la ragion molteplice e la summolteplice, costituire la teoria matematica delle ragioni. Anzi, si potrebbe anche andare più in là; si potrebbe cioè costituire la teoria matematica delle ragioni tra certe grandezze anche non matematiche; ed allora tra queste e le matematiche farebbe quasi da anello di congiunzione la ragione. Qui accenno di volo ad argomento di cui mi occuperò con qualche larghezza nel mio lavoro. Se della teoria matematica delle ragioni non si vede a colpo d'occhio l'importanza nello stato presente della scienza, io credo però che la teoria stessa potrebbe gittar luce sopra altre speciali teorie, per esempio, sul *giocondo* ma pur sempre *nodoso*, come si esprime Daniele Bernoulli, calcolo delle probabilità. E chi sa che la teoria delle ragioni non sia destinata a far da intermediaria per veder modo di render tributarie della matematica alcune delle cose che sino ad oggi le si sono mostrate renitenti?

b)

23. Passiamo all'aritmetica.

Quanto, in prima, all'aritmetica pratica per le scuole secondarie inferiori, l'essenziale è che si dieno concetti esatti delle operazioni, facendoli derivare dal bisogno di risolvere i quesiti di varie specie, attinenti agli usi della vita, e stabilendo il nesso delle operazioni stesse dipendentemente dal nesso dei quesiti di varia indole. Le regole delle operazioni basterà che sieno enunciate con esattezza e verificate per via di esercizî. Analogamente dicasi delle proprietà e relazioni numeriche, all'infuori dei casi semplicissimi nei quali sia agevole con poche parole far afferrare dal giovinetto la dimostrazione generale di qualche regola o proprietà o relazione: ma anche in questi pochi casi la prova sperimentale deve precedere a guisa di preparazione e seguire a guisa di conferma. Sono, secondo me, da proscrivere certe laboriose dimostrazioni fatte sopra numeri particolari, come, ad esempio, quelle, che vedo in alcuni libretti di aritmetica pratica, relative ad alcuni caratteri di divisibilità. In questi casi è vano sperare che l'alunno capisca la dimostrazione in sole parole, nè riuscirebbe sufficiente allo scopo l'agevolazione, intempestiva, che si offerisse alla mente di lui col farla appoggiare sopra simboli spogli di rappresentazioni numeriche particolari: d'altra parte, istituire e condurre il ragionamento sopra due dati particolari numeri è rattenere la mente dell'alunno, alla quale non è possibile svincolarsi dagli elementi particolari per afferrare il valor generale del processo dimostrativo. Nè si dica che qualcosa di analogo accade in geometria quando si dimostra qualche proprietà di una figura disegnata. Qui, come avvertimmo, abbiamo sì un fatto individuo, quale è la figura disegnata, ma questo fatto individuo è tale da obbligar l'alunno a pensare alla legge generale di generazione della figura; tanto vero che se, ad esempio, si tratta di un triangolo, ch'ei vede disegnato in lavagna, ei si sente liberissimo di concepirlo con modalità diverse da quelle onde trovasi descritto. Se gli presentate, invece, i due numeri 145724, 18622, il suo pensiero non ha più veruna libertà di movimento, perchè si tratta di entità determinate e circoscritte per ogni verso, e del ragionamento fatto non resta nella mente di lui veruna traccia di generalità. Quando anche ei ricordi il procedimento indicato dal libro o spiegato dal maestro, e sappia ripeterlo sopra due altri diversi numeri, acquisterà tutt'al più la persuasione induttiva che il procedimento stesso è applicabile a tutti i casi possibili; donde la giustificazione della regola o della proprietà numerica. Ma allora val meglio, ed è cosa più spedita, enunciare addirittura e con precisione la regola o la proprietà, e contentarsi di verificarla sopra parecchi e svariati esempi, rimandandone la dimostrazione vera e propria allo studio dell'aritmetica generale.

24. L'aritmetica generale della scuola normale sino ed esclusivamente alla teoria della proporzionalità è in estensione pressochè

quella medesima dell'istituto tecnico e del liceo. Quest'ultima teoria, che nella scuola normale è tra quelle dell'aritmetica generale, nell'istituto e nel liceo è stata assegnata all'algebra come applicazione della teoria delle equazioni e delle funzioni; ed in questo posto la teoria stessa può ricevere un più alto grado di generalità.

25. Nell'aritmetica generale, da insegnarsi anch'essa, secondo me, a base essenziale di grandezza, come i procedimenti dimostrativi debbono aver carattere di generalità e di rigore scientifico, così sarà opportunissima da bel principio la rappresentazione di numeri per mezzo di lettere.

Dissi *a base essenziale di grandezza*, riferendomi soprattutto, s'intende, a ragioni di convenienza didattica. Un'aritmetica, dirò così, astratta, in cui alla teoria delle operazioni sia dato un fondamento puramente analitico, sarà pregevole come esercizio logico e come speculazione scientifica, ma riuscirebbe una di quelle scienze che Francesco Bacone da Verulamio nel *Novum organum* chiama appunto *scientiae speculatione pulchrae, sed operae inactivae, inactivae,* intendiamo, nel rispetto didascalico ed avuto riguardo al primo periodo dell'insegnamento matematico razionale.

L'uso di simboli o lettere per le rappresentazioni di numeri è, ripeto, opportunissimo, tranne il caso, s'intende, di dimostrazioni facili per sè, e nelle quali basti discorrere in termini generici per far comprendere nella generalità sua la dimostrazione di un teorema. Del resto, l'introduzione dei simboli non può spaventare l'alunno, perchè è negli usi quotidiani della vita e delle amministrazioni che, quando si voglia porre una questione sotto aspetto generico e darne una soluzione comprensiva di tutti i casi particolari ad essa subordinati, non si nominano mai oggetti determinati o persone di nostra immediata conoscenza, le cui qualità particolari potrebbero far perder di mira il carattere generale della questione; e bensì, dovendo, ad esempio, parlar di persone, sogliamo dire Tizio, Caio, Sempronio.

c)

26. Gli elementi di algebra sono assegnati soltanto alla classe 2ª liceale ed alla 3ª d'istituto tecnico, e con un'unica estensione e qualità di argomenti, salvochè alla teoria della proporzionalità nel liceo si dà un maggior grado di generalità, facendo derivare la proporzionalità per rapporto dalla proporzionalità per ragione.

27. Alla scuola normale è sottratta quell'algebretta di cui già avemmo occasione di far cenno (IV, 12), assegnata dal vigente programma ufficiale alla classe 1ª; e spero di non averne rimprovero da parte dei professori. Essi converranno, credo e spero, con me che insegnare quel tantino di algebra che vuole il programma ed insegnarlo a quel modo e tra quelle strettoie, non può non turbare e inquinare lo spirito di razionalità che deve informare l'intero insegnamento matematico della scuola normale. D'altra parte si avrebbero a superare difficoltà non lievi per dare a modo la teoria dei numeri negativi, e per somministrare in tutto il resto concetti esatti e pieni; e si

avrebbero da superare a solo scopo di mettere l'allievo maestro in condizione di poter risolver problemi che, tradotti in calcolo, dieno luogo ad equazioni di primo grado ad una sola incognita. Ora, tutto considerato, mi par proprio che non franchi la spesa. Ma vedete, dicono alcuni: frequentemente capitano problemi d'aritmetica a risolvere i quali si richiede un certo acume, non proprio di tutti, e uno sforzo considerevole d'intelletto, mentre riesce facile e spedito risolverli se ci adoperiamo subito a tradurli in equazione. Verissimo questo, non lo nego; ma c'è un'importante riflessione a fare. Io dico cose che ognun di voi m'insegna, lo so, ma debbo dirle, o meglio, ricordarle, per giustificare le mie proposte, non per altro. Il principio d'uguaglianza è un principio organico che vivifica e domina ogni sorta di conoscenze, empiriche o razionali, riguardanti la grandezza. L'uguaglianza nelle sue due specie di uguaglianza identica e di equazione comprende da una parte le leggi e i modi di trasformazioni e di collegamenti, dall'altra le varie ricerche sotto i tre aspetti di quantità, di relazione e di forma. Non v'ha questione, anche del più volgare conteggio e di facilità estrema, che tacitamente od esplicitamente non si risolva per via di equazioni. Noi, senza avvertirlo, quando ci si presenta un quesito, ci mettiamo subito in cerca di un punto di appoggio, procurando di costituire attorno a questo la mente nostra in una specie di equilibrio tra un complesso ed un altro di elementi, e tentando di snidarne qualcuno; cosa che, naturalmente, riesce più o men facile, più o men difficile, secondo i casi. In noi dunque c'è come il senso dell'uguaglianza, il quale, al pari degli altri sensi, è ufficio dell'educatore svolgere e disciplinare. E siffatto svolgimento può sino ad un certo punto conseguirsi senza bisogno di veruna teoria di equazioni. Accade quel medesimo che nel primo studio dei fenomeni naturali: altro è la percezione e l'applicazione immediata di un fatto fisico, ed altro la sua spiegazione, la designazione, cioè, del posto che gli compete tra le classi dei fenomeni. Il maestro pertanto si regolerà saggiamente e provvidamente nel far contrarre ai ragazzi, non solo nello studio dell'aritmetica generale, ma prima anche, per altro con la debita conveniente gradazione, in quello dell'aritmetica pratica, nel far contrarre, dico, l'abitudine di rappresentare con un simbolo l'incognita di un quesito proposto e di esprimere sopra di questa o attorno a questa e ai dati le operazioni che si richiedono. Ne risulterà sempre, in ultim'analisi, una relazione di uguaglianza; e spesso accadrà, nei comuni quesiti, che l'equazione è di primo grado, e tale che con semplici ragionamenti, senza bisogno di teoria di equazioni, riesca d'isolare l'incognita. L'intento dunque può, se non in tutto, in gran parte conseguirsi: e si avrà un acconcio espediente didattico che agevola la risoluzione dei quesiti, e serve di preparazione alla teoria delle equazioni, da svolgersi a tempo e luogo.

28. Per queste stesse considerazioni, ed a maggior ragione, non ho compreso nello schema d'insegnamento della matematica elementare delle scuole secondarie inferiori quella parte che è voluta dal

vigente programma ufficiale delle scuole tecniche, indicata con le seguenti parole: *Uso ed applicazione dell'algoritmo algebrico in alcuni problemi semplici.*

VI.

29. È tempo omai che raccogliamo le forze per farle convergere verso una conclusione, ma senza pistolotti pedagogici; e per parte mia concludo addirittura proponendovi di proporre all'amministrazione centrale della pubblica istruzione: 1° che nel promesso piano di riordinamento dell'istruzione secondaria sia mantenuta la separazione dell'istruzione classica dalla tecnica, e per guisa che la biforcazione continui ad aver luogo subito dopo il periodo delle scuole elementari; 2° che si affretti lo sdoppiamento dell'attuale scuola tecnica, mercè la istituzione di scuole di arti e mestieri; 3° che la sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico sia direttamente congiunta con la scuola d'applicazione per gli ingegneri; 4° che si costituiscano due gradi di matematica elementare: la propedeutica matematica per le scuole secondarie inferiori e la matematica razionale per le superiori, comprendendo la prima in unico corso triennale di studio per la scuola tecnica, la complementare femminile e il ginnasio inferiore; 5° che la sostituzione ai programmi ufficiali di precisi e determinati limiti venga estesa alle scuole e agli istituti tecnici ed alle scuole complementari e normali; 6° che l'insegnamento della matematica tra i vari gradi e ordini di scuole secondarie venga ripartito nel modo che apparisce dai seguenti quadri, i primi tre dei quali (A, B, C) e l'ottavo (I) sono tipici, perchè da essi prendono forma, corrispondentemente, gli altri tutti:

Propedeutica matematica per le scuole secondarie inferiori.

(SCUOLA TECNICA, SCUOLA COMPLEMENTARE FEMMINILE E GINNASIO INFERIORE)

Classe 1ª — *Geometria fisica pura:* 2 ore settimanali.

QUADRO *A*.

I. Preliminari.

1. Corpo e estensione: luogo, intrinseco ed estrinseco; posizione; movimento. Le tre dimensioni. — 2. Spazio: superficie, linea, punto. Elementi fondamentali dello spazio: il punto, la retta e il piano. La linea curva, piana o gobba, e la superficie curva. Le figure: loro movimento. — 3. Grandezza e forma nelle figure. Le grandezze geometriche, estese ed intense: la lunghezza, l'area e il volume: l'angolo, la striscia e lo strato. (*) — 4. Oggetto della geometria. La congruenza; la misura, l'equivalenza e la simiglianza: geometria pura e geometria metrica.

(*) Fra le tre specie di grandezze *lunghezza, area* e *volume* e ciascuna delle altre tre *angolo, striscia* e *strato* v'ha, fuor di dubbio, una differenza essenziale. In vero se, comunque e dovunque, stacchiamo dall'estensione lineare o superficiale o spaziale corrispondentemente una porzione qualsiasi, questa sarà sempre una lunghezza o un'area o un volume; ma non è così relativamente alle altre tre specie di grandezze, perchè la porzione staccata di estensione superficiale piana rispetto all'angolo piano e alla striscia, di estensione spaziale rispetto all'angolo diedro, al poliedrico e allo strato dev'essere staccata in maniera determinata affinchè mantenga il carattere rispettivo di angolo piano e di striscia, di angolo diedro o poliedrico o di strato. Pertanto, se è utile avere riguardo nell'angolo piano e nella striscia alle porzioni di piano rispettivamente da essi determinato, e ana-

II. **La congruenza.**

5. Figure congruenti. — 6. Rette. — 7. Intersezione e parallelismo: rette, piani, rette e piani. Rette a sghembo. Angoli: rettilinei, diedri, poliedrici (angoloidi). Angoli di rette a sghembo. Angoli di rette con piani. — 8. Intersezioni di linee, di superficie, di linee e superficie. — 9. La curvatura: la tangenza e l'angolo di contingenza. — 10. Poligoni, poliedri. Poligoni regolari, poliedri regolari platonici. — 11. Circoli, sfere. — 12. Cilindri, coni.

Classe 2ª — *Aritmetica pratica*: 4 ore settimanali.

QUADRO *B*.

I. **Preliminari.**

1. Il contare. L'uno e il numero; l'unità e la pluralità: il modulo e la collezione. (*) — 2. Oggetto dell'aritmetica pratica: l'arte del fare i conti e i quesiti attinenti ai bisogni e agli usi della vita.

II. **I numeri.**

3. La numerazione: sistema decimale. — 4. Addizione e sottrazione: trasformazione di quesiti che danno luogo a sottrazioni impossibili. — 5. Moltiplicazione e divisione. Quoto e quoziente: il resto della divisione. — 6. Multiplo e summultiplo: caratteri di divisibilità. — 7. Multiplo e summultiplo comune di più numeri: minimo e massimo. — 8. Numero semplice e numero composto. (**) Numeri

---

logamente nell'angolo diedro, nell'angolo poliedrico e nello strato alle porzioni di spazio, non sarà lecito però riferire come specie a genere l'angolo piano e la striscia all'area, gli angoli diedro e poliedrico e lo strato al volume. Per queste considerazioni ho proposto di lasciare alla lunghezza, all'area e al volume la qualificazione, in comune, di grandezze propriamente *estese*, alle altre quella, pure in comune, di grandezze *intense*. Quanto all'angolo, in particolare, la distinzione è giustificata anche dal carattere metrico suo, essenzialmente diverso da quello della lunghezza, dell'area e del volume: non parlo della striscia e dello strato, che non entrano mai in veruna guisa nelle relazioni metriche tra gli elementi delle figure. All'angolo, in vero, è fatto divieto assoluto d'intervenire personalmente in coteli relazioni, d'intervenirvi, cioè, in forma algebrica e con la propria misura, immediata o mediata che sia, intendendosi per misura immediata quella che è riferita ad un dato stato angolare, per mediata quella che è riferita allo stato angolare corrispondente, negli archi di un cerchio di dato raggio, all'unità di lunghezza; fatta eccezione, si capisce, per la relazione metrica tra gli elementi del circolo di raggio *r*, nella quale appunto, $a = \frac{1}{2} \alpha r a$, l'angolo interviene con entrambe le proprie misure, la immediata *a*, riferita all'angolo retto, la mediata *α*, riferita allo stato angolare corrispondente, tra gli archi, all'unità di lunghezza. Del rimanente, l'angolo, se non può intervenire personalmente nelle relazioni metriche, può farsi però rappresentare, e si fa rappresentare, da uno qualunque de' suoi sei rapporti goniometrici. Qui però la parola, per sè stessa, snatura il concetto che si vorrebbe con essa esprimere, perchè que' rapporti sono bensì i rappresentatori dell'angolo, ma non i misuratori di lui. Per questa ragione al termine *goniometrico* io avrei sostituito l'altro, pur derivante dal greco, di *goniodittico* (Quadro K, 13), cioè indicativo, dimostrativo, determinativo, rappresentativo dell'angolo. Dell'accennata impossibilità di una relazione algebrica tra le misure degli angoli e delle rette di una figura, può darsi una rigorosa dimostrazione, la quale però eccederebbe le forze della matematica elementare. Il maestro, per altro, deve, pare a me, non astenersi dal farne chiaro annunzio, indispensabile alla giusta orientazione del discepolo nella teoria della misura; ed a me ha sempre recato e reca meraviglia che in nessun trattato elementare, di quelli, almeno, che io conosco, trovisi fatto accenno a codesto punto, che pur mi sembra di capitale importanza.

(*) La parola *modulo* (modello, esemplare, dal latino *modulus*, diminutivo di *modus*, misura), per significare l'elemento della collezione, è acconciamente adoperata da F. VALLÉ nell'*Études philosophiques sur la science du calcul* (Paris, 1841). Quello che è l'*uno* rispetto al numero è il modulo rispetto alla collezione: e nella stessa guisa che *unità* è, propriamente, l'astratto di *uno*, modularità, se il vocabolario registrasse questa parola, sarebbe l'astratto di modulo. Non sarebbe però lecito, a rigor logico di termini, dire che *uno* è l'astratto di *modulo* e *numero* l'astratto di *collezione*. (Ved. a pag. 102 e seg. il mio libretto citato nel § IV, 14 della presente relazione).

(**) Chiamar *primo* un numero che non ammette divisori all'infuori dell'uno e di sè stesso, e *primi tra loro* quelli che non ammettono verun divisore comune all'infuori dell'uno, non mi sembra ben fatto, perchè si contravviene alla provvida legge della economia nel definire e nel distinguere, e vi si contravviene col concetto *primo* un vero *intruso*, non potendosi in veruna guisa riferir ad esso come a comun genere le due diverse classi *primi ognuno in sè o primi tra loro*. Mi par più giusto chiamar *semplice o composto* il numero secondo che non ammetta o ammetta divisori nel senso dichiarato, e dir poi *primi* o *non primi*, senz'altro, due o più numeri non aventi od aventi divisori comuni. Se è lecito ai chimici chiamar semplice una sostanza fin qui indecomposta, sebbene non dimostrata indecomponibile, a più forte ragione potrà esser lecito a noi dir semplice un numero essenzialmente indecomponibile in fattori. E qui mi sovviene la *chimica* dei numeri; così battezzata, efficacemente, in un suo scritto da Giovanni Frattini, la parte dell'aritmetica che studia le proprietà *chimiche*, com'ei appunto le chiama, dei numeri, le proprietà, cioè, *più recondite, che metton capo ai fattori primi dei numeri medesimi;* ed io aggiungo che, in base della medesima analogia, potrebbe l'algoritmo chiamarsi la *fisica* dei numeri. Il Frattini poi, per rimaner conseguente a sè medesimo, avrebbe dovuto chiamar anch'esso *semplici* quei fattori che chiama *primi*.

primi. — 9. La serie naturale dei numeri e quella, pur naturale, dei numeri semplici. — 10. Scomposizione d'un numero ne' suoi fattori semplici. Fattori composti. — 11. Elevamento a potenza: radice e logaritmo. La serie naturale dei numeri e quelle, pur naturali, delle loro potenze successive. Estrazione delle radici seconda e terza: il resto dell'estrazione.

III. Le frazioni.

12. Frazione. Proprietà e trasformazione delle frazioni. — 13. Addizione e sottrazione. — 14. Moltiplicazione e divisione. — 15. Elevamento a potenza: radice e logaritmo. Significato di radice approssimata di dato grado di numeri o frazioni non potenze di quel grado. Estrazione delle radici seconda e terza.

IV. Le frazioni decimali.

16. Frazione decimale. Proprietà delle frazioni decimali. — 17. Addizione e sottrazione. — 18. Moltiplicazione e divisione. — 19. Trasformazione di una frazione non decimale in decimale e viceversa: frazione decimale periodica; semplice e mista. — 20. Estrazione delle radici seconda e terza.

V. I numeri e le frazioni.

21. Specificazione nominale del numero dipendentemente dalla specificazione reale dell'azione quantitativa sul modulo: il numero intero e il fratto. — 22. La legge commutativa della somma e del prodotto. La legge associativa della somma e la distributiva del prodotto. — 23. Nesso delle operazioni: additive e sottrattive, dirette e inverse. Il perchè della corrispondenza di una sola operazione inversa alla somma e al prodotto, di due alla potenza.

VI. (*) Le misure.

24. Grandezza. Grandezza misurabile o no. Quantità. Misurazione, misura, unità di misura. — 25. Grandezza molteplice e grandezza summolteplice: caratteri di

---

(*) Nelle conoscenze riguardanti le misure, i sistemi di misura e la proporzionalità, e quindi anche nell'intera geometria fisica metrica, dobbiamo vigilare che non entrino mai pulci nell'orecchio dei giovinetti: alludo alle grandezze incommensurabili e, ancor più, ai numeri irrazionali, che farebbero davvero il molesto uffizio di pulci; e quanto ai numeri irrazionali e al loro calcolo, dovremo astenerci dal parlarne anche nella matematica razionale della scuola normale.

Si sa che fisicamente, cioè in ordine alla realtà oggettiva, non si danno nè possono darsi grandezze incommensurabili; nel campo logico sì. V'ha chi afferma essere la incommensurabilità un fatto naturale, più frequente assai della commensurabilità: la incommensurabilità, si suol dire, è la regola, la commensurabilità l'eccezione: e se ne trae da alcuni metodisti la convenienza di gittare nelle scuole secondarie inferiori, e magari nelle stesse scuole elementari, i germi delle conoscenze attinenti ad incommensurabilità. Se con le parole naturalezza o conformità a natura intendiamo riferirci all'ordine naturale delle idee, non c'è nulla a ridire: di fatto, essendo ingenita in noi la potenza di dividere e suddividere mentalmente all'infinito, ci è sempre possibile concepire che veruna parte aliquota, quanto piccola si voglia, di una data grandezza, e per quanto s'immagini continuata la divisione, sia ad un tempo parte aliquota di altra grandezza omogenea alla prima; e nello stesso naturale ordine logico è pur vero che la grande maggioranza delle grandezze, in combinazioni binarie omogenee, sono incommensurabili. Ma codesta infinita divisibilità non è davvero trasferibile alla realtà oggettiva; e fu proprio la trascuranza di distinzioni di tal fatta quella che trasse il filosofo Zenone a combattere, vanamente, la realtà del movimento. Consideriamo le due grandezze g, g' incommensurabili, e la parte aliquota secondo n di g, che supponiamo minore di g'. Essendo $m \cdot \frac{1}{n} g$ il massimo multiplo secondo m di $\frac{1}{n} g$ contenuto in g', e crescendo n, convergeranno a zero $\frac{1}{n} g$ e $g' - \frac{m}{n} g < \frac{1}{n} g$. Nell'ordine logico $g' - \frac{m}{n} g$ non disparirà giammai; ma nell'ordine reale oggettivo dovrà una volta disparire, certo tanto più tardi quanto più perfetti i mezzi onde operiamo sulle grandezze g, g', e quanto maggiori altresì la precisione e l'accuratezza riposte nelle operazioni.

Insisto dunque perchè nell'insegnamento secondario inferiore sia tenuta assolutamente lontana qualsiasi idea di numeri irrazionali e di grandezze incommensurabili. Ma come si toglierà d'impaccio il povero maestro: 1° quando, date le misure a e v dell'area e del volume di un quadrato e di un cubo, non seconda o terza potenza di verun numero, si voglia la misura del lato del quadrato e del lato del cubo? 2° quando, data la misura l del lato di un quadrato o di un cubo, si voglia la misura della diagonale, e viceversa? 3° quando si avrà a parlare del rapporto della circonferenza al diametro? — Il procedimento da seguirsi mi par facile e piano. In relazione alla prima delle tre ricerche sarà bene, anzi, che nell'aritmetica pratica il bisogno delle regole per l'estrazione delle radici seconda e terza si faccia nascere appunto dalla ricerca del lato del quadrato e del cubo quando ne sien dati l'area e il volume, richiamando all'uopo le regole pratiche delle misurazioni geomemisurabilità. Molteplice e summolteplice comune di più grandezze: minima e massima. — 26. Corrispondenze ed analogie: numero e misura; modulo e unità di misura; dividere e misurare; divisione e misurazione, divisione e partizione; quoziente e misura, quoto e parte; divisore e unità di misura, resto della divisione e resto della misurazione; numero semplice o composto e grandezza non misurabile o misurabile; numero multiplo o summultiplo e grandezza molteplice o summolteplice; caratteri di divisibilità e caratteri di misurabilità; minimo o massimo comun multiplo o summultiplo di più numeri, e minima o massima comun molteplice o summolteplice di più grandezze; operazioni tra numeri e operazioni tra grandezze e tra grandezze e numeri. — 27. I sistemi di misura: sistema metrico

---

triche apprese già dagli alunni nelle scuole elementari. Si cominci dall'annunziare e far capir bene, per via di verificazioni su esempi: 1° che la potenza o la radice n.ma di un numero fratto è un numero fratto i cui termini sono la potenza o la radice n.ma dei corrispondenti termini del primo, e viceversa; 2° che non v'ha numero nè intero nè fratto che, elevato alla n.ma potenza, dia luogo rispettivamente ad uno qualsiasi dei numeri interposti nella serie naturale delle potenze successive; 3° che, essendo q un numero non potenza n.ma ed h^n la massima potenza n.ma contenutavi, sarà $r = q - h^n$ il resto dell'estrazione, ed $h = \sqrt[n]{q}$ significherà esser h la radice n.ma di un numero che differisce di r da q per difetto, mentre $h+1 = \sqrt[n]{q}$ significherà esser $h+1$ la radice n.ma di un numero che differisce di $r' = (h+1)^n - q$ da q per eccesso. Dopo ciò si farà concepire l'estrazione di radice approssimata di grado n da un numero q, non potenza n.ma, quale determinazione di un numero k, compreso tra h ed $h+1$, la cui potenza n.ma vada indefinitamente accostandosi al numero q, senza poterlo mai raggiungere. Se poi, passando dai numeri alle misure di grandezze, a sia la misura, non potenza 2ª, dell'area di un quadrato, r la misura, non potenza 3ª, del volume di un cubo, si mostrerà come l'estrazione approssimata della radice 2ª o 3ª da a o da r consista nella determinazione di una misura λ, compresa tra h ed $h+1$, di una lunghezza che va accostandosi a quella del lato, visibile e palpabile, del quadrato o del cubo; ed analogamente, se l sia la misura del lato di un quadrato o di un cubo, si mostrerà come l'estrazione approssimata della radice 2ª da $2l^2$ o da $3l^2$ consista nella determinazione di una misura δ, compresa tra h ed $h+1$, di una lunghezza che va accostandosi a quella della diagonale, parimente visibile e palpabile, del quadrato o del cubo: ne' quali casi le misure λ e δ dovranno finire presto o tardi per pareggiare rispettivamente la lunghezza del lato del quadrato e del cubo, e la lunghezza della diagonale pur del quadrato e del cubo. Procedendo in questo modo non si correrà rischio di dare, neanche provvisoriamente, concetti storti, che poi riuscirebbe assai malagevole raddrizzare; nè che gli alunni si formino una falsa idea della estrazione di radici detta per approssimazione, e considerino della medesima natura l'approssimazione decimale nella estrazione di radici e quella che si ottiene trasformando in decimale una frazione che dia luogo ad una periodica. Tra lo svolgimento, a mo' d'esempio, di $\frac{1}{3}$ e di $\sqrt{2}$ in frazione decimale il maestro deve con argomenti chiari e visibili far comprender bene all'alunno in concreto e in astratto la intrinseca differenza. Quanto al rapporto della circonferenza al diametro, basterà che, tenuta sempre lontana qualsiasi idea di incommensurabilità, si dimostri prima, sperimentalmente, la costanza di tale rapporto, e poi si annunzi esser questo approssimativamente 3,1415...; la qual cosa potrà pure direttamente verificarsi stendendo in linea retta una circonferenza e misurandola col diametro. Si lasci in pace, per carità, Archimede col suo $\frac{22}{7}$, perchè sarebbe difficile, senza insinuare concetti malsani, far capire all'alunno che $^{22}/_7$ è un rapporto in eccesso, e d'altra parte potrebbe l'alunno essere indotto a credere che la frazione decimale 3,1415... sia un'approssimazione verso $\frac{22}{7}$, e crederla del genere di quella di una frazione decimale periodica verso la propria generatrice.

Ho detto che dei numeri irrazionali e del loro calcolo dovremo serbar silenzio anche nell'insegnamento proprio della scuola normale: non così però delle grandezze incommensurabili (Quadro E: 27 e 38). Se le due grandezze g, g' sono incommensurabili, ciò vuol dire che non esiste verun numero intero nè fratto secondo cui operando sopra una di esse venga riprodotta l'altra; ond'è che nell'ordine logico (e nel campo, s'intende, dei numeri interi e fratti; ma questo non c'è bisogno di dirlo agli scolari, perchè non ci sarebbe sugo a turbarne la digestione) quelle due grandezze non hanno nè possono avere verun rapporto. Dovrà, per altro, stabilirsi il significato convenzionale, ma utilmente e razionalmente convenzionale, da darsi alle locuzioni *misura comune approssimata, rapporto approssimato* tra le grandezze g, g'. Ci sentiremo tanto più autorizzati a considerare $\frac{1}{n}\,g$ quale misura anche di g', quanto più grande sarà n, e quindi quanto più piccola $\frac{1}{n}\,g$, perocchè, crescendo n e decrescendo quindi $\frac{1}{n}\,g$ indefinitamente, $\frac{m}{n}\,g$ si accosta pur indefinitamente a g'. Il rapporto poi variabile crescente n/m lo chiameremo rapporto approssimato delle due grandezze g, g' non perchè esso si accosti al vero rapporto, che non esiste nè può esistere, di queste, ma perchè è il rapporto della grandezza g ad una grandezza che col crescere indefinito di n si accosta indefinitamente a g'.

Nell'estrazione di radici si coltiverà la significazione, che già nelle scuole secondarie inferiori fu data, di radice approssimata di grado n da un numero q non potenza n.ma.

decimale. — 28. Misure miste. (*) — 29. Relazioni tra le misure antiche e le decimali. — 30. Approssimazioni decimali relative alle sei operazioni: limite dell'errore, grado di approssimazione e corrispondenti regole di abbreviazione.

VII. **La proporzionalità.**

31. Rapporto e proporzione. Proporzionalità: diretta o inversa, semplice o composta. Proporzione e proporzionalità: il proporzionato e il proporzionale. — 32. Misurabilità e proporzionalità: misure immediate e mediate. Rappresentabilità in genere o misurabilità in ispecie: rappresentazione e misura. — 33. Regole del tre. — 34. Regole d'interesse e di sconto. — 35. Partizione di una quantità secondo numeri dati: regole di società, di miscuglio e di alligazione.

Classe 3ª — *Geometria fisico metrica:* 3 ore settimanali.

QUADRO C.

I. **La misurazione geometrica.**

1. L'angolo. — 2. La lunghezza rettilinea e la circolare. — 3. L'area poligonale e la poliedrica; la circolare e la sferica: la cilindrica e la conica. — 4. Il volume poliedrico; lo sferico; il cilindrico e il conico.

II. **L'equivalenza.**

5. Figure equivalenti. — 6. Poligoni e poliedri; circoli e sfere; cilindri e coni. — 7. Trasformazioni di figure. — 8. La rettificazione, la quadratura e la cubatura. — 9. Figure solide simmetricamente uguali.

III. **La simiglianza.**

10. Figure simili. — 11. Segmenti, angoli. — 12. Poligoni, poliedri. Poligoni regolari di ugual numero di lati; poliedri regolari platonici di ugual numero di facce. — 13. Circoli, sfere. Cilindri, coni. — 14. Figure solide simmetricamente simili. — 15. Ingrandimento o impiccolimento di figure in data scala.

IV. **Riassunto e conclusione del corso triennale.**

16. Correlazioni tra l'aritmetica e la geometria. — 17. Oggetto, scopo e rilevanza della matematica, suo fondamento nello studio, separato ed unito, del numero e dell'estensione.

Matematica razionale per le scuole secondarie superiori.

Scuola normale

Classe 1ª — *Geometria pura:* 2 ore settimanali.

QUADRO *D* (*A*).

Valga il quadro *A*.

Classe 2ª — *Aritmetica generale:* 4 ore settimanali.

QUADRO *E* (*B*).

Valga il quadro *B* con le seguenti variazioni:

Il n. 2 del gruppo I e il n. 3 del gruppo II si riferiscano entrambi al gruppo I, ma si sostituiscano così:

2. *Sistema di numerazione decimale.* — 3. *Fatti numerici indipendenti e fatti numerici dipendenti dal sistema di numerazione: indipendenza dei concetti delle*

(*) Alla denominazione *numeri complessi* ho sostituita l'altra di *misure miste* per doppia ragione, e perchè questa parmi esprimere più correttamente di quello ciò che vogliamo significare, e perchè la dizione *numero complesso* sarà poi destinata nell'algebra ad esprimere ben altro concetto.

operazioni da qualsiasi sistema. Oggetto dell'aritmetica generale: il calcolo e i problemi, e la teoria del numero: l'algoritmo e l'aritmologia.

Dopo il n. 11 si aggiunga:

12. *Sistemi di numerazione.*

In fine del n. 19, divenuto 20, si aggiunga: *Generatrici delle frazioni decimali periodiche.*

In fine del n. 23, divenuto 24, si aggiunga: *Significato in cui l'estrazione di logaritmo è detta operazione trascendente.*

I numeri 24 e 25, divenuti 25 e 26, si sostituiscano così:

25. *Grandezza. Grandezza misurabile o no. Quantità. Criteri di quantità: l'uguaglianza e la somma; il molteplice e il summolteplice. Misurazione, misura, unità di misura.* — 26. *Grandezze commensurabili. Grandezza molteplice e grandezza summolteplice comune di più grandezze: minima e massima.* — 27. *Grandezze incommensurabili. Significato di misura comune approssimata di grandezze incommensurabili.*

Nel n. 26, divenuto 28, prima di *operazioni* ecc. si ponga: *numeri primi e grandezze incommensurabili.*

Il n. 31, divenuto 33, si sostituisca così:

33. *Rapporto: significato di rapporto approssimato di grandezze incommensurabili. Proporzione. Proporzionalità: diretta o inversa, semplice o composta. Proporzione e proporzionalità: il proporzionato e il proporzionale. Grandezze proporzionali: corrispondenza nell'uguaglianza e nella somma. Limiti di grandezze proporzionali.*

I numeri 33, 34 e 35, divenuti 35, 36 e 37, si sostituiscano così:

35. *Problemi di regole del* $2n+1$. — 36. *Problemi d'interesse e di sconto.* — 37. *Partizione di una quantità secondo numeri dati: problemi di società, di miscuglio e di alligazione.*

Classe 3ª — *Geometria metrica:* 3 ore settimanali.

QUADRO *F* (*C*).

Valga il quadro *C*.

Istituto tecnico

Classe 1ª — *Geometria pura:* 3 ore settimanali.

QUADRO *G* (*D A*).

Valga il quadro *D* con le seguenti variazioni:

In fine del n. 2 si aggiunga: *I luoghi geometrici.*

In fine del n. 8 si aggiunga: *Luoghi geometrici.*

Il n. 4 si modifichi così:

4. *Oggetto della geometria. La congruenza e l'equivalenza; la misura e la similianza: geometria pura e geometria metrica.*

Dopo il gruppo II venga il seguente gruppo:

III. **L'equivalenza.**

13. *Figure equivalenti.* — 14. *Poligoni e poliedri; circoli e sfere; cilindri e coni.* — 15. *Trasformazioni di figure.* — 16. *La rettificazione, la quadratura e la cubatura.* — 17. *Figure solide simmetricamente uguali.* — 18. *Luoghi geometrici.*

Classe 2ª — *Aritmetica generale:* 3 ore settimanali.

QUADRO *H* (*E B*).

Valga il quadro *E* con le seguenti variazioni:

Il n. 21 e l'ultimo periodo del n. 16 si sostituiscano così: *Estrazione di radici.*

Si sopprima l'intero gruppo VII.

Classe 3ª — *Algebra*: 5 ore settimanali.

QUADRO *I*.

I. **Preliminari.**

1. Formola e suo valor numerico. Oggetto dell'algebra. — 2. Concetto generale di operazione algebrica, e di traduzione algebrica dei problemi. Uguaglianza di espressioni algebriche: uguaglianza identica ed equazione: l'algoritmo e la teoria delle equazioni.

II. **Algoritmo.**

3. Addizione e sottrazione: teoria delle quantità negative. Regola dei segni. — 4. Moltiplicazione. Divisione dei monomi. Regole dei segni. Divisione di un polinomio per un monomio. Concetto della divisione tra due polinomi. Caratteri di divisibilità e quozienti di speciali forme polinomie di uso nell'algebra elementare. — 5. Elevamento a potenza: radice e logaritmo. Regole dei segni. La quantità immaginaria.

III. **Equazioni.**

6. Equazione numerica ed equazione algebrica: equazione trascendente. Equazione numerica od algebrica a forma razionale o a forma irrazionale: a forma razionale intera o fratta. Trasformazioni di equazioni. — 7. Sistema di equazioni: determinato e indeterminato; più che determinato e assurdo. Grado del sistema. Radici del sistema. Sistemi equivalenti. — 8. Risoluzione dei sistemi determinati di primo grado: risoluzione numerica e risoluzione algebrica. Discussione delle formole risolutive. Soluzioni negative. Le forme $^0/_a$, $^a/_0$, $^0/_0$. — 9. Risoluzione dei sistemi determinati di secondo grado: risoluzione numerica e risoluzione algebrica. Discussione delle formole risolutive. Soluzioni negative e immaginarie. Le forme $^0/_a$, $^a/_0$, $^0/_0$.

IV. **Funzioni.** (*)

10. Sistema indeterminato di equazioni come occasione alla teoria delle funzioni. — 11. Mutua dipendenza tra grandezze: condizioni e leggi di dipendenza; stati delle grandezze in mutua dipendenza; corrispondenza di stati, univoca o no.

(*) I concetti fondamentali che avviano a quello di funzione e lo preparano, e all'altro di limite, si presentano quasi spontanei in più occasioni nella stessa aritmetica pratica e nella geometria fisica; e sta all'abilità e alla sagacia del maestro il profittare di queste occasioni con vantaggio, istillando a poco a poco nelle tenere menti idee chiare ed esatte per via di esercizi e di esempi pratici. Nell'aritmetica generale poi e nella geometria razionale, e cioè, anche precedentemente allo studio dell'algebra, il principio del limite, per casi particolari ma in modo esplicito, si rende indispensabile. Ma uno studio sistematico elementare, che tali conoscenze compia e coordini, a me sembra che possa farsi opportunamente ingranare nella teoria delle equazioni. In vero, un sistema determinato di n equazioni tra n incognite ne conduce alla ricerca di queste; un sistema più che determinato di $n+h$ equazioni tra n incognite alla ricerca delle h relazioni tra i dati della questione; finalmente ad un sistema indeterminato di $n-h$ equazioni tra n incognite metton capo i concetti coordinati di funzionalità, e con esso si finisce per assegnare la forma di una funzione di h variabili. E da questo momento il concetto di funzione, integrato dal fecondo concetto di limite, pur subordinato in origine a quello di uguaglianza, lo sopraffà e lo domina. Difatti, quanto al concetto di limite, come schivarlo e perchè schivarlo se pur sempre si ha a subirlo, e se, quale mezzo potente di rappresentazione psichica di note caratteristiche di oggetti, è, possiam dire, la pietra angolare di tutto l'edifizio? Perchè sostituirgli, come si fa in alcuni trattatelli, nozioni particolarissime a contorni sfumati, quasi sempre men facili per la mente dello studioso e meno soddisfacenti nel rispetto del rigore scientifico? La sincerità scientifica è da tenersi in conto quasi quanto la morale: i punti deboli od oscuri debbono essere schiettamente rilevati, lungi l'artifizio di mascherarli con simulacri di ragionamenti. Ho detto che il concetto di limite è mezzo potente di rappresentazione psichica, ed ora aggiungo che ne è strumento talvolta indispensabile. In prova scelgo due esempi, tra i moltissimi: uno tratto dalla geometria elementare, l'altro dall'aritmetica. Proponiamoci, putacaso, di studiare le proprietà della circonferenza. Nel campo logico potremo proporci lo studio del luogo dei punti di un piano equidistanti da un punto fisso del piano stesso; e a siffatto luogo daremo appunto il nome di circonferenza. Dalla nozione medesima discende in prima la possibilità di segnare nel piano quanti punti si vogliano, appartenenti tutti al definito luogo; e così pure, preso un punto quale si voglia nel piano, avremo la maniera pronta e sicura di riconoscere se appartenga o no al luogo. Di qui poi avremo una sequela ordinata di parecchie altre proprietà della circonferenza: queste, ad esempio: una retta che ha un punto comune con una circonferenza, potrà anche averne un secondo, ma non più; a qualsiasi punto della circonferenza ne corrisponde un secondo simmetrico rispetto ad un diametro qualsiasi; ecc. ecc. Ma fin qui non entra per nulla il concetto di linea continua e chiusa, dividente il piano in due parti, l'una interna, limitata dalla linea, l'altra esterna illimitata:

Grandezze costanti e grandezze variabili; variabili indipendenti e variabile funzione. Funzione pura o analitica, implicita od esplicita: forma della funzione e sue specie. — 12. Limite di grandezza variabile: tendenza al limite. Teoria dei limiti.

V. Applicazione della teoria delle funzioni: le quantità irrazionali e le immaginarie.

13. Limite di grandezze variabili convergenti. Grandezze incommensurabili: la quantità irrazionale. Irrazionalità relativa all'estrazione di radice di dato grado da numero con potenza di quel grado. Operazioni sulle quantità irrazionali. — 14. La quantità immaginaria: la quantità complessa. Operazioni sulle quantità complesse. — 15. Operazioni sulle quantità potenziali e radicali.

VI. I numeri, le frazioni, le quantità irrazionali e le complesse.

16. Specificazione nominale del numero dipendentemente dalla specificazione reale dell'azione qualitativa o quantitativa sul modulo: numero positivo e negativo; positivo o negativo reale e complesso; reale razionale e irrazionale; razionale intero e fratto. — 17. La legge commutativa della somma algebrica e del prodotto. La legge associativa della somma e la distributiva del prodotto. — 18. Nesso delle operazioni algebriche: additive e sottrattive, dirette e inverse. Il perchè della corrispondenza di una sola operazione inversa alla somma e al prodotto, di due alla potenza. Significato in cui l'estrazione di logaritmo è detta operazione trascendente. Operazioni monovalenti e operazioni plurovalenti. — 19. Adombramento della teoria generale delle operazioni sulle grandezze.

VII. Applicazione della teoria delle equazioni e delle funzioni: la proporzionalità.

20. Rapporto: significato di rapporto approssimato di grandezze incommensurabili. Proporzioni. Proporzionalità: diretta o inversa, semplice o composta. Proporzione e proporzionalità: il proporzionato e il proporzionale. — 21. Grandezze proporzionali: corrispondenza nell'uguaglianza e nella somma. Limiti di grandezze proporzionali. — 22. Funzionalità analitica tra grandezze proporzionali. — 23. Misurabilità e proporzionalità: misure immediate e mediate. Rappresentabilità in genere e misurabilità in ispecie: rappresentazione e misura. — 24. Problemi di regola del $2n+1$. — 25. Problemi d'interesse e di sconto. — 26. Partizione di una quantità secondo numeri dati: problemi di società, di miscuglio e di alligazione.

---

concetto che noi ci formiamo, per via di astrazione, da ciò che ne fornisce l'esperienza. Ecco pertanto la necessità di un primo accostamento dei concetti logici agli sperimentali, accostamento che si ottiene concedendo il seguente postulato: se un segmento OP in un piano ruota nel piano stesso intorno ad O in qualunque dei due versi sino a che si ritrovi nella posizione iniziale, il punto P descrive una linea continua, necessariamente chiusa, e che è la medesima, qualunque sia il verso della rotazione. A questo postulato equivale l'altro, indipendente dal moto: esiste nel piano una linea continua chiusa, in cui, e in cui soltanto, trovansi i termini P non comuni di tutti i possibili segmenti uguali ad un segmento dato, di infinite direzioni, nel piano medesimo, uscenti da O. Dopo ciò acquisteremo il concetto di retta tangente della circonferenza; e verranno in evidenza le proprietà di rette tangenti e secanti e di poligoni iscritti e circoscritti. Ma siamo ancora lontani dal concetto della special forma della circonferenza, dal concetto della rotondità sua perfetta, della uniforme curvatura, e da quello infine della sua lunghezza, la quale noi, per via d'intuizione, percepiamo applicando, o immaginando applicato, sopra una circonferenza un filo sino a coprirla interamento, e poi distendendolo, o immaginandolo disteso, in linea retta. Si richiede pertanto un secondo e maggiore avvicinamento tra i due ordini di concetti, il logico e lo sperimentale; e lo conseguiamo mercè il concetto di limite e mercè sua soltanto. Nel campo logico ci facciamo a dimostrare il teorema: i perimetri variabili di due poligoni regolari di ugual numero di lati, uno iscritto, l'altro circoscritto alla circonferenza, e variabili per guisa che il numero dei lati cresca raddoppiandosi senza fine, individuano un segmento come loro limite. Ne consegue che, mentre cresce senza fine l'ugual numero dei lati dei due poligoni, cresce anche senza fine il numero dei punti comuni a ciascun di essi e alla circonferenza e decresce pur senza fine la distanza tra due consecutivi di tali punti. Nel campo fisico poi, disegnando i successivi poligoni, vedremo che, per quanto sottili le linee tracciate e per quanto perfetti gli strumenti, i poligoni tenderanno a confondersi con la circonferenza così rapidamente, che ben presto l'occhio non riuscirà a distinguerli da essa. Abbiamo così due serie di operazioni o costruzioni, caratteristiche della circonferenza: l'una logica, l'altra fisica. La seconda certamente ha fine, fine più o meno vicino, più o meno lontano, dipendentemente dalle dette condizioni e anche, giova notarlo, dalla grandezza del raggio della circonferenza. La prima sopravvive sempre, e col suo sopravvivere ci rappresenta appunto il fatto della variabilità del termine delle operazioni della seconda specie; cosicchè in qualsiasi caso di termine lontanissimo potremo sempre attingere dalla serie logica di costruzioni il corrispondente stato rappresentativo. Laonde, con evidente fondamento nell'esperienza, il concetto di quel segmento limite sarà il rappresentante legittimo e universale delle lunghezze percepite in esperimenti analoghi a quello del filo ravvolto nella circonferenza e poi disteso in linea retta, il rappresentante, cioè, della circonferenza

VIII. **Equazioni trascendenti.**

27. Lacuna da colmare relativamente all'operazione inversa trascendente dell'elevamento a potenza. Equazioni esponenziali: prima classe di equazioni trascendenti. Risoluzione della forma fondamentale $p = r^l$ rispetto ad l, dati r e p. — 28. Sistemi di logaritmi. Proprietà generali indipendenti dal sistema. — 29. Tavole di logaritmi: logaritmi volgari. Risoluzione numerica della forma fondamentale per mezzo delle tavole. — 30. Relazione tra i logaritmi di un medesimo numero in

---

rettificata: in pari tempo la convergenza logica, verso quel limite, di quei poligoni sottoposti alla condizione di essere regolari, cioè equilateri ed equiangoli, risponderà alla percezione della forma della circonferenza, della rotondità perfetta e della uniforme curvatura, e riuscirà rappresentativa di siffatte tre affezioni, idealizzate, della circonferenza stessa. — Immaginiamo ora tracciato sulla carta un segmento rettilineo, e di questo sia preso $\frac{1}{3}$. Il procedimento logico operativo 0,333... non ha mai fine: mentre, per n indefinitamente crescente, converge indefinitamente a zero la frazione $\frac{3}{10^n}$, la somma dei primi n termini della serie tende indefinitamente ad $\frac{1}{3}$, cioè ha per limite $\frac{1}{3}$. L'operazione grafica, invece, dopo la costruzione successiva di un certo numero di termini di quella serie, avrà fine, ma lo avrà tanto più tardi, quanto più perfetti gli strumenti e quanto maggiore il segmento su cui si opera. Quella particolare tendenza indefinita della somma dei primi n termini della detta serie, tendenza caratteristica della frazione $\frac{1}{3}$, e sopravvivente sempre al procedimento grafico finito, diversamente finito, ci rappresenta appunto la trasformazione della frazione $\frac{1}{3}$ in decimale con quella maggiore approssimazione che ci piacerà. — Non va poi trascurato di far notare agli alunni delle scuole secondarie superiori che l'anello di congiunzione tra il concetto di limite e di grandezza variabile tendente al limite è il concetto dell'infinito e dell'infinitesimo, parole da adoperarsi, peraltro, *cum grano salis*, circondandole delle necessarie cautele. Anzitutto bisogna far comprender bene questo, che l'infinito matematico non ha che far nulla con l'infinito reale assoluto, nella significazione filosofica della parola, il quale esclude da sè qualsiasi idea di limitazione in qualunque senso: esso è ciò che, *non circoscritto*, pur *tutto circoscrive*, come stupendamente si esprime l'Alighieri nel XIV del *Paradiso*, e non può essere oggetto di speculazione matematica. L'infinito matematico è tale *secundum quid, non simpliciter*, per usare il linguaggio di Tommaso d'Aquino, che *(Summa theologica)* alla questione *utrum aliquid aliud quam Deus possit esse infinitum per essentiam*, risponde appunto: *Aliquid praeter Deum potest esse infinitum secundum quid, sed non simpliciter*. Due sorta d'infinito e d'infinitesimo matematici si distinguono oggi: il *potenziale* e l'*attuale*. Il primo, come si sa, consiste nel concetto di una grandezza variabile crescente o decrescente senza limite, e tale quindi da poter doventare maggiore o minore di qualsiasi grandezza data, omogenea ad essa: il secondo consisterebbe nel concetto di una grandezza determinata e tale che, comunque diminuita o comunque moltiplicata, fornirebbe sempre una grandezza rispettivamente maggiore o minore di qualsiasi grandezza assegnabile, ad essa omogenea. Lasciando da parte le questioni che oggi più che mai si agitano intorno ai concetti di infinito ed infinitesimo attuali, a noi basta che, per lo meno, non possa, come non può, mettersi in dubbio l'esistenza dell'infinito e dell'infinitesimo potenziali, i quali trovano corrispondenza nella realtà obbiettiva, che ne è perciò rappresentata; e la trovano precisamente in una serie di operazioni o costruzioni effettive, relativamente e diversamente limitate, dipendentemente dai nostri mezzi di percezione. L'infinito e l'infinitesimo attuali troverebbero corrispondenza nelle nozioni fisiche di grandissimo e di piccolissimo, aventi per carattere rispettivo la relativa esclusione di vincoli alle nostre fisiche apprezzazioni e il relativo sfuggire ai nostri sensi, ossia la relativa illimitazione e la relativa impercettibilità. E pertanto sono da schivare, specie nelle scuole secondarie inferiori, i concetti, nebulosi sempre, morbosi spesso e comunque prematuri, di poligono infinitilatero, numero infinito di lati infinitesimi, e via dicendo. Nella geometria fisica, invece di prendere a prestito concetti che in essa non troverebbero senso pratico, ricorreremo al concetto di limite, tenendo presente la distinzione necessaria a farsi tra limite razionale e limite fisico, del quale ultimo soltanto dobbiamo valerci. Il primo non viene mai raggiunto dalle grandezze variabili: il secondo sì, dopo un numero finito di accrescimenti o decrescimenti, numero tanto più remoto, quanto più perfetti i mezzi di operazioni meccaniche, e quanto maggiore accuratezza e precisione si pone in queste. Ma un'altra circostanza importantissima va notata. Iscrivendo in un circolo poligoni regolari i cui numeri de' lati siano le potenze successive del 2 a cominciare dalla 2^a, accadrà che tutti i latercoli del poligono regolare fisico si confonderanno simultaneamente, nel limite, coi corrispondenti archetti del circolo, pur fisico; e se la identificazione non fosse simultanea, noi non riusciremmo a realizzare con questo procedimento la trasformazione del poligono in circolo. La simultaneità è indispensabile, e c'è, perchè i lati del poligono si mantengono sempre uguali, come si mantengono sempre uguali i corrispondenti archi di circonferenza. Se, invece, immaginiamo divisa una ellissi successivamente in $4, 8, \ldots 2^n$ parti uguali, la serie dei corrispondenti poligoni iscritti che ne derivano ha per limite razionale la ellissi; ma que' poligoni medesimi non può dirsi che abbiano la ellissi anche a limite fisico, perocchè, essendo disuguali in ciascuna operazione gli archi ellittici, l'identificazione loro coi corrispondenti latercoli dei poligoni iscritti non è simultanea; e verrà il momento in cui alcuni di questi latercoli si troveranno confusi coi corrispondenti archi, altri no; e allora siamo nella impossibilità di continuare in modo analogo l'operazione, e non siamo davvero autorizzati a considerare il poligono trasformato in ellissi. Per questa ragione sarebbe atto improvvido, sempre nelle scuole inferiori, mettere a fondamento del modo di ricavare la regola di misurazione del volume della piramide la considerazione di questa quale limite della somma dei prismi iscrittivi, perocchè la identificazione fisica dei singoli prismi ai corrispondenti tronchi di piramide non potrebb'essere simultanea.

due sistemi. — 31. Equazioni logaritmiche: seconda classe di equazioni trascendenti. Risoluzione numerica rispetto ad n della forma fondamentale $log_b\, n = l$. per mezzo delle tavole. — 32. Progressioni per differenza e per quoziente. Relazione tra un sistema di logaritmi e un sistema di due progressioni, per differenza e per quoziente, in date condizioni. — 33. Il sistema delle due equazioni tra i cinque elementi di un gruppo chiuso di termini di una progressione per differenza: dati tre qualunque di essi elementi, trovare gli altri due. Il sistema delle due equazioni tra i cinque elementi di un gruppo chiuso di termini di una progressione per quoziente: dati tre qualunque di essi elementi, escluse le due combinazioni $t_1 n s_n$, $t_n n s_n$, trovare gli altri due. — 34. Problemi d'interesse semplice e composto, di sconto, di annualità e di ammortamento.

Classe 4ª — *Geometria metrica:* 4 ore settimanali.

QUADRO *K* (*F C*).

Valga il quadro *F* con le seguenti variazioni:

Dopo il numero 4 si aggiunga:

5. *Verificazione metrica dei teoremi di geometria pura concernenti l'equivalenza.*

Si sopprima l'intero gruppo II.

Dopo il num. 15, divenuto 11, si aggiunga:

12. *Luoghi geometrici.*

Dopo il gruppo III, divenuto II, venga il seguente gruppo:

III. **Trigonometria rettilinea**: *per la sola sezione fisico-matematica.*

13. *Problemi metrici tra i cui dati o le cui incognite sieno angoli. L'angolo e i sei rapporti goniodittici: i tre diretti (il seno, il coseno e la tangente) e i tre corrispondentemente inversi (la cosecante, la secante e la cotangente). Opportunità e necessità di far rappresentare gli angoli dai rapporti goniodittici nelle relazioni metriche.* (*) *Perchè e come tra le grandezze geometriche la lunghezza è la fondamentale irriducibile, e la sola che interviene nelle relazioni metriche tra gli elementi delle figure.* — 14. *Funzionalità tra l'angolo e ciascuno de' suoi rapporti goniodittici. Discussione delle relazioni tra l'angolo ed ognuno de' suoi rapporti goniodittici.* — 16. *Il sistema delle cinque equazioni tra i sei rapporti goniodittici di un angolo. Dato un qualunque di essi, trovare gli altri cinque.* — 16. *Equazioni goniodittiche: terza ed ultima classe di equazioni trascendenti tra quelle di cui si occupa la matematica elementare. Risoluzione della forma fondamentale* rapp. a = r *rispetto ad* r *o ad* a, *dato* a *od* r. — 17. *Sostituzione delle linee ai rapporti goniodittici. Tavole logaritmo-goniodittiche: risoluzione numerica della forma fondamentale* lin. a = l *rispetto ad* l *o ad* a *per mezzo delle tavole.* — 18. *Il sistema delle quattro equazioni tra i sette elementi metrici del triangolo: i*

(*) Il principio di omogeneità nelle relazioni metriche, al quale non vedo data molta importanza nei libri scolastici, a me pare invece che dovrebbe averne moltissima, siccome quello che è il regolatore dell'algoritmo applicato a questioni tra grandezze, ed è vitale per una sana educazione metrica dei nostri ragazzi, quando si ammetta, come ammetto io, che i due insegnamenti di aritmetica generale ed algebra abbiano ad impartirsi a base essenziale di grandezza (V, 25). Il principio stesso dev'esser però presentato non tutto in una volta e tutto d'un pezzo, ma per via di graduale svolgimento, prendendo le mosse dalla stessa aritmetica pratica. Com'è noto, il principio complesso della omogeneità si adagia tutto quanto sopra questi due più semplici: 1º la misura di una grandezza è direttamente proporzionale ad essa ed inversamente al modulo, talchè un medesimo numero può esser misura di grandezze disuguali, e numeri disuguali possono esser misure di una medesima grandezza o di grandezze uguali; 2º il rapporto tra due grandezze omogenee è indipendente dal loro comun modulo. Movendo da questi due principi perverremo per una breve serie ordinata di proposizioni a stabilire il criterio per riconoscere se una relazione metrica possa aver luogo conformemente alla natura delle grandezze in questione, oppure abbia bisogno di acconce modificazioni per divenir tale. Allora, e soltanto allora, ci sarà lecito di considerare svincolata dai moduli la relazione, e di considerarla in questo senso appunto omogenea, cioè quale semplice relazione numerica.

Dissi che lo svolgimento graduale del principio di omogeneità debba incominciare nella stessa aritmetica pratica e nella geometria fisica metrica. Come conseguenza immediata di que' due principi, su' quali riposa il principio complesso di omogeneità, si mostrerà, ad esempio, che fra tre grandezze omogenee a, b, c, riferibili ad un medesimo modulo, non sempre è possibile qualsiasi forma di relazione indipendente dalla grandezza del modulo. Così, può sussistere, poniamo, la relazione $a^2 = b^2 + c^2$, e sussiste di fatto se, ad esempio, a è l'ipotenusa e b e c i cateti d'un triangolo ret-

tre lati, i tre angoli e l'area. Dati tre qualunque di essi, purchè non sieno i tre angoli, trovare, con risoluzione numerica del sistema, gli altri quattro.

Il gruppo IV si sostituisca così:

IV. Riassunto e conclusione del corso quadriennale.

19. *Correlazioni tra l'algebra e la geometria.* — 20. *Oggetto, scopo e rilevanza della matematica: suo fondamento nello studio, separato e unito, del numero e dell'estensione; e suo svolgimento dal concetto organico e mediante il concetto organico di uguaglianza.*

Ginnasio superiore e liceo

Classe 4ª ginnasiale. — *Geometria pura: la congruenza:* 2 ore settimanali.

QUADRO *L* (*G D A*).

Valga il quadro *G*, togliendone il gruppo III, e modificando il n. 4 così:

4. *Oggetto della geometria. La congruenza, l'equivalenza e la simiglianza; la misura: geometria pura e geometria metrica.*

Classe 5ª ginnasiale. — *Geometria pura: l'equivalenza e la simiglianza:* 3 ore settimanali.

QUADRO *M* (*G D A*).

Valga il quadro *G*, togliendone i gruppi I e II, e ponendo dopo il gruppo III, divenuto I, il seguente gruppo:

II. La simiglianza.

7. *Ragione di due grandezze. Teoria delle proporzioni. Proporzionalità: diretta o inversa, semplice o composta.* — 8. *Figure simili.* — 9. *Segmenti, angoli.* — 10. *Poligoni, poliedri. Poligoni regolari di ugual numero di lati; poliedri regolari platonici di ugual numero di facce.* — 11. *Circoli, sfere.* — 12. *Cilindri, coni.* — 13. *Figure solide simmetricamente simili.* — 14. *Luoghi geometrici.*

Classe 1ª liceale. — *Aritmetica generale:* 3 ore settimanali.

QUADRO *N* (*H E B*).

Valga il quadro *H*.

---

tangolo, perchè in tal caso quella relazione ha un significato effettivo, non empirico; ma non potrebbe sussistere la $a = bc$. In vero, assumendo un nuovo modulo nel rapporto $k/1$ col primo, la prima relazione rimarrebbe indipendente da k, la seconda no, perchè questa si trasformerebbe in $a = kbc$. Se fosse possibile $a = bc$, il rapporto a/b, quando si variasse il comun modulo, sarebbe ad un tempo costante e variabile, cosa assurda. Se le tre grandezze non sono tutte e tre omogenee tra loro, allora è possibile una loro relazione indipendente dai moduli, purchè a sia omogenea a b o a c, rimanendo così c o b eterogenea ad a e b, ad a e c. In questo caso, difatti, per ogni dato e qualsiasi modulo di c o di b, non varierebbe c o b, perchè indipendente dal modulo di a e b o di a e c, il quale, pur variando, non può indurre variazioni nel rapporto a/b o a/c. Il caso di a, b, c tutte e tre eterogenee tra loro, e l'altro di b e c omogenee tra loro con a eterogenea, sono evidentemente da escludere. In vero, per un dato modulo di a corrisponderebbe ad a non un sol prodotto bc, ma tanti quanti le possibili variazioni dei due moduli o del comun modulo di b e c. Questi criteri sono evidentemente applicabili alla moltiplicazione e alla divisione. Difatti, le tre grandezze che danno origine ad un prodotto (il dividendo) e ai due fattori (il divisore e il quoziente) non possono essere tutte e tre omogenee tra loro, tranne il caso, naturalmente, di numeri, nè tutte e tre eterogenee: quella che dà origine al prodotto (il dividendo) dev'essere essenzialmente omogenea ad una, e ad una sola, delle due che danno origine ai fattori (il divisore e il quoziente). Se l ed l' sieno i lati disuguali di un rettangolo r, il principiante può essere indotto a pensare che la relazione $r = ll'$ contraddica a codeste asserzioni; ma toccherà al provvido maestro il fargli capire che qui, ed analogamente in casi analoghi, le grandezze tra cui si concepiscono o si eseguiscono le operazioni sono due aree riferite alla stessa unità di misura ed una lunghezza, e che l'unità di area è il quadrato dell'unità di lunghezza.

Classe 2ª liceale. — *Algebra:* 5 ore settimanali.

QUADRO O (I).

Valga il quadro I, modificando così il num. 20 del gruppo VII:

20. *Rapporto: significato di rapporto approssimato di grandezze incommensurabili. Ragione e rapporto. Proporzione per rapporto e proporzione per ragione. Proporzionalità per rapporto e proporzionalità per ragione diretta o inversa, semplice o composta. Proporzione e proporzionalità: il proporzionato e il proporzionale. Il rapporto, la proporzione e la proporzionalità per rapporto sono casi speciali, rispettivamente, della ragione, della proporzione e proporzionalità per ragione. Proprietà specifiche della proporzionalità per rapporto.*

Classe 3ª liceale. — *Geometria metrica:* 3 ore settimanali.

QUADRO P (K F C).

Valga il quadro K con le seguenti variazioni:
Al num. 5 dopo la parola *equivalenza* si aggiunga *e la simiglianza*.
Dopo il num. 5 si aggiunga:
6. *Ingrandimento o impiccolimento di figure in data scala.*
Si sopprima l'intero gruppo II.
Il gruppo IV, divenuto III, si sostituisca così:

III. **Riassunto e conclusione del corso quinquennale.**

13. *Correlazioni tra l'algebra e la geometria.* — 14. *Caratteri dei tre possibili sistemi di geometria: la* euclidea, *detta anche* parabolica, *e le due* non-euclidee, *dette anche rispettivamente* ellittica *ed* iperbolica; *ciascuna delle quali ultime viene anche sotto il nome di geometria* astratta *o* ideale, *o di* pangeometria. *La geometria euclidea e la sua verificazione sperimentale. Distinzione tra le proposizioni dipendenti e le indipendenti dal postulato della parallela unica nella geometria euclidea.* — 15. *Oggetto, scopo e rilevanza della matematica: suo fondamento nello studio, separato e unito, del numero e dell'estensione; e suo svolgimento dal concetto organico e mediante il concetto organico di uguaglianza.*

30. I particolari modi di attuazione delle indicate proposte, che sono il riepilogo della mia relazione, potranno essere, previe le debite correzioni, beninteso, da parte vostra, quei medesimi da me accennati, o altri essenzialmente diversi. M'accorgo però, e ne provo rimorso, di avere oltrepassato il segno, per non aver mantenuta la promessa di limitarmi all'uffizio di cote, consigliatomi dal Venosino; chè anzi ho praticato talvolta anche qualche piccolo taglio. Ma cosa fatta capo ha, e, seguendo ora per davvero i dettami del Venosino stesso, dirò, fidente e supplice, ad ognun di voi:

. . . . . Si quid novisti rectius istis,
candidus imperti; si non, his utere mecum.

Se poi crederete di bocciarmi addirittura e interamente, mi rassegnerò alla mia sorte, e mi studierò di far meglio un'altra volta.

Prof. ANTON MARIA BUSTELLI.

QUISTIONE PROPOSTA DAL PROFESSORE GIOVANNI RIBONI

Proposta che sia concesso ai licenziati agrimensori degli istituti tecnici di adire alla facoltà matematica, esclusivamente però per le scuole d'applicazione degli ingegneri.

Egregi Colleghi,

La quistione ch'io pongo innanzi si connette intimamente, anzi è un caso specialissimo della questione assai complessa, che riguarda la riforma *ab imis* delle scuole secondarie; riforma vivamente sollecitata anche dalla pubblica opinione ed intorno a cui più di un progetto fu escogitato, senza che alcuno abbia potuto giungere in porto: nè per ora sembra si voglia tornarvi. E perciò *rebus sic stantibus,* in attesa cioè di questa radicale riforma, io mi permetto di richiamare l'attenzione degli egregi colleghi su questo caso particolare e cioè sulla condizione, non equa secondo il mio giudizio, fatta dagli attuali ordinamenti scolastici ai licenziati in agrimensura che desiderassero continuare gli studi ed adire ai corsi d'ingegneria, poichè da essi si richiedono esami d'integramento per conseguire la licenza in fisica-matematica, la quale sola negli istituti tecnici dà il diritto, come la liceale, all'ammissione alla facoltà matematica.

Ora basta stabilire un confronto tra i programmi delle due sezioni, per persuadersi che, sia per coltura generale, sia per coltura speciale, i primi non possono ritenersi inferiori ai secondi.

Ed infatti in materia letteraria la sezione fisica-matematica presenta in più il tedesco o l'inglese. In fatto di scienze ha un corso complementare di fisica, nel quale non si espone nulla di sostanzialmente nuovo, ma consiste principalmente in dimostrazioni matematiche di leggi già studiate e verificate coll'esperienza, od in esercizi su problemi attinenti a teorie già prima studiate.

E circa più specialmente alla matematica, degli argomenti svolti nel 2° biennio, alcuni sono comuni alle due sezioni (come la trigonometria rettilinea, la geometria descrittiva; quest'ultima svolta più ampiamente assai agli agrimensori), altri inutili a questo punto per gli aspiranti ingegneri, come la trigonometria sferica, la quale viene di necessità trattata nelle scuole d'applicazione come premessa al corso di geodesia; e non serve che a quei licenziati in fisica matematica che si presentano alla scuola navale sup.; altri di cui si ha occasione di trattare anche nel 1° biennio, come il binomio di Newton, la simmetria, l'omotetia delle figure etc.; altri infine, come l'analisi indeterminata, che non costituiscono una deficienza tale da non potersi dir preparato in modo conveniente alla facoltà matematica chi ne fosse digiuno. Del resto con lievi rimaneggiamenti nei programmi si toglierebbero anche queste differenze insignificanti.

Di qui risulta adunque che la deficienza sostanziale sta nella lingua tedesca od inglese. Certamente che è assai utile, per non dir necessario, che il giovane aspirante ingegnere possieda oltre il francese l'una o l'altra di dette lingue per poter consultare le pubblicazioni straniere e tenersi così al corrente dei progressi scientifici e tecnici all'estero. Ma a questo punto è lecito lasciare anche all'iniziativa individuale il supplire a questa od altra deficienza, o meglio se si vuole, porre l'obbligo di frequentare il corso di una delle dette lingue nella facoltà letteraria o nel biennio preparatorio alla scuola d'applicazione, come si è fatto a Milano.

E d'altra parte i licenziati dai licei non presentano anch'essi le stesse anzi maggiori deficienze, poichè oltre al non conoscere il tedesco o l'inglese, ben poco devono ricordare anche del francese imparato in Ginnasio e poi messo da parte, e di più hanno una scarsa coltura matematica?

In compenso invece faccio osservare, che nella sezione agrimensura i corsi di topografia e di costruzioni, oltre al fornire fino da queste scuole ai giovani la parte elementare di queste materie professionali, che vengono poi svolte più ampiamente ed in un campo più elevato nelle scuole d'applicazione, li costringono ad una continua trattazione di svariate questioni analitiche e geometriche sì da far loro acquistare una famigliarità colla geometria e col calcolo sia numerico che letterale non inferiore per non dir superiore a quella dei licenziati stessi in fisica-matematica. Non parlo poi del corso speciale di geometria descrittiva di poco inferiore a quel che si teneva trenta o quarant'anni or sono in certe università: non parlo dei corsi di disegno d'ogni specie ornamentale, geometrico, architettonico, topografico a cui sono tenuti e che tanto importano all'ingegnere: non parlo poi di altri corsi speciali attinenti all'ingegneria quali l'agraria, l'estimo, la legislazione rurale ecc..... Anzi più ci rifletto, sono tentato ad affermare che gli agrimensori sono i meglio preparati per le scuole d'ingegneria.

E mi conforta il trovare un'assai autorevole conferma di questa asserzione nella relazione (*) che il chiaris. prof. Bardelli del Politecnico milanese, preside dell'Istituto tecnico C. Cattaneo presentava alla Giunta di Vigilanza dell'Istituto stesso intorno alle modificazioni da farsi nelle sezioni della detta scuola, e ciò in seguito alla lettera-circolare del Ministero del 30 novembre 1894, e specialmente là dove così si esprime:

« Nel volume di Emilio Morpurgo sugli Istituti tecnici; nella « relazione della Commissione presieduta dall'onor. Domenico Berti, « che elaborò la riforma del 1871; in una importante monografia « sugli studi tecnici dell'onor. Gerolamo Boccardo, ed in numerose « altre pubblicazioni (chè si può dire ormai abbiano gli Istituti « tecnici una storia ed una letteratura), pubblicazioni non conosciute

(*) Questa Relazione fu stampata per deliberazione della Giunta stessa. Tip. di G. Rebeschini, 1895.

« o dimenticate, con validissimi argomenti è stato dimostrato, come, « *a provvedere ai bisogni del vasto ed esteso svolgimento della ingegneria* « *moderna, sia necessario che fino dalle scuole secondarie gli insegna-* « *menti vi sieno indirizzati* ». Ora chi soddisfa a questa necessità tra i licenziati dalle scuole secondarie meglio del perito agrimensore?

Nè si creda che questa concessione fatta agli agrimensori sia un allettamento per gli studenti dell' istituto ad abbandonare la sezione fisico-matematica per l'agrimensura. Se si confrontano i programmi e gli orari, si vede subito che la sez. agrimensura è più aggravata dell'altra. E del resto se qualcuno fosse tentato a farlo, pel fatto che, nel caso non potesse continuare gli studi, avrebbe intanto un diploma professionale, non ci vedo alcun inconveniente.

Qui verrebbe in campo per incidente la questione, se non convenga (come è stato anche proposto) abolire la sezione agrimensura o meglio fonderla colla fisico-matematica. Ma noi non vogliamo ora occuparcene, tanto più che dovremmo entrare anche nel campo pratico delle difficoltà che gli agrimensori incontrano nell'esercizio della professione per la concorrenza loro fatta dagli stessi ingegneri. Lasciando le cose allo stato attuale, perchè impedire agli agrimensori di continuare, ove si sentano, la via naturale dei loro studi col passare alle scuole degl' ingegneri?

Sarebbe ora naturale che facessi un confronto coi licenziati dal liceo. Ma parmi inutile la cosa, poichè gli insegnanti di matematica sono in massima concordi nel ritenere insufficiente la preparazione del liceo agli studi di matematica, specie per gli ingegneri. Basterebbe del resto leggere la sullodata relazione a pag. 17, 18, 19 per convincersene: ivi tra l'altro si lamenta la mancanza assoluta del disegno, delle lingue moderne, di alcuni argomenti di matematica indispensabili, della parte applicativa, specie numerica, che nei riguardi professionali è forse più importante della teoria: e quasi le stesse osservazioni si fanno per la fisica e la chimica. Risultano perciò evidenti le condizioni migliori in cui si trovano gli agrimensori rispetto ai licenziati dal liceo.

Ma la difficoltà maggiore da superare per conseguire il nostro intento sta secondo il mio avviso nella comune opinione, che le scuole classiche sieno quelle che meglio preparano ad ogni sorta di studi; che sieno ad un livello superiore alle altre scuole secondarie, e che perciò la licenza liceale debba avere il privilegio sopra le altre di aprire l'adito a tutte le scuole superiori.

Constato il fatto, non lo discuto. In una assai recente circolare ministeriale (del 4 maggio a. c. inserita nel Bollettino del 12) ai prefetti ed ai presidenti delle giunte di vigilanza è detto:

I licenziati dalle sezioni di commercio e ragioneria, agrimensura ed agronomia degli istituti tecnici saranno dispensati, nell'esame di licenza liceale, dalla sola prova di scienze naturali. Dunque un agrimensore nel caso (quasi improbabile del resto) che volesse ottenere la licenza liceale, dovrebbe ridare gli esami non solo d'italiano, nel quale è stato chiamato alla pari coi licenziati dal liceo sullo stesso tema alla gara d'onore, ma ancora gli esami di matematica, fisica, chimica, geografia etc.... in materie cioè dove ha una cultura superiore, come risulta dai programmi, agli studenti liceali. E questo perchè? molto probabilmente, perchè l'agrimensore non sa di latino.

Così risalendo ad alcuni anni or sono, Aristide Gabelli (per citare delle autorità in materia) in un articolo in difesa dell'istruzione classica (vedasi il fasc. 1º ottobre 1888, *Nuova Antologia*) dice: « Brioschi « e Cremona, tutti e due direttori di scuole d'applicazione, tutti e « due celebri nelle scienze, affermano concordemente per lunga e co« stante esperienza loro propria, che gli alunni provenienti dal liceo, « dopo essersi trovati inferiori nel 1º anno a quelli degli istituti « tecnici, vanno loro innanzi, quantunque in questi sia molto mag« giore la preparazione diretta. Tanto l'indiretta prevale! »

Quest'asserzione tante volte citata, e che fu una delle principali ragioni che mossero S. E. il Ministro Baccelli nella prelodata circolare del 30 novembre 1894 a dire che la sezione fisico-matematica può essere considerata come un liceo senza l'insegnamento delle lingue e letterature classiche, ossia privo dell'essenza stessa del liceo, e perciò a studiare, se non era il caso di abolirla in molti istituti (e perchè allora non in tutti?), non ha sempre avuto secondo il mio avviso una giusta interpretazione. Io mi domando: ma questo risultato è proprio dovuto in tutto, come crede il Gabelli, alla prevalenza della preparazione indiretta? Mi faccio lecito di dubitarne; prima perchè, come osserva la prelodata relazione Bardelli, quei giovani del liceo che per la successiva carriera di studi si sono determinati per le scienze fisiche e matematiche, trascurano o curano molto meno l'insegnamenti letterari degli scientifici, onde loro vien meno quella tal preparazione indiretta di cui sopra. Ma ammesso anche che ciò non sia, io trovo un'altra spiegazione non meno probabile del fatto in ciò, che tra gli studenti di liceo chi studia matematica rappresenta l'eccezione e precisamente chi sente una disposizione speciale a questi studi; perciò non dee recar meraviglia che possa non solo rimediare da sè alle lacune che trova passando alla università, ma mettersi alla pari e superare anche gli altri. Superarli però, io credo, nella parte razionale o teorica, perchè a lui farà sempre difetto la pratica, che non ha acquisita nel liceo e di cui sdegnerà occuparsi alle scuole superiori. L'istituto tecnico invece e più propriamente la sezione fisico-matematica insieme a giovani distinti fornirà anche la parte mediocre alle scuole degli ingegneri, perchè molti o per circostanze di famiglia o per tradizione o per altro vi si avviano anche senza disposizione e senza avere la chiara coscienza di quel che fanno; e poichè questa sezione non offre altra via da scegliere (se ne eccettui la scuola navale superiore), si trovano in certo modo costretti a studiare matematica anche se poco o nulla disposti.

E tornando all'asserzione citata dal Gabelli e che risale certamente ad una ventina d'anni fa per lo meno, io dubito non poco che l'illustre direttore del politecnico milanese, se fosse ancor vivo, non che l'on. sen. Cremona oggi la ripeterebbero; la statistica per quanto mi consta pel politecnico milanese non la conferma più. E finalmente mi si permetta di osservare che, se dai licei escono distinti ingegneri e scienziati, non mancano esempi per contrapposto di distinti letterati usciti dagli istituti, dove pure manca il sussidio degli studi classici: Marco Praga ed Ugo Valcarenghi provenienti dall'istituto di Milano per tacere d'altri.

Il che prova nuovamente che, più che tutto, è questione di naturale disposizione e di attività individuale.

Con tutto ciò non ho inteso di porre il benchè minimo dubbio sulla felice influenza che hanno gli studi classici, oltre che ad eccitare al culto del bello e dei più alti ideali, a sviluppare ed invigorire le facoltà intellettuali, a predisporre la mente ad ogni genere di studi. Ho voluto solamente dire che non trovo giusto oggi il ritenere la scuola classica ad un livello superiore alle altre scuole secondarie: che la facoltà data ai licenziati dal liceo di accedere alla facoltà matematica va intesa, secondo me, come una concessione loro fatta in vista appunto dei benefici effetti degli studi classici, sicchè sebbene insufficienti a principio, possono in seguito mettersi alla pari e distinguersi fra gli altri.

E perchè allora non potranno fruire di eguale concessione gli agrimensori assai meglio preparati per le scuole d'ingegneria, come mi sembra d'aver dimostrato?

Si richiegga pure, se lo si crede utile, la licenza liceale od almeno l'esame di latino a chi aspira al dottorato in iscienze ed a professare le medesime come insegnante; ma non si precluda la via all'agrimensore di passare alla scuola degli ingegneri, che, ripeto a mio avviso, ne è il naturale proseguimento e compimento.

Io spero che gli egregi colleghi, che hanno avuto la compiacenza di ascoltarmi fin qui, saranno convinti della equità della mia proposta e vorranno perciò votare in favore della mozione seguente che presento al banco della presidenza:

« L'Associazione « MATHESIS » riunita in Torino nel settembre '98 in occasione del congresso pedagogico;

« Considerato che i licenziati dalla sezione agrimensura degli istituti tecnici hanno una coltura generale scientifica, che si può ritenere non inferiore a quella dei licenziati in fisico-matematica e dai licei, anzi rispetto a questi ultimi superiore;

« Considerato che circa la coltura letteraria la deficienza del tedesco o dell'inglese (rispetto ai licenziati in fisico-matematica) può essere colmata, come pei licenziati dal liceo, colla iscrizione al corso di una di dette lingue nelle scuole sup. senza pregiudizio dei loro studi, e che in ogni caso non è tale da impedir loro un buon profitto negli studi;

« Considerato infine che gli agrimensori sono già al corrente della parte elementare dei corsi delle scuole d'applicazione di topografia, costruzioni, disegni relativi, estimo, agraria, ecc....; il che li pone a questo riguardo in condizioni più favorevoli, che non sieno i licenziati dai licei e dalla sezione fisico-matematica per accedere a dette scuole;

« Fa voti a S. E. il Ministro della P. I. perchè si compiaccia concedere anche agli agrimensori, che la desiderano, l'ammissione senza esami alla facoltà matematica od al biennio preparatorio pel passaggio alla scuola d'applicazione degli ingegneri ».

QUISTIONE PROPOSTA DAL PROFESSORE SAULLE PIAZZA

Insegnamento della matematica nella sezione di commercio e ragioneria nell'istituto tecnico.

EGREGI COLLEGHI,

Fra tutte le questioni da discutersi nel prossimo congresso degli insegnanti di matematica nelle scuole secondarie, quella che a me sembra di maggiore importanza pratica è la IV. Ed in questa questione può entrare una mia proposta che, modesta da un lato poichè riguarda un solo ordine di scuole, sarebbe d'altra parte, se accettata, di reale, indiscutibile giovamento ad un gran numero di giovani. È da molto tempo che io mi fo la seguente domanda: « *È utile ed opportuno che il programma di matematica del primo biennio dell'istituto tecnico sia comune ai giovani di tutte le sezioni?* »

Dato l'attuale ordinamento degli Istituti Tecnici, la scelta dell'una piuttostochè dell'altra sezione vien fatta dopo il primo anno, ed è per questo che nel rispondere alla mia domanda non posso occuparmi se non del II corso.

Che l'insegnamento della geometria solida fatto ai giovani della sezione di commercio e ragioneria con la stessa estensione che ai giovani delle altre sezioni, sia ai primi perfettamente inutile nell'esercizio della loro professione è cosa evidente. Nè si ripeta la solita obiezione dell'utilità che può avere detto studio come mezzo efficacissimo allo svolgimento dell'intelligenza, dappoichè gli argomenti che posson valere pei futuri laureati in qualunque scienza sembrami non debbano avere la stessa importanza pei futuri ragionieri: altro è l'insegnamento classico, altro il tecnico; e d'altronde una parte di quest'utile i futuri ragionieri l'hanno già avuto con lo studio della geometria nel primo corso.

In quasi nessuna delle scuole commerciali all'estero, corrispondenti alle sezioni di commercio e ragioneria dei nostri istituti tecnici, havvi un programma di geometria, mentre essa si insegna, come da noi, nelle scuole inferiori corrispondenti alle nostre scuole tecniche.

Anche il programma d'algebra del II corso potrebbe essere svolto ai giovani della sezione di commercio e ragioneria con metodo molto più pratico che non si segua adesso. Se, ad esempio, si può comprendere (benchè molti vi siano contrarî) l'insegnamento completo della teorica degli irrazionali fatto nel primo biennio ai giovani delle sezioni fisico-matematica e di agrimensura, si può davvero asserire utile ed opportuno pei giovani della sezione di commercio e ragioneria?

Nè posso tacere del danno che da questa promiscuità deriva alla coltura matematica degli alunni delle prime due sezioni. Nessun maggiore inconveniente che avere un corso frequentato da giovani che a quell' insegnamento danno poca importanza ritenendolo ad essi quasi inutile: il vantaggio che avrebbero i giovani delle sezioni fisico-matematica e di agrimensura quando dovessero *da soli* assistere al corso di matematica, sarebbe grandissimo.

Quando però tutti gli inconvenienti si riducessero a quelli sinora accennati, potrebbe sembrar prematura la necessità di un cambiamento di programma. Ma v' ha di più e di ben più importante.

Nessuno ignora come da qualche anno anche in Italia si vada estendendo uno studio che da moltissimi anni ha una importanza grandissima all'estero, specie in Inghilterra: quello cioè dell'*aritmetica politica* o *matematica sociale.*

La statistica, la teoria delle assicurazioni, i bilanci tecnici delle società di mutuo soccorso ecc. si basano tutte su teorie matematiche, prima fra esse la teoria delle probabilità. In tutte le scuole commerciali dell'estero (parlo di scuole *medie* e non *superiori*) fa parte del programma di matematica un corso di matematica sociale; nella sola Italia si è creduto ciò inutile, e si limitarono queste cattedre alle tre scuole superiori di commercio.

Se pur non si vuole introdurre un corso completo di matematica sociale, perchè non insegnare almeno ai giovani delle sezioni di commercio e ragioneria gli elementi del calcolo delle probabilità con qualche applicazione, e dare così il mezzo di proseguire tali studî a quelli che se ne sentissero la vocazione?

Inspirata a questi concetti sorse in me l'idea della seguente proposta:

Nel II corso dell'istituto tecnico l'insegnamento della matematica sia diviso, e precisamente: *5 ore settimanali* ai giovani delle sezioni fisico-matematica e di agrimensura con l'attuale programma e *5 ore settimanali* ai giovani della sezione di commercio e ragioneria. Il programma per questa ultima sezione dovrebbe essere il seguente:

a) Nozioni di geometria solida (poco più che una semplice ripetizione di quanto i giovani già impararono nelle scuole tecniche);

b) L'attuale programma d'algebra svolto con metodo molto più pratico, dando massima importanza alle applicazioni dell'interesse composto e delle annualità;

c) Permutazioni, disposizioni, combinazioni. — Binomio di Newton per esponente intero. — Elementi del calcolo delle probabilità con qualche applicazione;

d) Nozioni fondamentali sulle coordinate cartesiane. (Questa parte del programma deve avere il solo scopo di render chiaro agli alunni il modo di poter rappresentare per punti con una curva una funzione qualunque, per es. la mortalità nelle varie età, ecc.)

Con tale innovazione bisognerebbe aumentare l'orario complessivo di 5 ore settimanali, e quindi i due professori di matematica avrebbero cumulativamente 25 anzichè 20 ore settimanali. Ma non saranno certo gli insegnanti di matematica che si lascieranno impressionare da un aumento d'orario, essi che primi fra tutti, colla fondazione di Mathesis, hanno mostrato esser precipuo loro sentimento l'amore alla scuola.

RELAZIONE SULLA QUINTA QUISTIONE.

proposta dal Comitato dell'Associazione " MATHESIS „

Modificazioni da introdursi nell'ordinamento degli studi matematici universitari, affine di ottenere buoni insegnanti secondari.

Egregi e chiarissimi Colleghi,

Il presidente dell'Associazione « Mathesis » volle affidare a me l'incarico di riferire intorno alla quistione quinta, ricordandomi che io la mossi, la studiai e la discussi nell'adunanza di Palermo del 27 febbraio 1897. (*)

Nell'accingermi all'adempimento del compito da me accettato non senza trepidazione, io domando che voi, che mi fate l'onore di ascoltarmi, vogliate perdonarmi se, spinto dalla importanza dello scopo cui mira la quistione quinta, allargherò alquanto i limiti di questa.

Incomincio col rilevare una strana e perniciosa consuetudine che vige in Italia. Mentre si fanno commissioni distinte di calcolo infinitesimale, di algebra complementare, di geometria superiore, e via dicendo, distinguendo i competenti in ciascuna di queste discipline, tutti i professori delle facoltà matematiche universitarie si reputano e sono reputati adatti e competenti a giudicare in materia di matematiche elementari. Ora vi è minore differenza tra uno specialista, per es., di algebra superiore e uno specialista di geometria superiore, che tra ciascuno di questi due e un vero specialista di matematica elementare.

Questa parte elementare della matematica ha una letteratura antica e moderna varia ed immensa. In essa oggidì segue un continuo perfezionarsi di metodi, una cura incessante di consolidare le basi, una tendenza ad esporre in modo sempre più rigoroso e inappuntabile, il solo proficuamente e sinceramente educativo dell'intelligenza e perfino del carattere, il solo che non inculchi nei giovani false illusioni e non ingeneri abiti fallaci, e direi disonesti, di ragionare. In essa ferve il lavoro per mantener vive ed estendere ed approfondire le cognizioni antiche e nuove in tutti i rami, delle stesse matematiche superiori, dai quali può trarsi luce sul campo elementare, per recare sotto miglior disegno e far dominare da più perfetti principî i vari argomenti speciali. E l'insegnante di matematiche elementari, che sia abituato a impartire le sue lezioni con amore e coscienza, sa quante cure egli deve tutto dì spendere per avvici-

(*) *Bollettino dell'Associazione* " Mathesis „ anno II, pag. 9.

narsi all'ideale della perfezione in ciascuna teoria e nel legame armonico delle diverse teorie fra loro; egli ogni anno scopre nuovi difetti nel modo come generalmente si insegnano e nel modo tutto suo proprio com'egli ha fino allora insegnato quelle teorie; e gli vien fatto ogni anno di orientarle diversamente, di ritoccarle nella sostanza e nella forma; ed egli, dopo lunghe e annualmente sovrapponentesi variazioni fatte, trova tuttavia il nuovo anno necessario meditare ancora nuove semplificazioni, nuovi perfezionamenti, nuove correzioni.

Sarà dunque possibile che chi ha sempre e soltanto occupato una cattedra universitaria abbia tutti i requisiti necessari per essere competente nel campo elementare?

Anche se prescindiamo dalla esperienza della scuola, troviamo molto esiguo il numero dei professori universitari italiani che prendono parte al movimento scientifico odierno su accennato, e non dirò a quale si riduca il numero di quelli che ciò fanno con successo.

Quindi in concorsi a cattedra di matematiche elementari si vedono commissari che non sanno o non vogliono dare il giusto valore a certe ricerche, sol perchè stimate di indole elementare, in confronto di altre dalle quali restano abbagliati, perchè appartengono a rami superiori, mentre che, appunto per questo, non dovrebbero tenersi in conto speciale in quel concorso, per ragioni ancora più forti di quelle che non fanno contare una nota, per quanto importante, sulla teoria dei numeri, per es., come titolo speciale in un concorso di geometria proiettiva e descrittiva.

Quindi si videro professori universitari di matematica, anche reputati valorosi, che, andati a ispezionare professori di scuole secondarie, riuscirono ad essere viceversa essi ispezionati, e che, per difetto di prudenza, fecero perfino delle tristi figure innanzi alla numerosa scolaresca, che contemplò attonita lo spettacolo del suo professore obbligato a dare ammaestramenti elementarissimi e di ordine fondamentale all'ispettore, che era stato ad essa annunziato come una illustrazione della tale cattedra, della tale università.

Io non voglio dire che invece nella schiera dei professori secondari di matematica ve ne siano moltissimi che stanno all'altezza degli studi speciali come io li ho delineati; ma dico che è questa schiera il solo terreno naturale dove si producono e devono rintracciarsi gli eccellenti veri specialisti e competenti in materia di matematica elementare.

E lo scopo della quistione quinta è precisamente di accrescere sempre più il numero di questi eletti specialisti e il valore di ciascuno di essi.

Ma il complesso dei mezzi che debbono adoperarsi per raggiungere questo scopo è da ricercarsi in un campo più vasto di quello nel quale si restringe la detta quistione.

Basterà infatti, ch'io accenni alla sfuggita, le condizioni miserevoli nelle quali è lasciato l'insegnante secondario italiano, a cui è riserbata una carriera che è un'ironia, grazie alla colpevole grettezza e noncuranza delle classi politicanti e dirigenti per ciò che riguarda la istruzione, la cultura, l'educazione nazionale.

Basta pensare, in particolare, al falso posto che occupa nella opinione, non che del pubblico, degli stessi matematici, l'insegnante di matematiche elementari.

La doppia inferiorità economica e morale, in cui è tenuto questo insegnante, è cagione che molti dei più forti, capitati ignari o illusi nella magra derelitta carriera, sentendo in sè la forza e la volontà di lavorare, dirigono la navicella dell'ingegno a tutt'altro che a diventare eccellenti cultori e insegnanti della disciplina che ad essi ufficialmente fu affidata; e qualcuno, mettendo in non cale il suo ufficio, provvisoriamente a malincuore sopportato, naviga diritto verso l'approdo avventuroso d'una cattedra universitaria, preoccupandosi, non della propria perfezione e cultura razionale e completa, ma di secondare i gusti delle commissioni che dovranno giudicarlo.

Quegli altri che, malgrado il gagliardo ed attivissimo ingegno, rimasero nell'insegnamento secondario, perchè, come ad un apostolato, vi consacrarono tutta la loro esistenza, sono dai più riputati malaccorti o peggio; ed hanno il conforto di non veder adeguatamente apprezzate le qualità speciali e l'infaticabile lavoro che dovettero spendere per cercar di raggiungere la eccellenza nella loro professione, per prendere, come dal loro ufficio particolarmente è richiesto, un degno posto in quella categoria di matematici, che Felix Klein chiama dei *matematici logici*, dove, per questo sommo geometra, « la parola logico serve semplicemente ad indicare che la principale forza degli uomini che fanno parte di questa classe consiste nella loro potenza logica e critica, nel loro potere di dare delle definizioni precise, e di trarre da queste ultime delle deduzioni rigorose ». (*)

Lasciando da banda la questione del miglioramento economico, la quale non deve essere toccata dalla nostra associazione, concludo questa prima parte della mia relazione col presentare le seguenti proposte, alcune già parzialmente accennate nell'adunanza di Palermo sopra citata:

A. *Si promuova un mutamento nella opinione pubblica e specialmente nella opinione degli stessi matematici, perchè sieno considerati gli studj sui fondamenti delle matematiche, e in particolare sulle matematiche elementari, come un ramo speciale di studi, che stia alla pari dei rami così detti superiori.*

B. *Siano affidate le sorti dell'insegnamento di matematica elementare completamente nelle mani dei migliori insegnanti di questa disciplina. Così di essi soltanto si compongano il corpo degl'ispettori, le commissioni giudicatrici dei concorsi alle cattedre, le commissioni per le promozioni, quelle pei libri di testo, quella per la compilazione dei programmi.*

[Questa proposta è un corollario del seguente voto di ordine generale che sarebbe da caldeggiare:

La pubblica istruzione sia tolta completamente all'influenza della

---

(*) *Conférences sur les mathématiques faites au congrès de mathématiques tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago, recueillies par* A. Ziwet, *traduites par* L. Laugel, Paris, 1898, pag. 2.

fluttuante politica; le lettere e le scienze siano assolutamente padrone di sè stesse; il governo della istruzion pubblica sia affidato a quelli che la istruzion pubblica impartiscono.]

C. *Per conseguire una cattedra universitaria sia condizione necessaria avere insegnato con lode per un certo numero di anni nelle scuole secondarie, ed essersi occupato efficacemente del progresso delle matematiche elementari.*

⁂

Passando ora alla precisa quistione quinta, incominciamo col domandarci:

Quali sono gli scopi che deve e può proporsi una Facoltà universitaria di matematica, oltre quello di fornire le conoscenze matematiche necessarie ai giovani che dovranno diventare ingegneri?

Sembra che siano questi tre:

1°. Fare apprendere al giovane la parte essenziale già ben definita delle scienze matematiche;

2°. Condurre il giovane sino agli ultimi confini, ancora forse malsicuri, in tale o in tal'altra regione della scienza; porlo in grado di raffermare il possesso di quelle estreme plaghe, di oltrepassarle per avventurarsi all'onore e alla gloria di nuove conquiste; formare, cioè, il matematico, direi, *conquistatore;*

3°. Addestrare il giovane nell'arte di rassodare le basi e di rintracciare lo sviluppo storico e le ragioni ultime delle verità matematiche già acquisite, di migliorare e semplificare la concatenazione di queste verità, di perfezionare i metodi della esposizione di esse, per renderle più chiare, assimilabili e proficue; formare insomma il matematico *logico* di Klein, il matematico, vorrei dire, *cultore*, e, in particolare, il matematico *professore.*

Ma queste due maniere di essere del matematico conviene e si può tenerle nettamente separate fra loro?

Un matematico conquistatore fa con vera sicurezza e con gloria imperitura le sue scientifiche conquiste soltanto quando è posseduto e diretto dallo spirito logico e critico del matematico logico, e d'altra parte nella pratica vediamo che è obbligato o è tratto a fare il matematico professore. Viceversa un matematico professore acquista lustro e sente grandi sodisfazioni e torna con maggior lena alla sua arte, facendo qualche escursione nel campo del conquistatore.

Ed ora la domanda:

Sono bene ordinate ai tre indicati scopi le presenti facoltà matematiche, poniamo anche di primo ordine?

In quanto al primo scopo la risposta è per comune consenso affermativa.

Quanto al secondo il prof. Ernesto Pascal, nel suo articolo « Sugli insegnamenti di matematica superiore nelle università italiane, » (*) ha per la prima volta risposto in modo assoluto negativamente, ed

(*) *Rivista di Matematica*, vol. III, 1893.

ha accennato alle riforme da effettuarsi. Io accetto completamente le idee del prof. E. PASCAL. Esse furono sostenute dal prof. E. CREPAS al Congresso universitario di Torino del 1894, che le approvò ad unanimità. Lo stesso prof. CREPAS ha ripreso a trattare l'argomento, (*) venendo ad alcuni particolari intorno al modo in cui si dovrebbero coordinare gli studj di matematiche superiori (2º biennio) in tre sezioni distinte; ma pare ch'egli così siasi allontanato dalle idee di libertà assoluta del prof. E. PASCAL, il quale si ispirava alla *Lern-und-Lehr-Freiheit* delle università tedesche.

Noi qui non dobbiamo occuparci di questo argomento; e passeremo a riconoscere il perfetto accordo che vi è nel rispondere negativamente a quella stessa domanda in quanto concerne il terzo degli scopi sopra riferiti. È questo accordo che ha fatto porre la questione quinta, in particolare.

Le scuole di magistero presso le facoltà di filosofia e lettere e quelle presso le facoltà di scienze matematiche e naturali dovrebbero, giusta l'art. 2 del loro regolamento, avere *per fine di rendere gli alunni esperti nell'arte d'insegnare le discipline che, secondo le vigenti leggi, sono insegnate nei licei, nei ginnasi, nelle scuole tecniche e normali e negli istituti tecnici.* Ma quasi tutte le poche scuole di magistero che furono istituite presso le facoltà di scienze matematiche non risposero e non rispondono punto a questo scopo; e con vero compiacimento ho appreso dal processo verbale dell'adunanza parziale della nostra associazione, tenuta a Bologna il 3 aprile 1898, che la scuola di magistero di Bologna fa onorevole eccezione. Per le altre son restate lettera morta perfino quelle buone, sebbene scarse, disposizioni prescritte dal regolamento. E che le dette disposizioni sieno insufficienti non se lo dissimula nemmeno lo stesso ministro VILLARI, che le promulgò; poichè egli comincia la relazione che precede il regio decreto 29 novembre 1891, approvante il regolamento, col dichiarare: « Una riforma sostanziale delle scuole di magistero non è possibile senza connetterla con una riforma delle università. Ma per questa occorre tempo, ed è necessario una legge del Parlamento. Intanto da più parti si domanda con grande insistenza un qualche provvedimento, perchè i molti e diversi regolamenti che furono pubblicati per le scuole di magistero, lasciarono le cose in una grande incertezza, accresciuta dal fatto che l'ultimo di essi non venne attuato, sicchè non si sa precisamente quale di essi debba essere posto in vigore.

Un provvedimento perciò è divenuto urgente. Ma non si tratta per ora di fare una istituzione nuova affatto, perchè bisogna tener conto dell'ordinamento presente delle nostre università, ed ancora di uno stato di fatto, che ha creato delle consuetudini e degli interessi, dei quali non è sempre facile non tenere alcun conto. Quello che importa è che alla incertezza presente si ponga un termine, e che le cose non peggiorino in modo da rendere sempre più difficile una riforma più radicale, la quale non è ora possibile ».

(*) *Scuola secondaria italiana*, 1898.

Dopo che il comitato direttivo dell'Associazione « MATHESIS » ebbe proposta la questione quinta, e ancora più, dopo che volle sceglier me relatore di essa, io fui impegnato a ritornare sulle proposte discusse il 27 febbraio 1897, per svilupparle e completarle; e, come risultato definitivo del mio studio, ecco qui appresso i provvedimenti che io ora propongo siano introdotti nelle facoltà complete di matematica, perchè queste abbiano modo di fornire il corredo di cognizioni e di esercitazioni più adatte a preparare quegli che dovrà degnamente occupare una cattedra di matematica.

I. *Stabilire un Corso sui* FONDAMENTI DELLE MATEMATICHE.

Chi dettasse questo corso potrebbe specialmente attingere, per la Geometria ai due volumi, testè finiti di stampare, « Einführung in die Grundlagen der Geometrie » di W. KILLING, e alle pubblicazioni di GRASSMANN, HELMOLTZ, RIEMANN, LEGENDRE, HOÜEL, F. KLEIN, PASCH, PEANO; per l'Aritmetica ai lavori di GRASSMANN, HANKEL, DEDEKIND, KRONECKER, WEIRSTRASS, G. CANTOR; per la teoria delle grandezze alle pubblicazioni di GRASSMANN, BETTAZZI, BURALI-FORTI.

II. *Stabilire delle Conferenze sui* METODI D'INSEGNAMENTO DELLE MATEMATICHE *nelle varie scuole.*

Queste conferenze potrebbero ispirarsi per es. ai libri di *Lacroix*, di P. SERRET, di DUHAMEL; e dovrebbero specialmente discutere i vari modi come ogni teoria può essere odiernamente presentata e trattata, e indicare i vantaggi di ciascuno o della combinazione di alcuni sugli altri, in corrispondenza di questo o quello scopo che l'insegnante deve proporsi.

III. *Stabilire delle Conferenze di* CRITICA *sui più notevoli libri di testo proposti o adottati nelle varie scuole italiane ed estere.*

IV. *Stabilire l'obbligo di un certo periodo di* SAGGI DI LEZIONI, *che ciascuno studente, sotto la vigilanza dei suoi professori, e secondo norme precedentemente discusse, dovrebbe impartire, o innanzi ai colleghi della facoltà, o meglio, se fosse possibile, in una scuola secondaria; e l'obbligo di* ESERCITAZIONI PRATICHE *sui criteri da seguirsi per scegliere e per correggere le questioni che effettivamente si proporrebbero e si farebbero risolvere o ai propri colleghi o agli alunni della detta scuola secondaria.*

V. *Stabilire un Corso sulla* STORIA DELLA MATEMATICA.

VI. *Stabilire un Corso di* LOGICA MATEMATICA.

VII. *Istituire una* BIBLIOTECA *che, oltre a contenere opere riguardanti i varj rami di matematiche superiori, abbia una speciale* COLLEZIONE DEI LIBRI DI TESTO E DEI LIBRI DI ESERCIZJ *che sono stati pubblicati dovunque nel campo delle matematiche elementari.*

VIII. *Affidare, per un biennio, a un professore il corso sui fondamenti (proposta I); a un altro le conferenze sui metodi d'insegnamento (proposta II) e le conferenze di critica (proposta III); ad entrambi, ma con preponderanza al secondo, i saggi di lezioni e le esercitazioni (proposta IV).*

Scegliere il secondo di questi due professori esclusivamente fra coloro che hanno almeno per un decennio insegnato con zelo ed efficacia nelle scuole secondarie, e siensi segnalati per ingegno, attività scientifica e soda cultura; scegliere il primo professore o in questa medesima categoria o anche fra quei professori universitari, che alle ricerche originali nelle alte regioni della loro scienza abbiano associati lunghi e meditati studi sui fondamenti di essa, e che non abbiano disdegnato di scendere spesso nell'umile dominio della matematica elementare.

Affidare i corsi di storia della matematica e di Logica matematica a due chiari cultori di queste discipline.

IX. *Istituire delle* CONFERENZE AUTUNNALI, *che qualche professore opportunamente scelto fra quelli nominati colle norme della proposta VIII, e anche un eminente matematico in generale, dovrebbero dare, in una città centrale del regno, intorno ad argomenti che hanno attinenza colle matematiche elementari, o che possono contribuire a migliorare l'insegnamento di queste. A tali conferenze* (*) *dovrebbero assistere sia gli studenti del secondo biennio delle facoltà di matematica, sia i professori di scuole secondarie.*

X. *Attuare il piano delle riforme qui presentato, dapprima soltanto in una o in due facoltà, che sieno tra le più importanti e che meglio si prestino allo scopo delle riforme stesse.*

Perocchè sarebbe presentemente impossibile trovare un numero di persone che potessero degnamente occupare le nuove cattedre, quando le riforme si attuassero in un maggior numero di università. Sarà invece l'attuazione, fatta così limitatamente, incitamento ad una gara che farà crescere il numero di queste persone; e si potrà poi estendere la riforma stessa a qualche altra facoltà matematica di primo ordine. Valgono in gran parte anche a questo proposito le giuste considerazioni nel citato articolo fatte dal prof. E. PASCAL intorno alla smania di tener su in Italia un numero di facoltà matematiche complete che sorpassa la presente potenzialità scientifica del nostro paese.

XI. *Il corso, le conferenze, i saggi di lezioni e le esercitazioni, di cui nei numeri I-IV, costituiranno la nuova* SCUOLA DI MAGISTERO *della facoltà di matematica.*

Per ottenere il diploma di questa scuola sarà necessario, non solo aver frequentato il corso biennale della scuola stessa, averne superate

(*) Di cui si ha un modello in quelle di F. KLEIN, pubblicate sotto il titolo *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*, ausgearbeitet von F. TÄGERT, Leipzig, 1895. Vedi la traduzione italiana di F. GIUDICE. Torino, 1896.

le prove, aver conseguita la laurea in matematica, ma altresì aver frequentati i corsi di storia della matematica e di logica matematica, e averne superati gli esami.

*
* *

Ed ora incomincio dal notare che il citato regolamento per le Scuole di magistero sostanzialmente contiene (art. 5 e 6) le disposizioni delle precedenti proposte II, III e IV.

Osservo poi che le adunanze di Bologna, di Sassari, di Recanati, che, fra quelle promosse dall'Associazione « MATHESIS », discussero la questione quinta, (*) si mostrarono favorevoli, alle proposte I e V l'adunanza di Bologna; alle proposte I e V e specialmente alla IV, l'adunanza di Sassari; alla proposta V e forse (se ho bene interpretato) alle proposte I, II e IV, l'adunanza di Recanati.

Passerò finalmente alle risposte individuali date alla questione quinta.

Il dott. E. CREPAS, in due articoli pubblicati nella « Scuola secondaria italiana », uno dei quali ho già innanzi citato, si manifesta favorevole alle proposte II-V.

Il prof. C. LAZZERI, dice semplicemente e indeterminatamente: « Ritengo utile l'istituzione di cattedre di matematiche elementari nel 2° biennio dell'università, affidate a chi di insegnamento secondario ha fatto lunga pratica ».

Il prof. O. BUZZI insiste sulla proposta V.

Il prof. F. ANGELERI vorrebbe ridurre a due soli i professori di scienze nei licei, « l'uno dei quali insegnasse Matematica e Meccanica, l'altro il resto della Fisica e le Scienze naturali »; e soggiunge: « per poter creare tali insegnanti sarei di parere che il primo biennio di università fosse per tutte le facoltà scientifiche in comune, e nel secondo biennio, che vorrei fosse una vera scuola normale superiore, avvenisse la divisione, essendovi tuttavia delle materie in comune. Vorrei di più che tutti gli studenti di scienze fossero obbligati a frequentare una materia letteraria filosofica, come quelli di lettere dovessero prender parte a qualche lezione di scienze ».

Il prof. F. PALATINI è favorevole alla istituzione della cattedra di cui nella proposta I; ma vorrebbe che a questa cattedra fosse nominato esclusivamente un provetto e distinto insegnante di scuola secondaria, allontanandosi così, in parte, dalla proposta VIII; e vorrebbe (d'accordo con la proposta VIII) che la nomina fosse temporanea, per ragioni ch'ei riferisce.

Il prof. G. B. MARANGONI richiede che « nei concorsi il titolo di ingegnere non sia ritenuto equipollente a quello di dottore in matematica pura ».

Ed io dirò che in fatti la legge non lo ritiene equipollente; chè anzi domanda come titolo necessario per ottenere una cattedra di matematica nelle scuole secondarie superiori la laurea in matematiche pure.

(*) *Bollettino*, anno II, n. 6, e anno III, n. 1.

Ma pur troppo alle volte abbiamo visto, in onta alla legge, nominare professore a una tale cattedra, in città di primo ordine, senza concorso, qualche giovane fornito della sola laurea d'ingegnere, a marcio dispetto di tanti che avevano il diritto di aspirarvi.

Ond'io sottopongo al vostro giudizio un'altra proposta (la XIII), che formulerò più oltre.

Finalmente il prof. D. Gambioli non trova utile cambiare l'odierno ordinamento delle facoltà matematiche, ch'ei giudica ottimo.

Da quel che ho detto innanzi risulta perchè e come questo giudizio è erroneo.

Il prof. Gambioli dice poi che a lui sembra superfluo istituire la cattedra sui fondamenti delle matematiche, principalmente perchè questi sono inclusi tanto nel corso di analisi superiore quanto in quello di geometria superiore. Io posso anche asserire di più, che nell'analisi si raccoglie e compendia tutta la matematica. Ma non da questo potrò dedurre la superfluità, per es., delle cattedre di calcolo infinitesimale, di algebra complementare, di geometria analitica, e via dicendo, che invece servono a dei fini definiti e costanti, riconosciuti indispensabili a formare la cultura matematica.

In terzo luogo il prof. Gambioli vorrebbe « soppresse le scuole di magistero annesse alle facoltà di matematica, perchè non rispondono punto al fine, pel quale sono state istituite, e non sono che delle vere sinecure per alcuni docenti; e in luogo di esse, soggiunge, sarebbe assai meglio che i giovani appena laureati fossero nominati assistenti del professore di matematica delle scuole secondarie inferiori delle grandi città ». A queste parole il prof. Gambioli fa seguire i particolari della retribuzione, delle incombenze, etc.; e in ultimo la dichiarazione che la sua proposta istituzione degli assistenti è modellata su quella vigente presso il municipio di Milano per le scuole elementari.

Di questa proposta, la prima parte, distruttiva, non posso accettarla; perocchè non è ragionevole ed umano condannare alla morte un organismo sol perchè malato, quando è possibile ridargli la salute e infondergli vita e vigore; ed è perciò che io al contrario ho a voi presentate le proposte I-XI. La seconda parte della stessa proposta del prof. Gambioli, la parte creativa, l'accetto nella sostanza, e la presento sotto la forma della proposta XII, che qui segue.

Ecco dunque le due ultime proposte già preannunziate:

XII. *Ogni anno sarà bandito un concorso fra i giovani che hanno ottenuto il diploma di una scuola di magistero, allo scopo di classificarli per ordine di merito. Quindi i giovani classificati si andranno ordinatamente nominando, al più presto, come assistenti, per due anni in una scuola secondaria inferiore, e per i due anni successivi in una scuola secondaria superiore. Si sceglieranno le scuole che hanno le classi più numerose. Le retribuzioni saranno a carico del governo, della provincia e del comune ove risiede la scuola*, etc.

SARÀ ASSOLUTAMENTE VIETATA LA NOMINA AD ASSISTENTE IN UN MODO DIFFERENTE DA QUELLO ORA DESCRITTO.

XIII. Non si può essere nominato professore di una scuola secondaria se non per concorso.

Perciò ogni anno si farà un concorso a cattedre già vacanti o che si renderanno vacanti durante l'anno nelle scuole secondarie. Sarà titolo necessario per la eleggibilità la laurea in matematiche pure; sarà titolo di grande preferenza il diploma di una scuola di magistero e il certificato di assistenza alle conferenze di cui nella proposta IX; sarà nuovo titolo di preferenza l'avere lodevolmente esercitato l'ufficio di assistente di cui nella proposta XII.

***

Mi si concedano ancora poche parole perch' io possa spezzare una lancia in favore d'una nuova Cenerentola.

Si sarà notato che, delle mie proposte I-VI, l'unica che non abbia trovato consenso in nessuno degli egregi colleghi, dei quali ho riferite le opinioni, è quella che mira a istituire un corso di logica matematica.

Ebbene io ho grande fede nel molto bene che i metodi del calcolo logico, dalla maggior parte degli scienziati disprezzato o deriso, son destinati a portare, non solo nell'insegnamento, ma nelle ricerche scientifiche in generale. Dico questo per intimo convincimento, e non perchè so di trovarmi nella cittadella dove quei metodi sono così pertinacemente e con tanto valore propugnati. E potrei recare esempi, anche recentissimi, di lavori che, pur rivelando una forte potenza investigatrice delle più profonde questioni scientifiche, sono tanto deficienti dal punto di vista logico, (sia per le proposizioni malamente poste a fondamento o non poste addirittura, sia nella concatenazione delle proposizioni dedotte), che fanno deplorare che i loro autori sieno così ignoranti o noncuranti o dispregiatori dei prelodati metodi, i quali li avrebbero salvati dalla macchia d'un peccato, ch'io reputo capitale!

Perocchè, o egregi e chiarissimi colleghi, la scienza veramente assodata per sempre, la scienza che ha il bollo e l'aureola dell'eternità è soltanto quella che è perfettamente scevra di questo peccato.

Ond'io intendo che il corso di logica matematica debba essere istituito come obbligatorio per ogni sorta di studenti di matematiche pure.

Ed ora che, come ho potuto, ho esaurito il mio compito, domando la vostra benevola indulgenza. Non dubito che il vostro senno, la vostra cultura, l'esperienza vostra suppliranno alla deficienza del relatore, e che dalla discussione che seguirà verranno fuori dei risultati che faranno onore a questa adunanza e all'Associazione « Mathesis », contribuendo a quel miglioramento dell'insegnamento della matematica che è lo spirito che anima la nostra associazione.

Prof. Luigi Certo.

NOTE ALLA DISCUSSIONE DELLA PRIMA QUISTIONE

TRATTATA DAL CONGRESSO

Non essendo stata completamente risoluta la questione della fusione della geometria piana e solida, credo che sia utile ripetere qui e completare quanto ebbi l'onore di esporre al Congresso.

E prima di tutto facciamo un po' di cronaca per mettere bene in chiaro a qual punto è giunta attualmente la quistione.

In quasi tutte le adunanze parziali, promosse dal comitato dell'Associazione « Mathesis » prima del congresso, era stata affermata l'opportunità di modificare gli attuali programmi in guisa che ogni insegnante potesse liberamente scegliere fra il metodo della separazione e quello della fusione della geometria piana e solida.

L'opportunità di questa modificazione è stata proclamata solennemente dal congresso *a unanimità di voti*, nella prima seduta dopo aver ben precisato il significato delle parole « fusione delle due geometrie ». Infatti nelle adunanze parziali tenute a Torino nei giorni 21 e 22 febbraio fu proposto che *per ora s'intenda per fusione un metodo didattico di alternazione di geometria piana e solida*, e in quelle tenute a Recanati nei giorni 28 e 29 giugno fu proposto invece che *per fusione debba intendersi un metodo didattico secondo il quale fin da principio si studiano simultaneamente gli argomenti affini di geometria piana e solida, e si vengono in seguito applicando le proprietà dell'una e dell'altra per trarne il maggior vantaggio possibile.*

Fra queste due interpetrazioni il congresso accettò la seconda, che è la più ampia e più precisa.

In seguito a ciò, allo scopo di giungere ad una soluzione pratica, nell'ultima seduta fu proposta la seguente distribuzione della materia, che permette appunto la libertà di scelta fra i due metodi:

nei Licei:	1° anno — *Proprietà di posizione e di eguaglianza.*
	2° anno — *Equivalenza, similitudine.*
	3° anno — *Misura. Trigonometria piana.*
negl'Istituti tecnici:	1° anno — *Proprietà di posizione ed eguaglianza.*
	2° anno — *Equivalenza, similitudine e misura.*
	3° e 4° anno — *Trigonometria e teorie complementari.*

Tale proposta fu fatta con un ordine del giorno, che portava le firme illustri dei professori Veronese e Segre insieme a quelle di molti fusionisti e separatisti; ma non fu messa ai voti, perchè dopo aver votato la sospensiva sopra la relazione Bustelli, nella quale si progetta un completo rimaneggiamento dell'istruzione secondaria, non parve opportuno un voto su proposte parziali.

Malgrado ciò, a nessuno può sfuggire quale e quanta importanza abbia il fatto che i rappresentanti delle opinioni più disparate sul proposito della fusione abbiano trovato il modo di mettersi d'accordo sopra una proposta conciliativa e tale da contentare tutti i gusti. Ed è logico che questa proposta debba finire coll'essere favorevolmente accolta dall'uomo illustre, che regge le sorti della pubblica istruzione, in omaggio a quei principî di libertà, che egli vuole introdurre in tutti i rami del pubblico insegnamento dal più elementare al più elevato.

Questo lo stato attuale di fatto, del quale, se volgono uno sguardo indietro non possono chiamarsi scontenti tutti coloro che, come me, sono fautori della fusione. Pensando agli ostacoli di ogni maniera che questa idea ha incontrato nel suo cammino, e confrontando il passato al presente, non possiamo fare a meno di provare una legittima soddisfazione. Quattordici anni fa, quando il compianto De Paolis pubblicò i suoi *elementi,* la quistione della fusione era ignorata dai più, i fusionisti si potevan contare sulle dita di una sola mano, ed erano considerati come mattoidi o poco meno; oggi sono legione, mentre il numero degli oppositori diventa sempre più ristretto, e la quistione ha fatto tanto cammino che ha l'onore di occupare i professori di matematica il primo giorno che si adunano per il loro primo congresso; è proclamata la necessità di fare su larga scala l'esperimento, che è già stato fatto con successo nella R. Accademia navale ed in alcune scuole secondarie; e da un nucleo di professori viene presentato un progetto per render possibile questo esperimento.

Tenendo conto dei risultati ottenuti e di quanto già è stato scritto sull'argomento, parrebbe superfluo scrivere ancora sui vantaggi della fusione. Tuttavia, come ho già detto, non credo inutile ripetere qui quanto già ebbi l'onore di esporre al congresso, allo scopo di richiamare sull'importante argomento l'attenzione dei pochi che ancora non l'hanno studiato con tutta l'attenzione che merita.

È noto che i principali argomenti che militano a favore della fusione si possono raggruppare così:

1º risparmio di tempo che si ottiene trattando simultaneamente gli argomenti affini di geometria piana e solida;

2° *semplificazione di talune teorie di geometria piana, trattandole coll'aiuto di considerazioni stereometriche;*

3° *miglior coordinamento dello studio delle matematiche con quello delle altre materie, che s' insegnano nei licei ed istituti tecnici.*

Dall'interpetrazione che fu proposta nelle adunanze di Torino, e che ho sopra ricordato, apparisce che in quella adunanza non si volle discutere la quistione nel suo triplice aspetto, ma si volle considerare soltanto il primo ed un poco il terzo, escludendo a priori il secondo.

È soddisfacente per noi fusionisti che due soli degli argomenti, su cui noi ci fondiamo, abbia indotto tanti e sì autorevoli insegnanti a ritenere utile l'esperimento su larga scala del metodo della fusione; ma credo necessario osservare che l'argomento più importante è precisamente quello che si è voluto escludere, e che forse non è stato fin'ora apprezzato come merita. Mi si permetta dunque d'insistere particolarmente su questo senza occuparmi degli altri due, che oramai possono dirsi quasi fuori di discussione.

È ormai cosa universalmente riconosciuta che la geometria elementare deve essere insegnata indipendentemente da ogni aiuto dell'algebra, affinchè raggiunga il suo alto scopo educativo e sia una scuola di logica; che gli esercizi misti di algebra e geometria, ai quali abitualmente i giovani s' interessano, devono essere un'applicazione, non un mezzo per dimostrare le verità geometriche. La teoria delle proporzioni è, secondo me, collegata al concetto di numero e di misura più di quanto si voglia ammettere, ma anche trattata col metodo Euclideo nella mente degli studenti si collega colle proporzioni fra numeri, e perciò, quando si fa largo uso delle proporzioni, l' idea di numero che si vuol cacciare dalla porta rientra dalla finestra.

Ebbene nel Trattato del De Paolis il teorema « *Se due triangoli sono equiangoli fra loro, il rettangolo di un lato dell'uno e di uno non corrispondente dell'altro è equivalente al rettangolo dei lati corrispondenti a quelli considerati* » è dimostrato per mezzo di poche e semplici considerazioni stereometriche; e per mezzo di esso tutte le proposizioni relative alla teoria dell'equivalenza delle superficie piane, che, seguendo Euclide, si dimostrano in modo assai contorto e laborioso, si dimostrano invece colla stessa semplicità ed eleganza che il Legendre ottiene, facendo uso della teoria delle proporzioni e della misura.

Dopo di che anche lo studio delle superficie e dei volumi dei corpi rotondi, coni, cilindri sfere e parti di queste, che anche in molti buoni libri si fa per mezzo delle misure o almeno coll'aiuto della teoria delle proporzioni, si può fare invece senza ricorrere a misure o a proporzioni, dando anche agli enunciati forme più rispondenti alla intuizione geometrica.

Insomma l'uso delle considerazioni stereometriche ha semplificato assai la teoria dell'equivalenza, e l'ha resa assolutamente indipendente dalla teoria delle proporzioni, in guisa che si può trattare prima di questa.

Altri notevoli risultati si ottengono, stabilendo il concetto di omotetia per mezzo di poche nozioni sulle rette e piani paralleli, e deducendo poi da quello la teoria della similitudine, come abbiamo fatto il professor Bassani ed io nei nostri *Elementi di geometria.*

In tal guisa tutte le proprietà puramente geometriche che si possono dedurre dalla considerazione di figure simili, benchè non si riferiscano a proporzioni, si possono rendere assolutamente indipendenti dalla teoria delle proporzioni medesime, come per es. il teorema « Se le rette di un fascio sono tagliate da due rette parallele, a due segmenti eguali della prima retta corrispondono segmenti eguali della seconda ».

Mi si permetta infine di osservare che nei nostri *Elementi* sopra citati, abbiamo trattata le teoria degli assi e piani radicali basandoci su proprietà elementarissime di circoli e sfere senza fare uso di proporzioni e di misure. In tal guisa una gran quantità di problemi, come le costruzioni di circoli o sfere, che passano per punti dati e sono tangenti a rette e circoli o a piani e sfere date, si risolvono senza ricorrere alle proporzioni, come prima pareva necessario.

Ciò che ho esposto si riferisce alle semplificazioni che le considerazioni stereometriche hanno introdotto in intere teorie, e che hanno permesso di studiare ciascuna delle quattro parti essenziali della geometria elementare e cioè: proprietà posizione e di eguaglianza, equivalenza, similitudine, misura, in guisa da poterle esporre nel loro ordine logico e naturale senza bisogno di ricorrere alle successive teorie. È inutile dunque che entri in dettagli e parli delle semplificazioni che si possano ottenere anche nei singoli teoremi, poichè ciò mi porterebbe troppo in lungo.

Mi sembra un po' difficile disconoscere l'importanza di questi risultati, ma pure (è doloroso a constatarsi, ma è vero) gli oppositori sistematici si ostinano a non occuparsene; e mentre da parte dei fusionisti si cercano sempre nuove prove del valore del metodo da noi propugnato gli oppositori ripetono con insistenza molto monotona e sconfortante le stesse obiezioni che in fondo si riducono a questo: 1° son duemila anni che si fa così e non occorre cambiare; 2° l'unico risultato ottenuto è quello di rendere indipendente dalle proporzioni la divisione di un angolo piatto in cinque parti eguali.

Della prima obiezione non vale la pena di occuparsi; per quel che si riferisce alla seconda non voglio indagare se è ripetuta continuamente, perchè non si vogliono leggere spassionatamente gli articoli scritti in proposito dai fusionisti, o perchè non si sa come ribatterli: in ogni modo però si raggiunge l'intento di impedire che la discussione seria e feconda faccia cammino e di conservare lo *statu quo*, che è la vittoria dei separatisti.

E per provare quanto asserisco basterà che citi qualche fatto.

Il mio illustre e compianto maestro De-Paolis circa 14 anni fa, cioè quando venne alla luce il suo ottimo libro, che ha dato origine in Italia alla presente discussione, mi raccontava sorridendo che un valente e assai noto professore (chiamiamolo il prof. X) aveva dichiarato che il libro in quistione era stato pubblicato unicamente per far conoscere la nuova dimostrazione trovata dal De-Paolis per costruire un quinto di angolo piatto, e che unicamente per dare importanza a questa scoperta il De-Paolis aveva inventata la fusione delle due geometrie, che il prof. X in tuono dispregiativo chiamava *confusione*.

Così con una frase che era, o pretendeva di essere, spiritosa, col voler far dipendere da una particolarità piccina un concetto, del quale anche gli oppositori non possono disconoscere l'importanza, la generalità, la vastità, si cercava di demolire l'opera di quattro anni di lavoro assiduo, fatta da uno dei migliori ingegni che abbiano onorato in questi ultimi anni gli studi geometrici in Italia.

Ho già dimostrato che i risultati ottenuti alla prima dal De-Paolis, e che si possono trovare nel suo libro, sono assai numerosi, e che questi risultati sono stati accresciuti in seguito. Ebbene circa un anno fa il professore Palatini asseriva che le proposizioni che si dimostrano più semplicemente coll'aiuto di considerazioni stereometriche sono ben poche e di poca entità, se si faccia astrazione dal problema già più volte citato della costruzione di $^1/_5$ di angolo piatto: faceva la critica del libro del De-Paolis, e dell'opera nostra, qualunque essa sia, non si occupava affatto, neanche per dirne male. Aggiungeva che nulla prova che non si possano col tempo trovare dimostrazioni planimetriche altrettanto semplici di quelle stereometriche.

Il prof. De-Amicis nel suo brillante articolo *pro-fusione* ribatteva queste osservazioni del prof. Palatini, faceva una enumerazione già abbastanza lunga di dimostrazioni planimetriche fatte in modo semplice ed elegante coll'aiuto della stereometria, ed aggiungeva, molto giustamente, che mentre è logico e ragionevole sperare di far nuove conquiste nel campo della geometria elementare col metodo della fusione, che si adopera solo da pochi anni, è poco probabile ottenere progressi notevoli col metodo della separazione che in 22 secoli è stato sviscerato.

Malgrado la larghissima diffusione che ha avuto l'articolo del prof. De-Amicis, nel n. del 31 agosto della *scuola secondaria* il professore Angeleri, che pure cita con parole simpatiche i trattati di De-Paolis, Lazzeri e Bassani, Veronese, Brestschneider, Steen, Galdeano, ecc. dice: « Tutto il vantaggio, se mal non mi appongo, si « riduce, restando ben s' intende nella geometria elementare al pro« blema di costruire un triangolo isoscele con gli angoli alla base « doppi dell'angolo al vertice; e qui un vantaggio c'è davvero, per« chè si può svolgere l'intera teoria dei poligoni regolari subito « dopo la teoria del circolo; ma per quest'unico vantaggio andar « contro le norme più elementari della pedagogia, a me almeno non « sembra corretto ».

Ecco, io sarei sinceramente addolorato ed afflitto di aver mancato alle regole più elementari di buona creanza verso una signora così rispettabile come la pedagogia, ma nè io, nè tutti coloro che sono della mia opinione, ci potremo riconoscere rei del delitto di lesa-pedagogia, finchè non ci sarà mostrato in qual modo la fusione è contraria ai principi di questa scienza.

Non posso terminare queste righe senza aver risposto ad una osservazione assai arguta ed ingegnosa del mio carissimo amico e collega prof. Retali, che però non credo giusta. Egli dice essere ormai rigorosamente *dimostrato da Riemann, come per istudiare uno spazio a* n — 1 *dimensioni possa farsi astrazione dallo spazio di* n *dimensioni che la contiene.... Per converso non è possibile muovere un passo nello studio dello spazio ad* n *dimensioni senza invocare proprietà di spazi aventi un minor numero di dimensioni.*

Tutto ciò è perfettamente giusto dal punto di vista puramente scientifico, quando si tratta di stabilire i postulati fondamentali degl'iperspazi. In questi l'intuizione, che ci aiuta immensamente nello spazio ordinario, non giova affatto. Quest' iperspazi non hanno una rappresentazione reale immediata e la nostra mente gli ha creati per via induttiva, perciò non possiamo studiare i caratteri fondamentali di uno spazio a n dimensioni senza l'aiuto di spazi con un numero minore di dimensioni.

Ma questo non prova che una volta stabilite le proprietà fondamentali di un iperspazio non si possano ricavare dalle sue proprietà più elementari, in modo semplice e breve, altre proprietà più complicate di figure appartenenti a spazi con un numero minore di dimensioni.

Gli esempi che si potrebbero citare in proposito, ricavandoli dalla geometria superiore per mostrare come dalle proprietà di un iperspazio si possano dedurne immediatamente altre di spazi con un numero minore di dimensioni sono innumerevoli. Basterà che citi le rappresentazioni piane delle superficie, per mezzo delle quali si possono da proprietà delle superficie ricavarne altre di curve, e viceversa; la rappresentazione dei complessi di rette oppure di sfere sullo spazio ordinario, lo studio dell'esagono di Pascal dedotto dalla figura di sei complessi di sei connessi due a due in involuzione e molte altre.

In particolare citerò due altri esempi. Le configurazioni di Caporali, di cui io detti un'esposizione elementare nel n. 1, 1897 di questo Periodico, non è che la sezione prodotta da un piano nella figura che in un iperspazio S_n è definita da p punti e dagli iperspazi S_{n-1}, S_{n-2}, che essi determinino.

I teoremi che mi hanno servito a stabilire una teoria geometrica delle curve polari si dimostrano molto più semplicemente coll'aiuto di iperspazi. (Rendiconto del R. Ist. Lombardo 1891).

Ma anche restando nel campo della geometria elementare è facile vedere che è conveniente, anzi necessario, come disse l'illustre prof. Veronese al congresso, risalire dalle forme più semplici alle più complesse per stabilire rigorosamente i concetti di retta, piano e spazio, ma una volta stabiliti questi concetti, si possono avere, e si hanno in fatti, molti vantaggi, ricavando le proprietà delle forme di un minor numero di dimensioni da altre proprietà di forme con un numero maggiore di dimensioni.

E infatti se si volesse applicare il principio dimostrato da Riemann in tutta la sua estensione si dovrebbe fare tutta la geometria dalla retta prima di parlare di piano. Ma operando in tal guisa ci troveremo nell'impossibilità di risolvere i problemi più elementari. Per esempio come si fa a dividere un segmento in due o in n parti eguali, a costruire il quarto armonico dopo tre punti senza uscire dalla retta? Come si divide per metà un angolo senza fare uso altro che del fascio, al quale appartengono i due lati dell'angolo?

Se dunque non si può studiare completamente la retta senza ricorrere al piano, non è naturale il pensare, quand'anche mancassero prove positive e dirette, che lo studio del piano possa essere per lo meno agevolato dalla nozione dello spazio?

Riepilogando, io credo che, sebbene il Congresso non abbia risoluto in modo definitivo la quistione, e l'abbia rimessa per un ulteriore esame al congresso futuro, le abbia però fatto fare tanto cammino, da potersi ritenere come probabile, anzi quasi certa, una prossima risoluzione favorevole.

Eppure colui, che ha lanciato per primo l'idea, che per altezza d'ingegno e per la posizione scientifica che occupava avrebbe potuto più efficacemente cooperare a farla trionfare, il prof. De-Paolis, è morto, ma la sua idea è rimasta, e per forza propria ha germogliato, e forse porterà presto i suoi frutti. Mi è grato quindi per l'affettuosa amicizia che mi legava a Lui ricordare il suo nome a proposito di una discussione, che può dirsi un omaggio alla sua memoria.

Ormai la quistione è matura, ed è necessario che i programmi siano modificati in modo che ogni insegnante sia libero di scegliere fra il metodo della fusione e quello della separazione.

Allora soltanto, quando ognuno avrà avuto agio di sperimentare i due metodi, e si sarà reso padrone egualmente di tutti e due, i preconcetti che naturalmente la forza dell'abitudine fa nascere contro tutte le novità, dilegueranno, e tutti diveranno fusionisti.

E mi sia lecito terminare, applicando al caso nostro le parole di un illustre scrittore « *la verità è in marcia* », e di esprimere la speranza che presto si possa dire « *la verità è arrivata* ». Il presente risveglio mi fa sperare che ciò avverrà specialmente per opera di noi Italiani, che per accettare un'idea nata e germogliata in Italia non vorremo attendere che essa ci ritorni dall'estero.

G. Lazzeri.

Il relatore della 2ª quistione prof. Enrico De-Amicis *non ha potuto per malattia inviare la sua relazione. Questa sarà pubblicata in uno dei prossimi numeri del Periodico.*

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 22 Decembre 1898.

SULLA TRASFORMAZIONE

D'UN PRODOTTO DI DUE SOMME DI n QUADRATI

IN UNA SOMMA DI n QUADRATI

Nota di ELCIA SADUN (*)

Col titolo « *Intorno alla moltiplicazione di alcune forme quadratiche* » (**) il professore GENOCCHI pubblicò una breve Nota, nella quale si propose di dimostrare che la proprietà di riprodursi, per moltiplicazione, appartenente alle forme quadratiche $x^2 + ay^2$, $x^2 + ay^2 + bz^2 + abt^2$, con due e con quattro indeterminate, si verificava per forme consimili contenenti 2^n indeterminate.

Avendo avuto occasione di analizzare quella dimostrazione, ho riconosciuto ch'essa è errata laddove da un caso particolare l'Autore passa ad estenderla al caso generale. Ciò apparirà dalle considerazioni svolte nel § 1, il quale è altresì dedicato a porre in chiaro che la via prescelta dall'Autore non è adatta a stabilire la verità della proposizione neppure per le forme con quattro o con otto indeterminate.

Del resto, ogni tentativo di estendere la proposizione alle forme contenenti più di *otto* indeterminate doveva riuscire infruttuoso, perchè già il KIRKMAN nella Memoria: *On Pluquaternions and Homoid Products of Sums of n Squares,* (***) ne aveva dimostrata l'impossibilità.

Il CAYLEY poi, nella sua « *Demonstration of a theorem relating to the products of sums of squares,* » (****) semplificò in parte la dimostrazione del KIRKMAN, ma non tanto da non far sentire il desiderio di risolvere l'interessante quesito con metodi più elementari. A me sembra di esservi riuscito nel modo che si troverà esposto nei susseguenti §§ 3 e 4.

Il § 2 contiene alcune osservazioni riferentisi all'importante Nota del prof. BRIOSCHI « *Sur l'analogie entre une classe de déterminants etc.* » (*****) ove si trova incidentalmente trattato il problema per il caso relativo al prodotto di due somme di otto quadrati.

Chiude infine questo lavoro l'osservazione che le forme $x^2 + ay^2$, $x^2 + ay^2 + bz^2 + abt^2$ ecc. non hanno, come sembrerebbe, in tale questione, una generalità maggiore delle forme $x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, ecc. che da quelle si deducono supponendo che i valori di a, b ecc., siano uguali all'unità.

(*) Pubblichiamo volentieri questa Nota che l'autore fece stampare in pochi esemplari, nell'anno 1896, per l'occasione di un concorso. (N. d. R).

(**) *Annali di Matematica pura ed applicata*, pubblicati da B. TORTOLINI, Tomo III, pagg. 202-205.

(***) *Phil. Mag.* Serie III, Vol. XXXIII, pagg. 447-459 o pagg. 494-509.

(****) *The collected mathematical papers*, Vol. II, n. 112.

(*****) CRELLE, *Journal*, Bd. LII, pagg. 133-141.

§ 1.

Il prof. GENOCCHI comincia dal considerare il prodotto di n binomi

$$p^2_1 + a_1 q^2_1,\ p^2_2 + a_2 q^2_2, \ldots\ldots\ p^2_n + a_n q^2_n,$$

e lo rappresenta mediante il polinomio

$$X = x^2_0 + \Sigma a_m x^2_m + \Sigma\Sigma a_{m_1} a_{m_2} x^2_{m_1, m_2} + \Sigma\Sigma\Sigma a_{m_1} a_{m_2} a_{m_3} x^2_{m_1, m_2, m_3} + \\ + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_n x^2_{1, \ldots, n}$$

ove i fattori quadrati $x^2_0, x_m^2, \ldots x_1^2, \ldots,_n$ resultano dal moltiplicare n quadrati delle $2n$ indeterminate p_m, q_m. Egli dà poi analoghe rappresentazioni per il prodotto Y degli n binomi

$$r^2_1 + a_1 s^2_1,\ r^2_2 + a_2 s^2_2, \ldots .\ r^2_n + a_n s^2_n$$

e per il prodotto Z degli altri n binomi

$$t^2_1 + a_1 u^2_1,\ t^2_2 + a_2 u^2_2, \ldots .\ t^2_n + a_n u^2_n,$$

ed afferma giustamente che se si suppone

$$(1) \qquad t^2_m + a_m u^2_m = (p^2_m + a_m q^2_m)(r^2_m + a_m s^2_m)$$

si avrà XY = Z, e la forma Z sarà il prodotto delle due simili X e Y.

E poichè la (1) è, come si sa, verificata col porre

$$t_m = p_m r_m - a_m q_m s_m, \quad u_m = p_m s_m + q_m r_m$$

l'A. ne trae argomento per notare che le z si potranno esprimere razionalmente per mezzo delle a, delle x e delle y, e per intrattenersi poi a rilevare le relazioni che collegano fra loro le x, e conseguentemente anche le y.

Stabilito dunque che « l'equazione XY = Z, i cui membri sono poli- « nomi di secondo grado rispetto a ciascuna delle accennate quantità « x_{m_1, m_2}, $y_{m_1, m_2}, \ldots$ ecc. è verificata per certi valori particolari di queste « indeterminate » riflette che per provare la generalità della stessa equazione « basterà dimostrare che il quadrato di ciascuna indeterminata ha « il medesimo coefficiente in ambi i membri ».

Ora è qui appunto il caso di osservare che questa dimostrazione, la quale è pure *necessaria*, non è *sufficiente* a provare la generalità dell'equazione XY = Z. Ed invero, quando, valendosi delle supposizioni fatte, si esprimono le z in funzioni delle x e delle y, ognuna delle z resulta espressa da un polinomio di 2^n termini; e se s'immagina di sviluppare i quadrati di queste z si avranno certamente i termini contenenti i prodotti dei quadrati delle indeterminate x e y, dei quali il prof. GENOCCHI dimostra trovarsi i corrispondenti nel prodotto XY, ma si troveranno *inoltre* i termini contenenti i prodotti a quattro a quattro delle stesse indeterminate; e poichè questi prodotti non compariscono nello sviluppo di XY, doveva l'A. proporsi di dimostrare che tali termini si elidevano scambievolmente, e ciò, ben inteso, supponendo che tanto le x quanto le y fossero indipendenti fra loro. Se questo egli avesse fatto, si sarebbe accorto dell'impossibilità di completare la dimostrazione, perchè l'equazione $XY = Z$, stabilita col metodo precedente, è vera solamente quando le x e le y hanno quei particolari valori loro assegnati, che non sono tutti fra loro indipendenti.

Per dimostrare la verità di quest'affermazione potremo limitarci a considerare il caso in cui si ha $n = 2$ e tutte le costanti a_m sono ridotte all'unità. Colle precedenti notazioni si avrà

$$\begin{aligned} X &= (p^2_1 + q^2_1)(p^2_2 + q^2_2) = x^2_0 + x^2_1 + x^2_2 + x^2_{1\cdot 2} \\ Y &= (r^2_1 + s^2_1)(r^2_2 + s^2_2) = y^2_0 + y^2_1 + y^2_2 + y^2_{1,2} \\ Z &= (t^2_1 + u^2_1)(t^2_2 + u^2_2) = z^2_0 + z^2_1 + z^2_2 + z^2_{1\cdot 2} \end{aligned}$$

ove si ritenga essere

$$(2) \qquad \begin{cases} x_0 = p_1p_2 \quad , \quad x_1 = p_2q_1 \quad , \quad x_2 = p_1q_2 \quad , \quad x_{1,2} = q_1q_2 \\ y_0 = r_1r_2 \quad , \quad y_1 = r_2s_1 \quad , \quad y_2 = r_1s_2 \quad , \quad y_{1\cdot 2} = s_1s_2 \\ z_0 = t_1t_2 \quad , \quad z_1 = t_2u_1 \quad , \quad z_2 = t_1u_2 \quad , \quad z_{1\cdot 2} = u_1u_2. \end{cases}$$

Ammesso poi che si abbia

$$(3) \qquad \begin{cases} t_1 = p_1r_1 - q_1s_1 \quad , \quad u_1 = p_1s_1 + q_1r_1 \\ t_2 = p_2r_2 - q_2s_2 \quad , \quad u_2 = p_2s_2 + q_2r_2 \end{cases}$$

ne risulterà

$$\begin{aligned} t^2_1 + u^2_1 &= (p^2_1 + q^2_1)(r^2_1 + s^2_1) \\ t^2_2 + u^2_2 &= (p^2_2 + r^2_2)(r^2_2 + s^2_2) \end{aligned}$$

e quindi sarà evidentemente $XY = Z$, ossia:

$$(4) \qquad (x^2_0 + x^2_1 + x^2_2 + x^2_{1,2})(y^2_0 + y^2_1 + y^2_2 + y^2_{1\cdot 2}) = z^2_0 + z^2_1 + z^2_2 + z^2_{1\cdot 2}$$

Se ora, avendo riguardo alle (2) e alle (3), esprimiamo le z in funzioni delle x e delle y, si trova:

$$(5) \qquad \begin{cases} z_0 = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 + x_{1\cdot 2}y_{1\cdot 2} \\ z_1 = x_0y_1 + x_1y_0 - x_2y_{1\cdot 2} - x_{1\cdot 2}y_2 \\ z_2 = x_0y_2 - x_1y_{1,2} + x_2y_0 - x_{1,2}y_1 \\ z_{1,2} = x_0y_{1,2} + x_1y_2 + x_2y_1 + x_{1,2}y_0 \end{cases}$$

ed è certo che la (4) sarà verificata ponendo nel secondo membro questi valori delle z, *purchè le* x *e le* y *abbiano i valori dati dalle prime due linee delle* (2). Ma *se si toglie questa condizione*, la (4) non è più vera, e per assicurarsene basta osservare che non si distruggono tutti i doppi prodotti che si hanno sviluppando i quadrati di z_0, z_1, z_2, $z_{1,2}$. Per esempio il prodotto $2x_1y_1x_2y_2$ che comparisce nello sviluppo di z^2_0 non si elimina col prodotto simile $2x_1y_2x_2y_1$ che è dato da $z^2_{1,2}$, perchè entrambi hanno il segno positivo, ecc. ecc.

Nonpertanto, come fu trovato per la prima volta da Eulero, il prodotto $(x^2_0 + x^2_1 + x^2_2 + x^2_{1,2})(y^2_0 + y^2_1 + y^2_2 + y^2_{1,2})$ è effettivamente, e in vari modi, trasformabile nella somma $z^2_0 + z^2_1 + z^2_2 + z^2_{1,2}$. Una di queste trasformazioni si ottiene ponendo

$$\begin{aligned} z_0 &= x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 + x_{1,2}y_{1,2} \\ z_1 &= x_0y_1 + x_1y_0 - x_2y_{1,2} - x_{1,2}y_2 \\ z_2 &= x_0y_2 + x_1y_{1\cdot 2} + x_2y_0 + x_{1,2}y_1 \\ z_{1,2} &= x_0y_{1\cdot 2} - x_1y_2 + x_2y_1 - x_{1,2}y_0 \end{aligned}$$

dove i soli valori di z_0 e z_1 combinano coi corrispondenti delle (5).

§ 2.

Leggendo nella Nota stessa del prof. GENOCCHI, che per la somma di otto quadrati il teorema era stato dato dal prof. BRIOSCHI e riferito pure nel medesimo caso dal signor LEBESGUE nei suoi *Exercices d'analyse numérique*, (*) sono stato invogliato a fare le relative ricerche e confronti, da cui m'è risultato non essere la formola citata dal LEBESGUE, e da lui attribuita ai signori PROUHET e CAYLEY, eguale a quella trovata dal prof. BRIOSCHI, tantochè solamente la prima soddisfa veramente alla questione. Il difetto in cui trovasi la formola data dal prof. BRIOSCHI nell'ultimo paragrafo della sua Nota, è dovuto al non avverarsi di *tutte* le condizioni necessarie affinchè al caso particolare ivi considerato siano applicabili i resultati generali dimostrati nei paragrafi precedenti. Ed infatti, se con A s'indica il determinante dell'ottavo ordine

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ -b & a & -d & c & -f & e & -h & g \\ -c & d & a & -b & -g & h & e & -f \\ -d & -c & b & a & -h & -g & f & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ -f & e & -h & g & -b & a & -d & c \\ -g & h & e & -f & -c & d & a & -b \\ -h & -g & f & e & -d & -c & b & a \end{vmatrix},$$

il suo quadrato, ottenuto moltiplicando A per il determinante

$$\begin{vmatrix} b & -a & d & -c & f & -e & h & -g \\ a & b & c & d & e & f & g & h \\ d & c & -b & -a & h & g & -f & -e \\ -c & d & a & -b & -g & h & e & -f \\ f & -e & h & -g & b & -a & d & -c \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ h & g & -f & -e & d & c & -b & -a \\ -g & h & e & -f & -c & d & a & -b \end{vmatrix}$$

uguale in valore ad A, dovrebbe essere un determinante gobbo simmetrico

$$A^2 = L = \Sigma \pm l_{11} l_{22} l_{33} \ldots l_{88}$$

nel quale, avendosi

$$l_{12} = - l_{21} = l_{34} = - l_{43} = l_{56} = - l_{65} = l_{78} = - l_{87} = t,$$

fossero poi nulle *tutte* le rimanenti l_{rs}. Ora questo non si verifica perchè, per esempio, si ha:

$$l_{16} = - l_{61} = l_{52} = - l_{25} = l_{38} = - l_{83} = l_{74} = - l_{47} = 2\,(ae + bf + cg + dh)$$

differente da zero. Quindi non ne può discendere la conseguenza che, essendo

$$t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2$$

(*) *Paris*, LEIBER *et* FARAGUET *éditeurs*, 1859, pag. 104.

e similmente

$$u = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 + e_1^2 + f_1^2 + g_1^2 + h_1^2,$$

si abbia, per i valori di A_{11}, A_{12}, ... A_{18}, determinati dall'Autore,

$$A_{11}^2 + A_{12}^2 + \dots + A_{18}^2 = tu.$$

Ciò è pure confermato dal fatto che non si elidono tutti i doppi prodotti che si hanno sviluppando i quadrati A_{11}^2, A_{12}^2, ecc., come lo richiederebbe la verità dell'ultima eguaglianza.

È possibile, tuttavia, modificare il determinante A, conservandone inalterata la 1ª, 2ª, 4ª e 7ª linea, e cambiando i segni ad alcuni elementi delle rimanenti linee, in modo che *tutte* le condizioni imposte alle l_{rs} siano soddisfatte. Questo ha luogo, per esempio, prendendo per A il determinante

$$(6) \qquad A = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ -b & a & -d & c & -f & e & -h & g \\ -c & d & a & -b & g & -h & -e & f \\ -d & -c & b & a & -h & -g & f & e \\ -e & f & -g & h & a & -b & c & -d \\ -f & -e & h & g & b & a & -d & -c \\ -g & h & e & -f & -c & d & a & -b \\ -h & -g & -f & -e & d & c & b & a \end{vmatrix}$$

e moltiplicandolo per il determinante

$$\begin{vmatrix} b & -a & d & -c & f & -e & h & -g \\ a & b & c & d & e & f & g & h \\ d & c & -b & -a & h & g & -f & -e \\ -c & d & a & -b & g & -h & -e & f \\ f & e & -h & -g & -b & -a & d & c \\ -e & f & -g & h & a & -b & c & -d \\ h & g & f & c & -d & -c & -b & -a \\ -g & h & e & -f & -c & d & a & -b \end{vmatrix}$$

che ha lo stesso valore di A. Ed allora, se s'indica con C il determinante analogo al (6) che si ottiene sostituendo $a_1, b_1, c_1, \dots$ ad $a, b, c, \dots$, e del prodotto AC si calcolano gli elementi A_{11}, A_{12}, ... A_{18}, si avranno i seguenti valori

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} A_{11} &= aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1 + ee_1 + ff_1 + gg_1 + hh_1 \\ -A_{12} &= ab_1 - ba_1 + cd_1 - dc_1 + ef_1 - fe_1 + gh_1 - hg_1 \\ -A_{13} &= ac_1 - bd_1 - ca_1 + db_1 - eg_1 + fh_1 + ge_1 - hf_1 \\ -A_{14} &= ad_1 + bc_1 - cb_1 - da_1 + eh_1 + fg_1 - gf_1 - he_1 \\ -A_{15} &= ae_1 - bf_1 + cg_1 - dh_1 - ea_1 + fb_1 - gc_1 + hd_1 \\ -A_{16} &= af_1 + be_1 - ch_1 - dg_1 - eb_1 - fa_1 + gd_1 + hc_1 \\ -A_{17} &= ag_1 - bh_1 - ce_1 + df_1 + ec_1 - fd_1 - ga_1 + hb_1 \\ -A_{18} &= ah_1 + bg_1 + cf_1 + de_1 - ed_1 - fc_1 - gb_1 - ha_1 \end{aligned} \right.$$

i quali rendono vera l'equazione

$$\mathrm{A}^2_{11}+\mathrm{A}^2_{12}+\ldots.+\mathrm{A}^2_{18}=(a^2+b^2+\ldots.+h^2)(a^2_1+b^2_1+\ldots.+h^2_1). \quad (*) \tag{8}$$

I valori testè trovati per le $\mathrm{A}_{11}, \mathrm{A}_{12}, \ldots \mathrm{A}_{18}$, non combinano completamente con quelli riportati dal LEBESGUE, per avere i quali basterà

(*) Per dedurre dal (6) il determinante successivo, è stato tenuto conto di quanto è detto nel § 4 della Nota del prof. BESSO. Ma non è privo d'interesse l'osservare che potrebbesi rinunziare all'ultimo determinante e prendere per quadrato di A il determinante simmetrico che si ottiene col metodo ordinario, se nella prima parte della Nota citata s'introducessero queste modificazioni.

Conservando, per chiarezza, tutte le notazioni ivi adottate, e perciò indicando con

$$\mathrm{A}=\Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots.a_{nn}$$

un determinante d'ordine n, senza neppure richiedere che n sia un numero pari, si può ancora porre

$$\mathrm{A}^2=\mathrm{L}=\Sigma \pm l_{11}l_{22}\ldots.l_{nn}$$

sostituendo alla equazione (1) della Nota la seguente:

$$l_{rs}=a_{r1}a_{s1}+a_{r2}a_{s2}+\ldots.+a_{rn}a_{sn}.$$

Conseguentemente, le due equazioni (2) della Nota si compendiano nell'unica

$$\mathrm{A}\alpha_{ri}=\alpha_{1i}l_{r1}+\alpha_{2i}l_{r2}+\ldots.+\alpha_{ni}l_{rn}$$

e le due equazioni (3) nell'altra

$$\mathrm{A}a_{ri}=a_{1i}\lambda_{1r}+a_{2i}\lambda_{2r}+\ldots.+a_{ni}\lambda_{nr}$$

ove le α_{rs} e le λ_{rs} sono gli elementi reciproci di a_{rs}, l_{rs} respettivamente.

Per un secondo determinante

$$\mathrm{C}=\Sigma \pm c_{11}c_{22}\ldots.c_{nn}$$

e per il suo quadrato

$$\mathrm{C}^2=\mathrm{P}=\Sigma \pm p_{11}p_{22}\ldots.p_{nn}$$

si porrà analogamente

$$p_{rs}=c_{r1}c_{s1}+c_{r2}c_{s2}+\ldots.+c_{rn}c_{sn}$$

ed invece delle due equazioni (4) si avrà, indicando con γ_{rs} l'elemento reciproco di c_{rs}

$$\mathrm{C}c_{si}=\gamma_{1i}p_{s1}+\gamma_{2i}p_{s2}+\ldots.+\gamma_{ni}p_{sn}.$$

Mantenendo inalterata la equazione (5) della Nota, vale a dire ponendo

$$a_{r1}c_{s1}+a_{r2}c_{s2}+\ldots.+a_{rn}c_{sn}=\mathrm{A}_{rs}$$

e considerando quindi il determinante $\Sigma \pm \mathrm{A}_{11}\mathrm{A}_{22}\ldots.\mathrm{A}_{nn}$, prodotto dei due determinanti A e C, e il suo quadrato $\Sigma \pm \mathrm{L}_{11}\mathrm{L}_{22}\ldots.\mathrm{L}_{nn}$, converrà mettere in luogo della (6) l'equazione

$$\mathrm{L}_{rs}=\mathrm{A}_{r1}\mathrm{A}_{s1}+\mathrm{A}_{r2}\mathrm{A}_{s2}+\ldots.+\mathrm{A}_{rn}\mathrm{A}_{sn}$$

e in luogo della (7) l'equazione

$$k_{jr}=\gamma_{j1}a_{r1}+\gamma_{j2}a_{r2}+\ldots.+\gamma_{jn}a_{rn}$$

e ne conseguiranno le equazioni

$$\begin{aligned}\mathrm{CA}_{jr}&=k_{1r}p_{j1}+k_{2r}p_{j2}+\ldots.+k_{nr}p_{jn}\\ \mathrm{AB}_{jr}&=k_{j1}\lambda_{1r}+k_{j2}\lambda_{2r}+\ldots.+k_{jn}\lambda_{nr}\\ \mathrm{A}k_{jr}&=\mathrm{B}_{1j}l_{r1}+\mathrm{B}_{2j}l_{r2}+\ldots.+\mathrm{B}_{nj}l_{rn}\end{aligned}$$

nelle quali B_{rj} rappresenta l'elemento reciproco di A_{rj}.

Da questo punto, per la questione di cui ci occupiamo, si può, senz'altro, passare al § 5 della Nota, e sostituire alle (16) le condizioni analoghe, da supporre verificate

$$l_{11}=l_{22}=\ldots.=l_{nn}=t$$
$$p_{11}=p_{22}=\ldots.=p_{nn}=u$$

insieme con $l_{rs}=p_{rs}=0$ per $r \gtrless s$. Allora, a causa delle modificazioni già introdotte, invece delle due relazioni

$$u^m\mathrm{A}_{sr}=-k_{r-1,s} \quad , \quad u^m\mathrm{A}_{s,r-1}=k_{rs}$$

si troverà l'unica relazione

$$u^m\mathrm{A}_{sr}=k_{rs}$$

ov'è supposto che sia $m=\frac{1}{2}n-1$. Le successive quattro relazioni

$$t^mu^m\mathrm{A}_{ir}=+\mathrm{B}_{i-1,r-1} \quad , \quad t^mu^m\mathrm{A}_{i-1,r}=-\mathrm{B}_{i,r-1}$$
$$t^mu^m\mathrm{A}_{i,r-1}=-\mathrm{B}_{i-1,r} \quad , \quad t^mu^m\mathrm{A}_{i-1,r-1}=+\mathrm{B}_{ir}$$

si raccoglieranno unicamente in

$$t^mu^m\mathrm{A}_{ir}=\mathrm{B}_{ir}$$

mantenere inalterati i valori assoluti dei termini nel quadro costituito dai secondi membri delle (7), e attribuire ai termini della 1ª, 2ª, ... 8ª linea i segni che appartengono alla 1ª, 2ª, ... 8ª colonna rispettivamente.

La ragione intima di ciò è facile conseguenza di quanto verrà detto nei paragrafi seguenti. Intanto non è da trascurare l'osservazione che in questo problema si può, da un sistema di valori delle $A_{11}, A_{12}, \ldots A_{18}$ il quale soddisfa all'equazione (8), dedurre altri sistemi che del pari vi soddisfano, cambiando i segni ad una o più delle quantità $a, b, \ldots h$, $a_1, b_1 \ldots h_1$.

§ 3.

Si considerino n quantità indipendenti

$$a_1, a_2, \ldots a_n$$

ed altrettante

$$c_1, c_2, \ldots c_n$$

indipendenti fra loro e dalle prime. Il prodotto

(9) $$P = (a^2_1 + a^2_2 + \ldots + a^2_n)(c^2_1 + c^2_2 + \ldots + c^2_n)$$

consta di n^2 quadrati della forma $a^2_r c^2_s$, ed il problema di convertire il prodotto P in una somma di n quadrati, si può ridurre a determinare n somme

(10) $$\begin{cases} a_1c_{11} + a_2c_{12} + \ldots + a_nc_{1n} \\ a_1c_{21} + a_2c_{22} + \ldots + a_nc_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1c_{n1} + a_2c_{n2} + \ldots + a_nc_{nn} \end{cases}$$

ove gli elementi

(11) $$c_{i1}, c_{i2}, \ldots c_{in}$$

di una linea o gli elementi

(12) $$c_{1j}, c_{2j}, \ldots c_{nj}$$

di una colonna stanno a rappresentare le quantità $c_1, c_2, \ldots c_n$, inclusovi il segno, che per alcune sarà necessariamente negativo, perchè si richiede che sviluppando i quadrati delle somme (10) si riproducano gli n^2 termini del prodotto (9), e si eliminino tutti i rimanenti. Non è

---

e questa combinata coll'equazione sostituita alla (6) darà:

$$t^{m}u^{m}L_{is} = A_{i1}B_{i1} + A_{i2}B_{i2} + \ldots + A_{in}B_{in}$$

donde si trarrà infine:

$$L_{ii} = tu \quad , \quad L_{is} = 0 \left(i \gtrless s \right).$$

Applicando questi resultati al caso particolare di $n = 8$, resulta subito che se s'identificano le a_{rs} cogli elementi del nostro determinante (6) si ha:

$$l_{rr} = t = a^2 + b^2 + \ldots + h^2$$

mentre per $r \gtrless s$ si ha $l_{rs} = 0$. Parimente, identificando le c_{rs} cogli elementi del determinante dedotto dal (6) sostituendo $a_1, b_1, h_1 \ldots$ ad $a, b, \ldots h$ si avrà

$$p_{rr} = u = a^2_1 + \ldots + h^2_1 \quad , \quad p_{rs} = 0 \left(r \gtrless s \right)$$

ed allora una qualunque delle equazioni $L_{ii} = tu$, per esempio la $L_{11} = tu$, darà appunto

$$A^2_{11} + A^2_{12} + \ldots + A^2_{18} = tu.$$

difficile riconoscere che da queste condizioni scaturisce intanto che gli elementi (11) o (12) debbono costituire, col variare di i o di j, permutazioni differenti di $c_1, c_2, \ldots c_n$, tali che due elementi di una medesima linea o colonna del quadro

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{cccccccccc} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1p} & \ldots & c_{1t} & \ldots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1} & c_{r2} & \ldots & c_{rp} & \ldots & c_{rt} & \ldots & c_{rn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{s1} & c_{s2} & \ldots & c_{sp} & \ldots & c_{st} & \ldots & c_{sn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{np} & \ldots & c_{nt} & \ldots & c_{nn} \end{array}\right.$$

non abbiano mai lo stesso valore assoluto. Ed invero, non potrebbero due elementi della p^{esima} colonna, per es. c_{rp}, c_{sp} essere in valore assoluto uguali a c_m, perchè avendo essi nelle (10) lo stesso coefficiente a_p, si troverebbero, nello sviluppo di quei quadrati, due termini della forma $a^2_p c^2_m$, ciò che non è consentito dalla (9). Così pure, ammesso che due termini della r^{ma} linea, per es. c_{rp}; c_{rt}, fossero in valore assoluto uguali a c_m, il doppio prodotto dei corrispondenti termini nella p^{esima} linea delle (10) sarebbe della forma $\pm 2a_p a_t c^2_m$ e non potrebbe essere annullato altrimente che da un termine simile $\mp 2a_p a_t c^2_m$ proveniente da un'altra linea, per esempio dalla s^{esima}. Ma in tal caso ognuna delle due colonne p^{ma} e t^{ma} avrebbe due elementi uguali, il che abbiamo già visto essere inammissibile.

Ciò premesso, è chiaro che sviluppando i quadrati delle (10) si troveranno univocamente gli n^2 termini del prodotto (9); e perciò non rimane altro che da vedere quali nuove condizioni, tenendo conto anche dei segni, debbono essere imposte agli elementi del quadro (13) affinchè si verifichi che, negli stessi sviluppi, tutti i doppi prodotti si elidano.

Ora, se $2a_p a_t c_{rp} c_{rt}$ è un doppio prodotto dato dalla r^{ma} linea delle (10), esso dovrà essere annullato da un doppio prodotto di un'altra linea, per esempio della s^{ma}, e precisamente da quello che contenendo le stesse quantità a_p, a_t è della forma $2a_p a_t c_{sp} c_{st}$. Dovrà dunque essere soddisfatta *identicamente* l'eguaglianza

$$(14)\qquad c_{rp} c_{rt} = - c_{sp} c_{st}$$

la quale, per quanto è stato sopra osservato, si scinde nelle due:

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} c_{rp} = \pm c_{st} \\ c_{rt} = \mp c_{sp} \end{array}\right.$$

Ma da queste si deduce:

$$(16)\qquad c_{rp} c_{sp} = - c_{rt} c_{st}$$

e perciò abbiamo che: *Il quadro* (13) *deve essere composto in guisa che, presi due elementi di qualsivoglia linea,* c_{rp}, c_{rt}, *se ne trovino, sulle stesse colonne cui essi appartengono, due altri,* c_{sp}, c_{st} *facenti parte di una medesima linea, tali che i valori assoluti di questi due ultimi siano in* *ordine inverso uguali a quelli dei primi due, com'è indicato dalle* (15), *e tali inoltre che abbiano valore contrario i prodotti degli elementi delle due linee, o i prodotti degli elementi delle due colonne, come apparisce dalle* (14) *e* (16) *rispettivamente.*

Per la formazione effettiva del quadro (13), dovendosi dunque aver riguardo alla disposizione degli elementi e al loro segno, tratteremo separatamente le due questioni, cominciando da quella della disposizione degli elementi che, per semplicità, ritorneremo ad indicare con $c_1, c_2, \ldots c_n$.

È ben evidente che, senza scapito della generalità, si potrà supporre che le due permutazioni costituenti la prima linea e la prima colonna del quadro siano fra loro uguali e rappresentate da $c_1, c_2, \ldots . c_{n-1}, c_n$. Così, in virtù delle (15), *nelle quali si fa, per ora, astrazione dai segni dei secondi membri,* l'elemento c_1 occuperà il secondo posto della seconda linea, il terzo della terza linea ecc., vale a dire si troverà sulla diagonale che va da sinistra a destra, come si scorge nel seguente quadro:

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{llllll} c_1 & c_2 & c_3 \ldots . & c_{n-1} & & c_n \\ c_2 & c_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_3 & . & c_1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{n-1} & \ldots & \ldots & c_1 & & . \\ c_n & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & c_1 \end{array}\right.$$

L'impossibilità, che si manifesta immediatamente, di completare questo quadro nel caso particolare di $n=3$, può essere dimostrata in generale per tutti i valori dispari del numero n.

Infatti, se per uno di questi valori s'indica la prima linea con

$$c_1 \quad c_2 \ldots . c_k \ldots . c_p \ldots . c_r \ldots . c_s \ldots . c_n$$

si potrà supporre che nella seconda linea, che indicheremo con

$$c_2 \quad c_1 \ldots . c_n \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . c_k$$

sia stato assegnato il posto ad $n-3$ elementi, e rimangano da collocare soltanto i tre elementi $c_p \cdot c_r, c_s$. Ora è chiaro che se si colloca, nella seconda linea, l'elemento c_r sotto l'elemento c_p della prima linea si dovrà, per riguardo alle (15), porre l'elemento c_p sotto l'elemento c_r della prima linea; ma allora, contro quello che è stato dimostrato, i due elementi c_s verranno a trovarsi nella stessa colonna. Lo stesso succederebbe per gli elementi c_r, se nella seconda linea si collocasse l'elemento c_s sotto l'elemento c_p della prima linea.

È altresì facile dimostrare che il quadro (17) non si può comporre neppure per valori di n della forma $2^m k$, ove k rappresenta un numero dispari non minore di 3.

Difatti, ammesso, in generale, che per un valore pari di n siano state stabilite le (10) in guisa da aversi identicamente

$$(a^2_1 + a^2_2 + \ldots . + a^2_n)(c^2_1 + c^2_2 + \ldots . + c^2_n)$$
$$= (a_1c_{11} + a_1c_{12} + \ldots . + a_nc_{1n})^2 + \ldots . + (a_1c_{n1} + a_2c_{n2} + \ldots . + a_nc_{nn})^2,$$

è evidente che se si uguagliano a zero tutte le a, e tutte le c, aventi l'indice maggiore di $\frac{n}{2}$, riducendosi il primo membro di questa identità alla forma

$$\left(a^2_1 + a^2_2 + \ldots . + a^2_{\frac{n}{2}}\right)\left(c^2_1 + c^2_2 + \ldots . + c^2_{\frac{n}{2}}\right)$$

dovrà anche il secondo membro ridursi ad una somma di $\frac{n}{2}$ quadrati della forma

$$\left(a_1c'_{11} + a_2c'_{12} + \ldots . + a_{\frac{n}{2}}c'_{1,\frac{n}{2}}\right)^2 + \ldots . + \left(a_1c'_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} + a_2c'_{\frac{n}{2},2} \ldots . + a_{\frac{n}{2}}c'_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}\right)^2.$$

Analogamente poi, se $\frac{n}{2}$ è un numero pari, dall'identità relativa al prodotto di due somme di $\frac{n}{2}$ quadrati si dedurrebbe quella relativa al prodotto di due somme di $\frac{n}{4}$ quadrati ecc. ecc. Onde, nell'ipotesi di $n = 2^m k$, si perverrebbe dopo m di queste operazioni a trovare il prodotto di due somme di k quadrati (k dispari) trasformato nella somma di k quadrati; ciò che contraddice all'impossibilità già dimostrata di comporre il quadro (17) per valori dispari del numero n.

Non rimane dunque altro che considerare il caso di $n = 2^m$.

Le condizioni (15) che, per quanto concerne i valori assoluti, sono soddisfatte nel caso più semplice di $m = 1$ dal quadro

$$\begin{array}{cc} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 \end{array}$$

si trovano altresì verificate, quando è $m = 2$ e perciò $n = 4$, componendo il quadro

$$\begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_1 & c_4 & c_3 \\ c_3 & c_4 & c_1 & c_2 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1. \end{array}$$

Si supponga, in generale, che il quadro (17) siasi potuto comporre con un numero di elementi espresso da $n = 2^m$; dico che si potrà da esso dedurne un altro contenente un numero doppio di elementi.

Infatti, se a tutti gl'indici degli elementi del quadro (17) si aggiunge il numero n si avrà il quadro

$$\begin{array}{ccccc} c_{1+n} & c_{2+n} & c_{3+n} \ldots . & c_{(n-1)+n} & c_{n+n} \\ c_{2+n} & c_{1+n} & \ldots .. & . & . \\ c_{3+n} & . & c_{1+n} \ldots . & . & . \\ . & . & \ldots .. & . & . \\ c_{(n-1)+n} & . & \ldots .. & c_{1+n} & . \\ c_{n+n} & . & \ldots .. & . & c_{1+n} \end{array}$$

mediante il quale, insieme col (17), si può comporre il quadro di 2^{m+1} elementi

$$
(18)\qquad \left\|\begin{array}{cccccc|cccccc}
c_1 & c_2 & c_3 & . & c_{n-1} & c_n & c_{1+n} & c_{2+n} & c_{3+n} & . & c_{(n-1)+n} & c_{n+n} \\
c_2 & c_1 & . & . & . & . & c_{2+n} & c_{1+n} & . & . & . & . \\
c_3 & . & c_1 & . & . & . & c_{3+n} & . & c_{1+n} & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
c_{n-1} & . & . & . & c_1 & . & c_{(n-1)+n} & . & . & . & c_{1+n} & . \\
c_n & . & . & . & . & c_1 & c_{n+n} & . & . & . & . & c_{1+n} \\
\hline
c_{1+n} & c_{2+n} & c_{3+n} & . & c_{(n-1)+n} & c_{n+n} & c_1 & c_2 & c_3 & . & c_{n-1} & c_n \\
c_{2+n} & c_{1+n} & . & . & . & . & c_2 & c_1 & . & . & . & . \\
c_{3+n} & . & c_{1+n} & . & . & . & c_3 & . & c_1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
c_{(n-1)+n} & . & . & . & c_{1+n} & . & c_{n-1} & . & . & . & c_1 & . \\
c_{n+n} & . & . & . & . & c_{1+n} & c_n & . & . & . & . & c_1
\end{array}\right\|
$$

In questo le condizioni (15) sono certamente soddisfatte nei quadri parziali che indicheremo coi numeri 1, 2, 3, 4 secondo l'ordine dato dallo schema $\frac{1|2}{3|4}$, e basterà dimostrare che le stesse condizioni sono verificate per quattro elementi appartenenti a differenti quadri. Siano dunque

$$\ldots .\, c_k \ldots .\, c_{r+n} \ldots .$$

due elementi presi sopra una qualunque linea e appartenenti respettivamente ai quadri 1 e 2. Se, per fissare le idee, si suppone che nel quadro parziale 1 e sulla medesima linea degli elementi c_k, c_{r+n}, l'elemento c_r si trovi alla sinistra di c_k, e si suppone inoltre che gli elementi c_k, c_r i quali, nel quadro 1, soddisfano alle condizioni (15), siano situati al disopra dei corrispondenti c_r, c_k, avremo evidentemente la seguente disposizione:

$$
(19)\qquad \begin{cases} c_k \ldots . \, c_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_r \ldots . \, c_k \ldots . \, c_{r+n} \end{cases}
$$

Ora si osservi che, per il modo col quale è stato composto il quadro (18), esisterà nel quadro parziale 2 l'elemento c_{k+n} che si troverà sulla linea $c_k \ldots . c_r$ e nella colonna di c_{r+n}, in guisa che dalla (19) si giungerà alla disposizione

$$
(20)\qquad \begin{cases} c_k \ldots c_r \ldots . \, c_{k+n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_r \ldots c_k \ldots . \, c_{r+n} \end{cases}
$$

E, sempre per la stessa composizione del quadro (18), se si considerano la seconda e terza colonna della (20), e si contano n elementi al disotto degli elementi c_r e c_{k+n} si troveranno sulla medesima linea e nei quadri parziali 3 e 4 gli elementi c_{r+n} e c_k che completano la (20) nel seguente modo:

$$
(21)\qquad \left\{\begin{array}{l} c_k \ldots . \, c_r \ldots .. \, c_{k+n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_r \ldots . \, c_k \ldots .. \, c_{r+n} \\ \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \qquad\quad c_{r+n} \ldots . \, c_k \end{array}\right.
$$

Le posizioni che occupano gli elementi c_i e c_{i+n} nelle due ultime linee e colonne della (21) provano all'evidenza che anche nel quadro (18) sono soddisfatte le condizioni (15).

Il quadro relativo ai quattro elementi c_1, c_2, c_3, c_4, potendosi riguardare dedotto da quello dei due elementi c_1, c_2, secondo la regola indicata nel quadro (18), colla medesima regola, e senza veruna difficoltà, si comporranno successivamente i quadri relativi a 8, 16, ... 2^m elementi, per qualunque valore intero dell'esponente m.

§ 4.

Passiamo ora a dimostrare che se le condizioni (15) debbono essere verificate, oltre che nei valori assoluti, anche nei segni dei due membri, non è possibile comporre il quadro (17) per valori di n maggiori di 8.

Fissando, per semplicità, di dare il segno positivo agli elementi situati nella prima linea e nella prima colonna, si avrà, per il caso di $n=2$, il quadro

$$\begin{matrix} +c_1 & +c_2 \\ +c_2 & -c_1 \end{matrix}$$

da cui risalendo alle (10), si hanno i binomi

$$a_1c_1 + a_2c_2, \quad a_1c_2 - a_2c_1$$

e conseguentemente l'identità

$$(a^2_1 + a^2_2)\ (c^2_1 + c^2_2) = (a_1c_1 + a_2c_2)^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)^2$$

dovuta al FIBONACCI.

Nel caso di $n=4$, s'incomincia coll'avere il quadro

$$\begin{matrix} +c_1 & +c_2 & +c_3 & +c_4 \\ +c_2 & -c_1 & c_4 & c_3 \\ +c_3 & c_4 & -c_1 & c_2 \\ +c_4 & c_3 & c_2 & -c_1 \end{matrix}$$

ove i segni negativi degli elementi c_1 sono necessaria conseguenza dei segni positivi attribuiti agli elementi della prima linea e della prima colonna. Si può poi scegliere ad arbitrio il segno di uno dei rimanenti elementi; e se, per esempio, si vuole che l'elemento c_4 della seconda linea abbia il segno $+$, tutti gli altri elementi del quadro dovranno avere, in virtù delle (15), segni determinati. È facile riconoscere che si ottiene il seguente resultato

$$\begin{matrix} +c_1 & +c_2 & +c_3 & +c_4 \\ +c_2 & -c_1 & +c_4 & -c_3 \\ +c_3 & -c_4 & -c_1 & +c_2 \\ +c_4 & +c_3 & -c_2 & -c_1. \end{matrix}$$

Con riguardo alle (10), se ne trarrà dunque la nota identità euleriana:

$$(a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 + a^2_4)\ (c^2_1 + c^2_2 + c^2_3 + c^2_4) =$$
$$(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + a_4c_4)^2 + (a_1c_2 - a_2c_1 + a_3c_4 - a_4c_3)^2 + (a_1c_3 - a_2c_4 - a_3c_1 + a_4c_2)^2 +$$
$$+ (a_1c_4 + a_2c_3 - a_3c_2 - a_4c_1)^2.$$

Per agevolare la determinazione dei segni nel caso di $n=8$, osservando che da esso deve potersi dedurre il caso particolare di $n=4$, si fisserà che il quadro parziale, contrassegnato nel (18) col numero 1, abbia i segni testè stabiliti per $n=4$. Così si avrà intanto:

$$
\begin{array}{cccccccc}
+c_1 & +c_2 & +c_3 & +c_4 & +c_5 & +c_6 & +c_7 & +c_8 \\
+c_2 & -c_1 & +c_4 & -c_3 & c_6 & c_5 & c_8 & c_7 \\
+c_3 & -c_4 & -c_1 & +c_2 & c_7 & c_8 & c_5 & c_6 \\
+c_4 & +c_3 & -c_2 & -c_1 & c_8 & c_7 & c_6 & c_5 \\
+c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & -c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\
+c_6 & c_5 & c_8 & c_7 & c_2 & -c_1 & c_4 & c_3 \\
+c_7 & c_8 & c_5 & c_6 & c_3 & c_4 & -c_1 & c_2 \\
+c_8 & c_7 & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & -c_1
\end{array}
$$

Attribuendo poi il segno $+$ agli elementi c_6 e c_8 della seconda linea, e il segno $-$ all'elemento c_7 della terza linea rimarranno determinati i segni di tutti gli altri elementi del quadro che resulterà costituito nel modo seguente:

$$
\begin{array}{cccccccc}
+c_1 & +c_2 & +c_3 & +c_4 & +c_5 & +c_6 & +c_7 & +c_8 \\
+c_2 & -c_1 & +c_4 & -c_3 & +c_6 & -c_5 & +c_8 & -c_7 \\
+c_3 & -c_4 & -c_1 & +c_2 & -c_7 & +c_8 & +c_5 & -c_6 \\
+c_4 & +c_3 & -c_2 & -c_1 & +c_8 & +c_7 & -c_6 & -c_5 \\
+c_5 & -c_6 & +c_7 & -c_8 & -c_1 & +c_2 & -c_3 & +c_4 \\
+c_6 & +c_5 & -c_8 & -c_7 & -c_2 & -c_1 & +c_4 & +c_3 \\
+c_7 & -c_8 & -c_5 & +c_6 & +c_3 & -c_4 & -c_1 & +c_2 \\
+c_8 & +c_7 & +c_6 & +c_5 & -c_4 & -c_3 & -c_2 & -c_1
\end{array}
$$

Da questo quadro si deducono immediatamente i secondi membri delle (7), identificando, nelle (10), $c_1, c_2, \ldots . c_8$ con $a_1, b_1, \ldots . h_1$, ed $a_1, a_2, \ldots . a_8$ con $a, b, \ldots . h$.

Il metodo finora seguito, il quale ha dato le soluzioni del problema nei casi di $n=2, 4, 8$, serve altresì a provarne l'impossibilità per $n=16$, ed *a fortiori* quindi per $n=2^m$, con $m>4$.

Infatti, per $n=16$, si può stabilire il quadro

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
+c_1 & +c_2 & +c_3 & +c_4 & +c_5 & +c_6 & +c_7 & +c_8 & +c_9 & +c_{10} & +c_{11} & +c_{12} & +c_{13} & +c_{14} & +c_{15} & +c_{16} \\
+c_2 & -c_1 & +c_4 & -c_3 & +c_6 & -c_5 & +c_8 & c_7 & +c_{10} & -c_9 & +c_{12} & -c_{11} & c_{14} & c_{13} & c_{16} & c_{15} \\
+c_3 & -c_4 & -c_1 & +c_2 & -c_7 & +c_8 & +c_5 & -c_6 & -c_{11} & +c_{12} & +c_9 & -c_{10} & c_{15} & c_{16} & c_{13} & c_{14} \\
+c_4 & +c_3 & -c_2 & -c_1 & +c_8 & +c_7 & -c_6 & -c_5 & +c_{12} & +c_{11} & -c_{10} & -c_9 & c_{16} & c_{15} & c_{14} & c_{13} \\
+c_5 & -c_6 & +c_7 & -c_8 & -c_1 & +c_2 & -c_3 & +c_4 & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} \\
+c_6 & +c_5 & -c_8 & -c_7 & -c_2 & -c_1 & +c_4 & +c_3 & c_{14} & c_{13} & c_{16} & c_{15} & c_{10} & c_9 & c_{12} & c_{11} \\
+c_7 & -c_8 & -c_5 & +c_6 & +c_3 & -c_4 & -c_1 & +c_2 & c_{15} & c_{16} & c_{13} & c_{14} & c_{11} & c_{12} & c_9 & c_{10} \\
+c_8 & +c_7 & +c_6 & +c_5 & -c_4 & -c_3 & -c_2 & -c_1 & c_{16} & c_{15} & c_{14} & c_{13} & c_{12} & c_{11} & c_{10} & c_9 \\
+c_9 & -c_{10} & +c_{11} & -c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & -c_1 & +c_2 & -c_3 & +c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\
+c_{10} & +c_9 & -c_{12} & -c_{11} & c_{14} & c_{13} & c_{16} & c_{15} & -c_2 & -c_1 & +c_4 & +c_3 & c_6 & c_5 & c_8 & c_7 \\
+c_{11} & -c_{12} & -c_9 & +c_{10} & c_{15} & c_{16} & c_{13} & c_{14} & +c_3 & -c_4 & -c_1 & +c_2 & c_7 & c_8 & c_5 & c_6 \\
+c_{12} & +c_{11} & +c_{10} & +c_9 & c_{16} & c_{15} & c_{14} & c_{13} & -c_4 & -c_3 & -c_2 & -c_1 & c_8 & c_7 & c_6 & c_5 \\
+c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & -c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\
+c_{14} & c_{13} & c_{16} & c_{15} & c_{10} & c_9 & c_{12} & c_{11} & c_6 & c_5 & c_8 & c_7 & c_2 & -c_1 & c_4 & c_3 \\
+c_{15} & c_{16} & c_{13} & c_{14} & c_{11} & c_{12} & c_9 & c_{10} & c_7 & c_8 & c_5 & c_6 & c_3 & c_4 & -c_1 & c_2 \\
+c_{16} & c_{15} & c_{14} & c_{13} & c_{12} & c_{11} & c_{10} & c_9 & c_8 & c_7 & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & -c_1
\end{array}
$$

dove, secondo il solito, sono stati attribuiti i segni positivi agli elementi della prima linea e della prima colonna, e dove il quadro parziale, già designato nel (18) col numero 1, è quello precedentemente ottenuto nel caso di $n=8$, e i segni d'una parte degli altri elementi (esclusi quelli degli elementi c_1 che dipendono, come si sa, dai segni della prima linea e della prima colonna) sono determinati, dopochè agli elementi c_{10} e c_{12} della seconda linea è stato attribuito il segno $+$ e all'elemento c_{11} della terza linea il segno $-$.

Si prenda ora a considerare il quadrato centrale contenente gli elementi c_1, c_2, c_3, c_4, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}. Tenendo conto anche dei segni che già vi si trovano, esso è:

$$\begin{array}{cccccccc}
-c_1 & +c_2 & -c_3 & +c_4 & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\
-c_2 & -c_1 & +c_4 & +c_3 & c_{14} & c_{13} & c_{16} & c_{15} \\
+c_3 & -c_4 & -c_1 & +c_2 & c_{15} & c_{16} & c_{13} & c_{14} \\
-c_4 & -c_3 & -c_2 & -c_1 & c_{16} & c_{15} & c_{14} & c_{13} \\
c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & -c_1 & +c_2 & -c_3 & +c_4 \\
c_{14} & c_{13} & c_{16} & c_{15} & -c_2 & -c_1 & +c_4 & +c_3 \\
c_{15} & c_{16} & c_{13} & c_{14} & +c_3 & -c_4 & -c_1 & +c_2 \\
c_{16} & c_{15} & c_{14} & c_{13} & -c_4 & -c_3 & -c_2 & -c_1
\end{array}$$

Se all'elemento c_{13} della prima linea, il cui segno può essere scelto ad arbitrio, si attribuisce, per esempio, il segno $+$, ne verrà di conseguenza che l'elemento c_{13} della 5ª linea dovrà avere il segno $-$, e gli elementi c_{13} della 6ª, 7ª e 8ª linea il segno $+$. Ma allora, con queste nuove determinazioni di segni, l'elemento c_{13} della seconda linea che può essere, per così dire, riguardato tanto come quarto vertice a destra del rettangolo

$$\begin{array}{ccl}
+c_3 & . & c_{13} \ldots\ldots \text{(2ª linea)} \\
\vdots & & \vdots \\
+c_{13} & . & -c_3 \ldots\ldots \text{(8ª linea)}
\end{array}$$

quanto come quarto vertice a destra del rettangolo

$$\begin{array}{ccl}
-c_2 \ldots\ldots & c_{13} \ldots\ldots & \text{(2ª linea)} \\
\vdots & \vdots & \\
-c_{13} \ldots\ldots & +c_2 \ldots\ldots & \text{(5ª linea)}
\end{array}$$

dovrebbe avere nel primo caso il segno $+$ e nel secondo il segno $-$. Questo è contradittorio; e perciò dall'impossibilità di completare la determinazione dei segni nel quadro relativo ai 16 elementi $c_1, c_2, \ldots c_{16}$, consegue l'impossibilità di trasformare il prodotto di due somme di 16 quadrati in una somma di 16 quadrati.

§ 5.

Non vogliamo lasciare questo argomento senz'aggiungere la seguente osservazione.

Se nelle somme $a^2 + b^2 + \dots + h^2$, $a^2_1 + b^2_1 + \dots + h^2_1$, lasciando inalterate le quantità a ed a_1 si sostituiscono a

$$b, b_1 \quad , \quad c, c_1 \quad , \quad d, d_1 \quad , \quad e, e_1 \quad , \quad f, f_1 \quad , \quad g, g_1 \quad , \quad h, h_1$$

respettivamente le quantità

$$b\sqrt{p}\ ,\ b_1\sqrt{p}\ ,\ c\sqrt{q}\ ,\ c_1\sqrt{q}\ ,\ d\sqrt{pq}\ ,\ d_1\sqrt{pq}\ ,\ e\sqrt{r}\ ,\ e_1\sqrt{r}\ ,$$
$$f\sqrt{pr}\ ,\ f_1\sqrt{pr}\ ,\ g\sqrt{qr}\ ,\ g_1\sqrt{qr}\ ,\ h\sqrt{pqr}\ ,\ h_1\sqrt{pqr}$$

si hanno i polinomi

$$(22) \qquad \begin{cases} a^2 + pb^2 + qc^2 + pqd^2 + re^2 + prf^2 + qrg^2 + pqrh^2 \\ a^2_1 + pb^2_1 + qc^2_1 + pqd^2_1 + re^2_1 + prf^2_1 + qrg^2_1 + pqrh^2_1. \end{cases}$$

E se le stesse sostituzioni si fanno nei secondi membri delle (7), si trovano subito espressioni tali che dimostrano essere il prodotto dei polinomi (22) trasformabile in un polinomio della stessa forma dei fattori.

L'identità, a cui così si dà luogo, non è dunque da ritenere come *più generale,* ma come *equivalente* a quella già avuta nell'ipotesi di $p = q = r = 1$.

Roma, Giugno 1896.

ALCUNE FORMOLE DI TRIGONOMETRIA

per mezzo delle quali si possono calcolare rapidamente degli integrali di uso frequente

1. PROBLEMA 1°. — *Trasformare un prodotto di coseni o seni in una somma di coseni o seni.*

a) In virtù delle identità

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}, \qquad \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2},$$

si ha

$$\prod_1^n \cos\alpha_i = \cos\alpha_1 \,.\, \cos\alpha_2 \,.\, \cos\alpha_3 \dots \cos\alpha_n =$$
$$= \frac{1}{2^n}(e^{i\alpha_1} + e^{-i\alpha_1})(e^{i\alpha_2} + e^{-i\alpha_2}) \dots (e^{i\alpha_n} + e^{-i\alpha_n}).$$

Eseguendo i prodotti indicati, e raggruppando convenientemente i termini, si deduce

$$(1) \qquad \cos\alpha_1 \,.\, \cos\alpha_2 \dots \cos\alpha_n = \frac{1}{2^{n-1}}\sum \cos(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3 \dots \pm \alpha_n),$$

dove la somma che comparisce nel secondo membro s'intende estesa a tutti i termini che s'ottengono combinando in tutti i modi possibili i segni $\pm$. Il loro numero è dunque 2^{n-1}.

ESEMPI.

$$\cos\alpha_1 . \cos\alpha_2 = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\right\}.$$

$$\cos\alpha_1 . \cos\alpha_2 . \cos\alpha_3 =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + \cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3) + \cos(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3) + \cos(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + \cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3) + \cos(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3) + \cos(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\right\}.$$

b) Si può ora trasformare in una somma il prodotto

$$\operatorname{sen}\alpha_1 . \operatorname{sen}\alpha_2 \ldots . \operatorname{sen}\alpha_h \cos\alpha_{h+1} \ldots . \cos\alpha_n ,$$

mettendo nella (1) al posto di $\alpha_1 . \alpha_2 \ldots . \alpha_h$ rispettivamente $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$, $\frac{\pi}{2} - \alpha_2, \ldots . \frac{\pi}{2} - \alpha_h$. Operando in tal guisa i termini del secondo membro restano tutti della forma $\pm\cos(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3 \ldots . \pm \alpha_n)$ oppure $\pm\operatorname{sen}(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3 \ldots . \pm \alpha_n)$.

2. Applichiamo quanto abbiamo detto alla trasformazione di

$$\operatorname{sen}\alpha_1 . \operatorname{sen}\alpha_2 \ldots . \operatorname{sen}\alpha_n ,$$

e distinguiamo perciò il caso di n pari da n dispari.

a) Sia $n = 2m$. Si avrà per la (1)

$$\operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}_2 \ldots \operatorname{sen}\alpha_{2n} = \frac{1}{2^{2m-1}}\sum\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right) \pm \left(\frac{\pi}{2}-\alpha_2\right) \pm \ldots \pm \left(\frac{\pi}{2}-\alpha_{2m}\right)\right\}.$$

Per vedere come si trasforma il secondo membro, consideriamone un termine qualunque che abbia s segni $-$ e $2m-s$ segni $+$, per esempio

$$K = \cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right) + \left(\frac{\pi}{2}-\alpha_2\right) + \ldots + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\pi}{2}-\alpha_{2m-s}\right) - \left(\frac{\pi}{2}-\alpha_{2m-s+1}\right) - \ldots - \left(\frac{\pi}{2}-\alpha_{2m}\right)\right\}.$$

Si ha

$$K = \cos\left\{2(m-s)\frac{\pi}{2} - [\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2m-s} - \alpha_{2m-s+1} \ldots \alpha_{2m}]\right\}$$
$$= \cos\left\{(m-s)\pi - [\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2m-s} - \alpha_{2m-s+1} - \ldots - \alpha_{2m}]\right\}$$

Se $(m-s)$ è pari risulta

$$K = \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2m-s} - \alpha_{2m-s+1} - \ldots - \alpha_{2m}) ;$$

se $(m-s)$ è dispari risulta

$$K = -\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2m-s} - \alpha_{2m-s+1} - \ldots - \alpha_{2m}) .$$

Possiamo dunque scrivere

$$(2) \quad \operatorname{sen}\alpha_1 . \operatorname{sen}\alpha_2 \ldots \operatorname{sen}\alpha_{2m} = \frac{1}{2^{2m-1}}\sum \pm \cos\left\{\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3 \ldots \pm \alpha_{2m}\right\} :$$

la somma che comparisce nel secondo membro è estesa a tutte le combinazioni dei segni $\pm$, ed ogni termine è preso col segno $+$ o $-$ secondo che (indicando con s il numero dei segni $-$ che precedono la α, è $m-s$ pari o dispari.

ESEMPI.

$$\operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 = \frac{1}{2}\left\{-\cos(\alpha_1+\alpha_2)+\cos(\alpha_1-\alpha_2)\right\}.$$

$$\begin{aligned}8 \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}\alpha_3 \operatorname{sen}\alpha_4 &= \cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)-\cos(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)\\ &-\cos(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)-\cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4)-\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4)\\ &+\cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)+\cos(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4)+\cos(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4).\end{aligned}$$

b) Supponiamo ora $n=2m+1$. Per la (1) si ha

$$\operatorname{sen}\alpha_1 . \operatorname{sen}\alpha_2 \ldots . \operatorname{sen}\alpha_{2m+1} =$$
$$=\frac{1}{2^{2m}}\sum\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right)\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_2\right)\pm\ldots.\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_{2m+1}\right)\right\}.$$

Per trasformare il secondo membro consideriamone un termine che abbia s segni $-$ e $(2m+1-s)$ segni $+$, per esempio

$$K=\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_2\right)\ldots+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_{2m+1-s}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_{2m+2-s}\right)\ldots-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_{2m+1}\right)\right\}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}K&=\cos\left\{(2m+1-2s)\frac{\pi}{2}-[\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2m+1-s}-\alpha_{2m+2-s}-\ldots-\alpha_{2m+1}]\right\}\\ &=\cos\left\{(m-s)\pi+\frac{\pi}{2}-[\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2m+1-s}-\alpha_{2m+2-s}-\ldots-\alpha_{2m+1}]\right\}.\end{aligned}$$

Se $(m-s)$ è pari, risulta

$$\begin{aligned}K&=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-[\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2m+1-s}-\alpha_{2m+2-s}-\ldots-\alpha_{2m+1}]\right\}\\ &=\operatorname{sen}\left\{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2m+1-s}-\alpha_{2m+2-s}-\ldots-\alpha_{2m+1}\right\}.\end{aligned}$$

Se $(m-s)$ è dispari, si ha

$$\begin{aligned}K&=-\cos\left\{\frac{\pi}{2}-[\alpha_1+\alpha_2+\ldots.+\alpha_{2m+1-s}-\alpha_{2m+2-s}-\ldots.-\alpha_{2m+1}]\right\}\\ &=-\operatorname{sen}\left\{\alpha_1+\alpha_2+\ldots.+\alpha_{2m+1-s}-\alpha_{2m+2-s}-\ldots.-\alpha_{2m+1}\right\}.\end{aligned}$$

Si ha dunque

$$(3)\qquad \operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2\ldots.\operatorname{sen}\alpha_{2m+1}=\frac{1}{2^{2m}}\sum\pm\operatorname{sen}(\alpha_1\pm\alpha_2\pm\alpha_3\ldots.\pm\alpha_{2m+1}).$$

dove ogni termine del 2° membro è preso col segno + o —, secondo che $(m-s)$ è pari o dispari.

A questi risultati si può giungere anche direttamente collo stesso procedimento adoperato per ottenere la (1). Si ha infatti

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2\ldots\operatorname{sen}\alpha_{2m}&=\frac{1}{(2i)^{2m}}(e^{i\alpha_1}-e^{-i\alpha_1})\ldots(e^{i\alpha_{2m}}-e^{-i\alpha_{2m}})\\ &=\frac{-1^m}{2^{2m-1}}\sum\left(e^{i(\alpha_1\pm\alpha_2\pm\ldots\pm\alpha_{2m})}+e^{-i(\alpha_1\pm\alpha_2\pm\ldots\pm\alpha_{2m})}\right).\end{aligned}$$

3. Le formule (1), (2), (3) permettono di calcolare molto rapidamente alcuni integrali.

$$(4)\quad \int \cos\alpha_1 x . \cos\alpha_2 x \ldots \cos\alpha_n x . dx = \frac{1}{2^{n-1}} \sum \int \cos(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_n) x . dx$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum \frac{\operatorname{sen}(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_n) x}{\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_n}$$

$$(5)\quad \int \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 x \ldots \operatorname{sen}\alpha_{2m} x . dx = \frac{1}{2^{2m-1}} \sum \pm \frac{\operatorname{sen}(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_{2m}) x}{\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_{2m}}$$

$$(6)\quad \int \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 x \ldots \operatorname{sen}\alpha_{2m+1} x . dx = \frac{1}{2^{2m}} \sum \mp \frac{\cos(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_{2m+1}) x}{\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_{2m+1}} .$$

4. Problema. — *Trasformare la potenza* n^{ma} (n *intero e positivo*) *di un seno o coseno in una somma di seni o coseni.*

Se nelle formule (1), (2), (3) si pone $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = \alpha$, si trovano immediatamente le formule richieste, le quali però si possono anche ricavare direttamente come segue. Distingueremo il caso di n pari da quello di n dispari.

$$a)\ \cos^{2m} x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^{2m} =$$
$$= \frac{1}{2^{2m}} \left\{ \binom{2m}{0} (e^{i.2mx} + e^{-i.2mx}) + \binom{2m}{1} (e^{i.2(m-1)x} + e^{-i.2(m-1)x}) + \right.$$
$$\left. \ldots \binom{2m}{m-1} (e^{i.2x} + e^{-i.2x}) + \binom{2m}{m} \right\} .$$

e quindi

$$(7)\quad 2^{2m-1} \cos^{2m} x = \frac{1}{2} \binom{2m}{m} +$$
$$+ \binom{2m}{m-1} \cos 2x + \binom{2m}{m-2} \cos 4x + \ldots + \binom{2m}{1} \cos 2(m-1)x + \cos 2mx :$$

$$\cos^{2m+1} x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^{2m+1}$$
$$= \frac{1}{2^{2m+1}} \left\{ \binom{2m+1}{0} (e^{i(2m+1)x} + e^{-i(2m+1)x}) + \binom{2m+1}{1} (e^{i(2m-1)x} + e^{-i(2m-1)x}) \right.$$
$$\left. \ldots + \binom{2m+1}{m-1} (e^{i.3x} + e^{-i.3x}) + \binom{2m+1}{m} (e^{ix} + e^{-ix}) \right\} .$$

ossia

$$(8)\quad 2^{2m} \cos^{2m+1} x = \binom{2m+1}{m} \cos x + \binom{2m+1}{m-1} \cos 3x + \binom{2m+1}{m-2} \cos 5x +$$
$$\ldots + \binom{2m+1}{1} \cos(2m-1)x + \cos(2m+1)x .$$

In simil guisa si possono trovare gli sviluppi di $\operatorname{sen}^{2m} x$, $\operatorname{sen}^{2m+1} x$. Ma si giunge più facilmente agli stessi risultati ponendo nelle (7) e (8) $\frac{\pi}{2} - x$ al posto di x. Si ha

$$\cos 2k \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(k\pi - 2kx) = \pm \cos 2kx$$

$$\cos(2k+1)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - 2kx\right) = \pm \operatorname{sen} 2kx ,$$

dove il segno dell'ultimo membro è + o — secondo che k è pari o dispari.

Si ha dunque

$$(9)\quad 2^{2m-1}\,\mathrm{sen}^{2m}x = \frac{1}{2}\binom{2m}{m} - \binom{2m}{m-1}\cos 2x + \binom{2m}{m-2}\cos 4x - \dots + (-1)^m \cos 2mx$$

$$(10)\quad 2^{2m}\,\mathrm{sen}^{2m+1}x = \binom{2m+1}{m}\mathrm{sen}\, x - \binom{2m+1}{m-1}\mathrm{sen}\, 3x + \binom{2m+1}{m-2}\cos 5x - \dots + (-1)^m\,\mathrm{sen}\,(2m+1)x.$$

5. Le formule (7), (8), (9), (10) permettono di calcolare degli integrali di uso frequente. Infatti da esse si deduce

$$(11)\quad 2^{2m-1}\int \cos^{2m}x\,.dx = \frac{1}{2}\binom{2m}{m}x + \binom{2m}{m-1}\frac{\mathrm{sen}\,2x}{2} + \binom{2m}{m-3}\cos\frac{4x}{4} + \dots + \frac{\mathrm{sen}\,2mx}{2m} + C.$$

$$(12)\quad 2^{2m-1}\int \mathrm{sen}^{2m}x\,.dx = \frac{1}{2}\binom{2m}{m}x - \binom{2m}{m-1}\frac{\mathrm{sen}\,2x}{2} + \binom{2m}{m-3}\frac{\cos 4x}{4} - \dots + (-1)^m\frac{\mathrm{sen}\,2mx}{2m} + C.$$

$$(13)\quad 2^{2m}\int \cos^{2m+1}x\,.dx = \binom{2m+1}{m}\mathrm{sen}\,x + \binom{2m+1}{m-1}\frac{\mathrm{sen}\,3x}{3} + \binom{2m+1}{m-2}\frac{\mathrm{sen}\,5x}{5} + \dots + \frac{\mathrm{sen}\,(2m+1)x}{2m+1} + C.$$

$$(14)\quad 2^{2m}\int \mathrm{sen}^{2m+1}x\,.dx = -\binom{2m+1}{m}\cos x + \binom{2m+1}{m-1}\frac{\cos 3x}{3} - \binom{2m+1}{m-2}\frac{\cos 5x}{5} + \dots + (-1)^{m-1}\frac{\cos\,(2m+1)x}{2m+1} + C.$$

G. Lazzeri.

TEOREMI SULLE FRAZIONI CONTINUE PERIODICHE

1. È noto (*) che:

a) le radici irrazionali di un'equazione di 2° grado a coefficienti razionali sono sviluppabili, indipendentemente dal segno, in frazioni continue periodiche, aventi per numeratori parziali l'unità positiva, e per denominatori parziali numeri interi e positivi;

b) qualunque frazione continua periodica, della forma anzidetta, è radice di un'equazione di 2° grado a coefficienti razionali;

c) un'equazione di 2° grado, avente una radice uguale ad una periodica semplice, ha le radici di segno contrario; ed un'equazione di 2° grado,

(*) Novi G., *Trattato di Algebra Superiore*; Serret, *Cours d'Algèbre Supérieure*.

avente una radice uguale ad una periodica mista, con più di un elemento prima del periodo, ha le radici dello stesso segno;

d) se un'equazione di 2^o grado ha una radice uguale ad una periodica semplice, l'altra radice è l'unità negativa divisa per la periodica semplice, che ha il periodo composto degli stessi elementi presi nell'ordine inverso;

e) due periodiche miste, radici di un'equazione di 2^o grado, hanno i periodi composti degli stessi elementi, disposti in ordine inverso a partire da uno di essi.

2. Per quanto si è detto (1; *a*, *c*, *d*), un'equazione di 2^o grado a coefficienti razionali, avente le radici (irrazionali) di segno contrario, può avere per radici o due periodiche semplici, o due periodiche miste coll'antiperiodo di un solo elemento; ci proponiamo ora di determinare in quali casi dette radici siano periodiche semplici, ed in quali periodiche miste.

3. Teorema. — *Due frazioni continue periodiche miste coll'antiperiodo di un solo elemento, non possono essere, indipendentemente dal segno, radici di una stessa equazione di 2^o grado a coefficienti razionali, avente le radici di segno contrario, se le frazioni sono l'una maggiore e l'altra minore dell'unità.*

Supponiamo che, indicando con x_1 ed x_2 le radici dell'equazione, e con p e q due numeri interi e positivi, si abbia (1; e):

$$x_1 = p + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_r + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}}}}}} \qquad -x_2 = \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{a_r + \ddots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \ddots + \cfrac{1}{a_r + \ddots}}}}}}}$$

Facendo dell'equazione la trasformata in $y = x - p$, ed indicando con y_1 ed y_2 le radici della trasformata, si avrebbe:

$$y_1 = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_r + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}}}}}} \qquad -y_2 = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{a_r + \ddots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \ddots + \cfrac{1}{a_r + \ddots}}}}}}}$$

E poichè y_1 è una periodica semplice, anche $-y_2$ dovrebbe essere una periodica semplice (1; d), e quindi:

$$q = a_{r+1}, \quad p = a_{r+2};$$

ma allora x_1 e $-x_2$ sarebbero due periodiche semplici, e ciò è contro l'ipotesi.

Si giunge alla stessa conclusione, supponendo x_1 negativa, x_2 positiva, e facendo dell'equazione la trasformata in $y = x + p$.

4. Teorema. — *Se* a, b, c *sono numeri interi e positivi, affinchè l'equazione*

$$ax^2 \pm bx - c = 0$$

abbia le radici sviluppabili in frazioni continue periodiche semplici, è necessario e sufficiente che si abbia

$$a + b > c > a - b.$$

Per quanto si disse (1; d), e pel teorema ora dimostrato, affinchè detta equazione abbia per radici due periodiche semplici, è condizione necessaria e sufficiente che una delle radici sia maggiore e l'altra minore dell'unità, in valore numerico. Ora, considerando dapprima l'equazione

$$ax^2 + bx - c = 0,$$

dalla quale si ha

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}, \qquad -x_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a},$$

dovrà essere

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} < 1, \qquad \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} > 1,$$

ossia

$$\sqrt{b^2 + 4ac} < 2a + b, \qquad \sqrt{b^2 + 4ac} > 2a - b,$$

e quindi, per $2a > b$,

$$c < a + b, \qquad c > a - b;$$

per $2a = b$,

$$c < a + b, \qquad \sqrt{b^2 + 4ac} > 0 \text{ (condizione sempre soddisfatta);}$$

per $2a < b$,

$$c < a + b, \qquad \sqrt{b^2 + 4ac} > -k \text{ (condizione sempre soddisfatta).}$$

Si ha dunque, in generale, l'unica condizione

$$a + b > c > a - b.$$

Considerando poi l'equazione

$$ax^2 - bx - c = 0,$$

dalla quale si ha

$$x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}, \qquad -x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a},$$

dovrà essere

$$\frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} > 1 \qquad \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} < 1,$$

e si ha così la condizione precedente.

5. Quando non sia soddisfatta l'anzidetta condizione, l'equazione:

$$ax^2 \pm bx - c = 0$$

ammette necessariamente per radici due periodiche miste coll'antiperiodo di un solo elemento.

Nel caso particolare di $c = a \pm b$, le radici sono razionali; si ha infatti in tale ipotesi

$$b^2 + 4ac = b^2 + 4a(a \pm b) = b^2 + 4a^2 \pm 4ab = (2a \pm b)^2.$$

6. Nell'ipotesi di $b = 0$, la condizione, di cui al precedente teorema, non è soddisfatta, e quindi, considerando l'equazione

$$ax^2 - c = 0,$$

si deduce che la radice quadrata irrazionale non solo di un numero intero (com'è noto), ma benanche di un numero frazionario, sviluppata in frazione continua, dà sempre origine ad una periodica mista coll'antiperiodo di un solo elemento.

7. Relativamente all'equazione con radici di ugual segno, si ha il seguente

Teorema. — *Due frazioni continue periodiche miste coll'antiperiodo di un solo elemento, non possono essere, indipendentemente dal segno, radici di una stessa equazione di 2° grado a coefficienti razionali, avente le radici di ugual segno, se le frazioni sono ambedue maggiori, od ambedue minori dell'unità.*

Infatti, supponiamo che le radici siano positive, e che, indicando con x_1 ed x_2 le radici e con p e q due numeri interi e positivi, si abbia

$$x_1 = p + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_r + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}}}}}} \qquad x_2 = q + \cfrac{1}{a_r + \ddots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \ddots + \cfrac{1}{a_r + \ddots}}}}}}$$

Quando fosse $p = q$, facendo la trasformata in $y = x - p$, tale trasformata, che pure avrebbe tutte due le radici positive, ammetterebbe per radici due periodiche semplici; il che è impossibile. Quando fosse $p \lessgtr q$, ad esempio $p < q$, facendo dell'equazione la trasformata in $y = x - p$, tale trasformata, che pure avrebbe tutte due le radici positive, avrebbe almeno una radice uguale ad una periodica semplice; il che è del pari impossibile.

Supponiamo in secondo luogo che si abbia

$$x_1 = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_r + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}}}}}}} \qquad x_2 = \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{a_r \ddots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \ddots + \cfrac{1}{a_r + \ddots}}}}}}}$$

Facendo dell'equazione la trasformata in $y = \frac{1}{x}$, e di questa, come precedentemente, la trasformata in $z = y - p$, si cadrebbe nell'impossibilità di cui sopra.

Se infine le radici dell'equazione primitiva fossero negative ed ambedue maggiori o minori dell'unità, facendo dell'equazione la trasformata in $y = - x$, saremmo ricondotti ai casi precedenti.

DIEGO FELLINI.

DI UNA NUOVA SUCCESSIONE DI NUMERI

1. A complemento della mia nota sulla funzione $\psi(a, b)$, comparsa nell'ultimo fascicolo dell'anno 1897 di questo Periodico, ecco alcuni teoremi analoghi con brevissimi cenni delle dimostrazioni, il cui completo sviluppo lascio al benevolo lettore. I due corollari finali mi sembrano notevoli, perchè con facili considerazioni risalgono *elementarmente* da proprietà delle funzioni trascendenti elementari alle funzioni stesse, stabilendo così proprietà e *caratteristiche* di dette funzioni.

LEMMA. — *Se nella successione*

$$(1) \qquad \mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{b}_2 \ldots . \mathrm{a}_{n-1}, \mathrm{b}_{n-1}, \mathrm{a}_n, \mathrm{b}_n,$$

in cui $\mathrm{a}_1 > 0$, $\mathrm{b}_1 > 0$, *valgono a partire dal terzo termine le relazioni*

$$(2) \qquad \mathrm{a}_n = + \sqrt{\mathrm{a}_{n-1} \frac{\mathrm{a}_{n-1} + \mathrm{b}_{n-1}}{2}} \qquad \mathrm{b}_n = \sqrt{\mathrm{a}_{n-1}\mathrm{b}_{n-1}}$$

la classe dei numeri $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3 \ldots .$ *è contigua a quella dei numeri* $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3 \ldots .$, *e il numero che separa queste due classi è il limite cui tende la data successione.*

Dimostrazione. — Analogamente alla dimostrazione di esistenza di $\psi(a, b)$ si noti: che le a variano sempre in un senso; le b nel senso opposto; che il segno di $a_n - b_n$ è uguale a quello di $a_{n-1} - b_{n-1}$, e quindi è costantemente eguale al segno di $a_1 - b_1$; finalmente che $a^2_n - b^2_n$ decresce indefinitamente al crescere di n; e infatti $|a^2_n - b^2_n| < \left|\frac{a^2_{n-1} - b^2_{n-1}}{2}\right|$. perchè

$$|a^2_n - b^2_n| = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \left|\frac{a^2_{n-1} - b^2_{n-1}}{2}\right|;$$

perciò a_n e b_n tendono a un medesimo limite.

2. Chiamato $\Phi(a_1, b_1)$ questo limite e ricordata la definizione da me data di $\psi(a, b)$ sussistono i seguenti teoremi:

Teorema I. — *Indicato con $\Phi^2(a, b)$ il quadrato di $\Phi(a, b)$, si ha*

$$a \cdot \psi(a, b) = \Phi^2(a, b).$$

Teorema II. — *Se* a, b *sono rispettivamente la media aritmetica e geometrica di quei numeri positivi* m, n, *delle cui radici quadrate* $+\sqrt{m}$, $+\sqrt{n}$ *i numeri* p *e* q *sono rispettivamente la media aritmetica e geometrica, si ha:*

$$\psi(a, b) = \Phi^2(p, q).$$

Teorema III. — *Se* $a^2 + c^2 = b^2$, *con* $c > 0$, *si ha* $\operatorname{arctg} \frac{c}{a} = \operatorname{arcsen} \frac{c}{b} = \arccos \frac{a}{b} = \frac{ac}{\Phi^2(a, b)}$.

Teorema IV. — *Se* m_0 *ed* n_0 *sono rispettivamente la media aritmetica e la media geometrica di* m *ed* n, *si ha* $\log_e \frac{m}{n} = \frac{1}{2} \frac{m^2 - n^2}{\Phi^2(m_0\, n_0)}$.

Teorema V. — *Se* p_0 *e* q_0 *sono rispettivamente la media aritmetica e geometrica di* $\sqrt{p}$ *e* $\sqrt{q}$, *si ha*

$$\log_e \frac{p}{q} = \frac{p - q}{\Phi^2(p_0\, q_0)}.$$

Teorema VI. — *Se* $a^2 + c^2 = b^2$, *con* $c > 0$, *si ha*

$$\frac{1}{\Phi^2(a, b)} + \frac{1}{\Phi^2(c, b)} = \frac{\pi}{2ab},$$

per tutti i valori positivi di a *e* b *con* $a < b$.

Dimostrazione. — L'espressione $\varepsilon = \dfrac{ac}{\arccos \frac{a}{b}}$ non muta di valore quando, fatto $a = a_1$, $b = b_1$, si pongono per a_1, b_1 rispettivamente a_2, b_2, ciò che con un facile calcolo si riconosce. Non muterà quindi neppure se in luogo di a_1, b_1 pongo a_3, b_3 ecc. oppure a_g, b_g. Ma, poichè $c = +\sqrt{b^2 - a^2}$ e poichè $\lim\limits_{a=\lambda;\, b=\lambda} \dfrac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}}{\arccos \frac{a}{b}} = 1$, si vede che quando a e b tendono a un limite λ, ε tende al limite λ^2. E perchè col crescere di n, a_n e b_n tendono a $\Phi(a, b)$, si vede immediatamente, per l'invariabilità del valore di ε (quando in luogo di a, b, si pongono a_n, b_n), che $\dfrac{ac}{\arccos \frac{a}{b}} = \Phi^2(a, b)$.

Dimostrato così il teor. III, il teor. VI è evidente, perchè esso ci dice soltanto che $\arccos \frac{a}{b} + \operatorname{arcsen} \frac{a}{b} = \frac{\pi}{2}$. Per dimostrare il teor. IV si esprimono m, n per m_0 ed n_0; e, fatto $m_0 = a_1$ $n_0 = b_1$, si ripetano per la frazione $\dfrac{1}{2} \dfrac{m^2 - n^2}{\log_e \frac{m}{n}}$, espressa in funzioni di m_0 ed n_0 le considerazioni testè fatte per la frazione $\dfrac{ac}{\arccos \frac{a}{b}}$. Il teor. V si può quindi dedurre dal IV, facendo $p = m^2$, $q = n^2$; i primi due teoremi si ottengono dal confronto delle formule ora ottenute con quelle esposte nella nota già citata sulla $\psi(a, b)$.

3. Come corollari delle precedenti teorie, ecco le seguenti proprietà.

TEOREMA. — *Condizioni necessarie e sufficienti affinchè sia* $\varphi(x) = \cos x$, *sono le:*

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\varphi(x)}{2}} \qquad \lim_{x=0} \frac{\sqrt{1-[\varphi(x)]^2}}{x} = 1.$$

TEOREMA. — *Condizioni necessarie e sufficienti affinchè sia* $\varphi(x) = \log_e x$, *cioè proprietà* caratteristiche *della funzione* $\log_e x$, *sono le:*

$$\varphi(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\varphi(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x=1} \frac{\varphi(x)}{x-1} = 1.$$

Dimostrazione. — Infatti queste sole proprietà bastarono nelle precedenti dimostrazioni ad esprimere $\arccos \frac{a}{b}$ e $\log_e \frac{a}{b}$ in funzione di a e b.

4. Allo studioso propongo ora i seguenti problemi:

PROBLEMA I. — *Esprimere* $\operatorname{arccosh} \frac{a}{b}$, $\operatorname{arcsenh} \frac{a}{b}$ *per mezzo della funzione* Φ.

PROBLEMA II. — *Trovare teoremi analoghi a quelli del* § 3 *per le funzioni iperboliche.*

PROBLEMA III. — *Come si modificano i teoremi del* § 3, *per* $\varphi(x) = \arccos x$? *E come si modificano, quando* $\varphi(x) = \log x$, *senza che la base del sistema dei logaritmi sia determinata?*

GUIDO FUBINI.

SOPRA LA RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI

NOTA DEL DOTT. N. M. LEONCINI

Nella serie delle importanti conseguenze che discendono dal *corollario di Lindemann* (*) sulla trascendenza del numero e merita di essere notata la seguente, che riguarda direttamente la geometria elementare.

« *È impossibile che tra i lati e gli angoli di un triangolo qualunque sussista « una relazione algebrica in cui vi comparisca almeno un lato* ».

Questa proposizione mostra la necessità della introduzione delle funzioni circolari per la risoluzione dei triangoli, e si deduce dal sopra citato corollario semplicemente così:

Siano con a, b, c e con α, β, γ indicati rispettivamente i tre lati di un triangolo e gli angoli opposti. Una relazione fra questi elementi, in cui comparisca almeno

(*) F. KLEIN, *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare.* Trad. di F. Giudice.

un lato ed un angolo conterrà almeno quattro di tali elementi, e fra questi almeno due lati perchè fra i tre angoli sussiste la relazione

$$(1) \qquad \alpha + \beta - \gamma = 2\pi.$$

Siano a, b i lati che vi compariscono, e la relazione sia *algebrica*.

Mediante le note relazioni della trigonometria

$$a = \frac{c \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{c \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \beta} + \operatorname{sen} \beta \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

$$b = \frac{c \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{c \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \beta} + \operatorname{sen} \beta \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

e la (1), essa si trasformerà in una relazione ancora algebrica

$$F(c, \operatorname{sen} \alpha, \operatorname{sen} \beta, \alpha, \beta) = 0$$

in c, $\operatorname{sen} \alpha$, $\operatorname{sen} \beta$, α, β, la quale dovrà esser soddisfatta identicamente quali si siano i valori di c, α, β, che rappresentano un lato e i due angoli adiacenti di un triangolo.

Mediante le formole di Eulero

$$2i \operatorname{sen} \alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha},$$
$$2i \operatorname{sen} \beta = e^{i\beta} - e^{-i\beta},$$

essa si potrà trasformare in una relazione algebrica

$$\Phi(c, e^{i\alpha}, e^{i\beta}, \alpha, \beta) = e$$

alla quale verrebbe a soddisfare il numero e.

Se supponiamo che α, β, c assumano valori algebrici, il corollario del Lindemann ci assicura della *impossibilità* di una tale relazione per il numero e.

La nostra proposizione è dunque dimostrata.

Aquila, novembre 1898.

LUOGHI ED INVILUPPI

(ESERCIZI DI GEOMETRIA ANALITICA).

1. Se P_1, P_2, P_3, P_4 sono quattro punti situati sopra una retta di un piano e si suppone $P_1P_2 = P_3P_4$, indicando con δ_i la distanza del punto P_i da un punto variabile P del piano, dimostrare che:

a) Il luogo di P per cui è $\delta_1\delta_3 = \delta_2\delta_4$ si compone di un circolo e di una retta

b) quello per cui è $\delta_1\delta_4 = \delta_2{}^2{}_3$ è un'iperbole equilatera

c) e quello per cui è $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 = cost.^e$ è un circolo.

2. Il luogo dei fuochi (o *dei vertici*) delle parabole la cui direttrice passa per un punto dato ed il cui vertice (o *fuoco*) è dato, è un circolo.

3. Se un triangolo ABC ha fissi i vertici A e B ed il terzo vertice C scorre sopra una retta data, perpendicolare ad AB, l'inviluppo della retta d'Eulero del triangolo è in generale, un'iperbole.

4. Il luogo del punto di Lemoine del triangolo determinato da un raggio fisso OA o da un mobile OM di uno stesso circolo è un'*ellisse*.

5. Il luogo dei baricentri dei triangoli che un raggio mobile di un fascio forma con due rette ortogonali del suo piano è un'*iperbole*.

6. Sia c' un circolo variabile che ha il centro P sopra un circolo dato c di centro O ed è tangente ad un diametro fisso di questo circolo. Il luogo della intersezione P_1, P_2 della OP con c' è composto di due *cardioidi* aventi il punto di regresso in O.

7. Il luogo del baricentro del triangolo che una tangente mobile di un'ellisse forma con gli assi è una *Kreuzcurva* (se l'ellisse si riduce a un circolo, la Kreuzcurva diviene equilatera).

8. Sieno c_1, c_2 due circoli eguali di centro O_1, O_2 che s'incontrano in due punti H e K. Sia r una retta mobile del fascio H che incontri rispettivamente in M_1, M_2 i due circoli.

I luoghi delle intersezioni delle rette M_1O_1, M_2K (o M_2O_2, M_1K) e delle rette M_1O_2, M_2K (o M_2O_1, M_1K) sono *cubiche razionali circolari* aventi K per punto doppio.

9. Sia M un punto mobile di un circolo, AB un diametro fisso. Si congiunga M con A e da A si conduca la perpendicolare AP ad AM. Il luogo del punto P d'intersezione di AP con la tangente in M è una *cissoide di Diocle*.

10. Sieno date due rette parallele r e r' e su r un punto O; se OV è un raggio mobile del fascio O che incontri in S la r', se si proietta ortogonalmente S su r in T e poi, facendo centro in T, si descrive un circolo di raggio OT che tagli ulteriormente la OV in M, il luogo di M è una *cissoide di Diocle*.

11. Considerando una parabola $y^2 = 2px$ e la perpendicolare condotta all'asse del punto $(2p, 0)$, se un raggio mobile r uscente dal vertice V incontra rispettivamente in P e R la parabola e la retta e si riporta il segmento VP su r (nello stesso senso) in RM, il luogo di M è una *cubica mista*.

12. Sia n la normale in un punto mobile P di una parabola e sieno M, N i piedi delle perpendicolari condotte ad n rispettivamente dal vertice V e dal fuoco F. I luoghi di M e di N sono *quartiche circolari* con un punto triplo rispettivamente in V o in F.

(Continua)

G. Cardoso-Laynes.

SOPRA UNA CURVA PIANA DEL SEST'ORDINE

La equazione (v. *Intermediaire des Mathematiciens*, tomo V, p. 258, questione 1243, Novembre 1898)

$$(1) \qquad x^6 + y^6 + z^6 - 2(y^3z^3 + z^3x^3 + x^3y^3) = 0$$

può scriversi nella forma

$$(1)^{bis} \qquad x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}} = 0,$$

e perciò la sestica (1) appartiene alla famiglia delle *curve triangolari simmetriche* $(ax)^m + (by)^m + (cz)^m = 0$, la cui equazione tangenziale è (v. SALMON-FIEDLER, *Höheren Ebenen Kurven*, p. 98) (*)

$$\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{m-1}{m}} + \left(\frac{v}{b}\right)^{\frac{m-1}{m}} + \left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{m-1}{m}} = 0.$$

Ponendo in questa $a = b = c = 1$ ed $m = \frac{3}{2}$ abbiamo per equazione tangenziale di (1), $u^3 + v^3 + w^3 = 0$. La sestica in discorso è dunque la reciproca della cubica equianarmonica $x^3 + y^3 + z^3 = 0$: e se ne conclude senz'altro che possiede *zero* punti doppi ordinari e *nove* cuspidi; le sue caratteristiche plückeriane sono dunque:

$$\begin{array}{lll} m = 6, & \delta = 0, & k = 9 \\ n = 3, & \tau = 0, & \iota = 0. \end{array}$$

Le 9 cuspidi giacciono tre a tre sui lati del triangolo fondamentale; le corrispondenti tangenti cuspidali si segano tre a tre in tre punti; ogni tangente sega la curva, oltrechè nei due riuniti nel punto di contatto, in quattro punti che formano, sulla tangente, un gruppo equianarmonico. La (1) può dunque dirsi *curva equianarmonica della terza classe*.

Milano, 18 Novembre 1898.

RETALI.

CORRISPONDENZA

EGREGIO COLLEGA,

La relazione del prof. Ciamberlini, che ascoltai a Torino con vivo piacere, fu da me riletta stampata nel *Periodico di Matematica*, p. 37, con piacere crescente. Sulle inesattezze e errori, che l'A. rileva in trattati comuni, non vi può essere di-

(*) Nella edizione francese (p. 110) sono invertiti, per errore di stampa, i due termini degli esponenti. Lo studio delle curve triangolari simmetriche, la cui bibliografia è già assai estesa, è stato ripreso recentemente dal sig. H. E. TIMERDING nella Mem. " *Sur une certaine famille de courbes algébriques* „ (*Nouv. Ann. de Math.* Aout 1898); pel caso di m intero e positivo si trovano importanti risultati sulle stesse curve, chiamate dall'autore *curve A*, nella bella Memoria del Prof. VERONESE " *Sopra alcune notevoli configurazioni* ecc. „ (Mem. della R. Acc. dei Lincei, anno 1880-81, Teorema XXXII, XXXIII e XXXIV). Notiamo ancora che nel lavoro sopra citato dal sig. TIMERDING a p. 366 linea 23 e a p. 367, linea 18, forse per errore di stampa, non è detto che i tre punti e i sei punti di cui si tratta sono cuspidali.

le norme igieniche nelle Scuole e negl'Istituti, affidandone gran parte al titolare di scienze naturali).

Per l'importanza dell'argomento in se, come per le vicende che nella lunga discussione ebbe a subire il Tema, diamo qui un più ampio cenno della relazione dei proff. *Schülde* e *Pietzker* sul Tema: *Con che si provvede ad un continuo progresso nell'insegnamento*.

(Il prof. Schüld accenna anzi tutto alla vastità che la letteratura pedagogica ha raggiunto in questi ultimi tempi e alla conseguente difficoltà di orientarsi in questo mare magno di proposte, di libri di testo, di giornali, di congressi, ecc. e di poter decidere da dove si riconosca essersi veramente fatto un progresso, o no. Perciò egli non troverebbe altra via d'uscita se non ricorrendo al giudizio da pronunciarsi in ultima istanza dai membri della Società, promossa dal presidente. Il correferente prof. Pietzker osserva che la istituzione di un comitato centrale che debba decidere definitivamente nei riguardi del progresso scientifico nell'insegnamento avrebbe vari inconvenienti, e lasciando pur da parte il pericolo delle personalità, potrebbe sembrare restrittiva alla libertà d'insegnamento. Egli però ritiene che questi inconvenienti possono essere facilmente rimossi; ma bisognerebbe che si prescrivesse qualche confine tra il troppo rigido attenersi all'antico di taluni, e la troppo vivace accoglienza ai più recenti progressi della scienza di altri: le decisioni finali dovrebbero essere devolute a insegnanti, i quali dovrebbero essere liberamente interpellati; sarebbe quindi opportuno l'intervento di insegnanti dell'Università, onde stabilire il maggior contatto possibile fra l'indagine scientifica e la esigenza scolastica; infine l'incarico della funzione di questa suprema Corte d'appello dovrebbe essere affidato ad autorità autonoma, piuttosto che al presidente della società, ad imitazione per es. della Deputazione scientifica per la classe dei medici. Sorge a parlar contro il progetto il Presidente *Schotten* dichiarando che egli non vorrà mai seppellire la libertà d'insegnamento; parla contro anche il prof. *Thaer*, asserendo non doversi procurare altre autorità, oltre quelle che ci sono; gli insegnanti dover esser contenti anzi che deplorare che vi siano delle lacune nei programmi scolastici, e quanto alla tanto invocata unità nello svolgimento dei programmi, tutto il malanno ridursi a pochi scolari che emigrano da un luogo all'altro; dello stesso avviso è il prof. *Schwalbe*, il quale dice desiderare egli un Comitato centrale istruttivo, non già autoritativo; ecc.

La riunione dei soci respinge quindi la proposta *Schülde-Pietzker* quale esorbitante; e si dichiara invece propensa ad accettare una soluzione somiglievole ad una proposta già fatta in altra sede, della istituzione di un centro di informazioni circa i mezzi per l'insegnamento delle scienze fisico-chimiche).

In seguito a ciò la riunione dei soci si suddivide in due sezioni: la matematico-fisica e la chimico-storia naturale.

Nella prima sottosezione parlò il prof. *Wehner: Sul volume dei corpi e il teorema di Cavalieri*; indi il prof. *Weise: Sulle dimensioni nella Fisica*. E nella seconda il prof. *Lohrmann: Sulla divisione del materiale d'insegnamento in riguardo all'Antropologia*; e il prof. *Löwenhardt: Sulla necessità di opportuni compiti nell'insegnamento della Chimica*.

A suo luogo il prof. *Hoffmann* prese la parola per commemorare, come matematico e come insegnante, il compianto prof. *Bardey*. In fine il prof. *Scotten* lesse un lavoretto dal titolo: *Il processo combinatorio della Matematica*, accennando all'utilità di esso, applicato che sia, a talune questioni geometriche.

P. G.

Formulaire de Mathématiques pubblicato dalla *Revue de Mathématiques* (Rivista di Matematica) diretta da G. Peano. — Tomo I (1895). Tomo II, n. 1 (1897). Tomo II, n. 2 (1898).

Nel tomo I di questo formulario fu pubblicato, sotto la direzione del prof. G. Peano e col contributo dell'opera di più studiosi, una raccolta di formule, espresse in simboli di logica, sui seguenti argomenti: I Logica matematica. II Operazioni algebriche. III Aritmetica. IV Teoria delle grandezze. V Classi di numeri. VI Teoria dei gruppi. VII Limiti. VIII Serie. IX Contributo alla teoria dei numeri algebrici. Questa prima raccolta, sebbene assai ricca, venne completandosi ancora per la collaborazione di vari professori, tantochè, due anni dopo che il primo volume le norme igieniche nelle Scuole e negl' Istituti, affidandone gran parte al titolare di scienze naturali).

Per l'importanza dell'argomento in se, come per le vicende che nella lunga discussione ebbe a subire il Tema, diamo qui un più ampio cenno della relazione dei proff. *Schülde* e *Pietzker* sul Tema: *Con che si provvede ad un continuo progresso nell'insegnamento*.

(Il prof. Schüld accenna anzi tutto alla vastità che la letteratura pedagogica ha raggiunto in questi ultimi tempi e alla conseguente difficoltà di orientarsi in questo mare magno di proposte, di libri di testo, di giornali, di congressi, ecc. e di poter decidere da dove si riconosca essersi veramente fatto un progresso, o no. Perciò egli non troverebbe altra via d'uscita se non ricorrendo al giudizio da pronunciarsi in ultima istanza dai membri della Società, promossa dal presidente. Il correferente prof. Pietzker osserva che la istituzione di un comitato centrale che debba decidere definitivamente nei riguardi del progresso scientifico nell'insegnamento avrebbe vari inconvenienti, e lasciando pur da parte il pericolo delle personalità, potrebbe sembrare restrittiva alla libertà d'insegnamento. Egli però ritiene che questi inconvenienti possono essere facilmente rimossi; ma bisognerebbe che si prescrivesse qualche confine tra il troppo rigido attenersi all'antico di taluni, e la troppo vivace accoglienza ai più recenti progressi della scienza di altri: le decisioni finali dovrebbero essere devolute a insegnanti, i quali dovrebbero essere liberamente interpellati; sarebbe quindi opportuno l'intervento di insegnanti dell'Università, onde stabilire il maggior contatto possibile fra l'indagine scientifica e la esigenza scolastica; infine l'incarico della funzione di questa suprema Corte d'appello dovrebbe essere affidato ad autorità autonoma, piuttosto che al presidente della società, ad imitazione per es. della Deputazione scientifica per la classe dei medici. Sorge a parlar contro il progetto il Presidente *Schotten* dichiarando che egli non vorrà mai seppellire la libertà d'insegnamento; parla contro anche il prof. *Thaer*, asserendo non doversi procurare altre autorità, oltre quelle che ci sono; gli insegnanti dover esser contenti anzi che deplorare che vi siano delle lacune nei programmi scolastici, e quanto alla tanto invocata unità nello svolgimento dei programmi, tutto il malanno ridursi a pochi scolari che emigrano da un luogo all'altro; dello stesso avviso è il prof. *Schwalbe*, il quale dice desiderare egli un Comitato centrale istruttivo, non già autoritativo; ecc.

La riunione dei soci respinge quindi la proposta *Schülde-Pietzker* quale esorbitante; e si dichiara invece propensa ad accettare una soluzione somiglievole ad una proposta già fatta in altra sede, della istituzione di un centro di informazioni circa i mezzi per l'insegnamento delle scienze fisico-chimiche).

In seguito a ciò la riunione dei soci si suddivide in due sezioni: la matematico-fisica e la chimico-storia naturale.

Nella prima sottosezione parlò il prof. *Wehner: Sul volume dei corpi e il teorema di Cavalieri*; indi il prof. *Weise: Sulle dimensioni nella Fisica*. E nella seconda il prof. *Lohrmann: Sulla divisione del materiale d'insegnamento in riguardo all'Antropologia*; e il prof. *Löwenhardt: Sulla necessità di opportuni compiti nell'insegnamento della Chimica*.

A suo luogo il prof. *Hoffmann* prese la parola per commemorare, come matematico e come insegnante, il compianto prof. *Bardey*. In fine il prof. *Scotten* lesse un lavoretto dal titolo: *Il processo combinatorio della Matematica*, accennando all'utilità di esso, applicato che sia, a talune questioni geometriche.

P. G.

Formulaire de Mathématiques pubblicato dalla *Revue de Mathématiques* (Rivista di Matematica) diretta da G. Peano. — Tomo I (1895). Tomo II, n. 1 (1897). Tomo II, n. 2 (1898).

Nel tomo I di questo formulario fu pubblicato, sotto la direzione del prof. G. Peano e col contributo dell'opera di più studiosi, una raccolta di formule, espresse in simboli di logica, sui seguenti argomenti: I Logica matematica. II Operazioni algebriche. III Aritmetica. IV Teoria delle grandezze. V Classi di numeri. VI Teoria dei gruppi. VII Limiti. VIII Serie. IX Contributo alla teoria dei numeri algebrici. Questa prima raccolta, sebbene assai ricca, venne completandosi ancora per la collaborazione di vari professori, tantochè, due anni dopo che il primo volume era uscito alla luce, si potè pubblicare il principio del tomo II, il quale rappresenta la seconda edizione del primo, coi miglioramenti e le aggiunte che mano mano si vanno facendo.

Il tomo II, n. 1 contiene le definizioni e l'analisi dei concetti e dei simboli logici di classe, di deduzione, di uguaglianza, di somma e prodotto logici, di negazione, di assurdo, di esistenza, di funzione ecc., colle relative formule logiche. Il tomo II, n. 2 contiene l'Aritmetica dei numeri interi e fratti, positivi e negativi.

Le formule sono espresse completamente in simboli di logica: tuttavia alcune appendici in linguaggio ordinario (non strettamente indispensabili) dilucidano certe formule o ne mettono in vista l'ufficio e l'importanza. Preziose indicazioni storiche e bibliografiche completano il lavoro.

The Mathematical Gazette. Il n. 14 (giugno 1898) contiene: *H. B. Billups.* Sul legame che corre fra il circolo inscritto e quello circoscritto ad un triangolo. (Passaggio da proprietà relative al primo a quelle relative all'altro col cambiamento degli angoli A, B, C e dei lati a, b, c rispettivamente in $-$ A, $\pi -$ B, $\pi -$ C, a, $- b$, $- c$. La dimostrazione della legittimità di questo passaggio poggia peraltro su considerazioni geometriche non sufficientemente rigorose, contenendo un passaggio per l'infinito). — *R. F. Muirhead.* Nota sulla dinamica elementare: il moto relativo (modo di presentare la questione nell'insegnamento elementare della meccanica).

Contiene anche le piccole note seguenti: *Genese.* Nota ad un articolo del prof. Tanner nel n. 13. — *Tucker.* Dimostrazione dei teoremi 12, 13, 14 del IV libro d'Euclide. — *W. J. Greenstreet.* Proprietà della retta di Simson, cioè della congiungente i tre piedi delle perpendicolari condotte sui lati di un triangolo da un punto del circumcircolo. — *Id.* Criteri di divisibilità pei numeri 3, 9, 6, 15, 45, 18, 8, 125, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. — *J. Elliot.* Sulla dimostrazione generale della regola per trovare il prodotto di due espressioni algebriche. — *A. C. Dixon.* Sulla misura circolare degli angoli; (modo di definire la lunghezza dell'arco senza l'idea di limite, nel quale peraltro tale idea non è che mascherata). — *Id.* Sul grado di approssimazione della formula $\Gamma(n) = \lim_{m=\infty} m^n \frac{1 . 2 \ldots . m}{n(n+1) \ldots . (n+m)}$. — *C. E. M. Vicker.* Su alcune trasformazioni di elementi relativi ad un triangolo in certe inversioni nel piano. — Problemi e soluzioni.

Il n. 15 (ottobre 1898) contiene: *W. J. Dobbs., M. A.* Un capitolo di dinamica elementare (modo geometrico di trattare il moto uniformemente accelerato). — *E. M. Langley, M. A.* Curiosità nella divisione (Togliendola dalla " Encyclopaedia Britannica „ del 1797, espone una regola per la divisione di un numero intero per un divisore composto di n cifre uguali a 9. Il metodo si estende alle divisioni per $10^n \pm 1$, $10^n \pm 2$, $10^n \pm 3$ ecc.)

Contiene anche le piccole note seguenti: Nota sull'articolo di Billups del precedente numero, nella quale si danno notizie di altri che hanno trattato la stessa questione. — *C. E. M. Vicker.* Un teorema infinitesimale applicato alle coniche; [Dà il teorema " il rapporto delle due parti in cui una corda di una conica è tagliata da una consecutiva è uguale a quello delle aree elementari che dal centro della conica proiettano gli archi elementari negli estremi delle corde „ e ne deduce che se un triangolo è circuminscritto ad una parabola e ad un'ellisse (circoscritto ad una ed inscritto nell'altra) la somma degli angoli eccentrici dei suoi vertici è costante]. — *F. S. Macaulay.* Teorema sulla geometria del triangolo, se il triangolo è circuminscritto ad una parabola e ad una conica. — *H. A. Roberts.* Corda di più rapida e di più lenta discesa da un circolo ad un altro, essendo i due circoli in uno stesso piano verticale e senza punti comuni. — *A. F. Davis.* Nota sulla parabola passante per quattro punti di uno stesso circolo. — *A. Lodge* e *F. S. Macaulay.* Luogo dei punti che vedono sotto un medesimo angolo i circoli aventi a comune una data corda. — *J. C. Palmer.* In un quadrangolo sferico gli archi che uniscono i punti medi delle tre coppie di lati opposti sono concorrenti - Problemi e soluzioni - Recensione della 2ª edizione degli *Elementi di Geometria di Lazzeri e Bassani.*

Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. Vol. XVI. Session 1897-98. — Tale volume contiene: *Gibson.* La trattazione delle progressioni aritmetiche in Archimede: in cui si pone in rilievo l'uso che ha fatto nelle sue opere Archimede delle progressioni, riferendosi a grandezze geometriche. — *E. M. Lémeray.* Il quarto algoritmo naturale; (studio del simbolo $p = \overset{b}{\underset{a}{\cdot}}\Big|^{q}$ che rappresenta $p = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a^q}}}}}$ dove gli a sono in numero di b, e delle nuove funzioni che ne risultano, ossia la superpotenza, cioè p considerato come funzione di a, essendo b e q costanti, e la funzione superesponenziale cioè p considerato come funzione di b, essendo a e q costanti, e quindi le reciproche, la subradice b^{ma} di p, cioè a come funzione di p, e l'iperlogaritmo di p in base a, ossia b come funzione di p: applicazione alla risoluzione di equazioni come $x = a^x$, $x^x = a$ ecc.) — *H. S. Carslaw, M. A.* Nota sulla trasformazione delle equazioni della dinamica. — *John Jack.* Nuova dimostrazione delle formule per i triangoli sferici rettangoli. — *Id.* Nota sulla regola di Napier: per dimostrare e ritenere con una facile tabella le formule di Napier sui triangoli sferici. — *Laurence Crawford, M. A.* La trisezione di un angolo dato; che l'A. dà ricorrendo al problema: costruire analiticamente una conica che passi per i tre punti i quali risolvono la trisezione di un arco α, cioè dei tre punti che staccano ciascuno una terza parte rispettiv. dai tre archi contermini α, $\alpha + 2\pi$, $\alpha + 4\pi$ che cominciano nello stesso punto; l'ordinaria costruzione coll'iperbole equilatera ed altre pur semplici risultano come caso particolare. — *G. E. Crawford, M. A.* Il centro di gravità di un arco circolare (soluzione geometrica con considerazioni meccaniche). — *R. Guimaraes.* Su un problema geometrico (risoluzione del problema: condurre un circolo che tocchi un circolo dato e passi per due punti dati, usando il teorema di Stewart). — Altra soluzione dello stesso problema indicata da *Muirhead.* — *John Dougall, M. A.* Nota sul centro di gravità di un arco circolare (costruzione di detto centro). — *P. H. Schoute.* Estensione della nozione di superficie di onda allo spazio ad n dimensioni. — *Laurence Crawford, M. A., B. Sc.* Sulle seconde soluzioni dell'equazione di Lamé $\dfrac{d^2U}{du^2} = U\left\{n(n+1)pu + B\right\}$. — *A. Ritchie Scott, B. Sc.* Sull'illuminazione prodotta da un sole di grandezza non trascurabile. — *Hugh Mitchell.* Le soluzioni singolari di una certa equazione differenziale dal 2° ordine. — *R. F. Muirhead, M. A., B. Sc.* Dimostrazione di formule elementari sulle permutazioni. — *Id.* Su un seguito di trasformazioni: continuazione di un articolo su un metodo per studiare gli spostamenti, che si trova nel precedente volume. — *Sita noth Chokrobarthy.* Metodo di estrazione di radice [estensione di quello noto per la radice quadrata, fondato sullo sviluppo della potenza dal binomio: (estratto da una "Teoria familiare del teorema del binomio"]. — *J. W. Butters, M. A., B. Sc.* Note elementari. I. Sulla scomposizione in fattori di una funzione di n variabili, e ciò quando è di 2° grado, ordinando rispetto ad una delle variabili e basandosi sulla scomposizione, da ottenersi in ugual modo, della funzione che costituisce il terzo termine, e che è con una variabile di meno. II. Sull'uso della parola *prolungato;* inesattezze a cui può dar luogo nei teoremi. — *John Dougall, M. A.* Metodo generale per risolvere le equazioni dell'elasticità. — *Gibson.* Il modo di trattare le proporzioni nella geometria elementare: (nel quale l'A. esamina il modo in uso nei più dei trattati inglesi, di definire le proporzioni come Euclide, e dimostrarne le proprietà come se fossero uguaglianze di rapporti numerici, senza aver provato di ciò la legittimità in generale, la quale non emerge, a rigore, che alla fine della trattazione delle proporzioni: e ritiene necessario nell'insegnamento di svolgere prima la teoria del numero irrazionale, e trattare poi le proporzioni, per definizione, come uguaglianze di quozienti di misure).

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, volume XXXIII, fasc. 3-15. — *Delitala.* Contributo allo studio del prob. di Pothenot. — *Bettazzi R.* Sulle serie a termini positivi le cui parti rappresentano un continuo. — *Volterra V.* Sopra una classe di equazioni dinamiche. Memorie 2. — *Fano G.* I gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio. — *Peano G.* Analisi della teoria dei vettori. — *Vailati G.* Le speculazioni di Giovanni Benedetti sul moto dei gravi. — *Berzolari L.* Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque. — *Chini M.* Sull'equazione differenziale del 2° ordine lineare omogenea. — *Niccoletti O.* Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie. — *Cazzaniga E.* Funzioni olomorfe nel campo ellittico. — *Jadanza M.*

Alcune osservazioni sul calcolo dell'errore medio di un angolo nel metodo delle combinazioni binarie. — *Levi Civita T.* Sulla integrazione dell'equazione $\Delta_2\Delta_2\, u = 0$. — *Niccoletti O.* Sulla teoria delle trasformazioni delle equazioni a derivate parziali con due variabili indipendenti. — *Lauricella G.* Sulla propagazione del calore. — *Cazzaniga T.* Sulle funzioni olomorfe e meromorfe nel campo razionale e nel campo ellittico. — *Severini C.* Sulla rappresentazione analitica delle funzioni reali discontinue di variabili reali.

Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Nuova Serie, vol. II, fasc. 2. — *Pincherle S.* Sul concetto di piano in uno spazio ad infinite dimensioni. — *Id.* Sul confronto delle singolarità analitiche. — *Saporetti A.* Analisi di casi singolari geometrici colle relative algebriche forme.

Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna, serie V, tomo VII, fasc. I. — *Donati L.* Appunti di analisi vettoriale.

Memorie della Società italiana delle Scienze, serie III, tomo IX. — *Bianchi L.* Sugli spazi a 3 dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti.

Memorie della Ponteficia Accademia dei nuovi Lincei, vol. XIV. — *Saure A.* Nuovo metodo per costruire la tangente ed i centri di curvatura delle curve piane. — *Papin Th.* Soluzione dell'equazione $x^4 - 8x^2y^2 + 8y^4 = z^2$. — *Valle G.* Sulla totalità dei numeri primi compresi fra due limiti dati.

Atti del R. Istituto di scienze, letture ed arti, serie VII, fasc. IX, disp. 3-8. — *Veronese.* Parole in commemorazione del prof. F. Brioschi. — *D'Arcais.* Sulla funzione di una variabile complessa.

R. Istituto lombardo di scienze e lettere, serie II, vol. XXXI, fasc. V. — *Ciani E.* Sopra una certa configurazione di punti e rette relative alla quartica piana. — *Id.* Le bitangenti della quartica piana studiate mediante le configurazioni di Kummer. — *Cazzaniga T.* Relazione fra i minori di un determinante di Hankel. — *Severini C.* Sull'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. — *Pieri M.* Nuovo metodo di svolgere deduttivamente la geometria proiettiva. — *Severini C.* Sull'integrazione approssimata delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. — *Cazzaniga T.* Sul teorema di Weierstrass nel campo ellittico. — *Veneroni E.* Sopra certe congruenze di rette e sopra alcune proprietà dei fasci di un complesso generale di 3° grado.

Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche, (Sezione della Società reale di Napoli), serie III, vol. IV, anno XXXVII, fasc. 3-9. — *Amodeo.* La prima data dell'Accademia reale di Napoli. — *Pietrocola C.* Cinematica di un punto assoggettato a giacere sopra due curve piane rigide e mobili nel loro piano comune. — *Id.* Sull'uso dell'algoritmo isobarico nella risoluzione delle serie ricorrenti. — *Gallucci G.* Sui tetraedri inscritti in una cubica gobba. — *Capelli A.* Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche. — *Brambilla A.* Estensione di una proprietà della superficie di Steiner. — *Id.* I poligoni principali di una quartica gobba dotata di punto doppio.

Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali di Catania, anno LXXIV, (1899), serie IV, vol. IX-XI. — *Saija O.* Rappresentazione equivalente naturale di una superficie di rivoluzione (generalizzazione delle proiezioni di Werner, Bonne e Sanson Flamsteed). — *Carrone C.* Le trasformazioni birazionali fra due spazi ad n dimensioni, con particolare considerazione al caso di $n = 4$.

Annali di matematica pura ed applicata già diretti da *F. Brioschi*, e continuati da *E. Beltrami, L. Cremona, U. Dini, L. Jung.* Serie III, tomo I, fasc. 2°, 3°, 4°.

Fasc. II. — *Dini.* Un teorema sui limiti superficiali ed infiniti dei moduli delle radici di una equazione algebrica. — *Cazzaniga.* Intorno ad un tipo di determinanti nulli d'ordine infinito. — *Timerding.* Ub. die quadratische Transformation, durch welche die Ebenen des Raumes in ein System von Flächen zweiter Ordnung mit gemeinsamen Poltetraeder übergeführt werden. — *Bagnera.* La composizione dei gruppi finiti il cui grado è la quinta potenza di un numero primo.

Fasc. III. — *Bagnera*. La composizione ecc. (v. fasc. 2°), parte II. — *Medolaghi*. Classificazione delle equazioni a derivate parziali del 2° ordine, che ammettono un gruppo infinito di trasformazioni puntuali.

Fasc. IV. — *Krause*. Über Systeme von Differentialgleichungen, deren die vierfach periodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten. — *Tedone*. Su di un sistema generale di equazioni che si può integrare col metodo delle caratteristiche. — *Montesano*. Una estensione del problema della proiettività a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

Il fasc. III-IV contiene: *Viterbi*. Sulla continuazione analitica delle funzioni omogenee uniformi rappresentate col metodo del Mittag-Leffler (continuazione e fine). — *Burali-Forti*. Sopra alcune questioni di geometria differenziale. — *Von Weber*. Sulle trasformazioni infinitesime che lasciano invariata un'equazione pfaffiana. — *Lo Monaco-Aprile*. Sopra una curva gobba luogo di certi punti parabolici di una rete di superficie, generale, dell'ordine *n*. — *De Franchis*. Sulla riduzione degli integrali estesi a varietà. — *Medolaghi*. Sui gruppi isomorfi al gruppo di tutte le trasformazioni in una variabile (memoria 1ª). — *Burgatti*. Sui metodi d'integrazione per le equazioni differenziali con due variabili indipendenti.

Il fasc. V contiene: *Burgatti*. Sui metodi d'integrazione per le equazioni differenziali con due variabili indipendenti (continuazione e fine). — *Enriques*. Sull'ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate in una varietà a più dimensioni. — *Cordone*. Sopra un problema fondamentale della teoria delle frazioni continue algebriche generalizzate. — *Berzolari*. Sulle spinte formate con potenze di una forma binaria quadratica. — *Bucca*. Sopra certi integrali e certi sviluppi in serie. — *Giudice*. Introduzione alle coordinate triangolari e tetraedriche.

Il fasc. VI contiene: *Giudice*. Introduzione ecc. (cont. e fine). — Estratti dai verbali. — *Puglisi*. Sul movimento di un punto pesante sopra una superficie di induzione. — *Perna*. L'immaginario i ed i numeri alternati i, j, k nello studio delle deformazioni infinitesime delle curve piane e delle curve storte. — *Gordan*. Auszug aus einem Schreiber an Herrn L. Berzolari.

Il Pitagora, pubblicato dal prof. *G. Fazzari*. — Il num. 5 dell'anno IV contiene: *Gambioli*. A proposito della dimostrazione del teorema di De Zolt sulla equivalenza, data dal prof. G. Veronese. — *Gallucci*. Le proprietà classiche del triangolo (continuazione v. n. 4). — Le matematiche nel IV secolo av. G. C. — *Palatini*. Una lezione sulla teoria della similitudine (continuazione e fine). — *A. Crepas*. Note sul pentagono regolare. — Questioni proposte. — Risposte.

Il num. 5 contiene: — Temi per concorso. — *Gallucci*. Le proprietà classiche del triangolo (continuazione e fine). — *Ciamberlini*. Errori ed inesattezze comuni. — Risposte e questioni. — Giuoco. — Circonferenza, cerchio e circolo; opinioni sull'uso di queste parole. — Questioni e paradossi.

Il num. 1 del 2° semestre (anno IV) contiene: — *Nannei*. Le geometrografia di Lemoine, o l'arte delle costruzioni geometriche (continua). — Sfera, globo; proposta di usare il secondo nome per il solido della sfera. — *Riboni*. Sui logaritmi (continua). — Le matematiche nel V secolo av. G. C. — Risposte a questioni. — Questioni proposte. — Varietà.

Il num. 2-3 del 2° semestre contiene: — *Nannei*. La geometrografia ecc. (continuazione v. n. 1). — *Ciamberlini*. Una certa corrispondenza fra alcune proprietà dei quadrangoli particolari. — Questioni a concorso. — *Gambioli*. Alcuni teoremi riguardanti la divisione dei polinomi interi e razionali. — Paradosso. — La matematica nel V secolo av. G. C. — *Riboni*. Sui logaritmi (continuazione e fine). — Giuoco. — *Testi*. A proposito di un noto teorema di algebra elementare: cioè la divisibilità per $x - a$. — Questioni proposte ed esercizi. — Risposte.

Il num. 4 del 2° semestre contiene: *Nannei*. La geometrografia ecc. (continuazione v. n. 2-3). — Notizie sul congresso di Mathesis. — Giuoco. — *Riboni*. Sulla ricerca del baricentro in alcune figure piane e solide. — Quistioni. — Risposte. — Varietà.

Il num. 5 del 2° semestre contiene: *Nannei*. La geometrografia ecc. (continuazione v. n. 4). — *Ciamberlini*. Esercizi diversi di calcolo accelerato. — *Gambioli*. Un importante teorema sui limiti. — La matematica nel V secolo av. C. — Sulla divisibilità. — Questioni proposte. — Esercizio sulle " Proprietà classiche del triangolo „.

R. B.

Nouvelles Annales de math. T. XVII, 1898, (Paris, Gauthier-Villars et Fils).

Fasc. X (ottobre). *E Lacour*, Sulla superficie di Steiner (dim. di alcune fra le più semplici e note proprietà della superficie Romana, in coordinate cartesiane). *L. Ripert*. Sull'applicazione del principio di dualità ai teoremi di geometria piana. — Certificati di studj superiori; sessione di luglio 1898, (Paris, Marseille). — Soluzioni di questioni, 1673 (*Lez*), 1697, 1699 e 1703 (*Droz-Farny*). — Quistioni proposte 1808-1811.

Fasc. XI (novembre). Primo concorso delle " N. A. „ pel 1899. — *X. Antomari*. Sopra un caso particolare della trasformazione omografica (studio elementare della involuzione gobba, a direttrici reali, e della collineazione gobba). — *E. Lacour*. Riduzione alla forma canonica delle formule che dànno le coordinate d'un punto della superficie di Steiner, in funzione razionale di due parametri (esposizione elementare, ed omessi i casi singolari, della soluzione data da Clebsch, nel t. 67 del G. di Crelle, pel problema indicato). — *M. Dumont*. Sopra una delle forme canoniche dell'equazione delle superficie cubiche. — *E. Bally*. Valutazione geometrica dell'ordine della superficie rigata definita da tre direttrici di ordini m, n, p, (se le tre direttrici di una superficie rigata sono respett. di ordine m, n, p, *e non hanno fra di loro punti comuni*, il grado della superficie è $2\,mnp$). (*) — *M. Ferber*. L'integrazione mediante la iterazione e il calcolo delle funzioni iterative [due importanti osservazioni sulla operazione $f(f(f\ldots.f(x))\ldots.) = f^n(x)$]. — Certificati di studj superiori, Sessione di luglio 1898; (Lille, Grenoble). — *Ph. du Plessis*. Risoluzione della quistione posta pel concorso d'ammissione alla Scuola Politecnica di Parigi nel 1898. — Concorso d'ammissione alla S. C. delle Arti e manif. nel 1898.

Mathesis, recueil math. à l'usage des écoles speciales etc, par MM. *L. Mansion* et *J. Neuberg* (Gand, Ad. Hoste, ed.) T. VIII$_2$. 1898.

Fasc. IX (ottobre). *De Tilly*. Simple remarque sur le triangle (nota di metageometria). — *L. Ripert*. Sulla sfera e le quadriche dei 12 punti del tetraedro generale. — *E. N. Barisien*. Esercizi (continuaz. e fine). — *V. Jerabek*. Sopra una cubica circolare (propr. di una concoide slusiana particolare) - Bibliografia. — Soluzioni di quistioni, 971 (*Servais*), 1860 (*Buysens*), 1131 (*Audibert*), 1158 (*Barisien. Lez, Morin, Deprez* e *Soons*). — Quistioni di esame (fra le quali una estr. dal " Supplemento al Periodico di Matematica) „ 857-859. — Quistioni proposte 1189-1192.

Fasc. X (novembre). Necrologia del Prof. J. N. Mister; *J. Wasteeles*. Sui poliedri regolari (propr. elementari di poliedri regolari correlativi). — *F. Mariantoni*. Sulle potenze dei numeri interi [corollari del teorema d'Eulero, $a^{T(p)} \equiv 1 \pmod k$]. — *G. de Rocquigny*. Quistioni di Aritmologia (propr. dei numeri triangolari ecc.) — *A. Boutin*. Somma di una serie (somma di $\Sigma \frac{u_n x^n}{n!}$, quando Σu_n è ricorrente). — Note matematiche (dualizzazione delle propr. della parabola, del sig. *Ripert*). — Soluzioni di quistioni: 789 (*Deprez*); 944 (*Droz-Farny* e *Jonesco*); 1064 (*Colart*); 1132 (*Cristesco* e *Droz-Farny*); 1115 (*Deprez*). — Quistioni d'esame, 960-803. — Quistioni proposte, 1193-1196.

V. R.

(*) La dimostrazione sintetica classica di questo teorema (del Cayley) mi pare preferibile (v. ex. gr. Salmon-Fiedler, *G. des Raumes*, § 232; Wiener, *Lehrbuch d. D. Geom.* Bd. II, § 388 e Sturm, *Liniengeometrie* Bd. I, § 8.

(V. R.)

ERRATA-CORRIGE.

Anno XIII, p. 226 linee 21 e 24; dopo la parola *Kreuzcurve* si aggiunga *circolare*.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 14 Gennaio 1899.

LA MATEMATICA E I FENOMENI NATURALI [1]

Lettera aperta del Prof. Enrico De Amicis all'Autore

Chiar.mo Signor Comm. e Provveditore Stimatissimo,

Soltanto oggi mi riesce trovar tempo sufficiente per poter sodisfare alla meglio al mio desiderio di trattenermi in conversazione con Lei intorno al Suo *Discorso I,* che intanto è stato da me prima scorso, poi letto e finalmente postillato, e che mi ha destato non poca brama di poter presto conoscere gli altri sei che gli dovranno far seguito.

La prego però anzitutto di volere accettare benevolmente, quantunque Le giungano con tanto ritardo, i miei vivissimi ringraziamenti e pel dono Suo graditissimo e per la lettera gentilissima che lo accompagnava, e che sarà da me serbata *fra le cose a me più care,* e più che altro poi per la buona memoria e stima che Ella conserva di me.

Sarebbe certamente per me un onore non piccolo essere giudice del Suo nuovo lavoro, che fino dalla prima delle sette parti che lo comporranno si presenta pieno di originali e profondi e utili concetti, esposti sotto splendida forma, classica sempre, talvolta opportunamente battagliera e spesso argutamente briosa. Ma conscio della pochezza mia e pensato alla quasi totale mia incompetenza nel giudicare la parte filosofica (ed è forse quella preponderante) di cotesti Suoi *Discorsi,* attenderò che il merito dei medesimi venga incontrastabilmente affermato da qualche recensore legittimamente autorevole, il quale, cioè, occupi nell' insegnamento superiore una posizione eminente, piuttosto che da un meschino recensore pari mio, semplice membro dell'*insegnamento secondario,* non solo, ma *tecnico* per giunta.

Per intanto, certo come sono che Ella mi dà facoltà di dirle liberamente l'animo mio, pur stando a quello che si può desumere dalla lettura del solo primo *Discorso,* ritengo che l'intero suo lavoro sarà applaudito, e di buona lena, da una parte dei lettori, e forse tacitamente malmenato dall'altra. Staranno dalla prima parte tutti

---

[1] *Discorsi* di ANTON MARIA BUSTELLI. Discorso I: I fenomeni naturali e le rappresentazioni matematiche. Milano, Trevisini, 1898. Un vol. in-8 di pag. VI-60.

coloro ai quali sta a cuore che, specialmente nel comune insegnamento, la matematica discenda dalle nuvole e dagli *iperspazî*, dia come in passato fraterna mano e valido aiuto alle scienze affini (cosicchè si possano ricavarne ancora nuove e sempre più utili applicazioni pratiche), si addimostri insomma anzitutto, qual'è, scienza umana e feconda e non già sterile fantasia da superuomini. [1] Staranno dall'altra parte coloro che non vorranno intenderla, e segnatamente, non occorre dirlo, i *matematici puri* (cfr. Sua pag. 10) o *intransigenti* che dir si vogliano. Taluno di questi, p. es., se avesse a pronunciarsi intorno ai Suoi *Discorsi*, su per giù direbbe così: " Sono *logomachie metafisiche* e perciò **la scienza matematica** non può occuparsene ". E vi potrà pure essere qualche rigido censore che della fine eleganza del Suo stile, non sapendo egli stesso raggiungerla e gustarla, Le farà fors'anche un addebito, cavillosamente argomentando dal fatto che nei libri scientifici d'oggi giorno (pur troppo!) essa più non costuma; così, sott'altra forma, egli rinnoverà la favola di Esopo *Vulpes et uva*, ed Ella non avrà al certo a dolersene.

Venendo a' particolari, Le dirò che approvo assai l'introduzione da Lei fatta del concetto, nuovo, di *addensazione* (il neologismo è appropriato e perciò giustificatissimo), la quale naturalmente è rispetto alla densità ciò che la accelerazione è rispetto alla velocità (o celerità, com' Ella ben dice); si tratta insomma, in entrambi i casi, di una derivata seconda; e forse la cosa può essere estesa ad altri casi molto diversi: p. es.: quando un corpo si riscalda, non si può forze parlare di propagazione di calore e *accalorazione*, e, quando un corpo si tinge, di propagazione di colore e *incolorazione*, ecc.? Leggerò adunque con particolare piacere il *Discorso IV*, nel quale, appunto, Ella parlerà dell'addensazione.

Condivido pienamente il Suo parere (pag. 4) che la propedeutica matematica (per la Scuola secondaria inferiore) debba essere esposta con prevalenza del metodo induttivo, e che la matematica razionale (per la Scuola secondaria superiore) debba invece essere trattata con prevalenza del metodo deduttivo.

Approvo pure intieramente quanto Ella dice nell'articolo 13. Ella ha pienamente ragione: non si può esser molto matematici se non si è un poco filosofi. Eppure vi sono pur troppo molti insegnanti di

---

[1] A scanso di ogni possibile equivoco mi piace dichiarare esplicitamente, mentre rivedo le bozze di questo scritto, che con questo periodo non ho inteso in alcun modo fare allusioni meno che riguardose verso gli illustri cultori della *Geometria ad n dimensioni*, la quale anzi, come ebbi a dire in un precedente mio scritto, riprodotto su questo *Periodico*, io considero come una gloria della Scuola matematica italiana: e solamente ho voluto far presente, insieme con l'A., la necessità che non sia troppo trascurata nell'insegnamento della matematica, segnatamente in ogni ordine di scuole medie, la parte applicativa; e che effettivamente tal parte, pure utilissima, sia talvolta dimenticata in alcune di queste scuole lo ha detto recentemente anche il Chiarissimo Prof. G. Bardelli: " *della matematica ... i licei ricevono quel tanto di cognizioni che varrano ad allontanarli anzichè avvicinarli alle applicazioni, che saranno adatte ad avviarli ai campi della geometria immaginaria o degli iperspazî, ma che non li pongono in grado di eseguire con qualche sicurezza e famigliarità, non dirò calcolazioni algebriche, ma quelle della ordinaria aritmetica (expertus loquor)* ". (V. *La Scuola Secondaria Italiana*. Milano, 28 gennaio 1899, pag. 262).

matematica, specialmente fra i più giovani, che non solamente si vergognerebbero di entrare in una disputa filosofica, ma che, senza altro, fra i concetti *geometrici* e *numerici*, riprovano e respingono come *non matematici* tutti quelli che troppo visibilmente palesano alcunchè di *filosofico* o *metafisico:* essi al certo non pensano che ciò che questi palesano, gli altri nascondono. [1]

Per attico sale gustosissimo, quantunque di sapore forse soverchiamente personale (v. p. es., Egregio Signor Commendatore, quel *voluminoso*), è la chiusa del quarto paragrafo.

Sono pure d'accordo con Lei, e lo saranno molti, in tutto il paragrafo sesto; segnatamente mi piace l'ultimo periodo della chiusa (pag. 20).

Molto a proposito è l'obbiezione alla tradizionale definizione di grandezza, per cui una grandezza costante (fissa, immutabile) non sarebbe una grandezza, dappoichè, per dato, non sarebbe suscettibile nè di aumento, nè di diminuzione. Fu già fatta dal Burali, [2] ma *repetita juvant*. E altretanto dico per la petizione di principio che Ella fa notare nella definizione medesima e che, sott'altra forma, rilevò pure il Burali dicendo giustamente " io non riesco a farmi un' idea dell'attitudine che può avere una cosa ad aumentare o diminuire, se non ho già della cosa stessa un' idea „.

Poichè ho citato, ed a cagion d'onore, il Burali, nostro valorosissimo collega nell'*Associazione Mathesis*, mi permetta di aprire qui una parentesi, sempre sull'argomento delle definizioni di grandezza. Il Burali, [3] *esaminando alcune parti di un libro di " Aritmetica razionale „... pubblicato da pochi mesi*, senza nominarne l'autore (sorta di anonimia inversa, non migliore della diretta), osserva che la *definizione di grandezza* (?) " *Tutto ciò che si può misurare si chiama grandezza* „ *permette di annoverare, ad es., la diagonale del decametro quadrato fra le grandezze quando la si misuri con la diagonale del metro quadrato, ma non quando la si misuri col metro.* Tale osservazione non ha maggior valore, p. es., di questa: **A** *è padre di* **B**, *ma non di* **C**; *dunque la definizione di genitore* (?) " *Ogni padre si chiama genitore* „ *permette di annoverare* **A** *fra i genitori quando lo si confronti con* **B**, *ma non quando lo si confronti con* **C**. Ed è poi da notare che per poter

---

(1) Il Chiarissimo Dott. G. Vailati, nella sua *Prolusione al Corso libero di Storia della Meccanica*, letta il 21 dicembre 1898 nell' Università di Torino, espone molteplici influenze la cui azione egli giustamente si augura che *valga col tempo a modificare, almeno in parte, l'attitudine di disprezzo e di indifferenza che da noi la maggior parte degli uomini di scienza assume verso gli studi filosofici, nei quali essi non vedono che una collezione di infeconde e vane logomachie* (" *Alcune osservazioni sulle Questioni di parole* „, Torino, 1899, pag. 39).

(2) *Note scientifiche e critiche alle Lezioni di Aritmetica pratica*, Torino, 1897. Peraltro a voler essere scrupolosamente esatti l'obiezione riguarda precisamente la " definizione della *grandezza*, in generale, per *ciò ch' è suscettibile di aumento e diminuzione* „ come per l'appunto Ella dice: infatti, dicendo p. es. insieme con Eulero (*Éléments d'Algèbre, traduits de l'allemand par M. Bernoulli, avec des additions par M. De La Grange*, Lyon, 1774, pag. 1) " *On nomme* **grandeur** *ou* **quantité** *tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution*, „ non si esclude, mi sembra (poichè *tout* non è *seulement*) che si possa *denominare* **grandezza** anche qualche altra cosa che non abbia tale suscettibilità, p. es. *l'energia costante dell'universo* (la quale, com'è noto e come bene osserva il Burali, *può ritenersi costante*).

(3) *Sulla questione III* proposta dalla *Mathesis* nel Congresso pedagogico di Torino: *I libri di testo dal punto di vista scientifico e didattico. Errori che vi dominano; mezzi perchè si limiti, per quanto si può, il danno che tali errori arrecano alla scuola.* Arezzo, 1898.

fare quell'osservazione il Burali è costretto a far tutt'uno del *misurabile* col *commensurabile;* e per giustificare tale interpretazione ristretta del vocabolo *misurare* egli riporta le seguenti parole, che l'innominato autore ha fatto precedere alla criticata definizione (?) " Quando si contano le cose costituenti un gruppo o un tutto, si trova *quanto è grande* la collezione o il tutto, cioè se ne trova il *valore* o la *misura* „ e le commenta così: " Come si conta una lunghezza (un tutto credo)? L'Autore in una precedente osservazione pare voglia dire si conta col metro o con una delle sue parti. E sia pure: contiamo col metro la diagonale del metro quadrato! Impossibile, sebbene l'Autore faccia, *molto dopo,* distinzione tra *misura pratica* (che dà sempre un razionale) e *misura teorica* (che può dar luogo ad un irrazionale) „. Senonchè le strane locuzioni *contare* **un tutto,** *contare* **col** *metro o* **con** *una delle sue parti* sono del Burali, e non già dell'A., il quale invece nel brano riportato parla di *contare* **le cose costituenti un tutto,** (1) e nell'osservazione a cui allude il Burali (e che precede *immediatamente* il brano medesimo) parla di *contare metri, decimetri,* ecc. (contenuti in un tratto rettilineo), cosa questa possibilissima anche per la diagonale del metro quadrato, nella quale successivamente e precisamente si contano *metri 1, decimetri 4, centimetri 1, millimetri 4, decimillimetri 2,* ecc. (2) Nè della distinzione, opportunissima, fra *misura pratica* e *misura teorica* si può dire che è data *molto dopo,* dal momento che l'Autore, avvolto nell'ombra del mistero dal Prof. Burali, comincia a parlarne nella *terza* pagina (e termina nella sesta) dopo la definizione (?) incriminata, e nelle *due* pagine intermedie continua sempre a trattare di grandezza e misura. (3) Ma prosegue il Burali: *sono note numerose osservazioni che avrebbero dovuto condurre l'Autore a non dare della grandezza una definizione* (?), *che, per quanto nuova, almeno credo, non è meno imperfetta delle tante che si trovano nei comuni trattati.* Perchè tale defini-

---

(1) Come si vede, trattasi semplicemente di un *qui pro quo* grammaticale, al quale veramente si presta il brano riportato, ove però è certo che il passivo *si contano* ha un unico soggetto " *le cose costituenti un gruppo o un tutto* „, e l'attivo *costituenti* ha due oggetti " *un gruppo* „ e " *un tutto,* „ mentre invece nell'interpretazione del Burali si suppone che il *costituenti* abbia un solo oggetto " *un gruppo* „, e il *si contano* due soggetti " *le cose costituenti un gruppo* „ e " *un tutto* „. Il *si contano* è passivo perchè (dicendosi, qui, appunto *si contano* e non *si conta*) non si può credere che si tratti di un *si* analogo al francese *on* e al tedesco *man,* il quale, cioè, stia per soggetto indeterminato (dell'attivo *contano*).

(2) A bello studio dico *precisamente,* perchè di $\sqrt{2}$ si ha nel sistema decimale una rappresentazione cifrale (illimitata) univocamente determinata, tale essendo la successione delle sue cifre decimali (ciascuna delle quali, a qualsiasi ordine appartenga, è sempre algoritmicamente individuabile).

(3) Del resto io non vedo che inconveniente serio vi possa essere a tenere, p. es. in un testo per le *Scuole Normali* ed in un paragrafo intitolato *Grandezza e numero,* un tal metodo di esposizione che (al pari di quello seguito dal non nominato autore) potesse indurre il futuro maestro a tenere un bel giorno, mettiamo in una *quarta elementare,* su per giù questo *discorso:* " Voi bambini, sapete già che cosa vuol dire **misurare** certe *linee;* anzi ieri Luigino, **misurando** *col metro e col decimetro, ha trovato la lunghezza* di questa canna. Ma non sapete ancora che cosa voglia dire in generale la parola **misurare:** ebbene oggi vi spiegherò pure che cosa vuol dire **misurare** certe *superficie,* e come esempio *troveremo l'area* di questo pavimento, **misurando** *col metro quadrato e col decimetro quadrato,* che qui vedete rappresentati grossolanamente da questi due cartoni (vedrete poi come potremo fare, molto più presto, anche senza questi cartoni); e domani **misureremo** anche certe altre cose; e così voi, con molti esempi ed esercizi, finirete poi per farvi una idea generale di quello che vuol dire *misurare:* però fino da ora ricordatevi che *tutte queste cose che impareremo a* **misurare** *le indicheremo col nome generico di* **grandezze,** perchè in aritmetica *tutto ciò che si può* **misurare** *si chiama* **grandezza** „. E tutto questo, se non è assolutamente scientifico, è però indubitatamente sensatissimo ed accessibile.

zione (?) sia imperfetta il BURALI non dice, ma è chiaro che chi dicesse " Si dicono *grandezze* le cose che si possono misurare, e solamente queste " intenderebbe sicuramente di *dare una definizione della grandezza,* e questa definizione sarebbe imperfetta, non solamente perchè restringerebbe il concetto generale di grandezza alle sole misurabili e quindi implicherebbe per tutte il *Postulato di Archimede,* ma piuttosto perchè *misurare* è un verbo *che presuppone sempre e sottintende* l'oggetto *grandezza,* e di nessuna operazione (e tanto meno di quella del misurare) possiamo farci una completa idea se già non l'abbiamo delle cose sulle quali quell'operazione è da farsi. (1) Ma l'Autore, che è poi il Prof. GARBIERI (ed il libro in questione è la Parte I del vol. II degli *Elementi di Matematica secondo le istruzioni e i programmi delle Scuole Normali,* Milano, 1898), ha effettivamente inteso di dare una vera e propria definizione di grandezza affermando a pag. 3 del libro medesimo " Tutto ciò che si può misurare si chiama grandezza " ? Per quanto ciò possa apparire da una frase (2) di una nota, appiedata tre pagine dopo (ed ivi letteralmente riportata dalla 3a edizione del *Trattato di Aritmetica razionale* (3) del medesimo Autore), nonchè da un altro libro (4) dell'Autore (ove si trovano quelle stesse parole precedute appunto dall'abbreviazione **Def.**), a me non sembra tuttavia che si possa esser certi che l'Autore *in quella parte del suo libro esaminata dal* BURALI abbia veramente inteso di definire le grandezze mediante la predetta affermazione (*ivi* non contrassegnata da verun **Def.**). Nè, p. es., si è voluto definirle scrivendo nel primo articolo di un capitolo intitolato **Grandezze** (5) " Si suol dire comunemente che le *lunghezze,* le *aree,* i *volumi,* i *pesi,*... (6) sono **grandezze** o **quantità** "; nè parimenti, in quello stesso articolo, si è voluto definire l'omogeneità delle grandezze scrivendo " Due o più lunghezze diconsi della **stessa specie,** o **omogenee,** quando sono tutte delle *lunghezze,* o tutte delle *aree,*.... " (7) E pertanto, concludendo, mi sembra che neppure le parole della pagina 3 del vol. II degli *Ele-*

---

(1) E perciò io non saprei nemmeno accettare la definizione che il BURALI dice essere *l'unica esatta che attualmente si conosca* (*Sulla questione III* ecc., p. 5): " Classe omogenea di grandezze è ogni classe di enti per i quali è definita l'operazione + in modo che soddisfi alle tali e tali condizioni ". Cfr. anche le precitate *Note scientifiche* ecc.

(2) " le grandezze, così come noi le abbiamo definite, sono *misurabili* ". Certamente sarebbe stato meglio dire " le grandezze, da noi considerate, sono *misurabili* ".

(3) Pubblicata nel 1894 a Padova. A pag. 110 vi è la nota in questione, e da pag. 107 la solita definizione (?), senza il **Def.** e sotto la forma " In aritmetica chiamasi **grandezza** *tutto ciò che si può misurare* ".

(4) G. GARBIERI, *Elementi di Geometria per le scuole tecniche e normali,* 3a edizione con la collaborazione di E. DE AMICIS. Torino, 1896.

(5) C. BURALI-FORTI e A. RAMORINO, *Aritmetica e norme per l'insegnamento nelle scuole elementari, ad uso della classe 2a e 3a delle scuole normali.* Torino, 1898.

(6) Io non so veramente di che cosa tengano le veci i tre puntini, ma credo di non ingannarmi pensando che stiano appunto a rappresentare *cose* tutte *misurabili,* al pari di quelle che si è voluto indicare con le parole che li precedono ed in accordo con quanto afferma il GARBIERI nel passo incriminato (nel quale peraltro non si nega che vi possano essere anche altre cose, oltre le misurabili, denominabili grandezze).

(7) E bisognerebbe pure intendersi bene sul significato da dare a " *lunghezze, aree,*.... ", poichè, stando all'uso più comunemente accettato, tanto le *lunghezze,* che le *aree* (o parimenti i *volumi*) sarebbero precisamente *numeri,* ciò rispettivamente *i numeri che misurano* certe grandezze *lineari* o *superficiali* (o *solide*), e non avrebbero quindi alcuna eterogeneità fra loro.

menti di Matematica del Prof. Garbieri " Tutto ciò che si può misurare si chiama *grandezza* „ avrebbero dovuto essere *ivi* considerate come una *definizione di grandezza;* esse, a parer mio, vi compariscono come una semplice *nozione relativa alle grandezze.* Che poi si tratti di novità lo ignoro, so però che le stesse parole si trovano (1) anche nella 2a edizione del precitato *Trattato,* pubblicata nel 1891; ed esse mi richiamano alla mente le seguenti: " *Mathesis scientia est quantitatem* **quatenus mensurabilem** (2) *considerans. Arithmeticae et geometriae finis est* **dimetiri**. *Quantitas... cui* **mensura** *adhibetur dicitur* **magnitudo** „ (3) che si possono vedere negli *Arithmeticae, Algebrae et Geometriae principia, auctore abbate* Para Du Phanjas, *Venetiis, 1792; Prolegomena,* pag. 17, 19, 20. Chiudo la parentesi e ritorno al Suo *Discorso.*

Penso che Ella sia perfettamente nel vero quando afferma " è solo dopo aver posto più cose fisse della medesima specie che noi possiamo considerarle come gli stati di una sola e medesima cosa variabile „: e volentieri pertanto riconosco di aver fatto in sostanza io pure *(si licet parvis componere magna)* un *giuoco di parole,* analogo a quello che Ella rileva nell' Helmholtz (pag. 22), quando in un libretto scolastico (4) posi la definizione (?) " Due o più grandezze si dicono **omogenee** fra loro (o della **stessa specie**, o della **stessa classe**) quando si possono considerare come *stati di una medesima grandezza variabile* „, quantunque preceduta dall'esempio di " un pezzo di filo sottilissimo e perfettamente elastico, tirato pe' suoi capi, ora più, ora meno, ma però sempre almeno tanto che basti a fargli prendere e mantenere la forma rettilinea „, e quantunque ispirata dal titolo di una memoria del Prof. V. Mollame " Espressione del rapporto fra *due stati d'una grandezza* (o di *due grandezze omogenee*) per mezzo d'una serie „. (5)

Nelle mie postille, di contro alle Sue parole di pag. 22 " come si può pensare una relazione senza aver prima il concetto di ciascuno dei suoi termini? „ ho scritto " benissimo! „. Mi permetto anzi a questo proposito di riportare le seguenti parole che si trovano a pag. 15 di una mia noticina (6) sulla *Teoria delle relazioni* (che Le invio e che ebbe l'onore di essere citata dal Peano, dallo Schröder e da altri):

---

(1) Senza il **Def.**

(2) Cioè " *la quantità* **in quanto è misurabile.** „ il che implica che, nel concetto dello scrittore, le quantità, così come si considerano in matematica, debbano godere della proprietà di essere misurabili.

(3) Le ultime sei parole potrebbero appunto suggerire le seguenti " Ogni cosa a cui si può applicare il concetto di *misura* dicesi *grandezza* „. Mi affretto però a dichiarare che il nostro Abbate Para (francese) ha voluto dire " La quantità a cui si applica (materialmente) la *misura* dicesi *grandezza* „, cioè " Date le quantità (omogenee) A e B, se con B misuriamo A, chiameremo B *misura* e A *grandezza* „, quantunque tre pagine avanti avesse detto esplicitamente che *quantità* e *grandezza* sono sinonimi. Si potrebbe invece riserbare il nome di *quantità* appunto alle sole *grandezze misurabili;* ma, per mio conto, quest'ultime seguiterei a chiamarle così, e della parola *quantità* mi varrei nel senso accennato a pag. 49 dei precitati *Elementi di Geometria,* che è poi in accordo col senso in cui la usa il Prof. Veronese a pag. 211 dei suoi *Elementi di Geometria,* (Padova, 1897).

(4) *Elementi di Geometria* precitati (in collaborazione col Prof. Garbieri).

(5) *Periodico di Scienze Matematiche e Naturali per l' insegnamento secondario,* anno I, Roma, 1873.

(6) " Dipendenza fra alcune proprietà notevoli delle relazioni fra enti di un medesimo sistema „, *Rivista di Matematica,* Torino, 1892.

" caso per caso, a seconda delle *cose,* che potranno anche essere del tutto ideali e *che converrà definire con precisione,* converrà altrettanto precisamente definirne l'*eguaglianza* „. Ciò è in perfetto accordo colla Sua parentesi " (e questo va bene) „ che si trova a pag. 59, e colle parole Sue (di pag. 22) su riferite, nonchè coll'ottimo capoverso finale di pag. 29.

Un altro " benissimo! „ trovo in margine a pag. 24, e riguarda le parole " non giudichiamo della uguaglianza per mezzo della sostituibilità, ma all'opposto, di questa per mezzo di quella „, le quali però interpetro così: mentre la sostituibilità non ci può mai servire *di per se stessa* per concludere l'uguaglianza se prima questa non fu definita, invece l'uguaglianza (definita che sia) ci può talora servire per provare la sostituibilità. [1]

Approvo assai l'applicazione che Ella fa del vocabolo *dirittura* ad indicare il concetto contrapposto a quello di *curvatura* (pag. 30).

E, condividendo pienamente la Sua autorevole e valorosamente sostenuta opinione (da pag. 37 a pag. 44), reputo anch'io *inadatto* il numero a fornire una conveniente rappresentazione del profitto e della condotta degli alunni; e secolei mi schiero, per questa parte almeno, insieme coi *laudatores temporis acti* (pag. 38, linee 6 e 5 risalendo).

Sull'importantissima questione dell'angolo (da pag. 48 a pag. 52) non so ancora se potrò condividere la *nuova* opinione Sua, che si debba cioè far ritorno alla definizione di Euclide. Francamente però, per ora almeno, mi pare che dicendo col geometra alessandrino " l'angolo è la mutua inclinazione di due rette che si incontrano „ si venga a ripetere una inesattezza analoga a quella di chi dice che " il segmento (di retta) è la mutua distanza di due punti „. In entrambi i casi la inesattezza, secondo me, consiste nell'identificare una entità concreta con una astratta, e cioè *l'angolo* con *la inclinazione dei suoi lati, il segmento* con *la distanza dei suoi estremi.* Per me, come il segmento $\dot{A}\dot{B}$ non è la distanza lineare fra A e B, così l'angolo $\widehat{ab}$ non è la distanza angolare fra a e b. Per me, tanto *il segmento* (sia che lo si consideri come una certa parte di retta - *tratto* -, o più semplicemente come il sistema di due punti - *intervallo* -), quanto *l'angolo* (sia che lo si riguardi come una certa parte di piano, o più semplicemente come il sistema di due semirette aventi la medesima origine) sono *figure geometriche,* e perciò cose logicamente concrete e cosmologicamente reali, cioè esistenti di per sè stesse; invece la *distanza lineare* (o di traslazione), e la *distanza angolare* (o di rotazione), o, come Euclide dice, *l'inclinazione* - cataclisi - (o pendenza o meglio disinclinazione o divergenza o apertura), sono due concetti assolutamente astratti, privi di esistenza loro propria, rispettivamente inerenti

[1] Così, p. es., se a, b, c sono numeri razionali, e $a+c=b+c$, cioè se sotto questo riguardo vi è sostituibilità fra a e b, si potrà bensì dimostrare che allora fra a e b vi è pure eguaglianza, ma naturalmente bisogna aver già dato la definizione dell'eguaglianza fra i numeri razionali. All'opposto, data tale definizione, se $a=b$, si potrà *dimostrare* $a+c=b+c$, e concludere *senz'altro:* dunque sotto questo riguardo vi è sostituibilità fra a e b.

alle predette figure (ed anche ad altre: p. es. *striscia* e *strato* - per la distanza -; *diedro* - per l'inclinazione -), e perciò non sono cose cosmologicamente reali (cfr. pag. 6: secondo capoverso, segnatamente l'ultimo periodo). Io dunque, fino a prova contraria, distinguo l'angolo dall'inclinazione, il segmento dalla distanza. Sarei anzi per dire che inclinazione e distanza, poichè non sono figure, debbano essere bandite dalla Geometria, *amplissima et pulcherrima* **scientia figurarum**. Aggiungerò ancora che le frasi *il segmento è la distanza ecc., l'angolo è l'inclinazione ecc.* mi sembrano paragonabili a queste altre, indubbiamente inaccettabili, *la retta è la direzione, il piano è la giacitura.* E finalmente domanderò: si può forse parlare di *inclinazioni adiacenti* e di *distanze adiacenti?* No certamente: adunque *angolo* e *segmento* non sono rispettivamente *inclinazione* e *distanza*.

A me non pare poi (pag. 52) che agli alunni abbia a riuscire nebuloso il concetto di angolo *iperciclico* (superiore al *giro*), purchè nell'esporlo si abbia cura di far costruire da loro medesimi, come io faccio in iscuola, un modello di una parte della nota figura detta *elicoide di Riemann* (¹) (o *riemann-piano,* od *ipersfoglio,* od *elicoide piatto* che dir si voglia); cinque o sei dischi, sottili, opportunamente connessi e sovrapposti, sono sufficienti per dare chiara idea della figura considerata (*da cui si possono staccare gli angoli come i segmenti dalla retta*), **e riesce chiara ed esatta l'applicazione che vi si fa dei modi di composizione e scomposizione degli angoli.** Un filo teso, fissato al centro dell'elicoide piatto e percorrentene, per rotazione, da una data posizione iniziale, le successive spire complanari, dà, p. es., chiarissima idea ai discenti del come si possano addizionare successivamente fra loro tanti angoli quanti si vuole, giungendo via via a risultati *sempre diversi,* perchè rappresentati da angoli di cui resta fisso il lato-origine mentre il lato-termine va successivamente ad occupare sempre *nuove posizioni* (distinte da tutte le precedenti, o *per la direzione* o *per la spira*). **Considerando** *invece* **la superficie generata da una semiretta, rotante** *sempre in uno stesso piano attorno al suo punto-origine,* **non in quanto è superficie, ma in quanto è viaggio, cammino**... si fa una considerazione non conforme al vero, poichè ciò che è generato, e rigenerato da tale semiretta è sempre superficie, e non viaggio o cammino, col quale invece, e durante il quale, si genera appunto la superficie medesima: se io non erro, qui si confonde *l'atto della generazione* col *prodotto di tale atto* (la causa coll'effetto).

La breve ma efficace ed elegantissima chiusa del Suo *Discorso* (pag. 53) è poi un vero gioiello; il ravvicinamento del settemplice cappello, già maestrevolmente costruito, al corrispondente calzare,

(¹) I miei alunni, della prima classe dell'Istituto, vanno a gara nel costruire questo ed altri modelli geometrici, e se ne dilettano profittevolmente. Taluno fra essi mi ha recato, a proposito dell'elicoide di Riemann, alcuni *achenii* (frutti secchi) che presentano effettivamente l'aspetto di tale elicoide piatto (del quale essi trovano una chiara descrizione nel loro libro di testo di Geometria, che è quello del Prof. GIUDICE, 2ª edizione, Brescia, 1897).

ancora da provvedersi, è cosa mirabilmente riuscita; ed io mi permetto di fargliene ogni encomio, non servo ma sincero. E provvidamente Ella ha parlato fino da ora non solo del cappello, ma anche del calzare: così Ella ha prevenuto il maligno lettore, il quale del Suo lavoro non potrà dire che si rassomigli a quei bimbi che nel vestirsi cominciano dal cappello e si mettono per ultimo i calzari.

Passando alla *Nota,* trovo giustissime le osservazioni alla *Teoria delle grandezze* di Rodolfo Bettazzi, principiando dalla prima, riguardante appunto la sonorità del titolo (art. 1), quantunque si tratti di opera di riconosciuta importanza e di indiscutibile valore.

Fondatissima è l'obbiezione fatta nell'art. 2: anzi si può darle maggiore estensione; infatti nelle *nozioni fondamentali per la teoria generale delle operazioni,* che io, quando posso, svolgo a' miei alunni dell'Istituto, provo con facili esempi che " non sempre un *elemento implicito sinistro* (grandezza modulo) di una operazione è anche *elemento implicito destro* per la stessa operazione, e viceversa "; in altri termini, colle notazioni del Bettazzi (che però non adotto), non sempre le due uguaglianze $S(O, A) = A$, $S(A, O) = A$ sono conseguenza l'una dell'altra. E parimenti provo che " non sempre un *elemento preponderante sinistro* (grandezza infinita) è anche *elemento preponderante destro,* e viceversa "; in altri termini non sempre le due uguaglianze $S(\Omega, A) = \Omega$, $S(A, \Omega) = \Omega$ sono conseguenza l'una dell'altra. Invece di dire *elemento implicito* si può dire, per contrapposto ad *elemento preponderante, elemento indifferente* (o *insignificante*).

Giustissima pure è l'obbiezione dell'art. 3: al sostantivo *grandezze* (linea 9 risalendo, pag. 56) doveva seguire l'aggettivo *misurabili,* e, se io non erro, dovevasi poi dimostrare che " *se* A *e* B **hanno numeri uguali** (*o disuguali*), *per una data unità di misura, hanno pure numeri uguali* (*o disuguali*) *per qualunque altra unità di misura* ".

Sono pienamente con Lei, e ne sono veramente lieto, in quanto Ella dice al principio dell'art. 4. A me pure è accaduto di invogliarmi allo studio della grammatica, specialmente dacchè mi occupo dei fondamenti della matematica elementare. Aggiungerò che, solamente dopo penetrato un poco in questi fondamenti, sono andato a ricercare libri di filosofia e segnatamente di logica; e *la grammatica,* Ella lo dice benissimo, *è la logica del linguaggio;* e senza linguaggio non vi può essere scienza alcuna, e tanto meno la matematica, la quale non è se non che *una lingua ben fatta.* (Ella ricorderà le mie parole al Congresso di Torino, dello scorso Settembre, contro certe tendenze ad un eccessivo simbolismo, o graficismo, che, sistematicamente e completamente applicato anche nel nostro comune insegnamento, verrebbe a trasformare gli studiosi di matematica in altrettanti *animali muti*). Nella stessa correzione de' compiuti scolastici di matematica son persuaso che si debba tenere il massimo conto della forma grammaticale, quantunque mi consti dalla più sicura fonte possibile che un certo professore, che nella revisione degli elaborati di una recente Licenza aveva stimato indispensabili alcune osservazioni grammaticali, si ebbe questa testuale risposta: " *io non mi abbasso fino alla grammatica* ": e se non fosse stato che tale risposta era data da un esperimentato e valente insegnante, si sarebbe fors'anche potuto dubitare che quell'*abbassarsi* dovesse mutarsi nel riflessivo opposto e che si fosse da capo alla favola " *Vulpes et uva* ". Ritengo anzi che sia effettivamente prescritto che nella graduazione de' compiti scientifici si tenga pur conto del *valore letterario; ma le leggi son* con quel che segue. E pur troppo non è solamente nelle Scuole secondarie che certi insegnanti di matematica *non si* **abbassano** *fino alla grammatica;* poichè con fondamento possiamo affermare che anche fra i professori di matematica delle Università nostre, e specialmente fra i più giovani, ve ne sono alcuni che nei loro scritti dimenticano invero troppo facilmente, non diremo le naturali eleganze della nostra lingua, ma perfino le più ovvie nozioni di grammatica: sta per essi, come pel Carducci (pag. 57 e 58), la scusante " *de minimis non curat praetor* "? non credo, chè le sgrammaticature non sono licenze poetiche, nè tanto meno, matematiche.

A me pure vien fatto sovente di adoperare la parola *enti*. Dico p. es., *enti geometrici* i corpi, le superficie, le linee, i punti; *enti di un medesimo sistema* gli individui di una medesima classe; ma naturalmente ritengo con Lei che si debba evitare la stridente tautologia " *enti esistenti* " e che non sia certamente il caso di parlare di " *enti... che si sanno esistenti,* " per la buona ragione che gli *enti non esistenti* contradirebbero al principio di contraddizione.

Stupendo quel doppio-senso dell'*avere riguardo*. In verità, Egregio signor Commendatore, non si potrebbe essere più gentilmente arguti! Ed Ella ha perfettamente ragione: " O che male ci sarà a definirlo tutt'intero quell'*ente,* quando, bene inteso, si possa? " (pag. 59). Per altro l'eccessivo ritegno del Bettazzi nel definire *i suoi enti* si capisce: è questione di *reazione:* dopo l'antica smania di definire *perfino l'indefinibile,* è venuta la frenesia moderna di non definire *nemmeno il definibile;* cosa d'altronde assai comoda e conforme al monito " *in dubiis abstine,* " e, come Ella sa (pag. 17), *la prudenza e le cautele in certi casi non sono mai troppe.*

E così sarei giunto all'ultima pagina del Suo aureo libretto, e la lettera è ormai lunga e dovrei terminarla; ma Ella mi domanda eziandio delle *correzioni;* sicchè io, pur di contentarla, anderò come si suol dire a cercare il pelo nell'ovo, e vedrò di trovarne, sobbarcandomi così ad un compito disagevole e rischioso.

A pag. 3, l. 12, piuttosto che *involucro* direi *scheletro* od *ossatura:* la variazione può sembrare sostanziale, ma probabilmente è soltanto formale, dal momento che certi *scheletri* sono *dermascheletri,* cioè *involucri* (e la catafratta rivale del piè-veloce Achille lo dimostra).

A pag. 6, l. 5, dopo la parola *cosa* avrei posto in parentesi la corrispondente voce latina *res*. Così anche pei non latinisti si poneva in assoluta evidenza che l'aggettivo *reale*, derivando da *res*, aggiunto al sostantivo *cosa*, dava luogo, a stretto rigor di termini, ad una reale tautologia: pur troppo gli italiani che conoscono la loro madre-lingua diventano sempre più rari, specie fra certi matematici novelli, che, seguendo la pratica utilitaria di questa fine di secolo, si dedicano più volontieri alle sole lingue moderne.

Cinque linee dopo, invece di *coordinato*, direi *collegato*. (Cfr. precitata memorietta, pag. 2, 9, 15).

A pag. 7, risalendo linea 9 e 8: *non può essere nè sentito nè percepito, ma soltanto concepito*. Non contrasta questo coll' incontrastabile principio *nihil est in intellectu quod prius non fuerit in sensu*, e colle citazioni stesse del KANT e dell'ALIGHIERI, che Ella fa a pag. 20, e 31, e finalmente con le parole Sue medesime, pure di pag. 31, " l'ordine intellettivo *ha in noi tale dipendenza oggettiva che senza* l'ordine sensitivo *non può* **nè attuarsi**, *nè svolgersi, nè perfezionarsi* "? Ben è vero che, alla precitata pag. 20, di fronte alla riportata massima del KANT, che Ella non solo non contrasta ma dichiara di ammettere, Ella trova opportuno di affermare eziandio che " però le cognizioni umane *non tutte derivano dall'esperienza* "; ma non sempre il porre le mani avanti ci salva dall' incespicare, specie quando il sentiero è malagevole; tanto è vero che la spiegazione colla quale Ella cerca di corroborare la predetta Sua affermazione termina con le parole " *potenza costruttrice del pensiero*, **pur eccitata dalle sensazioni** ", e, mi scusi, Egregio Signor Provveditore, ma qui è certo il caso di dire *in cauda venenum!*; naturalmente si tratta di veleno logico, cioè di contraddizione. Del resto la questione è grossa, e non è da me il risolverla: dubito anzi fortemente che, per la medesima, due dei *Suoi triumviri*, l'Aquinate e il Galilei, stiano discutendo con soverchio calore, e che il sommo ghibellino, assiso in mezzo a loro, non contribuisca pur troppo a metterli d'accordo.

A pag. 22 già lodai, nella loro sostanza, le sue parole " come si può pensare una relazione senza prima il concetto di ciascuno dei suoi termini? "; ma, riguardo alla forma, e precisamente per la locuzione *termini di una relazione* faccio ora le mie riserve. Ecco: Quando per affermare, per es., che fra i *termini* (noti) **a** e **b** ha luogo la *relazione* (nota) *di uguaglianza*, si scrive **a** = **b**, a questa medesima scrittura, esprimente uguaglianza, si dà pure il nome di *uguaglianza*; ma *di questa* **a** e **b** si dicono *membri*, non *termini*. Non sempre poi alla scrittura con la quale concisamente si afferma che fra due *termini* (noti) **a** e **b** ha luogo una certa relazione (nota) è conveniente dare lo stesso nome di questa relazione: p. es., potremo convenire di affermare mediante la scrittura **c A d**, che potremo leggere " **c** è amico di **d**, " che fra i due termini **c** e **d** ha luogo la *relazione di* *amicizia;* ma tuttavia dare pure il nome di *amicizia* a tale scrittura, esprimente amicizia fra **c** e **d**, non sarebbe al certo conveniente; riterrei più opportuno dire che scrittura **c** A **d** è **una referenza** (dal latino *referre*) esprimente la **relazione** *di amicizia fra i* **termini c** e **d** (**membri** di quella referenza). Ad ogni referenza esprimente la relazione di uguaglianza si dà per brevità lo stesso nome di uguaglianza; lo stesso può farsi anche in altri casi; ma non si deve confondere una referenza con la relazione che essa esprime.(1) *L'affermazione*, p. es., del tutto particolare, *del parallelismo della retta* **e** *alla retta* **f** non deve essere confusa con *la relazione*, del tutto generale, *di parallellismo.* E scrivendo **e** ∥ **f** (leggo **e** *è parallela a* **f**) non scrivo una *relazione*, ma bensì una *referenza* (esprimente la relazione di parallellismo fra le rette **e** ed **f**). Veda la precitata memorietta, pag. 2, 3, 13, ove invece di *referenza* avevo scritto *corrispondenza;* l'uso troppo vario di quest'ultima parola mi ha poi persuaso a cambiarla. Ma forse, senz'avvedermene, mi son lasciato ire a far da maestro a persona che può tutto insegnarmi; la quale però, almeno vo' sperarlo, saprà pure scusare il mio peccato, che è peccato d'abitudine, dovuto cioè alla mia condizione d'insegnante.

Alla stessa pag. 22, infine dell'art. 22, parmi che non si possa accettare così in generale che " qualsiasi relazione di grandezze è una relazione di uguaglianza o di disuguaglianza "; p. es., quando dico " l'angolo α ed il segmento r sono grandezze etereogenee ", affermo bene che fra le grandezze α e r ha luogo una certa relazione, eppure questa relazione (eterogeneità) non è al certo uguaglianza e nemmeno potrebbe dirsi disuguaglianza. Nè basterebbe aggiungere, in quella frase, al sostantivo *grandezze* l'aggettivo *omogenee;* p. es., quando dico " l'angolo α è adiacente all'angolo β ", io fuor di dubbio affermo che fra le due grandezze omogenee α e β ha luogo una certa relazione, eppure questa relazione (adiacenza) non è nè uguaglianza, nè disuguaglianza.

Trovo pure eccessivamente generale, a pag. 21, l'affermazione " *due grandezze uguali sono ... sostituibili in* **tutte** *le relazioni in cui esse figurano* ". Suppongasi, p. es., che **r** e **s** siano segmenti *equipollenti* e che **t** sia un segmento *uguale* ad **r**; è sempre lecito nell'*equipollenza* **r** $\underline{\Omega}$ **s** sostituire **t** ad **r**? No certamente (se **t** non è parallelo ad **r**,...).

---

(1) Sono questo, è ben vero, *questioni di parole;* ma, come giustamente osserva il VAILATI nello scritto precitato (p. 5 e 6), noi *vediamo esser stati frequentissimi gli errori e i ritardi all'acquisto di nuove cognizioni, dovuti, se non esclusivamente almeno principalmente, a ciò, che, in date circostanze, certe utili e indispensabili " questioni di parole " non furono sollevate, o non poterono esser discusse.* Nel caso attuale poi la distinzione fra *relazione* e *referenza*, *termini* e *membri*, mi pare utile perchè, se non altro, senza tale distinzione riuscirebbe malagevole l'esatta enunciazione di alcune proposizioni della teoria delle relazioni; valga di esempio il teorema: " Supposto che coesistano due *referenze*, esprimenti entrambe una medesima *relazione*, l'una fra due dati *termini* e l'altra fra altri due, coesisterà con esse una terza *referenza* avente per *membri* un *membro* dell'una e un *membro* dell'altra delle due *referenze* date, ed esprimente pure quella stessa relazione, allora, ed allora soltanto, quando simultaneamente avvenga che i rimanenti due *termini* siano *membri* di un'altra *referenza* ancora, esprimente quella medesima *relazione* "; p. es.: Se $a = b$ e A = B, perchè si abbia $b =$ B è sufficiente ed è necessario che si abbia $a =$ A (cfr. *Dipendenza ecc.* pag. 3).

Pure a pag. 24, e a pag. 25, trovo che Ella pone prima il concetto di *somma* e poi il concetto di *maggiore* e *minore* stato. Io credo invece che si debba parlare *prima* di maggiore e minore e *poi* di somma, poichè è certo più natural cosa che prima si parli delle *relazioni* (almeno delle più semplici) e poi delle *operazioni*. Giova infatti notare che non si perviene ad una *somma* se non che a patto di eseguire un'*addizione*. Ora per esprimere che eseguendo una certa addizione si ottiene una certa somma non ci serviamo forse della relazione di uguaglianza? E, inoltre, non è forse un atto del tutto spontaneo della nostra mente, appena eseguita un'operazione, p. es., su un numero razionale positivo mediante un altro numero razionale positivo, la quale dia pure per risultato un numero razionale positivo, il cercare di giudicare dell'effetto dell'operazione medesima? E per farci un'adeguata idea di tale effetto non ci conviene forse sapere almeno riscontrare se l'operazione ha dato luogo o no ad una modificazione, e se sì *in che senso?* E ciò implica appunto che si posseggano *già*, relativamente ai numeri razionali positivi, oltre i concetti di *uguale* e *disuguale*, anche quelli di *maggiore* e *minore*. E si tratta eziandio, almeno per me, di amore dell'ordine, o, se vogliamo, del desiderio di non lasciare le cose in asso; perchè è appunto appena dopo di aver stabilito che " se a e b sono numeri razionali positivi, necessariamente deve aversi o $a = b$ o $a \neq b$ „ che trova la sua propria sede la nozione " e quando $a \neq b$ si avrà poi o $a > b$ o $a < b$, naturale e indispensabile completamento della nozione precedente. Ed in particolare ritengo che delle due affermazioni " $a > b$ „, " esiste un numero razionale positivo tale che $a = b + d$ „ la seconda debba costituire la tesi di un *teorema* di cui la prima è l'ipotesi: oggi invece è di moda prendere la seconda come definizione della prima: questa nuova via è certamente più comoda, ma *non è la più naturale,* e pertanto io non saprei seguirla; e del resto, e lo vedo con piacere, neppure Ella la segue, poichè a pag. 25, parlando di grandezze in generale, scrive " ammetteremo come postulato che se $A > B$, esiste un terzo stato D tale che $D + B = A$ „. E mi sarebbe stato di somma soddisfazione saperla meco eziandio nel ritenere conveniente di *dare la precedenza alle relazioni piuttosto che alle operazioni,* tantopiù che è precisamente questo uno dei concetti fondamentali che mi hanno guidato nello scrivere per un nuovo testo di Aritmetica razionale, (¹) pubblicato appunto in questi giorni, la teoria (puramente analitica) delle frazioni ordinarie, la quale ho diviso così: § 1° *Relazioni fra i numeri razionali* (trentadue pagine), § 2° *Operazioni fra i numeri razionali* (trentaquattro pagine).

Pensatamente ho detto più sopra *non si perviene ad' una* **somma** *se non che a patto di eseguire un'***addizione** perchè, sempre a pag. 24

(¹) G. Garbieri, *Elementi di Aritmetica razionale secondo i programmi dei ginnasi superiori,* 1ª edizione con la collaborazione di E. De Amicis. Milano, 1899.

e 25, ho veduto che Ella parla di *somma* e non già di *addizione*. Chi tace non dice niente, e pertanto io non so se il Suo silenzio confermi un'opinione che oggi pure viene in moda, che cioè si possa *trattare della* **somma** *senza parlare dell'***addizione**, [1] e in generale di un *risultato* senza parlare dell'*operazione* che lo produce. Non dico che un tal modo di procedere sia assolutamente impossibile: ma non dispose natura che le sorgenti della Scrivia scendessero a Genova; nè per una via naturale andrà un giorno il Sele a dissetare le Puglie. La cosa poi rasenta a dirittura il controsenso (almeno se, per non essere costretti a dichiarar guerra al vocabolario e alla grammatica, vogliamo stare quanto più è possibile al significato comune delle parole) quando si parla di *prodotto* senza parlare di *moltiplicazione*, rinunciando così a pensare che la parola *prodotto*, aggettivo verbale sostantivato, non è se non che l'abbreviazione della perifrasi " *ciò che è prodotto* „; prodotto, dunque, da che cosa se non dalla operazione della moltiplicazione? Che vuole! quel povero " prodotto „ senza " moltiplicazione „ a me fa proprio l'impressione di un figlio senza genitori; e a chi mi dicesse " I genitori del prodotto sono i fattori „ risponderei " Sicuro! Ma nemmeno i fattori possono diventar genitori senza eseguire l'operazione della moltiplicazione „. E quando, parlando con un collega a proposito di numeri naturali e di moltiplicazione, mi sentii dare, per la prima volta, la *definizione* (?) " Dicesi moltiplicazione l'operazione con la quale si *calcola* il prodotto di due numeri „, mi parve anzitutto di vedere un carro camminare dinnanzi ai buoi; ma poi, ripensandoci su e non sapendo capacitarmi di tale stravaganza, capii, o almeno mi parve, di che sorta di *moltiplicazione* si trattava e dimandai: " Ma *allora*, di grazia, di *quale moltiplicazione* volete dire? Di quella solita *per scacchiero* o di quella *a crocetta? Romboidale* o *piramidale? A castelluccio*, o *per quadretto*, o *per gelosia? A ripiego, a scapezzo, alla russa, all'egiziana*, o *col regolo*...? Poichè al certo con codesta vostra *definizione* non potete alludere se non che ad uno qualunque dei tanti procedimenti pratici, o magari meccanici, che possono appunto servire per calcolare il risultato della vera ed unica operazione teorica della moltiplicazione dei numeri naturali „. Ed è appunto alle prime due fra le predette *regole di moltiplicazione*, cioè *esecuzioni materiali della moltiplicazione propriamenta detta*, che allude l'alunno di terza classe elementare dicendo al compagno: " Come! Non *sai* ancora *la moltiplicazione?* neppure *quella più facile* (a scacchiero)? Io *so* anche *la moltiplicazione abbreviata:* guarda si fa così e così (*a crocetta*) „; mentre invece allude precisamente alla moltiplicazione dei numeri naturali (*in se stessa*, cioè indipendentemente dalle

---

[1] Fra le altre cose, *così facendo*, credo che non dovrebbe nemmeno esser lecito, a stretto rigore di termini, di indicare la somma di **a** e **b** colla notazione $a+b$, che si legge " **a** *più* **b** „; infatti, per universale consenso, il segno $+$ è appunto il segno dell'*addizione* e non già della *somma*, la quale *allora* dovrebbe indicarsi altrimenti (p. es., col simbolo S(a, b), da leggersi precisamente " *somma* di **a** e **b** „).

multiformi maniere di calcolarne il risultato) il loro maestro interrompendo: " Ebbene! E tu, che fai il saccente, sapresti poi dirmi *che cosa è veramente la moltiplicazione?* „. Certamente accettare quella *definizione* (?) sarebbe cosa assai comoda, poichè essa non dà proprio niente a pensare nè all'alunno che l'ascolta, nè, tanto meno, all'insegnante che la dice; ma qui pure lascio che altri s'avvii per la strada più comoda, ma artificiale, e prescelgo quella più alpestre, ma tracciata dalla natura medesima, la quale non vuole che si premetta l'effetto alla causa, e perciò neppure il risultato all'operazione, il *prodotto* alla *moltiplicazione*, la *somma* all'*addizione*, il *residuo* alla *sottrazione*, il *quoto* alla *divisione*. (1)

Nella stessa pag. 25, se si voleva chiamare D **differenza** fra A e B, si doveva, secondo me, scrivere (essendo $A > B$) $A = B + D$, piuttosto che $D + B = A$ (la quale uguaglianza, a rigore, equivale all'altra $A - B = D$, che dice " sottraendo dalla grandezza A la grandezza B si ottiene per **residuo** *la grandezza* D „). Naturalmente, parlandosi là in via affatto generale sia rispetto all'addizione che rispetto all'uguaglianza, non si sa *ancora* se $D + B = B + D$, nè se quando $X = Y$ sia pure $Y = X$, non si sa cioè se per le grandezze considerate l'addizione sia un'*operazione commutativa*, (2) nè se l'uguaglianza sia una relazione *conversiva*, com' io son solito dire, (3) o *simetrica*, come preferisce il Prof. PEANO. (4)

Sempre a pag. 25, a linea 7, ad *assiomi* sostituirei *definizioni*.

(1) Come particolarmente io la pensi a quest'ultimo riguardo Ella potrà vedere in un paragrafo dei precitati *Elementi di Aritmetica razionale secondo i programmi dei Ginnasi superiori*, che, scritto da me, rispecchia precisamente le mie idee in proposito: è l'ultimo paragrafo della *Parte prima (Numeri naturali)* e porta il titolo " Operazione inversa della moltiplicazione (*Divisione* considerata come ricerca di *quoto*) „.

(2) Vale a dire *un'operazione che gode della proprietà commutativa*. La spiegazione è superflua, ma *pongo i punti sugl'i* per avere occasione di ottemperare al precetto *date Caesari quod est Caesaris*, cioè per rivendicare alle operazioni anche i loro diritti di proprietà; poichè, p. es., (se a, b, c sono numeri naturali) le proprietà espresse dalle eguaglianze $a + b = b + a$, $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a \times b = b \times a$, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, e che fino ad ora erano state concordemente ritenute come legittime proprietà dell'addizione e moltiplicazione dei numeri naturali, si vorrebbero attribuire da qualcuno alla *somma* e al *prodotto*. Veda in proposito l'opera già citata di C. BURALI-FORTI e A. RAMORINO, ove, p. es., a pag. 28 (27) è detto che *il prodotto, come la somma, gode della proprietà* **commutativa (associativa)**. Non Le pare questa una vera spogliazione delle *operazioni* in favore dei *risultati*? Taluno fa la stessa spogliazione a favore d'altri: p. es., il BIASI, nei suoi *Elementi di Aritmetica e Geometria esposti con metodo sintetico*, Sassari, 1892, (opera pregevolissima sotto molti riguardi, originariamente e profondamente pensata) a pag. 30 dice che *i numeri naturali godono la proprietà commutativa (associativa)* come addendi e come fattori. Nè per giustificare, p. es., il trasferimento della proprietà commutativa dalla moltiplicazione al prodotto, ovvero ai fattori, varrebbe l'osservare che, p. es., *la moltiplicazione dei quaternioni* (che è associativa) *non è commutativa*, concludendo " dunque la proprietà commutativa non è veramente una proprietà della moltiplicazione „: ciò infatti prova solamente che invece di dire genericamente " la moltiplicazione è commutativa „ conviene dire, p. es., nel caso antecedentemente considerato " la moltiplicazione dei numeri naturali è commutativa „; e d'altronde, se è vero che nel caso dei quaternioni la moltiplicazione non gode della proprietà commutativa, nello stesso caso, peraltro, nessuno verrà a dire che ne godano i fattori, nè tampoco il prodotto. E altrettanto sarebbe a ripetersi se si tirasse in ballo anche *la moltiplicazione delle trasformazioni, o delle sostituzioni*, per cui sussiste pure la proprietà associativa ma non la commutativa (v., p. es., F. GIUDICE, *Nozioni sulle Trasformazioni puntuali e sui Gruppi continui*, Brescia, 1898, e SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*), o qualche altra operazione relativa a qualche altro sistema di enti, alla quale per avventura fosse dato il nome di moltiplicazione senza che godesse di siffatta proprietà.

(3) " Dipendenza fra alcune proprietà notevoli delle relazioni fra enti di un medesimo sistema „ (pag. 1 e 12), *Rivista di Matematica*, 1892. Già il COMMANDINO nel suo *Euclide* (Urbino, 1575, pag. 22) aveva designato le relazioni conversive colla giustissima perifrasi " quelle che *si convertono* univocamente „; travide pure che la proprietà *adequativa* " *quae conveniunt cum tertio conveniunt inter sese* „ non poteva sussistere se non che per relazioni conversive (Cfr. " Dipendenza ecc. „, Teorema III e note 5 e 6).

(4) *Notations de Logique Mathématique* par G. PEANO, Turin, 1894, pag. 45.

Pure a pag. 25, alla fine dell'art. 26, avrei desiderato almeno un esempio delle grandezze di cui ivi si parla.

Subito dopo, invece delle parole *dei nominati criterî di quantità*, porrei *relativa alle predette caratteristiche della grandezza*.

A pag. 34, linea 6 risalendo, dopo *mediata* aggiungerei *o dimostrativa*.

A pag. 45, linea 10: *corpo*. E se quel *corpo* fosse un pezzo di *ghiaccio* o di *cera*, e via dicendo?...

Nella stessa pag. 45 si parla dell'*etere cosmico:* per me *è un mito* (Veda l'annotazione, alquanto arrischiata, a pag. 2 della mia " *Introduzione alla teoria matematica della propagazione del calore* [*nei corpi solidi atermani*] „ Torino, Loescher, 1891).

Pag. 46: *senso della temperatura:* non si dice invece *tatto termico*, appunto per far distinzione dal *tatto meccanico* (tutti e due poi costituiscono insieme il *senso del tatto*)?

Pag. 48: *archetti* **impercettibili** *o quasi:* guardiamoli col microscopio e non saranno più tali. Bisogna proprio pronunziare *la parola superiore* " **infinitesimi** „, non c'è verso.

Poco più sotto: *elica circolare:* direi *cilindrica*, poichè, p. es., anche l'*elica conica* potrebbe dirsi *circolare*.

Pag. 53: piuttosto che assumere come espressione vettoriale $r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, prenderei senz'altro r_α; anche con questa semplicissima forma, irriducibile, la relativa teoria può svolgersi egualmente. (1)

E così sono nuovamente alla fine, e questa volta sul serio, poichè, bene o male (certo più male che bene) anche le *correzioni*, che Ella voleva, son fatte; e se, per farle, sarò più volte *montato in cattedra*, ciò, L'assicuro, è avvenuto a mia insaputa e solamente per vizio d'abitudine, come più sopra ho detto; a buon conto, come allora, del fallo mio invocherò assoluzione, e non sarà indarno, poichè la Sua bontà

.... ha sì gran braccia
che prende ciò che si rivolge a lei.

Prima di chiudere ho riletto la presente e ne ho provato qua e là una certa impressione come di lettera aperta; tale, nella mia intenzione, non doveva essere certamente; ma se tale tuttavia Ella vorrà considerarla, faccia pure; ormai la lettera è Sua, ed Ella può farne ogni Suo beneplacito; ed anzi io mi terrò molto onorato se Ella sarà per giudicare meritevole di pubblicazione questa povera mia prosa, a titolo di recensione del Suo notevolissimo *Discorso primo*.

Con ogni ossequio mi dico

Brescia, 2 novembre 1898.

Suo dev.mo
ENRICO DE AMICIS.

(1) Il Prof. LAZZERI, osservando che la notazione r_α (adottata p. es., anche dall'HOÜEL, *Cours de Calcul infinitésimale*, Paris, 1878-81) riesce incomoda se r, α sono espressioni graficamente alquanto complicate, assume invece come espressione vettoriale la notazione, pure semplicissima, (r, α).

SOPRA UNA CLASSE

di triangoli e tetraedri isobaricentrici

1. Nel piano tre punti A', B', C' tali che le loro coordinate baricentriche riferite ad un triangolo fondamentale ABC sieno rispettivamente $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\gamma_1, \alpha_1, \beta_1)$, $(\beta_1, \gamma_1, \alpha_1)$ si chiamano *isobarici* rispetto ad ABC ed il triangolo $A'B'C'$ si chiama *isobarico* rispetto ad ABC. (Reciprocamente ABC risulta isobarico rispetto ad $A'B'C'$, e due triangoli isobarici rispetto ad uno stesso risultano isobarici l'uno rispetto all'altro).

Nello spazio quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 tali che le loro coordinate baricentriche riferite a un tetraedro fondamentale $A_1A_2A_3A_4$ sieno rispettivamente

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1),\ (\delta_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1),\ (\gamma_1, \delta_1, \alpha_1, \beta_1),\ (\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \alpha_1)$$

oppure

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1),\ (\beta_1, \alpha_1, \delta_1, \gamma_1),\ (\gamma_1, \delta_1, \alpha_1, \beta_1),\ (\delta_1, \gamma_1, \beta_1, \alpha_1)$$

dirò che sono isobarici (di 1^a o di 2^a specie) rispetto ad $A_1A_2A_3A_4$. (Reciprocamente $A_1A_2A_3A_4$ risulta isobarico rispetto a $P_1P_2P_3P_4$ e due tetraedri isobarici rispetto a uno stesso risultano isobarici l'uno rispetto all'altro).

Fra le numerose proprietà (*) di questi triangoli e tetraedri isobarici richiamo le seguenti:

a) Due triangoli isobarici l'uno rispetto all'altro hanno lo stesso centro di gravità.

Della quale in alcuni casi è vera anche la reciproca; p. es. *i triangoli inscritti o circoscritti ad un triangolo* ABC *ed aventi lo stesso centro di gravità di* ABC *sono isobarici rispetto ad* ABC.

b) Due triangoli $A'B'C'$, ABC *isobarici l'uno rispetto all'altro sono triomologici, e tanto i tre centri che i tre assi d'omologia formano altri triangoli isobarici rispetto ad uno dei primi.*

Le tre omologie si ottengono unendo rispettivamente A', B', C' con A, C, B, e con C, B, A, o con B, A, C.

c) Tutti i triangoli isobarici rispetto ad uno stesso hanno lo stesso angolo di Brocard, e quindi è costante per essi la somma delle cotangenti degli angoli.

(*) Vedi: "Su un triangolo notevole" *Periodico di Matematica*, anno IX, 1894; "Alcune proprietà dei punti isobarici" *Giornale di Battaglini*, vol. 34, 1896.

d) Due tetraedri isobarici l'uno rispetto all'altro hanno lo stesso centro di gravità.

Della quale proprietà è vera in alcuni casi la reciproca, p. es.: *i tetraedri che hanno i vertici sui quattro lati (o le faccie passanti pei quattro lati) di un quadrangolo gobbo* $A_1A_2A_3A_4$, *e che hanno lo stesso centro di gravità del tetraedro* $A_1A_2A_3A_4$ *sono isobarici rispetto a questo.*

e) Due tetraedri isobarici l'uno rispetto all'altro sono tali che in quattro modi diversi si possono unire i vertici dell'uno coi vertici dell'altro così da ottenere quattro quaderne di rette iperboloidiche.

Se $P_1P_2P_3P_4$, $A_1A_2A_3A_4$ sono isobarici di 1ª specie, i quattro quadrupli iperboloidici si ottengono unendo rispettivamente P_1, P_2, P_3, P_4 con A_4, A_3, A_2, A_1, o con A_3, A_2, A_1, A_4, o con A_2, A_1, A_4, A_3, o con A_1, A_4, A_3, A_2; se sono isobarici di 2ª specie, i quattro quadrupli si ottengono unendo rispettivamente P_1, P_2, P_3, P_4 con A_1, A_2, A_3, A_4, o con A_2, A_3, A_4, A_1 ecc. permutando. E poichè $P_1P_2P_3P_4$, $A_1A_2A_3A_4$ possono anche essere isobarici di 1ª e di 2ª specie (ciò accade se $\beta_1 = \delta_1$), si ha pure:

f) Due tetraedri fra loro isobarici di 1ª e di 2ª specie sono tali che in otto modi diversi si possono unire i vertici dell'uno con quelli dell'altro così da ottenere otto quaderne di rette iperboloidiche.

Queste proprietà bastano a dimostrare che lo studio di questi triangoli e tetraedri isobarici può avere qualche interesse. E perciò ai numerosi casi di triangoli e tetraedri isobarici esaminati nelle note citate aggiungo qui i seguenti:

2. Nel piano vi sono evidentemente linee di qualunque grado tali che, riferite a un triangolo fondamentale ABC, ad un punto A′ di una di esse corrispondono come 2° e 3° punto isobarico punti B′, C′ che giacciono sulla linea stessa (tale linea dirò che è *isobarica* rispetto al triangolo ABC); così pure vi sono sistemi di tre linee di qualunque grado tali che ad un punto A′ di una linea di uno di tali sistemi corrispondono come 2° e 3° punto isobarico punti B′, C′ che si trovano rispettivamente sulle altre due linee di quel sistema (un sistema di tre tali linee dirò che è *isobarico* rispetto ad ABC).

Allora si vede tosto che si avrà:

I punti che una linea isobarica rispetto ad ABC *ha comuni con un'altra linea isobarica o colle tre linee di un sistema isobarico formano triangoli isobarici rispetto ad* ABC.

I punti che le tre linee di un sistema isobarico rispetto ad ABC *hanno comuni fra loro o colle tre linee corrispondenti di un altro sistema isobarico rispetto ad* ABC *formano triangoli isobarici rispetto ad* ABC.

Necessariamente, ad un punto reale A′ corrispondendo in modo unico come 2° e 3° punto isobarico due punti B′, C′ pure reali, accadrà che una linea isobarica s non potrà avere in comune con un'altra linea isobarica s' che $3n$ punti reali ($n = 0, 1, 2 \ldots$); che se una linea isobarica s ha in comune con una delle tre linee s_1, s_2, s_3 di un sistema isobarico n punti reali, s dovrà avere in comune n punti reali anche con ciascuna delle altre; che se s_1 ha in comune n punti reali con s_2, altrettanti ne dovrà avere s_2 con s_3, e s_3 con s_1; che se due dei punti comuni ad s e s_1 coincidono, i due punti corrispondenti comuni ad s e s_2 dovranno pure coincidere ecc.; e che quindi in particolare ad una tangente ad s corrisponderanno come 2ª e 3ª retta di un sistema isobarico altre tangenti ad s, e ad una tangente ad s_1 corrisponderanno come 2ª e 3ª retta di un sistema isobarico due tangenti rispettivamente ad s_2 e ad s_3 ecc. E perciò *sarà vero anche il teorema correlativo del precedente.*

3. Fra le rette l'unica isobarica è la retta all'infinito $\alpha + \beta + \gamma = 0$. I sistemi isobarici di tre rette sono quelli rappresentati dalle equazioni

$$\begin{aligned} u\alpha + v\beta + w\gamma &= 0 \\ w\alpha + u\beta + v\gamma &= 0 \\ v\alpha + w\beta + u\gamma &= 0 \end{aligned}$$

che danno luogo a teoremi indicati nella 1ª nota citata.

4. Fra le coniche sono isobariche quelle rappresentate dall'equazione

$$(1) \qquad m(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + n(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 0$$

le quali sono ellissi, che hanno il centro nel baricentro G del triangolo fondamentale ABC, e che non hanno punti reali comuni fra loro.

E allora si avrà:

I punti che una ellisse (1) (*in particolare la ellisse* G *circoscritta ad* ABC, *la ellisse* G *inscritta in* ABC, *la ellisse* G *che passa per tre punti che dividono i lati di* ABC *nello stesso rapporto positivo o negativo* ρ, *la ellisse* G *tangente alle rette che uniscono* A, B, C *con tre punti che dividono i lati di* ABC *nello stesso rapporto* ρ) (*) *ha comuni con un sistema isobarico di tre rette, p. es., coi lati del triangolo* ABC, *o colle mediane di* ABC, *o colle parallele da* A, B, C *ai lati o alle mediane di* A, B, C *o colle parallele da* G *ai lati di* ABC, *o colle congiungenti tre punti che dividono i lati di* ABC *nello stesso rapporto, o colle congiungenti questi tre punti a* G *o ad* A, B, C *ecc., formano triangoli isobarici rispetto ad* ABC.

Le tangenti condotte ad una ellisse (1) *da tre punti isobarici rispetto ad* ABC, *p. es., da* A, B, C, *o da tre punti che dividono i lati di* ABC *nello stesso rapporto, o parallelamente ai lati o alle mediane di* ABC *ecc. formano triangoli isobarici rispetto ad* ABC, *e i punti di contatto altri triangoli isobarici.*

(*) Le equazioni di queste ellissi sono rispettivamente, come è facile verificare,

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 0,$

$\rho(\alpha^2 + \ldots) - (1 + \rho^2)(\alpha\beta + \ldots) = 0, \qquad (1 + \rho)^2(\alpha^2 + \ldots) - 2(1 + \rho^2)(\alpha\beta + \ldots) = 0.$

5. Poichè un triangolo inscritto (circoscritto) a una ellisse e avente il baricentro nel centro della elisse è determinato da un suo vertice (un lato), e un triangolo isobarico rispetto ad ABC è pure determinato da un suo vertice o lato, si ha anche: *ogni triangolo inscritto o circoscritto ad una ellisse* (1) *e avente il baricentro nel centro della ellisse, ossia isobaricentrico con* ABC, *è isobarico rispetto ad* ABC; *e quindi i suoi lati segano un sistema isobarico di tre rette* (*i tre lati di* ABC, *le tre mediane ecc.*) *secondo triangoli isobarici rispetto ad* ABC.

6. Sieno A', B', C' tre punti isobarici rispetto ad ABC, e ad A_1, B_1, C_1 tre punti isobarici su una ellisse (1). Le rette $A'A_1, B'B_1, C'C_1$ formeranno un sistema isobarico e segheranno questa ellisse in altri tre punti isobarici A_2, B_2, C_2, sicchè (A', B', C'), (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) saranno tre terne di punti isobarici posti rispettivamente sulle rette di un sistema isobarico, e perciò (vedi nota citata) A', B', C' divideranno nello stesso rapporto le corde A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Allora i coniugati armonici A'', B'', C'' di A', B', C', rispetto a queste corde divideranno pure le corde stesse in uno stesso rapporto, e saranno perciò anch'essi punti isobarici rispetto ad ABC. Ripetendo la stessa costruzione per altri tre punti isobarici della stessa ellisse, si otterranno altri tre punti A''', B''', C''' analoghi ad A'', B'', C'' ed isobarici rispetto ad ABC, e perciò le rette $A''A'''$, $B''B'''$, $C''C'''$ formeranno un sistema isobarico rispetto ad ABC, ossia quindi un triangolo $C_1' A_1' B_1'$ isobarico rispetto ad ABC, cioè:

Se $A'B'C'$ *è un triangolo isobarico rispetto ad* ABC, *il triangolo* $A'_1B'_1C'_1$ *polare di* $A'B'C'$ *rispetto ad una ellisse* (1) *è pure isobarico rispetto ad* ABC (*e quindi rispetto* $A'B'C'$).

Da cui, tenendo presente la proprietà *b*), e ricordando che fra due triangoli polari rispetto a una conica $A'B'C'$, $A'_1B'_1C'_1$, sussiste la omologia $(A'B'C', A'_1B'_1C'_1)$ deriva che:

Se $A'B'C'$ *è un triangolo isobarico rispetto ad* ABC, *il suo triangolo polare rispetto ad una ellisse* (1) *è quadriomologico con esso.*

7. Sistemi isobarici rispetto ad ABC di tre coniche sono quelli rappresentati dalle tre equazioni

$$(2)\qquad \begin{cases} m(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2) + n(a'\beta\gamma + b'\gamma\alpha + c'\alpha\beta) = 0 \\ m(c\alpha^2 + a\beta^2 + b\gamma^2) + n(c'\beta\gamma + a'\gamma\alpha + b'\alpha\beta) = 0 \\ m(b\alpha^2 + c\beta^2 + a\gamma^2) + n(b'\beta\gamma + c'\gamma\alpha + a'\alpha\beta) = 0. \end{cases}$$

Ad essi in particolare appartiene il sistema di tre coniche circoscritte ad ABC ed aventi per poli d'omologia rispetto ad ABC tre punti isobarici (a', b', c'), (c', a', b'), (b', c', a'), cioè il sistema

$$\begin{cases} a'\beta\gamma + b'\gamma\alpha + c'\alpha\beta = 0 \\ c'\beta\gamma + a'\gamma\alpha + b'\alpha\beta = 0 \\ b'\beta\gamma + c'\gamma\alpha + a'\alpha\beta = 0 \end{cases}$$

ed il sistema di tre coniche inscritte in ABC ed aventi per poli d'omologia rispetto ad ABC tre punti isobarici (a', b', c'), (c', a', b'), (b', c', a'),

$$\left(\frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta^2}{b'^2} + \frac{\gamma^2}{c'^2}\right) - 2\left(\frac{\beta\gamma}{b'c'} + \frac{\gamma\alpha}{c'a'} + \frac{\alpha\beta}{a'b'}\right) = 0,$$

e dalle due che si ottengono da essa permutando tra α, β, γ. Come anche il sistema delle tre parabole di Arzt

$$\alpha^2 - 4\beta\gamma = 0, \quad \beta^2 - 4\gamma\alpha = 0, \quad \gamma^2 - 4\alpha\beta = 0.$$

Quindi combinando un sistema (2) con un sistema isobarico di tre rette o con tre punti isobarici rispetto ABC *si avranno teoremi affatto analoghi a quelli del n. 4;* combinando le tre coniche di un sistema (2) con una ellisse (1) o fra di loro o colle tre coniche di un altro sistema (2) si avranno altri teoremi, come in particolare i seguenti:

Tre coniche circoscritte ad ABC *ed aventi per poli d'omologia rispetto ad* ABC *tre punti isobarici rispetto ad* ABC *sono incontrate dalla ellisse* G *circoscritta ad* ABC *in altri tre punti che formano un triangolo isobarico rispetto ad* ABC, *ed hanno fra loro comuni altri tre punti che formano un triangolo isobarico rispetto ad* ABC.

Le tangenti comuni alle tre coniche predette, o quelle che esse hanno rispettivamente in comune colla ellisse G *circoscritta ad* ABC, *formano altri triangoli isobarici rispetto ad* ABC.

Tre coniche inscritte in ABC *ed aventi per poli d'omologia rispetto ad* ABC *tre punti isobarici rispetto ad* ABC *hanno in comune colla ellisse* G *inscritta in* ABC *altre tre tangenti, che formano un triangolo isobarico rispetto ad* ABC, *ed hanno fra loro comuni altre tre tangenti che formano un altro triangolo isobarico rispetto ad* ABC.

I punti comuni alle tre coniche predette, o quelli che esse hanno rispettivamente comuni colla ellisse G *inscritta in* ABC, *formano altri triangoli isobarici rispetto ad* ABC.

Le tre parabole di Arzt segano la ellisse G *inscritta secondo due triangoli isobarici di* ABC *ecc.*

E con un ragionamento analogo a quello del n. 6 si avrà anche:

Se A'B'C' *è un triangolo isobarico rispetto ad* ABC, *le tre polari dei punti* A', B', C' *rispetto alle corrispondenti tre coniche di un sistema isobarico* (2) *formano un triangolo isobarico rispetto ad* ABC.

8. Nello spazio vi sono pure evidentemente linee e superficie tali che, riferite ad un tetraedro fondamentale $A_1A_2A_3A_4$, ad un punto P_1 di una di esse corrispondono come 2°, 3° e 4° punto isobarico rispetto ad $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ punti che si trovano sulla linea o sulla superficie stessa (linea o superficie isobarica rispetto $A_1A_2A_3A_4$). Come pure vi sono sistemi di 4 linee o di 4 superficie tali che ad un punto P_1 di una delle linee o delle superficie di quel sistema corrispondono come 2°, 3° e 4° punto isobarico rispetto $A_1A_2A_3A_4$ punti P_2, P_3, P_4 che si trovano rispettivamente sulle altre linee o sulle altre superficie di quello stesso sistema. E allora è chiaro che si avrà:

I punti che una linea isobarica rispetto ad $A_1A_2A_3A_4$ *ha comuni con un'altra linea isobarica o con una superficie isobarica o colle linee o le superficie di un sistema isobarico formano tetraedri isobarici rispetto ad* $A_1A_2A_3A_4$.

I punti che le quattro linee di un sistema isobarico hanno comuni fra loro o con una superficie isobarica o colle quattro linee corrispondenti di un altro sistema isobarico o colle quattro superficie corrispondenti di un sistema isobarico formano tetraedri isobarici rispetto ad $A_1A_2A_3A_4$.

I punti che una superficie isobarica ha comuni con un'altra superficie isobarica o colle quattro superficie di un sistema isobarico, come i punti che le quattro superficie di un sistema isobarico hanno comuni fra loro o colle quattro superficie di un altro sistema isobarico formano tetraedri isobarici rispetto ad $A_1A_2A_3A_4$ (questi punti comuni, se le superficie dette non sono tangenti costituiranno linee isobariche o sistemi isobarici di linee).

Valgono poi osservazioni analoghe a quelle fatte al teorema corrispondente del n. 2.

9. Nello spazio fra i piani non vi è che il piano all'infinito che sia isobarico rispetto $A_1A_2A_3A_4$.

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0).$$

Esistono invece sistemi isobarici di quattro rette o di quattro piani, e i teoremi a cui questi danno luogo fanno parte della 2ª nota citata.

10. Fra le quadriche è isobarica ognuna di quelle rappresentate dall'equazione

$$m\Sigma\alpha^2 + n\Sigma\alpha\beta = 0 \tag{3}$$

le quali sono elissoidi che hanno il centro nel baricentro G del tetraedro $A_1A_2A_3A_4$ e che non hanno punti reali comuni fra loro.

E allora si avrà:

I punti che una quadrica (3) [*in particolare l'elissoide* G *circoscritto ad* $A_1A_2A_3A_4$ *ed avente i piani tangenti in* A_1, A_2, A_3, A_4 *paralleli alle faccie opposte, l'elissoide* G *inscritto in* $A_1A_2A_3A_4$ *coi punti di contatto nei baricentri delle faccie di* $A_1A_2A_3A_4$ *l'elissoide* G *tangente nei punti medi dei sei spigoli di* $A_1A_2A_3A_4$ *l'elissoide* G *che divide i sei spigoli di* $A_1A_2A_3A_4$ *nello stesso rapporto* ρ, *l'elissoide* G *tangente alle rette che uniscono* A_1, A_2, A_3, A_4 *con punti che dividono* $A_2A_3, \ldots$ *nello stesso rapporto* ρ (*)] *ha comuni con un sistema isobarico di 4 rette, p. es., coi lati del quadrangolo* $A_1A_2A_3A_4$,

(*) Le equazioni di questi elissoidi, come è facile verificare sono rispettivamente
$\Sigma\alpha\beta=0$, $\Sigma\alpha^2-\Sigma\alpha\beta=0$, $\Sigma\alpha^2-2\Sigma\alpha\beta=0$, $\rho\Sigma\alpha^2-(1+\rho^2)\Sigma\alpha\beta=0$, $(1+\rho)^2\Sigma\alpha^2-2(1+\rho^2)\Sigma\alpha\beta=0$
che appartengono alla (3).

o colle diagonali A_1A_3, A_2A_4, *o colle congiungenti* A_1, A_2, A_3, A_4 *a punti che dividono* $A_2A_3, \ldots$ *nello stesso rapporto, o colle congiungenti fra loro questi punti, o colle congiungenti* A_1, A_2, A_3, A_4 *ai baricentri delle faccie, o colle congiungenti il baricentro* G *ai punti che dividono i lati del quadrangolo* $A_1A_2A_3A_4$ *nello stesso rapporto o ai vertici, o colle parallele condotte da* G *ai lati del quadrangolo o colle parallele condotte da* A_1, A_2, A_3, A_4, *ai lati del quadrangolo o colle parallele condotte da* A_1, A_2, A_3, A_4, *ai lati del quadrangolo o alle congiungenti i vertici coi baricentri delle faccie ecc. formano tetraedri isobarici rispetto ad* $A_1A_2A_3A_4$.

I piani tangenti ad una quadrica (3) *dalle rette di un sistema isobarico formano tetraedri isobarici rispetto ad* $A_1A_2A_3A_4$, *e i punti di contatto altri tetraedri isobarici.*

11. Con un ragionamento analogo a quello del n. 6 si ottiene pure il teorema:

Se $P_1P_2P_3P_4$ *è un tetraedro isobarico rispetto ad* $A_1A_2A_3A_4$, *il suo tetraedro polare* $P'_1P'_2P'_3P'_4$ *rispetto ad un elissoide* (3) *è pure isobarico rispetto ad* $A_1A_2A_3A_4$ (*e quindi anche rispetto a* $P_1P_2P_3P_4$);

Inoltre sussistendo anche il quadruplo iperboloidico $P_1P_2P_3P_4$, $P'_1P'_2P'_3P'_4$ fra due tetraedri polari rispetto alla stessa quadrica si avrà:

Un tetraedro $P_1P_2P_3P_4$ *isobarico di prima specie rispetto ad* $A_1A_2A_3A_4$ *ed il suo tetraedro polare rispetto ad un elissoide* (3) *formano colle congiungenti i loro vertici cinque quadrupli iperboloidici.*

Un tetraedro $P_1P_2P_3P_4$ *isobarico di 1ª e 2ª specie ed il suo polare rispetto ad un elissoide* (3) *formano colle congiungenti i loro vertici otto quadrupli iperboloidici* (*uno di essi si riduce a un quadruplo omologico col centro in* G).

12. Sistemi isobarici di prima specie di quattro quadriche sono quelli dati dall'equazione

$$(4) \qquad m(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2) + n\,(a'\alpha\beta + \ldots) = 0$$

e dalle tre che si ottengono permutando circolarmente fra le $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; sistemi isobarici di 2ª specie quelli dati dall'equazione stessa e dalle tre che si ottengono scambiando $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, in $\beta\,\alpha\,\delta\,\gamma$, in $\gamma\,\delta\,\alpha\,\beta$, ed in $\delta\,\gamma\,\beta\,\alpha$; ai quali appartengono sistemi particolari analoghi a quelli del n. 7.

Combinando quindi un sistema (4) con un sistema isobarico di 4 rette o di 4 piani *si avranno teoremi affatto analoghi a quelli del n. 10* come anche il seguente analogo al primo del n. 11:

Se $P_1P_2P_3P_4$ *è un tetraedro isobarico rispetto ad* $A_1A_2A_3A_4$, *i quattro piani polari di* P_1, P_2, P_3, P_4 *rispetto alle corrispondenti 4 quadriche di un sistema* (4) *formano un tetraedro isobarico rispetto ad* $A_1A_2A_3A_4$.

Bologna, febbraio 1899.

FRANCESCO FERRARI.

PROIEZIONE STEREOGRAFICA

e sua applicazione allo studio di alcune linee sferiche

§ I. — La figura F che si ottiene proiettando da un punto qualunque Q di una sfera S una figura Φ di questa sfera, sopra un piano π parallelo al piano tangente in Q, si chiama *proiezione stereografica di* Φ.

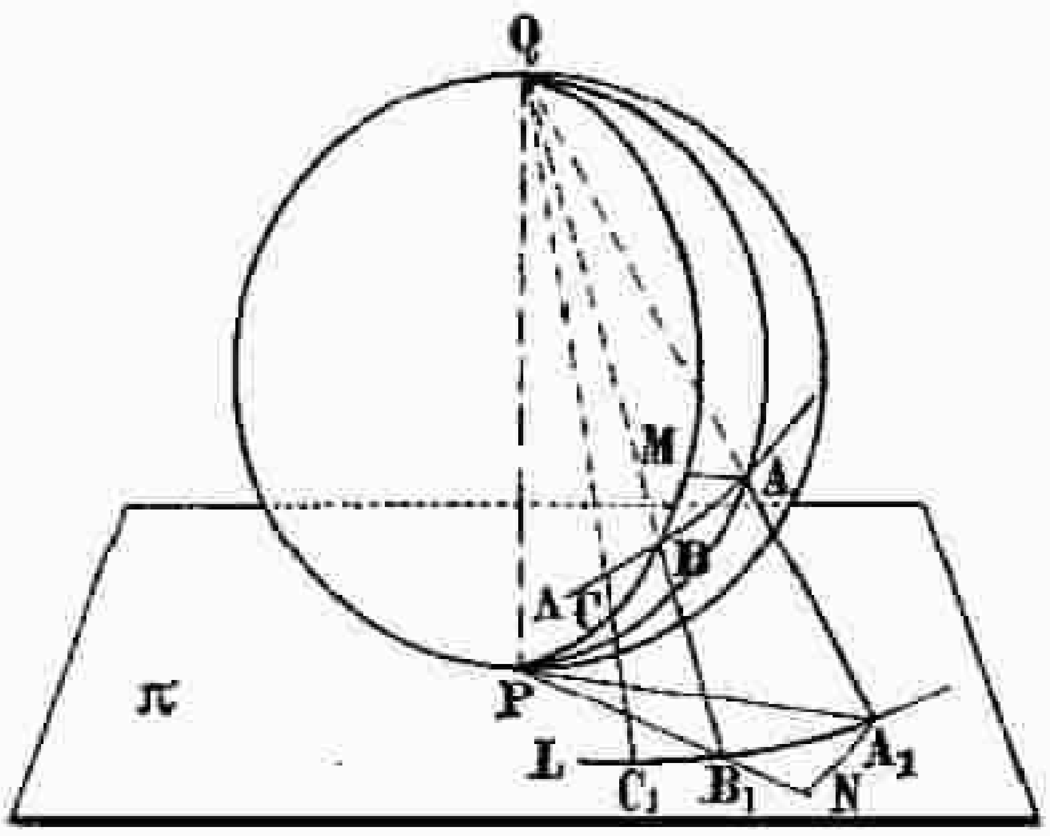

Fig. 1.

Le proiezioni stereografiche di una data figura, fatte da un medesimo punto Q, sono figure omotetiche. Nel caso in cui il piano π passi per il centro di S e nell'altro in cui il piano π sia tangente ad S nel punto P diametralmente opposto a Q, la proiezione stereografica si dice rispettivamente *centrale, polare*.

Se Λ (A, B, C, ...) è una linea di S, L (A_1, B_1, C_1, ...) la sua proiezione stereografica polare e se si pone (fig. 1)

$$PQ = k \quad , \quad \text{arco } PA = \rho \quad , \quad \text{raggio vettore } PA_1 = r,$$

si ha

$$(1) \qquad QA \cdot QA_1 = k^2; \quad QA = k\cos\left(\frac{\rho}{k}\right) \quad ; \quad \overline{QA}_1^2 = k^2 + r^2.$$

Dalle prime due di queste eguaglianze si ricava

$$QA_1 = \frac{k^2}{QA} = \frac{k}{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}.$$

Sostituendo questo valore nella terza, si ottiene

$$r^2 = \overline{QA}_1^2 - k^2 = k^2 \operatorname{tang}^2\left(\frac{\rho}{k}\right),$$

d'onde

$$(2) \qquad r = k \operatorname{tang}\left(\frac{\rho}{k}\right).$$

Quest'equazione, risolta rispetto a ρ, dà

$$(3) \qquad \rho = k \,.\, \text{ang tang}\left(\frac{r}{k}\right).$$

Avendosi

$$k^2 = QA \,.\, QA_1 = QB \,.\, QB_1 ,$$

si deduce

$$QA : QB_1 = QB : QA_1 ;$$

se dunque si tirano le corde AB, A_1B_1, i triangoli QAB, QA_1B_1 risultano simili e conseguentemente dànno:

$$\frac{\text{corda } AB}{\text{corda } A_1B_1} = \frac{QB}{QA} .$$

Supponiamo che il punto B vada indefinitamente avvicinandosi ad A e quindi B_1 ad A_1; quando B e B_1 sono vicinissimi ad A, A_1, le corde BA, B_1A_1 hanno lunghezze che differiscono pochissimo dagli archi infinitamente piccoli corrispondenti delle linee A, L.

Se dunque chiamiamo σ, s gli archi delle linee A, L contati a cominciare dai punti corrispondenti A, A_1, avremo

$$\lim_{\sigma=0} \left(\frac{\sigma}{s}\right) = \frac{QA}{QA_1} ;$$

e, facendo uso delle formole (1),

$$\lim_{\sigma=0} \left(\frac{\sigma}{s}\right) = \cos^2 \left(\frac{\rho}{k}\right) = \frac{k^2}{k^2 + r^2} . \tag{4}$$

§ 2. — Le formole precedenti sono importantissime, e con esse si possono studiare tutte le proprietà della proiezione. Ci limiteremo però ad esporne soltanto due, cioè la conservazione degli angoli e la trasformazione di un circolo della sfera in un circolo del piano e viceversa.

Sia AB un arco piccolissimo di A e A_1B_1 l'arco corrispondente di L. Col centro Q e col raggio sferico QA si descriva l'arco di parallelo AM compreso fra i meridiani PAQ, PBQ: col centro P e col raggio PA_1 si descriva l'arco A_1N compreso fra i raggi vettori PA_1, PB_1.

Chiamando θ l'angolo MBA e θ_1 l'angolo NB_1A_1, dai triangoli rettangoli piccolissimi ABM, A_1B_1N, considerati come rettilinei, si deduce

$$\cos\theta = \frac{BM}{AB} \quad , \quad \cos\theta_1 = \frac{B_1N}{A_1B_1} ,$$

d'onde:

$$\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta} = \frac{B_1N}{BM} \cdot \frac{AB}{A_1B_1} .$$

E passando al limite per $\sigma = 0$,

$$\lim_{\sigma=0} \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta} = \lim_{\sigma=0} \frac{B_1N}{BM} \cdot \lim_{\sigma=0} \frac{AB}{A_1B_1} .$$

ossia, in causa della (4):

$$\lim_{\sigma=0} \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta} = \cos^2\left(\frac{\rho}{k}\right) \cdot \lim_{\sigma=0} \frac{B_1N}{BM} \,. \tag{5}$$

Ora abbiamo, in causa di (2),

$$B_1N = PA_1 - PB_1 = k \operatorname{tang}\left(\frac{\rho}{k}\right) - k \operatorname{tang}\left(\frac{\rho - MB}{k}\right) =$$

$$= k \operatorname{tang}\left(\frac{MB}{k}\right) \cdot \frac{1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{\rho}{k}\right)}{1 + \operatorname{tang}\left(\frac{\rho}{k}\right) \cdot \operatorname{tang}\left(\frac{MB}{k}\right)} \,,$$

e di qui si ricava

$$\frac{B_1N}{BM} = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{MB}{k}\right)}{\left(\frac{MB}{k}\right)} \cdot \frac{1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{\rho}{k}\right)}{1 + \operatorname{tang}\left(\frac{\rho}{k}\right) \cdot \operatorname{tang}\left(\frac{MB}{k}\right)} \,.$$

Notando che mentre σ va a zero, va pure a zero la variabile MB, risulta

$$\lim_{\sigma=0} \frac{B_1N}{BM} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\rho}{k}\right)} \,;$$

e sostituendo nella (5),

$$\lim_{\sigma=0} \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta} = 1.$$

Questa eguaglianza dimostra che le due linee Λ, L segano rispettivamente i meridiani della sfera passanti per P, Q e i raggi vettori del piano uscenti da P sotto angoli θ, θ_1, che, in punti corrispondenti sono eguali. Se dunque Λ, Λ_1 sono due linee arbitrarie della sfera segantisi in A, ed L, L_1 le loro proiezioni stereografiche segantisi in A_1, chiamando θ, ω le inclinazioni delle Λ, Λ_1 sui meridiani (ed anche delle L, L_1 sui raggi vettori) avremo che nei punti corrispondenti A, A_1 la quantità $\theta \pm \omega$ è la medesima tanto per le linee sferiche, quanto per le linee piane. Ciò prova che le due linee sferiche Λ, Λ_1 in A si segano sotto un angolo eguale a quello sotto il quale le due linee piane corrispondenti L, L_1 si segano in A_1.

La proiezione stereografica è dunque una trasformazione che conserva gli angoli.

La linea sferica Λ sia un cerchio, e sia L la sua proiezione stereografica sul piano π. Si prendano sopra Λ tre punti qualunque A, B, C e siano A_1, B_1, C_1 i loro corrispondenti. Per i quattro punti A, B, C, A_1 si faccia passare una sfera Σ; essa viene tagliata dal piano passante per A, B, C secondo il cerchio Λ e dal piano π lungo un cerchio l passante per A_1.

Se poi H, H_1 sono due altri punti corrispondenti qualunque di Λ, L, si ha:

$$QH \,.\, QH_1 = QA \,.\, QA_1,$$

il che prova che il punto del piano Π si trova anche sulla sfera Σ e per conseguenza è un punto del cerchio l.

L'arbitrarietà assoluta del punto H sul cerchio Λ porta a concludere che L coincide col cerchio l. Dunque la proiezione stereografica del cerchio Λ è un altro cerchio L. (*)

La proprietà reciproca si dimostra analogamente.

Le due proprietà fondamentali dimostrate consigliano di applicare la proiezione stereografica alla costruzione delle carte geografiche, quando si voglia che nel disegno siano conservate le direzioni della figura obbiettiva. Il sistema dei meridiani terrestri viene rappresentato da un fascio di rette concorrenti; i paralleli da una serie di circoli col centro comune nel centro del fascio.

§ 3. — Considerando come nel § 1, i meridiani passanti per gli stessi poli P, Q e una linea sferica Λ, questa è completamente nota di forma quando si dia, in un modo qualunque, il raggio vettore sferico ρ per mezzo dell'arco σ della linea.

Infatti, supposto che sia

$$\rho = f(\sigma), \tag{6}$$

se si pone (fig. 1) $AB = \tau$, risulta

$$\cos\theta = \lim_{\tau=0} \frac{MB}{\tau} = \lim_{\tau=0} \frac{PA - PB}{\tau} = \lim_{\tau=0} \frac{f(\sigma) - f(\sigma+\tau)}{\tau}.$$

Supposto quindi che il limite del secondo membro sia $\varphi(\sigma)$, risulta

$$\cos\theta = \varphi(\sigma), \tag{7}$$

e l'eliminazione di σ fra le (6), (7) conduce alla relazione

$$\cos\theta = \psi(\rho), \tag{8}$$

essendo ψ il simbolo di una funzione nota.

La linea Λ può dunque costruirsi idealmente così: Si descriva un numero grandissimo di meridiani tutti passanti per gli stessi poli P, Q e a partire dal punto A del primo di essi si conduca un arco di cerchio massimo inclinato sul meridiano stesso dell'angolo θ definito dalla (8); l'estremità di questo arco è un punto B posto sul secondo meridiano.

Partendo da B, si ripeta ancora la stessa costruzione e si ha così un nuovo arco BC, avente l'estremità C sul terzo meridiano, ecc.

(*) Questa proprietà è stata argomento della II quistione a concorso proposta nel *Supplemento al Periodico di matematica* (v. anno I, fasc. II e IV). Nota di G. L.

Così continuando, si arriva a costruire una linea, la quale (se i meridiani sono estremamente vicini l'uno all'altro) può ritenersi coincidente colla linea domandata.

Fra le varie linee che si possono fissare sulla sfera mediante una relazione fra ρ e σ sarebbe specialmente importante quella definita dall'equazione

$$\rho = \sqrt{a\sigma + \frac{a^2}{4}}.$$

Infatti le proprietà fondamentali di tale linea, sopra tutto quelle che non si riferiscono ad aree di porzioni di superficie sferica, possono venire dimostrate con metodo affatto simile a quello tenuto nell'altro articolo: *Alcune proprietà della sviluppante di cerchio.* (*)

Ma spesso allo studio diretto della linea sferica si preferisce l'altro indiretto che deriva da qualche trasformazione speciale, non esclusa la proiezione stereografica.

Dimostreremo l'utilità di tale metodo, studiando, nelle loro proprietà essenziali, due linee sferiche notevolissime, quali sono la curva avente per proiezione stereografica una sviluppante di cerchio e la lossodromia.

§ 4. — La linea sferica Λ che ha per proiezione stereografica una sviluppante di cerchio può evidentemente definirsi come una traiettoria ortogonale di un sistema di cerchi minori eguali passanti per un punto fisso (polo Q). Questa curva comincia da un punto determinato Ω (corrispondente all'origine della sviluppante di cerchio) e va verso uno dei poli, avvolgendosi infinite volte assintoticamente attorno ad esso.

Tutta la difficoltà consiste nel potere ricavare, con metodo elementare, la relazione fra gli archi σ, s delle due linee Λ, L, partendo dalla relazione fondamentale (4).

Si divida l'arco AB di Λ in un numero assai grande p di parti piccolissime τ; siano t gli archi piccolissimi di L che corrispodono agli altri τ.

Ricordando che la sviluppante di un cerchio di diametro a è definita dall'equazione (**) $r = \sqrt{as + \frac{a^2}{4}}$, si ha dalla relazione (4)

$$\frac{\tau}{t} = \frac{k^2}{\left(k^2 + \frac{a^2}{4}\right) + as} = \frac{k^2}{a} \cdot \frac{\frac{a}{k^2 + \frac{a^2}{4}}}{1 + \frac{a}{k^2 + \frac{a^2}{4}} \cdot s},$$

(*) *Periodico di Matematica*, anno 1897.
(**) *Periodico di Matematica*, anno 1897, *loc. cit.*

Posto

$$\frac{a}{k^2 + \frac{a^2}{4}} = m,$$

ed applicato alla frazione $\frac{m}{1 + ms}$ il processo ordinario della divisione algebrica, si ottiene

$$\frac{\tau}{t} = \frac{k^2}{a}(m - m^2 s + m^3 s^2 - m^4 s^3 + \ldots .),$$

essendo la somma in parentesi composta d'infiniti termini. Si ottiene di qui

$$(9) \qquad \Sigma\tau = \frac{k^2}{a}(m\Sigma t - m^2\Sigma st + m^3\Sigma s^2 t - m^4\Sigma s^3 t + \ldots .) =$$
$$= \frac{k^2}{a}\left(m\Sigma t - \frac{m^2}{2}\Sigma 2st + \frac{m^3}{3}\Sigma 3s^3 t - \frac{m^4}{4}\Sigma 4s^3 t + \ldots .\right),$$

dove ciascuna di queste somme si estende a tanti termini, quante sono le parti in cui fu diviso l'arco σ.

Ora, in generale, si ha

$$(s + t)^n = s^n + ns^{n-1}t + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} s^{n-2}t^2 + \ldots,$$

d'onde

$$\frac{(s + t)^n - s^n}{t} = ns^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} s^{n-2}t + \ldots,$$

la quale ci dà

$$\lim_{t=0}\left[\frac{(s + t)^n - s^n}{t}\right] = ns^{n-1}.$$

Supponendo quindi le quantità τ, e quindi anche le t, piccolissime, tanto da potere trascurare (senza errori sensibili) le potenze superiori alla prima, si può prendere

$$(s + t)^n - s^n = n \,.\, s^{n-1}t.$$

Risulta allora

$$\Sigma ns^{n-1}t = \Sigma[(s + t)^n - s^n] = [(s + t)^n - s^n] + [(s + 2t)^n - (s + t)^n] +$$
$$+ [(s + 3t)^n - (s + 2t)^n] + \ldots . + [(s + ht)^n - (s + (h-1)t)^n] =$$
$$= (s + ht)^n - s^n = s_1^n - s^n,$$

indicando con s, s_1 i valori dell'arco s di L nelle estremità A_1, B_1 dell'arco che corrisponde all'arco AB di A.

Facendo in questa $n = 1, 2, 3, \ldots . p - 1, p$, sostituendo nella formola (9) e passando poi al limite per $p = \infty$, si ricava

$$\Sigma\tau = (-1)^{h+1}\frac{k^2}{a}\sum_{h=1}^{h=\infty}\left(\frac{m^h}{h}s_1^h\right) - (-1)^{h+1}\frac{k^2}{a}\sum_{h=1}^{h=\infty}\left(\frac{m^h}{h}s^h\right).$$

La somma $\Sigma\tau$, comunque sia fatta la divisione di AB, è la lunghezza dell'arco AB di Λ, cioè la differenza $\sigma_1 - \sigma$ fra i due archi ΩB, ΩA; le due somme del secondo membro rappresentano rispettivamente i logaritmi neperiani delle quantità

$$1 + ms_1 \quad , \quad 1 + ms. \text{(*)}$$

Abbiamo quindi

$$\sigma_1 - \sigma = \frac{k^2}{2} \log \left(\frac{1 + ms_1}{1 + ms}\right).$$

Ora se si suppone che i punti A, A_1 dai quali si contano gli archi di Λ e di L siano rispettivamente le origini di queste curve, si ha $\sigma = 0$, $s = 0$; cambiando allora σ_1 in σ, s_1 in s, e ricordando inoltre il valore di m si trova

$$\sigma = \frac{k^2}{a} \log \left[\frac{(4k^2 + a^2) + 4as}{4k^2 + a^2}\right] \tag{10}$$

(intendendosi qui per log il simbolo del logaritmo neperiano).

Avendosi dalla formola (10)

$$\log \left[\frac{(4k^2 + a^2) + 4as}{4k^2 + a^2}\right] = \frac{a\sigma}{k^2};$$

si deduce, passando dai logaritmi ai numeri,

$$\frac{(4k^2 + a^2) + 4as}{4k^2 + a^2} = e^{\frac{a\sigma}{k^2}},$$

essendo e il numero irrazionale, compreso fra 2 e 3, che serve di base al sistema logaritmico di *Napier*. (**)

Si deduce di qui:

$$s = \frac{a^2 + 4k^2}{4a} \left(e^{\frac{a\sigma}{k^2}} - 1\right). \tag{11}$$

Siccome poi la formola (3) dà:

$$\rho = k \,.\, \text{ang tang} \left[\frac{\sqrt{as + \frac{a^4}{4}}}{k}\right],$$

sostituendo in questa eguaglianza il valore (11) di s, si ottiene

$$\rho = k \,.\, \text{ang tang} \sqrt{\frac{a^2 + 4k^2}{4k^2} \,.\, e^{\frac{a\sigma}{k^2}} - 1}\,. \tag{12}$$

§ 5. — Sono principalmente le formole (10), (11), (12) quelle colle quali si possono studiare le proprietà della curva e risolvere per essa molte questioni, come ora mostreremo con qualche esempio.

(*) V. Baltzer, *Aritmetica generale, tradotta dal Cremona*, § 32, n. 5, pag. 186.
(**) V. Baltzer, *loc. cit.*, § 31, n. 4, pag. 172.

Consideriamo un arco qualunque AB della curva sferica e si supponga che i raggi vettori sferici corrispondenti ai punti A, B siano ρ, ρ_1.

Applicando la formola (12), che potremo anche scrivere

$$\sigma = \frac{2k^2}{a}\left\{\log\left(\frac{2k}{\sqrt{a^2+4k^2}}\right) - \log\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)\right\}$$

si deduce, chiamando Ω l'origine della curva Λ e de' suoi archi σ,

$$\text{arco } \Omega\text{A} = \frac{2k^2}{a}\left\{\log\left(\frac{2k}{\sqrt{a^2+4k^2}}\right) - \log\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)\right\},$$

$$\text{arco } \Omega\text{B} = \frac{2k^2}{a}\left\{\log\left(\frac{2k}{\sqrt{a^2+4k^2}}\right) - \log\cos\left(\frac{\rho_1}{k}\right)\right\};$$

e conseguentemente

$$\text{arco AB} = \text{arco } \Omega\text{B} - \text{arco } \Omega\text{A} = \frac{2k^2}{a}\left\{\log\cos\left(\frac{\rho}{k}\right) - \log\cos\left(\frac{\rho_1}{k}\right)\right\}.$$

Abbiamo dunque

$$\text{arco AB} = \frac{2k^2}{a}\log . \frac{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}{\cos\left(\frac{\rho_1}{k}\right)} \tag{13}$$

Il valore di ρ nell'origine degli archi σ si ottiene dalla (12) facendovi $\sigma = 0$; si ha dunque in questo punto:

$$\rho = k . \text{ang tang}\left(\frac{a}{2k}\right).$$

Il valore di ρ nel polo Q è $\frac{\pi k}{2}$; se dunque si applica la (13), si trova che *la lunghezza totale della linea Λ dalla sua origine Ω al polo Q è infinita.*

Osservando che il valore di ρ per un punto posto sull'equatore della sfera è $\frac{\pi k}{4}$, si trova che la lunghezza l della porzione di Λ, compresa fra l'origine Ω e il punto dove essa attraversa l'equatore, è data così

$$l = \frac{2k^2}{a} . \log\left[\sqrt{2} . \cos\left(\text{ang tang}\frac{a}{2k}\right)\right]$$

cioè:

$$l = \frac{2k^2}{a} . \log\left(\frac{2\sqrt{2}k}{\sqrt{4k^2+a^2}}\right), \text{ ecc. ecc.}$$

In quanto ai problemi relativi alla linea sferica Λ, essi possono essere risolti sia direttamente, col sussidio delle date formole, sia coll'intervento della sviluppante di cerchio L.

Per mostrare, almeno con un esempio, la via da seguire nelle varie questioni, risolveremo, con ambo i metodi, il problema di *dividere per metà un dato arco* AB *della linea sferica* A.

1° metodo. — Sia C il punto di mezzo di AB ed x il suo raggio vettore sferico. Siccome

$$\text{arco AC} = \frac{2k^2}{a} \log \frac{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}{\cos\left(\frac{x}{k}\right)},$$

dovendo AC essere la metà di AB, la formola (13) dà

$$\log \frac{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}{\cos\left(\frac{\rho_1}{k}\right)} = \log \left[\frac{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}{\cos\left(\frac{x}{k}\right)}\right]^2,$$

da cui si deduce

$$\cos\left(\frac{x}{k}\right) = \sqrt{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right) . \cos\left(\frac{\rho_1}{k}\right)}.$$

Ora quando sono dati i punti A e B, sono noti ρ e ρ_1; quindi, colla formola trovata, si può avere x, il che equivale alla completa determinazione del punto C.

2° metodo. — Posto

$$\text{arco } \Omega\text{A} = \sigma \quad , \quad \text{arco } \Omega\text{B} = \sigma_1 ,$$

deve essere

$$\text{arco } \Omega\text{C} = \frac{\sigma + \sigma_1}{2}.$$

Chiamando quindi s, s_1, s_2 gli archi corrispondenti di L, si deve avere, in causa dell'equazione (11)

$$(14) \quad \begin{cases} s = \dfrac{a^2 + 4k^2}{4a}\left(e^{\frac{a\sigma}{k^2}} - 1\right) \; ; \quad s_1 = \dfrac{a^2 + 4k^2}{4a}\left(e^{\frac{a\sigma_1}{k^2}} - 1\right) ; \\ \qquad s_2 = \dfrac{a^4 + 4k^2}{4a}\left[e^{\frac{a(\sigma+\sigma_1)}{2k^2}} - 1\right]. \end{cases}$$

Dalle due prime si ricava

$$e^{\frac{a\sigma}{k^2}} = \frac{4as + (a^2 + 4k^2)}{a^2 + 4k^2} \quad , \quad e^{\frac{a\sigma_1}{k^2}} = \frac{4as_1 + (a^2 + 4k^2)}{a^2 + 4k^2},$$

le quali, moltiplicate fra loro, dànno:

$$(15) \qquad e^{\frac{a(\sigma+\sigma_1)}{k^2}} = \frac{[4as + (a^2 + 4k^2)]\,[4as_1 + (a^2 + 4k^2)]}{(a^2 + 4k^2)^2}.$$

Dalla terza (14) si ricava

$$(16) \qquad e^{\frac{a(\sigma+\sigma_1)}{k^2}} = \frac{[4as_2 + (a^2 + 4k^2)]^2}{(a^2 + 4k^2)^2}.$$

Eguagliando i valori (15), (16), si trova un'equazione, alla quale si può dare la forma seguente,

$$4ass_1 + (a^2 + 4k^2)(s + s_1) = 4as_2^2 + 2(a^2 + 4k^2)s_2. \tag{17}$$

Chiamando quindi r, r_1, x i raggi vettori della sviluppante di cerchio nei punti $A_1(s)$, $B_1(s_1)$ e $C_1(s_2)$, che corrispondono ai punti A, B, C della linea sferica Λ, e ricordando l'equazione della sviluppante di cerchio

$$r = \sqrt{as + \frac{a^2}{4}},$$

si ricava

$$s = \frac{4r^2 - a^2}{4a}, \quad s_1 = \frac{4r_1^2 - a^2}{4a}, \quad s_2 = \frac{4x^2 - a^2}{4a}.$$

L'equazione (17) diviene allora:

$$(4x^2 - a^2)^2 + 2(a^2 + 4k^2)(4x^2 - a^2) - 16r^2r_1^2 - 16k^2(r^2 + r_1^2) + a^4 + 8a^2k^2 = 0,$$

la quale, risolta rispetto ad x (e tenuto presente che il valore che si cerca deve essere reale e positivo) dà,

$$x = \sqrt{-k^2 \pm \sqrt{r^2r_1^2 + k^2(r^2 + r_1^2) + k^4}}. \tag{18}$$

Per risolvere quindi il problema, si trovano i punti A_1, B_1 della sviluppante di cerchio che corrispondono ai punti A, B di Λ e si determina il punto C_1 dell'arco A_1B_1 il cui raggio vettore è dato dalla relazione (18). Il punto C di Λ che corrisponde a C_1, risolve il problema.

(Continua)

GEMINIANO PIRONDINI.

*UNA CONVERSAZIONE COI FUSIONISTI [1]

Il Prof. Lazzeri, nelle sue *Note alla discussione della prima quistione trattata dal Congresso,* [2] osserva (pag. 120 ultimo capoverso) che: (*è doloroso a constatarsi, ma è vero*) *gli oppositori* (della fusione, ecc.) *ripetono con insistenza molto monotona e sconfortante le stesse obiezioni che in fondo si riducono a questo:* 1° *son duemila anni che si fa così e non occorre cambiare;* 2° *l'unico risultato ottenuto è quello di rendere indipendente dalle proporzioni la divisione di un angolo in 5 parti eguali.*

AVVERTENZA. — Gli articoli contrassegnati con asterisco (*) sono stati inviati dal Comitato dell'Associazione *Mathesis*.

(1) Pubblicando per debito d'imparzialità il presente articolo, ci asteniamo dal fare commenti e solo ci permettiamo di richiamare l'attenzione dei lettori su quello che l'autorevole *Enseignement mathématique* dice a proposito della fusione. (Veggasi pag. 225 del presente fascicolo).
Nota di G. LAZZERI.

(2) Dei professori di matematica, promosso dall'Associazione *Mathesis*, tenuto in Torino dal 9 al 14 settembre 1898 (*Periodico di Matematica*, serie II^a, vol. I, fasc. I, II, III).

Questa accusa è semplicemente priva di fondamento dopo le osservazioni fatte dal Prof. Retali nell'Adunanza ch'ebbe luogo a Milano il 3 aprile '98 e di cui vien riportato il sunto nel n. 6, anno II, del *Bollettino dell'Associazione Mathesis,* e dopo la pubblicazione nel n. 5, anno II, del *Bollettino* stesso delle mie *Osservazioni sulla Nota « Pro Fusione » del Professor De Amicis,* la qual Nota del De Amicis è certo a tutti conosciuta per la larghissima diffusione che ha avuto (LAZZERI, pag. 122, 2° capoverso) per essere stata, oltre che inserita nel n. 4, anno II, del *Bollettino di Mathesis,* pubblicata anche nel *Periodico di Matematica.* Però per accondiscendere ai desideri del Prof. Lazzeri, ritorno sull'argomento.

È vero che circa *due* (non *uno* come dice il Prof. Lazzeri a pag. 121 ultimo capoverso) anni fa io asserivo che le proposizioni che si dimostrano più semplicemente coll'aiuto di considerazioni stereometriche sono ben poche e di poca entità, se si faccia astrazione dal problema della costruzione di $^1/_5$ di angolo retto, e nelle mie citate *Osservazioni, fra altre cose,* ho ripetuta quella considerazione, sostenendola col prendere in esame non più solo i risultati contenuti in fatto di fusione nel *Testo* del De Paolis, ma ben anco quegli altri che il De Amicis riferisce, e che nella mia « Risposta alla questione V » di circa due anni fa (alla quale il Prof. Lazzeri allude) non avevo considerati perchè, almeno quelli importanti, non riguardano la geometria che s'insegna nei Licei e nel primo biennio degli Istituti tecnici (ed ecco il motivo per cui non ho parlato allora d'altre opere all'infuori di quella del De Paolis). Ora aggiungerò qualche altra osservazione.

Anzitutto tengo a dichiarare esplicitamente che con le mie critiche tendo esclusivamente a provare che non è giustificato lo sfrenato entusiasmo che spinge i fusionisti a voler a qualunque costo introdurre nella scuola secondaria un metodo, che per ora non è che allo stato di formazione, e che io son ben lungi dal disconoscere che, dal punto di vista puramente scientifico, le ricerche dei fusionisti abbiano realmente condotto a dimostrazioni aventi un certo interesse [fra le quali mi piacciono più che altre quelle che riguardano gli assi e i piani radicali, benchè peraltro preferisca le definizioni di asse e di piano radicale come luoghi dei punti ognuno di egual potenza rispetto a due cerchi o a due sfere, che l'altra (che conviene sostituire a questa, seguendo il procedimento del Lazzeri) di luoghi dei punti da ognuno dei quali possono condursi tangenti eguali a due cerchi (di un piano) o a due sfere, oltre che per le ragioni già esposte nelle citate *Osservazioni,* anche perchè con questa seconda definizione, nel caso in cui i cerchi o le sfere si tagliano, bisogna escludere i punti rispettivamente del segmento compreso fra le intersezioni dei due cerchi e la parte interna del cerchio in cui le due sfere si segano], non però superiore a quello delle dimostrazioni già esistenti, tanto che penso che se fin qui fossero date le dimostrazioni dei fusionisti, ed oggi altri dessero le dimostrazioni già esistenti, che sono ora in vigore, questi ultimi vorrebbero esser salutati come liberatori della tale o tal'altra teoria delle figure piane dagli artigli della stereometria, appunto come i fusionisti ci tengono ad aver liberate certe teorie, p. es., da quella delle proporzioni mediante considerazioni stereometriche. Però, ammessa anche la parità di valore scientifico, non solo non trovo necessarie le innovazioni cui mirano i fusionisti, ma anzi preferisco (dal momento che vantaggi didattici nella fusione non ne riscontro, come ho notato nella mia citata « Risposta alla questione V » e nelle mie citate *Osservazioni*) il metodo che ha il vanto dell'antichità, e son certo che questa massima è accettata anche dai fusionisti, come risulta dalle dichiarazioni che fa il Prof. De Amicis là dove nella sua citata Nota (pag. 88) parla della definizione di uguaglianza data dal Prof. Veronese.

Nelle *Note alla discussione*, ecc., il Prof. Lazzeri insiste sull'importanza della fusione, specialmente *dal punto di vista della semplificazione che si ottiene in alcune teorie di geometria piana, trattandole con l'aiuto di nozioni stereometriche*, considerando questo come il principale fra gli argomenti che militano a favore della fusione. A sostegno della sua opinione rammenta la dimostrazione che dà il De Paolis nel suo *Trattato* (pag. 303) del teorema (riportato anche negli *Elementi di Geometria*, di G. Lazzeri e A. Bassani, 2ª edizione, pag. 210): *Dati due triangoli, se ciascun angolo di uno è eguale ad un angolo corrispondente dell'altro, il rettangolo di un lato di uno e di un lato non corrispondente dell'altro è equivalente al rettangolo dei lati corrispondenti*, senza ricorrere alla teoria delle proporzioni, fondandosi su considerazioni stereometriche, donde risulta che alcuni teoremi di geometria piana (fra cui quello ora enunciato; altri sono quelli dei paragrafi 260, 265, 266, 267, 268 dei citati *Elementi*, i cui corrispondenti nella teoria dei segmenti proporzionali sono riportati a pag. 305), che ordinariamente si deducono come corollari di teoremi relativi ai segmenti proporzionali, si possono ricavare indipendentemente da questi, i quali ultimi in seguito vengono dati come corollari di quelli. Se non che sottrarre, p. es., il citato teorema del De Paolis (e lo stesso dicasi per gli altri) dalla teoria delle proporzioni per ricavarne poi come corollario l'altro che *dati due triangoli con gli angoli rispettivamente eguali, i lati dell'uno sono proporzionali ai lati corrispondenti del secondo*, significa subordinare questo secondo alla teoria dell'equivalenza, oltre che alla stereometria, mentre proprio non dipende nè dall'una nè dall'altra. In altre parole, si libera uno schiavo da un padrone per dare un libero cittadino in servitù a due padroni. A meno che non s'intenda di dimostrare il primo teorema nel modo indicato dal De Paolis (o analogo), ed il secondo nel modo ordinario, ed allora addio economia di tempo tanto vagheggiata.

Comunque, la maggior parte dei teoremi che i fusionisti dimostrano indipendentemente dalla teoria delle proporzioni sulla quale le attuali dimostrazioni si fondano, si basa (o si può basare) sul teorema: *Se due triangoli si corrispondono in modo che le rette congiungenti i vertici corrispondenti concorrano in un punto, e che due lati dell'uno siano* *paralleli ai corrispondenti lati dell'altro, anche i due lati rimanenti sono paralleli,* del quale si può dare anche una semplicissima dimostrazione planimetrica affatto indipendente dalla teoria delle proporzioni e dell'equivalenza, e con questa dimostrazione porrò termine alla presente conversazione.

Siano AC, BC rispettivamente parallele ad A'C', B'C'. Supponiamo che AB, A'B' non siano parallele; allora conducendo per B', A' le parallele alla AB, o la prima taglia (AA') o la seconda (BB'): sia la prima che incontri (AA') in D'. Prendiamo di (OA) un summultiplo minore di (A'D') (ciò che è possibile per un corollario del postulato d'Archimede), e prendiamo sul raggio OA' una serie di segmenti eguali a questo summultiplo, dei quali il primo abbia l'origine in O; uno di questi avrà l'estremo in A. Per i punti di divisione si conducano le parallele alla AC (e A'C'), e per i punti che queste determinano sul raggio OC' le parallele alla CB (e C'B'), e consideriamo le intersezioni di queste col raggio OB'. Si ottengono allora sui raggi OC', OB' due serie di segmenti eguali, dei quali uno della prima serie ha l'estremo in C e il corrispondente della seconda un estremo in B. Le congiungenti gli estremi dei segmenti di OA' con gli estremi dei corrispondenti di OB' sono parallele fra loro, e precisamente ad AB, perchè A, B sono due estremi corrispondenti. Ora l'estremo di uno dei segmenti di OA' cade certo in (D'A'), ed il suo corrispondente di OB' (per il modo di costruzione) cade in (BB'), perciò la retta determinata da questi due estremi corrispondenti è parallela alla AB e taglia la B'D' (congiungendo due punti situati da bande opposte rispetto a questa retta) pure parallela ad AB, il che è assurdo. Perciò è A'B' parallela ad AB.

Dunque? È proprio vero che nulla prova che non si possano col tempo trovare dimostrazioni planimetriche altrettanto semplici di quelle stereometriche, e che le idee più semplici sono ordinariamente le più tarde a presentarsi.

Sondrio, 4 gennaio 1899.

FRANCESCO PALATINI.

PICCOLE NOTE

1ª. Quadratura della parabola. — Siano A il vertice, F il fuoco, D il punto d'incontro dell'asse con la direttrice e B un punto qualunque della parabola. Dividasi AB negli archi ugnali AM_1, $M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$, M_nB; si conducano $M_1P_1, \ldots, M_nP_n$, BC perpendicolari alla direttrice e si traccino i raggi vettori FM_1, $FM_2, \ldots, FM_n$, FB. Essendo ugnali BC e BF per le proprietà della parabola, il rapporto del rettangolo $\overline{BC} \cdot \overline{CP_n}$ al triangolo FBM_n è il doppio del rapporto delle distanze di M_n da BC e da BF; questo rapporto tende ad 1 col tendere a zero dell'arco BM_n.

cioè col tendere della retta BM_n a divenir tangente in B, perchè questa tangente dimezza l'angolo $\widehat{FBC}$ per una nota proprietà della parabola; e tendono contemporaneamente ad 1 i rapporti del rettangolo $\overline{BC \cdot CP_n}$ e del triangolo FBM_n al trapezio ed al triangolo mistilinei BCP_nM_n, FBM_n. Pongasi quindi

$$\begin{aligned} AM_1P_1D &= (2+\alpha_1) \quad FAM_1 \\ M_{r-1}M_rP_rP_{r-1} &= (2+\alpha_r) \quad FM_{r-1}M_r \quad (r=2,\ldots,n), \\ BCP_nM_n &= (2+\alpha_{n+1})\, FBM_n \end{aligned}$$

e per l'osservazione fatta, che si potrebbe ripetere per ciascun trapezio e corrispondente triangolo mistilinei,

$$\lim_{n=\infty} \alpha_r = 0 \qquad (r=1,\ldots,n+1).$$

Dalle precedenti relazioni, se s'indicano con α ed α' il minimo ed il massimo dei numeri $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$, deducesi che

$$(2+\alpha)\,FAB < ABCD < (2+\alpha')\,FAB$$

e di qui, facendo crescere n indefinitamente, si deduce che

$$ABCD = 2FAB.$$

2ª. Volume del tetraedro. — Siano M ed N i punti d'incontro del piano condotto per D parallelamente ad ABC con le parallele ad AD condotte per B e per C. Sia P il punto d'incontro di AM con BD, o punto di mezzo dello spigolo BD, e sia Q il punto di mezzo dello spigolo AC. Le faccie laterali del prisma triangolare ABCNMD sono rispettivamente doppie di ABD, ACD e BCM: il volume del prisma, essendo il prodotto della sezione retta per lo spigolo laterale, è il prodotto di AD per il triangolo di lati

$$\frac{2ABD}{AD}, \quad \frac{2ACD}{AD}, \quad \frac{2BCM}{AD}$$

per cui, se Ω è il triangolo di lati ABD, ACD, BCM,

$$ABCNMD = \frac{4}{AD}\,\Omega,$$

per cui si vede che: *il volume d'un tetraedro è* $\frac{4}{3}$ *del rapporto, che ha ad uno spigolo il triangolo, che ha due lati uguali alle due faccie adiacenti a tale spigolo ed ha il terzo lato uguale al triangolo, che ha per lati il detto spigolo e l'opposto ed il segmento doppio della distanza dei centri di altri due spigoli opposti.*

Calcolando AP e CP, come mediane di ABD e CBD, e poi PQ, come mediana di APC, ed esprimendo le aree dei triangoli mediante i lati, si trova così che, se

$$BC = a \;\; , \;\; CA = b \;\; , \;\; AB = c \;\; , \;\; DA = d_1 \;\; , \;\; DB = d_2 \;\; , \;\; DC = d_3 \,,$$

allora

$$ABCD = \frac{T}{12 d_1},$$

dove T è l'area del triangolo di lati uguali a

$$\sqrt{4b^2d_1^2 - (b^2 + d_1^2 - d_3^2)^2} \;\; , \;\; \sqrt{4c^2d_1^2 - (c^2 + d_1^2 - d_2^2)^2} \;\; ,$$
$$\sqrt{4a^2d_1^2 - (b^2 + d_2^2 - c^2 - d_3^2)^2}.$$

Si trova così la nota espressione del volume per mezzo degli spigoli.

Giova notare che sono equivalenti i triangoli BCM, BCN, i quali hanno una coppia di lati uguali alla stessa coppia di spigoli opposti, AD e BC, mentre i rimanenti lati CM e BN sono doppi delle distanze dei centri dell'altre due coppie di spigoli opposti, BD, AC e CD, AB.

3ª. Sviluppi di sen x e di cos x in serie. — Tendendo ad uno il rapporto dell'arco alla tangente, se l'arco tende a zero, si ha che

$$\operatorname{tg} x = \lim_{n=\infty} \operatorname{tg}\left(x \frac{\operatorname{arc tg} \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right) = \lim \operatorname{tg}\left(n \operatorname{arc tg} \frac{x}{n}\right).$$

Per la nota formula esprimente la tangente della somma di più archi mediante le tangenti di questi archi, (*) si ha che:

$$\operatorname{tg}\left(n \operatorname{arc tg} \frac{x}{n}\right) = \frac{n\frac{x}{n} - \binom{n}{3}\frac{x^3}{n^3} + \binom{n}{5}\frac{x^5}{n^5} - \binom{n}{7}\frac{x^7}{n^7} + \dots}{1 - \binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2} + \binom{n}{4}\frac{x^4}{n^4} - \binom{n}{6}\frac{x^6}{n^6} + \dots}.$$

Se s'indicano con P_n e Q_n il numeratore ed il denominatore della precedente frazione, supponendo x positivo e p intero e sufficientemente grande rispetto ad x, si ha che

$$\sum_{m=0}^{m=2p-1} (-1)^m \binom{n}{2m+1} \frac{x^{2m+1}}{n^{2m+1}} < P_n < \sum_{m=0}^{m=2p} (-1)^m \binom{n}{2m+1} \frac{x^{2m+1}}{n^{2m+1}}$$

per cui

$$x - \frac{x^3}{3!} + \dots - \frac{x^{4p-1}}{(4p-1)!} < \lim_{n=\infty} P_n < x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{4p+1}}{(4p+1)!}$$

Siccome questa sussiste per ogni p sufficientemente grande rispetto ad x, e, p. es., se $p > x$, così si ha che:

$$\lim_{n=\infty} P_n = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Si trova similmente che

$$\lim_{n=\infty} Q_n = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$$

E perchè, conseguentemente a quanto precede,

$$\operatorname{tg} x = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \dots}$$

segue che:

$$\operatorname{sen} x = \rho(x)\left[x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right]$$

$$\cos x = \rho(x)\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \dots\right].$$

(*) V., p. es., ANDREINI, *Periodico di Matematica*, 1897, pag. 57, formula (3).

preferite: basti il dire che per la Cardioide, invece dell'equazione polare, semplicissima ed usata, riporta quella parametrica che si ottiene considerando la Cardioide come un'epicicloide particolare.

Manca un cenno di molte curve assai importanti, la parabola cubica per esempio, e si dà per equazione di una lemniscata, quella della lemniscata di Bernoulli e per equazione di una strofoide quella della strofoide retta.

A pag. 156 si legge: L'iperbole si dice equilatera quando assume la forma

$$x^2 - y^2 = a^2 \ (!)$$

Nella parte che riguarda il calcolo differenziale si trova a pag. 169 la seguente formula che riporto senza commenti:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}.$$

Voglio credere che questo sarà un errore di stampa, com'è certamente quello di pag. 76, dove, fra le formule di Geometria elementare, si riportano le seguenti relative ai lati a, b, c di un triangolo

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bc \text{ ed analoghe.}$$

A pag. 199 poi è detto:

« Se l'equazione della curva è data per mezzo delle equazioni $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, si ha

$$\text{area} = \int\int dx\, dy \ (?) \text{ »}$$

Anche la parte delle applicazioni del calcolo è troppo scarsa. Nella teoria delle curve gobbe si omettono perfino le formule di Serret, che ne sono, può dirsi, il fondamento. Dell'applicazione del calcolo differenziale alla teoria generale della superficie, teoria che specie in questi ultimi anni ha acquistato tanta importanza, non si fa parola.

Prima di chiudere questo mio cenno sul Repertorio di Matematica e Fisica mi piace notare, ad onore della casa editrice, che il volume è impresso nitidamente ed elegantissimo.

Il 2° volume conterrà le formule di Fisica e di Meccanica razionale.

G. C. L.

GIULIO VIVANTI — *Corso di Calcolo Infinitesimale.* — Messina, Libreria editrice Antonio Trimarchi, 1899.

Il chiarissimo A. in una breve prefazione a questo suo libro accenna alle precipue ragioni per le quali lo studio del Calcolo infinitesimale riesce difficile ai giovani studiosi, e dice, giustamente, che fra esse quella di maggior peso deriva dalla natura stessa del metodo infinitesimale, il quale, se non sia ben chiarito, viene scambiato con un metodo di approssimazione. Partendo da questa idea l'A. si studia in ogni circostanza di dileguare dallo spirito dello studioso l'erroneo concetto, e vi riesce magistralmente con la massima chiarezza non scompagnata dal più stretto rigore di ragionamento. Anzi, per maggiormente mettere in vista la differenza tra i metodi, egli, seguendo le tracce indicate dal CLIFFORD nel suo libro *Il senso comune nelle scienze esatte*, mostra che quei metodi d'approssimazione, i quali si adoperano nella vita pratica, sono gli stessi che poi conducono, mediante il metodo infinitesimale, all'esattezza. Queste sono le due più spiccate caratteristiche del pregevolissimo lavoro.

Il libro si apre con taluni preliminari, in cui l'A. si propone di dare un'idea generale del metodo infinitesimale, quasi per stabilire, direi, la definizione del Calcolo infinitesimale; ma, a mio avviso, essi sono inopportuni, perchè gl'indotti non c'imparano niente, e i periti li conoscono. Il materiale poi, che costituisce il *Corso*, è quello ordinario che trovasi in tutti i trattati di Calcolo; ma la sua distribuzione non è la consueta, avendo l'A. abolita la separazione del calcolo differenziale dall'integrale. La fusione dei due calcoli, già tentata, fin da molti anni, negli *Elementi di calcolo infinitesimale* del Gambardella, e poi praticata con maggior rigore e vantaggio nelle lezioni che l'Arzelà detta da parecchi anni nell'Ateneo bolognese, nell'opera del Vivanti è molto ben riuscita, sia per aver messa in chiara luce l'utilità, che da essa deriva all'insegnamento di tale materia, sia per aver resa più intima la reciproca dipendenza fra i due processi di differenziazione e d'integrazione.

Nelle recensioni di nuovi lavori, che appaiono nel mondo scientifico, è invalso l'uso di mettere in vista i difetti che per avventura vi si trovino, quali che essi siano; ma io son d'opinione che, se quelli non sono tali da gridare: guardati dall'appestato, non debbasene punto parlare. Del resto nel lavoro dell'egregio A. si potrà trovare, forse, qualche neo, ma non certo macchie, e *de minimis* non conviene occuparsi. Pur tuttavia farò notare che per mio gusto avrei desiderato il libro più ricco di applicazioni, specie nella parte di geometria differenziale, o almeno provvisto di una scelta raccolta di esercizi con qualche nota esplicativa qua e là.

Spero che questo mio cenno di recensione possa valere a rendere più noto non il nome dell'A., che è già tanto conosciuto, ma il suo libro, il quale per le sue pregevolissime qualità molto si addice agli studenti universitari. Peccato che l'edizione, nitidissima nei tipi, non sia molto scrupolosamente corretta nella composizione.

R. M.

L'enseignement mathématique, revue internationale. — Directeurs: C. A. Laisant et H. Fehr.

È uscito il primo numero di questa interessante rivista d'indole essenzialmente didattica, che la ditta editrice G. Carré e C. Naud di Parigi pubblicherà in fascicoli bimestrali di circa 80 pag. ciascuno.

Gli egregi direttori in un primo articolo spiegano quale sia la natura e lo scopo della nuova rivista, che si può riassumere così. Tutti gl'insegnanti matematica nei vari paesi sono persuasi che nei mezzi pedagogici impiegati sono possibili dei miglioramenti, che i programmi richiedono riforme e semplificazioni più o meno radicali. Per procedere ragionevolmente a queste riforme è necessario stabilire rapporti fra i matematici dei varii paesi, in guisa che ognuno possa facilmente conoscere ciò che per l'insegnamento si fa nei paesi vicini.

" Noi, dicono i direttori, abbiamo voluto colla pubblicazione della nostra rivista,
" abbattere gli ostacoli che si oppongono a queste comunicazioni reciproche e creare
" una specie di corrispondenza mutua, continua fra gli uomini che hanno consacrato
" la loro vita a questa nobile missione: l'insegnamento matematico della gioventù ".

Per conseguenza la rivista avrà carattere internazionale e conterrà: 1° articoli generali, 2° studi pedagogici, 3° una cronaca e delle corrispondenze, 4° una parte bibliografica.

Un tale programma è molto pratico ed interessante e ci affrettiamo a mandare i più cordiali auguri al nuovo confratello, che, non ne dubitiamo, recherà importanti servizi all'insegnamento della matematica.

Il fascicolo contiene poi i seguenti articoli:

1°. Galdeano. *Le matematiche in Spagna.* — In questo articolo l'illustre professore dell'Università di Saragozza espone con molta profondità di dottrina ed ampiezza di vedute una rapida sintesi degli studi matematici del suo paese.

2°. Laisant. *Le quistioni di terminologia.* — Di questo argomento si è occupato anche il congresso tenuto a Torino nel settembre scorso, e speriamo di poter presto pubblicare la relazione del prof. De Amicis, esso è quindi per noi di attualità. L'egregio autore si domanda come dei giovani che studiano per la prima volta la matematica, possano raccapezzarsi con un vocabolario complicato, talvolta assurdo e contrario alla logica; e dopo aver portato una quantità di esempi, alcuni dei quali relativi alla sola lingua francese, altri applicabili a tutte le lingue, fa la seguente proposta:

Si nomini una commissione internazionale incaricata di formare una specie di vocabolario matematico internazionale, che si riunisca alla fine del Congresso di Parigi del 1900, e in due o tre sedute stabilisca il piano d'insieme dei lavori. Negli anni successivi si potrà preparare il materiale necessario alla compilazione di un interessante rapporto parziale o totale da discutersi nel successivo Congresso.

La proposta mi sembra ottima, e crederei conveniente che l'Associazione *Mathesis* la facesse sua per quel che si riferisce alla nostra lingua.

3°. Binet. *La pedagogia scientifica.* — L'autore, che dirige il laboratorio di psicologia fisiologica della Sorbona, espone ciò che egli crede dovrebbe farsi per rendere la pedagogia una scienza basata sopra l'osservazione e l'esperienza.

4°. H. Laurent. *Considerazioni sull' insegnamento delle matematiche nelle classi speciali in Francia.* — Le scuole speciali preparano, come è noto, alla scuola politecnica; dopo varie considerazioni relative all'organizzazione di queste scuole, l'A. fa osservazioni giustissime, e applicabili anche al nostro paese, sui danni provenienti dall'eccessivo aumento del proletariato intellettuale causato dalla soverchia produzione di laureati.

5°. Fehr. *Sull' insegnamento degli elementi di trigonometria.*

6°. Fontené. *Sull' insegnamento della teoria dei vettori.*

Segue la cronaca e la bibliografia. In questa sono analizzati coscienziosamente i seguenti libri: *Lazzeri e Bassani.* Elementi di geometria (Ripert). — *Appell.* Eléments d'analyse mathématique (Greenhill). — *Oltramare.* Calcul de généralisation (Laisant) ecc.

Ci sia lecito riportare le parole colle quali si chiude la recensione del primo fra i libri citati.

" Riassumendo, il libro dei Sigg. Lazzeri e Bassani, ben pensato, scritto con " metodo e rigore, ci sembra dover richiamare l'attenzione la più seria di tutte " le persone che s' interessano all' insegnamento. Il principio della fusione delle " due geometrie, considerato ieri ancora come un'utopia, oggi divenuto un' idea il " cui studio s' impone, è destinato forse a trasformarsi, in un prossimo avvenire " in metodo classico per l' insegnamento della geometria elementare, attendendo " la sua adozione in tutte le branche della geometria. Se questo progresso si " realizzerà, il libro dei professori dell'Accademia Navale Italiana, già convalidato " da 12 anni d' insegnamento vi avrà potentemente contribuito ".

Lieti di un giudizio così lusinghiero gli autori del libro inviano i loro ringraziamenti al sig. Ripert per mezzo del *Periodico*.

G. L.

*DA GIORNALI E RIVISTE

Giornale di Matematiche. Vol. XXXVI, 1898 (Napoli, Benedetto Pellerano).

Fasc. II (marzo e aprile). *R. Viterbi.* Le equazioni differenziali lineari a coefficenti algebrici integrabili algebricamente ecc. (continuazione e fine). — *E. Ciani.* Alcune osservazioni sopra la configurazione di Kummer. [L'A. considera in primo luogo quelle delle ∞^3 configurazioni di Kummer che vengono individuate da 6 complessi lineari a due a due in involuzione (dati nel modo più generale possibile), le quali hanno più di due punti singolari in linea retta; in secondo luogo, posto di dire che per 6 punti di una conica passa un sistema σ quando delle 15 rette da esse individuate tre concorrono in un punto (diverso da quei 6), stabilisce quanti e quali sistemi σ si possono far passare per 6 punti opportunamente scelti sulla conica. (*)] — *C. Pietrocola.* Sulla risoluzione per numeri interi dell'equazione $x^4 + 4hx^2y^2 + (2h-1)^2y^4 = z^2$ ove $4h-1$ e $2h-1$ sono numeri primi. [Si tratta, come avverte l'A., di un problema suggerito dalla ricerca della soluzione di una questione proposta dal sig. P. Tannery nell'*Intermédiaire des mathématiciens* (833, anno 1896), nella quale chiedesi se l'equazione $x^4 + 4x^2 + 1 = y^2$ ammette una soluzione in numeri razionali]. — *M. Pannelli.* Sopra alcuni significati geometrici degli invarianti del connesso ternario di primo grado. [I significati a cui si riferisce il titolo sono dedotti dalla considerazione delle coniche isologhe corrispondenti ai punti ed alle rette di un piano in cui il connesso venga rappresentato]. — *A. Bassi.* Studio sulle funzioni di genere qualunque e in particolare sulle funzioni di genere zero e di genere uno. [In questo lavoro l'A. si propone di riunire e ordinare i principali risultati ottenuti, e di metterne in luce di nuovi, relativamente alle funzioni *olomorfe* (funzioni uniformi che si mantengono finite e continue in tutto il piano), limitandosi a quelle dotate di genere (chiamate di prima classe dal Vivanti), e prendendo fra queste in particolare considerazione quelle di genere zero, che hanno molte proprietà in comune coi polinomi, i quali ne sono casi particolari, e quelle di genere uno, alle quali appartengono le funzioni trigonometriche, e che hanno in comune con le prime le proprietà più essenziali].

Fasc. III (maggio e giugno). — *A. Bassi.* Sullo studio sulle funzioni di genere qualunque ecc. (continuazione). — *T. Cifarelli.* Sull'analisi intrinseca delle congruenze. [L'A. partendo dalle formole fondamentali per l'analisi intrinseca delle superficie e delle congruenze, date dal Prof. Cesàro nella " Geometria intrinseca, „ si propone di esporre alcune delle più importanti proprietà dei sistemi di ∞^2 di rette]. — *F. De Astis.* Sulla derivabilità di un sistema di forme binarie da un'unica forma con applicazione al sistema di due cubiche binarie. [Dopo aver esposto un metodo che serve a dedurre un numero qualunque di forme binarie di grado n da una stessa forma di grado più elevato mediante le derivate parziali di questa rispetto alle sue variabili binarie, l'A. applica questo metodo per trattare il problema, già risolto dal Clebsch nella " Theorie der binären algebraischen Formen „, di trovare una sostituzione lineare tale, che date due cubiche binarie qualsiansi, si trasformino in altre due che siano derivate parziali prime rispetto alle variabili binarie

(*) Questo problema è stato svolto anche da F. Palatini nella Nota: *Sopra i triangoli formati coi lati dell'esagramma di Pascal, i quali possono ridursi ad un punto.* Palmi, 1891.

d'una stessa biquadratica]. — *L. Sinigallia.* Sulle superficie di area minima applicabili su se stesse. [L'A. si propone di risolvere il problema indicato dal titolo nel caso delle superficie riferite univocamente al piano, e trova 5 classi di superficie minime dotate di un numero finito di applicabilità su se stesse, e viene a stabilire che in quattro di queste classi vi sono sempre applicabilità che si riducono a movimenti della superfice su sè stessa, ciò che avviene per tutte le applicabilità di una di queste 4 classi]. — *T. Cifarelli.* Sopra una classe di curve intrinsecamente analoghe alla catenaria di eguale resistenza. [Si tratta delle curve definite dall'equazione intrinseca $\rho = \frac{a}{2k}(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}})$]. — *G. Urzì.* Un caso particolare del problema della rotazione d'un corpo solido di rivoluzione sospeso per un punto del suo asse di simmetria. [Si tratta un caso particolare di un problema segnalato dal Darboux nella memoria " Sur le mouvement d'un corps solide de révolution fixé par un point de son axe "].

Fasc. IV (luglio e agosto). — *G. Urzì.* Un caso particolare ecc. (continuazione e fine). — *A. Vaccaro.* Equilibrio delle superficie piane elastiche isotrope. [Viene studiato un caso particolare d'un problema trattato dal Prof. Somigliana, caso per il quale, come il Somigliana stesso osserva, occorre una trattazione a parte]. — *F. Giudice.* Sull'analisi indeterminata di primo grado. [Dopo aver dimostrato le formole contenenti $\frac{n(n-1)}{2}$ interi arbitrari, che il Betti ricavò per le soluzioni intere d'un'equazione lineare ad n incognite, della quale sia nota una soluzione particolare, generalizzando le formole date per le soluzioni intere dell'equazione a tre incognite nell'Algebra del Bertrand, e dopo aver date di queste ultime una dimostrazione più semplice di quella che trovasi in detta Algebra, l'A. espone un metodo comodo per esprimere le soluzioni intere dell'equazione a n incognite mediante $n-1$ interi arbitrari]. — *J. H. Graf.* Quelques notions sur la série hypergéométrique de Gauss. [Il presente articolo, che sarà continuato in numeri successivi del Giornale, è uno studio sulla serie indicata, inspirato ai metodi di Schläfli].

Fasc. V (settembre e ottobre). — *J. H. Graf.* Quelques notions ecc. (continuazione e fine). — *L. Restellini.* Generalizzazione d'una formola d'integrabilità. [Data una funzione F di $x, y, z, r, \ldots$ (dove x è variabile indipendente e $y, z, r, \ldots$ variabili dipendenti, ciascuna funzione di x e di quelle che la precedono e, se si vuole, z anche delle derivate di y rispetto ad x, e r delle derivate di y e di z ecc. e delle derivate di y rispetto ad x e di quelle di z rispetto ad x ed y ecc., l'A. si propone di trovare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la F sia integrabile, indipendentemente dalla conoscenza dei legami che esistono fra le funzioni e la variabile indipendente. Il problema è stato già trattato da Eulero e dal march. di Condorcet nel caso in cui $y, z, \ldots$ siano funzioni solamente della x]. — *E. Piccioli.* Sulle curve in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni. [Vengono studiate *a)* le eliche cilindriche, cioè quelle curve cilindriche la cui tangente fa in ogni punto un angolo costante con una direzione fissa, *b)* quelle curve la cui ultima direzione principale (cioè perpendicolare all'iperpiano osculatore) fa un angolo costante con una direzione fissa, *c)* le geodetiche del cono e le curve che hanno gli iperpiani osculatori equidistanti da un punto]. — *A. Perna.* Sulle deformazioni infinitesime delle curve. [Poste le formole fondamentali per lo studio delle deformazioni infinitesime sia delle curve piane che delle storte, l'A. tratta alcuni problemi relativi a tali deformazioni. Quanto alle curve storte prende in particolare esame quelle di una sfera nell'ipotesi che le deformazioni abbiano luogo sulla sfera stessa]. *E. Veneroni.* Sopra una rappresentazione univoca dello spazio rigato nello spazio punteggiato a quattro dimensioni. [Posti i punti di due piani α, β dello spazio rigato R in corrispondenza proiettiva rispettivamente coi piani di due reti di piani (a), (b) dello spazio punteggiato a 4 dimensioni s, ad ogni retta generica di R corrisponde in s il punto d'incontro dei due piani che corrispondono in (a), (b) alle intersezioni di quella retta con α, β e viceversa. Di questa rappresentazione è caso particolare l'ordinaria rappresentazione che si ottiene colla proiezione stereografica]. — *Fr. Meyer.* Sullo stato presente della teoria degli invarianti (continuazione). — *A. Ramorino.* Gli elementi immaginari nella geometria (continuazione e fine). F. PALATINI.

Nouvelles Annales de math. T. XVII, 1898 (Paris, Gauthier Villars).

Fasc. XII (decembre). Necrologia del Prof. *Carlo Brisse.* Secondo concorso delle N. A. (prorogato al 15 marzo 1899). — *E. M. Lemeray.* (Metodo di approssimazione che esige solo operazioni *dirette*). (*) — *Karagiannidès.* Sopra una estensione d'una formola del Sig. Léauté. — *Ch. Bioche.* Sulle coniche che sono le proiezioni d'una cubica gobba (le proiezioni d'una cubica gobba, fatte sopra un piano π dai punti della curva, sono coniche circoscritte a un triangolo, tali che le rette di Pascal corrispondenti passano per un punto fisso). (**) — *Dumont.* Osservazione sull'applicazione della logica alla teoria delle regioni. — Corrispondenza. — Certificato di studi superiori delle facoltà di scienze (Sessione di luglio 1898; Caen, Tolosa, Montpellier, Lyon, Rennes, Dijon, Poitiers). — Bibliografia. — Soluzioni di quistioni proposte, 929 (nota della redaz.), 1716. (*Barisien, Servais*). (***)

T. XVIII, 1899, Fasc. I (gennaio). *H. Duport.* Dimostrazione di alcuni teoremi di cinematica. — *G. Candido.* Formole per lo studio di una figura notevole. — *C. Bioche.* Sulle quadriche circoscritte a un tetraedro. (In generale il tetraedro formato da 4 punti d'una quadrica non sviluppabile e quello dei 4 piani tangenti non sono omologici, ma possono sempre trovarsi sulla quadrica sistemi di 4 punti che presentano queste particolarità). — Certificati di studi sup. delle facoltà di scienze. (Sessione di luglio 1898, Besançon. — Sessione di novembre, Besançon Montpellier Paris). — Bibliografia. — Pubblicazioni recenti. Quistioni 434, 439, 448 (già proposte nel 1858). V. R.

(*) L'A. chiama *operazioni dirette* quelle che entrano nella costruzione del primo membro della equazione proposta. (V. R.)

(**) Il punto fisso è il *fuoco* del piano π nel sistema focale definito dalla cubica gobba; il teorema del Sig. BIOCHE si ottiene subito come caso particolare del teorema di CREMONA (*Nouvelles ann.* Deux. Serie T. I, p. 287) prendendo per esagono inscritto nella cubica quello avente per vertici i tre punti in cui essa è segata da π e i 3 punti a loro consecutivi. (Cfr. anche SCHRÖTER, *Oberflächen 2ter Ordnung und Raumcurven 3ter Ordnung*, pag. 247. (V. R.)

(***) Il punto N non è un punto cuspidale, come è detto (pag. 579) nella elegante soluzione del Prof. SERVAIS, autore della quistione 1716; esso è invece un punto tacnodale. La quartica è la trasformata di un cerchio avente per centro il punto medio di OV nella inversione indicata nella quistione 428 del *Periodico di Matematica* (T. XIII, p. 200). (V. R.)

ERRATA-CORRIGE DEL FASCICOLO PRECEDENTE.

A pagina 152, verso 10:

invece di $\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{m-1}{m}}+\left(\frac{v}{b}\right)^{\frac{m-1}{m}}+\left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{m-1}{m}}=0$, leggasi $\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{m}{m-1}}+\left(\frac{v}{b}\right)^{\frac{m}{m-1}}+\left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{m}{m-1}}=0$.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 9 Marzo 1899.

PROIEZIONE STEREOGRAFICA

e sua applicazione allo studio di alcune linee sferiche

(Continuazione e fine).

§ 6. — Considerando sulla sfera la serie di meridiani passanti per lo stesso diametro PQ, una trajettoria di questi punti sotto angolo costante (trajettoria isagonale) è una linea Λ detta *lossodromia*. Ritenuta la terra sferica, tale linea rappresenterebbe evidentemente la rotta di un vascello che naviga sotto il medesimo rombo di vento.

La proiezione stereografica della lossodromia Λ è una linea L che sega i raggi vettori uscenti da P sotto angolo costante. Una tale linea si chiama *spirale logaritmica* e P è il suo polo.

Mentre la spirale logaritmica L si avvolge infinite volte attorno al polo P e dall'altra parte va all'infinito, la lossodromia sferica Λ invece si avvolge in infinite spire attorno ai due poli P, Q (punti assintotici).

Una lossodromia sferica è una linea piana soltanto quando si riduce a un parallelo. Infatti una linea piana Λ tracciata sopra una sfera è un cerchio, e la sua proiezione stereografica L è un altro cerchio. Ora una traiettoria isagonale di un fascio di raggi è un cerchio solamente quando questo ha il centro nel centro del fascio, nel qual caso tale linea è ortogonale ai raggi del fascio. Il cerchio L in tali condizioni è la proiezione stereografica di un parallelo della sfera.

A partire dall'origine Ω degli archi σ della lossodromia si prenda un arco qualunque $\Omega A = \sigma$ e si divida in n parti eguali nei punti $A_1, A_2, A_3, \ldots . A_{h-1}, A_h, \ldots . A_{n-1}$. Si congiungano questi punti col polo P mediante archi di cerchio massimo, e da A_{h-1} si conduca l'arco di parallelo $A_{h-1} M_h$ compreso fra i meridiani PA_{h-1}, PA_h. Tirata la corda $A_{h-1} A_h = c_h$, il triangolo rettangolo $A_{h-1} A_h M_h$ può considerarsi come rettilineo; se dunque θ è l'inclinazione costante della lossodromia sui meridiani, si ha:

$$A_h M_h = c_h \cdot \cos \theta.$$

Perciò

$$PA = P\Omega + \left(\sum_{h=1}^{h=n} c_h\right) \cdot \cos \theta.$$

Supponendo che n cresca indefinitamente, si ha

$$\rho = \rho_0 + \sigma \,.\, \cos\theta, \tag{19}$$

essendo ρ, ρ_0 i raggi vettori sferici PA, PQ.

Preso poi un altro punto B corrispondente al raggio vettore sferico $PB = \rho_1$, si deduce dalla (19)

$$\rho = \rho_0 + \Omega A \,.\, \cos\theta$$
$$\rho_1 = \rho_0 + \Omega B \,.\, \cos\theta,$$

d'onde

$$\text{arco } AB = \frac{\rho_1 - \rho}{\cos\theta}. \tag{20}$$

Se si vuole la lunghezza di tutta la lossodromia dal polo P all'altro Q, bisogna fare nella (20) $\rho = 0$, $\rho_1 = \frac{\pi k}{2}$, e si ha

$$\text{Lunghezza lossodromia} = \frac{\pi k}{2\cos\theta}.$$

Benchè dunque la linea si avvolga infinite volte attorno ai due poli, essa ha tuttavia una lunghezza finita. Per $\theta = 60^0$, la lunghezza della lossodromia eguaglia quella di un meridiano. Per $\theta > 60^0$ la lossodromia è maggiore del meridiano; per $\theta < 60^0$ è invece minore.

Posto arco $AM = \pm\, l$, secondo che esso è contato in una direzione o nell'altra, e $PM = x$, si ha

$$\pm\, l = \frac{x - \rho}{\cos\theta},$$

d'onde

$$x = \rho \pm l \,.\, \cos\theta.$$

Questa formola serve per portare sulla lossodromia, in una data direzione, un arco di data lunghezza l.

Considerando separatamente il caso del segno $+$ e quello del segno $-$, si ha

$$x = \rho + l \,.\, \cos\theta, \qquad y = \rho - l\cos\theta,$$

d'onde sommando

$$x + y = 2\rho.$$

Perciò « *La somma dei raggi vettori che vanno a punti situati da bande opposte di un punto* A *ed equidistanti da esso, è costante ed eguale al doppio del raggio vettore che va ad* A ».

Se C è un punto qualunque intermedio fra A e B, si ha

$$AC = \frac{x - \rho}{\cos\theta}, \qquad CB = \frac{\rho_1 - x}{\cos\theta}.$$

Se dunque: $\frac{AC}{CB} = m$, risulta

$$x = \frac{\rho + m\rho_1}{1 + m}.$$

In particolare « *Il raggio vettore che divide per metà un arco qualunque di una lossodromia è la media aritmetica dei raggi vettori estremi* ». (Conformemente al teorema precedente).

Se s'incomincia a contare l'arco di una lossodromia Λ dal polo P, si ha $\rho_0 = 0$. Chiamando quindi σ e σ_1 le lunghezze dei due archi di Λ compresi fra un determinato punto A e i due paralleli della sfera corrispondenti ai raggi vettori sferici ρ, ρ_1, si ha in causa della (19)

$$\sigma = \frac{\rho}{\cos\theta}, \qquad \sigma_1 = \frac{\rho_1}{\cos\theta},$$

d'onde

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{\rho_1}{\rho}.$$

Perciò « *Considerando gli archi di tutte le lossodromie passanti per un determinato punto* A *della sfera, che sono compresi fra due paralleli fissi, il rapporto delle parti in cui rimangono divisi quegli archi dal punto* A *è costante ed eguale al rapporto delle parti in cui rimane diviso l'arco corrispondente del meridiano* ».

In particolare « *Considerando tutte le intere lossodromie che passano per un determinato punto* A *della sfera, il rapporto delle parti in cui esse rimangono divise da quel punto è costante ed eguale al rapporto delle parti in cui rimane diviso il semi-meridiano di quel punto* A ».

In questo caso si ha

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{\pi k - 2\rho}{2\rho}.$$

Questi risultati sono molto interessanti e servono a semplificare la soluzione di molte questioni e la dimostrazione di molte proprietà inerenti alla lossodromia.

Se ad esempio si vuol dividere l'intera lossodromia, o un suo arco, in parti eguali o proporzionali a numeri dati, basta fare l'analoga operazione sopra l'arco corrispondente di meridiano.

Altrettanto si dica se si vuole dividere la lossodromia, o un arco di essa, in sezione aurea ecc. ecc.

Il rapporto anarmonico di quattro punti di una lossodromia è eguale al rapporto anarmonico dei quattro punti corrispondenti di un meridiano. E quindi i primi quattro punti formano un gruppo armonico, quando lo formano gli altri ecc. ecc.

Posto che sia

$$AC : CB = \rho : \rho_1,$$

risulta

$$\frac{x-\rho}{\cos\theta} : \frac{\rho_1 - x}{\cos\theta} = \rho : \rho_1,$$

d'onde

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1}\right).$$

Dunque « *Il raggio vettore che divide un arco di lossodromia in parti proporzionali ai raggi vettori estremi, è media armonica fra questi raggi* ».

Se nel triangolo PAB, avente per base un arco di lossodromia e per lati i due raggi vettori estremi si suppone verificata la relazione

$$\rho^2_1 = \rho^2 + (\text{arco AB})^2,$$

si deduce

$$\rho_1 = \frac{1+\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\cdot\rho. \tag{21}$$

Perciò « *Se dopo avere condotto un raggio vettore* ρ (o ρ_1) *di una lossodromia, se ne conduce un secondo* ρ_1 (o ρ) *tale che sia soddisfatta la condizione* (21), *nel triangolo che risulta è verificato il teorema di Pitagora, quando si consideri come ipotenusa il raggio vettore maggiore* ».

Supposto che l'ipotenusa sia rappresentata dall'arco AB di lossodromia, si deve avere

$$\rho^2_1 \operatorname{sen}^2\theta - 2\rho\rho_1 + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta = 0,$$

d'onde

$$\rho_1 = \frac{\rho\,(1 \pm \cos\theta\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta})}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Si vede quindi che « *Condotto un raggio vettore arbitrario* ρ, *se ne possono condurre altri due* ρ_1, ρ_2 *in modo, che per i due triangoli che risultano sia soddisfatto il teorema di Pitagora, quando l'arco di lossodromia che ne congiunge le estremità, rappresenti l'ipotenusa* ».

Siccome $\rho_1\rho_2 = \rho^2$, si conclude che « *Costrutti i due triangoli precedenti, si trova che il raggio vettore dato è media proporzionale fra i due raggi vettori condotti* ».

§ 7. — Le proprietà precedentemente dimostrate per la lossodromia valgono, per la massima parte, anche per la spirale logaritmica; e una tale reciproca dipendenza fra una linea sferica Λ e la sua proiezione stereografica L ha luogo qualunque sia Λ.

Per mostrare il profitto che si può trarre da tale reciproca dipendenza, andremo a dimostrare due proprietà notevoli della spirale logaritmica, estendendole poi alla lossodromia sferica.

Siano (fig. 2) PAB, PBC, ... triangoli simili consecutivi. I raggi vettori PA, PB, PC, ... sono inclinati sulle basi dei triangoli di un angolo costante, che si chiamerà θ; i lati A_0A, B_0B, C_0C, ... sono inclinati sui lati PA, PB, PC, ... di un altro angolo costante, che si chiamerà i.

Chiamando H l'intersezione delle rette AA_0, PB, si considerino i due triangoli APH, BA_0H i quali, avendo due angoli eguali, hanno pure eguali i terzi angoli APH, BA_0H; dal che consegue che, essendo costanti gli angoli APB, BPC, ... sono pure costanti gli altri AA_0B, BB_0C. ...

I triangoli AA_0B, BB_0C, ... avendo quindi due angoli rispettivamente costanti, sono simili e si avrà

$$\frac{PA}{PB}=\frac{AB}{BC}, \qquad \frac{A_0A}{B_0B}=\frac{AB}{BC},$$

d'onde

$$\frac{PA}{PB}=\frac{A_0A}{B_0B}.$$

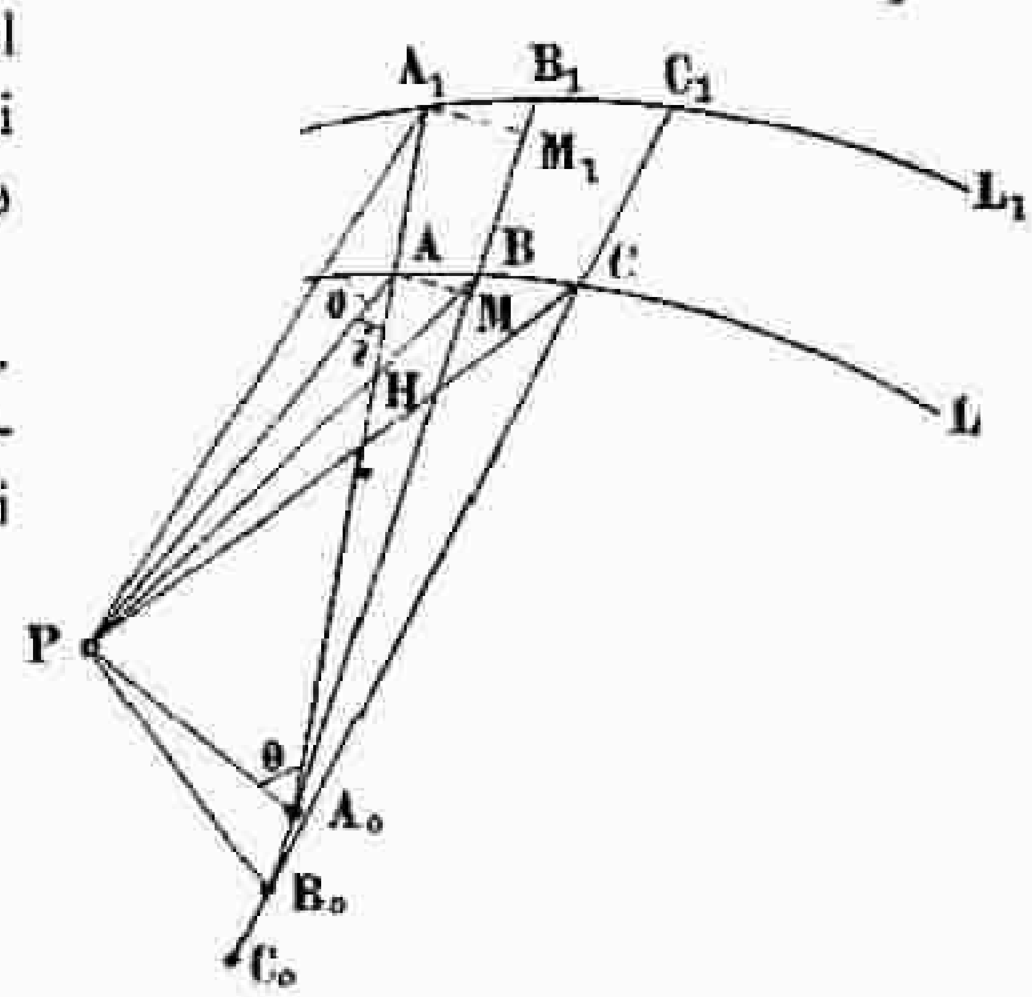

Fig. 2.

I due triangoli PAA_0, PBB_0 hanno dunque un angolo rispettivamente eguale compreso fra lati proporzionali; sono quindi simili.

Possiamo dire perciò che i raggi vettori PA_0, PB_0, ... sono inclinati di un angolo costante sulle rette A_0A, B_0B, ... Essendo poi

$$\text{angolo } APA_0 = \text{angolo } BPB_0,$$

sopprimendo la parte comune angolo BPA_0, rimane

$$\text{angolo } APB = \text{angolo } A_0PB_0.$$

Avendosi inoltre

$$\frac{PA}{PA_0}=\frac{PB}{PB_0},$$

i triangoli PAB, PA_0B_0 risultano simili e perciò

$$\text{angolo } PB_0A_0 = \text{angolo } PBA = \theta.$$

Passando al limite col diminuire indefinitamente le basi AB, BC, ... dei primitivi triangoli, si giunge al teorema « *Se per i vari punti di una spirale logaritmica si conducono delle rette inclinate sui raggi vettori di un angolo costante, quelle rette inviluppano un'altra spirale logaritmica eguale alla data ed avente il medesimo polo di essa* ».

In particolare, supponendo $\theta + i = 90^0$, si ha « *La sviluppata di una spirale logaritmica è un'altra spirale logaritmica eguale alla data ed avente il medesimo polo di essa* ».

Per i vari punti A, B, C, ... di una spirale logaritmica L si conducano delle rette inclinate di un angolo costante i sui raggi vettori e sopra di queste si prendano i segmenti AA_1, BB_1, ... proporzionali all'arco di L contato dal polo P.

Sia L_1 il luogo degli estremi $A_1, B_1, C_1, \ldots$ (fig. 2). Dal triangolo APA_0 si ricava

$$\frac{A_0A}{PA} = \frac{\operatorname{sen} APA_0}{\operatorname{sen} PA_0A} = \frac{\operatorname{sen}(\theta + i)}{\operatorname{sen}\theta};$$

e poichè per la spirale logaritmica si ha

$$PA = \cos\theta \,.\, s, \tag{22}$$

[analogamente a ciò che si ha per la lossodromia. V. la formola (19)] risulta

$$A_0A = \operatorname{sen}(\theta + i) \,.\, \cot\theta \,.\, s. \tag{23}$$

Se il rapporto di proporzionalità dei segmenti AA_1, BB_1, CC_1, ... all'arco corrispondente di L è m, si ha

$$AA_1 = ms \tag{24}$$

e allora dal triangolo PAA_1 si deduce

$$\begin{aligned} PA_1 &= \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{AA_1}^2 - 2PA \,.\, AA_1 \,.\, \cos(\widehat{PAA_1})} = \\ &= s\sqrt{\cos^2\theta + m^2 + 2m\cos\theta\cos i}. \end{aligned} \tag{25}$$

Troviamo ora una relazione fra l'arco s di L e l'arco s_1 di L_1. Col centro A_0 e coi raggi A_0A, A_0A_1 si descrivano i due archi circolari AM, A_1M_1 compresi fra i raggi vettori A_0A_1, A_0B_1. Si ha

$$AA_1 = ms, \qquad BB_1 = m(s + AB),$$

d'onde

$$BB_1 - AA_1 = m \,.\, AB$$

$$(BB_1 - BM_1) - BM = m \,.\, AB\,; \qquad B_1M_1 - BM = m \,.\, AB\,;$$

$$B_1M_1 = m \,.\, AB + BM = m \,.\, AB + AB \,.\, \cos(\theta + i) = [m + \cos(\theta + i)] \,.\, AB. \tag{26}$$

D'altronde

$$A_1M_1 : AM = A_0A_1 : A_0A,$$

da cui, applicando le relazioni (21), (22), si deduce

$$A_1M_1 = \frac{m + \operatorname{sen}(\theta + i)\cot\theta}{\operatorname{sen}(\theta + i)\cot\theta} \,.\, AM$$

e poichè: $AM = AB \,.\, \operatorname{sen}(\theta + i)$, risulta

$$A_1M_1 = \frac{m + \operatorname{sen}(\theta + i)\cot\theta}{\cot\theta} \,.\, AB. \tag{27}$$

Ricordando le relazioni (26), (27), si deduce dal triangolo rettangolo $A_1M_1B_1$

$$A_1B_1 = \frac{\sqrt{[m + \operatorname{sen}(\theta + i)\cot\theta]^2 + [m + \cos(\theta + i)]^2 \cot^2\theta}}{\cot\theta} . AB =$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2\theta + m^2 + 2m\cos\theta . \cos i}}{\cos\theta} . AB.$$

Da questa relazione si passa facilmente all'altra

$$s_1 = \frac{\sqrt{\cos^2\theta + m^2 + 2m\cos\theta\cos i}}{\cos\theta} . s$$

e sostituendo nella (23)

$$PA_1 = \cos\theta . s_1$$

la quale dimostra che L_1 è una spirale logaritmica di polo P segante i raggi vettori sotto l'angolo θ. Dunque « *Se per i vari punti di una spirale logaritmica* L *si conducono delle rette inclinate sulla curva di un angolo costante e sopra queste rette si prendono dei segmenti proporzionali all'arco di* L *contato dal polo, il luogo degli estremi è un'altra spirale logaritmica* L_1 *eguale alla data ed avente il medesimo polo di essa* ».

Supponendo che le rette che si conducono per i punti di L siano le tangenti e che il fattore di proporzionalità sia 1, si ha « *La sviluppante di una spirale logaritmica cominciante dal polo di questa, è un'altra spirale logaritmica eguale alla data ed avente il medesimo polo di essa* ».

§ 8. — Proponiamoci ora di estendere alla lossodromia sferica i teoremi testè dimostrati per la spirale logaritmica.

La prima delle proprietà precedenti dà luogo senz'altro al teorema: « *Se per uno dei poli* Q *di una lossodromia* Λ *si conduce una serie di circoli inclinati sopra la curva di un angolo costante qualunque, quei circoli inviluppano un'altra lossodromia* Λ_1 *eguale alla data ed avente i medesimi poli di essa* ».

Ma si può anche dare a questo teorema altra forma, calcolando il diametro sferico di questi cerchi, in funzione dell'arco σ di Λ.

Per questo, si noti anzitutto che se per il punto A_1 del piano π (fig. 1) si conduce una retta r perpendicolare a PA_1, l'immagine sferica di questa retta è un cerchio avente per diametro sferico l'arco QA.

Ora se si pone $PA_1 = h$, si ha

$$QA = \frac{k^2}{QA_1} = \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + h^2}}.$$

Se dunque si chiama 2α l'angolo al centro O della sfera che sottende l'arco QA, si ha

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\frac{1}{2} QA}{OQ} = \frac{k}{\sqrt{k^2 - h^2}},$$

d'onde

$$\alpha = \operatorname{ang.sen} \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 - h^2}}\right).$$

Il diametro sferico D del cerchio immagine della retta r è dunque

$$D = \text{arco } QA = k \,.\, \operatorname{ang\,sen} \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + h^2}}\right). \tag{28}$$

Ora se dal polo P (fig. 2) si conduce la perpendicolare PK sulla retta AA_0, si ha

$$h = AP \operatorname{sen} i = s \,.\, \cos\theta \operatorname{sen} i$$

e l'equazione (26) diviene

$$D = k \,.\, \operatorname{ang\,sen} \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + s^2 \cos^2\theta \operatorname{sen}^2 i}}\right). \tag{29}$$

Ma siccome abbiamo

$$\rho = \sigma \,.\, \cos\theta, \qquad r = s \,.\, \cos\theta,$$

la condizione fondamentale (2) dà

$$s \cos\theta = k \,.\, \operatorname{tang} \left(\frac{\sigma \cos\theta}{k}\right).$$

Abbiamo dunque

$$D = k \,.\, \operatorname{ang\,sen} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 i \,.\, \operatorname{tang}^2 \left(\frac{\sigma\cos\theta}{k}\right)}}\right] = \tag{30}$$

$$= k \,.\, \operatorname{ang\,cot} \left[\operatorname{sen} i \,.\, \operatorname{tang} \left(\frac{\sigma \cos\theta}{k}\right)\right].$$

Perciò « *Se per il polo* Q *di una lossodromia* Λ, *segante i meridiani sotto l'angolo* θ, *e per i vari punti di questa linea si fa passare una serie di cerchi col diametro sferico dato dalla* (30), *essendo* σ *l'arco di* Λ *contato dal polo* P:

1° *questi cerchi segano* Λ *sotto l'angolo costante* $\theta + i$.

2° *essi inviluppano una seconda lossodromia eguale alla data ed avente i medesimi poli di essa* ».

Per $i = 90°$, la (30) dà

$$D = \frac{1}{2} \pi k - \sigma \,.\, \cos\theta.$$

Perciò « *Se per il polo* Q *di una lossodromia e per i vari punti di essa si fa passare una serie di cerchi coi diametri sferici eguali alle distanze fra questi punti e l'altro polo* P, *essi inviluppano un'altra lossodromia eguale alla data ed avente i medesimi poli di essa* ».

Andiamo ora alla seconda proprietà dimostrata nel paragrafo precedente.

Sia L la spirale logaritmica data ed L_1 quella che si ottiene da essa conducendo dai vari punti delle rette inclinate sui raggi vettori dell'angolo i e staccando su di esse dei segmenti proporzionali all'arco ($A_1T_1 = ms$).

Siano Λ, Λ_1 le lossodromie proiezioni sferiche delle L, L_1; si tratta di trovare la lunghezza dell'arco circolare AT (corrispondente al segmento rettilineo A_1T_1) in funzione dell'arco σ di Λ.

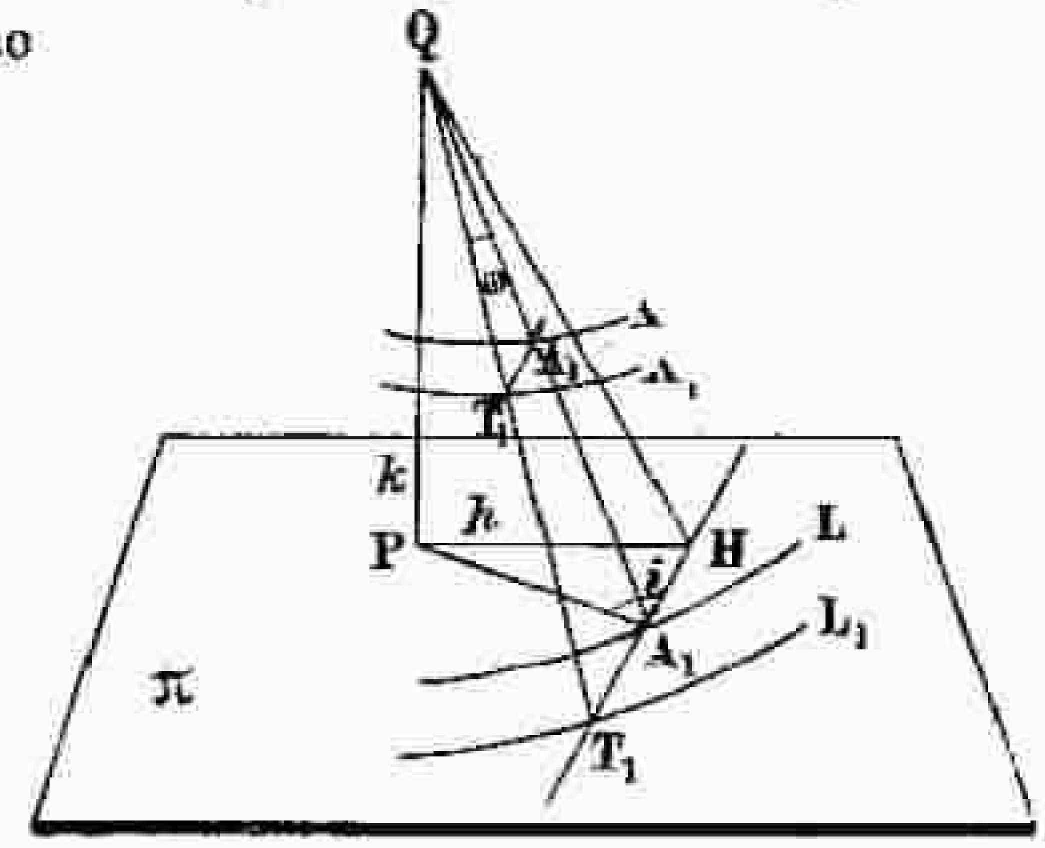

Fig. 3.

Posto (fig. 3)

angolo $A_1QT_1 = \omega$, arco $AT = \delta$,

si ha $\omega = \dfrac{\delta}{k}$, e perciò

$$\overline{A_1T_1}^2 = \overline{A_1Q}^2 + \overline{T_1Q}^2 + $$
$$+ 2A_1Q \,.\, T_1Q \cos\left(\frac{\delta}{k}\right).$$

Ma se da P si conduce PH perpendicolare alla direzione A_1T_1 e si pone $PH = h$, si ha:

$$\overline{A_1Q}^2 = \overline{QH}^2 + \overline{A_1H}^2 = k^2 + h^2 + \overline{A_1H}^2$$
$$\overline{T_1Q}^2 = \overline{QH}^2 + \overline{T_1H}^2 = k^2 + h^2 + \overline{T_1H}^2.$$

Sostituendo nella precedente, si ottiene:

$$\overline{A_1T_1}^2 = 2k^2 + 2h^2 + \overline{A_1H}^2 + \overline{T_1H} -$$
$$2\sqrt{(k^2 + h^2 + \overline{A_1H}^2)\,(k^2 + h^2 + \overline{T_1H}^2)} \,.\, \cos\left(\frac{\delta}{k}\right).$$

Osservando si ha:

$$h = PH = PA_1 \operatorname{sen} i = s \,.\, \cos\theta \operatorname{sen} i$$
$$A_1H \quad = PA_1 \cos i = s \,.\, \cos\theta \cos i$$
$$A_1T_1 = ms;\ HT_1 = (\cos\theta\cos i + m)\, s,$$

si ricava dall'ultima relazione:

$$\cos\left(\frac{\delta}{k}\right) = \frac{k^2 + (\cos\theta + m\cos i)\cos\theta \,.\, s^2}{\sqrt{(k^2 + s^2\cos^2\theta)\left\{k^2 + (m^2 + 2m\cos\theta\cos i + \cos^2\theta)\, s^2\right\}}}.$$

Ricordando poi che in questo stesso paragrafo si è trovato:

$$s = \frac{k}{\cos\theta} \operatorname{tang} \left(\frac{\sigma \cos\theta}{k}\right),$$

si ottiene, eliminando s:

$$\cos\left(\frac{\delta}{k}\right) = \frac{\cos\theta + m \cos i \,.\, \operatorname{sen}^2 . \left(\frac{\sigma\cos\theta}{k}\right)}{\sqrt{\cos^2\theta + m\,(m + 2\cos\theta \,.\, \cos i) \,.\, \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\sigma\cos\theta}{k}\right)}}$$

d'onde infine:

$$(31) \qquad \delta = k \,.\, \operatorname{ang}\cos \left[\frac{\cos\theta + m\,(\cos i \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\sigma\cos\theta}{k}\right)}{\sqrt{\cos^2\theta + m\,(m + 2\cos\theta\cos i) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\sigma\cos\theta}{k}\right)}}\right].$$

Si ha così il

Teorema. — *Se per il polo Q di una lossodromia sferica Λ (segante i meridiani sotto l'angolo θ) e per i vari punti di essa si conduce una serie di archi inclinati sulla curva dell'angolo $\theta + i$, e sopra questi cerchi si prendono, a partire da Λ, degli archi δ dati dalla* (31) *(essendo σ contato a partire dall'altro polo P) il luogo degli estremi è un'altra lossodromia Λ_1 identica alla prima ed avente i medesimi poli di essa.*

Osservazione. — Si ottengono i casi particolari in cui i cerchi che si conducono sono tangenti o normali alla lossodromia Λ, facendo nella formola (31) rispettivamente $i = -\theta$, $i = \frac{\pi}{2} - \theta$.

§ 9. — Qualora alle proprietà precedenti si volesse aggiungere quelle relative alle aree, si sarebbe costretti, il più delle volte, a ricorrere al calcolo infinitesimale. Per mostrare però, con un esempio, come qualche volta si possa risolvere la questione non uscendo dal campo elementare, andremo a determinare l'area della porzione di superficie sferica compresa fra un arco qualunque AA_n di lossodromia e i raggi vettori estremi $PA = \rho$, $PA_n = \rho_n$ (fig. 4).

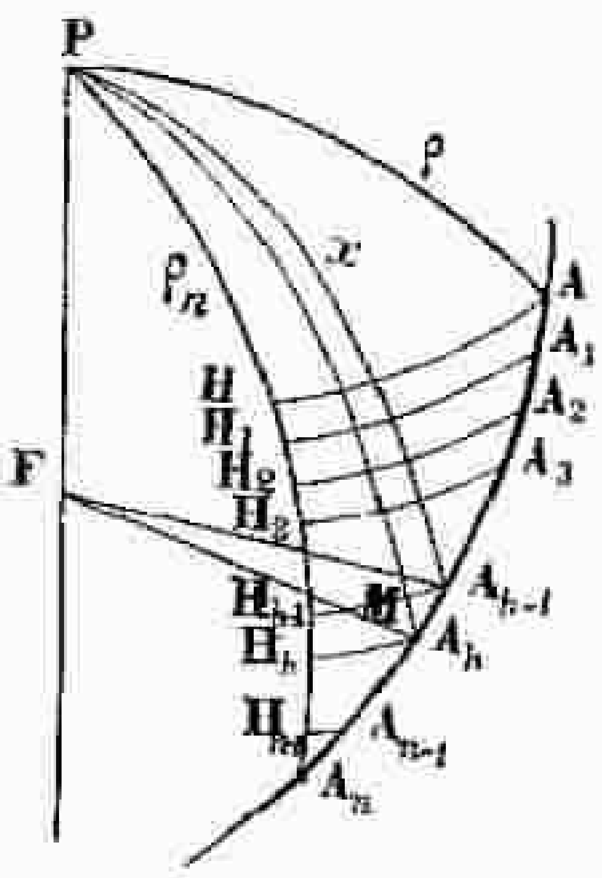

Fig. 4.

Dopo aver portato l'arco PA sopra PA_n in PH, si divida l'intervallo HA_n in n parti eguali; e dai punti di divisione $H_1, H_2, H_3, \ldots H_{h-1}, H_h, \ldots H_{n-1}$, si conducano gli archi di paralleli fino ad incontrare l'arco AA_n nei punti $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{h-1}, A_h, \ldots A_{n-1}$.

Considerando l'arco $A_{h-1}A_h$, si ponga per brevità

$$PA_{h-1} = x,\ A_{h-1}A_h = \varepsilon_h,\ M_{h-1}A_h = H_{h-1}H_h = \frac{\rho_n - \rho}{n} = \tau.$$

Si conduca poi il piano del parallelo $A_{h-1}M_{h-1}$ e questo tagli l'asse PQ della sfera nel punto F. Avremo dal triangolo $A_{h-1}A_h M_{h-1}$ considerato come rettilineo

$$M_{h-1}A_h = A_{h-1}A_h \,.\, \cos\theta\,, \qquad A_{h-1}M_{h-1} = M_{h-1}A_h \,.\, \operatorname{tang}\theta,$$

cioè

$$\tau = \varepsilon_h \,.\, \cos\theta\,, \qquad A_{h-1}M_{h-1} = \tau \,.\, \operatorname{tang}\theta.$$

D'altronde, indicando con O il centro della sfera, si ha

$$\text{angolo } POA_{h-1} = \frac{\text{arco } PA_{h-1}}{\text{raggio}} = \frac{2x}{k}$$

e quindi

$$FA_{h-1} = \frac{k}{2}\,\text{sen}\,(POA_{h-1}) = \frac{k}{2}\,\text{sen}\left(\frac{2x}{k}\right);\quad PF = \frac{2}{k}\left[1 - \cos\left(\frac{2x}{k}\right)\right]$$

$$\text{angolo } (A_{h-1}FM_{h-1}) = \frac{\text{arco } A_{h-1}M_{h-1}}{FA_{h-1}} = \frac{2\operatorname{tang}\theta}{k}\cdot\frac{\tau}{\text{sen}\left(\frac{2x}{k}\right)}.$$

Chiamando a l'arco di cerchio massimo che misura l'angolo diedro formato dai piani degli archi PA_{h-1}, PA_h, si ha

$$a : A_{h-1}M_{h-1} = \frac{k}{2} : \frac{k}{2}\,\text{sen}\left(\frac{2x}{k}\right),$$

d'onde

$$a = \frac{\tau\operatorname{tang}\theta}{\text{sen}\left(\frac{2x}{k}\right)}.$$

Avremo dunque

$$\text{area } PA_{h-1}M_{h-1} = FP \times a = \frac{k\operatorname{tang}\theta}{2}\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{2x}{k}\right)}{\text{sen}\left(\frac{2x}{k}\right)}\tau = \frac{k\operatorname{tang}\theta}{2}\,.\,\operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right)\tau.$$

Considerando poi il triangolo rettangolo $A_{h-1}M_{h-1}A_h$ come rettilineo, si ha

$$\text{area } A_{h-1}M_{h-1}A_h = \frac{1}{2}A_{h-1}M_{h-1} \times M_{h-1}A_h = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\theta\,.\,\tau^2.$$

Perciò

$$\text{area } PA_{h-1}A_h = \frac{k\operatorname{tang}\theta}{2}\operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right).\,\tau + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\theta\,.\,\tau^2.$$

Ponendo dunque

$$PA_{h-1}A_h = s_h\,,$$

si ha

$$\frac{s_h}{\tau} = \frac{k\operatorname{tang}\theta}{2}\,.\,\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\theta\,.\,\tau.$$

Ora se si fa crescere indefinitamente n, τ tende al limite zero; perciò si ha

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{s_n}{\tau}\right)=\frac{h\,\mathrm{tang}\,\theta}{2}\,.\,\mathrm{tang}\left(\frac{x}{k}\right). \tag{32}$$

Risulta poi da calcoli facili

$$\lim_{\tau=0}\frac{\log\cos\left(\frac{x+\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{x}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}}=\lim_{\tau=0}\frac{\log\frac{\cos\left(\frac{x+\tau}{k}\right)}{\cos\left(\frac{x}{k}\right)}}{\frac{\tau}{k}}=$$

$$=\lim_{\tau=0}\frac{\log\left\{\cos\frac{\tau}{k}\left[1-\mathrm{tang}\left(\frac{x}{k}\right).\ \mathrm{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right)\right]\right\}}{\frac{\tau}{k}}=$$

$$=\lim_{\tau=0}\left[\frac{\log\cos\left(\frac{\tau}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}}\right]+\lim_{\tau=0}\left[\frac{\log\left\{1-\mathrm{tang}\left(\frac{x}{k}\right)-\mathrm{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right)\right\}}{\frac{\tau}{k}}\right].$$

Ora si ha (*)

$$\log\cos\left(\frac{\tau}{k}\right)=\left(\cos\frac{\tau}{k}-1\right)-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\tau}{k}-1\right)^2+\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\tau}{k}-1\right)^3-\ldots$$

e perciò

$$\frac{\log\cos\left(\frac{\tau}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}}=\frac{\left[\cos\left(\frac{\tau}{k}\right)-1\right]}{\frac{\tau}{k}}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\tau}{k}-1\right)+\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\tau}{k}-1\right)^2-\ldots\right\}.$$

Ma siccome (**)

$$\cos\left(\frac{\tau}{k}\right)-1=-\frac{\left(\frac{\tau}{k}\right)^2}{\underline{|2}}+\frac{\left(\frac{\tau}{k}\right)^4}{\underline{|4}}-\frac{\left(\frac{\tau}{k}\right)^6}{\underline{|6}}+\ldots,$$

si avrà

$$\frac{\log\cos\left(\frac{\tau}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}}=\left[-\frac{\left(\frac{\tau}{k}\right)}{\underline{|2}}+\frac{\left(\frac{\tau}{k}\right)^3}{\underline{|4}}-\frac{\left(\frac{\tau}{k}\right)^5}{\underline{|6}}+\ldots\right]\times$$

$$\left[1-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\tau}{k}-1\right)+\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\tau}{k}-1\right)^2-\ldots\right]$$

(*) BALTZER, *Aritmetica generale*, tradotta dal *Cremona*, § 32, n. 6, pag. 188.
(**) BALTZER, *loc. cit*, § 31, n. 7, pag. 175.

da cui si vede facilmente che

$$\lim_{\tau=0} \frac{\log\cos\left(\frac{\tau}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}} = 0 .$$

Abbiamo poi (*)

$$\log\left[1 - \operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right) . \operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right)\right] = - \operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right) . \operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right) -$$
$$- \frac{1}{2} \operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{k}\right) . \operatorname{tang}^2\left(\frac{\tau}{k}\right) - \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3\left(\frac{x}{k}\right) . \operatorname{tang}^3\left(\frac{\tau}{k}\right) -$$
$$- \frac{1}{4} \operatorname{tang}^4\left(\frac{x}{k}\right) . \operatorname{tang}^4\left(\frac{\tau}{k}\right) - \ldots ,$$

da cui

$$\frac{\log\left[1 - \operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right) . \operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right)\right]}{\frac{\tau}{k}} = - \operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right) . \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{K}\right)}{\frac{\tau}{k}} -$$
$$- \operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{k}\right) \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right) + \frac{1}{3} \operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right) \operatorname{tang}^2\left(\frac{\tau}{k}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4} \operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{k}\right) \operatorname{tang}^3\left(\frac{\tau}{k}\right) + \ldots \right\}.$$

Passando al limite per $\tau = 0$ ricordando che

$$\lim_{\tau=0} \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}} = 1 ,$$

risulta

$$\lim_{\tau=0} \frac{\log\left[1 - \operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right) . \operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right)\right]}{\frac{\tau}{k}} -$$
$$= \lim_{\tau=0} \frac{\log\cos\left(\frac{x+\tau}{k}\right) - \log\cos\left(\frac{x}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}} = - \operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right) .$$

(*) BALTZER, *loc. cit.*, § 32, n. 6, pag. 188.

Sostituendo nella formola (30), si trova

$$\lim_{\tau=0}\left(\frac{s_h}{\tau}\right)=-\frac{k\operatorname{tang}\theta}{2}\lim_{\tau=0}\frac{\log\cos\left(\frac{x+\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{x}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}},$$

da cui segue immediatamente

$$s_h=-\frac{k^2\operatorname{tang}\theta}{2}\left[\log\cos\left(\frac{x+\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{x}{k}\right)\right],$$

$$\sum_{h=1}^{h=n}s_h=-\frac{k^2\operatorname{tang}\theta}{2}\sum_{h=1}^{h=n}\left[\log\cos\left(\frac{x+\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{x}{k}\right)\right].$$

Ora, calcolando la somma del secondo membro, si trova

$$\sum_{h=1}^{h=n}\left[\log\cos\left(\frac{x+\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{x}{k}\right)\right]=\left[\log\cos\left(\frac{\rho+\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)\right]+$$

$$+\left[\log\cos\left(\frac{\rho+2\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{\rho+\tau}{k}\right)\right]+\left[\log\cos\left(\frac{\rho+3\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{\rho+2\tau}{k}\right)\right]+\ldots$$

$$\ldots+\left[\log\cos\left(\frac{\rho+n\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{\rho+(n-1)\tau}{k}\right)\right]=\log\cos\left(\frac{\rho+n\tau}{k}\right)-$$

$$-\log\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)=\log\cos\left(\frac{\rho_n}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)=\log\frac{\cos\left(\frac{\rho_n}{k}\right)}{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}.$$

Possiamo quindi enunciare il

TEOREMA. — *L'area della porzione di sfera compresa fra un dato arco* AB *di lossodromia e i raggi vettori estremi* $QA=\rho$, $QB=\rho_1$ *è dato dalla formola*

$$S=\frac{k^2\operatorname{tang}\theta}{2}\log.\frac{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}{\cos\left(\frac{\rho_1}{k}\right)}. \tag{33}$$

Come applicazione della formola (31) determiniamo l'area di un triangolo racchiuso da tre archi AB, BC, CA di lossodromie aventi gli stessi poli. Le inclinazioni di queste linee sui meridiani siano rispettivamente γ, α, β e sia inoltre

$$PA=\rho,\quad PB=\rho_1,\quad PC=\rho_2.$$

Supponendo ad esempio $\rho<\rho_1<\rho_2$ e che ρ_2 sia compreso fra gli altri due, si ha applicando la (31)

$$\text{area } PAB=\frac{k^2\operatorname{tang}\gamma}{2}\log\frac{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}{\cos\left(\frac{\rho_1}{k}\right)};\quad \text{area } PBC=\frac{k^2\operatorname{tang}\alpha}{2}\log\frac{\cos\left(\frac{\rho_1}{k}\right)}{\cos\left(\frac{\rho_2}{k}\right)}$$

$$\text{area } PAC=\frac{k^2\operatorname{tang}\beta}{2}\log\frac{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}{\cos\left(\frac{\rho_2}{k}\right)}.$$

E quindi, notando che: $ABC = PAC - (PAB + PBC)$, si deduce

$$\text{area } ABC = \frac{k^2}{2} \log \left\{ \left(\cos\frac{\rho}{k}\right)^{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma} \cdot \left(\cos\frac{\rho_1}{k}\right)^{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha} \cdot \left(\cos\frac{\rho_2}{k}\right)^{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} \right\}.$$

In modo simile si possono considerare gli altri casi nei quali la disposizione dei punti A, B, C è diversa da quella considerata; si può inoltre applicare la data formola alla determinazione dell'area di poligoni lossodromici.

Parma, luglio 1898.

GEMINIANO PIRONDINI.

INTORNO AD UNA PROPRIETÀ SINGOLARE DI ALCUNI NUMERI

ed al criterio di divisibilità ad essi relativo

1. Il numero 37, moltiplicato per un multiplo qualunque di 3 non superiore a 27, dà un prodotto composto sempre di tre cifre eguali tra di loro, la cui somma eguaglia il moltiplicatore.

In ciò che segue mi propongo di risolvere la seguente questione generale: *Determinare, in un sistema di numerazione a base qualunque* B, *le coppie di numeri* N *e* p *tali che il prodotto di* N *per* p *e per tutti i multipli di* p *non superiori a* (B − 1) p, *resultino formati di* p *cifre eguali, la cui somma eguagli il multiplo di* p *pel quale è stata moltiplicata la* N.

Risoluto questo problema, verrò a determinare la forma dei prodotti di N pei multipli di p superiori a $(B - 1)\,p$; ed infine stabilirò la condizione di divisibilità pei numeri N e p.

2. È chiaro che la cifra che per p volte comparisce in ognuno dei prodotti di N per i fattori

$$p,\ 2p,\ 3p,\ \ldots\ (B-1)\,p,$$

deve essere differente per i diversi resultati; ed è altresì chiaro che questa cifra ha un valore tanto più grande, quanto più grande è il multiplo di p pel quale la N è stata moltiplicata. E poichè i prodotti in questione sono in numero di B − 1, le p cifre di ciascuno dei resultati

$$p\,N,\qquad 2p\,N,\qquad 3p\,N,\ \ldots\ldots\ (B-1)\,p\,N,$$

dovranno essere tutte eguali rispettivamente a

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots (B - 1).$$

Di qui si deduce che *i numeri* N *e* p *formano una coppia di divisori coniugati di un numero composto di* p *cifre tutte eguali all'unità*, e perciò dovremo avere

$$(1) \qquad p\,N = B^{p-1} + B^{p-2} + B^{p-3} + \ldots\ldots + B^2 + B + 1,$$

e quindi

$$(2) \qquad N = \frac{B^p - 1}{pb},$$

ove, per semplicità, si è posto $b = B - 1$.

Ricordando ora che quando β è il più piccolo esponente pel quale l'espressione $\frac{B^\beta - 1}{pb}$ resulta un numero intero, si dice che β *è l'esponente al quale appartiene* B *relativamente al modulo* pb; e che se $\frac{B^p - 1}{pb}$ è pure un numero intero, l'esponente p è un multiplo di β, possiamo enunciare la regola seguente:

La condizione affinchè i numeri N *e* p *soddisfino al problema, è che* p *sia un multiplo dell'esponente rispetto al quale appartiene* B, *mod.* pb.

È facile poi dimostrare che questa condizione, oltre essere necessaria, è anche sufficiente.

3. Veniamo a stabilire ora altre *condizioni necessarie*, le quali possono servire a facilitare la ricerca delle coppie di numeri in questione; ricerca che non sempre sarebbe agevole, se volessimo servirci, senz'altro, della regola precedentemente enunciata.

1°. *Il numero* p *è primo con* B. Ciò resulta immediatamente dalla (2).

2°. *Il numero* p *non può essere primo con* b. Infatti, detto π il più piccolo fattore primo di p, si ha che $B^{\pi-1} - 1$ (pel teorema di Fermat) e $B^p - 1$ (per la (2)), sono esattamente divisibili per π. Se dunque chiamiamo α, l'esponente al quale appartiene B, mod. π, dovrà essere la α un divisore di $\pi - 1$ e di p; ma poichè questi due numeri sono primi tra di loro, dovrà essere $\alpha = 1$, e conseguentemente $B - 1$, ossia b, è esattamente divisibile per π; ciò mostra appunto che b e p non possono essere primi tra di loro.

Corollario 1°. — *Se* p *è primo, esso è un divisore di* b.

Corollario 2°. — *Qualunque numero primo* p, *superiore a* b, *non può far parte di una coppia di numeri* N, p *che soddisfino al problema.*

4. Diamo anche una *condizione sufficiente*, che può servire a determinare numerose coppie di numeri N, p.

Ogni divisore p *di* b *è un numero che soddisfa al problema.*

Infatti, se p divide b, il resto della divisione di B per p è l'unità, e quindi il numero

$$B^{p-1} + B^{p-2} + \ldots\ldots + B^2 + B + 1$$

è esattamente divisibile per p. Il numero precedente è dunque della forma Np, e per conseguenza N e p, per la (1), formano una coppia di numeri che soddisfa al problema.

Corollario. 1°. — *In qualunque sistema di numerazione a base* B, *i numeri* $\mathrm{p} = 1$ *e* $\mathrm{p} = \mathrm{b}$ *fanno parte di una coppia di numeri che soddisfano al problema. Per* $\mathrm{p} = 1$, *si ha pure* $\mathrm{N} = 1$.

Corollario. 2°. — *In qualunque sistema di numerazione, di cui la base* B *è un numero dispari, i numeri* 2 *e* $\frac{\mathrm{b}}{2}$ *soddisfano al problema.*

5. È ora facile dimostrare che quando $p = \frac{b}{m}$, le differenti cifre di N sono rispettivamente

$$(3) \qquad m, \quad 2m, \quad 3m \ldots\ldots (p-3)\,m, (p-2)\,m, \quad \{(p-1)\,m + 1\}$$

Infatti, eseguendo la moltiplicazione di questo numero per p, col tener conto che $pm = b = \mathrm{B} - 1$, si ottiene:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & (m) & (2m) & (3m) & \ldots\ldots \{(p-3)\,m\} & \{(p-2)\,m\} & & \{(p-1)m+1\} \\
 & & & & & & & p \\
\hline
 & (\mathrm{B}-1) & (2\mathrm{B}-2) & (3\mathrm{B}-3)\ldots\ldots & \{(p-3)\mathrm{B}-(p-3)\} & \{(p-2)\mathrm{B}-(p-2)\} & & \{(p-1)\,\mathrm{B}+1\} \\
+1 & +2 & +3 & +4\ \ldots\ldots & +(p-2) & +(p-1) & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1\ \ldots\ldots & 1 & 1 & & 1
\end{array}$$

ove i numeri della prima linea rappresentano i resultati, senza riduzione, che si ottengono dalla moltiplicazione delle singole cifre di N per p; quelli della seconda linea, rappresentano le unità di un dato ordine che si riportano dal resultato precedente, e quelli della terza il prodotto finale. Dalla forma di questo resultato si conclude che p e

$$(4) \qquad \mathrm{N} = m\,(2m)\,(3m)\ldots\ldots \{(p-2)\,m\}\{(p-1)\,m + 1\}$$

formano una coppia di numeri che soddisfano il problema.

Pel caso particolare di $p = b$ si ha

$$\mathrm{N} = 1\,2\,3\,4 \ldots\ldots (b-3)\,(b-2)\,b;$$

e pel caso di $\mathrm{B} = 2\,m + 1$ e $p = 2$ si ha $\mathrm{N} = m + 1$.

6. Da quanto abbiamo detto fin qui è facile verificare che le coppie di numeri (p, N) che soddisfano al problema nei sistemi di numerazione da 1 a 12, limitandoci (a considerare le sole coppie di numeri nelle quali p è inferiore a b, e tralasciando le coppie (1.1)) sono le seguenti:

B	Coppie di numeri (p N)
3	(2; 2)
4	(3; 13)
5	(2; 3); (4; 124)
6	(5; 1235)
7	(2; 4); (3; 25); (6; 12346)
8	(7; 123457)
9	(2; 5); (4; 247); (8; 1234568)
10	(3; 37); (9; 12345679)
11	(2; 6); (4;303); (5;2469); (6;20202); (8;1570157); (10;12345678 (10))
12	(11; 123456789 (11))

7. Risolviamo ora la questione di determinare la forma dei prodotti di N pei multipli mp di p superiori a b.

Se

$$m = bq + r ,$$

sarà

$$N(mp) = N(bp)\,q + N(rp) = (bbbb....b)\,q + (rrr....rr) =$$
$$= (B^p\,q - q) + (rrr....rr)$$

ove le cifre b ed r in parentesi sono in numero di p. Dalla forma dell'ultima espressione si può subito concludere: Se N e p *costituiscono una coppia di numeri che soddisfano al problema, il prodotto di* N *per* pm, *ove* m *è un numero qualunque che può mettersi sotto la forma* bq + r, *ha la seguente espressione: Comincia con un gruppo di cifre formanti il numero* q, *indi segue un certo numero di cifre tutte eguali ad* r, *ed infine termina con un numero le cui cifre sono respettivamente i complementi ad* r *delle prime cifre che formano il numero* q.

Segue di qui che se la moltiplicazione di N per pm si effettua su di una superficie cilindrica chiusa, in maniera che moltiplicando, moltiplicatori e prodotti vengano scritti su p generatrici, il prodotto totale, sotto tali condizioni, sarà sempre composto di cifre tutte eguali tra di loro.

Esempio. — Nel sistema a base 10 vi è la coppia di numeri $p = 27$, $N = 41152263374485596707818930$ che soddisfano al problema. Si prenda ora un multiplo qualunque di 27, per es. $34682364 = 27\,(142725 \times 9 + 7)$.

Eseguendo la moltiplicazione su di una superficie cilindrica come abbiamo sopra accennato, tutte le cifre dei diversi prodotti parziali che nella moltiplicazione ordinaria verrebbero a formare il triangolo composto di cifre stampate in carattere più grosso (vedi moltiplicazione più innanzi), vengono invece a disporsi sulla destra secondo uno stesso triangolo. Facendo la somma dei prodotti parziali così ottenuti si trova che il prodotto totale è composto di cifre tutte eguali a 7.

Si avverta che nel sommare i numeri della prima colonna a destra, devesi tener conto del riporto di due unità che si ottiene dalla somma delle cifre dell'ultima colonna a sinistra.

Ecco qui appresso la moltiplicazione del numero N preso sopra, pel multiplo di 27, effettuata in conformità di quanto è stato detto precedentemente.

411522633744855967078189 3
34682364

1646090534979423868312757 2
2469135802469135802469135 8.
1234567901234567901234567 9.**1**
8230452674897119341563786. **8**
3292181069958847736625514 4.**329**
24691358024691358024691358.**2469**
164609053497942386831275 72.**16460**
123456790123456790123456 79.**123456**

777777777777777777777777777

L'espressione della forma del prodotto di N per un multiplo qualunque di p, può enunciarsi in modo assai più semplice mediante la seguente definizione, la quale ci sarà utile anche per la ulteriore considerazione che dovremo fare. Se le cifre di un numero qualunque M si dividono in gruppi di p in p cifre da destra verso sinistra, e si sommano poi i numeri formati da questi diversi gruppi; se si opera poi nello stesso modo su questo resultato, e successivamente su quelli che via via si ottengono finchè non si giunga ad un numero M_p di p cifre, si dice che M_p *è il numero* M *ridotto a* p *cifre*.

Dopo ciò è facile riconoscere che: *il prodotto di* N *per un multiplo qualunque di* p, *è un numero che ridotto a* p *cifre resulta espresso da cifre tutte eguali tra di loro.*

8. Ci rimane ora da risolvere l'ultima questione proposta, quella cioè determinare il criterio di divisibilità di un numero M (scritto nel sistema a base B) per i numeri N e p. Questa condizione viene espressa dal seguente teorema:

Il resto della divisione di un numero M, *per* N *e per* p, *è quello stesso che si ottiene dividendo per* N *e per* p *la differenza fra il numero* M_p *e il numero composto di cifre tutte eguali, immediatamente inferiore ad essa.*

Infatti se indichiamo con G il numero formato dalle p cifre dell'$(s+1)^{mo}$ gruppo di M, è chiaro che nell'effettuare l'operazione di riduzione sopra accennata, il numero M, per effetto dello spostamento del solo gruppo G, subisce una diminuzione di $(B^{sp}-1)G$ unità, ossia di un multiplo di (B^p-1).

Ora siccome ciò si verifica per tutti i gruppi e per tutte le successive riduzioni, possiamo dire che

$$M = q\,(B^p - 1) + M_p$$

Ma $B^p - 1$ è un multiplo di N e di p, quindi il resto della divisione di M, per N e p è quello stesso di M_p per gli stessi numeri. Ma anche il numero M' immediatamente inferiore a M_p, formato di p cifre tutte eguali, è pure esattamente divisibile per N e per p, e quindi la differenza d fra M_p ed M' divisa per N e per p lascia lo stesso resto di M_p, e quindi di M; *c. d. d.*

Esempio 1°. — Resto della divisione di un numero per 37.

$$\begin{array}{r}
58.764.962.168\\
962\\
764\\
58\\
\hline
1.952\\
1\\
\hline
953\\
888\\
\hline
65 = 37 + 28;\ \text{resto cercato.}
\end{array}$$

Esempio 2°. — Resto della divisione di un numero per 48 (13) che nel sistema a base 17 forma col 4 una coppia di numeri N, p.

$$\begin{array}{r}
3\,(11)\,(10)\,.\,(12)\,(14)\,(15)\quad 1\\
3\ (11)\,(10)\\
\hline
(13)\quad 0\quad\ 9\ (11)\\
(12)\,(12)\,(12)\,(12)\\
\hline
(4)\,(13)\,(16) = 48\,(13) + 53;\ \text{resto cercato.}
\end{array}$$

Osservazione I. — In certi casi può essere più semplice di sottrarre invece il numero M_p dal numero immediatamente superiore formato di cifre tutte eguali; ma allora il resto cercato è il complemento ad N o a p, del resto della divisione di quella differenza, per N o per p.

Osservazione II. — Il criterio di divisibilità enunciato è applicabile a tutti i divisori di $B^p - 1$.

Firenze, marzo 1898.

A. Andreini.

SULLA CONVERSIONE DI UN RADICALE QUADRATICO in frazione continua

Volendo esprimere la radice quadrata di un intero N, non quadrato perfetto, mediante una frazione continua (infinita) della prima classe, le cui frazioni parziali abbiano per numeratore l'unità, sappiamo che i denominatori q_r delle medesime sono la parte intera di $\frac{\sqrt{N}+a_r}{b_r}$, dove gli interi positivi, a_r e b_r sono legati dalle relazioni

(1) $a_r + a_{r+1} = b_r q_r$, (2) $b_r b_{r+1} = N - a^2_{r+1}$.

Con questo metodo, note a_r e b_r, si calcola prima q_r, quindi dalla (1) si rileva a_{r+1} ed infine dalla (2) b_{r+1} : come punto di partenza poi, se

$$N = k^2 + s,$$

in cui k è il maggior intero contenuto in $\sqrt{N}$, e perciò

$$1 \leq s \leq 2k,$$

rappresentando per simmetria k con q_0, abbiamo $a_0 = 0$, $b_0 = 1$.

Orbene si vuole da noi ottenere con più facilità il ciclo dei quozienti ricorrenti: all'uopo, fatto

$$c_r = k - a_r,$$

le (1) e (2) divengono

(3) $2k - c_r = b_r q_r + c_{r+1}$, (4) $b_r b_{r+1} = s + c_{r+1}(2k - c_{r+1})$

e per essere, come è noto, $a_r \leq k$, la c_r intanto non è negativa; inoltre, essendo la parte intera di $\frac{\sqrt{N}+a_r}{b_r}$, ossia di $\frac{\sqrt{N}+k-c_r}{b_r}$, eguale al maggior intero contenuto in $\frac{2k-c_r}{b_r}$, la c_{r+1} rappresenta nella (3) il resto della divisione di $2k - c_r$ per b_r, e quindi $c_{r+1} < b_r$. Per la qual cosa se, a partire da $r=1$, si divide $2k - c_r$ per b_r, si determinano subito q_r e c_{r+1} , e poi dalla (4) b_{r+1} , ecc.; e saremo sicuri di aver completato il ciclo appena verrà per quoziente $2k$, poichè, se u è il numero dei quozienti ricorrenti, si sa essere

$$q_u = 2k, \qquad q_r = q_{u-r} \leq k, \; r = 1,2,\ldots, u-1.$$

Come casi particolari, si vede facilmente che $u=2$, se $2k$ è divisibile per $s>1$, e che $u=1$ quando $s=1$.

Ricavate poi q_r e c_{r+1}, per determinare b_{r+1} invece della (4) possiamo servirci della seguente formola più semplice

$$(5) \qquad b_{r+1}=b_{r-1}+q_r\,(c_{r+1}-c_r).$$

Per dimostrarla si cangi nella (4) r in $r-1$ e si dividano poi membro a membro la (4) stessa e la formola risultante; allora in virtù della (3) emerge

$$\frac{b_{r+1}}{b_{r-1}}=\frac{s+c_{r+1}\,(b_rq_r+c_r)}{s+c_r\,(b_rq_r+c_{r+1})};$$

sicchè la (5) sarà dimostrata, se proveremo essere

$$\frac{s+c_{r+1}\,(b_rq_r+c_r)}{s+c_r(b_rq_r+c_{r+1})}\cdot b_{r-1}=b_{r-1}+q_r\,(c_{r+1}-c_r).$$

Orbene da quest'eguaglianza si deduce appunto

$$b_{r-1}\,b_r=s+c_r\,(b_rq_r+c_{r+1}),$$

ossia per la (3)

$$b_{r-1}\,b_r=s+c_r\,(2k-c_r),$$

che è la formola (4).

Se facciamo successivamente nella (5) $r=1,2,\ldots,u-1$, ed eguagliamo quindi la somma dei primi membri delle formole risultanti a quella dei secondi, si rileva

$$b_{u-1}+b_u=b_0+b_1+\sum_1^{u-1}q_r\,(c_{r+1}-c_r);$$

ma $b_0+b_u=1$, $b_1=b_{u-1}=s$ per essere, com'è noto,

$$b_r=b_{u-r},\ r=0,1,\ldots,u,$$

adunque abbiamo

$$\sum_1^{u-1}q_r\,(c_{r+1}-c_r)=0,$$

e perciò anche

$$\sum_1^{u-1}q_r\,(a_{r+1}-a_r)=0.$$

Rispetto alle c_r introdotte osserviamo da ultimo che avendosi, come è noto,

$$a_r=a_{u-r+1},\ r=1,2,\ldots,u$$

sarà ancora

$$c_r=c_{u-r+1},\ r=1,2,\ldots,u;$$

e che essendo

$$k=a_1=a_u, \qquad\qquad a_r>0,\ r=1,2,3,\ldots$$

si avrà

$$c_1 = c_u = 0\,, \qquad\qquad c_r < k,\ r = 1,2,3,\ldots$$

Esempio: $N = 43$ e perciò $k = 6$, $s = 7$.

Dividendo	$2k - c_1 = 12$	per	$b_1 = 7$	si ottiene	$q_1 = 1,\ c_2 = 5$	e dalla (5)	$b_2 = 6$
»	$2k - c_2 = 7$	»	$b_2 = 6$	»	$q_2 = 1,\ c_3 = 1$	»	$b_3 = 3$
»	$2k - c_3 = 11$	»	$b_3 = 3$	»	$q_3 = 3,\ c_4 = 2$	»	$b_4 = 9$
»	$2k - c_4 = 10$	»	$b_4 = 9$	»	$q_4 = 1,\ c_5 = 1$	»	$b_5 = 2$
»	$2k - c_5 = 11$	»	$b_5 = 2$	»	$q_5 = 5,\ c_6 = 1$	»	$b_6 = 9$
»	$2k - c_6 = 11$	»	$b_6 = 9$	»	$q_6 = 1,\ c_7 = 2$	»	$b_7 = 3$
»	$2k - c_7 = 10$	»	$b_7 = 3$	»	$q_7 = 3,\ c_8 = 1$	»	$b_8 = 6$
»	$2k - c_8 = 11$	»	$b_8 = 6$	»	$q_8 = 1,\ c_9 = 5$	»	$b_9 = 7$
»	$2k - c_9 = 7$	»	$b_9 = 7$	»	$q_9 = 1,\ c_{10} = 0$	»	$b_{10} = 1$
»	$2k - c_{10} = 12$	»	$b_{10} = 1$	»	$q_{10} = 12.$		

Così

$$\sqrt{43} - 6 = \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{12+\ldots}\,; \quad u = 10.$$

Quando poi s è diverso da uno e primo con $2k$, per ottenere convergenti elevate di $\sqrt{N}$ con poca fatica è meglio ricordare che (*)

$$\sqrt{N} - k = \frac{s}{2k+}\,\frac{s}{2k+\ldots}\,;$$

e ciò anche se si considera che nel metodo precedente abbiamo l'elegante formola di Rickard da Birmingham, la quale, dopo aver calcolata la u^{ma} ridotta, ci offre con prestezza le ridotte $(2u)^{\text{ma}}$, $(4u)^{\text{ma}}$, ecc.

Ed invero, se indichiamo con P_r e Q_r i termini delle ridotte di una frazione continua infinita della prima classe, le cui frazioni abbiano tutte b per numeratore ed a per denominatore, risulta

$$\frac{P_r}{Q_r} = \frac{b}{a + \dfrac{P_{r-1}}{Q_{r-1}}}, \quad \text{e perciò} \qquad \begin{array}{ll} (6) & P_r = bQ_{r-1} \\ (7) & Q_r = aQ_{r-1} + P_{r-1} \end{array}$$

ovvero, sostituendo nella (7) a P_{r-1} il valore dato dalla (6),

$$(8) \qquad Q_r = aQ_{r-1} + bQ_{r-2}\,.$$

Orbene, se $\dfrac{b}{a}$ ed in generale se $\dfrac{P_{r-1}}{Q_{r-1}}$ è irreducibile, P_r e Q_r sono primi tra loro, ossia, osservando la (6), non esistono divisori comuni nè fra Q_{r-1} e Q_r, nè fra b e Q_r. Difatto un numero che dividesse Q_{r-1} e Q_r dovrebbe per la (7) dividere anche P_{r-1}, contro l'ipotesi che $\dfrac{P_{r-1}}{Q_{r-1}}$ sia irredu-

(*) Sappiamo che questa formola vale anche se k non è il maggior intero contenuto in $\sqrt{N}$, purchè sia sempre $k^2 + s = N$.

cibile: ed un numero che dividesse b e Q_r dividerebbe per la (8) aQ_{r-1}, ovvero Q_{r-1} per essere b primo con a; adunque quel numero dividerebbe tutte le Q di ordine inferiore, e perciò anche $Q_1 = a$, in opposizione all'ipotesi che a e b siano primi fra loro.

Facendo nella (8) $r = 1,2,3,\dots$ resulta:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= a \\
Q_2 &= a^2 + b \\
Q_3 &= a^3 + 2ab \\
Q_4 &= a^4 + 3a^2b + b^2 \\
Q_5 &= a^5 + 4a^3b + 3ab^2 \\
Q_6 &= a^6 + 5a^4b + 6a^2b^2 + b^3 \\
Q_7 &= a^7 + 6a^5b + 10a^3b^2 + 4ab^3 \\
Q_8 &= a^8 + 7a^6b + 15a^4b^2 + 10a^2b^3 + b^4 \\
Q_9 &= a^9 + 8a^7b + 21a^5b^2 + 20a^3b^3 + 5ab^4 \\
Q_{10} &= a^{10} + 9a^8b + 28a^6b^2 + 35a^4b^3 + 15a^2b^4 + b^5;
\end{aligned}$$

e per induzione

$$Q_n = a^n + \frac{n-1}{1} a^{n-2} b + \frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2} a^{n-4} b^2 + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3} a^{n-6} b^3 + \dots,$$

ossia, se si pone

$$[n, r] = \frac{(n-r)(n-r-1)\dots(n-2r+1)}{r\,!},$$

(9) $$Q_n = \Sigma\,[n, r]\, a^{n-2r}\, b^r\,,$$

nella quale r varia da 0 a $\frac{n}{2}$ per n pari, e da 0 a $\frac{n-1}{2}$ per n dispari, purchè conveniamo che $[n, 0]$ rappresenti l'unità positiva. È chiaro che per esser sicuri della legge basta dimostrare che, se la (9) si suppone vera per Q_{n-1} e Q_{n-2}, lo è altresì per Q_n: in tale ipotesi, a cagione della (8), l'r^{mo} coefficiente di Q_n dev'essere la somma dell'r^{mo} coefficiente di Q_{n-1} con l'$(r-1)^{mo}$ coefficiente di Q_{n-2}, e noi abbiamo per l'appunto

$$[n-1, r] + [n-2, r-1] =$$
$$= \frac{(n-r-1)(n-r-2)\dots(n-2r)}{r\,!} + \frac{(n-r-1)(n-r-2)\dots(n-2n+1)}{(r-1)\,!} =$$
$$= \frac{(n-r-1)(n-r-2)\dots(n-2r+1)}{(r-1)\,!}\left(\frac{n-2r}{r} + 1\right) = [n, r].$$

In virtù della (6) abbiamo poi

(10) $$P_n = b\,\Sigma\,[n-1, r]\, a^{n-2-1}\, b^r\,,$$

in cui r varia da 0 a $\frac{n-2}{2}$, se n è pari, e da 0 a $\frac{n-1}{2}$, se n è dispari.

Ora, nell'ipotesi che sia s diverso da *uno* ed $\frac{s}{2k}$ irreducibile, se ci servissimo della $\frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+\ldots}+\frac{1}{q_n+\ldots}$, oltre al non avere formole facili (*) che ci diano i termini delle ridotte in funzione delle q_r, la ridotta d'un dato ordine della medesima sarebbe in generale molto meno approssimata alla $\sqrt{N}-k$ che la ridotta dello stesso ordine della $\frac{s}{2k+}\frac{s}{2k+\ldots}$, poichè entrambe le ridotte sarebbero irreducibili ed i termini della prima in generale assai minori di quelli della seconda, che si ottengono facendo nella (10) e nella (9) $a=2k$, $b=s$. Difatto, oltrechè nella prima frazione continua tutti i numeratori parziali sono eguali ad uno, soltanto $q_{mu}=2k$, mentre il massimo valore delle altre q è k, ecc. ecc.

Varallo-Sesia, marzo 1899.

ENRICO DUCCI.

SOPRA UNA SERIE DI SEGNI POSITIVI E NEGATIVI

Occorre in certe questioni d'analisi sapere applicare il segno ai singoli termini di una serie, quando essi succedonsi con una certa legge. Il caso più comune e più semplice, oltre quello in cui i segni sono tutti eguali, si ha quando i termini sono alternativamente positivi e negativi, chè allora l'n^0, posto che il primo sia positivo, ha il segno di $(-1)^{n-1}$. Mi propongo ora di dare un cenno della serie di segni data da $(-1)^{\frac{s}{a_1}+\frac{s}{a_2}+\ldots+\frac{s}{a_p}}$ (a_i interi e positivi), che per brevità indicherò con (α_p), attribuendo ad s i valori interi da $-\infty$ a $+\infty$, e sottintendendo di prendere di ogni quoziente $\frac{s}{a_i}$ la sola parte intera.

Chiamando k il m. c. m. dei denominatori delle frazioni $\frac{s}{a_i}$ e h il numero intero $\frac{k}{a_1}+\frac{k}{a_2}+\ldots+\frac{k}{a_p}$, si vede che dando ad s i valori m, $m+k$ le somme $\frac{m}{a_1}+\frac{m}{a_2}+\ldots+\frac{m}{a_p}$ e $\frac{m+k}{a_1}+\frac{m+k}{a_2}+\ldots+\frac{m+k}{a_p}$ differiscono per il numero h, e di qui deriva che: *Secondo che* h *è pari o dispari la* (α_p) *è periodica con periodo* k, *oppure* 2k, *e nel secondo caso la seconda metà di ogni periodo è contraria della prima.*

(*) Si sa che per ottenere i termini della ridotta n^{ma} della frazione continua $\frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+\ldots}$ senza ricorrere alle ridotte precedenti possiamo soltanto stabilire un sistema di $n+1$ equazioni lineari (avente l'unità per determinante), fra le $n+1$ incognite del quale figurano i termini della ridotta che si cerca.

Confrontando la (α_p) con la (α_{p-1}), si vede che per $na_p \leq s < (n+1)a_p$, essendo n un dato numero intero positivo o negativo, la somma $\frac{s}{a_1} + \frac{s}{a_2} + \ldots + \frac{s}{a_p}$ differisce dalla $\frac{s}{a_1} + \frac{s}{a_2} + \ldots + \frac{s}{a_{p-1}}$ per l'intero n, e secondo che questo è pari o dispari, si ottengono nella (α_p), per s compreso nei limiti indicati, a_p segni eguali, oppure contrari, ai corrispondenti di (α_{p-1}). Abbiamo dunque: *La (α_p) si compone di gruppi di a_p segni che sono alternativamente eguali e contrari ai gruppi corrispondenti di (α_{p-1}). Ognuno di questi gruppi ha principio da un termine di posto na_p contando da zero.* Ne segue che: *Se vi sono denominatori a_i tutti eguali ad un dato numero a, la (α_p) è identica a quella che si ottiene astraendo da un numero pari di frazioni scelte fra quelle aventi quel denominatore.*

Premesse queste considerazioni, senza entrare in una discussione completa sulla serie di segni in discorso, mi limiterò a considerarne un caso particolare, che appunto per la sua semplicità può maggiormente riuscir utile in pratica: è il caso in cui ciascun denominatore sia multiplo del precedente. Porrò adunque: $a_2 = q_1 a_1$, $a_3 = q_2 a_2, \ldots a_p = q_{p-1} a_{p-1}$. La (α_1) si compone evidentemente di gruppi di a_1 segni positivi alternati da gruppi di a_1 segni negativi. Chiamando *gruppo di prima specie* quello formato di a_1 segni tutti eguali fra loro, potremo dire: *La (α_1) si compone di gruppi di prima specie.* Il segno che si ha per $s=0$ è il primo di un gruppo. Divisi i segni della (α_1) in gruppi di a_2 (partendo dal segno che si ha per $s=0$) avremo che ognuno di questi si compone di q_1 gruppi di a_1 segni, e siccome i gruppi r^0, $(r+1)^0$, $(r+2)^0 \ldots$ (r positivo o negativo) di (α_2) sono formati alternativamente degli stessi segni e dei segni contrari dei corrispondenti di (α_1), così l'$(r+1)^0$ gruppo di (α_2) si compone di q_1 gruppi di a_1 segni, l'ultimo dei quali eguale al primo dell'$(r+2)^0$ ed il primo eguale all'ultimo dell'r^0, cosicchè la (α_2) risulta composta da insiemi di $q_1 - 2$ gruppi di a_1 segni, alternati questi insiemi da gruppi di $2a_1$ segni. Chiamando *gruppo di seconda specie* quello formato di $q_1 - 2$ gruppi di prima specie, e *complesso di prima specie* quello formato di $2a_1$ segni eguali fra loro, si ha che: *La (α_2) si compone di gruppi di seconda specie alternati da complessi di prima specie.* È facile vedere che per $s = ma_2$ (in particolare per $s=0$) si ha il primo segno della seconda metà di un complesso di prima specie. In particolare per $q_1 = 3$ si ha *una serie composta di gruppi alternativamente* (a_1 *di* a_1) *segni,* e per $q_1 = 2$ si ha una serie composta di gruppi di $2a_1$ segni e che differisce dalla $(-1)^{\frac{s}{2a_1}}$ solo perchè in questa per $s=0$ si ha il primo segno di un gruppo di $2a_1$ segni ed in quella il primo segno della seconda metà di un tal gruppo.

Dividansi ora i segni della (α_2) in gruppi di a_3 (a partire per esempio dal segno che si ha per $s=0$) L'h^0 gruppo (h positivo o negativo) si compone di q_2 gruppi di seconda specie alternati da complessi di prima specie, e questo insieme, che chiamerò *gruppo di terza specie,* trovasi preceduto e seguito da mezzo complesso di prima specie. E siccome i gruppi h^0, $(h+1)^0$, $(h+2)^0, \ldots$ di (α_3) si compongono alternativamente degli stessi segni e dei contrari di (α_2), così chiamando *complesso di seconda specie* l'insieme di due gruppi di prima specie, avremo che: *La (α_3) si compone di gruppi di terza specie alternati da complessi di seconda specie.* Ora siccome un gruppo di terza specie incomincia e finisce con un gruppo di seconda specie, cioè con $q_1 - 2$ gruppi di prima specie, e siccome due gruppi di terza specie sono separati da un complesso di seconda, così possiamo anche considerare la (α_3) come composta di gruppi di terza specie (considerati come insiemi di $q_2 - 1$

complessi di prima specie alternati da gruppi di seconda specie) alternati da complessi di seconda specie (considerati come insiemi di $2(q_1-1)$ gruppi di prima specie). Per $s=0$ si vede che in ogni caso si ha il primo segno della seconda metà di un complesso di seconda specie.

Per $q_1=2$ il gruppo di terza specie, sia conforme alla prima che alla seconda definizione, si compone di q_2-1 complessi di prima specie, per cui, posto anche $q_2=2$, si ottiene *una serie formata di gruppi di* $2a_1$ *segni alternativamente composti di segni tutti eguali e di segni metà di una specie e la seconda metà dell'altra specie.*

Dividendo nella (α_3), considerata com'è indicato nel primo modo, i segni a partire da quello che si ha per $s=0$, in gruppi di a_4, il k^0 di questi si compone di q_3 gruppi di terza specie alternati da complessi di seconda specie, e questo insieme, che chiamerò *gruppo di quarta specie,* trovasi preceduto e seguito da un gruppo di prima specie. E siccome il k^0, $(k+1)^0$, $(k+2)^0$, ... gruppo di (α_4) sono alternativamente formati dagli stessi segni e dai contrari dei corrispondenti della (α_3), così si vede che: *La* (α_4) *si compone di gruppi di quarta specie alternati da complessi di prima specie.* Per $q_1=q_2=q_3=2$ il gruppo di quarta specie si compone di due complessi di prima specie alternati da uno di seconda specie, cosicchè ne risulta *una serie composta di complessi di seconda specie alternati da terne di complessi di prima specie.*

Ed ora procedendo col metodo d'induzione e chiamando *gruppo di* p^a *specie* quello formato di q_{p-1} gruppi di $(p-1)^a$ specie alternati da complessi di prima o seconda specie secondo che p è dispari o pari, avremo che: *La* (α_p) *è formata di gruppi di* p^a *specie alternati da complessi di seconda o prima specie, secondo che* p *è dispari o pari.*

Per $q_1=q_2=q_3=q_4=2$ la (α_5) è *una serie composta di gruppi formati ognuno di tre complessi di seconda specie alternati (questi tre complessi) da complessi di prima, i quali gruppi sono alternati da terne di complessi di prima specie.*

Tralasciando di considerare la scomposizione in gruppi di cui è suscettibile la (α_p) qualora si continui sulla via indicata dalla seconda scomposizione della (α_3), noterò una speciale interpretazione che può darsi alla (α_p) quando sia $q_1=q_2=\ldots=q_{p-1}=2$. Dimostrerò cioè il seguente teorema: *Se si prende una serie di segni tutti positivi divisi in gruppi di* a_1 *ciascuno, e se da questa se ne deduce una seconda intercalando fra ogni gruppo di essa ed il suo successivo un gruppo contrario al primo, e se da questa nuova serie se ne deduce un'altra con la medesima legge, e così via, i segni della* $(n+1)^a$ *serie dedotta sono dati da* $(-1)^{\frac{s}{a_1}+\frac{s}{2a_1}+\cdots+\frac{s}{2^n a_1}}$.

Basterà far la dimostrazione per $a_1=1$, chè per gli altri valori di a_1 non c'è altra differenza che quella del numero dei termini componenti ciascun gruppo. Posto che la $(x+1)^a$ serie sia data da $(-1)^{\frac{s}{1}+\frac{s}{2}+\cdots+\frac{s}{2^x}}$ (1) dimostriamo che quella che si deduce da questa mediante la legge indicata è data $(-1)^{\frac{s}{1}+\frac{s}{2}+\cdots+\frac{s}{2^{x+1}}}$ (2). Fissiamo nella (1) il termine di posto $a+1$ (che si ha facendo $s=a$); esso nella serie che si deduce dalla (1) secondo la legge indicata nel teorema viene ad occupare il posto $2a+1$, e quello che s'intercala fra i segni di posti $a+1$, $a+2$ viene ad occupare nella serie dedotta il posto $2a+2$. Resta perciò a dimostrare che i segni di posto $2a+1$, $2a+2$ della (2), che si hanno per $s=2a$, $s=2a+1$ sono il primo eguale e il secondo contrario a quello di posto $a+1$ della (1). Facendo $s=2a$ nella (2) si ha $(-1)^{\frac{2a}{1}+\frac{2a}{2}+\cdots+\frac{2a}{2^{x+1}}}=(-1)^{2a}\cdot(-1)^{\frac{a}{1}+\frac{a}{2}+\cdots+\frac{a}{2^x}}$ (3). Facendo ora nella (2) $s=2a+1$, osserviamo che, intendendo parlare di quozienti interi, è $\frac{2a+1}{2^y} = \frac{a}{2^{y-1}}$, perchè è $\frac{2a+1}{2^y} = \frac{a}{2^{y-1}} + \frac{1}{2^y}$, e siccome la divisione $\frac{a}{2^{y-1}}$ dà al massimo per resto $2^{y-1} - 1$, così chiamando b la parte intera di $\frac{a}{2^{y-1}}$, sarà al massimo $\frac{a}{2^{y-1}} + \frac{1}{2^y} = b + \frac{2^{y-1}-1}{2^{y-1}} + \frac{1}{2^y} = b + \frac{2^y - 1}{2^y}$, la cui parte intera è ancora b.

Abbiamo allora: $(-1)^{\frac{2a+1}{1} + \frac{2a+1}{2} + \dots + \frac{2a+1}{2^{x+1}}} = (-1)^{2a+1} \cdot (-1)^{\frac{a}{1} + \frac{a}{2} + \dots + \frac{a}{2^x}}$. Questa e la (3) unitamente alla considerazione che il teorema è vero per $x = 0$, $x = 1$, dimostrano quanto si voleva.

Sondrio, 18 marzo 1898.

FRANCESCO PALATINI.

SUGLI ESAGONI DI PASCAL E DI BRIANCHON

1. È sempre possibile risolvere i problemi seguenti:

a) *Date cinque rette* a, b, c, d, e, *determinarne una sesta* f *in modo che l'esagono semplice* abcdef *sia ad un tempo esagono di* Pascal *ed esagono di* Brianchon.

Detto P il punto in cui s'incontrano a e d, Q il punto in cui s'incontrano b ed e, R il punto in cui la c incontra la PQ, si conduca dal punto R della c la seconda tangente f alla conica H determinata dalle cinque tangenti a, b, c, d, e. (*)

L'esagono delle cinque rette date e della sesta così determinata ha i lati tangenti alla conica H, e poichè inoltre le tre coppie di lati opposti s'incontrano in tre punti P, Q, R di una retta, ha i vertici sopra un'altra conica K.

b) *Dati cinque punti* A, B, C, D, E, *determinarne un sesto* F *in modo che l'esagono semplice* ABCDEF *sia ad un tempo esagono di* Brianchon *ed esagono di* Pascal.

Detta p la retta passante per A e D, q la retta passante per B ed E, r la retta condotta per C e per il punto O comune a p ed a q, si determini il secondo punto F che la CO ha in comune colla conica determinata dai cinque punti A, B, C, D, E. (*)

L'esagono avente per vertici i cinque punti dati ed il sesto così determinato ha i vertici sopra una conica K, e poichè inoltre le diagonali condotte per le tre coppie di vertici opposti passano per un punto O, ha i lati tangenti ad un'altra conica H.

(*) CREMONA, *Elementi di geometria proiettiva*, pag. 82, n. 124.

2. Ciò premesso, possiamo dimostrare:

Se un esagono E *è inscritto in una conica* H, *ed è circoscritto ad un'altra conica* K, *il punto* O *comune alle diagonali condotte per i vertici opposti è il polo, rispetto alla conica* H, *della retta* o *sulla quale s' incontrano le coppie di lati opposti.*

Infatti, ciascuna coppia di lati opposti determina sulla conica H quattro punti, che possono essere considerati come vertici di un quadrangolo inscritto. Le diagonali dei tre quadrangoli passano tutte per O, mentre ciascun quadrangolo ha una coppia di lati opposti che s'incontrano sopra *o*, quindi la retta *o* è il luogo dei punti di concorso delle coppie di lati opposti d'ogni quadrangolo inscritto, le cui diagonali passino per O: come tale è la polare di O rispetto alla conica H.

3. *Se un esagono* E *è inscritto in una conica* H, *ed è circoscritto ad un'altra conica* K, *le tangenti condotte per i vertici alla conica* H *sono i lati di un esagono* E′, *che, oltre all'essere circoscritto alla conica* H, *è inscritto in una conica* M: *i punti di contatto dei lati colla conica* K *sono i vertici di un esagono* E″, *che, oltre all'essere inscritto nella conica* K, *è circoscritto ad una conica* N.

Infatti, le tangenti condotte alla conica H per i vertici dell'esagono E s'incontrano ordinatamente a due a due in sei punti, che sono rispettivamente i poli dei lati dell'esagono E, rispetto alla conica H: e poichè i lati dell'esagono E inviluppano per ipotesi una conica K, i vertici di E″ sono sopra una conica M.

I punti di contatto della conica K coi lati dell'esagono E congiunti ordinatamente a due a due determinano sei rette, che sono rispettivamente le polari dei vertici dell'esagono E, rispetto alla conica K; e poichè i vertici dell'esagono E sono per ipotesi sopra una conica H, i lati di E″ inviluppano una conica N.

4. *Se un esagono* E *è inscritto in una conica* H, *ed è circoscritto ad un'altra conica* K, *in ciascuno dei due esagoni* E′, E″ *aventi il primo per lati le tangenti condotte per i vertici di* E *alla conica* H, *il secondo per vertici i punti di contatto dei lati di* E *colla conica* K, *le diagonali dei vertici opposti passano per il punto comune alle diagonali di* E, *ed i lati opposti s' incontrano sulla retta dei punti d' incontro dei lati di* E.

Infatti il punto O per il quale passano le diagonali dei vertici opposti dell'esagono E è, come si disse (2), il polo, rispetto alla conica H, della retta *o*, sulla quale s'incontrano i suoi lati opposti. Ma i due esagoni E ed E′ sono reciproci rispetto alla stessa conica H, quindi le diagonali di E′ devono passare per il polo di *o*, mentre i suoi lati devono incontrarsi sulla polare di O.

Altrettanto dicasi degli esagoni E ed E″ reciproci rispetto alla conica K.

5. Sempre relativamente agli esagoni E, E′, E″ di cui sopra, nel caso particolare che i lati opposti di E siano paralleli, lo saranno del pari tanto i lati opposti di E′ quanto quelli di E″; ed il punto O, polo in questo caso della retta all'infinito del piano, sarà centro delle coniche e degli esagoni.

DIEGO FELLINI.

PICCOLE NOTE

1ª. Trasformazione dei prodotti $\prod_1^n \cos\alpha_i$ e $\prod_1^n \operatorname{sen}\alpha_i$ in somme di seni o di coseni. — Il sig. Prof. Lazzeri, nel fascicolo IV di questo *Periodico* ha dati questi sviluppi applicandoli al calcolo di integrali d'uso frequente. Egli si è fondato sulle espressioni esponenziali del seno e del coseno. Si giunge al risultato molto semplicemente con l'applicazione delle note formole di Trigonometria

$$2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 = \cos(\alpha_1+\alpha_2)+\cos(\alpha_1-\alpha_2) \tag{1}$$

$$2\operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2 = \cos(\alpha_1-\alpha_2)-\cos(\alpha_1+\alpha_2) \tag{2}$$

le quali risolvono il problema pel caso di $n=2$. Moltiplicando la prima successivamente per $\cos\alpha_3$, $\cos\alpha_4$, ... e trasformando i prodotti del secondo membro secondo la (1) stessa, si giunge a ottenere

$$\prod_1^n \cos\alpha_i = \frac{1}{2^{n-1}}\sum \cos(\alpha_1 \pm \alpha_2 \ldots \pm \alpha_n).$$

Moltiplicando la (2) successivamente per $\operatorname{sen}\alpha_3$, $\operatorname{sen}\alpha_4$, ... e trasformando i secondi membri come insegnano la formola

$$2\cos x\operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(x+y)-\operatorname{sen}(x-y)$$

e la (2) medesima, si giunge ai risultati

$$\prod_1^n \operatorname{sen}\alpha_i = \frac{1}{2^{n-1}}\sum \pm\operatorname{sen}(\alpha_1 \pm \alpha_2 \ldots \pm \alpha_n) \qquad (n \text{ dispari})$$

$$\prod_1^n \operatorname{sen}\alpha_i = \frac{1}{2^{n-1}}\sum \pm\cos(\alpha_1 + \alpha_2 \ldots \pm \alpha_n) \qquad (n \text{ pari})$$

In queste due formole, ciascun seno o coseno dei secondi membri, sarà preceduto dal segno + quando l'argomento contiene un numero pari di segni —, sarà preceduto dal segno — in caso diverso.

2ª. Numero delle radici di una congruenza. — Sia p un numero primo dispari, e $\varphi(x)$, $\Psi(x)$ due polinomi a coefficienti interi, minori di p, dei gradi rispettivi m ed $n \leq m$. In questi polinomi si intendono soppressi i termini aventi i coefficienti multipli di p, e, in ciascuno, si ritiene uguale all'unità il coefficiente della più alta potenza di x. Ciò posto, *si dirà che* $\Psi(x)$ *è un divisore di* $\varphi(x)$, *nella congruenza di mod.* p, se il resto della divisione di $\varphi(x)$ per $\Psi(x)$ è identicamente congruo a zero (mod. p). Se $\Psi(x)$ non è un divisore di $\varphi(x)$, si moltiplichi il resto della divisione dei due polinomi per un conveniente numero, affinchè il coefficiente della più alta potenza di x, in esso, diventi congruo all'unità (mod. p) e si sostituiscano a questo e agli altri coefficienti i numeri ad essi congrui (mod. p) e minori di p. Si divida poi $\Psi(x)$ pel resto così modificato; se il nuovo resto non è identicamente congruo a zero o ad un numero indipendente da x e primo con p, lo si modifichi come il precedente e poi si divida questo per quello. Continuando a questa maniera o si giungerà ad un resto che è un divisore del resto precedente e che diremo il *massimo comun divisore dei polinomi* $\varphi(x)$ *e* $\Psi(x)$ *nella congruenza di mod.* p o si giungerà ad un resto che è un numero primo con p, nel qual caso diremo che *i polinomi* $\varphi(x)$ *e* $\Psi(x)$ *sono primi tra loro nella congruenza di mod.* p.

È facile dimostrare, dopo ciò, che *se* $\Psi(x)$ *e* $\varphi(x)$ *sono primi tra loro nella congruenza di mod.* p, *le congruenze* $\varphi(x)\equiv 0$ $\Psi(x)\equiv 0$ *(mod.* p*) non possono avere soluzioni comuni* e che *se* $\chi(x)$ *è il massimo comun divisore di* $\varphi(x)$ *e* $\Psi(x)$, *nella detta congruenza, tutte le radici comuni alle congruenze* $\varphi(x)\equiv 0$ *e* $\Psi(x)\equiv 0$ *(mod.* p*) e queste radici soltanto, sodisfano anche alla congruenza* $\chi(x)\equiv 0$ *(mod.* p*).*

Supposto, in particolare, $\varphi(x) = x^p - x$ possiamo dire che *la congruenza* $\Psi(x)\equiv 0$ *(mod.* p*) non ha alcuna radice se il polinomio* $\Psi(x)$ *è primo con* $x^p - x$, *nella congruenza di mod.* p, *e che invece la stessa congruenza possiede le radici dell'altra* $\chi(x)\equiv 0$ *(mod.* p*) se* $\chi(x)$ *è, nella congruenza di mod.* p, *il m. c. d. di* $x^p - x$ *e* $\Psi(x)$.

Oltre a ciò, potendosi porre

$$x^p - x \equiv Q(x)\,\chi(x) \pmod{p}$$

con $Q(x)$ polinomio intero in x, la congruenza $\chi(x)\equiv 0$ (mod. p) ha tante soluzioni quante unità nel suo grado (*) e perciò si conclude che *la congruenza* $\Psi(x)\equiv 0$ *(mod.* p*) ha tante soluzioni quante unità sono nel grado del m. c. d. di* $x^p - x$ *e* $\Psi(x)$, *o nessuna soluzione, se questi due polinomi sono primi tra loro.*

Queste considerazioni possono servire a determinare quante radici comuni hanno due congruenze dello stesso modulo, oppure a determinare il numero delle radici di una congruenza, o infine, a ridurre la soluzione di questa a quella di un'altra di grado meno elevato.

Per es. si troverà che, nella congr. di mod. 11, il polinomio $x^6+3x^5-2x^4-x+4$ è primo con $x^{11}-x$ e che perciò la congruenza

$$x^6 + 3x^5 - 2x^4 - x + 4 \equiv 0 \pmod{11}$$

non ha soluzioni.

Data invece la congruenza

$$x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2 \equiv 0 \pmod{7}$$

si troverà $\chi(x) = x^2 - 5x - 1$, per cui essa ha due soluzioni che si otterranno risolvendo la congruenza molto più semplice $x^2 - 5x - 1 \equiv 0$ (mod. 7); si trovano

(*) Vedi P. L. TCHEBICHEFF, *Teoria delle congruenze*, traduzione italiana di *I. Massarini*. Roma, E. Loescher, 1895.

le soluzione $x\equiv 2$, $x\equiv 4$ (mod. 7). Si può inoltre determinare facilmente se una soluzione di una congruenza è multipla e di che ordine: nel secondo degli esempi citati, la radice 2 è tripla, l'altra è doppia.

Le stesse considerazioni che precedono si prestano a qualche deduzione generale, quando i resti che si ottengono nella ricerca di $\chi(x)$ sono di una forma conosciuta. Così, riesce facile lo studio della congruenza binomia

$$(1) \qquad x^n - a \equiv 0 \pmod{p}$$

nella quale a è primo con p ed n non è un divisore di $p-1$.

Il resto della divisione di $x^{p-1} - 1$ per $x^n - a$ è della forma $x^{r_1} - a_1$ (*) dove r_1 è il resto della divisione di $p-1$ per n ed a_1 una certa potenza di a. Il resto della divisione di $x^n - a$ per $x^{r_1} - a_1$ è del pari della forma $x^{r_1} - a_2$ dove r_2 è il resto della divisione di n per r_1 ed a_2 una potenza di a; in generale, il resto della divisione di $x^{r_s} - a_s$ per $x^{r_{s+1}} - a_{s+1}$ sarà della forma $x^{r_{s+2}} - a_{s+2}$, con r_{s+2} resto della divisione di r_s per r_{s+1} ed a_{s+2} potenza di a, come a_{s+1} ed a_s. Dunque, $\chi(x)$ *sarà della forma* $x^\rho - a^\pi$ *con* ρ *m. c. d. di* $p-1$ *ed* n; *se ne deduce che se la* (1) *ha soluzioni, essa ne ha* ρ. L'ultimo resto, nella ricerca di $\chi(x)$, essendo della forma $1 - a^\mu$, segue che la condizione necessaria e sufficiente perchè esista $\chi(x)$ è data dalla congruenza $a^\mu \equiv 1 \pmod{p}$.

Per la determinazione dei numeri μ e π si può procedere come segue: se la (1) ammette delle soluzioni, queste sono dei numeri primi con p, quindi sarà necessariamente $x^{(p-1)\frac{n}{\rho}} \equiv 1 \pmod{p}$ ossia $a^{\frac{p-1}{\rho}} \equiv 1 \pmod{p}$. Oltre a ciò, essendo $a^{\frac{\pi(p-1)}{\rho}} - 1$ il resto della divisione di $x^{p-1} - 1$ per $x^\rho - a^\pi$, si vede che la condizione necessaria $a^{\frac{p-1}{\rho}} \equiv 1 \pmod{p}$, affinchè la (1) sia possibile, è anche sufficiente, per cui $\mu \equiv \frac{p-1}{\rho} \pmod{p-1}$.

Osservando ora che il resto della divisione di $x^n - a$ per $x^\rho - a^\pi$ è $a^{\frac{\pi n}{\rho}} - a$ (**) e che esso deve essere congruo identicamente a zero (mod. p), se la (1) ha soluzioni e viceversa, si deduce che π deve sodisfare alla congruenza sempre possibile: $\frac{n}{\rho}\pi - 1 \equiv 0 \pmod{\delta}$, dove δ è l'esponente a cui appartiene a rispetto al mod. p ed è un divisore di $\frac{p-1}{\rho}$. Per non dover determinare δ, basterà ricavare π dalla congruenza $\frac{n}{\rho}\pi - 1 \equiv 0 \left(\text{mod. } \frac{p-1}{\rho}\right)$, perchè se è $\pi = \alpha\delta + \pi_1$ si ha $a^\pi \equiv a^{\pi_1}$ (mod. p), visto che $a^{\alpha\delta} \equiv 1 \pmod{p}$.

Forlì, marzo 1890.

F. MARIANTONI.

(*) È il resto trasformato come si disse precedentemente; la sua forma si può dedurre esaminando l'andamento della divisione. Si trova così che essa è $a^\lambda x^{r_1} - 1$, che si riduce ad $x^{r_1} - a^{p-1-\lambda}$, moltiplicando per $a^{p-1-\lambda}$ e tenendo presente il teorema di Fermat.

(**) Ciò risulta dalla identità

$$x^n - a = (x^\rho)^{\frac{n}{\rho}} - (a^\pi)^{\frac{n}{\rho}} + (a^\pi)^{\frac{n}{\rho}} - a.$$

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 452, 453, 456, 458

452. *Sono date* n *urne contenenti palle numerate: la prima ne contiene* α_1, *la seconda* $\alpha_2, \ldots$ *la* n^a *ne contiene* α_n. *Si estragga una palla da ogni urna, si ripeta questa operazione* k *volte, senza però rimettere mai nelle urne le palle estratte. Si domanda la probabilità che in* p *di queste operazioni, e non più, risultino estratte palle collo stesso numero.*

STROCCHI.

Risoluzione del sig. Zeno Giambelli, studente della R. Università di Torino.

Indicando per brevità le urne col numero delle palle che contengono, detto $\alpha_1 \geq p$ l'urna che contiene il minor numero di palle, Ω_m l'operazione che consiste nell'estrarre da m urne una palla per ciascuna, se si indica con $\Delta_{\alpha_s, p}$ il numero delle disposizioni delle α_s palle dell'urna α_s prese a p a p nelle quali nessuna palla occupa il posto designato da una data disposizione di p numeri compresi fra 1 e α_s segue che $D_{\alpha_1, p}\, \Delta_{\alpha_2, p}$ è il numero delle disposizioni di p palle per ciascuna delle urne α_1, α_2 tali che in nessuna operazione Ω_2 siano state estratte due palle col medesimo numero. Si può quindi concludere che

$$D_{\alpha_1, p}\, D_{\alpha_2, p} \ldots D_{\alpha_n, p} \sum_{s=2}^{s=n} \frac{\Delta_{\alpha_s, p}}{D_{\alpha_s, p}}$$

è il numero dei casi sfavorevoli alla quistione, da cui ne segue che la probabilità richiesta è

$$1 - \sum_{s=2}^{s=p} \frac{\Delta_{\alpha_s, p}}{D_{\alpha_s, p}} = 1 - \sum_{s=2}^{s=p} \sum_{k=0}^{k=p} \frac{(-1)^k}{(\alpha_s - k + 1)^k} \binom{p}{k}$$

perchè (v. *Periodico*, anno XIII, p. 77-78).

$$\Delta_{\alpha_s, p, p} = X_{\alpha_s, p, p} = \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} D_{\alpha_s - k,\, p - k}.$$

Generalizzazione. — La data quistione è un caso particolare della seguente: *Se si hanno le medesime urne contenenti la prima* α_1 *palle, la seconda* α_2 *palle.... la* n^a α_n, *e se da ogni urna* α_s, *si estraggono* p_s *palle, ove* $p_s < \alpha_s$, *e inoltre* p_1 *è il minore dei numeri,* p_s *si domanda qual'è la probabilità che in una delle prime* p_1 *operazioni* Ω_n *siano estratte palle col medesimo indice.* Supponendo le $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ disposte in ordine crescente, il che non toglie nulla alla generalità del problema e detto $\Delta_{\alpha_s, p_s, p_1}$ il numero delle disposizioni a p_s a p_s di α_s elementi, nelle quali nei primi p_1 posti nessun elemento occupa il posto indicato da una data disposizione di p_1 numeri compresi fra **1** e α_s, e osservando che (v. *Periodico* l. c.)

$\Delta_{\alpha_s, p, p_1} = X_{\alpha_s, p_s, p_1} = \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{p_1}{k} D_{\alpha_s - k,\, p_s - k}$, e supponendo in primo luogo per facilità $p_1 = p$, si conclude con un processo analogo a quello precedente per la data quistione che se $p_t = p$, il numero dei casi sfavorevoli al problema è $D_{\alpha_1 p_1} D_{\alpha_2 p_2} \ldots\ldots D_{\alpha_n p_n} \sum_{s=2}^{s=n} \frac{\Delta_{\alpha_s, p_s, p_1}}{D_{\alpha_s p_s}}$, e quindi la probabilità equivale a

$$1 - \sum_{s=2}^{s=n} \frac{\Delta_{\alpha_s, p\, p_1}}{D_{\alpha_s\, p}} = 1 - \sum_{s=2}^{s=n} \sum_{k=0}^{k=p} \frac{(-1)^k}{(\alpha_s - k + 1)^{\overline{k}}} \binom{p_1}{k}.$$

Se p_t non è eguale a p_1, essendo $D_{\alpha_t - \alpha_1, r} \cdot D_{\alpha_1 p_t - r}$ il numero delle disposizioni di α_t elementi presi p_t a p_t, dei quali in ciascuna disposizione $p-r$ sono presi tra 1 e α_1, e chiamando per brevità queste disposizioni col simbolo che dà il loro numero, segue che $D_{\alpha_t - \alpha_1, r} \cdot D_{\alpha_1 p_t - r} \cdot \Delta_{\alpha_s, p_s, p_t - r}$ è il numero delle disposizioni di p_t elementi di $D_{\alpha_t - \alpha_1, r} \cdot D_{\alpha_1, p_t - r}$, associate colle disposizioni di p_s elementi di α_s in modo che in ciascuna coppia di disposizioni non vi siano due elementi collo stesso numero che occupino il medesimo posto. Si ricava quindi che

$$D_{\alpha_1, p_1} \cdot D_{\alpha_2, p_2} \ldots D_{\alpha_n, p_n} \sum_{r=0}^{r=p_1} \frac{D_{\alpha_t - \alpha_1, r} \cdot D_{\alpha_1, p_t - r}}{D_{\alpha_t, p_t}} \left\{ \sum_{s=1}^{s=t-1} \frac{\Delta_{\alpha_s, p\, p_t - r}}{D_{\alpha_s, p_s}} + \sum_{s=t+1}^{s=n} \frac{\Delta_{\alpha_s, p_s, p_t - r}}{D_{\alpha_s, p}} \right\}$$

è il numero dei casi sfavorevoli al problema, da cui ne segue che la probabilità richiesta è:

$$1 - \sum_{r=0}^{r=p_t} \frac{(\alpha_1 - p_t + r + 1)^{\overline{p_t - r}} \cdot (\alpha_t - \alpha_1 - r + 1)^{\overline{r}}}{(\alpha_1 - p_t + 1)^{\overline{p_t}}} \left\{ \sum_{s=1}^{s=t-1} \sum_{k=0}^{k=p_t - r} \frac{(-1)^k}{(\alpha_s - k + 1)^{\overline{k}}} \binom{p_t - r}{k} + \sum_{s=t+1}^{s=n} \sum_{k=0}^{k=p_t - r} \frac{(-1)^r}{(\alpha_s - k + 1)^{\overline{k}}} \binom{p_t - r}{k} \right\}.$$

453. *È dato un circolo di centro* C *e di raggio* r *e una tangente fissa, il cui punto di contatto è* O. *Si conduca la tangente in un punto* M *del circolo fino a incontrare la tangente fissa in* P. *Dimostrare che al variare di* M *sul circolo il luogo del punto d'incontro di* OM *con la perpendicolare in* P *alla tangente fissa è una parabola, il cui fuoco è situato su* OC *alla distanza* $\frac{r}{4}$ *da* O. *Essa taglia il circolo in due punti diametralmente opposti e sempre sotto il medesimo angolo, qualunque sia la grandezza del circolo.*

PICCIOLI.

Risoluzione del sig. Filippo Sibirani, studente nella R. Università di Bologna.

Si consideri un circolo di centro C, una tangente fissa in O, una tangente variabile in M, la quale incontra in P la tangente fissa: dico che *il luogo dei punti d'intersezione della* OM *colla congiungente* P *e un punto fisso* A *nella* OC, *è una conica*. Il punto P è polo della OM; epperò il fascio proiettante da A, i punti P è proiettivo al fascio di centro O; essi determinano quindi una conica. Al raggio comune OA corrispondono le due perpendicolari ad esso in O ed in A, e poichè esse debbono essere tangenti alla conica, vuol dire che OA ne è l'asse. Se ora mandiamo A all'infinito nella stessa direzione, le rette PA_∞ diventano perpendicolari alla tangente fissa, e la conica individuata dal fascio P e dal fascio A_∞ è una parabola che ha per asse la OC ed è tangente in O alla tangente fissa. Essa taglierà il circolo in due punti simmetrici rispetto all'asse; anzi in due punti diametralmente opposti, perchè se essi sono N e N', ai raggi ON, ON' corrispondono le tangenti in N a N', epperò le loro intersezioni sono gli stessi punti N e N'. Si sa poi che i punti della parabola sono equidistanti dal fuoco e dalla direttrice: in particolare la distanza di N dalla direttrice diminuita del raggio dà la distanza del fuoco F dal vertice: ossia nel triangolo rettangolo NCF l'ipotenusa supera di tanto il raggio di quanto ne è inferiore il cateto FC. Di qui si ricava che CF è uguale a $\frac{3r}{4}$, e quindi OF a $\frac{r}{4}$.

Altre risoluzioni del Prof. V. Retali e del sig. Giuseppe Marletta, studente della R. Università di Catania; Ernesto Laura e Attilio Crepas, R. Università di Pavia; Zeno Giambelli, R. Università di Torino.

456. *Siano* a, b *due tangenti ad una parabola nei punti* A, B. *Si prenda il punto* B' *simmetrico a* B *rispetto al punto* $O \equiv ab$.

1°. *Preso un punto* M *della retta* $r \equiv AB'$, *se si costruisce il parallelogrammo* OMM_1M_2, *in cui* M_1, M_2, *sono sulle* a, b, *la retta* M_1M_2 *risulta tangente alla parabola.*

2°. *Se nel triangolo* OAB' *si conducono l'altezza* OX, *la bisettrice* OY, *e la mediana* OZ, *dai punti* X, Y, Z, *della* r, *si ottengono (con la costruzione precedente) le tre tangenti* X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2, *le quali hanno rispettivamente le seguenti proprietà:*

a) *il segmento* X_1X_2 *è minimo, e la* X_1X_2 *risulta la tangente nel vertice;*

b) *il triangolo* OY_1Y_2 *è isoscele;*

c) *il triangolo* OZ_1Z_2 è massimo *tra gli analoghi compresi nell'angolo* $\widehat{AOB}$ *che contiene la parabola.*

MACCAFERRI.

Risoluzione del Prof. V. Retali.

1°. Dai triangoli simili AOB', AM_1M si ha $M_1A : OA = MM_1 : OB'$ e siccome $MM_1 = M_2O$, $OB' = BO$; $M_1A : OA = M_2O : BO$, ossia $(M_1\, OA\infty) = (M_2\, BO\infty)$; i punti M_1 e M_2 segnano dunque sulle rette a e b due punteggiate simili, e al punto O, secondochè è pensato appartenente ad a o b corrisponde in b o in a il punto B o il punto A. Lo inviluppo della retta M_1M_2 è dunque la parabola che tocca a in A e b in B; la retta r è un diametro di questa parabola, perchè parallela alla congiungente il centro della corda $\overline{AB}$ col polo O.

2°. a) $\overline{X_1X_2} = \overline{OX}$ dunque è minimo; la tangente X_1X_2 perpendicolare al diametro r, è la tangente al vertice;

b) $\widehat{B'OY} = \widehat{YOY_1} = \widehat{OY_1Y_2} = \widehat{OY_2Y_1}$;

c) Dalle proporzioni

$$\Delta\,.\,OMM_1 : \Delta\,.\,AMM_1 = B'M : MA$$
$$\Delta\,.\,AMM_1 : \Delta\,.\,AB'O = \overline{MA}^2 : \overline{AB'}^2$$

abbiamo

$$\Delta\,.\,OMM_1 = \left(\frac{\Delta\,.\,AB'O}{\overline{AB'}^2}\right).\,B'M\,.\,MA,$$

dunque il massimo del triangolo OMM_1, e del suo eguale OM_1M_2, si ha per $B'M = MA$, cioè quando M cade in Z.

Altre risoluzioni dei sigg. Giuseppe Marletta, Ernesto Laura e Zeno Giambelli, R. Università di Torino.

458. *Determinare il seguente integrale*

$$\int\left\{\theta(1+\theta)+(2\theta+\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta\right\}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

GIOVANETTI.

Risoluzione del sig. Zeno Giambelli, studente della R. Università di Torino e del Prof. Alfredo Massa.

Nei primi due dei quattro integrali

$$\int\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta,\ \int\theta^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta,\ \int 2\theta\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta,\ \int\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta,$$

in cui si decompone il dato, si possono separare mediante l'integrazione per parti i fattori razionali dai trascendenti, e quindi si ricava

$$\int\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta=-\theta\cos\theta+\operatorname{sen}\theta,$$

$$\int\theta^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta=-\theta^2\cos\theta+2\theta\operatorname{sen}\theta+2\cos\theta,$$

$$\int 2\theta\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta=\left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{2\theta\operatorname{sen}2\theta+\cos2\theta}{4}\right).$$

Ora siccome anche

$$\int\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta=\frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta$$

si conclude

$$\int\left\{\theta(1+\theta)-(2\theta+\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta\right\}\operatorname{sen}\theta\,d\theta=(1-\theta(1+\theta))\cos\theta+(2\theta+1)\operatorname{sen}\theta+$$
$$+\left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{2\theta\operatorname{sen}2\theta+\cos^2\theta}{4}\right)+\frac{\cos^3\theta}{3}.$$

QUISTIONI PROPOSTE

460. Se P_1, P_2, P_3 sono i punti di mezzo degli spigoli laterali di tronco di un prisma triangolare, l_1, l_2, l_3 le lunghezze di questi spigoli, il baricentro del tronco è il baricentro dei tre punti P_1, P_2, P_3 affetti dai coefficienti $2l_1+l_2+l_3$, $l_1+2l_2+l_3$, $l_1+l_2+2l_3$ rispettivamente.

LAZZERI.

461. Due triangoli affini inscritti in uno stesso cerchio sono ortologici ed i centri di ortologia stanno su quel cerchio.

GALLUCCI.

462. Usando la rappresentazione simbolica, dimostrare che l'Hessiano n^{simo} d'una forma binaria di grado $m\geq 2n$ è

$$\sum_{h=1}^{n=h}\prod_{\alpha=0}^{\alpha=2^{n-h}-2}\left\{\Sigma_{\alpha\,.\,2^h,\,h}\overline{pq}\right\}^2$$

ove $\Sigma_{\alpha, 2^h, h} \overline{pq}$ indica la somma di tutti i termini

$$\overline{pq} = \frac{d}{dx_p}\frac{d}{dy_q} - \frac{d}{dx_q}\frac{d}{dy_p}$$

in cui p assume i valori

$$\alpha . 2^h + 1.\ \alpha . 2^h + 2 \ldots \alpha . 2^h + h,$$

e q i valori

$$\alpha(2^h + 1),\ (\alpha + 1)2^h + 2 \ldots (\alpha + 1)2^h + 2^h.$$

GIAMBELLI.

463. Un triangolo OVP ha due vertici fissi e il terzo P descrive una retta g non passante per V nè per O: la perpendicolare a |VP| in V seghi |OP| in P′; dimostrare che

1° il luogo di P′ è una conica G^2 passante per O e normale a |OV| nel punto V: costruire la tangente in O e P′:

2° G^2 è ellisse, parabola o iperbole secondochè il cerchio G^2_x descritto sul segmento OV come diametro sega g in due punti imaginari conjugati, reali e coincidenti, o reali e distinti:

3° se g passa pel punto medio M del segmento |OV| la G^2 è iperbole equilatera: il luogo dei centri delle iperboli equilatere corrispondenti ai raggi del fascio M è un cerchio:

4° il luogo dei fuochi delle parabole corrispondenti alle tangenti del cerchio G^2_x è una cissoide di Diocle.

464. Un triangolo OVP ha due vertici fissi e il terzo P descrive nel suo piano una curva C^n: se o è la perpendicolare a |OV| in V, e P′ la intersezione di |OP| con la perpendicolare a |VP| in V, dimostrare che le tangenti a C^n nel punto P e alla curva corrispondente C^{2n} in P′ si segano sulla retta o' simmetrica di o rispetto a |PV|.

465. Un triangolo OVP ha due vertici fissi e il terzo P descrive un cerchio, passante per O, col centro sulla perpendicolare in V alla |OV|: se il raggio |OP| è segato in P′ dalla perpendicolare a |VP| in V, il luogo di P′ è una strofoide. Costruire la tangente in P′.

466. Dati in un piano un cerchio C^2 di centro O e un punto-circolo V non situato sopra C^2, sul raggio che unisce O con un punto variabile P di C^2 prendiamo il conjugato armonico P′ di P rispetto al punto-circolo: dimostrare che il luogo di P′ è una quartica razionale circolare, con un punto doppio di O e un punto tacnodale in V (curva di Jerabek); costruire la tangente in P′, le tangenti nel punto doppio e le due tangenti doppie.

467. Nella inversione quadrica (piana) definita dal polo O e dal cerchio infinitesimo V, un cerchio di centro V, non (passante per O) si trasforma in una quartica razionale circolare (con un punto doppio in O e un punto tacnodale in V) che è linea d'ombra di un'elicoide gobbo. Costruire le intersezioni della quartica con una retta; le tangenti nel punto doppio; la tangente in punto; le due bitangenti; partendo dalla generazione indicata della curva.

468. Sul raggio vettore condotto dal fuoco F di un'ellisse a un punto variabile P della curva si prendono a partire da P ed F nelle direzioni PF, FP i segmenti PA', FA eguali al semi grande asse: dimostrare che l'angolo AOA' è retto; trovare il luogo del punto A'.

469. Sopra una retta sono dati tre punti ABC ed un'origine O; dimostrare che:

1°. Se uno solo dei punti ABC è reale ed abbiamo

$$OA - OB + OC = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2,$$

uno dei due punti Hessiani della cubica binaria (ABC) è all'infinito;

2°. Se

$$\Sigma \frac{(OA + OB)^2}{OA \, . \, OB} = 0$$

i due Hessiani sono equidistanti da O;

3°. Quando uno solo dei punti ABC è reale ed abbiamo

$$OA + OB + OC = \frac{OB \, . \, OC}{OA} + \frac{OC \, . \, OA}{OB} + \frac{OA \, . \, OB}{OC},$$

uno dei due Hessiani è O.

RETALI.

BIBLIOGRAFIA

MARCO NASSÒ. — *Algebra elementare ad uso dei Licei e degli Istituti Tecnici (primo biennio) secondo i programmi governativi.* — Torino, Tipografia e libreria Salesiana, 1898. — L. 3,50.

Di questo libro parmi sia il caso di dire qualche parola, giacchè si distingue dagli altri per la cura che l'autore ha posto a riuscir facile e semplice senza venir meno al rigore, scopo che, a lode sua, è quasi dappertutto completamente raggiunto. La facilità è stata ottenuta sia sopprimendo quanto non è strettamente necessario in un corso elementare, specialmente liceale, sia abbondando in spiegazioni e dilucidazioni di indole pratica, che attinte, come apparisce chiaramente, all'uso della scuola segnalano allo scolaro le difficoltà e l'aiutano a sormontarle.

Gli errori in cui spesso cadono i principianti sono riportati a tempo e luogo nel libro, insieme ad opportuni consigli per scansare le più comuni inesattezze.

Le dimostrazioni in generale sono precedute dall'applicazione dell'enunciato ad un esempio pratico, cosa utile per farsi chiara idea della portata del teorema e spesso una breve traccia riassuntiva della dimostrazione aiuta a bene afferrarla ed intenderla.

I capitoli sull'introduzione dei numeri e sulle loro operazioni sono trattati con scrupolo e minuzia, attenendosi ai metodi moderni del Dedekind e del Peano; ma qui forse l'autore, preoccupato dal pensiero di dare all'argomento la forma rigorosa, non ha saputo raggiungere, a parer mio, la semplicità didattica di altre parti del libro, particolarmente perchè ha dato un soverchio sminuzzamento alle proposizioni, col rischio che ciò ingeneri stanchezza negli scolari e nuoccia alla limpida comprensione dell'argomento. Ma in tutto il resto è stato tenuto conto in generale di certe esigenze scolastiche, col dare precisi e completi enunciati di tutti i teoremi, corollari e regole, un dall'altro distinti anche colla diversità dei caratteri di stampa.

L'opera è divisa in due parti. La prima consta di tre libri, che trattano le materie che s'insegnano attualmente nel primo e secondo Corso Liceale. Un'appendice contiene quello che, non essendo strettamente prescritto per i Licei, si suole tuttavia, quando è possibile, spiegare agli alunni: cioè i sistemi di più di due equazioni di primo grado, le equazioni riducibili al secondo grado, le applicazioni dei logaritmi, la estrazione di radice quadrata, e inoltre (e questa è notevole innovazione) la moltiplicazione e divisione dei polinomi, delle quali prima d'allora non è fatta parola, cosa che mi pare ottima per la divisione, ma che forse non è altrettanto giustificata per la moltiplicazione.

La parte seconda del libro, cioè più di un terzo dell'intera opera, è esclusivamente dedicata agli esercizi (oltre 2000) dei quali alcuni, e non pochi, sono ampiamente risoluti e discussi per istruzione e norma degli allievi, e i restanti sono semplicemente proposti. Tali esercizi sono ordinati in corrispondenza dell'ordinamento della materia svolta, e sono graduati secondo la difficoltà.

Noticine storiche disseminate qua e là servono ad accrescer valore al libro, che io credo destinato, cosa in generale non facile, a destare interesse negli scolari.

Alcune mende e qualche inesattezza si possono rilevare anche in quest'opera; ma siccome non sono tali da intaccare il rigore che informa il libro nè la sua buona intonazione generale, così in questo breve cenno credo non sia necessario l'enumerarle una ad una: l'accorto insegnante saprà esso stesso rilevarle e correggerle.

L'edizione è nitida e corretta; ed il libro, che è posto in vendita già legato, si presenta con aspetto assai elegante. R. Bettazzi.

Virgilii e Garibaldi. — *Introduzione all'Economia Matematica.* — Milano, Hoepli, 1899.

Questo manuale risponde al desiderio espresso dagli economisti italiani di avere cioè " un libro elementare che contenga quei principî di matematica divenuti " ormai indispensabili per seguire l'odierno sviluppo della Scienza Economica ".

Gli AA., in fondo, hanno avuto in mira di estendere ai varî rami della Matematica il concetto che ha mosso il Fischer a comporre il suo *Calculus*, esporre cioè le nozioni di Matematica in forma semplice, in modo da potere essere apprese da chi sia poco versato in tali studi, ed esporre di queste nozioni solo quando occorra per l'applicazione alla Scienza Economica.

Nell'Introduzione gli AA. fanno una rapida rivista del progredire della Economia matematica, dai primi tentativi del Beccaria, del Silio, del Canard, ecc. fino a segnar gli ultimi confini a cui può dirsi pervenuta la scienza attuale.

Questa scienza ha avuto molti fautori, ma anche molti detrattatori; però, che la Matematica possa con utilità applicarsi all'Economia, può dirsi che quasi tutti gli economisti l'ammettano concordemente; il disaccordo sta solo nel modo e nella misura di questa applicazione.

Il Whewel dice che " la Matematica è la logica delle quantità e diventerà " necessariamente lo strumento di tutte le scienze nelle quali la quantità è il " soggetto trattato, è il ragionamento deduttivo, il procedimento adoperato ", ciò che è press'a poco ripetuto, a' nostri giorni, anche dal Messedaglia.

Come chiusa dell'Introduzione gli AA., rammentano come, malgrado i lavori di Pascal, Bernoulli e Huygens, il Calcolo delle probabilità abbia atteso il genio di Laplace per assurgere al grado di Scienza; così l'Economia matematica, iniziata con le pubblicazioni di COURNOT, IEVONS. WALRAS, EDGEWORTH, PARETO, ecc., attende il suo Laplace " che raccolga i tentativi precedenti e li componga in un opera magistrale ".

Le nozioni di matematica sono divise in tre libri.

Il primo è dedicato all'Algebra e comprende il Calcolo Algebrico, la teoria delle Equazioni di 1° e 2° grado, i Logaritmi, il Calcolo Combinatorio e la Teoria delle probabilità.

Il libro secondo contiene molto sommariamente i principi di Trigonometria e di Geometria Analitica.

Nel terzo sono esposti i principi del Calcolo Infinitesimale (Funzioni di una variabile, limiti, derivate e differenziali, Funzioni di più variabili, Teoremi sulle derivate, Funzioni omogenee, Massimi e Minimi, Integrali indefiniti, Integrali definiti).

Quasi ad ogni capitolo sono opportunamente applicate le teorie svolte a qualche problema di Scienza economica.

Fra l'Introduzione ed il primo Libro vi è un capitolo destinato alla Bibliografia (dal 1711 al 1898) che può essere un'eccellente guida per chi voglia intraprendere un tale ordine di studi.

G. C.-L.

Il giorno 18 febbraio scorso, uno dei più alti intelletti matematici che abbiano onorato il secolo nostro, veniva improvvisamente rapito alla scienza.

SOPHUS LIE

colpito da improvvisa malattia cerebrale, forse per eccesso di lavoro, si spengeva nella ancor verde età di 56 anni (era nato a Nordfjordeid in Norvegia da Johan-Hermann Lie pastore, il 17 dicembre 1842) a Christiania, dove era tornato da appena sei mesi, richiamato dal governo del suo paese, che gli aveva fatto un trattamento speciale, adeguato ai suoi grandi meriti.

L'indole del nostro giornale non ci consente di parlare neanche alla sfuggita della sua ingente produzione scientifica, iniziata nel 1869, colla quale si è costruito un monumento imperituro di gloria. Fra le sue più importanti scoperte ricorderemo *la teoria delle trasformazioni di contatto*, e *la teoria dei gruppi continui di trasformazioni* (Lipsia, Teubner, 3 vol., 1888-93), che è l'opera sua più poderosa; e fra le applicazioni, che egli fece di questa teoria, ricorderemo le sue ricerche sui fondamenti della geometria, per le quali gli fu recentemente conferito il primo premio Lobatschewsky.

Sophus Lie insegnò dal 1877 al 1886 nell'Università di Christiania, poi a Lipsia dove succedè a Klein, e da poco, come abbiamo detto, di nuovo a Christiania, dove preparava gli elementi per una nuova grande opera, già annunziata, sulla teoria generale di tutti i gruppi finiti e infiniti, sugl'invarianti differenziali e le applicazioni generali alla teoria dell'integrazione.

Ebbe a valorosi collaboratori i professori Engel e Scheffers, che cooperarono per mezzo di trattati alla diffusione delle sue dottrine.

*DA GIORNALI E RIVISTE

Mathèsis, récuil math. à l'usage des écoles speciales etc., par M. M. *L. Mansion* et *J. Neuberg* (Gand, Ad. Hoste, ed.) T. VIII$_2$. 1898.

Fasc. XI (dicembre). — *G. Loria.* La strofoide è una settrice e una duplicatrice. (L'A. dimostra i due teoremi ennunciati nel titolo, analizzando due passaggi della corrispondenza di Chr. Huygens " Oeuvres completes „, 1888, T. I, p. 236 e p. 238). (*) — *F. Dauge.* Sul limite verso cui tende un certo triangolo Lobatschewskiano. — Soluzioni delle quistioni proposte 1049, 1051; 1052 (*Seligmann*), 1057. — Bibliografia. — Quistioni d'esame. 864-868. Quistioni proposte 1197-1200. Al presente fasc. è unito un suppl. di 48 pag. contenente la Mem. del sig. prof. Cl. Servais " La curvatura e la torsione nella collineazione e la reciprocità „ Estr. dal tomo LVIII della Mem. della Acc. Reale del Belgio, 1898.

T. IX$_3$, 1899. Fasc. 1 (gennaio). — *De Tilly.* Dimostrazione generale del secondo teorema di Legendre. (Se esiste un triangolo la cui somma degli angoli vale due retti, questa somma è la stessa in ogni triangolo). — *C. E. Wasteels.* Sulle figure cilindriche. (Area e proprietà di alcune figure tracciate sopra un cilindro di rivoluzione, fra le quali notiamo la seguente, analoga al teor. di Lexell. " il vertice di un triangolo cilindrico di superficie costante a base fissa, descrive una sezione piana passante pei punti diametralmente opposti ai termini della base „). — *V. Jerabek.* Sopra una quartica. (Il centro O di un cerchio variabile O^2 percorre la bisettrice di un angolo fisso A e tocca i lati di questo: il luogo dei punti ove O^2 è segato dal raggio OB, che proietta O da un punto fisso B del suo piano, è la quartica studiata dall'A.; (**) la quale se il punto doppio A è all'infinito diviene la concoide di Nicomede). — *J Déprez.* Concorso generale in prime scienze, 1898. — Soluzione della quistione di Geometria analitica. — Bibliografia. — Risoluzione di quistioni proposte; 1045 (*Droz-Farny*) 1047 (*Déprez*) (la pedale della seconda sviluppata di una parabola rispetto al fuoco di questa è una cubica); (***) 1050; 1159 (*Déprez*), 1170; 1175 (*G. Gérard*). — Quistioni di esame 869-876. — Quistioni proposte 1201-1206.

AVVERTENZA. — Gli articoli contrassegnati con asterisco (*) sono stati inviati dal Comitato dell'Associazione *Mathesis*.

(*) Il Prof. Loria dimostra (§ 1, pag. 266) che il luogo di Y è una strofoide analiticamente; una dimostrazione sintetica semplicissima è la seguente: Se X, X' sono due punti della corda $\overline{AC}$, visti da D sotto un angolo retto, e Y,Y' i loro corrispondenti, i punti C,Y,Y' sono in linea-retta e la parallela da D a |CA| biseca il segmento $\overline{YY'}$; dunque $MY = MY' = MD$, e si ricade sulla generazione classica delle strofoide (Il lettore è pregato di fare la figura; le notazioni sono quelle stesse usate dal Prof. Loria). (V. R.)

(**) Segando il cono e il paraboloide iperbolico, indicati dall'A., con un fascio di piani aventi per asse la direttrice (S ω) del paraboloide passante pel vertice del cono, si ottiene la quartica come prodotto di due fasci A e B in corrispondenza (2,2); ciò che permette di studiarla più completamente: si trova, p. es., che è della sesta classe, passa pei punti ciclici, ha il punto doppio B per fuoco singolare ecc. (V. R.)

(***) La pedale della sviluppata di una parabola rispetto al fuoco è una parabola il cui parametro è $\frac{1}{4}$ di quello della data: il teorema 12 dato a pag. 151 del *Periodico*, anno XIV, per quanto riguarda il luogo di N non è esatto. (V. R

Fasc. II (febbraio). — *Stuyvaert.* Problemi di costruzione (l'A., osservando che, per noti teoremi sulle curve polari, le costruzioni della tangente e del centro di curvatura in un punto di una curva data sono ridotte a quella della conica polare in quel punto, dà la costruzione della conica polare in un punto per la cissoide, la strofoide, le quartiche trinodali bitangenti alla retta all'infinito nei punti ciclici, e le cubiche generali). — *G. De Rocquigny.* Quistioni d'Aritmologia (sedici teoremi fra i quali notiamo i seguenti: se $n > 1$, $(a^2 + b^2)^{2^n}$ è la somma di tre quadrati; ogni sesta potenza di un intero qualunque è la somma di un cubo, un quadrato e un num. triangolare; la somma di $4(2n - 1)$ interi consecutivi non è mai una potenza esatta; i primi $3n$ numeri pari formano una somma algebrica di quattro cubi). — *Godefroid.* Sulla formola del binomio (nuova dim. pel caso di m razionale, seguita da una nota storica e bibliografica). — Note matematiche (generalizzazione della quistione 789). — Risoluzione di quistioni proposte, 1043 (*Droz-Farny, Buysens Stuyvaert, Déprez* e *Hacken*), 1054 (*Boutin, Droz-Farny* etc.) (il luogo dei centri delle coniche circoscritte a un triangolo dato e cogli assi paralleli a due direzioni date è una conica) — 1055 (*Cristesco, Krahé, Colart*) (pedale della *kreuz-curve* circolare rispetto al centro) — 1165; 1171; 1172 (*Ripert*). — Quistioni di esame 877-880. — Quistioni proposte 1207-1210.

V. R.

Bulletin de Mathématiques spéciales. Cinquième année. Paris, Soc. d'ed. scientifiques.

N. 1 (ottobre 1898). — *Ch. Michel.* Teoria sintetica delle cubiche a punto doppio e delle curve di terza classe a tangente doppia (continuazione § V e VI) (*). — *Ch. De La Condamine.* Quistione di Analisi (integrazione della equazione differenziale $y'' + axy' + by = 0$). — *L. Gérard.* Triangoli inscritti a una conica Γ e coniugati rispetto ad un'altra (dim. elementare della nota relazione $\Theta' = 0$). — Quistioni risolute 85, 88 e 132. — *E. N. Barisien.* Alcuni luoghi geometrici. — Quistioni proposte 144-148 (*Barisien*).

N. 2 (novembre 1898). — *E. Ballue.* Aggregazione di scienze matematiche, 1897; soluzione geometrica. (Il teorema espresso nella prima parte della quistione, era già stato dato da me, qualche mese prima; cfr. *Periodico di Mat.* T. XII, pag. 100, quistione 353; T. XIII, pag. 84). — *L. Gérard.* Soluzione analitica. — Esami della scuola centrale. — Quistioni risolute 132, 135. — *E. N. Barisien.* Esercizi. — Quistioni proposte 149-151.

N. 3 (dicembre 1898). — *Ch. Michel.* Sui punti d'inflessione delle cubiche (dim. analitica del notissimo teorema di Plücker " una cubica generale ha sempre tre soli flessi reali "). (**) — *Ch. Michel.* Sul punto d'arresto (una curva algebrica non ha punto d'arresto). — *Fitte.* Sulle coniche ortogonali a una conica data e sulle quadriche ortogonali a una quadrica data (Per un punto possono condursi nove quadriche ortogonali a una quadrica data. Per un punto possono condursi cinque coniche normali a una conica data in tutti i punti d'intersezione.) — Scuola centrale (otbre 1898). — *E. N. Barisien.* Nota sulla quistione 132. — Quistioni risolute 134-135. — Esami orali della scuola centrale (cont. v. n. 2). — Quistioni proposte 152-162. — Scuola centrale (1898, 2ª sessione).

(*) Ci riserviamo di analizzare questo lavoro tostochè ne sarà terminata la pubblicazione. (V. R.)

(**) Cfr. Cremona, *Curve piane*, n. 144, (*a*), e Schröter, *Die Theorie der Ebenen Curven dritter Ordnung*, p. 237-239.

(V. R.)

N. 4 (gennaio 1899). — *L. Gérard*, Sui punti d'inflessione d'una cubica (oss. sulla nota del sig. Ch. Michel sullo stesso argomento, inserita nel n. preced.). — *E. Bally*, Dim. di alcuni teoremi relativi alle coniche (teor. di Fregier, di Hesse, coppie di Pappo ecc.) (*). — Scuola centrale (luglio 1898). — Quistioni risolute 86, 149. — Quistioni proposte 163-164. (V. R.)

Revue de mathématiques spéciales par M.M. *E. Humbert* et *G. Papelier*, 9ᵉ année. Paris, Nony et C.ᵉ

N. 1 (ottobre 1898). — Parte Prima. *M. d'Ocagne*. Sulla formula di Taylor. — *G. Maupin*. Nota sul problema di Adriano Romano. — Geom. analitica. — Risoluzione delle quistioni 701 (luogo del 5° ordine relativo a una strofoide e una cissoide rette, aventi il punto doppio e l'assintoto reale comune) (*Roda Plius*); 702 (*E. Lemoine E. Humbert*); 715 (proprietà di due coniche mutuamente coniugate rispetto a un punto) (**) (*Vasnier*). — *Fisica e Chimica* (Risoluz. delle quistioni 680 (*Bunel*) 681. — Quistioni proposte agli esami orali, Scuola Politecnica 1898; I. Matematiche elementari 987-996; II. Algebra 997-1039; III. Trigonometria 1040-1059; IV. Geom. analitica 1060-1250. — Quistioni proposte 780-781. — Parte Seconda. Geom. analitica. Risoluz. delle quistioni 719 (*A. Gresser*). 726 (inviluppi e luoghi relativi al *folium* di Descartes) (***) (*H. Moutet-Fortis*). 729 (una generazione della cissoide obliqua) (*J. Roda*). — Fisica e Chimica. Risoluzione delle quistioni 705, 706, 707. — Quistioni proposte 782-783.

N. 2 (novembre 1898). — Parte Prima. *Bondieu*. Nota sulla moltiplicazione e la divisione degli archi (data una funzione circolare d'un'arco, trovare i valori delle funzioni circolari di un altro arco commensurabile col primo). — *E. H.* Quistione relativa agli esami della Scuola Politecnica (equazione dei piani principali d'una quadrica). — Geometria analitica. — Risoluzione della quistione 727 (luogo dei centri e dei poli di contatto, delle iperboli equilatere di grandezza costante bitangenti a una parabola data; inviluppo Σ delle corde di contatto; luogo dei punti tali che le tangenti a Σ nei piedi delle normali da essi condotte formino un quadrilatero inscrittibile e un cerchio ecc.) (****) (*Vasnier*). — Fisica. Risoluz. delle

---

(*) La denominazione di *coniche armoniche*, attribuita dall'A. a due coni che godono delle proprietà caratteristiche dei cerchi ortogonali, non sembra adattata, perchè già usata con altro significato. Per la bibliografia di questo argomento veggasi la mia nota „Sur un couple de deux coniques „ nell'*Intermédiaire des Mathématiciens*, février, 1897. (V. R).

(**) Dei quattro teoremi enunciati nella quistione 715 i primi due (1° e 2°) equivalgono al seguente (cfr. *Periodico di Matematica*, anno XIII, pag. 26, quistione 392): „due coniche reali mutuamente coniugate sono omologiche armonicamente quando si prende per centro di omologia uno dei due punti di contatto, e per asse la tangente nell'altro „ che è il teor. XIV della mia nota *Sulle coniche coniugate* [Mem. della R. Acc. delle sc. di Bologna, serie IV, tomo VI, pag. 195 (dicembre, 1884)]; questo teorema, riprodotto nella mia memoria *Osservazioni analitico-geometriche sulla proiezione immaginaria ecc.* (*ibid.* tomo VII, pag. 601), dove è pure dimostrato analiticamente (pag. 619), fu da me esteso al caso in cui una delle due coniche è immaginaria nella Memoria *Ricerche sopra l'immaginario in Geometria* [*ibid*, tomo IX, pag. 273-277 (aprile 1888)]; io qui reclamo per esso la priorità anche perchè, recentemente, il signor J. W. Russell nella sua memoria *The reciprocators of two conics discussed geometrically* inserita nei *Proceedings of the London Math. Society* [vol. XXVI, pag. 455 (maggio 1895)] lo dà come nuovo, con altri che trovansi nelle mie note sopra citate. È bene notare che la conica di cui trattasi nel numero 3° della questione 715 e quella del numero 4° sono fra di loro polari reciproche rispetto ad (S). (V. R.)

(***) Completiamo i risultati dell'A. sulla podoide del *folium* di Cartesio, rispetto al nodo: l'origine è un punto quadruplo con due coincidenze ed equivale a quattro punti doppi ordinari e due cuspidi di 1ª specie; oltre alla cuspide reale, trovata dall'A., ve ne sono due immaginarie coniugate: la curva possiede anche due punti quadrupli ordinari, non notati dall'A., nei punti ciclici. Le caratteristiche pluckeriane son dunque $m=8$, $\delta=16$, $\varkappa=5$: la curva è perciò razionale e della nona classe, ha otto flessi e venti tangenti doppie. (V. R.)

(****) Lo inviluppo Σ è la prima pedale negativa dell'*ovale doppio* $(x^2+y^2)^3=q^2x^4$, rispetto all'origine, ciò che permette di scriverne subito la equazione in coordinate puntuali

$$(x^2+y^2)^3 - q^2(x^4+20x^2y^2-8y^4)+16q^4x^2=0,$$

quistioni 9, 717 poste agli esami orali. — Scuola Politecnica (1898). V. Geom. analitica (seguito) 1251-1285; VI. Geom. descrittiva, 1286-1399; VII. Statica 1400-1421. Concorso del 1897 (seguito). — Quistioni proposte 784-786. — Parte Seconda. Geom. analitica. Risoluzione della quistione 730 (*Proubet*). (una retta variabile |AB| incontra due assi ortogonali $0x$ $0y$ in A e B; le normali ad |AB| in A e B segano $0y$ in B', $0x$ in A'; H è la proiezione di 0 sopra |AB|; I, K, L sono i punti medi di OH, AB', A'B, e P è la intersezione di |AB| con |A'B'|: trovare i luoghi dei punti I, K, L, P, e gli inviluppi delle rette |AB'|, |A'B|, |A'B'| quando si abbia *a*) $OA \cdot OB = a^2$; *b*) $OA + OB = a$; *c*) $OA - OB = a$; *d*) $OA^2 + OB^2 = a^2$; *e*) $\overline{OA}^2 - - OB^2 = a^2$ (*)). — Concorso del 1898 (seguito). — Bibliografia (*Leçons de Trigonometrie rectiligne* par C. Bourlet. Paris, A. Colin et C.°).

---

che non è data dal signor *Fuenier*. Oltre le quattro cuspidi reali trovati dall'A., la Σ ne possiede due nei punti ciclici, con la retta all'infinito per tangente cuspidale; vi sono inoltre due punti doppi ordinari, imaginari coniugati, sull'asse delle ordinate ($y = \pm 2qi$) de' quali l'A. non fa menzione. Occorre notare che l'origine è un tacnodo e conta per due punti doppi ordinari, non già un punto doppio a tangenti coincidenti come è detto a pag. 37. Le caratteristiche Plückeriane di Σ son dunque

$$m = 6, \qquad \delta = 4, \qquad \varkappa = 6;$$

la curva è razionale (di genere zero) della quarta classe, è priva di flessi e possiede cinque tangenti doppie, le quali sono però assorbite dalla tangente tacnodale (2) e dalla bitangente cuspidale all'infinito (3). Ho indicato quasi tutte le proprietà di Σ ora ricordate, in una nota inviata ai *Nouv. Annales* il 3 aprile 1898, relativa alla quistione 1788 (mars, 1898, pag. 148). (V. R)

(*) Gli inviluppi di |AB|, nelle cinque ipotesi indicate hanno ordinatamente per equazioni tangenziali:

a) $a^2uv = 1$ (iperbole equilatera avente per assintoti gli assi coordinati);
b) $u + v = auv$ (parabola tangente agli assi positivi in punti equidistanti da O);
c) $v - u = auv^2$ (parabola simmetrica alla precedente rispetto ad $0x$);
d) $u^2 + v^2 = a^2u^2v^2$ (astroide, avente gli assi coordinati per bitangenti cuspidali);
e) $v^2 - u^2 = a^2u^2v^2$ (polare reciproca, rispetto ad O, della *Kohlenspitzencurve* $x^2 - y^2 = a^2x^2y^2$):

il luogo di I è omotetico (O centro e $\frac{1}{2}$ rapp. d'omotetia) alla pedale rispetto ad O dello inviluppo di |AB|, esso è dunque:

a) la lemniscata di Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 xy = 0$,
b) la strofoide retta $(x^2 + y^2)(x + y) = \frac{a}{2} xy$.
c) la simmetrica della precedente rispetto ad $0x$.
d) il rosone a quattro rami $(x^2 + y^2)^3 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 x^2y^2$.

(teoremi noti)

e) la sestica $(x^2 + y^2)^2(y^2 - x^2) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 x^2y^2$.

Lo inviluppo di |AB'| è la trasformata *ortotangenziale* rispetto all'asse $0x$, dello inviluppo di |AB|: le formole di questa trasformazione, inventata dal Prof. Cesàro (*Mathésis* III_1, pag. 248; X, pag. 142; *Nouv. Annales*, 1884, pag. 545; 1885, pag. 259) sono $u' : v' : 1 = uv : v^2 : v$ e le equazioni tangenziali dello inviluppo:

a) $v = a^2u^3$ (parabola cubica col centro in O e $0x$ per tangente stazionaria);
b) $u + v = au^2$ (parabola ordinaria tangente in O ad $0x$ ecc.);
c) $u - v = au^2$ (parabola simmetrica della precedente rispetto ad $0x$);
d) $u^2 + v^2 = a^2u^4$ (pedale negativa dell'*ovale doppio* rispetto al centro O);
e) $u^2 - v^2 = a^2u^4$.

Analogamente, lo inviluppo di |A'B| è la trasformata ortotangenziale dello inviluppo di |AB| rispetto all'asse $0y$: si ritrovano risultati analoghi ai precedenti: basta mutare u in v e viceversa.

Quanto all'inviluppo di |A'B'|, può aversi da quello di |AB| mediante la trasformazione cubica $u' : v' : 1 = v^3 : u^2 : uv$; per le equazioni tangenziali di tale inviluppo troviamo:

a) $a^2uv = 1$ (iperbole equilatera ecc.)

b) $u^{\frac{1}{3}} + v^{\frac{1}{3}} = a(uv)^{\frac{2}{3}}$ (quartica della quarta classe ecc.)

c) $u^{\frac{1}{3}} - v^{\frac{1}{3}} = a(uv)^{\frac{2}{3}}$ (simmetrica della quartica precedente risp. a $0y$)

d) $u^{\frac{2}{3}} + v^{\frac{2}{3}} = a^2(uv)^{\frac{4}{3}}$ (ottava classe, genere zero ecc.)

e) $u^{\frac{2}{3}} - v^{\frac{2}{3}} = a^2(uv)^{\frac{4}{3}}$

Le equazioni delle ultime quattro curve, rese razionali, sono:

$$a^3u^2v^2 - 3auv - (u \pm v) = 0,$$
$$a^6u^4v^4 - 3a^2u^2v^2 - (u^2 \pm v^2) = 0.$$

(V. R

N. 3 (dicembre 1898). — Parte Prima. *G. Lapointe.* Nota sull'equazione di 2º grado in S che permette di determinare gli assi di una sezione piana di una quadrica (l'A. previene alla eq. indicata seguendo un metodo analogo a quello che serve a stabilire la equazione cubica in S che si presenta sulla ricerca degli elementi principali di una quadrica). — Geom. analitica. — Risoluzione delle quistioni 720 (luoghi e inviluppo relativi alla cissoide di Diocle) (*) (*Barisien*); 728 (*Vasnier*); 731 (*Vasnier*). — Quistioni proposte 796-797. — Parte Seconda Geom. analitica. — Risoluz. delle quistioni 733 (*Barisien* e *Vasnier*); 737 (*Delplace, Vasnier* e *Jardin*); 738 (luogo dei vertici delle iperboli equilatere tangenti una retta data in un punto dato, e aventi un assintoto passante per un altro punto della retta data). (**) Geom. descrittiva (intersezione di un paraboloide con un cilindro di rivoluzione). — Bibliografia.

N. 4 (gennaio 1899). — Parte Prima. *G. Fontené.* Luogo dei fuochi delle sezioni centrali d'una quadrica (l'A., utilizzando una proprietà che già aveva servito al sig. Mac Cay per risolvere lo stesso problema, e cioè che se un punto è fuoco di una sezione piana, il piano di questa è piano ciclico del cono circoscritto alla quadrica uscente dal punto, trova la equazione in coord. rettangolari della superficie d'ottavo ordine luogo cercato). — *Ch. Bioche.* Sul numero delle condizioni esprimenti che una superficie algebrica passa per una curva data (determinazione del numero indicato in alcuni casi semplici. — Geom. analitica). — Risoluz. delle quistioni 716 (*Bicart*); 732 (*Pégorier* e *Vasnier*); 736 (*Roda-Plius*); 740 (*Vasnier*).— Quistioni proposte 800-802. — Parte Seconda. Algebra, Risoluz. delle quistioni 742 (*Proubet*) e 760 (derivata n^{esima} di $(x-\alpha)^m (x-\beta)^n$ e di $\operatorname{sen} ax \cos bx$). — Geom. analitica. — Risoluz. delle quistioni 743 (luoghi dei centri dei cerchi tangenti al grande asse di un'ellisse e a due raggi vettori focali di uno stesso punto) (*Barisien* e *Vasnier*); 748 (studio della curva $y = \operatorname{arc\,sen} \mathrm{L}\, x$) (*l'Hoste*); 749. — Fisica (risoluzione delle quistioni 723-739). — Quistioni proposte 803-805. — Bibliografia.

N. 5 (febbraio 1899). — Parte Prima. *J. Paoli.* Sopra un complesso del secondo grado (dim. analitiche di alcune fra le più semplici proprietà del complesso tetraedrale; cfr. Reye. *G. de position* T. II, p. 160 e segg. della trad. fr.). — *H. Rousseau.* Dimostrazione geometrica di due proposizioni relative alle coniche. (I punti di contatto delle tangenti comuni a due coniche sono 8 punti di una conica, teorema correlativo.) — *P. Faton.* Concorso generale di mat. speciali 1898 (luoghi e inviluppi relativi ai tripli segnati sopra un certo piano tangente di un'ellissoide, dai sistemi di diametri coniugati eguali). — Geom. analitica. — Risoluzione della questione 741, del sig. *Barisien* (Se la tangente in L ad una ipocicloide tricuspide sega ulteriormente la curva in M, N, e la tangente ortogonale (*Gegenlinie*) in G′ (*Scheitelpunkt*) 1º MG′ = LN, 2º le normali in M, N, L si segano sul cerchio passante per le tre cuspidi. Questi due teoremi sono conosciuti da molto tempo e appartengono a Steiner). — 747 (Se OABC è un tetraedro trirettangolo in O inscritto in una cubica gobba equilatera, il piano ABC e la tangente in O sono

(*) La sviluppata della cissoide di Diocle è del quarto ordine, della classe quarta e di genere zero; ha un punto triplo di natura speciale, formato dalla riunione di due cuspidi di prima specie con un nodo, nel punto all'infinito dell'asse della cissoide. Se il cerchio osculatore in M sega ulteriormente la cissoide in N, il terzo punto della cissoide sulla |MN| è il simmetrico, rispetto all'asse, del primo tangenziale di M: abbiamo così una costruzione semplice e, credo, nuova pel cerchio osculatore della cissoide in un suo punto dato.

(V. R.)

(**) La quartica luogo è la inversa rispetto a D della ellisse di Steiner del triangolo AA′D.

(V. R.)

ortogonali) (*). — Geom. descrittiva (intersezione di una sfera e di un'iperboloide di rivoluzione). — Quistioni proposte 806-809. — Parte Seconda. Algebra. Risoluz. della quistione 591 (massimo della funzione $(a-x)(a-y)(a-z):z$ con la relazione $x+y+z=2a$). — Geom. analitica 761 (*Pégorier*); 773 (*Pégorier*); 774 (*Barisien*); la podoide di una spirale logaritmica rispetto all'origine è una spirale eguale. Teorema noto) 779 (*Probet, Vasnier, Chapron*). — Quistioni proposte 810-814.

(V. R.)

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Volume XXXIV. fasc. 1-4. — *Picard E.* Sur la resolution de certains problèmes de mécanique par des approximations successives: extrait d'une lettre à M. Volterra. — *Lauricella G.* Sugli sviluppi in serie di soluzioni eccezionali dell'elasticità. — *Peano G.* La numerazione binaria applicata alla stenografia. — *Chini M.* Sopra alcune equazioni differenziali. — *Almansi E.* — Sopra l'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^2\Delta^2 = 0$.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo. Serie II, vol. XXXI. fasc. 18-20; vol. XXXII, fasc. 1-2-3. — *Scarpis U.* Sui determinanti di valore massimo. — *Aschieri F.* Commemorazione del Sen. Prof. F. Brioschi. — *De Pasquale V.* Sui sistemi ternari di 13 elementi.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Serie VII, tomo IX. disp. 10. — *Levi-Civita T.* Sopra una trasformazione in sè stessa delle equazioni $\Delta_2\Delta_2 = 0$. — *D'Arcais F.* La seconda funzione di Green sul campo piano limitato da due circonferenze concentriche. — *Marenghi C.* Sopra un teorema del Kronecker.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Bologna. Serie V, tomo VII, fasc. 2. — *Saporetti A.* Analisi di casi singolari geometrici paragonati colle relative forme algebriche.

Rendiconti delle sessioni della R. Accademia delle scienze di Bologna. Nuova Serie. vol. II, fasc. 3-4. — *Pincherle S.* Sull'operazioni aggiunte. — *Arzelà C.* Sulle rappresentazioni approssimate delle funzioni analitiche.

Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche (sezione della Società R. di Napoli). Serie III, vol. IV, anno XXXVII, fasc. 8-12; vol. V, fasc. 1. — *Cavalli E.* Le figure reciproche e la trasformazione quadratica nella Cinematica. — *Amodeo F.* Spazio normale e genere massimo delle curve di ordine *m*, *k*-gonali, di specie *s*. — *Brambilla A.* Sopra una classe di superficie e di varietà razionali.

Atti della Accademia Pontaniana. Vol. XXVIII (serie II, vol. III). — *Nicodemi R.* Figure nello spazio dedotte dalla rappresentazione di esse in geometria descrittiva.

(*) Dimostrazione geometrica: una cubica gobba e le dieci coppie di elementi opposti (lati e facce) d'un pentagono gobbo inscritto, son segati da un piano qualunque, non passante per alcun vertice secondo un triangolo polare e dieci coppie di elementi coniugati d'un sistema polare piano (REYE. *G. de p.*, pag. 291, T. II): se ora prendiamo per pentagono inscritto quello che ha tre vertici in ABC e gli altri due riuniti in O sulla tangente alla cubica, e per piano segante quello all'infinito, abbiamo il teorema proposto.

(V. R).

Annali di Matematica pura ed applicata già diretti da *F. Brioschi*, e continuati da *E. Beltrami, L. Cremona, U. Dini, G. Jung*. Serie III, tomo II, fasc. 1. — *Almansi*. Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2n}=0$. — *Ciani*. Le bitangenti delle quartiche piane studiate mediante le configurazioni di Kummer.

Il Pitagora pubblicato dal prof. *G. Fazzari*. — Il num. 6 del 2° semestre dell'anno IV contiene: *Nannei*. La geometrografia di Lemoine (cont. e fine). — Quistioni ed esercizi. — Maria Gaetana Agnesi. — Risposte alle quistioni proposte. — Varietà.

Il num. 1 del 1° semestre dell'anno V contiene: *Bettazzi*. Introduzione ad un corso di geometria elementare. — La trasformazione continua del Lemoine. — Giovanni Ceva e il suo teorema. — Quistioni e risposte. — Del simbolo π e rettificazione approssimata della circonferenza. — Giuoco. — Varietà.

Il num. 2 contiene: *Del Prete*. Sopra un teorema fondamentale per la geometria metrica. — *Gambioli*. Nota sul numero delle radici delle equazioni algebriche. — Errori che si riscontrano in alcuni libri di testo per le scuole elementari. — *Ciamberlini*. Sul massimo numero delle parti in cui il piano resta diviso da un dato numero di rette e di circonferenze (*). — Intorno ad alcune divisioni. — Quistioni e risposte. — Il " De arenae numero " di Archimede, versione di *A. Mancini*.

Il num. 3 contiene: *Riboni*. Sulla serie ricorrenti. — *Bustelli*. La grandezza in generale e la grandezza matematica in particolare. — *Testi*. Dei problemi di massimo e minimo. — *Crepas*. La serie di Fibonacci. — Quistioni e risposte.

(R. B.)

Bulletin de sciences mathématiques et physiques élémentaires.

N. 1 (a. IV, del 1 ottobre 1898) contiene: *L. G.* Sulle dimostrazioni geometriche, in cui l'A. ritiene che i procedimenti analitici sieno più facili a comprendere e da ritenere che non le dimostrazioni geometriche. — Note diverse. (Una formula nota pel volume del prismatoide; e la condizione affinchè quattro punti dati su quattro lati d'un quadrilatero gobbo sieno i punti di contatto di una sfera tangente ai quattro lati del quadrilatero). — Quistioni risolute. — Quistioni da risolvere.

N. 2 (15 ottobre 1898) contiene: *L. G.* Sulle dimostrazioni geometriche. (cont.) dove sono notati alcuni comuni errori di ragionamento geometrico. — Quistioni risolute. — Quistioni da risolvere.

N. 3 (1 novembre 1898). — *E. Rebuffel*. Sul parallelogrammo delle forze. (Saggio di esposizione rigorosa). — *L. G.* Equivalenza dei sistemi di equazioni trigonometriche. (Date le 10 equaz. trigon. colle quali si possono formare 120 sistemi di tre equaz., studia quanti fra questi sono equivalenti, per es., al sistema di Carnot). Quistioni risolute. — Quistioni da risolvere.

N. 4 (15 novembre 1898). — *G. Lehr*. Su una quistione aritmetica. (Consiste nel riunire in un solo enunciato i vari casi della generatrice di un numero decimale periodico). — *L. G.* Equivalenza dei sistemi di equaz. trigonom. (cont.). Quistioni risolute. (Preparazione agli esami. Esami di Saint-Cyr. Quistione proposta dal giornale. — Quistioni da risolvere.

N. 5 (1 dicembre 1898). — *Prof. Bonnefoy*. Inviluppo delle rette sulle quali due

(*) Le 3 formole ritrovate dall'autore appartengono a *Steiner*: sono la (1), (11) e (23) della Memoria: *Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes*, (Crelle, vol. 1, 1826).

(V. R.)

circoli intercettano delle corde in un rapporto dato. (L'inviluppo è una conica. L'art. è accompagnato da alcune importanti osservazioni di L. Gérard). — Corrispondenza. (Rapporto delle distanze di un punto da due punti dati). — Quistioni risolute. (Preparazione agli esami. — Quistioni proposte dal giornale). — Quistioni da risolvere. Temi proposti agli esami di baccelliere e al concorso delle scuole nazionali d'agricoltura.

N. 6 (15 dicembre 1898). — Rettificazione. (Una costruzione del circolo tangente a tre altri, indicata come di *Fouché* è invece di *Poncelet*). — Corrispondenza. (Rapporto delle distanze di un punto da due punti dati). — Temi dati alla scuola primaria superiore di Saint-Cloud. — Quistioni risolute. — Quistioni da risolvere.

N. 7 (1 gennaio 1899). — Nota sulla risultante di due equazioni di 2° grado. (È dimostrato senza far uso dei numeri complessi che dato $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ e posto $\Delta = a'^2 f(\alpha) . f(\beta) = (ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c)$, è $\Delta > 0$ anche nel caso in cui le equazioni $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ non hanno nessuna di due radici reali). — Corrispondenza (Eguaglianza di angoli coi lati paralleli, nello spazio. Due rette parallele a una terza son parallele fra loro. Proposta di un ordine da seguirsi per esporre la teorica delle parallele). — Quistioni risolute. — (Preparazione agli esami. Quistioni proposte dal giornale). — Quistioni da risolvere.

N. 8 (15 gennaio 1899). — *Duflot.* Angolo dell'altezza e della bisettrice d'un triangolo. — Quistioni risolute (Preparazione agli esami. — Quistioni proposte dal giornale). — Nota di Fisica. — Quistioni da risolvere.

N. 9 (1 febbraio 1899). — *G. Lehr.* Una curiosità d'Aritmetica. (Per diminuire il numero delle parole necessarie per *contare*, si aggruppano gli *ordini* a n a n, formando le così dette *classi*, perchè si è scelto $n = 3$? È enunciato il problema in generale). — Reciproco del secondo teorema di Tolomeo, dimostrazione di *Bonnefoy*. Quistioni risolute. (Preparazione agli esami. Quistioni proposte dal giornale). — Note di fisica. — Quistioni da risolvere.

N. 10 (15 febbraio 1899). — *P. R.* Sulle frazioni decimali periodiche. (Saggio di esposizione della teoria). — Preparazione agli esami. — Quistioni risolute. — Note sui problemi di fisica. — Quistioni da risolvere.

Journal de mathématique élémentaires di *A. Vuibert.*

N. 5 (1 dicembre 1898). — *M. D'Ocagne.* Osservazioni elementari sulle normali all'ellisse. — *G. Fontené.* Sulla teoria delle parallele.

N. 6 (15 dicembre 1898). — *P. Barrien.* Studio elementare delle variazioni del trinomio biquadratico.

N. 7 e 8 (1 e 15 gennaio 1899). — Il prof. *Girod* studia le variazioni della funzione $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ senza ricorrere alle derivate.

N. 10 (15 febbraio 1899) contiene una nota del prof. *Vogt* sui punti di una secante a una conica che sono interni o esterni alla conica.

Oltre a ciò, in tutti i fascicoli, numerosi esercizi e problemi di ogni specie.

E. Nannei

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 12 Maggio 1899.