Indice Articoli Anno 1897

LE CONFIGURAZIONI PIANE
DI CAPORALI

Nelle Memorie di Geometria di Ettore Caporali si trovano due frammenti *sulla teoria delle configurazioni.* Tale teoria è stata studiata in seguito sotto altri punti di vista e con maggiore profondità da altri. (*)

Tuttavia credo non inutile rimettere in luce su questo periodico il concetto fondamentale che deve aver guidato l'illustre geometra, troppo presto rapito alla scienza, specialmente considerando che la sua teoria si può svolgere in modo elementare, ammettendo come note soltanto le principali proprietà dei coefficienti binomiali ed il teorema fondamentale dell'omologia, cioè: " Se due triangoli si corrispondono in modo che le rette, che congiungono i vertici corrispondenti, concorrano in un punto (*centro d'omologia*), le coppie di lati corrispondenti s'incontrano in tre punti situati in linea retta (*asse di omologia*); e viceversa ". I due triangoli si dicono allora *omologici.*

Mostrerò poi in un'altra nota come le configurazioni piane di Caporali si possano estendere allo spazio.

1. Se in un piano sono dati n circoli $S_1, S_2, \ldots S_n$, i cui centri tre a tre non sono in linea retta, è noto che due di essi S_i, S_h ammettono un asse radicale r_{ih}, e tre di essi S_i, S_h, S_k un centro radicale P_{ihk}, per il quale passano le tre rette r_{hk}, r_{ki}, r_{ih}. Si ha così un esempio

(*) Trattano delle configurazioni i lavori seguenti:
S. Kantor. *Ueber eine Gattung von Configurationen.* Sitzungsberichte der Wiener Akad. Vol. 80.
— *Ueber die Configurationen* (3, 3) ecc. Ibid. Vol. 84.
Th. Reye. *Das Problem der Configurationen.* Acta Mathematica. Vol. 1.
G. Jung. *Sull'equilibrio dei poligoni articolati in connessione col problema delle configurazioni.* Annali di Matematica. Tomo 12.
Martinetti. *Sopra alcune Configurazioni piane.* Ibid. Serie II, tomo 14.
— *Sulle Configurazioni piane* μ_3. Ibid. Serie II, tomo 15.
— *Sopra un gruppo di Configurazioni regolari* ecc. Atti dell'Acc. Gioenia. Vol. 3°, Serie IV.

di un sistema formato da $\binom{n}{3}$ punti P_{ihk} e da $\binom{n}{2}$ rette r_{ih}. Per ogni punto passano tre rette; quelle che si ottengono togliendo uno ad uno gl'indici che rappresentano il punto considerato; ogni retta contiene $n-2$ punti; quelli che si ottengono associando ai due indici della retta considerata uno qualunque dei rimanenti.

Un altro esempio dello stesso genere si ha dalla figura formata da n piani, dalle $\binom{n}{2}$ rette d'incontro di essi presi due a due e dagli $\binom{n}{3}$ punti d'incontro dei piani stessi presi tre a tre. Proiettando queste rette e questi punti da un punto dello spazio sopra un piano, si ottengono $\binom{n}{3}$ punti P e $\binom{n}{2}$ rette r, tali che per ogni punto P passano tre rette r ed ogni retta r contiene $n-2$ punti P.

Similmente, se consideriamo n sfere $S_1, S_2, S_3 \ldots S_n$ tali che i centri di quattro qualunque di esse non siano in un piano, è noto che due di esse S_i, S_h determinano un piano radicale π_{ih}, tre S_i, S_h, S_k determinano un asse radicale r_{ihk}, quattro S_i, S_h, S_k, S_l, determinano un centro radicale P_{ihkl}. Per il punto P_{ihkl} passano quattro rette r_{hkl}, r_{ikl}, r_{ihl}, r_{ihk}; per la retta r_{ihk} passano tre piani π_{hk}, π_{ik}, π_{ih}. Proiettando i punti P e le rette r da un punto qualunque dello spazio sopra un piano α, si ottiene in questo un sistema di $\binom{n}{4}$ punti e di $\binom{n}{3}$ rette; per ogni punto passano quattro di queste rette; ogni retta contiene $n-3$ di quei punti.

Questi esempi suggeriscono naturalmente l'idea di studiare dei sistemi composti di $\binom{n}{v}$ punti e di $\binom{n}{v-1}$ rette, tali che, rappresentando ciascun punto con una combinazione di v fra n indici $1, 2, 3, \ldots n$, e ciascuna retta con una combinazione di $v-1$ fra gl'indici stessi, ogni punto appartenga a tutte le rette, i cui simboli si ottengono da quello del punto stesso, sopprimendo uno dei suoi indici, e per conseguenza ogni retta contenga gli $n-v+1$ punti, i cui simboli si ottengono da quello della retta stessa, aggiungendo uno degl'indici rimanenti.

Chiamasi *configurazione di ordine n e classe v* un tale sistema di punti e rette, che rappresenteremo colla scrittura $C_{n,v}$.

I sistemi sopra citati sono $C_{n,3}$ e $C_{n,4}$.

Per brevità adotteremo in seguito la seguente notazione. Essendo $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ indici dati, per es. $1, 2, 3 \ldots n$, scritti in un ordine qualsiasi, rappresenteremo con A_v il gruppo d'indici $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_v$, con $A_v\, \alpha_r\, \alpha_s \ldots$ il gruppo d'indici che si ottiene aggiungendo al gruppo $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_v$ gl'indici $\alpha_r, \alpha_s \ldots (r, s = v+1, v+2, \ldots, n)$, con $A_v\, (-\alpha_r)\, (-\alpha_s) \ldots$ il gruppo che si ottiene dal gruppo A_v sopprimendo gl'indici α_r, α_s $(r, s = 1, 2 \ldots v)$.

Così un punto di una $C_{n,v}$ si può rappresentare col simbolo A_v, e le rette che passano per esso col simbolo $(A_v, (-\alpha_r))$; una retta della $C_{n,v}$ si può rappresentare col simbolo (A_{v-1}); i punti che giacciono su di essa col simbolo $(A_{v-1}\, \alpha_h)$.

2. Si potrebbero anche studiare sistemi di $\binom{n}{v}$ rette e $\binom{n}{v-1}$ punti, tali che le rette fossero rappresentate dalle combinazioni v a v di n indici, ed i punti dalle combinazioni a $v-1$ a $v-1$ degli stessi indici, e che verificano la condizione che ad ogni retta (A_v), appartengano i v punti, il cui simbolo si ottiene da A_v, sopprimendo uno dei suoi indici, e per conseguenza per ogni punto (A_{v-1}) passino $n-v+1$ rette $(A_{v-1}\, \alpha_r)$, i cui simboli si ottengono aggiungendo ai suoi indici uno qualunque dei rimanenti. Indicheremo con $\Gamma_{n,v}$ un tale sistema.

Si capisce facilmente però che le proprietà di una $\Gamma_{n,v}$ si ricavano facilmente da quelle di una $C_{n,v}$ scambiando la parola *punto* colla parola *retta*, le parole *retta che passa per due punti* colle altre *punto d'incontro delle due rette* ecc., applicando cioè il principio detto di *dualità*.

Inoltre, essendo $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, è chiaro che una $\Gamma_{n,v}$ non è altro che una $C_{n,n-v+1}$. Infatti il numero dei suoi punti è $\binom{n}{v-1} = \binom{n}{n-v+1}$, e il numero delle sue rette è $\binom{n}{v} = \binom{n}{n-v}$.

Ci limiteremo perciò allo studio delle $C_{n,v}$.

3. Dalla definizione stabilita si ricava:

1°. Una $C_{n,1}$ è un gruppo di n punti in linea retta.

2°. Una $C_{n,2}$ è un *n-latero completo*. Infatti, le sue rette essendo $r_1, r_2, \ldots r_n$, i suoi punti P_{ih} non sono altro che i punti d'incontro di quelle rette prese a due a due.

3°. Una C_{nn} è un gruppo di n rette che passano per un punto.

3°. Una $C_{n, n-1}$ è un *n-gono completo.* Infatti, se per brevità conveniamo di sostituire ad una combinazione di $(n-1)$ o $(n-2)$ indici l'indice o i due indici rimanenti, i suoi punti si possono rappresentare con $P_1, P_2, \ldots P_n$, e le sue rette sono le congiungenti di questi punti due a due.

4. *Se in una $C_{n,v}$ si separano gli elementi che non contengono un determinato indice da quelli che lo contengono, i primi formano una $C_{n-1,v}$ e gli altri una $C_{n-1,v-1}$.*

Ogni retta della $C_{n,v}$ contiene un solo punto della $C_{n-1,v-1}$, e viceversa ogni punto di questa giace sopra una sola retta di $C_{n-1,v}$. Diremo perciò che la $C_{n-1,v}$ è circoscritta alla $C_{n-1,v-1}$ o che la $C_{n-1,v-1}$ è inscritta nella $C_{n-1,v}$.

Se infatti separiamo per es. l'indice n dai rimanenti $1, 2, 3 \ldots n-1$, che scritti in un ordine qualunque chiameremo $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$, i punti e rette dalla $C_{n,v}$, che si possono rappresentare colle combinazioni a v a v e a $v-1$ a $v-1$ di questi $n-1$ indici, formano una $C_{n-1,v}$. Tutte le rette rimanenti hanno simboli della forma $(A_{v-2}\, n)$, ed i punti rimanenti hanno simboli della forma $(A_{v-1}\, n)$, e formano una $C_{n-1,v-1}$, perchè i loro numeri sono rispettivamente $\binom{n-1}{v-2}$, $\binom{n-1}{v-1}$, per ogni punto passano $v-1$ rette, ogni retta contiene $(n-1)-(v-1)+1 = n-v+1$ punti. Per ogni punto $(A_{v-1}\, n)$ passa poi una ed una sola retta della $C_{n-1,v}$ già considerata, cioè la (A_{v-1}). Perciò questa si può dire circoscritta alla $C_{n-1,v-1}$.

Inversamente:

Quando una $C_{n-1,v}$, è circoscritta ad una $C_{n-1,v-1}$ i punti e le rette delle due configurazioni costituiscono una $C_{n,v}$.

Infatti il numero complessivo dei punti delle due configurazioni è

$$\binom{n-1}{v-1} + \binom{n-1}{v} = \binom{n}{v},$$

e il numero complessivo delle rette è

$$\binom{n-1}{v-2} + \binom{n-1}{v-1} = \binom{n}{v-1}.$$

Per ogni punto della $C_{n-1,v}$ circoscritta passano v rette della medesima, e per ogni punto della $C_{n-1,v-1}$ passano $v-1$ rette della medesima ed una della $C_{n-1,v}$ circoscritta, ossia per ogni punto dell'una o dell'altra configurazione passano v rette. Similmente sopra ogni retta della $C_{n-1,v}$ circoscritta giacciono $(n-1)-v+1=n-v$ punti della medesima ed una della $C_{n-1,v-1}$ iscritta, e sopra ogni retta della $C_{n-1,v-1}$ giacciono $(n-1)-(v-1)+1=n-v+1$ punti di essa; così ogni retta dell'una o dell'altra configurazione contiene $n-v+1$ punti delle medesime.

5. *Se in una configurazione,* $C_{n,v}$ *si considerano* k *indici* ($k < v < n-k$) *separatamente dagli altri, la configurazione si può considerare come l'insieme*

$$
\begin{array}{lll}
\textit{di } 1 = \binom{k}{0} & \textit{configurazione} & C_{n-k,v-k}, \\
\;\;\text{"} \quad \binom{k}{2} & \textit{configurazioni} & C_{n-k,v-k+1}, \\
\;\;\text{"} \quad \binom{k}{2} & \quad\text{"} & C_{n-k,v-k+2}, \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\;\;\text{"} \quad \binom{k}{h} & \quad\text{"} & C_{n-k,v-k+h}, \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\;\;\text{"} \quad \binom{k}{k-1} & \quad\text{"} & C_{n-k,v-1}, \\
\;\;\text{"} \; 1 = \binom{k}{k} & \quad\text{"} & C_{n-k,v}.
\end{array}
$$

Si scelgano k indici ad arbitrio fra gli n che determinano la $C_{n,v}$, e scritti in un ordine qualsiasi, chiamamoli $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$; gli $n-k$ indici rimanenti scritti in un ordine qualunque siano $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-k}$. Rappresentiamo inoltre con B_r il gruppo d'indici $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_r$ e con A_s il gruppo d'indici $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_s$.

Tutti gli elementi della $C_{n,v}$, che contengono tutti i k indici β, cioè i punti $(B_k A_{v-k})$ e le rette $(B_k A_{v-k-1})$ formano una configurazione di ordine $n-k$ e di classe $v-k$ che chiameremo $C^{(B_k)}_{n-k,v-k}$.

Tutti gli elementi che contengono $k-1$ indici β per es. $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{k-1}$, cioè i punti $(B_{k-1} A_{v-k+1})$ e le rette $(B_{k-1} A_{v-k})$, formano una configurazione di ordine $n-k$ e di classe $v-k+1$, che chiameremo $C^{(B_{k-1})}_{n-k,v-k+1}$. Le configurazioni di questo tipo sono $\binom{k}{1}$, e sono circoscritte alla $C^{(B_k)}_{n-k,v-k}$, perchè ogni retta $(B_{k-1} A_{v-k})$ contiene uno ed un solo punto $(B_k A_{v-k})$ di questa configurazione.

Tutti gli elementi che contengono $k-2$ indici β, per es. $\beta_1, \beta_2 \ldots$

β_{k-2}; cioè i punti $(B_{k-2}\,A_{v-k+2})$ e le rette $(B_{k-1}\,A_{v-k+1})$ formano una configurazione di ordine $n-k$ e di classe $v-k+2$, che chiameremo $C^{(B_{k-2})}_{n-k,v-k+2}$. Le configurazioni di questo tipo sono $\binom{k}{2}$, e ciascuna di esse è circoscritta a due $C^{(B_{k-1})}_{n-k,v-k+1}$; quelle che si ottengono aggiungendo ai suoi indici β uno qualunque dei due rimanenti. E così di seguito.

In generale tutti gli elementi che contengono $k-h$ elementi, per es. $\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_{k-h}$ cioè i punti $(B_{k-h}\,A_{v-k+h})$ e le rette $(B_{k-h}\,A_{v-k+h-1})$ formano una configurazione di ordine $n-k$ e di classe $v-k+h$ che chiameremo $C^{(B_{k-h})}_{n-k,v-k+h-1}$.

Le configurazioni di questo tipo sono $\binom{k}{h}$. Ciascuna di esse è circoscritta ad h $C^{(B_{k-h+1})}_{n-k,v-k+h-1}$; quelle che si ottengono aggiungendo ai $k-h$ indici β, uno qualunque dei rimanenti.

Infine tutti gli elementi che non contengono alcuno degl'indici β, cioè i punti (A_v) e le rette (A_{v-1}) formano una $C_{n-k,v}$, che è circoscritta alle $\binom{k}{k-1}$ configurazioni $C^{\beta_r}_{n-k,v-1}$.

Si osservi che il numero complessivo dei punti della $C_{n,v}$ deve essere $\binom{n}{v}$, e quello di una $C_{n-k,v-k+h}$ deve essere $\binom{n-k}{v-k+h}$; e perciò risulta l'identità

$$\binom{n}{v}=\binom{k}{0}\binom{n-k}{v-k}+\binom{k}{1}\binom{n-k}{v-k+1}+\binom{k}{2}\binom{n-k}{v-k+2}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\binom{k}{h}\binom{n-k}{v-k+h}+\ldots\ldots+\binom{k}{k}\binom{n-k}{v};$$

ovvero, essendo $\binom{k}{h}=\binom{k}{k-h}$,

$$\binom{n}{v}=\binom{k}{k}\binom{n-k}{v-k}+\binom{k}{k-1}\binom{n-k}{v-k+1}+\binom{k}{k-2}\binom{n-k}{v-k+2}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\binom{k}{k-h}\binom{n-k}{v-k+h}+\ldots\ldots\binom{k}{0}\binom{n-k}{v}.$$

Questa identità si dimostra anche in algebra.

Nei §§ seguenti dimostreremo che sono veri i teoremi inversi di quelli enunciati, e ne dedurremo un mezzo semplice per costruire una $C_{n,\nu}$ per mezzo di configurazioni di ordine e classe inferiori.

6. *Se due configurazioni* $C^{(1)}_{n,\nu+1}$ $C^{(2)}_{n,\nu+1}$ *sono circoscritte ad una stessa* $C^{(1,2)}_{n,\nu}$, *esse sono inscritte in una stessa* $C_{n,\nu+2}$. *Tutte insieme queste quattro configurazioni formano una* $C_{n+2,\nu+2}$.

Rappresentiamo con $(A_\nu)^{(12)}$ $(A_{\nu+1})^{(1)}$ $(A_{\nu+1})^{(2)}$ i punti, con $(A_{\nu-1})^{(12)}$, $(A_\nu)^{(1)}$ $(A_\nu)^{(2)}$ le rette delle configurazioni $C^{(1,2)}_{n,\nu}$, $C^{(1)}_{n,\nu+1}$, $C^{(2)}_{n,\nu+1}$.

I due triangoli, che hanno per lati

$$\begin{array}{ccc} (A_{\nu-1}\alpha_\nu)^{(1)} \; , & (A_{\nu-1}\alpha_{\nu+1})^{(1)} \; , & (A_{\nu-1}\alpha_{\nu+2})^{(1)}, \\ (A_{\nu-1}\alpha_\nu)^{(2)} \; , & (A_{\nu-1}\alpha_{\nu+1})^{(2)} \; , & (A_{\nu-1}\alpha_{\nu+2})^{(2)}, \end{array}$$

e per vertici

$$\begin{array}{ccc} (A_{\nu-1}\alpha_{\nu+1}\alpha_{\nu+2})^{(1)} \; , & (A_{\nu-1}\alpha_\nu\alpha_{\nu+2})^{(1)} \; , & (A_{\nu-1}\alpha_\nu\alpha_{\nu+1})^{(1)}, \\ (A_{\nu-1}\alpha_{\nu+1}\alpha_{\nu+2})^{(2)} \; , & (A_{\nu-1}\alpha_\nu\alpha_{\nu+2})^{(2)} \; , & (A_{\nu-1}\alpha_\nu\alpha_{\nu+1})^{(2)}, \end{array}$$

sono omologici, perchè per ipotesi i lati concorrono nei punti

$$(A_{\nu-1}\alpha_\nu)^{(12)} \; , \; (A_{\nu-1}\alpha_{\nu+1})^{(12)} \; , \; A_{\nu-1}\alpha_{\nu+2})^{(12)},$$

della retta $(A_{\nu-1})^{(12)}$. Perciò le rette che congiungono i vertici, e che chiameremo

$$(A_{\nu-1}\alpha_{\nu+1}\alpha_{\nu+2}) \; , \; (A_{\nu-1}\alpha_\nu\alpha_{\nu+2}) \; , \; (A_{\nu-1}\alpha_\nu\alpha_{\nu+1}),$$

devono concorrere in un punto, che chiameremo $(A_{\nu+2})$. Nella stessa guisa si dimostra che tutte le rette, il cui simbolo si ottiene da $(A_{\nu+2})$ sopprimendo un indice, passano per il punto $(A_{\nu+2})$. Dunque i punti $(A_{\nu+2})$ e le rette $(A_{\nu+1})$ formano una $C_{n,\nu+2}$ circoscritta alle

$$C^{(1)}_{n,\nu+2} \; , \; C^{(2)}_{n,\nu+1}$$

Le quattro configurazioni insieme poi formano una $C_{n+2,\nu+2}$. Infatti il numero complessivo di vertici è

$$\binom{n}{v} + 2\binom{n}{v+1} + \binom{n}{v+2} = \binom{2}{2}\binom{n}{v} + \binom{2}{1}\binom{n}{v+1} + \binom{2}{0}\binom{n}{v+2} = \binom{n+2}{v+2},$$

e il numero complessivo di rette è

$$\binom{n}{v-1} + 2\binom{n}{v} + \binom{n}{v+1} = \binom{2}{2}\binom{n}{v-1} + \binom{2}{1}\binom{n}{v} + \binom{2}{2}\binom{n}{v+1} = \binom{n+2}{v+1};$$

ed è facile vedere che per ognuno di quei punti passano $v+2$ rette.

Si ottengano facilmente i simboli di questa $C_{n+2,\nu+2}$ nella forma ordinaria, dando agli indici $\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n$ i valori $1, 2, 3\ldots n$, e facendo seguire le combinazioni che rappresentano gli elementi di $C^{(1,2)}_{n,\nu}$, dagli indici $n+1$, e $n+2$, quelle degli elementi di $C^{(1)}_{n,\nu+1}$ dall'indice $n+1$ e quelle degli elementi di $C^{(2)}_{n,\nu+1}$ dall'indice $n+2$.

7. *Se tre configurazioni* $C^{(2,3)}_{n,\nu+1}$, $C^{(3,1)}_{n,\nu+1}$, $C^{(1,2)}_{n,\nu+1}$ *sono circoscritte ad una* $C^{(1,2,3)}_{n,\nu}$, *le tre configurazioni* $C^{(1)}_{n,\nu+2}$, $C^{(2)}_{n,\nu+2}$, $C^{(3)}_{n,\nu+2}$, *circoscritte a due di esse, sono inscritte in una* $C_{n,\nu+3}$. *Queste 8 configurazioni insieme formano una* $C_{n+3,\nu+3}$.

Indichiamo i punti delle varie configurazioni con

$$(A_\nu)^{(1\,2\,3)},\ (A_{\nu+1})^{(2\,3)},\ (A_{\nu+1})^{(3,1)},\ (A_{\nu+1})^{(1,2)},\ (A_{\nu+2})^{(1)},\ (A_{\nu+2})^{(2)},\ (A_{\nu+2})^{(3)},$$

e le loro rette con

$$(A_{\nu-1})^{(1\,2\,3)},\ (A_\nu)^{(2\,3)},\ (A_\nu)^{(3\,1)},\ (A_\nu)^{(1\,2)},\ (A_{\nu+1})^{(1)},\ (A_{\nu+1})^{(2)},\ (A_{\nu+1})^{(3)}.$$

I due triangoli che hanno per lati

$$\begin{array}{ccccc} (A_\nu\,\alpha_{\nu+1})^{(1)} & , & (A_\nu\,\alpha_{\nu+1})^{(2)} & , & (A_\nu\,\alpha_{\nu+1})^{(3)} \\ (A_\nu\,\alpha_{\nu+2})^{(1)} & , & (A_\nu\,\alpha_{\nu+2})^{(2)} & , & (A_\nu\,\alpha_{\nu+2})^{(3)}, \end{array}$$

e per vertici

$$\begin{array}{ccccc} (A_\nu\,\alpha_{\nu+1})^{(2\,3)} & , & (A_\nu\,\alpha_{\nu+1})^{(3\,1)} & , & (A_\nu\,\alpha_{\nu+1})^{(1\,2)} \\ (A_\nu\,\alpha_{\nu+2})^{(2\,3)} & , & (A_\nu\,\alpha_{\nu+2})^{(3\,1)} & , & (A_\nu\,\alpha_{\nu+2})^{(1\,2)}, \end{array}$$

sono omologici, perchè le rette che congiungono i vertici, cioè

$$(A_\nu)^{(2\,3)}\quad,\quad (A_\nu)^{(3\,1)}\quad,\quad (A_\nu)^{(1\,2)},$$

concorrono nel punto $(A_\nu)^{(1\,2\,3)}$. Perciò i punti d'incontro dei lati

$$(A_{\nu+2})^{(1)}\quad,\quad (A_{\nu+2})^{(2)}\quad,\quad (A_{\nu+2})^{(3)}$$

sono situati sopra una retta, che chiameremo $(A_{\nu+2})$. Ciò prova che la $C_{n,\nu+3}$ circoscritta a due delle $C^{(1)}_{n,\nu+2}$, $C^{(2)}_{n,\nu+2}$, $C^{(3)}_{n,\nu+2}$ è circoscritta anche alla terza.

Le 8 configurazioni insieme fanno una $C_{n+3,\nu+3}$. Infatti il numero complessivo di vertici è

$$\binom{n}{\nu}+3\binom{n}{\nu+1}+3\binom{n}{\nu+2}+\binom{n}{\nu+3}=\binom{3}{3}\binom{n}{\nu}+\binom{3}{2}\binom{n}{\nu+1}+\binom{3}{1}\binom{n}{\nu+2}+$$
$$+\binom{3}{0}\binom{n}{\nu+3}=\binom{n+3}{\nu+3}.$$

In simil guisa si vede che il numero complessivo delle rette è $\binom{n+3}{\nu+2}$, ed è facile riconoscere che per ogni vertice passano $(v+3)$ rette, e che ogni retta contiene $(n+3)-(v+3)+1=n-v+1$ vertici.

8. *Se k configurazioni $C_{n,v+1}$ sono circoscritte ad una $C_{n,v}$, prese due a due determinano $\binom{k}{2}$ $C_{n,v+2}$, nelle quali sono inscritte; queste combinate convenientemente tre a tre determinano $\binom{k}{3}$ $C_{n,v+3}$, nelle quali sono inscritte ....; così proseguendo si giunge a $\binom{k}{k-1}$ $C_{n,v+k-1}$, che sono inscritte in una stessa $C_{n,v+k}$.*

Tutte queste configurazioni insieme formano una $C_{n+k,v+k}$.

Supponiamo dimostrato il teorema per un dato valore di $k-1$, e dimostriamo che esso è vero anche per k.

Indicheremo la data configurazione con $C_{n,v}^{\beta_1\beta_2\dots\beta_k}$ ossia con $C_{n,v}^{(B_k)}$ (dove $\beta_1\beta_2\dots\beta_k$ son k indici scritti in un ordine qualsiasi) con $C_{n,v+1}^{(B_{k-1})}$ quelle ad essa circoscritta, con $C_{n,v+2}^{(B_{k-2})}$ quella circoscritta a $C_{n,v+1}^{(B_{k-2}\beta_r)}$ $(r=k-1,k)$..., in generale con $C_{n,v+h}^{(B_{k-h})}$ quella circoscritta alle $C_{n,v+h-1}^{(B_{k-h}\beta_r)}$ $(r=k-h+1,\ k-h+2,\dots,k)$.

I triangoli che hanno per lati

$$(A_{v+k-3}\,\alpha_r)^{\beta_1}\ ,\ (A_{v+k-3}\,\alpha_r)^{\beta_2}\ ,\ (A_{v+k-3}\,\alpha_r)^{\beta_3},$$
$$(A_{v+k-3}\,\alpha_s)^{\beta_1}\ ,\ (A_{v+k-3}\,\alpha_s)^{\beta_2}\ ,\ (A_{v+k-3}\,\alpha_s)^{\beta_3},$$

e per vertici

$$(A_{v+k-3}\ \ \alpha_r)^{\beta_2\beta_3}\ ,\ (A_{v+k-3}\ \ \alpha_r)^{\beta_3\beta_1}\ ,\ (A_{v+k-3}\ \ \alpha_r)^{\beta_1\beta_2},$$
$$(A_{v+k-3}\alpha_s)^{\beta_2\beta_3}\ ,\ (A_{v+k-3}\alpha_s)^{\beta_3\beta_1}\ ,\ (A_{v+k-3}\alpha_s)^{\beta_1\beta_2},$$

sono omologici, perchè le rette che congiungono i vertici, cioè

$$(A_{v+k-3})^{\beta_1\beta_3}\ ,\ (A_{v+k-3})^{\beta_3\beta_1}\ ,\ (A_{v+k-3})^{\beta_1\beta_2},$$

concorrono nel punto $(A_{v+k-3})^{\beta_1\beta_2\beta_3}$. Perciò i punti d'incontro dei lati, che (supposto $\alpha_r=\alpha_{v+k-2},\ \alpha_s=\alpha_{v-k-1}$) sono

$$(A_{v+k-1})^{\beta_1}\ ,\ (A_{v+k-1})^{\beta_2}\ ,\ (A_{v+k-1})^{\beta_3},$$

sono situati sopra una retta che chiameremo (A_{v+k-1}). Ciò prova che la $C_{n,v+k}$, circoscritta a due delle $C_{n,v+k-1}^{\beta_h}$, è circoscritta anche alle altre.

Tutte queste configurazioni prese insieme formano un $C_{n+k,v+k}$.

Infatti il numero complessivo di vertici è

$$\binom{n}{v} + \binom{n}{v+1}\binom{k}{1} + \binom{n}{v+2}\binom{k}{2} + \ldots + \binom{n}{v+k-1}\binom{k}{k-1} + \binom{n}{v+k} =$$
$$\binom{n}{v}\binom{k}{k} + \binom{n}{v+1}\binom{k}{k-1} + \binom{n}{v+2}\binom{k}{k-2} + \ldots + \binom{n}{v+k-1}\binom{k}{1} +$$
$$\binom{n}{v+k}\binom{k}{0} = \binom{n+k}{v+k}.$$

In simil guisa, ponendo $v-1$ al posto di v, si vede che il numero complessivo delle rette è $\binom{n+k}{v+k-1}$ ecc.

Si ottengono facilmente i simboli dei punti e rette di questa configurazione nella forma consueta, dando agl' indici α i valori $1, 2 \ldots n$, agli indici β i valori $n+1, n+2, \ldots n+k$. E facendo seguire il gruppo d' indici di ogni elemento di una $C_{n,v+h}^{(B_{k-h})}$ da quelli del gruppo B_{k-h} della configurazione.

9. I teoremi esposti permettono di costruire una $C_{n,v}$ per mezzo di altre di ordine inferiore.

Dal teorema del § precedente risulta infatti che una $C_{n,v}$ è determinata, quando si conosce una $C_{n-k,v-k}$ in essa contenuta e le k configurazioni $C_{n-k,v-k+1}$ a questa circoscritte e contenute nella $C_{n,v}$ data. Se si prende $k=v-1$, la $C_{n-k,v-k}$ diventa una $C_{n-v+1,1}$, ossia il gruppo di $n-v+1$ vertici situati sopra una retta. Le k $C_{n-k,v-k+1}$ diventano $v-1$ $C_{n-v+1,2}$ ossia i $v-1$ $(n-v+1)$ -lateri formati dalle rette, che passano per quei punti. Se ne deduce:

1°. *Una $C_{n,v}$ è individuata dalle $(v-1).(n-v+1)+1$ rette, che passano per i vertici di una sua retta.*

Si noti però che, affinchè la $C_{n,v}$ sia determinata in modo unico, deve esser dato, oltre ai $n-v+1$ punti in linea retta e alle $(v-1).(n-v+1)$ rette condotte per questi punti, anche il modo col quale devono esser aggruppate queste rette in $(v-1)$ $C_{n-v+1,2}$ appartenenti alla $C_{n,v}$. Se ciò non fosse dato, si potrebbero costruire $(n-v+1)^{v-1}$ configurazioni $C_{n,v}$.

2°. *Il numero di condizioni necessarie a determinare una $C_{n,v}$ è*

$$n.v-(v+1)(v-2)$$

Infatti per determinare la retta che si sceglie, occorrono due condizioni, per determinare $(n-v+1)$ punti su di essa occorrono $(n-v+1)$ condizioni, per determinare le rette che passan per questi punti $(v-1$

per ogni vertice), occorrono $(v-1)(n-v+1)$ condizioni. In tutto dunque il numero delle condizioni è

$$2+(n-v+1)+(v-1)(n-v+1)=v(n-v+1)+2=n.v-v(v-1)+2=$$
$$=nv-(v+1)(v-2).$$

Per es. una $C_{n,3}$ è determinata da $3n-4$ condizioni.

10. *Se due* $C^{(1)}_{n,v-1}$ $C^{(2)}_{n,v-1}$ *sono inscritte in una* $C_{n,v}$, *esse sono circoscritte ad una* $C^{(1,2)}_{n,v-2}$. *Tutte insieme queste configurazioni formano una* $C_{n,+2,v}$.

Indichiamo con (A_v) i punti con (A_{v-1}) le rette di una $C_{n,v}$; con $(A_{v-1})^{(1)}$, $(A_{v-2})^{(1)}$ i punti e le rette di una $C^{(1)}_{n,v-1}$ inscritta in essa, con $(A_{v-1})^{(2)}$, $(A_{v-2})^{(2)}$ i punti e le rette di un'altra $C^{(2)}_{n,v-1}$ pure inscritta in essa.

I triangoli che hanno per lati

$$(A_{v-3}\alpha_{v-2})^{(1)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-1})^{(1)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_v)^{(1)},$$
$$(A_{v-3}\alpha_{v-2})^{(2)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-1})^{(2)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_v)^{(2)},$$

e per vertici

$$(A_{v-3}\alpha_{v-1}\alpha_v)^{(1)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-2}\alpha_v)^{(1)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-2}\alpha_{v-1})^{(1)}$$
$$(A_{v-3}\alpha_{v-1}\alpha_v)^{(2)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-2}\alpha_v)^{(2)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-2}\alpha_{v-1})^{(2)},$$

sono omologici, perchè le rette che congiungono questi vertici sono

$$(A_{v-3}\alpha_{v-1}\alpha_v) \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-2}\alpha_v) \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-2}\alpha_{v-1})$$

e concorrono nel punto (A_v). Perciò le coppie di lati s'incontrano in tre punti, che chiameremo

$$(A_{v-3}\alpha_{v-2})^{(1,2)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-1})^{(1,2)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_v)^{(1,2)},$$

e che sono situati sopra una retta, che chiameremo $(A_{v-3})^{(1,2)}$.

Tenendo fisse le prime due coppie di lati dei triangoli considerati, e variando la terza (ponendo cioè al posto di α_v successivamente $\alpha_{v+1}\,\alpha_{v+2}\dots\alpha_n$) si trova che tutti gli $n-v+3$ punti $(A_{v-3}\alpha_r)^{(1,2)}$ $(r=n-v+1, n-v+2, n-v+1, n-v, \dots n)$ giacciono sulla retta $(A_{v-3})^{(1,2)}$.

Se ora si considera la coppia di rette $(A_{v-2})^{(1)}(A_{v-2})^{(2)}$ con tutte quelle che si ottengono sopprimendo un indice α_h e sostituendo successivamente tutti i rimanenti, si ottiene, operando nel modo sopra indicato, una retta $(A_{v-2}(-\alpha_h))^{(1,2)}$ che passa per $(A_{v-2})^{(1,2)}$. Così per $(A_{v-2})^{(1,2)}$ passano $(v-2)$ rette.

Dunque i punti $(A_{v-2})^{(1,2)}$ e le rette $(A_{v-3})^{(1,2)}$ formano una $C^{(1,2)}_{n,v-2}$ inscritta alla $C^{(1)}_{n,v-1}$ $C^{(2)}_{n,v-1}$. Come caso particolare si ha:

Se due n-lateri ($C_{n,2}$) *sono inscritti in una* $C_{n,3}$, *i lati corrispondenti si tagliano in* n *punti situati in linea retta* ($C_{n,1}$).

Questa retta, insieme coi due n-lateri e la $C_{n,3}$ formano una $C_{n+2,3}$.

11. *Se tre* $C^{(1)}_{n,\nu-1}$, $C^{(2)}_{n,\nu-1}$, $C^{(3)}_{n,\nu-1}$ *sono inscritte in una* $C_{n,\nu}$ *le* $C^{(2,3)}_{n,\nu-2}$, $C^{(3,1)}_{n,\nu-2}$, $C^{(1,2)}_{n,\nu-2}$, *alle quali sono circoscritte a due a due, sono circoscritte ad una stessa* $C^{(1,2,3)}_{n,\nu-3}$. *Tutte insieme queste configurazioni formano una* $C_{n+3,\nu}$.

Indichiamo con (A_ν) i punti della $C_{n,\nu}$, con $(A_{\nu-1})$ le sue rette, con $(A_{\nu-1})^{(1)}$ $(A_{\nu-1})^{(2)}$ $(A_{\nu-1})^{(3)}$ i punti delle tre configurazioni $C^{(1)}_{n,\nu-1}$, $C^{(2)}_{n,\nu-1}$, $C^{(3)}_{n,\nu-1}$, inscritte nella $C_{n,\nu}$, con $(A_{\nu-2})^{(1)}$, $(A_{\nu-2})^{(2)}$, $(A_{\nu-2})^{(3)}$ le loro rette, con $(A_{\nu-2})^{(2,3)}$, $(A_{\nu-2})^{(3,1)}$, $(A_{\nu-2})^{(1,2)}$ i punti e con $(A_{\nu-3})^{(2,3)}$, $(A_{\nu-3})^{(3,1)}$, $(A_{\nu-3})^{(1,2)}$ le rette delle $C^{(2,3)}_{n,\nu-2}$, $C^{(3,1)}_{n,\nu-2}$, $C^{(1,2)}_{n,\nu-2}$ inscritte in due delle $C^{(1)}_{n,\nu-1}$, $C^{(2)}_{n,\nu-1}$, $C^{(3)}_{n,\nu-1}$.

Le due configurazioni $C^{(1,2)}_{n,\nu-2}$, $C^{(1,3)}_{n,\nu-2}$ inscritte nella $C^{(1)}_{n,\nu-2}$ sono circoscritte ad una $C^{(1,2,3)}_{n,\nu-3}$. Dico che a questa è circoscritta anche la $C^{(2,3)}_{n,\nu-2}$. Infatti i due triangoli che hanno per lati

$$(A_{\nu-3}\,\alpha_r)^{(1)}\ ,\quad (A_{\nu-3}\,\alpha_r)^{(2)}\ ,\quad (A_{\nu-3}\,\alpha_r)^{(3)},$$
$$(A_{\nu-3}\,\alpha_s)^{(1)}\ ,\quad (A_{\nu-3}\,\alpha_s)^{(2)}\ ,\quad (A_{\nu-3}\,\alpha_s)^{(3)},$$

e per vertici

$$(A_{\nu-3}\,\alpha_r)^{(2,3)}\ ,\quad (A_{\nu-3}\,\alpha_r)^{(3,1)}\ ,\quad (A_{\nu-3}\,\alpha_r)^{(1,2)},$$
$$(A_{\nu-3}\,\alpha_s)^{(2,3)}\ ,\quad (A_{\nu-3}\,\alpha_s)^{(3,1)}\ ,\quad (A_{\nu-3}\,\alpha_s)^{(1,2)},$$

sono omologici, perchè le coppie di lati s'incontrano nei punti

$$(A_{\nu-3}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(1)}\ ,\quad (A_{\nu-3}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(2)}\ ,\quad (A_{\nu-3}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(3)},$$

della retta $(A_{\nu-3}\,\alpha_r\,\alpha_s)$; e perciò le rette che congiungono i vertici, cioè

$$(A_{\nu-3})^{(2,3)}\ ,\quad (A_{\nu-3})^{(3,1)}\ ,\quad (A_{\nu-3})^{(1,2)}$$

concorrono in un punto $(A_{\nu-3})^{(1,2,3)}$.

Che le sei configurazioni insieme formino una $C_{n+3,\nu}$ risulta da quanto abbiamo detto nel § 7.

Come caso particolare si ha:

Se tre n-*lateri* ($C_{n,2}$) *sono inscritti in una* $C_{n,3}$, *le tre rette, che contengono i punti d'incontro dei lati corrispondenti degli* n-*lateri presi a due a due, concorrono in un punto.*

Se ne deduce:

Se k n-*lateri* $C_{n,2}$ *sono inscritti in una* $C_{n,3}$, *le* $\binom{k}{2}$ *rette, che contengono i punti d'incontro degli* n-*lateri presi due a due formano una* $C_{k,3}$.

La figura formata da questa $C_{k,3}$, *dagli* n-*lateri e dalla* $C_{n,3}$ *è una* $C_{n+k,3}$.

12. *Se* k $(k<v)$ $C^{(\beta_1)}_{n,v-1}$ *sono inscritte in una* $C_{n,v}$, *in esse sono inscritte* $\binom{k}{2} C^{(\beta_1\beta_2)}_{n,v-2}$; *queste alla loro volta determinano* $\binom{k}{3} C^{(\beta_1\beta_2\beta_3)}_{n,v-2}$ *inscritte in tre di esse, ecc...... Così proseguendo si ottengono* $\binom{k}{k-1} C^{(\beta_1\ldots\beta_{k-1})}_{n,v-k+1}$ *che sono circoscritte ad una* $C^{(\beta_1\ldots\beta_k)}_{n,v-k}$.

Essendo già dimostrato il teorema per $k=3$, supponiamo che esso sia dimostrato per un dato valore di k, e facciamo vedere che esso è vero anche per $k+1$

Poniamo al solito $B_s=\beta_1\beta_2\ldots\beta_s$, e consideriamo i due triangoli che hanno per lati

$$(A_{v-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_{k-1})}, \quad (A_{v-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_k)}, \quad (A_{v-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_{k+1})},$$
$$(A_{v-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k-1})}, \quad (A_{v-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_k)}, \quad (A_{v-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k+1})},$$

e per vertici

$$(A_{v-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_k\beta_{k+1})}, (A_{v-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_{k+1})}, (A_{v-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_k)},$$
$$(A_{v-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_k\beta_{k+1})}, (A_{v-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_{k+1})}, (A_{v-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_k)}.$$

Essi sono omologici, perchè le coppie di lati s'incontrano nei punti

$$(A_{v-k-1}\alpha_r\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k-1})}, (A_{v-k-1}\alpha_r\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_k)}, (A_{v-k-1}\alpha_r\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k+1})}$$

della retta $(A_{v-k-1}\alpha_r\alpha_s)^{B_{k-2}}$;

perciò le rette che congiungono i vertici, cioè

$$(A_{v-k-1})^{(B_{k-2}\beta_k\beta_{k+1})}, (A_{v-k-1})^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_{k+1})}, (A_{v-k-1})^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_k)},$$

concorrono in un punto $(A_{v-k-1})^{B_{k+1}}$.

Così si vede che tutte le rette $(A_{v-k-1})^{(B_{k+1}(-\beta_r))}$ passano per un vertice della $C^{(B_k)}_{n,v-k+1}$ inscritta a due $C_{n,v-k}$.

Tutte queste configurazioni insieme formano un $C_{n+k,v}$ per il teorema del § 8.

Si possono avere i simboli della C^v_{n+k} sotto la forma ordinaria facendo seguire il simbolo di ciascun punto o retta dagl'indici della configurazione parziale di cui fa parte.

13. *Una* $C_{n,v+1}$ *circoscritta ad una* $C_{n,v}$ *è individuata da* $n-v+1$ *rette, condotte per altrettanti punti situati sopra una retta della* $C_{n,v}$.

Infatti una $C_{n,v}$ ed una $C_{n,v+1}$ ad essa circoscritta formano insieme una $C_{n+1,v+1}$ (§ 4), per determinare la quale è necessario e sufficiente che sieno dati $(n+1)-(v+1)+1=n-v+1$ punti sopra una sua retta e v rette, per ognuno di questi vertici. — Ma gli $n-v+1$ punti suddetti e $v-1$ rette per ognuno di questi determinano la $C_{n,v}$, perciò le rimanenti $(n-v+1)$ rette (una per vertice) dovranno servire a individuare la $C_{n,v+1}$.

Una $C_{n,v-1}$ inscritta in una $C_{n,v}$ è individuata da v *suoi punti scelti sopra altrettante rette della $C_{n,v}$, concorrenti in un punto di essa.*

Questo teorema si può dedurre dal precedente, osservando che una $C_{n,v}$ non è altro che una $\Gamma_{n,n-v+1}$ (§ 2).

14. *Se esiste una $C_{n,v}$, circoscritta ad una $C_{n,v-1}$ e inscritta in una $C_{n,v+1}$, esistono altre $C_{n,v}$ in numero semplicemente infinito circoscritte alla $C_{n,v-1}$ e inscritte alla $C_{n,v+1}$ date.*

Essendo

$$(A_{v-2}\,\alpha_{v-1})\ ,\ (A_{v-2}\alpha_v)\ ,\ (A_{v-2}\alpha_{v+1})$$

tre rette della $C_{n,v}$, che formano un triangolo che ha per vertici

$$(A_{v-2}\,\alpha_v\,\alpha_{v+1})\ ,\ (A_{v-2}\,\alpha_{v-1}\,\alpha_{v+1})\ ,\ (A_{v-2}\,\alpha_{v-1}\,\alpha_v),$$

queste giacciono sulle rette, rappresentate dagli stessi simboli, della $C_{n,v+1}$, che concorrono nel punto (A_{v+1}) mentre i lati passano per i punti, rappresentati dai medesimi simboli della $C_{n,v-1}$, che giacciono sulla retta (A_{v-2}). Ora, se si prende una retta ad arbitrio r, che passa per uno dei punti suddetti della $C_{n,v-1}$, e si costruisce un triangolo omologico a quello considerato, che abbia per lato la retta scelta, essendo (A_{v+1}) il centro e (A_{v-2}) l'asse d'omologia, e si prosegue poi la costruzione per tutti i possibili triangoli della $C_{n,v}$, ricordando il § 6, si vede che per ogni posizione della retta r esiste una ed una sola $C_{n,v}$ circoscritta alla $C_{n,v-1}$ e inscritta nella $C_{n,v-1}$.

In altre parole:

Se è data una $C_{n,v+1}$, circoscritta ad una $C_{n,v-1}$ e inscritta ad una $C_{n,v+1}$, e si fa rotare una retta della $C_{n,v}$ attorno ad un punto di $C_{n,v-1}$, mentre due suoi punti, appartenenti alla stessa $C_{n,v}$ scorrono su due rette della $C_{n,v+1}$, anche le altre rette di $C_{n,v}$ rotano attorno ai vertici della $C_{n,v-1}$, mentre i suoi vertici scorrono sulle rette della $C_{n,v+1}$.

G. Lazzeri.

ESERCIZIO DI ARITMETICA

1. Problema. (¹) — *Quali sono i numeri interi, che scritti nel sistema usuale di numerazione, uguagliano il quadruplo del prodotto delle loro cifre?*

Tralasciando la soluzione in cui tutte le cifre sono nulle, osservo che nessuna delle cifre di un tal numero potrà essere zero, per cui non potrà essere nemmeno cinque, perchè in questo caso tale numero dovrebbe essere multiplo di venti ed avere perciò nulla la sua cifra delle unità.

Se indichiamo con $a_{n+1}, a_n \dots . a_2, a_1$ le $n+1$ cifre dell'intero cercato, il problema proposto è quello di determinare le a_s $(s=1, 2 \dots, n+1)$ in modo che con $0 < a_s < 10$ ed intero sia

(1) $10^n . a_{n+1} + 10^{n-1} a_n + \dots . + 10a_2 + a_1 = 4a_1 a_2 \dots . a_{n-1} a_n a_{n+1}$.

Se poniamo

(2) $$P_s = a_1 a_2 \dots . a_s , \quad Q_s = a_{s+1} a_{s+2} \dots . a_n ,$$

la (1) può essere scritta sotto la forma

(3) $$10^n a_{n+1} + 10^{n-1} a_n + \dots .. + 10a_2 + a_1 = 4 P_s Q_s a_{n+1}$$

Osserviamo qui che in Q_s entrano $n-s$ fattori, ciascuno dei quali è compreso fra 1 e 9 i limiti inclusi; così sarà

$$Q_s \leqq 9^{n-s} < 9 \times 10^{n-s-1} ;$$

ed osserviamo pure che il nostro numero non può essere che maggiore di $10^n a_{n+1}$, e perciò verrà

$$10^n a_{n+1} < 36 \times 10^{n-s-1} P_s a_{n+1} ,$$

e dividendo per $36 \times 10^{n-s-1} a_{n+1}$, risulta

$$\frac{25}{9} \times 10^{s-1} < P_s ,$$

ossia

(4) $$P_s > 2 \times 10^{s-1} + 7 \times 10^{s-2} + \dots . + 7 \times 10 + 7.$$

(¹) Questo problema è stato suggerito da quello proposto dal Signor Eugenio Galassi: *Trovare il più piccolo numero intero che sia uguale al quadruplo del prodotto delle sue cifre.* Da questo enunciato sembrerebbe che vi potessero essere più numeri soddisfacenti il nostro problema, ciò che, come vedremo, non si verifica.

2. È facile vedere direttamente che non vi sono numeri con una o due cifre che rendano soddisfatto il problema.

Se dividiamo per 4 i due membri della (3), risulta che deve essere $\frac{10a_2 + a_1}{4}$ un numero intero: con questa condizione e coll'altra, che risulta dalla (4) cioè $a_1 a_2 > 27$, e poichè entrambi a_1 ed a_2 sono compresi fra 1 e 9, i limiti inclusi, risulta che per le due cifre a_1, a_2 non si possono avere che i seguenti sistemi

$$(5) \qquad \begin{cases} a_1=8, a_2=4;\ a_1=4, a_2=8;\ a_1=6, a_2=7;\ a_1=8, a_2=6; \\ a_1=6, a_2=9;\ a_1=8, a_2=8. \end{cases}$$

Quali sono i numeri di tre cifre che soddisfanno il problema proposto? Indicando con x la cifra delle centinaia, intero compreso fra 1 e 9 (1 e 9 inclusi) esaminiamo, se e per quali dei sistemi (5) è soddisfatta la

$$10^2 x + 10a_2 + a_1 = 4a_1 a_2 x.$$

Fatto questo, vedremo che essa non è soddisfatta che pel sistema $a_1=4$, $a_2=8$, con che si ha $x=3$ e perciò *384 è il solo numero di tre cifre che soddisfaccia questo problema.*

3. Se vi sono interi con più di tre cifre che soddisfacciano il problema, osserviamo che nei (5), vi sono una o più cifre pari; così $4a_1 a_2 \ldots a_{n+1}$ sarà multiplo di 8, e dividendo per 8 i due membri della (1), risulta

$$(6) \qquad \frac{25}{2} a_3 + \frac{10a_2 + a_1}{8} = \text{intero},$$

e perciò nel caso di $a_1 = 8$, $a_2 = 4$, a_3 dovrà essere pari e compreso fra 1 e 9; il che contraddice alla condizione $a_1 a_2 a_3 > 277$, quindi non vi possono essere numeri di più di tre cifre quando si abbia $a_1=8$, $a_2=4$.

Se $a_1=4$, $a_2=8$ per la (6) si vede che a_3 deve essere dispari, l'unico valore ammissibile di a_3 che soddisfaccia questa condizione e la $a_1 a_2 a_3 > 277$ è $a_3=9$, resta quindi a provare il sistema $a_1=4$, $a_2=8$, $a_3=9$.

Con $a_1=6$, $a_2=7$ risulta che a_3 è impari, e dovendo essere $a_1 a_2 a_3 > 277$, si scorge che gli unici valori ammissibili per a_3 sono $a_3=7$ e $a_3=9$, e quindi si avranno da provare i sistemi $a_1=6$, $a_2=7$, $a_3=7$; $a_1=6$, $a_2=7$, $a_3 = 9$.

In modo analogo si deduce che con $a_1 = 8$, $a_2 = 6$ non può essere che $a_3=7$ od $a_3=9$; con $a_1=6$, $a_2=9$ non può essere che $a_3=6$ od $a_3=8$; e con $a_1=8$, $a_2=8$ non può essere che $a_3=6$ od $a_3=8$.

Da questa discussione risulta, che pei numeri con più di tre cifre, che possono soddisfare il problema, i soli sistemi delle ultime tre cifre, sono dati dal quadro seguente:

$$(7) \qquad \begin{cases} a_1=4, a_2=8, a_3=9;\ a_1=6, a_2=7, a_3=7;\ a_1=6, a_2=7, a_3=9; \\ a_1=8, a_2=6, a_3=7;\ a_1=8, a_2=6, a_3=9;\ a_1=6, a_2=9, a_3=6; \\ a_1=6, a_2=9, a_3=8;\ a_1=8, a_2=8, a_3=6;\ a_1=8, a_2=8, a_3=8. \end{cases}$$

Per un numero di quattro cifre a_4 dovrebbe soddisfare sotto le solite condizioni l'equazione

$$1000\,a_4 + 100\,a_3 + 10\,a_2 + a_1 = 4\,a_4\,a_3\,a_2\,a_1\,;$$

equazione non soddisfatta da valori interi di a_4, compresi nei soliti limiti in corrispondenza dei nove sistemi (7) per a_1, a_2, a_3.

4. Vi sono numeri con più di quattro cifre che soddisfacciano il problema?

Con $a_1=4$, $a_2=8$, $a_3=9$ e $a_1=6$, $a_2=7$, $a_3=7$, non esiste un $a_4<10$, pel quale sia $a_1\,a_2\,a_3\,a_4>2\,7\,7\,7$; quindi a questi due sistemi non possano corrispondere numeri con più di quattro cifre, soddisfacenti il problema.

Quanto al sistema $a_1=6$, $a_2=7$, $a_3=9$, onde sia $a_1\,a_2\,a_3\,a_4>2\,7\,7\,7$, dovremo avere o $a_4=8$ o $a_4=9$.

Nei casi restanti, poichè $4\,a_1\,a_2\,a_3$ è multiplo di 16, dividendo i due membri della (1) per 16 risulta

$$\frac{a_4}{2}+\frac{100\,a_3+10\,a_2+a_1}{16}=\text{intero}\,; \tag{8}$$

per cui con $a_1=8$, $a_2=6$, $a_3=7$ si scorge che a_4, oltre alle solite limitazioni, dovrebbe essere pari, e soddisfare la $a_1\,a_2\,a_3\;a_4>2\,7\,7\,7$; e ciò è in contraddizione colle condizioni precedenti.

Con $a_1=8$, $a_2=6$, $a_3=9$ dalla (8) si deduce che a_4 deve essere impari, per cui essa non potrà avere che i due valori 7 e 9.

In modo analogo si scorge che per $a_1=6$, $a_2=9$, $a_3=6$ deve essere $a_4=9$; e per $a_1=6$, $a_2=9$, $a_3=8$ deve essere $a_4=8$; per $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=6$ sarà o $a_4=6$ o $a_4=8$; per $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=8$, dovrà essere $a_4=7$ o $a_4=9$.

Onde riassumendo i soli sistemi di quattro cifre, coi quali possono terminare i numeri con più di quattro cifre, che soddisfacciano il problema sono compresi nel quadro seguente

$$\left\{\begin{array}{ll} a_1=6,\ a_2=7,\ a_3=9,\ a_4=8\,; & a_1=6,\ a_2=7,\ a_3=9,\ a_4=9\,;\\ a_1=8,\ a_2=6,\ a_3=9,\ a_4=7\,; & a_1=8,\ a_2=6,\ a_3=9,\ a_4=9\,;\\ a_1=6,\ a_2=9,\ a_3=6,\ a_4=9\,; & a_1=6,\ a_2=9,\ a_3=8,\ a_4=8\,;\\ a_1=8,\ a_2=8,\ a_3=6,\ a_4=6\,; & a_1=8,\ a_2=8,\ a_3=6,\ a_4=8\,;\\ a_1=8,\ a_2=8,\ a_3=8,\ a_4=7\,; & a_1=8,\ a_2=8,\ a_3=8,\ a_4=9. \end{array}\right. \tag{9}$$

Nel modo consueto si vede che non vi possono essere interi di cinque cifre che rendano soddisfatto il problema.

5. Vi sono numeri di più di cinque cifre, che lo rendano soddisfatto?

Con $a_1=6$, $a_2=7$, $a_3=9$, $a_4=8$, ovvero $a_1=8$, $a_2=6$, $a_3=9$, $a_4=7$, o $a_1=6$, $a_2=9$, $a_3=6$, $a_4=9$, o $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=6$, $a_4=6$, ovvero $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=6$, $a_4=8$ non esistono interi $a_5<10$ pei quali sia soddisfatta la condizione $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5>2\,7\,7\,7\,7$; quindi nessun numero che termini con quei sistemi di quattro cifre può soddisfare il problema.

Con $a_1=6$, $a_2=7$, $a_3=9$, $a_4=9$ è soltanto l'intero $a_5=9<10$, che soddisfaccia la $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5>2\,7\,7\,7\,7$.

Per tutti i restanti sistemi di valori il prodotto $4\;a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5$ è multiplo di 32; e dividendo per 32 i due membri della (I) risulta.

$$(10)\qquad \frac{a_5}{2}+\frac{1000\,a_4+100\,a_3+10\,a_2+a_1}{32}=\text{intero};$$

e quindi con $a_1=8$, $a_2=6$, $a_3=9$, $a_4=9$ dovrà l'intero $a_5<10$ essere impari; e perché sia $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5>2\,7\,7\,7\,7$ dovrà essere $a_5=9$.

Per la (10) con $a_1=6$, $a_2=9$, $a_3=8$, $a_4=8$, l'intero a_5 deve essere pari; ma non vi è intero pari $a_5<10$, pel quale sia $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5>2\,7\,7\,7\,7$, dunque etc.

Con $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=8$, $a_4=7$, per la (10) l'$a_5<10$ deve essere impari, e per la $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5>2\,7\,7\,7\,7$ non si potrà avere che $a_5=9$,

Con $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=8$, $a_4=9$ per la (10) l'$a_5<10$ dovrà essere pari, e perchè sia $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5>2\,7\,7\,7\,7$, non si potrà avere che $a_5=8$.

Onde riassumendo, se vi sono interi, con più di cinque cifre, tali che siano uguali al quadruplo del prodotto delle loro cifre, dovranno terminare con uno di questi sistemi

$$(11)\quad\begin{cases}a_1=6,\ a_2=7,\ a_3=9,\ a_4=9,\ a_5=9;\ \ a_1=8,\ a_2=6,\ a_3=9,\ a_4=9,\ a_5=9\\ a_1=8,\ a_2=8,\ a_3=8,\ a_4=7,\ a_5=9;\ \ a_1=8,\ a_2=8,\ a_3=8,\ a_4=9,\ a_5=8.\end{cases}$$

Col metodo solito si fa vedere che non vi sono numeri con sei cifre che soddisfacciano il problema.

6. Vi sono numeri con più di sei cifre che lo rendano soddisfatto?

Con $a_1=6$, $a_2=7$, $a_3=9$, $a_4=9$, $a_5=9$ non esiste un intero $a_6<10$, pel quale sia $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6>2\,7\,7\,7\,7\,7$, dunque ecc.

Pei sistemi restanti $4\;a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5$ è divisibile per 64, e quindi diviso il primo membro della (1) per 64 resta

$$(12)\qquad \frac{a_6}{2}+\frac{10^4\,a_5+10^3\,a_4+10^2\,a_3+10\,a_2+a_1}{64}=\text{intero};$$

per cui con $a_1=8$, $a_2=6$, $a_3=9$, $a_4=9$, $a_5=9$, deve l'$a_6<10$ essere pari, e quindi il solo valore ammissibile di a_6, pel quale si abbia

$$a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6>2\,7\,7\,7\,7\,7,\ \text{è}\ a_6=8$$

Con $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=8$, $a_4=7$, $a_5=9$ per la (10) $a_6<10$ dovrà essere impari e per la condizione $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6>2\,7\,7\,7\,7\,7$ dovrà essere $a_6=9$.

Con $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=8$, $a_4=9$, $a_5=8$ allo stesso modo si vede che dovrà essere $a_6=9$.

Riepilogando risulta che, se vi sono interi con più di sei cifre che soddisfacciano il problema, la loro ultime sei saranno

$$a_1=8,\ a_2=6,\ a_3=9,\ a_4=9,\ a_5=9,\ a_6=8$$
$$a_1=8,\ a_2=8,\ a_3=8,\ a_4=7,\ a_5=9,\ a_6=9$$
$$a_1=8,\ a_2=8,\ a_3=8,\ a_4=9,\ a_5=8,\ a_6=9$$

Nel modo consueto si vede poi che non vi sono numeri di sette cifre che soddisfacciano il problema.

7. Ve ne sono di quelli con più di sette che lo rendano soddisfatto? Per il primo e pel secondo sistema non esista un a_7, tale che sia $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 > 2777777$ dunque ecc.

Col terzo sistema non vi è che $a_7=9$, che essendo intero e < 10 soddisfaccia la $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 > 2777777$: e quindi è impossibile che un numero soddisfaccia il problema, se le sue ultime sette cifre non sono $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=8$, $a_4=9$, $a_5=8$, $a_6=9$, $a_7=9$.

Si scorge col metodo consueto che non vi possono essere numeri di otto cifre che lo soddisfacciano, come pure non esistendo un $a_8 < 10$ pel quale sia $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 > 27777777$, non potranno esistere numeri con più di otto cifre che lo rendano soddisfatto; perciò 384 è la sola soluzione dal problema.

C. M. Piuma.

LA RISOLUZIONE DELLE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

e delle disequazioni biquadratiche (1) a coefficienti reali

I.

Limiti delle soluzioni reali. (2)

1. Una disequazione a coefficienti reali

$$f(x) < 0$$

è soddisfatta da tutti i valori reali della x che non soddisfano nè la disequazione

$$f(x) > 0,$$

nè l'equazione

$$f(x) = 0;$$

(1) Intendiamo per disequazioni biquadratiche le disequazioni di quarto grado, che mancano delle potenze dispari della variabile.

(2) Abbiamo creduto opportuno tener disgiunta la ricerca dei limiti delle soluzioni reali da quella dei limiti delle soluzioni complesse ed immaginarie, bastando per la prima le nozioni di algebra elementare.

è quindi superflua ogni ricerca relativa ai limiti dei valori reali, che soddisfano una delle anzidette disequazioni, quando tale ricerca sia stata esaurita per l'altra.

Supporremo, in ciò che segue, che il coefficiente della massima potenza della variabile sia, in ogni disequazione, uguale all'unità positiva.

2. *Disequazioni di secondo grado.* (¹) — Sia la disequazione

$$x^2 + px + q > 0,$$

e siano x_1 ed x_2 le radici dell'equazione

$$x^2 + px + q = 0.$$

Supponendo dapprima che le suddette radici siano reali, e che, in tale ipotesi, sia $x_1 > x_2$, dalla disequazione precedente, posta sotto la forma

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0,$$

si deduce dover essere

$$x > x_1, \quad \text{oppure} \quad x < x_2.$$

Nel caso particolare che x_1 ed x_2 siano reali ed uguali, la disequazione è manifestamente soddisfatta da qualunque valore reale si attribuisca alla x, all'infuori del valore $x = x_1 = x_2$.

Quando le radici dell'equazione non siano reali, il primo membro della disequazione, posta sotto la forma

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) > 0,$$

è costituito dalla somma di due quantità positive, la prima per sua natura, la seconda per ipotesi; quindi la disequazione è soddisfatta per qualunque valore reale della x.

3. *Disequazioni biquadratiche.* — Sia la disequazione

$$x^4 + px^2 + q > 0,$$

e siano x_1, x_2, $-x_2$, $-x_1$ le radici dell'equazione

$$x^4 + px^2 + q = 0.$$

Supponendo in primo luogo che tali radici siano reali, la disequazione in esame si potrà porre sotto la forma

$$(x - x_1)(x - x_2)(x + x_2)(x + x_1) > 0,$$

ed affinchè questa disequazione sia soddisfatta, dovranno darsi alla x tali valori da rendere i fattori del primo membro o tutti quattro positivi, o tutti quattro negativi, o due positivi e due negativi. Quindi, se suppo-

---

(¹) A rendere completa la teoria che veniamo esponendo, riportiamo in questo paragrafo la consueta risoluzione in numeri reali di tali disequazioni.

niamo che x_1 ed x_2 siano le radici positive, e che inoltre sia $x_1 > x_2$. dovrà essere

$$x > x_1, \quad \text{oppure} \quad x < -x_1, \quad \text{oppure} \quad -x_2 < x < x_2.$$

Vale a dire che la x può assumere qualunque valore, che non sia nè uguale ad una delle radici dell'equazione, nè compreso fra le radici positive o fra le radici negative.

Nel caso particolare in cui sia $x_1 = x_2$, sono da escludersi soltanto i valori $x = \pm x_1$.

Supponiamo in secondo luogo che due sole radici x_1 e $-x_1$ siano reali, e che x_1 sia la positiva; allora la disequazione si potrà porre sotto la forma

$$(x - x_1)(x + x_1) \mathrm{H} > 0,$$

ove H rappresenta un fattore di secondo grado in x, tale che le radici dell'equazione $\mathrm{H} = 0$ non sono reali. In base a quanto precedentemente si disse, il fattore H è positivo per qualunque valore reale della x, ed affinchè la disequazione sia soddisfatta, dovrà essere

$$x > x_1, \quad \text{oppure} \quad x < -x_1.$$

Supponiamo da ultimo che nessuna delle radici dell'equazione sia reale; ciò può avvenire o perchè, $p^2 < 4q$, o perchè, essendo $p^2 > 4q$, si ha $p > 0$ e $q > 0$. Nel primo caso, ponendo la disequazione sotto la forma

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) > 0,$$

è chiaro che il primo membro, risultando dalla somma di due quantità positive, la prima per sua natura e la seconda per ipotesi, è positivo; nel secondo caso il primo membro $x^4 + px^2 + q$, essendo p e q quantità positive per ipotesi, è con maggior evidenza pur sempre positivo. Adunque nell'un caso e nell'altro la disequazione è soddisfatta da qualunque valore reale si attribuisca alla x.

II.

Limiti delle soluzioni complesse ed immaginarie.

4. Converremo che per soluzioni complesse di una disequazione $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$ si debbano intendere quei valori complessi che rendano $f(x)$ numero reale e rispettivamente positivo o negativo.

Non vale nella ricerca dei limiti delle soluzioni complesse ed immaginarie quanto si disse al primo paragrafo, potendo un dato numero complesso od immaginario rendere complessa la $f(x)$, e quindi non soddisfare alcuna delle relazioni

$$f(x) > 0, \quad f(x) = 0, \quad f(x) < 0.$$

5. Osserveremo pure in generale che una disequazione a coefficienti reali

$$f(x) \gtrless 0,$$

al pari di una equazione, se è soddisfatta da un numero complesso

$$x_1 = \alpha + \beta i,$$

lo è pure dal suo coniugato

$$x_2 = \alpha - \beta i.$$

Infatti, se il valore x_1 soddisfa l'anzidetta disequazione, è quanto dire che esso soddisfa una determinata equazione

$$f(x) \mp h = 0,$$

in cui h rappresenta una quantità reale, positiva e indipendente dalla x; ma tale equazione ammette pure la radice coniugata x_2, e quindi x_2 è pure soluzione della disequazione suddetta.

6. *Disequazioni di secondo grado.* — Affinchè un numero complesso $\alpha + \beta i$ soddisfi la disequazione

$$x^2 + px + q > 0,$$

dovrà aversi

$$(\alpha + \beta i)^2 + p(\alpha + \beta i) + q > 0,$$

ossia

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta i - \beta^2 + p\alpha + p\beta i + q > 0,$$

e quindi

$$\begin{cases} 2\alpha\beta + p\beta = 0 \\ \alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q > 0. \end{cases}$$

Dalla equazione del sistema, dividendone tutti i termini per β, che non può essere nulla per ipotesi, si ricava

$$\alpha = -\frac{p}{2},$$

e la disequazione del sistema, sostituendo ad α tale valore, diviene

$$\beta^2 + \frac{p^2}{4} - q < 0;$$

dunque la disequazione

$$x^2 + px + q > 0$$

è soddisfatta da tutti i numeri complessi $\alpha + \beta i$, che si ottengono dando ad α il valore $-\frac{p}{2}$, e a β uno qualunque dei valori reali che soddisfano la disequazione

$$\beta^2 + \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

È opportuno notare che la disequazione in esame potrà quindi essere soddisfatta da un numero immaginario, solo quando sia $p = 0$; ed allora il coefficiente reale β della i dovrà soddisfare la disequazione

$$\beta^2 - q < 0.$$

7. Analogamente la disequazione

$$x^2 + px + q < 0$$

è soddisfatta da tutti i numeri complessi $\alpha + \beta i$ che si ottengono dando ad α il valore $-\frac{p}{2}$ e a β uno qualunque dei valori reali, che soddisfano la disequazione

$$\beta^2 + \frac{p^2}{4} - q > 0.$$

Noteremo pure che la disequazione in esame potrà quindi essere soddisfatta da un numero immaginario, solo quando sia $p = 0$; ed allora il coefficiente reale β della i dovrà soddisfare la disequazione

$$\beta^2 - q > 0.$$

8. *Disequazioni biquadratiche.* — Quando un'equazione biquadratica ammette due sole radici reali, le altre due, dovendo essere ad un tempo coniugate nonchè uguali e di segno contrario, non saranno complesse ma immaginarie; quando non ammette alcuna radice reale, per la suesposta ragione, le radici saranno o tutte immaginarie, o tutte complesse e precisamente della forma

$$\alpha + \beta i, \quad -\alpha - \beta i, \quad \alpha - \beta i, \quad -\alpha + \beta i.$$

Ne consegue, tenuto presente quanto superiormente si disse, che, se una equazione od una disequazione biquadratica ammette per soluzione uno qualunque dei quattro numeri precedenti, li ammette tutti quattro.

9. Prendiamo ora in esame la disequazione

$$x^4 + px^2 + q > 0.$$

Sostituendo ad x il numero $\alpha + \beta i$, si ha

$$(\alpha + \beta i)^4 + p(\alpha + \beta i)^2 + q > 0,$$

ossia

$$\alpha^4 + 4\alpha^3\beta i - 6\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 i + \beta^4 + p\alpha^2 + 2p\alpha\beta i - p\beta^2 + q > 0;$$

quindi dovrà essere

$$\begin{cases} 4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3 + 2p\alpha\beta = 0 \\ \alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + p\alpha^2 - p\beta^2 + q > 0. \end{cases}$$

Dividendo tutti i termini dell'equazione del sistema per 2 e per β, che non può essere nulla per ipotesi, e ponendovi α a fattor comune, essa diviene

$$\alpha(2\alpha^2 - 2\beta^2 + p) = 0,$$

ed il sistema precedente si può quindi scindere nei due sistemi

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + p\alpha^2 - p\beta^2 + q > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 - \dfrac{p}{2} \\ \alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + p\alpha^2 - p\beta^2 + q > 0. \end{cases}$$

Se poi nella disequazione di ciascun sistema si sostituisce ad α il valore dato dalla corrispondente equazione, i due sistemi divengono

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta^4 - p\beta^2 + q > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 - \dfrac{p}{2} \\ (4\beta^2 - p)^2 - 4q < 0. \end{cases}$$

Emerge dal primo sistema che la disequazione

$$x^4 + px^2 + q > 0$$

ammette per soluzioni immaginarie tutti i numeri βi che si ottengono, dando a β uno qualunque dei valori reali, che soddisfano la disequazione

$$\beta^4 - p\beta^2 + q > 0;$$

dal secondo sistema che la disequazione in esame ammette per soluzioni complesse tutti i numeri $\alpha + \beta i$, che si ottengono dando a β uno qualunque dei valori reali che soddisfano la disequazione

$$(4\beta^2 - p)^2 - 4q < 0,$$

purchè si abbia $\beta^2 > \dfrac{p}{2}$, e dando ad α l'uno o l'altro dei due valori che corrispondentemente si ricavano dall'equazione

$$\alpha^2 = \beta^2 - \frac{p}{2}.$$

10. Analogamente la disequazione

$$x^4 + px^2 + q < 0$$

è soddisfatta da tutti i numeri immaginari βi, in cui β sia soluzione reale della disequazione

$$\beta^4 - p\beta^2 + q < 0.$$

Ed è soddisfatta inoltre da tutti i numeri complessi $\alpha + \beta i$, in cui β sia soluzione reale della disequazione

$$(4\beta^2 - p)^2 - 4q > 0,$$

e tale da avere $\beta^2 > \dfrac{p}{2}$; corrispondentemente si hanno per α i due valori dati dall'equazione

$$\alpha^2 = \beta^2 - \frac{p}{2}.$$

D. Fellini.

SOLUZIONI DELLE QUESTIONI 318*, 319*

318*. *In un triangolo sferico, secondo che* $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a$ *è uguale maggiore o minore di* $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c$, *anche* α *sarà rispettivamente uguale maggiore o minore di* $\beta + \gamma$; *e inversamente.*

L. Bosi.

Soluzione di Francesco Barbagallo alunno del R. Ist. Tecnico di Catania.

Sapendo che (Fodhunter trig. sferica art. 49)

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a = - \frac{\cos\sigma \cos(\sigma - \alpha)}{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma}, \quad \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b = - \frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma},$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c = - \frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\gamma)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta},$$

se $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a \gtreqless \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c$,

si ha

$$\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma} \lesseqgtr \frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma} + \frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta};$$

e siccome $\cos\sigma$ è negativo, dividendo per $\cos\sigma$, riducendo allo stesso denominatore e moltiplicando per $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma$, si ha

$$\cos(\sigma-\alpha)\operatorname{sen}\alpha \gtreqless \cos(\sigma-\beta)\operatorname{sen}\beta + \cos(\sigma-\gamma)\operatorname{sen}\gamma,$$

cioè

$$\cos\sigma\operatorname{sen}2\alpha + 2\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}^2\alpha \gtreqless \cos\sigma\operatorname{sen}2\beta + 2\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}^2\beta + \cos\sigma\operatorname{sen}2\gamma + 2\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}^2\gamma,$$

$$\cos\sigma(\operatorname{sen}2\alpha - \operatorname{sen}2\beta - \operatorname{sen}2\gamma) \gtreqless 2\operatorname{sen}\sigma(\operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma - \operatorname{sen}^2\alpha),$$

$$" \quad " \quad " \quad \gtreqless \operatorname{sen}\sigma(\cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma + 1),$$

$$(\operatorname{sen}\sigma\cos 2\beta - \cos\sigma\operatorname{sen}2\beta) - (\operatorname{sen}\sigma\cos 2\alpha - \cos\sigma\operatorname{sen}2\alpha) \gtreqless \operatorname{sen}\sigma - (\operatorname{sen}\sigma\cos 2\gamma - \cos\sigma\operatorname{sen}2\gamma),$$

$$\operatorname{sen}(\sigma - 2\beta) - \operatorname{sen}(\sigma - 2\alpha) \gtreqless \operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen}(\sigma - 2\gamma),$$

$$\cos(\sigma - \alpha - \beta)\operatorname{sen}(\alpha - \beta) \gtreqless \cos(\sigma - \gamma)\operatorname{sen}\gamma,$$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)\operatorname{sen}(\alpha-\beta) \gtreqless \cos\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)\operatorname{sen}\gamma;$$

ovvero, poichè $\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$ è minore di 90°, epperò il suo coseno è positivo, si ha:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) \overline{\overline{\gtrless}} \operatorname{sen}\gamma,$$

cioè

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)-\operatorname{sen}\gamma \overline{\overline{\gtrless}} 0,$$

donde

$$2\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2} \overline{\overline{\lessgtr}} 0;$$

e siccome $\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}<90°$, epperò il suo coseno è positivo e diverso da zero, deve essere

$$\operatorname{sen}\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2} \overline{\overline{\lessgtr}} 0$$

d'onde, esssendo $\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2}<90°$, si ha

$$\gamma+\beta-\alpha \overline{\overline{\lessgtr}} 0,$$

cioè

$$\gamma+\beta \overline{\overline{\lessgtr}} \alpha.$$

C. V. D.

Similmente, se $\alpha \overline{\overline{\gtrless}} \beta+\gamma$, cioè $\beta+\gamma-\alpha \overline{\overline{\lessgtr}} 0$, sarà pure

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right) \overline{\overline{\lessgtr}} 0;$$

d'onde

$$2\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \overline{\overline{\lessgtr}} 0;$$

cioè

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) \overline{\overline{\gtrless}} \operatorname{sen}\gamma,$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \overline{\overline{\gtrless}} \operatorname{sen}\gamma;$$

e sapendo che

$$\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c},\quad \cos\beta=\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} c},$$

e

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{M}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c},\quad \operatorname{sen}\beta=\frac{M}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} c},\quad \operatorname{sen}\gamma=\frac{M}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b},$$

dove

$$M=\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c},$$

si ha

$$\frac{M(\cos b-\cos a\cos c)}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\operatorname{sen}^2 c}-\frac{M(\cos a-\cos b\cos c)}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\operatorname{sen}^2 c} \overline{\overline{\gtrless}} \frac{M}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b};$$

donde

$$(\cos b-\cos a)(1+\cos c) \overline{\overline{\gtrless}} \operatorname{sen}^2 c,$$

$$\cos b-\cos a \overline{\overline{\gtrless}} 1-\cos c,$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b) \gtreqless \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}c,$$

$$\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b \gtreqless \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}c,$$

$$\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a \gtreqless \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b + \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}c$$

C. V. D.

319*. *In un triangolo sferico, secondo che* $\cos^2\frac{1}{2}\alpha$ *è uguale maggiore o minore di* $\cos^2\frac{1}{2}\beta + \cos^2\frac{1}{2}\gamma$; $a + 180°$ *sarà rispettivamente uguale, minore o maggiore di* $b + c$; *e inversamente.*

L. Bosi.

Soluzione di Francesco Barbagallo alunno del R. Ist. Tecnico di Catania.

Sapendo che (Todhunter trig. sfer. art. 45)

$$\cos^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},\ \cos^2\frac{1}{2}\beta = \frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c},\ \cos^2\frac{1}{2}\gamma = \frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b},$$

se $\cos^2\frac{1}{2}\alpha \gtreqless \cos^2\frac{1}{2}\beta + \cos^2\frac{1}{2}\gamma$, si ha

$$\frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \gtreqless \frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c} + \frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b},$$

$$\operatorname{sen}(s-a)\operatorname{sen} a \gtreqless \operatorname{sen}(s-b)\operatorname{sen} b + \operatorname{sen}(s-c)\operatorname{sen} c,$$

$$\operatorname{sen} s \operatorname{sen} 2a - 2\cos s \operatorname{sen}^2 a \gtreqless \operatorname{sen} s \operatorname{sen} 2b - 2\cos s \operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} 2c - 2\cos s \operatorname{sen}^2 c,$$

$$\operatorname{sen} s(\operatorname{sen} 2a - \operatorname{sen} 2b - \operatorname{sen} 2c) \gtreqless 2\cos s(\operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b - \operatorname{sen}^2 c),$$

$$\text{"} \qquad \text{"} \qquad \gtreqless \cos s(\cos 2b + \cos 2c - \cos 2a - 1),$$

$$(\cos s \cos 2a + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} 2a) - (\cos s \cos 2b + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} 2b) \gtreqless (\cos s \cos 2c + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} 2c) - \cos s,$$

$$\cos(s-2a) - \cos(s-2b) \gtreqless \cos(s-2c) - \cos s,$$

$$\operatorname{sen}(s-a-b)\operatorname{sen}(a-b) \gtreqless \operatorname{sen}(s-c)\operatorname{sen} c,$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(c-a-b)\operatorname{sen}(a-b) \gtreqless \operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{sen} c,$$

$$\operatorname{sen}(b-a) \gtreqless \operatorname{sen} c,$$

cioè

$$\operatorname{sen}(b-a) - \operatorname{sen} c \gtreqless 0,$$

$$2 \cos \frac{1}{2}(b + c - a) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + c - b) \mathrel{\substack{=\\<\\>}} 0,$$

e siccome $0 < \frac{1}{2}(a + c - b) < 90°$, epperò il suo seno è positivo e diverso da zero, deve essere

$$\cos \frac{1}{2}(b + c - a) \mathrel{\substack{=\\<\\>}} 0,$$

cioè

$$\cos \frac{1}{2}(2\pi + a - b - c) \mathrel{\substack{=\\>\\<}} 0.$$

per cui, essendo $\frac{1}{2}(2\pi + a - b - c) < \pi$, deve essere

$$2\pi + a - b - c \mathrel{\substack{=\\<\\>}} \pi.$$

cioè

$$\pi + a \mathrel{\substack{=\\<\\>}} b + c.$$

C. V. D.

Similmente, se $\pi + a \mathrel{\substack{=\\>\\<}} b + c$, cioè $2\pi + a - b - c \mathrel{\substack{=\\>\\<}} \pi$, sarà

$$\cos \frac{1}{2}(2\pi + a - b - c) \mathrel{\substack{=\\<\\>}} 0,$$

e quindi

$$2 \cos \frac{1}{2}(b + c - a) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + c - b) \mathrel{\substack{=\\>\\<}} 0;$$

da cui

$$\operatorname{sen} c \mathrel{\substack{=\\>\\<}} \operatorname{sen}(b - a),$$

$$\operatorname{sen} c \mathrel{\substack{=\\>\\<}} \operatorname{sen} b \cos a - \cos b \operatorname{sen} a;$$

e sapendo che

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma}, \quad \cos b = \frac{\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\gamma},$$

$$\operatorname{sen} a = \frac{2N}{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma}, \quad \operatorname{sen} b = \frac{2N}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\gamma}, \quad \operatorname{sen} c = \frac{2N}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta},$$

dove

$$N = \sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma - \alpha)\cos(\sigma - \beta)\cos(\sigma - \gamma)},$$

si ha

$$\frac{2N}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta} \mathrel{\substack{=\\>\\<}} \frac{2N(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}^2\gamma} - \frac{2N(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma)}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}^2\gamma};$$

da cui

$$\operatorname{sen}^2\gamma \mathrel{\substack{=\\>\\<}} (\cos\alpha - \cos\beta)(1 - \cos\gamma),$$

$$1 + \cos\gamma \mathrel{\substack{=\\>\\<}} \cos\alpha - \cos\beta,$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}\gamma \mathrel{\substack{=\\>\\<}} \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\beta - \alpha),$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}\gamma \gtreqless \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\beta - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}\gamma \gtreqless \cos^2 \frac{1}{2}\alpha - \cos^2 \frac{1}{2}\beta,$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}\gamma + \cos^2 \frac{1}{2}\beta \gtreqless \cos^2 \frac{1}{2}\alpha.$$

C. V. D.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

327. Qualunque numero, tranne 2 e 5 ed i loro multipli, è un divisore d'un numero formato da cifre tutte uguali a 9.

328. Ogni frazione irriducibile che ha per denominatore $3,^m$ ridotta in decimale, genera una frazione decimale periodica che ha per periodo un numero di 3^{m-2} cifre.

329. Se una frazione irriducibile, che ha per denominatore il numero primo p diverso da 3, ridotta in decimali genera una frazione periodica, il cui periodo contiene p' cifre, ogni altra frazione ordinaria irriducibile che ha per denominatore p^m, ridotta in decimali produrrà una frazione periodica il cui periodo conterrà $p'.p^{m-1}$ cifre.

330. Se una frazione irriducibile ha per denominatore un prodotto di più fattori primi $p, q, r, \ldots$ diversi da 2 e da 5, e le frazioni $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}, \ldots$ ridotte in decimali producono periodi di $p', q', r', \ldots$ cifre rispettivamente, la data frazione ridotta in decimali produrrà un periodo di m cifre, essendo m il minimo multiplo comune di $p', q', r', \ldots$

331. Se $\frac{a}{b}$ è una frazione irriducibile in cui $b = 3^m . p^\alpha . q^\beta . r^\gamma \ldots$, e $p, q, r, \ldots$ sono numeri primi differenti da 2 e da 5, indicando con $p', q', r', \ldots$ rispettivamente i numeri delle cifre dei periodi delle frazioni decimali equivalenti ad $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}, \ldots$, la frazione $\frac{a}{b}$ ridotta in decimali produrrà un periodo di k cifre, essendo k il minimo multiplo comune dei numeri $3^{m-2}, p', p^{\alpha-1}, q', q^{\beta-1}, r', r^{\gamma-1}, \ldots$

BONOLIS.

(*) Le quistioni contrassegnate con un asterisco sono proposte agli studenti delle scuole secondarie; le altre a tutti gli studiosi indistintamente.

332*. Dati cinque punti in un piano o nello spazio, tali che tre di essi non sieno in linea retta, si possono formare con essi 10 triangoli. I dieci segmenti, che congiungono il baricentro di ciascuno di questi triangoli col punto medio del segmento individuato dagli altri due, passano tutti per un punto.

333*. Con sei punti dati nello spazio, in modo che quattro di essi non sieno in un piano, si possono formare quindici terne di segmenti aventi per estremi i sei punti dati. I quindici piani individuati dai punti di mezzo delle quindici terne di segmenti passano per un punto. Per questo punto passano anche le rette che congiungono i baricentri di ciascuna coppia di triangoli che si possono formare coi sei punti dati.

334*. Con sette punti dati nello spazio, in modo che quattro non sieno in un piano, si possono formare 35 tetraedri. Le rette che congiungono il baricentro di uno di questi tetraedri col baricentro del triangolo determinato dagli altri tre punti dati, passano tutte per uno stesso punto.

335*. Con 8 punti dati nello spazio, in modo che quattro di essi non sieno in un piano, si possono formare 35 coppie di tetraedri. Le rette che congiungono i baricentri di ciascuna coppia di tetraedri passano per un punto. [1]

LAZZERI.

336. Di un quadrilatero piano qualunque ABCD si conoscono gli angoli interni A e D, il lato $AB = a$, e il rapporto $BC : AD = k$; e inoltre si sa che $AB = CD$. Si considerino su AD e su CB rispettivamente due punti mobili U e V, tali che sia sempre $DU : CV = k$. Determinare il valore minimo del segmento UV.

G. PESCI.

337*. Dati due corpi di forma sferica e di peso P, P', determinare la relazione fra p e p' (pesi specifici), perchè, essendo $P = nP'$, il corpo di peso P' cadendo nell'aria acquisti una velocità costante maggiore di quella che acquisterebbe il corpo di peso P', ammettendo che la resistenza dell'aria sia proporzionale al quadrato della velocità.

F. BARBAGALLO.

[1] N. B. Le quistioni 332*, 333*, 334*, 335* devono essere risolute indipendentemente dalla teoria delle proporzioni e dell'equivalenza e da considerazioni di meccanica.

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile.*

Finito di stampare il 16 Gennaio 1897.

SOPRA CERTI DETERMINANTI

i cui elementi sono funzioni trigonometriche

(Estratto di una lettera del Prof. G. Loria al Direttore).

Ella ricorda certamente la seguente identità

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 1 \\ \cos\beta & \operatorname{sen}\beta & 1 \\ \cos\gamma & \operatorname{sen}\gamma & 1 \end{vmatrix} = 4\ \operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2},$$

che (a tacer d'altri) è riferita dal Mansion nel suo ben noto libretto sopra i determinanti. Forse Le sarà pur nota l'altra relazione

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & \operatorname{sen}2\alpha \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & \operatorname{sen}2\beta \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & \operatorname{sen}2\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= 4\operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}[\operatorname{sen}(\beta+\gamma)+\operatorname{sen}(\gamma+\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)],$$

che è dimostrata nel Vol. VI (p. 88) di *Mathésis*. Ora, alcune ricerche geometriche che mi occupano da vario tempo, mi condussero a stabilire le seguenti relazioni analoghe a quelle surriferite:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{tg}\alpha & 1 \\ \cos\beta & \operatorname{tg}\beta & 1 \\ \cos\gamma & \operatorname{tg}\gamma & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma}[\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\alpha+\beta)-1];$$

$$\begin{vmatrix} \cos2\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 1 \\ \cos2\beta & \operatorname{sen}\beta & 1 \\ \cos2\gamma & \operatorname{sen}\gamma & 1 \end{vmatrix} = 16\operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}2\alpha & 1 \\ \cos\beta & \operatorname{sen}2\beta & 1 \\ \cos\gamma & \operatorname{sen}2\gamma & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}[\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta+\gamma)],$$

la dimostrazione delle quali può fornire un ottimo esercizio ai giovani lettori del *Periodico* da Lei diretto. Tutte queste relazioni, eccettuata la seconda, danno il valore di determinanti del seguente tipo:

$$
(A) \quad \begin{vmatrix}
\operatorname{sen} m_1\alpha_1, & \operatorname{sen} m_2\alpha_1, & \ldots, & \operatorname{sen} m_k\alpha_1, & \cos m_{k+1}\alpha_1, & \ldots, & \cos m_n\alpha_1 \\
\operatorname{sen} m_1\alpha_2, & \operatorname{sen} m_2\alpha_2, & \ldots, & \operatorname{sen} m_k\alpha_2, & \cos m_{k+1}\alpha_2, & \ldots, & \cos m_n\alpha_2 \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\
\operatorname{sen} m_1\alpha_n, & \operatorname{sen} m_2\alpha_n, & \ldots, & \operatorname{sen} m_k\alpha_n, & \cos m_{k+1}\alpha_n, & \ldots, & \cos m_n\alpha_n
\end{vmatrix},
$$

ove $m_1 m_2 \ldots m_n$ sono numeri interi, uno dei quali (a partire da m_{k+1}) può essere nullo. Il calcolo di tale determinante presenta qualche difficoltà, e può essere necessario in molte circostanze. Quando fosse eseguito, si potrebbero assegnare i valori degli analoghi determinanti del tipo seguente:

$$
(B) \quad \begin{vmatrix}
\operatorname{sen}^{m_1}\alpha_1, & \ldots, & \operatorname{sen}^{m_k}\alpha_1 & , \cos^{m_k+1}\alpha_1, & \ldots, & \cos^{m_n}\alpha_1 \\
\operatorname{sen}^{m_1}\alpha_2, & \ldots, & \operatorname{sen}^{m_k}\alpha_2 & , \cos^{m_k+1}\alpha_2, & \ldots, & \cos^{m_n}\alpha_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\operatorname{sen}^{m_1}\alpha_n, & \ldots, & \operatorname{sen}^{m_k}\alpha_n & , \cos^{m_n+1}\alpha_n, & \ldots, & \cos^{m_n}\alpha_n
\end{vmatrix}.
$$

Ma è ancor dubbio se invece non convenga ridurre il calcolo dei determinanti dal tipo (A) a quello dei determinanti del tipo (B). Comunque, Ella vede che siamo qui dinnanzi ad una miniera di questioni piene d'interesse per l'analista e pel geometra, e sulle quali bramerei che Ella fissasse l'attenzione dei nostri colleghi, affinchè, se non altro, arricchissero di qualche nuovo numero il catalogo dei casi speciali in cui esse sono risolte. Che tali quistioni formino un campo tuttora inesplorato, sembra risultare dall'esame dell'eccellente Manuale del Pascal su la teoria e le applicazioni dei determinanti, recentemente pubblicato dall'Hoepli.

SULLA DEFINIZIONE DI INFINITO

Il prof. Bettazzi, nel suo pregevole lavoro *Fondamenti per una teoria generale dei gruppi* inserito nel vol. XI del *Periodico*, a pag. 82, mi fa l'onore di citare i miei *Elementi di aritmetica e algebra*, combattendo la definizione di sistema infinito in essi contenuta e così concepita: „ Un sistema si dirà infinito se, dopo aver pensato più cose del sistema, sia sempre possibile pensarne altre ancora ". Sembrandomi le sue censure ingiustificate, credo mio dovere e mio diritto il rispondergli.

Egli dice prima che il prof. Burali-Forti mette in mostra alcune imperfezioni del mio libro che *rendono illusoria* quella definizione. L'obbiezione del prof. Burali-Forti consiste nel dire che io chiamo infinito ciò che è infinito e finito ciò che è finito; e per provare come ciò non sia vero, basta l'esempio del gruppo dei punti contenuti in un segmento, il quale può dirsi finito perchè ha *fine* da una banda e dall'altra, mentre per la mia definizione è infinito.

Il prof. Bettazzi aggiunge poi che la mia definizione è assurda, ove non si completi la frase dicendo « dopo aver pensato più cose del sistema *costituenti un gruppo finito* ». Ora questo complemento, che, come egli dice, darebbe origine a un circolo vizioso, è affatto superfluo, poichè la definizione stabilisce come condizione sufficiente, non necessaria, affinchè il gruppo sia finito, il fatto che le cose sieno pensate. E invero io non avevo precedentemente ammessa la possibilità di pensare tutte le cose di un sistema, e mi era perciò lecito parlare di sistemi, i cui individui non si potessero tutti pensare, come ho fatto; mi par dunque strano che egli dica « potendosi per più cose (pensate) prendere tutte quelle del gruppo, oltre le quali non ve ne sono altre », una volta che io, per il gruppo in quistione, avevo legittimamente stabilito il contrario.

D'altronde l'esistenza di gruppi infiniti secondo la mia definizione si può dimostrare collo stesso esempio di Bolzano e Dedekind, riportato dal Prof. Bettazzi a pag. 87 del citato lavoro; poichè dopo aver pensato più enti, sieno essi materiali, o pensieri essi stessi, rimangono sempre a pensare le loro immagini nella nostra mente.

G. Biasi.

SUL POSTULATO DELL'EQUIVALENZA

1. La breve nota del mio egregio collega ed amico Giudice, pubblicata nel 1° fascicolo del *Bollettino dell'associazione Mathesis*, sembra che risolva l'importante quistione di dimostrare il postulato dell'equivalenza per una via assai più facile e sollecita di quelle proposte in precedenza, ammesso però che si possa accettare senza discussione la definizione ch'egli da di grandezze finite ed infinite.

Su questa definizione, e sulle considerazioni relative ad essa fatte dall'altro mio amico e collega Sforza (*Bollettino di Mathesis n. 2*) mi permetto di fare alcune modeste osservazioni, allo scopo d'invogliare i professori delle scuole secondarie ad applicarsi allo studio di questo argomento interessantissimo, per risolverlo di comune accordo in modo definitivo e completamente soddisfacente.

2. Il Prof. Giudice stabilisce la definizione di finito e infinito nel modo seguente: " *Diremo che una grandezza è finita, se non è possibile togliere una prima parte, indi una seconda che sia eguale alla prima, poi una terza che sia eguale alla prima, e così via indefinitamente: se invece sia possibile allora diremo che la grandezza è infinita* ".

Premessa questa definizione il Prof. Giudice dimostra la proposizione comunemente ammessa come postulato per la teoria dell'equivalenza, cioè " *se una grandezza A è scomposta in parti, non è possibile trascurando alcune di queste parti ricomporre le altre in modo da ricostituire la grandezza A stessa* „. La dimostrazione si può riassumere così. Supponiamo che, trascurando una parte B di A si possa colle altre ricostituire la grandezza A. Allora, trascurando una seconda volta la grandezza B, si potrà di nuovo costituire la grandezza A, e così via indefinitamente, di guisa che A dovrebbe essere infinita. Sulla dimostrazione mi sembra che non ci sia nulla da obiettare, e da essa apparisce che il postulato sull'equivalenza discende da quello di Archimede; ma la definizione, sulla quale essa è basata, mi sembra un po' troppo indeterminata e non interamente esatta, se non si stabilisce senza ambiguità che specie di parte si deve togliere successivamente da una grandezza data, per stabilire se essa è finita o no. E infatti per es. una striscia è secondo la definizione di Giudice una grandezza *infinita*, poichè si può da essa togliere successivamente e infinitamente una sua parte che sia un rettangolo, ma è *finita*, se si considera che da essa si può togliere soltanto un numero finito di volte successivamente un'altra striscia. Nello stesso modo l'angolo è *finito* se si confronta con altri angoli; *infinito* se si confronta con striscie o poligoni.

Da questi esempi chiaramente apparisce che, come non è possibile definire *la grandezza*, ma si possono definire le *classi di grandezze*, così non si può parlare di grandezza *finita o infinita individualmente*, ma soltanto di *classi di grandezze finite*, o *infinite*, chiamando classi di grandezze finite (o di 1ª specie secondo il Bettazzi) (*) le classi che soddisfano al postulato di Archimede, tali cioè che date due grandezze della classe esiste sempre una multipla della minore che supera la maggiore.

Così, pur riconoscendo che l'acuta osservazione di Giudice è del massimo interesse, e che contiene probabilmente il germe della dimostrazione semplicissima, che si dovrà accettare come definitiva, pure ritengo che per ora non si possa ritenere la quistione come esaurita, finchè non sia ben precisata la definizione di finito e infinito.

3. Passiamo alla nota di Sforza che si può riassumere così.

Premessa l'osservazione che la definizione di finito data dal Giudice coincide col postulato di Archimede, egli fa il seguente sillogismo.

(*) Bettazzi, *Teoria delle grandezze*, § 50. Pisa 1890.

Ogni grandezza che soddisfa al postulato di De Paolis relativo all'equivalenza è finita.

Il segmento soddisfa al postulato di De Paolis (V. De Paolis, *Elem. di geom.* pag. 42 n. 56).

Dunque il segmento soddisfa al postulato di Archimede, che almeno per i segmenti diventa un teorema.

La forma del sillogismo è perfetta. Vediamo la sostanza.

Non so se il mio collega ha osservato che la dimostrazione della premessa minore (*il segmento soddisfa al postulato di De Paolis*) è basata sul postulato della possibilità d'invertire un segmento. Dunque l'unica conseguenza logica che si può dedurre dal detto sillogismo, è che il postulato di Archimede per il segmento è conseguenza di quello di De Paolis e di quello della possibilità di far coincidere un segmento con se stesso rovesciandolo. Siccome però il sig. Gérard ha dimostrato che l'inversibilità di un segmento discende dal postulato di Archimede,(*) vi è in tutto questo un circolo vizioso. Piuttosto da tutto quello che è stato scritto parrebbe si dovesse concludere che tre postulati, quello della inversibilità di un segmento, quello dell'equivalenza, quello di Archimede debbano essere raggruppati in un solo, che valga a caratterizzare le classi di grandezze finite.

Non so come ciò si debba o si possa fare, ma mi pare che la cosa non sia impossibile, e varrebbe la pena che molti se ne occupassero.

4. Credo opportuno di aprire qui una parentesi.

Ho adoperato sopra la locuzione *postulato di De Paolis* per riportare fedelmente le parole del Prof. Sforza; ma per amor di giustizia devo osservare che, se si dovesse dare un nome alla proposizione ormai tanto discussa, questo dovrebbe essere il nome di *De Zolt*, il quale l'enunciò per il primo fino dal 1881 e coi suoi pregevoli opuscoli *sull'eguaglianza dei poligoni e dei poliedri* mise le fondamenta di questa importante parte della geometria elementare. Infatti a pag. 12 della prefazione ai *Principi sull'eguaglianza dei poligoni* stampati nel 1881 (mentre la geometria del De Paolis fu stampata nel 1884) è osservato che per trattare la teoria dell'equivalenza è necessario che *si ammetta esplicitamente quale assioma o si dimostri, come noi* PROCURAMMO *di fare, la proposizione: se un poligono è diviso in parti in un*

(*) GÉRARD, *Sur l'équivalence de deux portions de droites.* — *Periodico di mat.*, Vol. XI, pag. 23.

modo qualunque, non è possibile, trascurando alcune di esse parti, disporre le rimanenti in modo da coprire interamente il poligono.

La dimostrazione lascia a desiderare, e sembra che lo stesso autore ne dubitasse, poichè dice che egli *ha procurato di dimostrare* la citata proposizione e non che l'ha dimostrata; ma ciò non toglie che egli per primo riconoscesse che quella proposizione era il cardine della teoria dell'equivalenza.

5. A proposito della definizione di classi di grandezze finite ricorderò che il Bettazzi nella sua pregevole teoria delle grandezze chiama classi di 2ª specie assoluta quelle classi di grandezze, che si possono scomporre in sottoclassi ordinarie di 1ª specie (separate da salti), in modo che qualsiasi multiplo di una grandezza di una sottoclasse è minore di qualsiasi grandezza della sottoclasse successiva. Ebbene le parti di piano offrono un esempio interessantissimo di queste grandezze. I poligoni, le striscie, gli angoli costituiscono tre sottoclassi di grandezze di 1ª specie o finite, considerate separatamente; ma prese insieme formano una classe di 2ª specie assoluta; e, chiamando finiti i poligoni, possiamo dire che le striscie formano una classe di grandezze infinite di 1° ordine, e gli angoli formano una classe di grandezze infinite di 2° ordine.

In simil guisa le parti di spazio si possono suddividere in quattro sottoclassi, poliedri, prismi indefiniti, strati, diedri e angoloidi; ogni sottoclasse è finita o di 1ª specie; ma tutte insieme formano una classe di 2ª specie assoluta; e se chiamiamo finiti i poliedri, potremo dire che i prismi indefiniti costituiscono una classe di grandezze infinite di 1° ordine; gli strati una classe di grandezze infinite 2° ordine, e i poliedri e gli angoloidi una classe di grandezze infinite di 3° ordine.

Osservo intanto che, se non esplicitamente, almeno implicitamente, in tutti i corsi di geometria si dice che le grandezze finite si possa trascurare in confronto delle infinite, e queste in confronto degl'infiniti di ordine superiore. Infatti, quando si considerano due rette parallele, e si dice che gli angoli corrispondenti sono eguali, si dice in sostanza che una striscia è trascurabile in confronto di un angolo. Anzi in un vecchio libro, il trattato di geometria del Luvini, è esposta una pretesa dimostrazione del postulato delle parallele fatta dal sig. Bertrand basata su questi principi. Il ragionamento certamente non regge, ed è ormai noto che il postulato delle parallele è indimostrabile; ma non si può asserire che esso non si possa trasformare, e far dipendere da un altro.

Ora, se si potesse stabilire elementarmente il concetto degl'infiniti dei vari ordini, e il postulato che le grandezze finite o infinite sono trascurabili in confronto degl'infiniti degli ordini superiori, come in calcolo infinitesimale si stabilisce che gl'infinitesimi degli ordini superiori sono trascurabili in confronto delle grandezze finite o infinitesime di ordine inferiore, molte dimostrazioni di teoremi fondamentali della geometria diverrebbero di una semplicità sorprendente, e lo stesso postulato delle parallele verrebbe a collegarsi con questi concetti. Ecco degli esempi.

a) Teorema. — *La somma degli angoli esterni di un poligono convesso è uguale a due angoli piatti.*

Infatti la somma degli angoli esterni di un poligono convesso forma tutto il piano (ossia due angoli piatti) meno il poligono ABCDE, che, essendo finito, è trascurabile in confronto di un infinito di 2° ordine.

Corollario. — *La somma degli angoli interni di un poligono di* n *lati è* n — 2 *piatti, e in particolare quella degli angoli di un triangolo è eguale ad un angolo piatto.*

b) Premessa la dimostrazione del teorema. " Se due rette tagliate da una terza fanno gli angoli corrispondenti uguali, esse non s'incontrano ", si può stabilire la definizione di *striscia* e *semistriscia*, ed osservare che l'angolo è infinito rispetto alla striscia. Si deduce allora il

Teorema. — *Se due rette parallele sono tagliate da una terza, gli angoli coniugati interni sono supplementari.*

Infatti la loro somma è un angolo piatto più una semistriscia trascurabile.

Corollario. — *Per un punto non si può condurre che una parallela ad una retta data.*

Altrimenti un angolo dovrebbe essere uguale ad un altro angolo che è una sua parte.

c) Teorema. — *La somma dei diedri esterni di un angoloide convesso è minore di due diedri piatti.*

Infatti essa è uguale a tutto lo spazio (ossia a due diedri piatti) diminuito della somma dell'angoloide e del suo opposto al vertice, la quale è dello stesso ordine d'infinito dell'intero spazio. Perciò la somma suddetta dei diedri esterni di un angoloide è minore di due diedri piatti.

Corollario. — *La somma dei diedri interni di un angoloide convesso di* n *faccie è compresa fra* n *e* n — 2 *diedri piatti.*

Infatti, indicando con E la somma dei diedri esterni, con I quella dei diedri interni, con p un diedro piatto, si ha

$$\mathrm{I} + \mathrm{E} = np,$$

ed essendo

$$\mathrm{E} < 2p,$$

segue

$$np > \mathrm{I} > (n-2)\,p.$$

6. Questi esempi, ed altri che si potrebbero trovare, saranno sufficienti a dimostrare l'importanza della questione, e spero che invoglieranno altri più abili di me ad occuparsene. Questione che per concludere si può riassumere in questi termini.

Se, e in qual modo, si possa negli elementi di geometria stabilire con assoluta esattezza per mezzo di un postulato il concetto di classi di grandezze finite e infinite dei vari ordini, e far dipendere da esso i quattro postulati delle parallele, della equivalenza, di Archimede, della inversibilità del segmento, dell'angolo, ecc.

Tengo però a ripetere che io propongo la quistione, ma non pretendo minimamente di risolverla. Anzi osservo che mentre è indiscutibile l'utilità di fondere più postulati in uno, di semplificare certe dimostrazioni, mettendo in certa guisa in evidenza la causa prima di certe verità, non è egualmente certa l'opportunità di introdurre fin dal principio il concetto d'infinito, che è abbastanza difficile e delicato, dato anche che si riesca a farlo con tutto il rigore desiderabile.

G. LAZZERI.

APPENDICE

AI FONDAMENTI PER UNA TEORIA GENERALE DEI GRUPPI

DI RODOLFO BETTAZZI

(v. Periodico, fasc. 3, 4, 5 e 6 dell'anno 1896)

1. Durante la stampa degli ultimi capitoli del mio lavoro è comparsa negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino (Anno 1896-97) una Nota del Prof. Burali-Forti, col titolo " Le classi finite ", nella quale egli dimostra un teorema da cui si può trarre profitto per togliere un dubbio che io avevo accennato sussistere circa la validità di una proprietà esposta dal Dedekind.

Nei " Fondamenti " io ho dimostrato (§ 96 Cor. 2°) che è infinito (cioè, secondo le mie denominazioni, non finito, ossia che non si può rendere semplicemente ordinato e limitato) ogni gruppo sviluppabile (cioè equivalente ad una sua parte propria); ma ho accennato (§ 96 oss. 1ª e Nota) che la inversa non è provata vera, non essendo priva di obiezioni la dimostrazione datane dal Dedekind. Ricordando che il Dedekind dice *infinito* un gruppo equivalente ad una sua parte propria (gruppo *sviluppabile* secondo il mio linguaggio) e *finito* un gruppo che non è infinito, dal mio lavoro si deduce che:

a) i gruppi che sono finiti secondo la mia definizione sono tali anche secondo quella del Dedekind (§ 59 Cor. 1°);

b) i gruppi che sono infiniti nel senso del Dedekind (sviluppabili) sono tali anche nel senso usato da me (§ 96 Cor. 2°);

proposizioni equivalenti fra loro, delle quali restavano dubbie le inverse.

Le ricerche del Prof. Burali-Forti portano a concludere che queste inverse sussistono.

2. Il Prof. Burali-Forti parte dalla definizione dei gruppi finiti ed infiniti data dal Dedekind (v. Burali-Forti, Nota citata, § 2. Prop. 1, 2). Per ogni gruppo finito G definisce poi un gruppo Γ, che dice *gruppo (classe) normale formato cogli enti di* G, colle seguenti leggi: (ivi § 3 Prop. 1) — 1° i suoi elementi sono gruppi non nulli di enti di G. — 2° se un elemento di Γ è di potenza minore od uguale ad un altro pure di Γ, il primo è parte del secondo (in particolare due elementi equivalenti sono identici, o, sotto altra forma, tutti gli elementi distinti di Γ hanno disugual potenza) — 3° in Γ vi è un elemento che consta di un solo ente di G (dirò tale elemento l'elemento *unitario* di Γ) — 4° per ogni elemento G_p di Γ che sia diverso dall'intero gruppo G, esiste in G un altro elemento G_{p+} contenente un ente di più, che sia distinto da tutti gli enti già contenuti in G_p (elemento *seguente* a G_p: io dirò inoltre G_p *precedente* a G_{p+})

Per un simile gruppo egli dimostra, fra le altre, queste proprietà:

1° che esso è finito (ivi § 3 Prop. 9).

2° che in esso ogni elemento, che non sia quello unitario, ha il precedente (Prop. 10).

3° che di esso fa parte G (Prop. 11).

4° che in esso si verifica il principio d'induzione (Prop. 12).

5° che da ogni gruppo finito (s'intende secondo Dedekind) si può dedurre almeno un gruppo normale formato coi suoi enti (Prop. 13).

3. È facile allora il vedere che ogni gruppo finito (secondo Dedekind) può rendersi semplicemente ordinato e limitato.

Infatti dal gruppo finito G si deduca un gruppo normale Γ, che esiste sempre, secondo la Prop. 13 del Prof. Burali-Forti ora citata: poi si consideri il gruppo G_0 costituito dagli enti di G, ciascuno dei quali è o l'ente che costituisce l'elemento unitario di Γ, o l'ente che si ottiene facendo la differenza fra ciascun elemento di Γ ed il suo precedente.

Tale gruppo coincide con G. Ed invero:

I. Ogni ente di G comparisce in G_0. Perchè se α è un ente di G, esso appartiene a tutti gli elementi di Γ, quindi anche a quello unitario, e perciò al gruppo G_0. Se α non appartiene a tutti, ma manca in qualcuno (in tutti no, appartenendo almeno a G che è elemento di Γ) non può mancare nel seguente di ogni elemento di Γ in cui manca, perchè dovrebbe, per il principio di induzione di Γ, mancare in tutti; e quindi se α mancherà in un elemento G_p e non nel seguente G_{p+}, verrà ad appartenere a G_0, perchè α sarà la differenza fra G_{p+} e G_p.

II. Ogni ente di G comparisce in G_0 una volta sola. Perchè infatti se α comparisce una volta come differenza fra G_{p+1} e G_p ed un'altra come differenza fra G_{q+1} e G_q, dove G_p è distinto da G_q, allora essendo p. es. G_p di potenza minore a G_q, sarebbe G_{p+1} di potenza minore od uguale a G_q, e quindi per la definizione dei gruppo normale sarebbe G_{p+1} parte, propria o no, di G_q, ed in G_q comparirebbe x, e non potrebbe x essere la differenza fra G_{q+1} e G_q per il modo con cui si prende il seguente di G_q.

Se in tale gruppo G_n si prende come ente σ (§ 31) di un ente x che provenga dalla differenza fra G_{p+1} e G_p quello che proviene dalla differenza dei due elementi seguenti a questi, e come ente originario quello costituente l'elemento unitario di Γ, il gruppo risulta chiaramente bene ordinato, ed è anche limitato avendo per ente finale la differenza fra l'elemento G ed il suo precedente. Inoltre esso è catena dal suo ente originario, giacchè sodisfa chiaramente al principio d'induzione a cui sodisfa Γ. Ciò è quanto si voleva dimostrare.

4. Si vede da quanto precede che un gruppo che è finito secondo Dedekind è finito anche nel senso usato da me. Perciò è vera la inversa della *a*) e quindi anche quella della *b*).

I concetti di gruppo finito e di infinito dati nei miei " Fondamenti „ non si differenziano dunque *per la sostanza* da quelli del Dedekind, come prima della dimostrazione della Prop. 13 del Prof. Burali-Forti era legittimo il dubitare (v. Introduzione e § 96 dei miei " Fondamenti „ ed anche il § 10 della mia Nota " Gruppi finiti ed infiniti di enti „).

La denominazione di gruppo sviluppabile potrà quindi d'ora in là essere soppressa, equivalendole l'altra di gruppo infinito; salvo a mantenerla provvisoriamente nello svolgere la teoria, fin quando si veggo opportuno di usare il relativo concetto anche senza aver dato la definizione di gruppi finiti ed infiniti.

5. La coincidenza delle due definizioni di gruppo finito le dimostra opportune entrambe, perchè ciascuna dà o come punto di partenza o come teorema le due diverse proprietà, ugualmente importanti, delle quali, da qualunque punto di vista si consideri, interessa sia dotato un gruppo che voglia dirsi finito.

Quale delle due definizioni sia da preferirsi, non spetta a me qui il decidere. Il Prof. Burali-Forti obietta alla mia definizione che non è necessario il ricorrere al concetto di ordine per definire il gruppo finito, non avendone egli fatto uso. Questa osservazione è scientificamente giusta; ma giacchè per mettere in rilievo le proprietà più notevoli del gruppo finito egli ricorre ai gruppi normali dai quali quasi spontaneamente scaturisce la proprietà dell'ordinabilità che così trovasi inclusa anche nel suo modo di considerare il gruppo finito, io credo che, didatticamente, sia più conveniente il ricorrere esplicitamente al concetto di ordine, che può gettare assai luce sulla definizione di gruppo finito. Resta inoltre il fatto che, seguendo il Dedekind, occorre definire prima il gruppo infinito e poi il gruppo finito, o dare questo con una proprietà negativa (impossibilità che una sua parte propria sia equivalente all'intero gruppo), mentre colla mia definizione si dà prima direttamente l'idea di gruppo finito; il che a mio credere, specialmente nell'insegnamento, offre un notevole vantaggio.

Torino, Gennaio 1897.

SUL NUMERO DELLE CIFRE DEL PERIODO
NELLE FRAZIONI DECIMALI PERIODICHE (*)

1. È noto che la frazione *propria irriducibile* $\frac{a}{b}$, il cui denominatore b è primo con 2 e con 5, convertita in decimale dà luogo a una frazione *periodica semplice;* da questa si ritorna alla generatrice $\frac{a}{b}$ per mezzo della frazione avente per numeratore il periodo P e per denominatore $10^n - 1$, essendo *n il numero delle cifre del periodo*, compresi gli zeri che possono precedere le cifre significative di P; si ha cioè

$$\frac{a}{b} = \frac{P}{10^n - 1},$$

e quindi, poichè $\frac{a}{b}$ è irriducibile, dovrà essere $10^n - 1$ divisibile per b, ossia

(1) $$10^n \equiv 1 \pmod{b},$$

dove n è il *minimo* esponente, diverso da zero, che soddisfa alla (1). Come si vede il valore di n è affatto indipendente da a, epperò potrebbe togliersi la restrizione ammessa $a < b$; e così pure rispetto a b, che abbiamo supposto primo con 2 e con 5, non s'è nulla tolto alla generalità della quistione, perchè il valore di n dipenderà sempre e soltanto dai fattori di b differenti dal 2 e dal 5; questi ultimi fattori, come si sa, influiscono solamente sull'*antiperiodo.*

In quel che segue chiameremo per brevità, *n e b numeri corrispondenti.*

2.(**) *Proprietà fondamentale del numero* n. — Dalla teoria delle congruenze si ha che la (1) è sempre verificata (teorema di Fermat generalizzato) dal numero $\varphi(b)$, indicando con questa funzione il numero dei numeri inferiori a b e primi con esso; come pure sappiamo che il valore di n deve esser dato da un divisore di $\varphi(b)$, non escluso $\varphi(b)$ stesso. *Questa proprietà, sebbene non determini il valore di* n, *tuttavia lo limita ai soli divisori di* $\varphi(b)$.

(*) Questo lavoro che contiene la risoluzione delle quistioni 327, 328, 329, 330, 331 proposte dal Prof. Bonolis nel 1° fascicolo del corrente anno fu inviato dall'autore al Prof. Frattini fino dallo scorso Nov., ma l'attuale direzione non ne ebbe notizia altro che dopo la pubblicazione del 1° fasc.: i professori Bonolis e Bettini dunque sono giunti agli stessi risultati, ignorando ciascuno il lavoro dell'altro. (Nota di G. LAZZERI).

(**) Le proprietà accennate in questo e nel seguente § si possono leggere, esposte con metodo anche più elementare, nella nota " sulle frazioni decimali periodiche " del compianto Prof. Lugli, inserita nel Vol. II, fasc. 6° del presente Periodico.

Se b è primo si ha

$$\varphi(b) = b - 1,$$

mentre invece quando siano α, β . . . i fattori primi disuguali di b, si ha

$$\varphi(b) = b\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\ldots \qquad < b - 1;$$

risulta pertanto che il massimo valore di n, cioè $b - 1$, può aversi solamente nel caso che b sia primo.

3. *Il valore di* n *si può determinare per mezzo dei numeri* n_1, n_2 . . . *che corrispondono ai fattori primi disuguali di* b. — Supponiamo in primo luogo $b = \alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma \ldots .$, con $\alpha, \beta, \gamma \ldots .$ fattori primi tutti differenti tra loro, e si siano trovati i minimi esponenti che soddisfano alle congruenze

$$\begin{array}{ll} 10^{n_1} \equiv 1 & \pmod{\alpha} \\ 10^{n_2} \equiv 1 & \pmod{\beta} \\ 10^{n_3} \equiv 1 & \pmod{\gamma} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

Poichè $\alpha, \beta, \gamma \ldots .$ sono primi fra loro, il minimo comune multiplo di n_1, n_2, n_3, ... sarà il valore di n che corrisponde a b, non potendosi con un numero più piccolo verificare contemporaneamente la congruenza $10^n \equiv 1 \pmod{b}$ e tutte le antecedenti.

Pel caso di più fattori uguali limitiamoci a porre

$$b = \alpha^h$$

con $h > 2$, e dimostriamo che *se* n_1 *corrisponde ad* α, $n_1\alpha^{h-1}$ *dovrà corrispondere a* b, *purchè non sia*

$$10^{n_1} \equiv 1 \qquad \pmod{\alpha^2}.$$

Infatti per quel che s'è detto, dovendosi avere

$$10^{n_1} \equiv 1 \qquad \pmod{\alpha}$$

e

$$10^{n} \equiv 1 \qquad \pmod{b} \text{ e, a fortiori, } \pmod{\alpha}$$

sarà necessariamente $n = n_1 K$; e perchè $10^{n_1} - 1$ è divisibile per α e non per α^2, si avrà

(2) $$10^{n_1} = 1 + \alpha q,$$

dove q è primo con α. Elevando la (2) alla potenza K, e sviluppando colla formola del binomio, si ha

$$10^n - 1 = \alpha K q + \frac{K(K-1)}{2}\alpha^2 q^2 + \ldots\ldots;$$

questa egnaglianza, divisa successivamente per $\alpha^2, \alpha^3 \ldots$, ci porta facilmente a concludere che deve essere K multiplo di α^{h-1}; e perchè è sufficiente elevare la (2) alla potenza α^{h-1}, affinchè si abbia $10^n \equiv 1 \pmod{b}$, sarà $K = \alpha^{h-1}$ e quindi $n = n_1 \alpha^{h-1}$.

Se poi insieme alla $10^{n_1} \equiv 1 \pmod{\alpha}$, si ha pure

$$10^{n_1} \equiv 1 \qquad \pmod{\alpha^s}$$

con $2 \leq s \leq h$, si avrà subito con ragionamento analogo al precedente
$n = n_1 \alpha^{h-s}$. Del resto il caso ora considerato è assai raro, come osserva il Lucas (Théorie des Nombres p. 423), perchè, per numeri primi inferiori a 1000, solamente il 3 e il 487 verificano contemporaneamente le congruenze

$$10^{n_1} \equiv 1 \qquad (\text{mod } \alpha) \text{ e } (\text{mod } \alpha^2).$$

Riassumendo, risulta che « *se* $b = \alpha^h . \beta^k \ldots$, *il corrispondente valore di* n *sarà sempre dato dal minimo multiplo comune dei vari prodotti* $n_1 \alpha^{h-s}$, $n_2 \beta^{k-t} \ldots$, *che separatamente si ricavano da* $\alpha^h, \beta^k \ldots$ »; epperò in seguito supporremo sempre che b sia uguale a un numero primo p differente dal 2 e dal 5.

4. Teorema. — *Il valore di* n, *che corrisponde a un numero primo* p, *è dato dal quoto di* p − 1 *per il massimo comun divisore di* p − 1 *e dell'indice di 10 rispetto al modulo* p.

I numeri r, pei quali $p - 1$ è il primo valore dell'esponente, per cui si abbia $r^h \equiv 1$ (mod p) si chiamano *radici primitive* di p, e hanno la proprietà di dare un sistema di $p - 1$ resti incongrui per tutti i valori da 1 a $p - 1$ dell'esponente; esiste pertanto un numero x (indice di 10 rispetto alla base r), per il quale si ha

(3) $$r^x \equiv 10 \qquad (\text{mod } p).$$

Elevando alla potenza n, si ha

$$r^{xn} \equiv 10^n \equiv 1 \qquad (\text{mod } p);$$

e dovendo essere xn = multiplo di $p - 1$, il valore di n sarà dato dal quoto $\frac{p-1}{m}$, dove m è il m. c. d. di $p - 1$ e x. Così il problema che ci eravamo proposti è completamente risoluto servendoci *d'una tavola delle radici primitive e degli indici dei numeri primi*; in essa ritroveremo subito se il 10 è o no radice primitiva di p; nel primo caso

$$n = p - 1;$$

nel secondo caso, calcolato il m. c. d. m di $p - 1$ e dell'*indice di 10*, si ha

$$n = \frac{p-1}{m}.$$

Osservazione. — Indipendentemente dalle *tavole* ora nominate, poco diffuse e sempre abbastanza ristrette, in moltissimi casi si possono stabilire dei criteri per avere il valore di n o almeno la forma di questo numero, come vedremo in seguito. Del resto per numeri p che non si trovino in dette tavole, si può ottenere agevolmente il corrispondente valore di n, operando per congruenze e tenendo conto della proprietà fondamentale, per la quale sappiamo che in questo caso n deve essere un divisore di $p - 1$.

5. Teorema. — *Per numeri primi della forma*

8K ± 3	e *terminati*	*per* 1	*ovvero per*	9
8K ± 1	»	» 3	»	7

il corrispondente valore di n *è sempre pari.*

Ripigliamo la relazione (3)

$$r^x \equiv 10 \qquad (\text{mod } p),$$

e supponiamo

$$10^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \qquad (\text{mod } p),$$

ammettiamo cioè che il 10 sia *non residuo quadratico di* p, ciò che il Legendre esprimeva simbolicamente coll'eguaglianza $\left(\frac{10}{p}\right) = -1$. Elevando la (3) alla potenza $\frac{p-1}{2}$, si ha

$$r^{x.\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \qquad (\text{mod } p),$$

e questa congruenza non potrebbe sussistere, se fosse x divisibile per 2, perchè in tale ipotesi il 2° membro deve essere 1; pertanto essendo x dispari, $x.n$ multiplo di $p-1$, e quindi pari, sarà n numero pari, ed anzi avrà per fattore la massima potenza di 2 contenuta in $p-1$; da ciò concludiamo: n *è sempre pari in tutti i casi in cui il 10 è non residuo quadratico di* p.

È facile ora determinare la forma di tutti i numeri p di cui il 10 è *non residuo*, servendoci delle proprietà del simbolo di Legendre. Nel nostro caso abbiamo

$$\left(\frac{10}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{5}{p}\right) = -1.$$

Ricordiamo inoltre che

$$\left(\frac{2}{p}\right) = 1 \quad \text{se } p \text{ è della forma } 8K \pm 1,$$
$$\left(\frac{2}{p}\right) = -1 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 8K \pm 3;$$

di più per la legge di reciprocità

$$\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) = \left(\frac{\alpha}{5}\right),$$

ove α è il resto della divisione di p per 5, ove cioè α è la cifra delle unità di p, diminuita, se occorre, di 5. Quando il valore di α è 1 ovvero 4, ossia quando p termina per 1 ovvero per 9

$$\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}\right) = 1;$$

se poi α è 2 ovvero 5, cioè quando p termina per 7 ovvero per 3, si ha

$$\left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right) = -1;$$

tanto che

$$\left(\frac{5}{p}\right) = 1 \quad \text{quando } p \text{ termina per 1 ovvero per 9}$$
$$\left(\frac{5}{p}\right) = -1 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 3 \quad \text{»} \quad 7.$$

Combinando tra loro i resultati ottenuti, relativi a $\left(\frac{2}{p}\right)$ e a $\left(\frac{5}{p}\right)$, concludiamo che si avrà $\left(\frac{10}{p}\right) = -1$, ossia che il valore di n sarà pari, quando il numero p soddisfa all'una o all'altra delle condizioni poste nel teorema.

Osservazione. — È importante per la pratica riconoscere *a priori* quando n è pari, perchè in tal caso trovato il 1° semiperiodo decimale corrispondente alla frazione $\frac{a}{b}$, l'altro semiperiodo è formato colle cifre complementari, rispetto a 9, delle antecedenti. (Vedi Mem. citata.)

6. *Classi di numeri* p *pei quali si ha* n = p − 1. — Tra i numeri considerati nel teorema antecedente, e tra essi soltanto, vi saranno certamente quelli per cui $n = p - 1$, tali cioè che hanno per radice primitiva il 10, e che quindi danno luogo al massimo valore di n possibile. Se ne possono trovare alcune classi molto semplicemente:

1° Ai numeri primi di Gauss maggiori di 5, dati dalla formula $p = 2^h + 1$, dove h è una potenza di 2 deve corrispondere $n = p - 1$, perchè, come sopra s'è detto, n deve essere divisibile per la massima potenza di 2 contenuta in $p - 1$; questi numeri p finora conosciuti sono: 17, 257, 65537.

2°. Se p è della forma voluta, ed è uguale a $2p_1 + 1$, con p_1 primo, si avrà sempre

$$n = 2p_1 = p - 1$$

tranne il caso di $p = 11$, unico numero che verifichi la congruenza $10^2 \equiv 1 \pmod{p}$.

Si trovano in queste condizioni i numeri

59, 167, 179, 263, 383. . . . . . 863, etc.

3°. Qualunque sia il numero primo p_1, purchè terminato per 7, se si ha

$$p = 4p_1 + 1,$$

si avrà pure in ogni caso $n = p - 1$, perchè nessun numero p di questa forma verifica la congruenza

$$10^4 \equiv 1 \pmod{p};$$

Esempi: Da

$$p_1 = 7, 37, 67, 97. \ldots\ldots$$

si ottiene

$$p = 29, 149, 269, 389. \ldots\ldots$$

Nessun altro numero p_1 che termini con cifra differente da 7 può dare di tali numeri p, perchè $4p_1 + 1$ risulterebbe della forma 8K − 3 e terminato per 3 ovvero per 7.

4°. In generale i numeri primi terminati per 3 ovvero per 7 e della forma $2^h p_1 + 1$, con $h > 2$ e p_1 primo, avranno per radice primitiva il 10, ad eccezione di quei pochi che potessero verificare la congruenza

$$10^{2^h} \equiv 1 \pmod{p}$$

e fossero della forma voluta.

Così per es. 233, 857 etc. e tutti gli altri della forma $2^3p_1 + 1$ hanno sempre per radice primitiva il 10, ad eccezione del 137, unico per cui si abbia

$$10^8 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Lo stesso dicasi dei numeri della forma $2^4p_1 + 1$, nessuno dei quali, eccettuato il 17, verifica la congruenza

$$10^{16} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Per es. 113, 593, 977, 1553, etc.

Osservazione. — Siccome i numeri p delle classi ora considerate non possono terminare che per una delle cifre 3, 7, 9, s'intende come siano poco frequenti i numeri terminati per 1, e che hanno il 10 per radice primitiva; i primi che si trovano sono 61, 131, 181, 461.

7. *Condizione necessaria e sufficiente perchè* n *sia dispari.* — Le condizioni sufficienti stabilite nel § 5, affinchè n sia pari, non sono tuttavia necessarie, tanto che n può esser pari anche in altri casi. Prendiamo perciò a considerare i numeri primi p, che hanno il 10 per residuo quadratico; quanto alla loro forma, per quel che s'è detto al § 5, dovrà essere

(4)
$p = 8\,\mathrm{K} \pm 1$ e terminato per 1 ovvero per 9
$p = 8\,\mathrm{K} \pm 3$ » » 3 » 7,

e noi sappiamo solamente che per essi deve aversi

$$10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

In tale ipotesi, quando $p = 2d + 1$, con d dispari, anche n è certamente dispari, e per di più se d è primo si ha addirittura $n = d$; per es. da $p = 107$, 227, 3119.... abbiamo senz'altro $n = 53$, 113, 1559....; ma quando $p = 2^h\, d + 1$ con $h > 1$, può benissimo il valore di n esser pari come avviene pei numeri:

$$p = \begin{cases} 13,\ 197,\ 293 \ldots\ldots \text{ della forma } & 4d + 1 \\ 89,\ 281,\ 2521 \ldots\ldots \quad » & 8d + 1 \\ 241,\ 1009 \ldots\ldots\ldots \quad » & 16d + 1 \text{ etc.} \end{cases}$$

E difatti per avere n dispari non basta che sia il 10 residuo quadratico di p, ma, come sappiamo, deve essere almeno residuo d'ordine 2^h, dove 2^h è la massima potenza di 2 contenuta in $p - 1$; si riconosce poi, che quest'ultima condizione è anche sufficiente, ma quando non è soddisfatta ancora per numeri della forma (4) si ha che n è pari. Spetta alla teoria generale dei residui determinare con *metodi facilmente applicabili* le condizioni per le quali il 10 è un residuo d'ordine 2^h dei numeri $p = 2^h\, d + 1$;

risoluta questa quistione ben s' intende il vantaggio che se ne può trarre, quando si pensi che i pochi resultati, che siamo venuti accennando, sono stati ricavati dal considerare il 10 come *residuo* o *non residuo quadratico*.

8. *Tavola dei valori di* n *corrispondenti ai numeri primi sino a 277:*

p	n	p	n	p	n
3	1	79	13	179	178
7	6	83	41	181	180
11	2	89	44	191	95
13	6	97	96	193	192
17	16	101	4	197	98
19	18	103	34	199	99
23	32	107	53	211	30
29	28	109	108	223	222
31	15	113	112	227	113
37	3	127	42	229	228
41	5	131	130	233	232
43	21	137	8	239	7
47	46	139	46	241	30
53	13	149	148	251	50
59	58	151	75	257	256
61	60	157	78	263	262
67	33	163	81	269	268
71	35	167	166	271	5
73	8	173	43	277	69

L'opportunità di avere una tavola abbastanza estesa dei valori di n sarà sufficientemente spiegata dalle seguenti

Applicazioni: 1° Vogliasi trovare il numero n corrispondente a

$$b = 113778 = 2 \,.\, 3^3 \,.\, 7^2 \,.\, 43\,;$$

prescindiamo dal fattore 2 di b e sotto gli altri scriviamo i valori $n_1\alpha^{h-s}$ corrispondenti (V. § 3), con l'avvertenza che $10 \equiv 1 \pmod{3^2}$

$$\begin{array}{ccc} 3^3 & 7^2 & 43 \\ 3 & 6 \,.\, 7 & 21; \end{array}$$

ora essendo 42 il m. m. c. di questi ultimi numeri sarà $n = 42$.

2°. Serviamoci dei valori di n per scomporre in fattori primi le espressioni della forma $10^h \pm 1$; per es. $10^{16} - 1$: scriviamo in una riga tutti i divisori del 16, e sotto di essi i numeri p corrispondenti quali si trovano nella tavola superiore

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3^2 & 11 & 101 & 73 \,.\, 137 & 17. \end{array}$$

Il prodotto di questi fattori, eccettuato il 17, dà $10^8 - 1$, epperò gli altri divisori richiesti, tra cui il 17, si avranno da $10^8 + 1$ e saranno tutti della forma $16k + 1$; fatto quest'ultimo calcolo, finalmente otteniamo:

$$10^{16} - 1 = 3^2 . 11 . 17 . 73 . 101 . 137 . 5882353.$$

Il caso ora presentatosi, in cui i divisori di $10^8 + 1$ sono tutti della forma $16k + 1$, vale soltanto quando l'esponente di 10 è una potenza di 2; ma in generale per la scomposizione di $10^h + 1$ dovremo ricercare tutti i numeri p che corrispondono a $n = 2^s d$, dove 2^s indica la massima potenza di 2 contenuta in $2h$, e d ognuno dei divisori dispari di h, l'unità compresa; infatti dovendosi scomporre $10^{2h} - 1 = (10^h - 1)(10^h + 1)$, tutti i fattori primi di quest'espressione si avranno in corrispondenza dei vari divisori di $2h$, i quali si possono ordinare in due gruppi: se poniamo nel primo gruppo tutti i divisori di h, nel secondo vi rimarranno soltanto quelli della forma $2^s d$; e perchè ai numeri del primo gruppo corrispondono tutti i fattori primi di $10^h - 1$, dovranno necessariamente ai numeri del secondo gruppo corrispondere i fattori primi di $10^h + 1$, i quali pertanto saranno della forma $p = 2^s dk + 1$. Abbiasi pur es. $10^9 + 1$:

$$\begin{array}{llll} n = & 2, & 6, & 18 \\ p = & 11 & 7 . 13 & 19 \end{array}$$

e quindi

$$10^9 + 1 = 7 . 11 . 13 . 19 . 52579.$$

Osimo, novembre 1896.

B. Bettini

CORDE NOTEVOLI DEL TRAPEZIO

1. Prendiamo a considerare un trapezio qualunque AA'BB', le cui basi AA', BB' indicheremo risp. con a e b $(a \geqq b)$. Diremo, per brevità, corda u un segmento EE' parallelo alle basi e terminato ai lati obliqui. Congiunti coi vertici i due punti F e F', nei quali la corda è segata dalle diagonali del trapezio, verranno determinati sulle due basi rispettivamente due punti D e D' e altri due C, C'. È chiaro intanto che essendo:

$$\mathrm{EF : AA' = E'F' : AA'}$$

sarà EF = E'F', e quindi anche EF' = E'F. Ne segue subito che sarà $\mathrm{AD = A'D'} = x$, e $\mathrm{BC = B'C'} = y$.

Conducendo poi da un estremo della corda la parallela a un lato obliquo, e dicendo h_a, h_b le distanze che essa ha dalle basi, si rendono evidenti le proporzioni:

$$(\mathrm{I}) \qquad a - u : u - b = h_a : h_b = x : b = a : y$$

Confrontando il primo rapporto col terzo e col quarto rispettivamente, se ne deduce

$$(\mathrm{II}) \qquad u = \frac{b\,(a + x)}{b + x} = \frac{a\,(b + y)}{a + y};$$

e confrontando il terzo col quarto,

$$(\mathrm{III}) \qquad xy = ab.$$

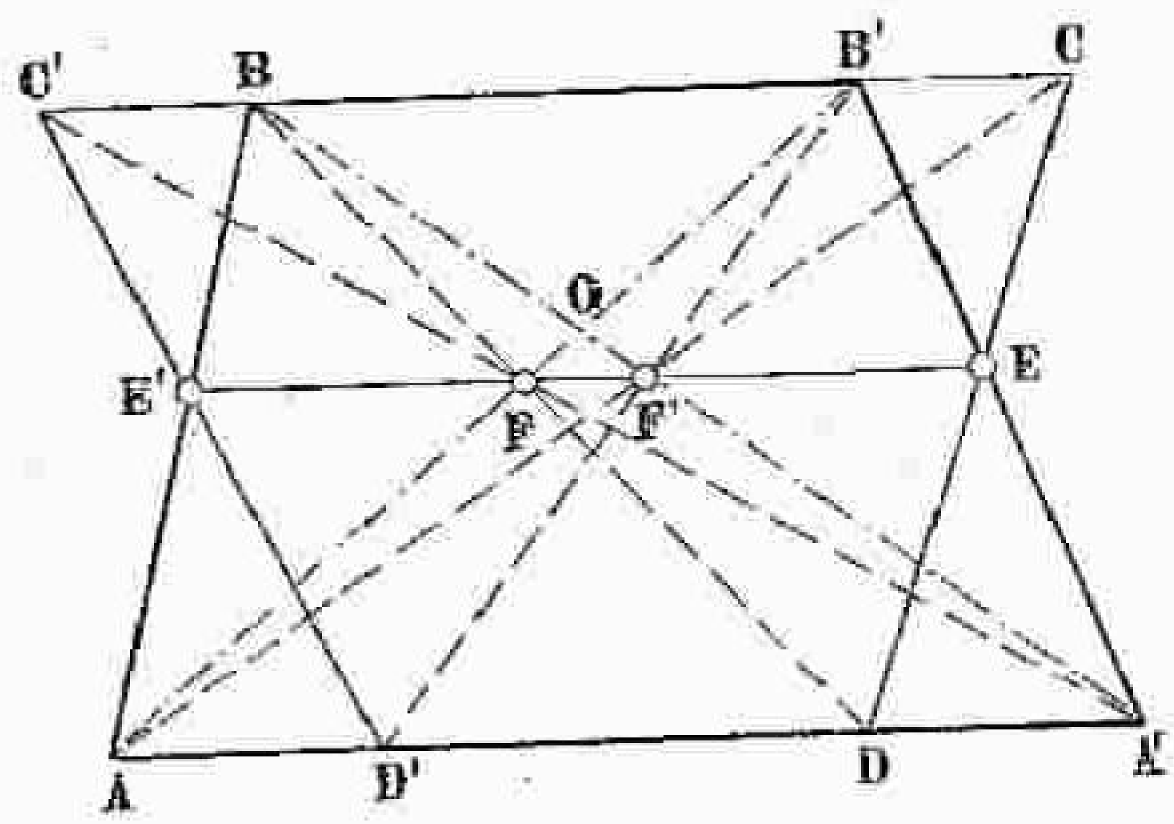
Quest'ultima eguaglianza potendosi anche scrivere

$$a : x = y : b,$$

dà, a causa della (I)

$$a - x : y - b = x : b = h_a : h_b.$$

E se ne deduce che i triangoli A'DE, B'CE sono simili, epperò che D, E, C sono per diritto. Saranno parimente per diritto D', E' C'.



Otteniamo in tal modo due trapezi ABCD, A'B'C'D', che per un momento diciamo *annessi* al dato, l'area dei quali sta all'area del dato nel rapporto $\dfrac{x + y}{a + b}$.

2. Diremo simmetrica di u la corda u' che dista da una base quanto u dista dall'altra. Per la (I) si ha

$$a - u : u - b = u' - b : a - u',$$

onde

$$(\mathrm{IV}) \qquad u + u' = a + b.$$

Due corde simmetriche hanno quindi somma costante. Dalla (I), e precisamente dalla $h_a : h_b = x : b$, si ricava che le x di due corde simmetriche hanno costantemente il prodotto b^2. Analogamente si prova che le y hanno costantemente prodotto $= a^2$.

Si diranno invece *coniugate* due corde che hanno costantemente il prodotto $= ab$.

3. Vediamo anzitutto quando avvenga che i trapezi annessi equivalgono al dato. Occorrerà a tal uopo che $x + y$ sia $= a + b$. Ora essendo già, per la (III), $xy = ab$, dovrebbe essere $x = a$, $y = b$, oppure $x = b$, $y = a$.

Nel primo caso i trapezi annessi vengono a coincidere col dato, i punti F e F' coincidono in O, e la corda passa quindi per il punto d'incontro delle diagonali, ed è ivi dimezzata. Oltre a ciò avendosi

$$a - u : u - b = a : b,$$

la u risulta media armonica fra a e b, epperò eguale a $\frac{2\,ab}{a + b}\cdot$ (*)

Nel secondo caso avendosi dalla (I) $h_a = h_b$, la corda passa a eguale distanza dalle basi. Oltre a ciò, poichè $a - u = u - b$, sarà $u = \frac{a + b}{2}$, cioè u è media aritmetica fra a e b, cosa del resto notissima.

Se infine si pone la condizione che uno, epperò anche l'altro trapezio annesso diventi un parallelogrammo, dovendo allora essere $x = y = \sqrt{ab}$, per la (III), si vede che la corda risulterebbe eguale alla base di questi parallelogrammi stessi, epperò alla *media geometrica* fra a e b.

4. Rispetto alle corde simmetriche osserviamo anzitutto che la simmetrica di sè stessa è per la (IV) $= \frac{a + b}{2}$, cioè la *media aritmetica* fra le basi, il che è noto. La simmetrica invece della corda u, che soddisfa alla $a - u : u - b = a : b$, cioè della *media armonica*, soddisfarà alla $a - u' : u' - b = b : a$, essendo il rapporto $a - u' : u' - b$ eguale a quello delle distanze fra la u' e le basi. Ciò è quanto dire che la u' sarà eguale alla *media antiarmonica* $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$ fra le basi.

Rispetto invece alle corde coniugate si vede subito dalla definizione data, che la coniugata di sè stessa è $\sqrt{ab}$, cioè la *media geometrica;* e la coniugata della *media aritmetica* è la *media armonica.*

5. Abbiamo così trovato quattro corde, già notevoli per altre loro proprietà, le quali servono a rappresentare in modo affatto intuitivo le quattro medie fra a e b, cioè l'*armonica* $\frac{2\,ab}{a + b}$, la *geometrica* $\sqrt{ab}$, l'*aritmetica* $\frac{a + b}{2}$, e l'*antiarmonica* $\frac{a^2 + b^2}{a + b}\cdot$

(*) Detta f una delle due parti eguali in cui la corda armonica è divisa da O, si avrebbe $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ che è la nota formola delle lenti. E si ha così la costruzione grafica che il Sig. *Cole* ha dato recentemente nella sua nota, *Nuovo metodo grafico per le lenti*, inserita nel Philosophical Magazine (vol. 41, Marzo 1896 — Vedi *Nuovo Cimento* — luglio 1896). Analoga costruzione si avrebbe per gli specchi.

Queste notizie, che mi pare aggiungono interesse all'argomento, devo alla cortesia dell'amico Prof. Gresci.

L'*armonica* è quella corda che passa per O, l'*antiarmonica* è la sua simmetrica, l'*aritmetica* è la simmetrica di sè stessa (quella che passa a egual distanza dalle basi), e la *geometrica* è quella che eguaglia la propria x e la propria y, e cioè quella per la quale i trapezi annessi al dato divengono parallelogrammi.

Il trapezio permette quindi di costruire immediatamente le prime tre medie, e dà di tutte e quattro una rappresentazione geometrica che rende evidenti molte loro proprietà.

Così per $a > b$ essendo chiaro che la corda è tanto più grande quanto più si accosta alla a, ossia quanto più piccolo è il rapporto $h_a : h_b = x : b$, epperò quanto più piccola è la x, le *predette medie armonica, geometrica, aritmetica, antiarmonica si susseguono in ordine crescente.* Per la prima è infatti (vedi n. 3) $x = a$, per la seconda è $x = \sqrt{ab}$, per la terza $x = b$, che evidentemente si susseguono in ordine decrescente. La quarta, poi essendo simmetrica della prima, sarà la più vicina alla base maggiore epperò la più grande di tutte.

È reso inoltre chiaro che queste medie sono comprese fra a e b, e si riducono tutte eguali nel caso lo fossero due di esse, e conseguentemente anche a e b.

Si vede ancora che, poichè le due corde armonica e antiarmonica passano a egual distanza dall'aritmetica, la *media aritmetica fra* a *e* b *lo è anche fra le due medie armonica e antiarmonica fra le stesse* a *e* b.

6. Consideriamo ora altre corde notevoli.

Cominciamo dalla baricentrale. Per essa è notoriamente

$$h_a : h_b = 2b + a : 2a + b$$

e si ricava subito dalla (I) che la sua lunghezza è $\frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$.

Calcoliamo ora la corda mediana, quella cioè che divide a metà il trapezio.

È chiaro intanto che le due parti, in cui una corda qualunque u divide il trapezio, hanno per la (I) il rapporto $\frac{(a + u)h_a}{(b + u)h_b} = \frac{(a + u)(a - u)}{(b + u)(u - b)} = \frac{a^2 - u^2}{u^2 - b^2}$. Perchè queste due parti sieno equivalenti occorre che sia $a^2 - u^2 = u^2 - b^2$, onde $u^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$. *Il quadrato della corda mediana è quindi media aritmetica fra i quadrati delle basi.*

La corda invece che divide il trapezio in due parti, che stanno fra loro come $b^2 : a^2$, ha per quadrato $a^2 + b^2$. *Essa è quindi l' ipotenusa del triangolo di cui* a *e* b *sono i cateti.*

Vi sono poi altre due corde importanti: quelle divise in 3 parti eguali delle diagonali, e che si ottengono quando sia $x = \frac{a}{2}$ oppure

$y = \frac{b}{2}\cdot$ Esse sono quindi rispettivamente eguali a $\frac{3\,ab}{a+2b}$ e $\frac{3\,ab}{2a+b}$. Si noti che esse stanno fra loro come $2a + b : 2b + a$, cioè come le distanze che il centro di gravità del trapezio ha dalle basi. Si osservi ancora che le loro coniugate sono $\frac{a+2b}{3}$, $\frac{2b+a}{3}$, le quali alla loro volta sono tra loro simmetriche, e dividono in 3 parti eguali l'altezza. Esse infatti si ottengono dalla (I) facendo $x : b = 2$ oppure $x : b = \frac{1}{2}\cdot$ Si può anche dire che *le due corde che dividono in 3 parti eguali le diagonali sono coniugate delle due che dalle diagonali stesse sono divise in 3 parti eguali.*

7. Può giovare in certi casi di esprimere la u per mezzo del rapporto r fra h_a e h_b, ossia dalle due parti in cui essa divide la diagonale (o i lati obliqui). Avendo allora $\frac{a-u}{u-b} = r$, si avrebbe $u = \frac{a+br}{1+r}\cdot$

Se in particolare si pone $r = \frac{a^n}{b^n}$, si ha $u = \frac{ab\,(a^{n-1}+b^{n-1})}{a^n+b^n}\cdot$ Per $n=1$ si trova la corda armonica, per $n=0$ si ha l'aritmetica, per $n=\frac{1}{2}$ si ha la geometrica, per $n = -\frac{1}{2}$ si ha $u = \frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} = a+b-\sqrt{ab}$ epperò la simmetrica della media geometrica.

Per $r = 2$ oppure $= \frac{1}{2}$ si ritrovano le due corde che dividono in 3 parti eguali l'altezza del trapezio; per $r = 1$ si ritrova la media aritmetica, ecc.

8. Se si fa $a = b$ il trapezio diventa un parallelogrammo, e tutte le medie risultano eguali, come fu detto.

Se si fa $b = 0$, il trapezio diventa un triangolo, e le quattro medie diventano 0, 0, $\frac{a}{2}$, a; la corda media diventa $\sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ e la baricentrale $\frac{2a}{3}$, cose notissime.

Alessandria, 31 dicembre 1896.

V. Murer.

Sullo sviluppo del seno e del coseno della somma di n archi

Nel trattato di Trigonometria del Serret, a pag. 42 della traduzione italiana del Prof. Grassi (Torino, Fratelli Bocca 1893) trovasi una nota del traduttore, nella quale è detto: " Le formule generali " che esprimono il seno ed il coseno della somma di un numero m di " archi, in funzione dei seni e dei coseni di questi archi, è stata tro- " vata dal Prof. E. De Angelis, che ne esponeva la ricerca diretta " negli annali del R. Istituto tecnico e nautico di Napoli (anno 1885). " Presentando qui appresso queste formule, colmeremo un vuoto, il " quale si ravvisa in tutti i trattati di Trigonometria pubblicati fin " oggi ".

Anzitutto credo doveroso di notare che le formule in questione erano conosciute molto tempo prima della pubblicazione del Professore De Angelis. E infatti esse possono riscontrarsi alla pag. 164-165 del *Lehrbuch der ebenen und sphärischen trigonometrie* di *I. H. T. Müller* (*Halle, verlag der Buchandlung des Waisenhauses, 1852*). In quest'ultimo trattato, per altro, le formule, predette non sono veramente dimostrate, ma piuttosto *concluse induttivamente* da quelle che esprimono lo sviluppo del seno e del coseno della somma di 2, 3 e 4 archi.

Mi propongo con questa nota, di dare una dimostrazione delle medesime formule, seguendo una via alquanto diversa da quella tenuta dal Prof. De Angelis, e che, se non vado errato, mi pare che abbia il vantaggio di una maggiore facilità, e semplicità, e di condurre contemporaneamente alla dimostrazione delle due formule.

Le formule che si tratta di dimostrare sono le seguenti:

$$(1)\quad \text{sen}\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = + \Sigma\, \text{sen}_1 \cos_{n-1} - \Sigma\, \text{sen}_3 \cos_{n-3} + \\ + \Sigma\, \text{sen}_5 \cos_{n-5} - \ldots + (-1)^p\, \Sigma\, \text{sen}_{2p+1} \cos_{n-(2p+1)} \ldots,$$

$$(2)\quad \cos\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = + \cos_n - \Sigma \cos_{n-2} \text{sen}_2 + \\ + \Sigma \cos_{n-4} \text{sen}_4 - \ldots + (-1)^p\, \Sigma \cos_{n-2p} \text{sen}_{2p} \ldots,$$

ove in generale col simbolo $\Sigma\, \text{sen}_r \cos_{n-r}$ si vuole indicare la somma di tutti i prodotti di n fattori, r dei quali sono i *seni* di altrettanti archi scelti in tutti i modi possibili fra gli n considerati, e $n - r$ sono i *coseni* di tutti gli archi rimanenti. Si osservi poi che nel primo sviluppo ogni termine contiene *sempre un numero dispari di seni*, e il segno di ciascun termine è + o − secondochè quel numero dispari è un multiplo di 4 più o meno 1. Nel secondo sviluppo, invece, ogni termine contiene *sempre un numero pari di seni*, e il segno di ciascun termine è + o — secondochè quel numero dispari è o no un multiplo di 4.

Ciò premesso, è facile dimostrare che lo sviluppo (2) è conseguenza necessaria dello sviluppo (1).

Infatti, se uno qualunque degli n archi dati, per es. a_s, viene cambiato nel respettivo complemento, e tutti gli archi rimanenti si cambiano solamente di segno, il primo membro della (1) diviene:

$$\operatorname{sen}\left\{-a_1-a_2\ldots\ldots-a_{s-1}+\left(\frac{\pi}{2}-a_s\right)-a_{s+1}-\ldots\ldots-a_n\right\}=$$
$$=\operatorname{sen}\left\{\frac{\pi}{2}-(a_1+a_2\ldots\ldots+a_{s-1}+a_s+a_{s+1}\ldots\ldots+a_n)\right\}=$$
$$=\cos\left\{a_1+a_2+a_3\ldots\ldots+a_n\right\}.$$

Quanto al secondo membro osserviamo che, dopo avervi effettuato i cambiamenti accennati, ogni termine della somma

$(-1)^p\,\Sigma\,\operatorname{sen}_{2p+1}\cos_{n-(2p+1)}$ verrà a contenere o $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a_s\right)$ o $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a^s\right)$. Nel primo caso quel termine perde un seno, acquista un coseno, e subisce $2p$ cambiamenti di segno. Nel secondo caso, invece, perde un coseno, acquista un seno, e subisce $2p+1$ cambiamenti di segno. Ossia un termine qualunque $(-1)^p\operatorname{sen}_{2p+1}\cos_{n-(2p+1)}$ dello sviluppo (1) si trasforma, per effetto dei cambiamenti predetti, o nel termine

$$\left\{(-1)^p\operatorname{sen}_{2p}\cos_{n-2p}\right\}(-1)^{2p}=(-1)^p\operatorname{sen}_{2p}\cos_{n-2p}\quad,$$

oppure nell'altro

$$\left\{(-1)^p\operatorname{sen}_{2p+2}\cos_{n-(2p+2)}\right\}(-1)^{2p+1}=(-1)^{p+1}\operatorname{sen}_{2(p+1)}\cos_{n-2(p+1)}.$$

E poichè quest'ultimo termine è della stessa forma del precedente, possiamo dire che in ogni caso si giunge ad un termine, che contiene *sempre un numero pari di seni*, e che ha il segno + o — secondochè questo numero pari è o no multiplo di 4. Ora tutti i termini di questa specie appartengono allo sviluppo (2); dunque possiamo concludere che lo sviluppo (2) è conseguenza dello sviluppo (1).

Dopo ciò basterà limitarci alla dimostrazione della sola formula (1), e per far questo (ritenendo come verificato lo sviluppo pel caso di due archi) seguiremo il metodo di conclusione da n a $n+1$. Considerando dunque $n+1$ archi avremo

$$\operatorname{sen}\left\{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n+a_{n+1}\right\}=\operatorname{sen}\left\{(a_1+a_2\ldots\ldots+a_n)+a_{n+1}\right\}=$$
$$=\operatorname{sen}(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)\cos a_{n+1}+\cos(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)\operatorname{sen}a_{n+1}.$$

Ossia limitandoci a considerare i soli termini generali degli sviluppi, avremo, per quanto è stato ammesso e dimostrato,

$$\operatorname{sen}\left\{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n+a_{n+1}\right\}=\cos a_{n+1}\,(-1)^p\,\Sigma\operatorname{sen}_{2p+1}\cos_{n-(2p+1)}+$$
$$+\operatorname{sen}a_{n+1}\,(-1)^p\,\Sigma\cos_{n-2p}\operatorname{sen}_{2p}.$$

Ora è facile riconoscere che ogni termine del 2° membro è un prodotto di $n+1$ fattori, tra i quali si trova sempre *un certo numero dispari di seni*, associati *con i coseni di tutti gli archi rimanenti.* Si riconosce pure che il segno di ciascun termine è positivo o negativo secondochè il numero dei fattori *seno* è un multiplo di 4 più o meno uno. Inoltre la prima parte del 2° membro ci dà tutti i termini in cui l'$(n+1)^{mo}$ arco, ossia a_{n+1}, apparisce come *fattore coseno;* complessivamente le due parti forniscono quindi tutti i termini della forma

$$(-1)^p \Sigma \ \text{sen}_{2p+1} \cos_{(n+1)-(2p+1)},$$

che è il termine generale dello sviluppo di sen $(a_1+a_2 \ldots . a_n + a_{n+1})$. Ma questo termine è della stessa forma di quello dello sviluppo (1); possiamo dunque concludere che lo sviluppo, essendo vero pel caso di n archi, è altresì vero pel caso di $(n+1)$ archi, e quindi è vero in generale.

Corollario I. — Se nel secondo membro dell'espressione,

$$\text{tang}\,(a_1+a_2 \ldots . + a_n) = \frac{\text{sen}\,(a_1+a_2 \ldots . + a_n)}{\cos\,(a_1+a_2 \ldots . + a_n)}$$

sostituiamo gli sviluppi forniti dalle (1) e (2), e dividiamo poi numeratore e denominatore per $\cos_n$, si trova

$$\text{(3)} \quad \text{tang}\,(a_1+a_2 \ldots . + a_n) = \frac{\Sigma\,\text{tang}_1 - \Sigma\,\text{tang}_3 + \Sigma\,\text{tang}_5 - \Sigma\,\text{tang}_7 + \ldots .}{1 - \Sigma\,\text{tang}_2 + \Sigma\,\text{tang}_4 - \Sigma\,\text{tang}_6 + \ldots .}.$$

In modo analogo si ottiene:

$$\text{(4)} \quad \cot\,(a_1+a_2+\ldots . + a_n) = \frac{\cot_n - \Sigma\cot_{n-2} + \Sigma\cot_{n-4} - \Sigma\cot_{n-6}}{\Sigma\cot_{n-1} - \Sigma\cot_{n-3} + \Sigma\cot_{n-5} - \Sigma\cot_{n-7}},$$

che può dedursi anche dalla precedente, scambiando i due membri nei loro inversi, dividendo numeratore e denominatore per *tang*$_n$ e sostituendo infine la cotangente a $\frac{1}{\text{tangente}}$.

Se nelle espressioni

$$\sec\,(a_1+a_2 \ldots . + a_n) = \frac{1}{\cos\,(a_1+a_2+\ldots . + a_n)}$$

$$\text{cosec}\,(a_1+a_2 \ldots . + a_n) = \frac{1}{\text{sen}\,(a_1+a_2+\ldots . + a_n)}$$

sostituiamo, nei secondi membri, gli sviluppi (1) e (2), e dividiamo poi numeratore e denominatore di ciascuna espressione pel prodotto $\text{sen}_n \cos_n$ si ottiene dopo aver sostituito *cosecante* e *secante* rispettivamente a $\frac{1}{\text{sen}}$ e a $\frac{1}{\cos}$,

$$\text{(5)} \quad \sec\,(a_1+a_2+\ldots . + a_n) = \frac{\sec_n\ \text{cosec}_n}{\text{cosec}_n - \Sigma\,\text{cosec}_{n-2}\sec_2 + \Sigma\,\text{cosec}_{n-4}\sec_4 - \ldots .},$$

$$\text{(6)} \quad \text{cosec}\,(a_1+a_2 \ldots a_n) = \frac{\sec_n\ \text{cosec}_n}{\Sigma\sec_1\text{cosec}_{n-1} - \Sigma\sec_3\ \text{cosec}_{n-3} + \Sigma\sec_5\text{cosec}_{n-5} - \ldots .}$$

Nelle quattro formule precedenti, $\tang_r$, $\cot_r$, $\sec_r$, cosec_r hanno un significato analogo a quello che abbiamo stabilito in principio per sen_r e $\cos_r$.

Corollario II. — Le formule (1), (2), (3), (4), (5), (6), per

$$a_1 = a_2 = a_3 \ldots\ldots = a_n = a,$$

divengono rispettivamente:

$$\operatorname{sen} na = \sum (-1)^p \binom{n}{2p+1} \operatorname{sen}^{2p+1} a \,.\, \cos^{n-(2p+1)} a \tag{1'}$$

$$\cos na = \sum (-1)^p \binom{n}{2p} \operatorname{sen}^{2p} a \cos^{n-2p} a \tag{2'}$$

$$\operatorname{tang} na = \frac{\sum (-1)^p \binom{n}{2p+1} \operatorname{tang}^{2p+1} a}{\sum (-1)^p \binom{n}{2p} \operatorname{tang}^{2p} a} \tag{3'}$$

$$\cot na = \frac{\sum (-1)^p \binom{n}{2p} \cot^{n-2} a}{\sum (-1)^p \binom{n}{2p+1} \cot^{2p+1} a} \tag{4'}$$

$$\sec na = \frac{\sec^n a \operatorname{cosec}^n a}{\sum (-1)^p \binom{n}{2p} \sec^{2p} a \operatorname{cosec}^{n-2p} a} \tag{5'}$$

$$\operatorname{cosec} na = \frac{\sec^n a \operatorname{cosec}^n a}{\sum (-1)^p \binom{n}{2p+1} \sec^{2p+1} a \operatorname{cosec}^{n-(2p+1)} a}. \tag{6'}$$

Dalla semplice ispezione delle formule precedenti si ricava:

1°. Che *sen na* non può *mai* esprimersi razionalmente per $\cos a$; ma può esprimersi razionalmente per sen a tutte le volte che n è un numero dispari.

2°. Che *cos na* è *sempre* esprimibile razionalmente per $\cos a$, mentre non può esserlo per il seno, se n non è un numero pari.

3°. Che *sec na* è *sempre* esprimibile razionalmente per *sec a*, mentre non può esserlo per la cosecante, se n non è un numero pari.

4°. Che *cosec na* non può *mai* esprimersi razionalmente per *cos a*; ma può esprimersi razionalmente per *cosec a* tutte le volte che n è un numero dispari.

I resultati 3° e 4° si deducono rispettivamente dal 2° e 1°, scambiando *seno* e *coseno* in *cosecante* e *secante*, ciò che del resto poteva facilmente prevedersi a causa delle relazioni $\operatorname{sen} a = \frac{1}{\operatorname{cosec} a}$, $\cos a = \frac{1}{\sec a}$.

A. Andreini.

SULLA QUISTIONE 324*

La quistione 324* da me proposta nel volume dell'anno 1896 di questo *Periodico* può essere risoluta, con l'intervento di considerazioni geometriche, in una maniera abbastanza elegante, dalla quale maniera apparirà che le formole, di cui in questa questione si discorre, sono le formole di una interessante trasformazione quadratica (doppia) dello spazio. Rammentiamo che si tratta di mostrare come, risolvendo rispetto alle u, v, w, le equazioni

$$(1)\quad \begin{cases} u' = \dfrac{\lambda(-u^2+v^2+w^2)-2(\mu v+\nu w)u}{u^2+v^2+w^2-2\lambda u-2\mu v-2\nu w} \\ v' = \dfrac{\mu(u^2-v^2+w)-2(\nu w+\lambda u)v}{u^2+v^2+w^2-2\lambda u-2\mu v-2\nu w} \\ w' = \dfrac{\nu(u^2+v^2-w^2)-2(\lambda u+\mu v)w}{u^2+v^2+w^2-2\lambda u-2\mu v-2\nu w}, \end{cases}$$

si hanno, dopo aver posto $H=\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}$, $K=\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$, le formule

$$(2)\quad \begin{cases} u = \dfrac{H\lambda \pm K u'}{H\pm K} \\ v = \dfrac{H\mu \pm K v'}{H\pm K} \\ w = \dfrac{H\nu \pm K w'}{H\pm K}, \end{cases}$$

dove i segni superiori (e così pure gli inferiori) si corrispondono.

Siano (u, v, w) le coordinate di un piano π, (u', v', w') quelle di un piano π' e (λ, μ, ν) quelle di un piano α; cerchiamo in quali relazioni devono essere queste 3 terne di coordinate, affinchè π' sia simmetrico di α rispetto a π. È chiaro che, essendo

$$ux+vy+wz+1=0,\quad \lambda x+\mu y+\nu z+1=0$$

le equazioni di π e di α, la equazione di π' dovrà avere la forma

$$(3)\quad ux+vy+wz+1+k(\lambda x+\mu y+\nu z+1)=0,$$

dove k è da determinarsi. Prendiamo in α un punto arbitrario L (ξ, η, ζ) e diciamo L$'$ (ξ', η', ζ') il suo simmetrico rispetto a π; avremo le relazioni

$$(4)\quad \begin{cases} \xi'=\xi-\dfrac{2u}{\varphi}\Delta \\ \eta'=\eta-\dfrac{2v}{\varphi}\Delta \\ \zeta'=\zeta-\dfrac{2w}{\varphi}\Delta \end{cases}$$

ove $\varphi=u^2+v^2+w^2$, $\Delta=u\xi+v\eta+w\zeta+1$, perchè, insieme alle (4) è

$$\frac{\xi-\xi'}{u}=\frac{\eta-\eta'}{v}=\frac{\zeta-\zeta'}{w},$$

e perchè dette p, p' le lunghezze delle perpendicolari abbassate da L, L' sopra π, per essere

$$u\xi'+v\eta'+w\zeta'+1=-(u\xi+v\eta+w\zeta+1)$$

[come facilmente si vede moltiplicando ordinatamente le (4) per u, v, w e sommando con l'unità] è pure $p=-p'$.

Scriviamo ∇ invece di $\lambda u+\mu v+\nu w$; siccome L' dovrà trovarsi sopra π', l'equazione (3) dovrà essere verificata dai valori ξ', η', ζ' di x, y, z. Dunque, si dovrà avere

$$-\Delta-k\frac{2\Delta\nabla}{\varphi}=0;$$

d'onde $k=-\frac{\varphi}{2\nabla}$. Ne segue che l'equazione di π' è

$$\left(u-\frac{\varphi}{2\nabla}\lambda\right)x+\left(v-\frac{\varphi}{2\nabla}\mu\right)y+\left(w-\frac{\varphi}{2\nabla}\right)z+1-\frac{\varphi}{2\nabla}=0;$$

e da questa seguono le relazioni

$$(5)\qquad\left\{\begin{aligned} u'&=\frac{\varphi\lambda-2\nabla u}{\varphi-2\nabla}\\ v'&=\frac{\varphi\mu-2\nabla v}{\varphi-2\nabla}\\ w'&=\frac{\varphi\nu-2\nabla w}{\varphi-2\nabla};\end{aligned}\right.$$

cioè appunto le (1). La soluzione delle (1) rispetto alle u, v, w si può, dunque, fare, tenendo presente il precedente significato geometrico, nella maniera elegante che segue.

Dalle (1) [e converrà guardare le (5)] si ricavano le seguenti

$$\begin{aligned}(u'-\lambda)\varphi&=(u'-u)2\nabla,\\ (v'-\mu)\varphi&=(v'-v)2\nabla,\\ (w'-\nu)\varphi&=(w'-w)2\nabla,\end{aligned}$$

per cui possiamo scrivere, introducendo il fattore ρ da determinare in funzione di u', v', w', λ, μ, ν:

$$(6)\qquad\left\{\begin{aligned} u&=u'-\rho(u'-\lambda)\\ v&=v'-\rho(v'-\mu)\\ w&=w'-\rho(w'-\nu).\end{aligned}\right.$$

Queste relazioni mostrano che l'equazione del piano $\pi(u, v, w)$ è la seguente

$$u'x+v'y+w'z+1+\frac{\rho}{1-\rho}(\lambda x+\mu y+\nu z+1)=0;$$

ma poichè questo piano deve essere bisettore degli angoli dei piani $\pi'(u', v', w)$, $\alpha(\lambda, \mu, \nu,)$, si dovrà avere

$$\frac{\rho}{1-\rho} = \pm \frac{H}{K},$$

epperò

$$\rho = \frac{H}{H \pm K}.$$

Questo valore di ρ, sostituito nelle (6) fornisce per u, v, w le espressioni

$$u = \frac{H\lambda \pm Ku'}{H \pm K},$$

$$v = \frac{H\mu \pm Kv'}{H \pm K},$$

$$w = \frac{H\nu \pm Kw'}{H \pm K},$$

che si volevano trovare.

A. Del Re.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 269* 270* 275* 286* 327 328 329 330 E 331

269. *Qualunque sia l'intero positivo* m, *si ha*

$$\frac{1}{m+n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{m}{(n+1)(n+2)} + \frac{m(m-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^m \frac{m(m-1)\ldots 2.1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m+1)}.$$

G. Musso.

Risoluzione del sig. Giuseppe Vitali, licenziato dal Liceo Alighieri di Ravenna.

Se S indica la somma e u_r l'r^{o} termine dell'espressione

$$\frac{1}{n+1} - \frac{m}{(n+1)(n+2)} + \frac{m(m-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \ldots + (-1)^m \frac{m(m-1)\ldots 2.1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m+1)},$$

si ha

$$u_{r+1} = -\frac{m-(r-1)}{n+r+1} u_r,$$

e quindi

$$(m+1)u_r - r u_r + (r+1)u_{r+1} + n u_{r+1} = 0.$$

Ponendo in questa relazione $r = 1, 2, 3 \ldots m$, e sommando le eguaglianze che risultano, si trova

$$(m+n+1)S - (n+1)u_1 = 0$$
$$(m+n+1)S = 1$$
$$S = \frac{1}{m+n+1}.$$

c. d. d.

Altre risoluzioni analoghe del prof. Luigi Bosi, e del sig. Vincenzo Columbo.

270*. *In un'urna si trovano un egual numero di palle rosse e nere. Ne vengono estratte successivamente* n, *rimettendo volta per volta la palla estratta nell'urna. Dimostrare che la probabilità che le* n *palle estratte presentino una determinata disposizione di colori è data da*

$$\frac{1}{2+P_n\Sigma\frac{1}{P_\alpha P_\beta}}$$

in cui $\alpha+\beta=n$ e $P_n=1.2....n$.

F. Verde.

Risoluzione del sig. F. Celestri studente della R. Università di Napoli.

Qualunque sia la determinata disposizione di colori che devono presentare le n palle da estrarre, la probabilità che questa disposizione avvenga è sempre $\frac{1}{2^n}$. Così per esempio, se delle n palle da estrarre si vuole che se ne estraggono prima a rosse, poi b nere, indi c rosse, ecc. si ha anzitutto che le probabilità di estrarre di seguito a palle rosse, o b nere, o c rosse, ecc....., sono rispettivamente $\frac{1}{2^a}, \frac{1}{2^b}, \frac{1}{2^c}$, ecc. e quindi la probabilità che questi gruppi di palle si succedano nell'estrazione ordinatamente sarà:

$$\frac{1}{2^a}\times\frac{1}{2^b}\times\frac{1}{2^c}\times....=\frac{1}{2^{a+b+c+....}}=\frac{1}{2^n}.$$

Volendo ora ridurre questa espressione a quella data nell'enunciato osserviamo che può scriversi

$$\frac{1}{2^n}=\frac{1}{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+....+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}}=\frac{1}{2+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+....+\binom{n}{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{2+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}+.....+\frac{n(n-1)(n-2).....2.1}{1.2.3....(n-1)}},$$

e moltiplicando ciascuna frazione del denominatore per l'espressione $\frac{1.2.3....n}{1.2.3....n}$, (ciò che non altera l'espressione) si ha:

$$\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2+\frac{n}{1}\frac{1.2.3...n}{1.2.3...n}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1.2.3...n}{1.2.3...n}+......+\frac{n(n-1)(n-2)...2.1}{1.2.3...n}\frac{1.2.3...n}{1.2.3...n}}=$$

$$=\frac{1}{2+1.2.3...n\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1.2.3...(n-1)}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2.3...(n-2)}+......+\frac{1}{1.2.3...(n-1)}\cdot\frac{1}{1}\right\}}.$$

la quale espressione per le considerazioni fatte nell'enunciato può scriversi ancora

$$\frac{1}{2+P_n\Sigma\frac{1}{P_\alpha}\cdot\frac{1}{P_\beta}}.$$

c. d. d.

275*. *Fra tutti i triangoli i cui lati formano una progressione aritmetica di data ragione, quali sono rettangoli, quali acutangoli, quali ottusangoli?*

L. Bosi.

Risoluzione del sig. F. Celestri studente della R. Università di Pisa.

Indichiamo con d la ragione data e con x il lato minore. I lati del triangolo saranno perciò

$$x, \quad x+d, \quad x+2d;$$

ed essendo $x+2d$ il lato maggiore, ne viene che il triangolo sarà rettangolo, acutangolo, ottusangolo, a seconda che sussiste la prima, la seconda o la terza delle tre relazioni

$$x^2+(x+d)^2 \overset{=}{\underset{<}{>}} (x+2d)^2;$$

ossia, sviluppando e riducendo,

$$x^2-2dx-3d^2 \overset{=}{\underset{<}{>}} 0,$$

e scomponendo il primo membro in fattori di primo grado le relazioni precedenti possono scriversi

$$(x-3d)\,(x+d) \overset{=}{\underset{<}{>}} 0;$$

e i valori accettabili, che si ricavano da queste tre relazioni, sono per la prima $x=3d$, per la seconda $x>3d$ e per la terza $x<3d$. Quindi potremo dire che

Fra tutti i triangoli i cui lati formano una progressione aritmetica di ragione data, sono rettangoli quelli in cui il lato minore è triplo della ragione data, acutangoli quelli in cui il lato minore è maggiore del triplo della ragione data, e ottusangoli quelli in cui il lato minore è minore del triplo della ragione data.

286*. *Risolvere il sistema d'equazioni*

$$(x+y)(xy+1)=axy$$
$$(x^3+y^3)(x^3y^3+1)=bx^3y^3.$$

F. Ceccherini.

Risoluzione del sig. F. Celestri studente a Napoli.

Dividendo i due membri della prima equazione per xy e quelli della seconda per x^3y^3, il sistema proposto diviene

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\left(xy+1\right)=a \\ \left(\frac{1}{y^3}+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^3y^3+1\right)=b, \end{cases}$$

e sviluppando può scriversi

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)=a \\ \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)=b, \end{cases}$$

e ponendo

$$\text{(2)} \qquad x+\frac{1}{x}=u, \quad y+\frac{1}{y}=v,$$

il sistema (1) diviene

$$\begin{cases} u+v=a \\ u^3+v^3-3\,(u+v)=b, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} u+v=a \\ u^3+v^3=b+3a. \end{cases}$$

Per avere ora i valori di u e v si sottragga in quest'ultimo sistema la seconda equazione del cubo della prima, e si ottiene

$$3uv\,(u+v)=a^3-3a-b,$$

d'onde

$$uv=\frac{a^3-3a-b}{3\,(u+v)}=\frac{a^3-3a-b}{3a}.$$

Sicchè dei valori u e v si conosce la somma

$$u+v=a$$

e il prodotto

$$uv=\frac{a^3-3a-b}{3a},$$

e quindi questi valori sono le radici dell'equazione

$$z^2-az+\frac{a^3-3a-b}{3a}=0; \tag{3}$$

d'onde

$$z=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4\,\frac{a^3-3a-b}{3a}}}{2}=\frac{3a^2\pm\sqrt{3a\,(4b+12a-a^2)}}{6a}.$$

Dunque

$$u=\frac{3a^2\pm\sqrt{3a\,(4b+12a-a^2}}{6a}$$

$$v=\frac{3a^2\mp\sqrt{3a\,(4b+12a-a^2}}{6a}.$$

Dalle (2) si hanno poi le equazioni

$$x^2-ux+1=0$$
$$y^2-vy+1=0,$$

d'onde

$$x=\frac{u\pm\sqrt{u^2-4}}{2}$$

$$y=\frac{v\pm\sqrt{v^2-4}}{2},$$

e sostituendo ad u e v i loro valori ottenuti dalla (3), corrispondenti ai segni superiori, si ottiene

$$x=\frac{3a^2+\sqrt{3a\,(4b+12a-a^2)}\pm\sqrt{6a\,(2b-18a+a^3+a\sqrt{3a\,(4b+12a-a^2)})}}{12a}$$

$$y=\frac{3a^2-\sqrt{3a\,(4b+12a-a^2)}\pm\sqrt{6a\,(2b-18a+a^3-a\sqrt{3a\,(4b+12a^2-a^2)})}}{12a}.$$

Dall'avere poi diviso la prima equazione per $x\,y$ e la seconda per $x^3\,y^3$, si hanno le due soluzioni

$$x=0,\ y=0.$$

327. *Qualunque numero, tranne 2 e 5 e i loro multipli, è un divisore d'un numero formato da cifre tutte uguali a 9.*

Le risoluzioni pubblicate di questa e delle quistioni successive fino alla 331 sono del sig. L. Nofolbasso studente della R. Università di Napoli.

Se a è un numero qualunque primo con 2 e 5, la frazione $\frac{1}{a}$ ridotta in decimali produce una frazione periodica semplice, la cui generatrice ha per numeratore il periodo N e per denominatore un numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo: questa generatrice essendo equivalente alla frazione $\frac{1}{a}$, ne segue che a deve essere divisore d'un numero formato da cifre tutte uguali a 9.

C. B. D.

328. *Ogni frazione irriducibile che ha per denominatore 3^m, ridotta in decimali genera una frazione decimale periodica semplice, che ha per periodo un numero di 3^{m-2} cifre.*

Si ha $10 = 1 + 3^2$, e quindi $10^3 = (1 + 3^2)^3 = 1 + h . 3^3$, cioè $10^3 \equiv 1$ (mod. 3^3). Similmente si ha $10^{3^2} = (1 + h . 3^3)^3 = 1 + h' . 3^4$, cioè $10^{3^2} \equiv 1$ (mod. 3^4): e seguitando ad innalzare successivamente a 3^a potenza si ha

$$10^{3^{m-2}} \equiv 1 \ (\text{mod. } 3^m).$$

Da ciò segue che la frazione irriducibile $\frac{a}{3^m}$ può porsi sotto la forma $\frac{K}{10^{3^{m-2}} - 1}$, e ridotta in decimale dà una frazione periodica semplice, che ha un periodo di 3^{m-2} cifre.

C. B. D.

329. *Se una frazione irriducibile che ha per denominatore il numero primo p diverso da 3, ridotta in decimale genera una frazione periodica, il cui periodo contiene p′ cifre, ogni altra frazione ordinaria irriducibile, che ha per denominatore p^m, ridotta in decimali produrrà una frazione periodica, il cui periodo conterrà $p' . p^{m-1}$ cifre.*

Se la frazione $\frac{1}{p}$, in cui p è un numero primo diverso da 2, 3, 5 ridotta in decimali dà un periodo di p' cifre, vuol dire che

$$10^{p'} \equiv 1 \ (\text{mod. } p), \text{ cioè } 10^{p'} = 1 + h\,p.$$

Innalzando a potenza p^{ma}, poichè p è primo, si ha $10^{p'p} = (1 + h\,p)^p = 1 + h'\,p^2$ cioè $10^{p'p} \equiv 1$ (mod. p^2). Innalzando di nuovo a potenza p^{ma} si ha

$$10^{p'p^2} = (1 + h'\,p^2)^p = 1 + h''\,p^3, \text{ cioè } 10^{p'p^2} \equiv 1 \ (\text{mod. } p^3);$$

e così innalzando successivamente sempre a potenza p^{ma} si ricava

$$10^{p'p^{m-1}} \equiv 1 \ (\text{mod. } p^m).$$

Da ciò segue che la frazione irriducibile $\frac{a}{p^m}$ si può porre sotto la forma $\frac{K}{10^{p'p^{m-1}} - 1}$ e quindi ridotta in decimali produce una frazione periodica il cui periodo è di $p' . p^{m-1}$ cifre.

Quest'ultimo numero si riduce a $p' . p^{m-2}$ nel caso, rarissimo però, che sia $10^{p'} \equiv 1$ (mod. p^2): pei numeri primi maggiori di 3 e minori di 1000 questo caso si verifica una sola volta ed è per $p = 487$.

C. B. D.

330. *Se una frazione irriducibile ha per denominatore un prodotto di più fattori primi* p, q, r,... *diversi da 2 e da 5, e le frazioni* $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$,.... *ridotte in decimali producono periodi di* p', q', r',.... *cifre rispettivamente, la data frazione ridotta in decimale produrrà un periodo di* m *cifre, essendo* m *il minimo multiplo comune di* p', q', r',...

Poichè $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$,... ridotte in decimali dànno periodi di p', q', r',... cifre rispettivamente, vuol dire che $10^{p'} \equiv 1 \pmod{p}$, $10^{q'} \equiv 1 \pmod{q}$, $10^{r'} \equiv 1 \pmod{r}$,... Ora essendo m il minimo multiplo comune di p', q', r',.. osservando che con ogni congruenza della forma $10^h \equiv 1 \pmod{k}$ sussiste la congruenza $10^m \equiv 1 \pmod{k}$ purchè m sia multiplo di h, ne segue che la congruenza $10^m \equiv 1$ vale per ciascuno dei moduli p, q, r,... e quindi, poichè essi sono numeri primi, anche pel modulo $P = p \cdot q \cdot r$.... Si conchiude che la frazione irriducibile $\frac{a}{P}$ può porsi sotto la forma $\frac{A}{10^m - 1}$, e quindi ridotta in decimale dà un periodo di m cifre.

C. B. D.

331. *Se* $\frac{a}{b}$ *è una fazione irriducibile in cui* $b = 3^m \cdot p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma \ldots$ *e* p, q, r.... *sono numeri primi differenti da 2 e da 5, indicando rispettivamente con* p', q', r',.... *i numeri delle cifre dei periodi delle frazioni decimali equivalenti ad* $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$,.... *la frazione* $\frac{a}{b}$ *ridotta in decimali, produrrà un periodo di* k *cifre, essendo* k *il minimo multiplo comune dei numeri* 3^{m-2}, $p' \cdot p^{\alpha-1}$, $q' \cdot q^{\beta-1}$, $r' \cdot r^{\gamma-1}$, ...

Dai teoremi precedenti si ricava che:

$$10^{3^{m-2}} \equiv 1 \pmod{3^m},\ 10^{p' \cdot p^{\alpha-1}} \equiv 1 \pmod{p^\alpha},\ 10^{q' \cdot q^{\beta-1}} \equiv 1 \pmod{q^\beta},\ 10^{r' \cdot r^{\gamma-1}} \equiv 1 \pmod{r^\gamma} \ldots;$$

e quindi se k è il minimo multiplo comune di 3^{m-2}, $p' \cdot p^{\alpha-1}$, $q' \cdot q^{\beta-1}$, $r' \cdot r^{\gamma-1}$, ... osservando che con la congruenza $10^\pi \equiv 1 \pmod{\rho}$ sussiste la congruenza $10^k \equiv 1 \pmod{\rho}$ se k è multiplo di π, conchiudiamo che la congruenza $10^k \equiv 1$ vale per ciascuno dei moduli 3^m, p^α, q^β, r^γ, ... e quindi, poichè essi sono primi fra loro, anche pel modulo $b = 3^m \cdot p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma$ ..... Da ciò segue che la frazione irriducibile $\frac{a}{b}$ può porsi sotto la forma $\frac{A}{10^k - 1}$, e perciò ridotta in decimali dà un periodo di k cifre.

Se uno dei numeri primi dati, p per es., dà luogo all'eccezione indicata nel teorema 329, si calcolerà k sostituendo a $p' \cdot p^{\alpha-1}$ il numero $p' \cdot p^{\alpha-2}$.

C. B. D.

Questi teoremi del Bonolis riducono la ricerca del numero delle cifre del periodo d'una frazione decimale periodica al solo caso in cui la generatrice è una frazione irriducibile avente per denominatore la prima potenza d'un numero primo diverso da 2, 3 e 5: e di ciò ci occuperemo forse fra breve.

Oltre a quelle pubblicate. sono state inviate alla Direzione due soluzioni della questione 327 dal prof. Bettazzi, delle quistioni 327, 328, 329, 330, 331 dal prof. Gatti, e delle 327 e 328 dal prof. Padoa.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

338*. Determinare la parte di superficie sferica racchiusa fra due archi l'uno di circolo massimo, l'altro di circolo minore terminati alla corda comune.

339. Nel cono descritto dalla rotazione dell'angolo θ intorno ad un suo lato si conduce un piano perpendicolare ad una generatrice e distante del segmento d dal vertice; esprimere in funzione di θ e d gli assi, il parametro della conica e gli angoli formati dalle generatrici passanti per due vertici della curva.

340. Per un punto di una superficie conica circolare retta, condurre un piano segante in modo che gli assi della ellisse (o dell'iperbole) abbiano una data ragione k. Si conosce la distanza d del punto dal vertice e l'angolo 2θ del cono.

BELLACCHI.

341*. Due triangoli coi lati rispettivamente paralleli sono interni l'uno all'altro, e volti nello stesso senso. Prolungando i lati di quello interno, si hanno tre parallelogrammi x, y, z e tre trapezi t, t', t''. Determinare x, y, z in funzione di t, t', t'' e del triangolo interno T.

ALASIA.

342*. Indicando i vertici di un quadrangolo inscritto in un circolo con 1, 2, 3, 4; i lati con a, b, c, d; con h_{3a} p. es. la distanza del vertice 3 dal lato a, e con m_{3a} il segmento congiungente il vertice 3 col punto medio del lato a, dimostrare le formole

$$a)\qquad \frac{h_{1b}}{h_{2d}} = \frac{h_{3c}}{h_{2c}} = \frac{h_{3d}}{h_{4b}} = \frac{h_{1c}}{h_{4a}},$$

$$b)\qquad S = \frac{1}{2}\sqrt[4]{(ah_{4a}+bh_{4b})(bh_{1b}+ch_{1c})(ch_{2c}+dh_{2d})(dh_{3d}+ah_{3a})},$$

$$c)\qquad (h_{1b}+h_{3d}+h_{1c}+h_{3a})\left(\frac{1}{h_{1b}}+\frac{1}{h_{3d}}+\frac{1}{h_{1c}}+\frac{1}{h_{3a}}\right) =$$

$$(h_{2c}+h_{4a}+h_{2d}+h_{4b})\left(\frac{1}{h_{2c}}+\frac{1}{h_{4a}}+\frac{1}{h_{2d}}+\frac{1}{h_{4b}}\right)$$

$$= (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right),$$

$$d)\qquad m^2_{1b}+m^2_{2c}+m^2_{3d}+m^2_{4a} = m^2_{3a}+m^2_{2d}+m^2_{1c}+m^2_{4b}.$$

G. CANDIDO.

(*) Le quistioni contrassegnate con un asterisco sono proposte agli studenti delle scuole secondarie; le altre a tutti gli studiosi indistintamente.

343*. La cifra delle decine di qualunque potenza di 3 non può mai essere dispari.

344*. In qualunque potenza di 5 la cifra delle unità è sempre 5, quella delle decine è sempre 2, la cifra delle centinaia non può essere che 1 o 6, quella delle unità di migliaia non può essere che 0, 3, 5, 8 (0 e 5 corrispondono al 6; 3 ed 8 all'1), e finalmente la cifra delle decine di migliaia non può mai essere nè 3, nè 8.

345*. La cifra delle decine di qualunque potenza di 7 non può essere che 0 o 4; e propriamente è 0, se la cifra delle unità della potenza è 1 o 7, ed è invece 4 se la cifra delle unità è 3 o 9.

346*. Il quadrato d'un numero, formato da p cifre 9 seguite da una cifra qualunque a, si compone di p-1 cifre 9, seguite dal complemento a 100 del doppio di 10-a, da p-1 zeri e dal quadrato di 10-a preceduto da uno zero se è di una cifra. Per esempio

$$999998^2 = 9999\,96\,0000\,04, \quad 999993^2 = 9999\,86\,0000\,49.$$

347*. Se un numero P è formato da n cifre uguali ad a, seguite dalla cifra b, e da ognuna di queste cifre si tolgono c unità, si avrà un nuovo numero il cui quadrato si otterrà dal quadrato di P togliendo da ognuna delle sue cifre c unità, soltanto per

$$a = 5,\ 6,\ 7,\ 8$$
$$b = 6,\ 7,\ 8,\ 9$$
$$c = 1,\ 3,\ 5,\ 7.$$

Per esempio

$$(55\ldots56 - 11\ldots11)^2 = 55\ldots56^2 - 11\ldots11$$
$$(66\ldots67 - 33\ldots33)^2 = 66\ldots67^2 - 33\ldots33$$
$$(77\ldots78 - 55\ldots55)^2 = 77\ldots78^2 - 55\ldots55$$
$$(88\ldots89 - 77\ldots77)^2 = 88\ldots89^2 - 77\ldots77.$$

348*. Il prodotto d'un numero qualunque N di p cifre, per un numero formato da p cifre uguali a 9, è uguale al numero N-1, seguito dal complemento di N rispetto a 10^p.

BONOLIS.

VARIETÀ

Congresso internazionale di matematici. — Nei giorni 9, 10, 11 Agosto del corrente anno avrà luogo a Zurigo la prima riunione del congresso internazionale dei matematici, che sembra debba riuscire molto numerosa, avendo già aderito un gran numero di scienziati.

Planimetro Prytz e macchina di Torres per risolvere le equazioni. — Segnaliamo all'attenzione dei lettori del Periodico questi due strumenti d'invenzione recente, che sono importantissimi per la pratica. È noto che sono numerosissimi gli strumenti destinati alla misura delle aree piane; il planimetro Prytz si distingue dagli altri per la semplicità della sua costruzione e del modo di usarlo.

La macchina di Torres sin qui costruita serve a trovare le radici di un'equazione di tre soli termini; ma il principio sul quale si fonda può servire per la costruzione di altre macchine atte a trovare le radici di un'equazione qualsiasi.

ESAMI DI BACCALAUREATO DELL'APRILE 1896

Accademia di Lione.

1°. **Quistioni a scelta.** — *a)* Decomporre il trinomio $x^4 + px^2 + q$ in un prodotto di due trinomi di secondo grado.

b) Esporre la teoria delle annualità.

c) Progressioni geometriche; somma dei termini d'una tale progressione. Fra due numeri dati a e b inserire n medi geometrici.

2°. **Problema (obbligatorio).** — È data una sfera di raggio $R = 4$, e si domanda il raggio della base e l'altezza del cono di volume minimo circoscritto a questa sfera.

Accademia di Montpellier.

Calcolare i lati d'un triangolo isoscele, conoscendo l'area di questo triangolo e la superficie totale del cono che esso genera rotando attorno alla sua altezza. — Discussione.

Accademia di Nancy.

1°. **Quistioni a scelta.** — *a)* Dimostrare che tutte le linee trigonometriche dell'arco a s'esprimono razionalmente in funzione di tang $\frac{a}{2}$.

b) Conoscendo tang a, calcolare sen $\frac{a}{2}$. Discussione.

c) Risoluzione trigonometrica dell'equazione di secondo grado.

2°. **Problema.** — Studiare la variazione del quoziente

$$\frac{21\,x^2 - 8x - 5}{14\,x^2 - 31\,x - 15},$$

quando x varia in modo continuo da $-\infty$ a $+\infty$.

Accademia di Poitiers.

1°. **Quistioni a scelta.** — *a)* Dimostrare le formule d'addizione per il seno e coseno.

b) Conoscendo tang a, calcolare tang $\frac{a}{2}$. Discussione.

c) Dimostrare che fra gli angoli e i lati di un triangolo qualunque esistono le relazioni

$$a = b \cos C + c \cos B$$
$$b = c \cos A + a \cos C$$
$$c = a \cos B + b \cos A.$$

Dedurne le formule

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b - 2\,ab \cos C.$$

2°. **Problema.** — Una piramide regolare ha per base un quadrato. In ciascuno dei triangoli isosceli, che formano le faccie laterali, si rappresenti la base con $2a$, gli altri lati con y, l'altezza corrispondente al lato $2a$ con h, le altezze corrispondenti ai lati y con x. Calcolare x e il coseno dell'angolo rettilineo del diedro, formato da due facce laterali. Come varia quest'angolo allorchè h decresce a partire da ∞?

(Continua)

BIBLIOGRAFIA

E. De Montel. — *Le leggi dell'interesse* (Scansano, 1896). (*)

Vogliamo dare un cenno di quest'Opuscolo, estratto dalla *Rivista di Sociologia*, in quanto che esso è una bellissima prova delle importanti e svariate applicazioni, che può trovare la Matematica nello studio delle leggi economico-sociali. È noto che fuori d'Italia tal genere di studi ha trovato ampio sviluppo: basterebbe citare il Maxwell e il Walras e dare un'occhiata al giornale degli attuari inglesi; ma in Italia finora son pochi gli studiosi di questo ramo delle matematiche discipline, e non ci pare superfluo dar notizia di quest'ultimo lavoro di uno dei più antichi e competenti cultori della materia, che suol chiamarsi *matematica finanziaria;* tanto più che tal lavoro contiene numerose ed eleganti applicazioni di algebra, di geometria analitica e proiettiva.

***

È noto che le leggi, affatto convenzionali, regolatrici dell'interesse sia semplice che composto, suppongono che il capitale abbia, per un tempo indefinito, la stessa capacità produttiva, ipotesi questa ben lontana dalla realtà, sia perchè ogni capitale col tempo si esaurisce, sia perchè l'aumento della rendita non è che in limiti ristretti, proporzionale all'aumento del capitale.

L'A. si occupa della questione cominciando col ricordare che il sig. Catalan fin dal Congresso di Bordeaux del 1871, proponeva, pel calcolo dell'interesse composto, in luogo dell'attuale, una formula empirica e complicata, colla quale voleva soddisfare a due condizioni:

1° che per piccoli valori del tempo, il frutto rimanesse proporzionale al tempo.

2° che coll'aumentare indefinito del tempo, il montante tendesse verso un limite assai ristretto. Questo limite è, naturalmente, convenzionale, e il Catalan lo supponeva inferiore a 10 volte il capitale; cioè supponeva che un capitale coi suoi interessi successivi non arrivasse mai a decuplicarsi.

L'A. nota gli evidenti difetti di questa formula. E, studiando il problema in generale, indicando con x il tempo, con y il montante di 1 lira, trova la relazione

$$xy + ay + bx - a = 0, \tag{1}$$

dove i parametri a e b son determinati dal saggio r dell'interesse, giacchè, per $x = 1$, dev'essere $y = 1 + r$, e dal massimo che si vuol raggiunto dal montante per $x = \infty$.

Da questa formula si deduce, come caso particolare, quella dell'interesse semplice. Essa si presta a svariate applicazioni, in particolare al caso in cui si desideri che il capitale dopo un certo numero di anni diventi infruttifero.

(*) Mentre si stampava questo breve cenno, il sig. *Rouché* presentava l'opera del prof. De Montel all'Accademia delle Scienze di Parigi e ne pubblicava una relazione nei *Comptes-Rendus* (1897 N. 5).

L'A. nota inoltre che la sua relazione è quella che in Geom. proiettiva stabilisce la corrispondenza univoca fra due punteggiate proiettive. Di più osserva, che, mentre per l'interesse semplice la curva del montante è una retta e per l'interesse composto una curva logaritmica, per l'interesse da lui calcolato è un ramo d'iperbole.

L'A. come esempio prende quindi a considerare il caso in cui sia $r = 4$, col massimo 8. Calcola, per questo caso, un'apposita tavola dei montanti da 1 a 29 anni; e servendosi di una nota formula d'Eulero, applica il suo metodo al calcolo di una rendita anticipata, e ne deduce importanti conseguenze d'ordine economico, che non è qui il luogo di rilevare. Noteremo solo questa: che, colla legge d'interessi contemplati dall'A. una rendita perpetua avrebbe un valore attuale infinito; quindi sarebbero inammissibili i debiti consolidati.

Segue poscia la trattazione del problema generale dell'emissione, dopo un breve e chiaro riassunto della teoria delle rendite a termine variabile.

E. Nannei.

Prof. Aroldo Martini-Zuccagni. — *Lezioni di Aritmetica teorica. — Teoria dei numeri razionali.* — Livorno, Stab. tip. S. Belforte, 1897.

Questo libro si allontana alquanto dagli ordinari trattati di Aritmetica razionale, che si adottano nelle scuole, sia per l'ordine che per le dimostrazioni di diversi teoremi. Esso è frutto di lungo studio ed è accuratamente redatto.

Nel 1° cap., dalla considerazione dei gruppi di oggetti, l'autore passa al concetto di numero; definisce l'unità e il numero, stabilisce un criterio per distinguere se un numero è uguale, maggiore o minore di un altro, ed enuncia infine il principio fondamentale: *Il numero intero è assolutamente indipendente dall'ordine e dal modo con cui sono aggruppate le sue unità.*

Nel cap. 2°, tratta dell'addizione, della moltiplicazione e dell'innalzamento a potenza, che chiama operazioni dirette di 1ª, 2ª e 3ª specie, rispettivamente. Dimostra prima i teoremi relativi alla proprietà associativa dell'addizione e della moltiplicazione, e poi quelli relativi alla proprietà commutativa. Indi, dimostra alcuni teoremi sulle somme e sui prodotti, avendo cura di metterli uno accanto all'altro, in modo che si possa scorgere come ciascuna proprietà di una delle due operazioni dirette di 1ª e 2ª specie, si possa dedurre dalla proprietà corrispondente dell'altra operazione.

Per dimostrare la proprietà associativa del prodotto di più fattori, l'autore si serve del metodo d'induzione (o di conclusione da n a $n+1$). Non crediamo che sia conveniente introdurre questo metodo di dimostrazione nell'insegnamento dell'aritmetica, e specialmente al principio del corso.

Nel cap. 3° sono dimostrate le regole per effettuare le operazioni dirette di 1ª e 2ª specie.

Nel cap. 4° l'autore parla di sintesi e di analisi, delle dimostrazioni indirette, del metodo di conclusione da n a $n+1$ (già adoperato prima), del metodo di riduzione all'assurdo, e dimostra infine il teorema di Hauber. Non crediamo che questo capitolo debba trovar posto in un trattato di aritmetica, e ci sembra che per dimostrare che se $b \mathrel{\substack{>\\=\\<}} c$ deve essere $a + b \mathrel{\substack{>\\=\\<}} a + c$, e simili teoremi, non valga la pena ricorrere al teorema di Hauber.

Nel cap. 5°, l'autore tratta della sottrazione e della divisione dei numeri interi, che chiama operazioni inverse di 1ª e 2ª specie, e dimostra le proprietà fondamentali di dette operazioni, facendo rilevare come ciascuna proprietà di una delle operazioni inverse, sottrazione e divisione, si possa dedurre dalla proprietà corrispondente dell'altra operazione, cambiando le parole resto in quoziente, diminuendo in dividendo, ecc., e viceversa.

Nei successivi capitoli, 6° e 7°, l'autore considera i teoremi relativi alla teoria del quoziente incompleto, ed alle regole per effettuare la sottrazione e la divisione, dando una lunga dimostrazione per la regola della divisione nel caso in cui il dividendo, il divisore e il quoziente sono di più cifre.

Nel cap. 8°, l'autore risolve diversi problemi, fra i quali i seguenti: " determinare la somma dei primi n numeri interi — determinare quanti ambi si possono formare con i primi 90 numeri — determinare la somma $1+a+a^2+\ldots+a^n$, ecc. ". Non crediamo che un prof. possa proporre ai suoi allievi, che hanno studiato appena le operazioni sui numeri interi, problemi del tipo di quelli accennati, e non ci sembra conveniente far studiare agli allievi quei problemi, che in seguito potranno più facilmente comprendere.

Negli ultimi quattro capitoli della prima parte, l'autore tratta della divisibilità dei numeri, del massimo comune divisore, del minimo comune multiplo, e della teoria dei numeri primi; mantenendo sempre nelle dimostrazioni dei differenti teoremi, quel rigore e quell'originalità che s'incontrano in tutto il libro. Abbastanza semplice ed originale ci sembra la dimostrazione del teorema relativo alla ricerca del *m. c. m.* di due numeri,

La 2ª parte del libro comprende lo studio delle grandezze in generale. Da questo studio, l'autore passa nella 3ª parte, a quello dei numeri frazionari occupandosi nei primi due capitoli delle frazioni ordinarie.

Nel 3° cap. tratta dei numeri decimali, dimostra le loro proprietà generali, e la regola per calcolare il valore di una frazione ordinaria in unità decimali di un ordine qualunque (n. 256). Dopo aver parlato delle operazioni sui numeri decimali, l'autore ritorna alla riduzione delle frazioni ordinarie in decimali; dimostra prima la condizione necessaria e sufficiente affinchè una frazione ordinaria irriducibile sia uguale ad un numero decimale, e poi dà nuovamente (n. 264) la dimostrazione (originale ma molto lunga) della regola per ridurre una frazione ordinaria in numero decimale. Quest'ultima dimostrazione si potrebbe sopprimere sostituendo il n. 256 al n. 264.

Abbastanza bene è svolta la teoria dei numeri decimali periodici, nella quale l'autore ha escluso ogni concetto di limite; però sarebbe bene modificare la dimostrazione del teorema che dà la generatrice di un numero decimale periodico semplice, che l'autore fa dipendere dal problema: calcolare la somma $1+a+a^2+\ldots+a^n$.

L'ultima parte del libro contiene la teoria delle misure delle grandezze commensurabili. In essa si trova la seguente definizione: " *Chiameremo misura di una grandezza* A, *rispetto ad un'altra grandezza* B, *commensurabile con la prima, il numero che rappresenta quante volte la grandezza* A *contiene la grandezza* B, *o una parte aliquota della grandezza* B ", che non è esatta.

In complesso il libro ha molti pregi, e crediamo che, sopprimendo qualche capitolo e modificando qualche dimostrazione, possa essere utile all'insegnamento.

P. Visalli.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile.*

Finito di stampare il 3 Marzo 1897.

TEOREMI E PROBLEMI SUI TETRAEDRI ISOBARICENTRICI

Il prof. Besso per il primo e i professori Pesci e Panizza di poi, in Note apparse in questo *Periodico*, si occuparono dello studio dei triangoli aventi lo stesso baricentro. — Anch'io, in una Nota pubblicata nel fascicolo 3° dell'anno IV dello stesso *Periodico*, mi occupai dell'argomento, dimostrando proprietà che non erano state considerate, e risolvendo nuovi problemi.

La presente nota è un saggio d'uno studio, certo molto attraente, che si potrebbe fare sui tetraedri isobaricentrici.

1. Indico con A_1, A_2, A_3, A_4 i vertici d'un tetraedro, con A il suo baricentro. Il punto A è anche il baricentro di quattro pesi eguali applicati ai vertici. Le rette $A_i A$ tagliano le facce opposte del tetraedro nei baricentri delle facce stesse.

Un tetraedro è determinato in grandezza e posizione da dodici condizioni, perchè l'assegnazione d'un suo vertice equivale a tre condizioni. Il baricentro d'un tetraedro ne è un punto notevole (*). Infatti, dati tre vertici e il baricentro il tetraedro è determinato, e in modo unico.

2. Dati due vertici A_1, A_2 e il baricentro, vi ha una tripla infinità di tetraedri. Un altro vertice A_3 ne individua uno, e se A_3 descrive una figura F, il quarto vertice descrive una figura F', che è simmetrica di F rispetto al punto che è simmetrico del simmetrico di A rispetto al punto medio di $A_1 A_2$. In particolare, se la figura F è una retta o un piano, la figura F' sarà in corrispondenza una retta o un piano.

(*) In qualche trattato di Geometria il baricentro, l'ortocentro ecc. d'un triangolo sono detti *punti notevoli* del medesimo, ma non è detto che cosa si debba intendere per punto notevole d'una figura. In una mia nota pubblicata nella *Rivista di Matematica* (Torino, 1893) proposi, non so se per il primo, di chiamare *punto notevole* d'una figura piana un punto del piano della figura il quale, quando sia dato, equivalga ad assegnare *due* condizioni a cui la figura deve sodisfare. Per analogia si dirà punto notevole d'una figura solida un punto la cui assegnazione equivalga a *tre* condizioni per la figura.

3. Da quanto è stato detto nel numero precedente risulta la risoluzione del seguente problema: *Descrivere un tetraedro, dati* A_1, A_2, A, *una retta* a_3 *su cui deve stare* A_3, *e un piano* α_4 *su cui deve stare* A_4.

Il punto A_{34} (A_{ik} è il punto medio del segmento $A_i A_k$) è noto; è il simmetrico di A rispetto ad A_{12}. Descritta la retta a'_3 simmetrica di a_3 rispetto ad A_{34}, essa taglierà α_4 in un punto A_4, e la retta $A_4 A_{34}$ taglierà a_3 in un punto A_3, e sarà $A_1 A_2 A_3 A_4$ il tetraedro cercato (*).

4. Si ha pure la risoluzione del seguente problema:

Costruire un tetraedro, dati A, A_1 *e tre rette* a_2, a_3, a_4 *su cui devono stare* A_2, A_3, A_4.

Il problema è manifestamente determinato. Per risolverlo si può rammentare la risoluzione di quest'altro problema di stereometria: Date tre rette sghembe a, b, c, tirare una corda della prima e della terza, che sia bisecata dalla seconda. Basterà condurre da a e c i due piani paralleli, e poi il piano bisettore dello strato da essi determinato; questo piano taglierà b in un punto, da cui condurremo la retta che si appoggia ad a e c; giacerà su questa retta, la corda cercata.

Ciò posto, quando A_2 si muove su a_2, A_{12} descrive una retta a_{12} parallela ad a_2, e che si potrà costruire; A_{34} descriverà una retta a_{34}, che è la simmetrica di a_{12} rispetto ad A, e che si potrà anche costruire; tirando la corda $A_3 A_4$ delle rette a_3, a_4, che sia bisecata da a_{34}, si otterrà nel punto d'intersecazione di a_{34} con $A_3 A_4$ il punto A_{34}, da cui si ottiene A_{12}, e infine la retta $A_1 A_{12}$ taglierà a_2 nel punto A_2. Il tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$ è quello cercato.

5. Nella figura del precedente problema si faccia muovere A_1 su a_1; ad ogni posizione di A_1 corrisponde una retta a_{12}. Per costruire tutte le rette a_{12}, basta prendere su a_2 un punto A_2, e pei punti medi dei segmenti $A_2 A_1$ tirare le parallele alla a_2. Siccome i punti medi dei segmenti $A_2 A_1$ sono in linea retta, così tutte le rette a_{12} sono in un piano, che è il bisettore dello strato determinato dai piani, fra loro paralleli, che passano per a_1, a_2. E allora staranno in un piano tutte le rette a_{34}; e siccome i punti A_{34} stanno in un piano, che è il bisettore dello strato determinato dai piani paralleli, condotti per a_3, a_4, così segue che A_{12}, A_{34} sono simmetrici rispetto ad A, e perciò stanno su due rette dei piani suddetti parallele alla loro intersezione. Si dimo-

(*) In questo e in altri problemi semplici ometto ogni discussione e la ricerca delle condizioni di possibilità.

stra similmente che in altrettante rette sono i punti A_{12}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, e quindi il luogo delle posizioni della retta di un lato del tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$ è quello d'una retta che si appoggia a tre rette sghembe. Si ha così il teorema:

Se un tetraedro si deforma in modo che i suoi vertici scorrano su quattro rette date, mentre il baricentro rimane fisso, le rette dei suoi lati generano sei quadriche a punti iperbolici, una per ogni retta.

6. Le considerazioni ora fatte ci permettono di risolvere il seguente problema: *Descrivere un tetraedro di noto baricentro, i cui vertici cadano su quattro rette date* a_1, a_2, a_3, a_4, *e la faccia opposta al vertice che deve cadere in* a_1 *passi per un dato punto* M.

Descritta la quadrica corrispondente ad a_2, a_3 e quella corrispondente ad a_3, a_4, si determinino i coni circoscritti alle medesime e aventi il vertice comune M. Se α_1 è un piano tangente comune, e A_2, A_3, A_4 sono i punti comuni ad α_1 e alle rette a_2, a_3, a_4, saranno A_2, A_3, A_4 tre vertici del tetraedro cercato, dai quali si deduce poi subito A_1.

7. È noto che, se si dividono nel medesimo senso i lati d'un poligono $A_1 A_2 \ldots$, piano o gobbo, nello stesso rapporto nei punti $B_1, B_2 \ldots$, i due sistemi di punti A e B hanno lo stesso baricentro. Se perciò si considerano due coppie di lati opposti d'un tetraedro come lati d'un quadrangolo, e si dividono nel modo ora indicato, si avranno i vertici d'un secondo tetraedro isobaricentrico con il dato.

Se si dividono due coppie di lati opposti d'un tetraedro nel rapporto $l' : l''$, *e nello stesso senso, i quattro punti di divisione sono vertici d'un secondo tetraedro isobaricentrico.*

(*) *Questo tetraedro ha col primo il rapporto* $(l' - l'')(l'^2 + l''^2) : (l' + l'')^3$.

Infatti si supponga che i lati $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, $A_4 A_1$ sieno stati divisi nel rapporto $l'' : l'$ nei punti 1, 2, 3, 4. Si assumano $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$ come sistema di assi coordinati obliqui. Le coordinate dei punti 1, 2, 3, 4, posto $A_1 A_2 = b$, $A_1 A_3 = c$, $A_1 A_4 = d$, sono rispettivamente, come è facile verificare:

$$\left(\frac{l''}{l'+l''}b, 0, 0\right), \left(\frac{l'}{l'+l''}b, \frac{l''}{l'+l''}c, 0\right), \left(0, \frac{l'}{l'+l''}c, \frac{l''}{l'+l''}d\right), \left(0, 0, \frac{l'}{l'+l''}d\right).$$

Sostituendo questi valori nella nota formola che dà il volume d'un tetraedro in funzione delle coordinate dei suoi vertici, gli assi supposti obliqui, si ha:

$$\text{V. } (1234) = -\frac{1}{6} b \, . \, c \, . \, d \, \frac{(l' - l')(l'^2 + l''^2)}{l' + l'')^2} \text{ sen } xyz.$$

(*) Chi non conosce la geometria analitica può omettere le parti stampate in carattere piccolo, che non sono indispensabili per comprendere la parte principale di questa Nota.

Ma

$$V. (A_1 A_2 A_3 A_4) = -\frac{1}{6} b \,.\, c \,.\, d \operatorname{sen} xyz;$$

sostituendo si ha:

$$V. (1234) = \frac{(l' - l'')(l'^2 + l''^2)}{(l' + l'')^2} \,.\, V. (A_1 A_2 A_3 A_4),$$

8. Un tetraedro 1234 è individuato da uno de' suoi vertici, p. es. dal vertice 1. Si dirà il tetraedro corrispondente a quel punto. Se A_1 si muove in $A_1 A_2$, i vertici 2, 3, 4 descriveranno sulle corrispondenti rette dei lati in cui giacciono delle punteggiate simili a quella descritta da 1, e simili fra loro. Dati in $A_1 A_2$ due punti 1, 1', a questi corrisponderanno due tetraedri 1234, 1'2'3'4'. Se invece di considerare il quadrangolo gobbo $A_1 A_2 A_3 A_4$ si considera il quadrangolo gobbo $A_1 A_2 A_4 A_3$, ai punti 1 o 1' corrisponderanno due nuovi tetraedri 1567, 1'5'6'7'. Questi quattro tetraedri coi loro vertici segnano un segmento per ogni spigolo del tetraedro fondamentale, tranne per lo spigolo $A_3 A_4$, opposto ad $A_1 A_2$, nel quale sono segnati due segmenti 33', 66'; e poichè

$$A_3 3 : 3 A_4 = A_4 6 : 6 A_3, \quad A_3 3' : 3' A_4 : A_4 6' : 6' A_3,$$

i punti 3 e 6, come i punti 3' e 6' sono equidistanti da A_3, A_4, e perciò $33' = 66'$. Si hanno così in tutto sei segmenti distinti, uno per ogni spigolo. Ora le punteggiate descritte dai punti 1, 2,... essendo simili, e ad A_1 corrispondendo A_2, ad A_2, A_3 ecc., si ha come è facile verificare:

$$\frac{11'}{A_1 A_2} = \frac{22'}{A_2 A_3} = \frac{33'}{A_3 A_4} = \frac{44'}{A_4 A_1} = \frac{55'}{A_4 A_2} = \frac{77'}{A_1 A_3},$$

cioè:

Se su d'un lato d'un tetraedro si prendono due punti, e si costruiscono i quattro tetraedri ad essi corrispondenti, questi coi loro vertici determinano sui lati del tetraedro fondamentale sei segmenti, che sono lati d'un nuovo tetraedro simile al dato.

9. Per semplicità d'esposizione un tetraedro iscritto in un altro si dirà di prima specie, se i suoi vertici cadono sulle facce dell'altro, uno per ciascuna faccia; di seconda specie se ha i vertici in due coppie di spigoli opposti, uno per ogni spigolo; di terza specie, se i detti vertici cadono in una coppia di spigoli opposti, due per ogni coppia.

10. *Se si prolungano i lati d'un tetraedro iscritto di seconda specie e isobaricentrico con il dato, i prolungamenti taglieranno i due spigoli* *rimanenti nei vertici d'un tetraedro iscritto di terza specie e isobaricentrico col dato.*

Infatti: 12,34 taglino A_1A_3 in P e Q rispettivamente, e 23,14 seghino A_2A_4 in R ed S ordinatamente. Si ha per il teorema di Menelao:

$$\frac{A_2 1}{1A_1}\cdot\frac{A_1P}{PA_3}\cdot\frac{A_3 2}{2A_2}=1,\quad \frac{A_2 4}{4A_4}\cdot\frac{A_4 3}{3A_3}\cdot\frac{A_3Q}{QA_1}=1,$$

da cui

$$\frac{A_3P}{A_1P}=\frac{QA_1}{QA_3},\quad \frac{A_3A_1}{A_1P}=\frac{A_3A_1}{QA_3},$$

e quindi $A_1P = QA_3$.

Similmente si dimostra che $A_2R = SA_4$.

Questi risultati dimostrano che PQ ed RS hanno gli stessi punti di mezzo di A_1A_3, A_2A_4, e cioè il tetraedro PQRS ha lo stesso baricentro di $A_1A_2A_3A_4$.

11. Si può determinare il volume del tetraedro PQRS. Infatti si deduce con facilità che

$$PQ=\frac{l'^2+l''^2}{l''^2-l'^2}A_1A_3,\qquad RS=\frac{l''^2+l'^2}{l''^2-l'^2}A_2A_4.$$

Inoltre

$$V.\ (A_1A_2A_3A_4)=\frac{1}{6}\delta A_1A_3\,.\,A_2A_4\,.\,\mathrm{sen}\,(A_1A_3,A_2A_4)$$

$$V.\ (PQRS)=\frac{1}{6}\delta PQ\,.\,RS\,.\,\mathrm{sen}\,(PQ,RS),$$

dove δ è la minima distanza fra le rette A_1A_3, A_2A_4. (*)

Di qui si trae

$$V.\ (PQRS)=\left(\frac{l'^2+l''^2}{l''^2-l'^2}\right)^2.\ V.\ (A_1A_2A_3A_4).$$

12. *Le mediane d'un tetraedro isobaricentrico iscritto di seconda specie tagliano le facce del tetraedro dato in quattro punti, vertici d'un tetraedro iscritto di prima specie isobaricentrico con il dato, e tagliano i prolungamenti delle facce stesse in altri quattro punti, vertici di un tetraedro analogo.*

Questo teorema insegna a costruire dei tetraedri isobaricentrici con uno dato e iscritti in esso.

I volumi di questi due tetraedri sono:

$$\frac{(l'-l'')(l'^2+l''^2)}{(3l'-l'')^2}.\ A_1A_2A_3A_4,\quad \frac{(l'-l'')(l'^2+l''^2)}{(l'-3l'')^2}.\ A_1A_2A_3A_4.$$

(*) BALTZER, *Trigon.*, § 6, 17.

Infatti, assunti come assi coordinati le rette A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, e posto $A_1A_2 = b$, $A_1A_3 = c$, $A_1A_4 = d$, con facili considerazioni si trovano come punti d'intersezione delle dette mediane con i piani delle facce del tetraedro fondamentale le seguenti due quaderne di punti:

$$A\left(\frac{b(l'-l'')}{3l-l'},\ \frac{cl'}{3l-l'},\ \frac{dl'}{3l'-l''}\right),\quad B\left(0,\frac{c(l'-l'')}{3l'-l''},\ \frac{dl'}{3l'-l'}\right),$$

$$C\left(\frac{bl'}{3l'-l''},\ 0,\ \frac{dl'}{3l'-l''}\right),\quad D\left(\frac{bl'}{3l-l'},\ \frac{cl'}{3l'-l'},0\right);$$

$$A'\left(\frac{bl''}{3l''-l'},\ \frac{cl'}{3l'-l'},\ \frac{d(l''-l')}{3l''-l'}\right),\quad B'\left(0,\frac{cl'}{3l'-l},\ \frac{dl'}{3l''-l}\right)$$

$$C'\left(\frac{b(l''-l')}{3l'-l'},\ 0,\ \frac{dl''}{3l''-l'}\right),\quad D'\left(\frac{bl''}{3l''-l'},\ \frac{c(l''-l')}{3l''-l'},0\right),$$

e si verifica subito che le coordinate dei baricentri dei tetraedri ABCD, A'B'C'D' sono $\frac{b}{4}$, $\frac{c}{4}$, $\frac{d}{4}$, cioè quelle stesse del baricentro del tetraedro dato.

Applicando poi a questi due tetraedri la nota formola per il calcolo del volume in funzione delle coordinate dei vertici, si otterranno, con facili trasformazioni, le formole scritte nell'enunciato.

13. *Se sulle rette $A_{13}A_4$, $A_{13}A_2$ si prendono i punti A'_2, A'_4 in modo che sia*

$$A_4A'_2 : A'_2A_{13} = A_2A'_4 : A'_4A_{13} = r$$

e sulle rette A_1A_{24}, A_3A_{24} si prendono i punti A'_3, A'_1 in modo che sia pure

$$A_1A'_3 : A'_3A_{24} = A_3A'_1 : A'_1A_{24} = r,$$

il tetraedro $A'_1A'_2A'_3A'_4$ ha lo stesso baricentro del tetraedro dato.

Infatti, posto $A_{24}A_{13} . A'_2A'_4 \equiv K$, $A_{24}A_{13} . A'_1A'_3 \equiv H$, si ha:

$$A_4A'_2 : A'_2A_{13} = A_{24}K : KA_{13};\quad A_1A'_3 : A'_3A_{24} = A_{13}H : HA_{24} = r.$$

Di qui si trae

$$A_{24}K : KA_{13} = HA_{13} : A_{24}H,$$

e quindi i segmenti $A_{13}A_{24}$, HK hanno lo stesso punto di mezzo. Ora essendo A_{13}, A_{24} i punti medi di A_1A_3, A_2A_4, ed H,K i punti medi di $A'_1A'_3$, $A'_2A'_4$, i due tetraedri $A_1A_2A_3A_4$, $A'_1A'_2A'_3A'_4$ hanno lo stesso baricentro, *c. d. d.*

Questo teorema insegna a costruire un'altra classe di tetraedri iscritti nel dato e isobaricentrici con esso.

14. *Se d'un tetraedro iscritto di 3ª specie e isobaricentrico con il dato le due coppie di spigoli, che hanno le medesime rette, sono proporzionali, le mediane tagliano le facce del tetraedro fondamentale in quattro punti, vertici d'un altro tetraedro isobaricentrico col dato.*

Sia PQRS, come precedentemente, un tetraedro isobaricentrico iscritto di 3ª specie, e si faccia l'ipotesi che $A_1A_3 : PQ = A_2A_4 : RS$. Si dicano G, G' i baricentri delle facce $A_2A_3A_4$, A_1RA_3, e si tiri A_4G', che tagli A_2A_{12} in un punto D. Applicando il teorema di Menelao al triangolo RA_2A_{12} tagliato dalla trasversale A_4G', si ha $A_2D : DA_{12} = 2SA_2 : RS$.

Similmente si ottengono sulle altre facce del tetraedro dato altri tre punti B, C, D tali che

$$\frac{A_4B}{BA_{13}} = 2 . \frac{A_4R}{RS}, \quad \frac{A_1C}{CA_{24}} = 2 . \frac{PA_4}{PQ}, \quad \frac{A_3A}{AA_{24}} = 2 . \frac{PA_4}{PQ}.$$

In virtù dell'ipotesi fatta, e per quanto è stato dimostrato al n. **13**, i secondi rapporti sono eguali, e quindi saranno eguali anche i primi; e allora (teorema precedente) il tetraedro ABCD ha lo stesso baricentro del dato.

La condizione espressa dal teorema precedente per concludere che ABCD è isobaricentrico con il dato, la quale è stata dimostrata sufficiente, è anche necessaria, come è facile verificare.

Catania, agosto 1896.

S. Catania.

FORMOLE RELATIVE AL NUMERO DELLE COMBINAZIONI SEMPLICI E CON RIPETIZIONE

dedotte dalle progressioni aritmetiche

Lo scopo di questa breve nota è di mostrare come le ordinarie formole che danno il numero delle combinazioni semplici e quello delle combinazioni con ripetizione di h elementi, si possano con un metodo, che mi sembra più naturale, dedurre dalle progressioni aritmetiche, e quindi di far vedere come il soggetto dei numeri combinatorii, tanto importante in questioni teoriche e pratiche, si possa anche in un corso liceale opportunamente trattare come una applicazione della accennata teoria.

1. Rappresentiamo gli n elementi dati, fra di loro differenti coi simboli

$$(\alpha) \qquad a_1, \ a_2 \ \ a_3 \dots a_n ;$$

e proponiamoci di trovare il numero delle combinazioni semplici della classe 2, cioè il numero dei gruppi che si possono formare con gli n elementi della serie (α), in modo che ogni gruppo contenga due elementi scelti da (α) e, ciascun gruppo differisca da ognuno degli altri per contenere almeno un elemento differente. Un tal numero si suole rappresentare con $C_{n,2}$ od anche con $\binom{n}{2}$.

Basterà osservare che il primo elemento a_1 di (α) si può successivamente accoppiare con ciascuno dei successivi, dando luogo in tal modo ad $(n-1)$ gruppi della specie richiesta, che il secondo elemento a_2 di (α) si può alla sua volta accoppiare con ciascuno dei successivi, dando luogo ad $n-2$ gruppi differenti fra di loro per il secondo elemento e differenti da quelli ottenuti prima per il primo elemento; nello stesso modo l'elemento a_3 darà $n-3$ gruppi differenti fra di loro e da tutti i precedenti, e finalmente il penultimo elemento a_{n-1} darà luogo al solo gruppo $(a_{n-1}\ a_n)$; in tal modo noi otteniamo tutte le combinazioni possibili della classe 2, poichè ognuna di queste, ordinata secondo gli indici crescenti degli elementi, dovrà cominciare con uno degli elementi di (α) e contenere un altro elemento ad esso successivo; inoltre tutti i gruppi ottenuti sono come si è visto, fra loro differenti, e però si avrà

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots 2 + 1$$

ossia

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

2. Per avere $C_{n,3}$ od $\binom{n}{3}$, ossia il numero dei gruppi, composti ciascuno di tre elementi differenti scelti da (α), e tali che ciascuno differisca da ognuno dei rimanenti per contenere almeno un elemento diverso, basta osservare che da ciascun gruppo di due elementi noi possiamo ottenere $n-2$ gruppi di tre elementi, aggiungendo ad esso ad uno ad uno ciascuno degli elementi in esso non contenuti; però ripetendo questa operazione per ciascuno dei gruppi della classe 2, si otterrebbe tre volte il medesimo gruppo di tre elementi; infatti ad es. il gruppo

$$a_i \quad a_j \quad a_k$$

si sarà ottenuto dai tre gruppi

$$a_i\, a_j \qquad a_i\, a_k \qquad a_j\, a_k$$

aggiungendovi rispettivamente gli elementi a_k, a_j, a_i: se vogliamo dunque ottenere il numero delle combinazioni differenti degli n elementi della classe 3, dovremo dividere per 3 il numero

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$$

e quindi si avrà

$$C_{n,3} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

3. Supponiamo ora che la legge precedentemente dimostrata per $C_{n,2}$ e $C_{n,3}$ sia valida per $C_{n,k}$ $(k < n)$ e dimostriamo che essa è valida per $C_{n,k+1}$ $(k+1 \leqq n)$.

Per ipotesi avremo

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k};$$

ora se ad ognuno dei gruppi composti di k elementi scelti da (α) noi aggiungiamo ad uno ad uno gli elementi esclusi dal gruppo stesso, che sono in numero di $n-k$, noi otterremo $(n-k)$ gruppi della classe $k+1$, e se nello stesso modo opereremo su ciascuno dei gruppi della classe k, otterremo in tutto

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)}{1.2.3\ldots k}$$

gruppi composti di $k+1$ elementi; ciascuno però di questi gruppi è ripetuto $k+1$ volte perchè ottenuto dalle $k+1$ combinazioni di k elementi deducibili dal gruppo stesso col trascurare uno qualunque degli elementi in esso contenuti; per avere quindi il numero dei gruppi differenti della classe $k+1$, si dovrà dividere il numero ottenuto per $k+1$ si avrà quindi

$$(\beta) \qquad C_{n,k+1} = \binom{n}{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{1.2.3\ldots k.(k+1)}.$$

4. Dalla formola (β) si deduce immediatamente che

$$(\gamma) \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1};$$

basterà ridurre i due termini del secondo membro allo stesso denominatore.

Applicando ripetutamente la (γ) avremo

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$
$$\binom{n-1}{k} = \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1},$$
$$\binom{n-2}{k} = \binom{n-3}{k} + \binom{n-3}{k-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\binom{k+1}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}.$$

e sommando le precedenti eguaglianze membro a membro, ed osservando che $\binom{k}{k} = \binom{k-1}{k-1} = 1$, avremo

$$(\delta) \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \cdots \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1}$$

5. Applichiamo la formola (δ) alla determinazione del numero $C'_{n,k}$ delle combinazioni con ripetizione degli elementi (α), cioè al numero dei gruppi che si possono formare cogli elementi di (α) ciascuno composto di k elementi eguali o differenti, ma tali che ogni gruppo differisca da ciascuno degli altri o per contenere un elemento differente oppure gli stessi elementi ma ripetuti un numero differente di volte.

Per avere $C'_{n,2}$ è chiaro che basta accoppiare ciascun elemento della serie (α) con sè stesso e con ciascuno dei seguenti, per cui si avrà

$$C'_{n,2} = n + (n-1) + (n-2) + \ldots 2 + 1,$$

cioè

$$C'_{n,2} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \binom{n+1}{2}.$$

Ammesso ora che si abbia $C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$, dimostriamo che si avrà ancora $C'_{n,k+1} = \binom{n+k}{k+1}$.

A tale scopo immaginiamo di disporre gli elementi di ciascun gruppo secondo l'ordine crescente (non decrescente) dei loro indici, e contiamo quanti sono i gruppi che terminano coll'elemento a_1, quanti quelli che terminano coll'elemento a_2, e finalmente quanti sono quelli che terminano coll'elemento a_n.

Un solo gruppo terminerà coll'elemento a_1 il quale vi sarà ripetuto $k+1$ volte; dunque di questo tipo ne avremo $\binom{k}{k}$; coll'elemento a_2 termineranno tanti gruppi quante sono le combinazioni con ripetizione della classe k che si possano formare coi due elementi a_1, a_2; essi saranno in numero $\binom{k+1}{k}$; in generale termineranno coll'elemento a_k ($k \leqq n$) tanti gruppi quante sono le combinazioni con ripetizione della classe k che si possano formare cogli elementi $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_{k-1}, a_k$ ossia $\binom{2k-1}{k}$; coll'elemento a_n termineranno tanti gruppi quante sono le combinazioni con ripetizione della classe k che si possano formare cogli n elementi dati, ossia $\binom{n+k-1}{k}$; si avrà quindi

$$C'_{n,k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots \binom{n+k-1}{k}$$

ma per la formola (δ) il secondo membro equivale a $\binom{n+k}{k+1}$ e però si avrà

$$C'_{n,k+1} = \binom{n+k}{k+1}.$$

FRANCESCO PANIZZA.

Venezia 1 febbraio 1897.

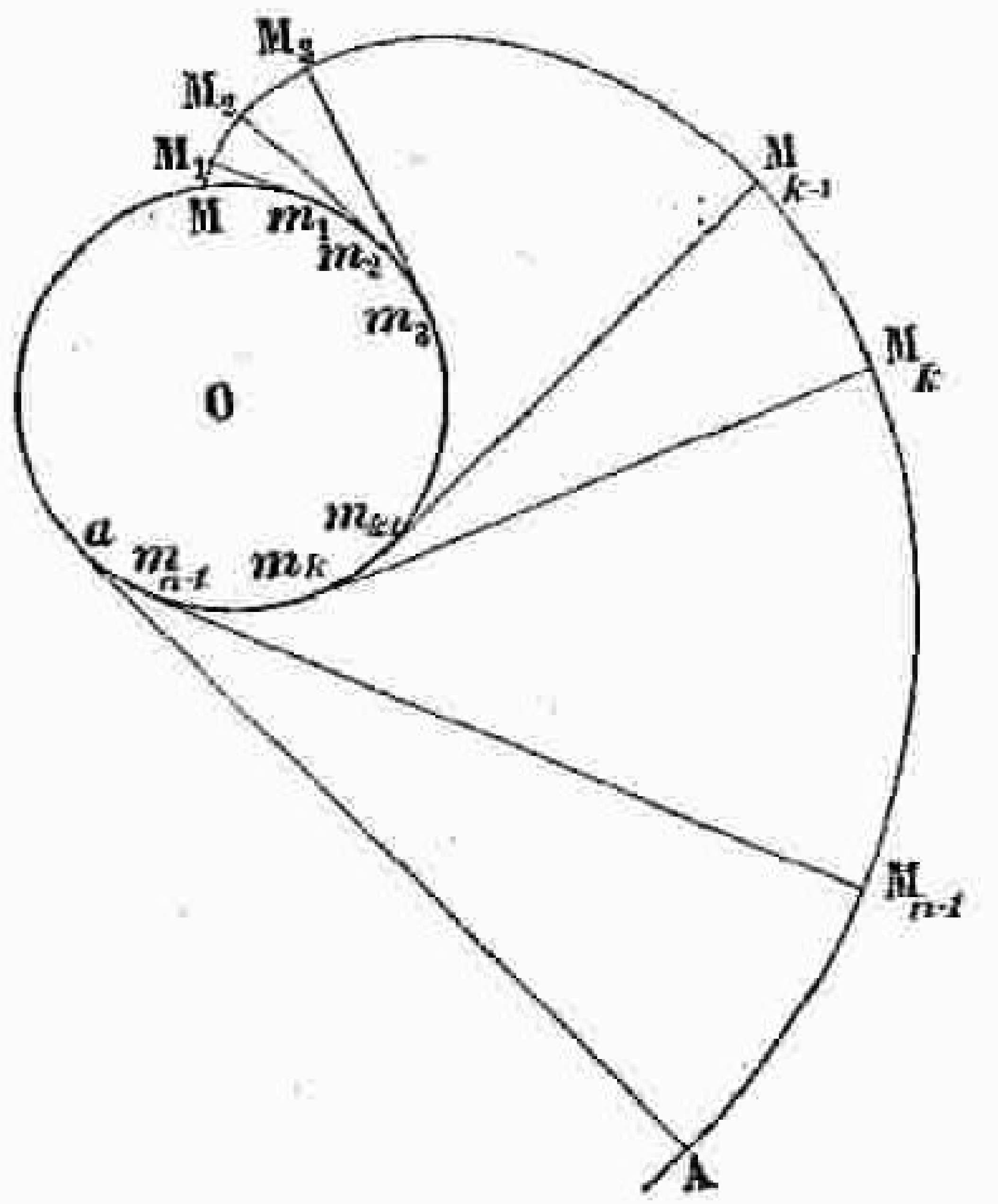
ALCUNE PROPRIETÀ DELLA SVILUPPANTE DI CERCHIO

§ 1. Se, dopo di avere avvolto un filo flessibile e inestendibile attorno a una circonferenza λ, lo si svolge tenendolo teso in linea retta e aderente al cerchio, l'estremità del filo descrive una curva Λ che si chiama *sviluppante* od *evolvente* del cerchio e questa inversamente è la *sviluppata* o l'*evoluta* della curva Λ. Potendosi il filo supporre idealmente di lunghezza indefinita, si comprende che Λ è una curva a spirale, che si avvolge infinite volte attorno al cerchio λ.

Sia M il punto comune alle curve Λ, λ (origine della sviluppante), o il centro del cerchio evoluta ed h il diametro di questo.

Fermato il movimento del filo quando è tangente al cerchio λ nel punto a, e chiamata aA la parte di esso che è rettilinea, i punti a e A si riguardano come *corrispondenti;* il punto a, il segmento aA $(=\rho)$ e l'altro OA $(=R)$ si dicono rispettivamente *centro di curvatura, raggio di curvatura* e *raggio vettore di* Λ *nel punto* A.

Dalla generazione di Λ si ricava che il raggio di curvatura ρ è costantemente eguale in lunghezza all'arco del cerchio evoluta che è compreso fra l'origine M e il centro di curvatura.



Sia MA $= s$ un arco qualunque di Λ, cominciante dall'origine M e M$a = \sigma$ l'arco corrispondente del cerchio λ. Diviso l'arco Ma in n parti eguali nei punti m_1, m_2, m_3, ... m_{k-1}, m_k, ... m_{n-1}, si tirino le tangenti $m_1 M_1$, $m_2 M_2$, $m_3 M_3$ .... $m_{k-1} M_{k-1}$, $m_k M_k$, ... $m_{n-1} M_{n-1}$, Aa, prolungandole fino all'incontro di Λ.

Se n è sufficientemente grande, gli archi MM_1, M_1M_2, M_2M_3, ... si possono considerare come archi circolari di centri m_1, m_2, m_3, ... e di raggi m_1M_1, m_2M_2, m_3M_3, ...

Chiamando t l'arco Mm_1, ε l'angolo formato da due tangenti consecutive ed osservando che queste tangenti hanno la stessa lunghezza dell'arco corrispondente di λ, si ha:

$$\text{arco } M_{k-1}M_k = m_k M_k \,.\, \varepsilon = Mm_k \,.\, \varepsilon = kt \,.\, \varepsilon$$

e quindi:

$$\sum_{k=1}^{k=n} M_{k-1}M_k = (1+2+3+\ldots+n)\,.\,t\varepsilon = \frac{n(n+1)}{2}\,.\,t\varepsilon = \frac{1}{2}nt\,.\,(n\varepsilon+\varepsilon).$$

Passando al limite per $n=\infty$, si trova:

$$s = \frac{1}{2}\sigma \,.\, \text{angolo } M\widehat{O}a;$$

e siccome:

$$\text{angolo } M\widehat{O}a = \frac{\text{arco } Ma}{\text{raggio}} = \frac{2\sigma}{h},$$

si ha:

$$(1) \qquad s = \frac{\sigma^2}{h}.$$

Ne viene di conseguenza che il raggio di curvatura $\rho\,(=\text{arco }\sigma)$ in un punto qualunque della sviluppante di cerchio è legato all'arco s, contato dall'origine, dalla relazione:

$$(2) \qquad \rho = \sqrt{h\,.\,s}.$$

Ora dal triangolo rettangolo OAa si ricava:

$$OA = \sqrt{\overline{Aa}^2 + \overline{Oa}^2} = \sqrt{\sigma^2 + \frac{h^2}{4}}$$

e, in causa dell'equazione (1):

$$(3) \qquad R = \sqrt{hs + \frac{h^2}{4}}.$$

Se A, B sono due punti qualunque della sviluppante, corrispondenti ai valori s, s_1 dell'arco ed R, R_1 i loro raggi vettori, la formola (3) e l'altra analoga:

$$R_1 = \sqrt{hs_1 + \frac{h^2}{4}}$$

(supponendo $s_1 > s$ e quindi $R_1 > R$) ci dànno:

$$h(s_1 - s) = R^2_1 - R^2,$$

da cui si ricava:

$$(4) \qquad \text{arco } AB = \frac{R^2_1 - R^2}{h}.$$

Determiniamo l'inclinazione θ del raggio vettore sulla linea Λ. Siano A, A_1 due punti vicinissimi di Λ e sia $OA_1 > OA$. Col centro O e col raggio OA si descriva l'arco di cerchio AC intercetto fra i raggi vettori OA, OA_1; avendosi

$$\text{arco } AA_1 = \frac{(OA + CA_1)^2 - \overline{OA}^2}{h} = \frac{CA_1(2 \cdot OA + CA_1)}{h},$$

si trova:

$$\frac{\text{arco } AA_1}{CA_1} = 2 \cdot \frac{OA}{h} + \frac{h}{CA_1}.$$

Si passi ora al limite, supponendo che A_1 vada indefinitamente avvicinandosi ad A; siccome la posizione-limite della congiungente A_1 con A è la tangente in A alla linea Λ, si trova:

$$\frac{1}{\cos\theta} = 2 \cdot \frac{OA}{h}, \qquad \text{ossia:} \qquad \cos\theta = \frac{2R}{h}.$$

§ 2. Dall'ultima formola trovata appare che il coseno θ è inversamente proporzionale al raggio vettore, e il fattore di proporzionalità è il raggio del cerchio evoluta.

Si trova ad es. $\theta = 30^\circ$, $\theta = 45^\circ$ rispettivamente nei punti in cui

$$s = \frac{h}{12}, \qquad s = \frac{h}{4}.$$

Gli archi MP_1, MP_2, MP_3 .... della sviluppante che corrispondono a 1, 2, 3, ... volte la circonferenza evoluta, si chiamino *cicli*. Essendo allora il raggio di curvatura della sviluppante all'estremità P_k del ciclo k^{mo} eguale a $kh\pi$, e quindi il raggio vettore eguale a:

$$\frac{h}{2}\sqrt{4k^2\pi + 1},$$

segue che:

« *L'inclinazione θ nell'estremità del ciclo* k^{mo} *è tale, che:* $\operatorname{tang}\theta = 2k \cdot \pi$ ».

Dall'equazione (4) si deduce che secondo che si abbia:

$$R_1 + R = mh, \qquad \text{ovvero} \qquad R_1 - R = mh,$$

si ha rispettivamente:

$$AB = m(R_1 - R), \qquad \text{ovvero} \qquad AB = m(R_1 + R).$$

Dunque:

« *Se la somma, o la differenza, di due raggi vettori è eguale a* m *volte il diametro del cerchio evoluta, l'arco intercetto da quei due raggi è rispettivamente eguale ad* m *volte la differenza, o la somma, dei due raggi vettori* ».

Dalla (4) si vede che, se a partire da un dato punto A si vuol portare, sulla sviluppante, l'arco AB di data lunghezza l, la determinazione di R_1, a cui si riduce evidentemente la soluzione del problema, si fa col mezzo dell'equazione:

$$(5) \qquad R_1 = \sqrt{R^2 \pm hl},$$

nella quale si prenderà il segno + o il segno —, secondo che l'arco l deve essere portato verso la parte dei raggi vettori crescenti o dei raggi vettori decrescenti.

Nel secondo caso però si deve notare che, non essendovi nella sviluppante di cerchio alcun raggio vettore minore di $\frac{h}{2}$, il problema è possibile soltanto quando sia:

$$l \leqq \frac{R^2}{h} - \frac{h}{4}.$$

Presi, a partire da A, i due archi $AB = AC = l$ in direzioni opposte, e chiamati x, y, i raggi vettori dei punti B, C si ha dalla (5):

$$x = \sqrt{R^2 + hl}, \qquad y = \sqrt{R^2 - hl}$$

ed eliminando l:

$$x^2 + y^2 = 2R^2.$$

Dunque:

« *La somma dei quadrati dei raggi vettori che vanno a punti situati da bande opposte di un punto dato* A *ed equidistanti da esso, è costante ed eguale a due volte il quadrato del raggio vettore che va ad* A ».

Per $l = mR$, si ha:

$$x = \sqrt{R(R + mh)}, \qquad y = \sqrt{R(R - mh)}$$

e quindi:

« *Per portare sulla sviluppante, a partire da* A, *un arco eguale ad* m *volte il raggio vettore di* A, *basta far partire da* O *un raggio vettore media proporzionale fra* R *ed* R + mh, *ovvero fra* R *ed* R — mh, *secondo che l'arco deve essere diretto verso la parte dei raggi vettori crescenti o dei raggi vettori decrescenti.*

Se nell'equazione (5) si considera il segno + e si suppone $l = h$, risulta:

$$R_1^2 = R^2 + h^2.$$

Perciò:

« *Se sopra una sviluppante di cerchio si prende un arco* AB *eguale al diametro del cerchio evoluta, nel triangolo mistilineo* OAB *è verificato il teorema di Pitagora, quando si consideri come ipotenusa il raggio vettore più grande* OB ».

Se nel triangolo mistilineo OAB si suppone verificata la condizione $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$, applicando l'equazione (4), si trova che fra i raggi vettori estremi R, R_1 deve sussistere la relazione:

$$\frac{(R_1^2 - R^2)^2}{h^2} = R_1^2 + R^2$$

la quale, risolta rapporto ad R_1 e limitata ai soli valori positivi, dà:

$$R_1 = \sqrt{\frac{h^2 + 2R^2 \pm h\sqrt{h^2 + 8R^2}}{2}}.$$

Non potendo R_1 ed R essere eguali, si può supporre $R_1 > R$, ed allora il segno $-$ davanti al radicale interno è da escludere, poichè prendendo tale segno, si giungerebbe alla diseguaglianza assurda:

$$h^2 - h\sqrt{h^2 + 8R^2} > 8.$$

Dunque:

« *In un triangolo mistilineo* OAB *è verificato il teorema di Pitagora, considerando l'arco* AB *come ipotenusa, quando si abbia:*

$$R_1 = \sqrt{\frac{h^2 + 2R^2 + h\sqrt{h^2 + 8R^2}}{2}}.$$

Nel caso particolare di $R = h$, si ha:

$$R_1 = \sqrt{3}\,.\,h.$$

A partire da un punto qualunque A si prenda un arco $AB = \frac{h}{4}$; e da B si conduca Bb tangente al cerchio evoluta. Dall'equazione (5) si ricava:

$$OB = \sqrt{\overline{OA}^2 + \frac{h^2}{4}}$$

e allora il triangolo rettangolo OBb ci dà:

$$Bb = \sqrt{\overline{OA}^2 - \frac{h^2}{4}} = OA.$$

Dunque:

« *Se sopra una sviluppante di cerchio, e a partire da un punto qualunque, si prende un arco eguale alla metà del raggio del cerchio evoluta, il raggio vettore nell'estremo più vicino all'origine dell'evoluta è eguale al raggio di curvatura nell'altro estremo* ».

Se nell'equazione (5) si suppone che il punto A coincida coll'origine M della sviluppante, si ha $R = \frac{h}{2}$ e l'equazione (5) diviene:

$$R_1 = \frac{\sqrt{h(h + l)}}{2}.$$

E se in questa si fa in generale:

$$l = n(n + 1)h,$$

essendo n un numero qualunque positivo, diverso da zero, si ha:

$$R_1 = \frac{2n + 1}{2}h.$$

Ad es. per $n = \frac{1}{2}$ risulta:

$$l = \frac{3}{4} h \quad , \quad R_1 = h$$

e quindi:

« *Un raggio vettore eguale al diametro del cerchio evoluta, stacca sulla sviluppante un arco eguale a* $\frac{3}{4}$ *del diametro; e reciprocamente* ».

Supponendo che nelle formole precedenti n sia un numero intero, si ha il teorema:

« *Se in una sviluppante di cerchio, a partire dall'origine, si prende un arco eguale ad* n (n + 1) *diametri del cerchio evoluta, il raggio vettore del punto estremo è eguale a* 2n + 1 *raggi; e reciprocamente* ».

(*Continua*) GEMINIANO PIRONDINI.

SOPRA ALCUNI POSTULATI DEL SEGMENTO

In una mia comunicazione all'Ass. Mathesis (Boll. 2), dopo aver constatata l'ingegnosità dell'osservazione del Prof. Frattini (1) (e del Prof. Giudice (2)) colla quale si deriva il postulato di De-Zolt (3) da quello di Archimede (4), esprimevo invece i miei dubbi sulla possibilità asserita dal Frattini (l. c.) di derivare inversamente A da Z.

La cosa per lo meno mi sembrava meritasse attenzione, perchè, dicevo se da Z discendesse A, il postulato A diverrebbe pei segmenti un teorema in quanto che Z è tale pei segmenti. Ora il Prof. Lazzeri ha osservato (5) che la dimostrazione di Z è appoggiata al postulato dell'inversibilità del segmento (6), per modo che il mio ragionamento si traduce nell'altro: da O discende Z, da Z discende A (per ipotesi), dunque da O discende A; sicchè, ricordando che Gérard (7) ha provato che da A discende O, il Prof. Lazzeri ha creduto a tutta prima di scorgere un

(1) Periodico 1895, pag. 153.

(2) *Boll. Mathesis*, 2.

(3) Questo postulato, (che, come mi ha osservato il Prof. Lazzeri, io avevo erròneamente attribuito al De-Paolis) ha per enunciato " Se una grandezza è divisa comunque in parti, non si può, trascurandone alcuno, comporre con le rimanenti l'intera grandezza, „ e sarà qui indicato con Z.

(4) Indicherò con A questo postulato che si enuncia: " date due grandezze omogenee diseguali esiste sempre una multipla della minore che supera la maggiore „.

(5) Periodico fas. 2, 1897 " Sul postulato dell'equivalenza „.

(6) Questo postulato è attribuito generalmente al Prof. D'Ovidio ed io l'indicherò sempre con O. Esso si enuncia " AB è sovraponibile a BA „. È da notarsi che esso equivale (logicamente) a quella parte del post. 2, di Veronese che si enuncia " Un segmento non è eguale ad una sua parte. Un segmento qualsiasi AB è eguale al segmento BA „. (Veronese in collab. con Gazzaniga — *Elementi di Geometria*, 1897, pag. 11. Cfr. più innanzi a pag. 14 il teor. 1 e seg.)

(7) Periodico 1896, fasc. 1.

circolo vizioso nel ciclo di proposizioni coesistenti: da A discende O, da O discende Z, da Z discende A (per ipotesi); e davvero a primo aspetto questo ciclo può parere vizioso; ma ritengo che il Prof. Lazzeri riconoscerà di essere stato tratto in inganno, forse dalla forma non sufficientemente esplicita del mio scritto, in cui di O non si parlava affatto. In ogni modo resta sempre desiderabile ciò che Egli in seguito richiede, che cioè si veda più chiaramente la dipendenza logica dei tre postulati O, Z, A pei segmenti. È ciò che tenterò di fare qui.

Intanto io proverò che *da* Z *non discende in generale* A, come appunto io avevo dubitato.

Consideriamo infatti con Bettazzi (¹) la classe Γ di grandezze formata dall'insieme delle tre seguenti categorie:

1° ordini di infinitesimo di x^{μ} per x positivo e infinitesimo, ove μ prende tutti i valori reali e positivi; (²)

2° Ordini di infinitesimo di $\left(a^{-\frac{1}{x}}\right)^{\nu}$ per x infinitesimo positivo ed $a > 1$, ove ν prenda tutti i valori reali e positivi.

3° Ordini di infinitesimo di $\left(a^{-\frac{1}{x}}\right)^{n} x^{\pm m}$ per x infinitesimo positivo ed $a>1$, ove n ed m prendono tutti i valori reali e positivi.

È chiaro che indicando con Ω l'ordine di infinitesimo di $a^{-\frac{1}{x}}$, quello di $\left(a^{-\frac{1}{x}}\right)^{\nu}$ sarà $\nu\Omega$, e quello di $\left(a^{-\frac{1}{x}}\right)^{n} x^{\pm m}$ sarà $n\Omega \pm m$, e che inoltre si ha sempre

$$\mu < \nu\Omega \quad , \quad \mu < n\Omega \pm m. \tag{α}$$

La Classe così formata

$$\Gamma = (\mu, \nu\Omega, n\Omega \pm m)$$

è *ad una dimensione* perchè di due qualunque delle sue grandezze avviene che o sono eguali o una è maggiore dell'altra. Inoltre la Classe è *ad un senso* perchè la somma di alcune delle sue grandezze non è mai minore (anzi è maggiore) di ciascuna di esse; ed essendo poi $a + b > a$ la Classe è certamente senza infinitesimi cioè non contiene grandezze che siano la differenza di grandezze eguali (³); in altre parole in essa vale il postulalo Z. La Classe è poi *propria* (⁴) ed inoltre è *illimitata* perchè non contiene grandezza minima (⁵).

(¹) BETTAZZI, *Teoria delle Grandezze*, opera premiata dalla R. Acc. dei Lincei. Pisa, Spoerri, 1890. V. pag. 41, n. 49.

(²) Qui, contrariamente a quanto fa il Bettazzi, si esclude che possa essere $\mu=0$ perchè, come non esiste il segmento zero, così vogliamo escludere per analogia che la nostra Classe contenga la differenza di due grandezze eguali.

(³) Quando, con Bettazzi, si ammette che ogni Classe contenga le differenze di grandezze eguali cioè gli infinitesimi, si possono fare due ipotesi: o si ammette che valga sempre per la somma la proprietà detta *dipendenza*, cioè si ammette che la somma si alteri se si cangia una (una sola) sua parte in un'altra disuguale (non confondasi il cangiare col sopprimere a dirittura), oppure si nega la dipendenza per il caso che si tratti di sostituire un infinitesimo con un altro. Nel primo caso si prova che (almeno nelle Classi *proprie*, cioè tali che contengono la differenza di due qualunque loro grandezze) tutti gli infinitesimi sono eguali e la grandezza che li rappresenta prende allora il nome di modulo della somma e si indica col simbolo O. (Bettazzi, l. c., pag. 13). La possibilità di Classi con infinitesimi differenti è subito palese considerando l'insieme di tutti gli angoli e di tutte le semistriscie del piano (Lazzeri, l. c.); queste ultime sono infinitesimi perchè un angolo può rimanere invariato coll'aggiunta di una semistriscia di qualunque altezza.

(⁴) Cioè contiene la differenza di due qualunque sue grandezze *disuguali*.

(⁵) Una classe non può contenere grandezza massima, perchè se contiene a e b, contiene anche $a+b$, ed $a+b > a$ (per b non infinitesimo e quindi *sempre* nel caso nostro).

Tuttavia a cagione della (α) non è manifestamente valido in tale Classe il postulato di Archimede. E ciò prova il nostro assunto, perchè per tale Classe, come si è già notato, vale il postulato di De-Zolt.

In secondo luogo dico che *da* Z *deriva* O (pei segmenti).

Infatti supponiamo che ribaltando un segmento AB su se stesso in modo che A vada in B, il punto B prenda una posizione C diversa da A; si potrà sempre supporre che C cada fra A e B. Allora avremo $AB = BC$ e potremo prendere fra B e C un punto D in modo che sia $ACB = BDC$, donde $BC = CD$. Ne segue $AB = CD$, mentre, essendo $AB = AC + CD + DB$, dev'essere, pel postulato Z, $AB > CD$. Dunque O è vero.

Di qui segue che neppure A può derivare da O; perchè se da O derivasse A, da Z derivando O, da Z deriverebbe A, il che non è possibile come si è già notato.

Così abbiam veduto che dei tre postulati O, Z, A uno solo (A) contiene gli altri due e può esser preso per fondamentale. Ma la poca evidenza di A rende opportuno di cercare di ricavare A da qualche altro postulato, unito (se occorre) ad uno dei due Z, O. Ora Bettazzi ha provato che la *connessione* (1) è per le Classi proprie illimitate la condizione necessaria e sufficiente per la validità di A (2). E siccome la connessione anzi la continuità è molto più evidente che A per la classe dei segmenti, così sembra opportuno accettarla insieme a Z (o ad O) per dimostrare A, salvo poi a verificare se Z sia o no contenuto in essa.

Ammettendo la continuità, diviene accettabile per esempio la seguente dimostrazione di A, che mi è stata recentemente comunicata dal Prof. De Amicis, e che io applicherò per più chiarezza ai segmenti. Supponiamo che entro AB cadano infiniti segmenti consecutivi AC, CC', $C'C''$, ... eguali fra loro. Allora ammessa la continuità si prova esistere un segmento $AM \not> AB$ (3) limite di $AC + CC' + C'C'' + \ldots$

Anche CM poi è limite di $CC' + C'C'' + \ldots$, e poichè le parti di queste due somme sono rispettivamente eguali, deve essere $CM = AM$, cioè la parte eguale al tutto, contro al postulato Z.

È più semplice però la dimostrazione di Bettazzi che suppone soltanto la connessione. Essa è la seguente:

Sia a un segmento, e si pongano in un gruppo P_1 tutti i segmenti p_1 che sono minori di a o di qualche multiplo di a, e in un altro gruppo P_2 tutti i rimanenti

---

(1) Quando tutte le grandezze di una Classe propria si ripartiscono in due gruppi P_1, P_2, in modo che tutte le grandezze di P_1 siano minori di quelle di P_2 possono darsi quattro casi.

1° Può darsi che P_1 abbia massimo e P_2 minimo.

2° Può darsi che P_1 abbia massimo e P_2 non abbia minimo.

3° Può darsi che P_1 non abbia massimo e P_2 abbia minimo.

4° Può darsi che nè P_1 abbia massimo nè P_2 abbia minimo.

Si dice allora che P_1 e P_2 dànno luogo nel 1° Caso a una *successione*, nel 2° e 3° a un *collegamento*, nel 4° a uno *spezzamento*.

Lo spezzamento si dice poi una *sezione* se la differenza fra una grandezza di P_2 e una di P_1 può prendersi minore di una grandezza qualunque assegnata; altrimenti si dice *salto*.

Le classi proprie illimitate non contengono che collegamenti o spezzamenti (mai successioni); esse diconsi *connesse*, quando non ammettono salti, e più in particolare diconsi *continue*, se non ammettono nè salti nè sezioni, cioè se ammettono soltanto collegamenti. (Non mi sembrano necessarie le considerazioni sulle classi chiuse e connesse che il Bettazzi premette alla definizione della continuità). Bettazzi, l. c., pag. 30, 31 e 40-41.

(2) Bettazzi, l. c., pag. 42-43.

(3) Il segno $\not>$ significa *non maggiore*. (Vedi Zeitschrift, fasc. 2° del 1897).

segmenti p_2, cioè quelli che sono maggiori di qualunque multiplo di a. Allora per la connessione si potrà prendere $p_2 - p_1 < a$ ossia $p_2 < p_1 + a$; ma se $p_1 < ma$ sarà $p_1 + a < (m+1)a$, e quindi $p_2 < (m+1)a$, contro l'ipotesi; dunque p_2 non esiste, e perciò nemmeno P_2, il che equivale a dire che è valido A.

Reggio Emilia 7 Aprile 97.

G. Sforza.

SULLA DEFINIZIONE D'INFINITO

Nei miei " Fondamenti per una teoria generale dei gruppi " (V. questo Periodico, anno 1896 e fasc. 2°, anno 1897) citando alcune delle definizioni di gruppo finito od infinito date da altri, censurai quella data dal prof. Biasi: il quale nell'ultimo fascicolo di questo Periodico difende la sua definizione. Mi permetta l'egregio prof. Biasi ch'io qui brevemente gli replichi.

La sua definizione è la seguente: (V. Biasi, *Elementi di Aritmetica ed Algebra*, Sassari, 1892, § 4). Un sistema si dirà *infinito*, se dopo aver pensato più cose del sistema, sia sempre possibile pensarne altre ancora o, brevemente, se si possa *continuare indefinitamente* a pensare nuove cose del sistema. In caso diverso si dirà *finito* ". Al § 1 del suo libro è poi detto: " Una cosa (prima) e un'altra od altre insieme (successive) sono *più* cose ". Io ho obiettato (V. Fondamenti-Introduzione) che tale definizione è assurda, cioè che non esistono gruppi o sistemi che sieno infiniti secondo essa, potendosi per *più* cose prendere *tutte* quelle del sistema, oltre le quali non ve ne sono altre; a meno di non intendere o sottintendere che le cose pensate costituiscano un gruppo finito, il che darebbe luogo ad un circolo vizioso.

Ora il prof. Biasi, nelle sue osservazioni, dice: " ....la definizione stabilisce " come condizione sufficiente, non necessaria, affinchè il gruppo sia finito, il fatto " che le cose siano pensate. E invero io non avevo precedentemente ammessa la " possibilità di pensare tutte le cose di un sistema, e mi era perciò lecito parlar " di sistemi, i cui individui non si potessero tutti pensare, come ho fatto ". Rispondo che precedentemente egli non ha ammessa, è vero, ma neppure ha esclusa quella possibilità; ma anche accettando questa modificazione, domando come si concepisce un sistema, del quale non si possono *pensare* tutte le cose? E quelle che non si possono *pensare* di che natura saranno? Se anche l'autore volesse dire che ammette la possibilità di non pensare *successivamente* tutte le cose del sistema (come forse si può intendere dalla sua citata definizione di *più* cose a causa di quel *successive* fra parentesi) la cosa forse cambierebbe aspetto, ed io intravederei il suo pensiero, ma non accetterei ugualmente la definizione, giacchè in essa si trova allora il concetto di ordine, assai complesso, che l'autore non cita nè spiega affatto prima.

Inoltre il prof. Biasi, a dimostrare la non assurdità delle sue definizioni e l'esistenza dei suoi gruppi infiniti, cita l'esempio che il Dedekind prese al Bolzano, quello cioè di tutti gli enti che possono essere oggetto del nostro pensiero, perchè, egli dice, " dopo aver pensato più enti, sieno essi materiali, o pensieri essi " stessi, rimangono sempre a pensare le loro immagini nella nostra mente „. Tale esempio non dimostra nulla. Quel gruppo esiste infatti, è vero, ed altri, con altre definizioni, può giustamente chiamarlo infinito; ma il ragionamento che l'autore fa per dirlo infinito nel senso suo si può applicare a qualunque gruppo, facendo così parere infiniti tutti i gruppi, meno quello di un solo ente, giacchè in ogni gruppo che non sia di un solo ente, pensatine *alcuni* ce ne sono sempre altri a cui pensare.

L'obiezione che fa il prof. Burali-Forti, e che il prof. Biasi riporta, cioè: che " in sostanza egli dice che è infinito ciò che è infinito e finito ciò che è finito „ mi pare che, interpretata convenientemente, abbia fondamento. Ed infatti intendendo la definizione del prof. Biasi nel solo modo nel quale, secondo me, può essere difesa, cioè col pensare *successivamente* le cose del sistema, se non si vuol cadere nell'obiezione fatta che si potranno sempre pensar *tutte* le cose dopo le quali non ce ne sono altre, bisognerà dire che un gruppo è infinito quando (come chiarisce l'autore stesso nel § 4) si possa continuare *indefinitamente* a pensare nuove cose del sistema, e qui si annida allora, com'è chiaro, l'idea di gruppo infinito, quella stessa che si vuol definire. E l'esempio che l'autore porta nel rispondere, cioè quello " dei punti contenuti in un segmento, il quale può dirsi finito perchè " ha *fine* da una banda e dall'altra, mentre per la definizione mia (del prof. Biasi) " è infinito „ non vale giacchè gli estremi del segmento sono finali soltanto per la loro posizione, proprietà speciale alla natura geometrica del gruppo, che non ha che far niente coll'idea del gruppo finito: e il segmento è finito soltanto in quanto è un ente individuo indipendentemente dall'essere costituito da un gruppo infinito o finito di punti, mentre il prof. Burali-Forti non intendeva, com'è chiaro, usare le sue parole finito ed infinito se non nel senso dei gruppi di punti.

Torino, 9 marzo 1897.

R. Bettazzi.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 284* 298* 342* 343* 344* 345* 346* 347* 348*

284*. *Di un quadrilatero* ABCD *sono noti i lati* $AB = a$, $BC = b$ *e gli angoli* A, B, C. *Dimostrare che l'area del quadrilatero è espressa da*

$$\left\{ ab\left[\operatorname{sen} B . \operatorname{sen}(A+B+C) - \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} C - \operatorname{sen}(B+C) . \operatorname{sen}(A+B)\right] + a^2 \operatorname{sen} A . \operatorname{sen}(B+C) + b^2 \operatorname{sen} C . \operatorname{sen}(A+B) \right\} : 2 \operatorname{sen}(A+B+C).$$

A. Lugli.

Risoluzione del Prof. A. Chiari.

Siano α e β gli angoli che i lati b e a del quadrilatero fanno con la sua diagonale $d = AC$. Posto $AD = y$, $CD = x$, l'area della figura è espressa da

$$(1) \qquad S = \frac{1}{2}\left\{ab \operatorname{sen} B + xy \operatorname{sen} D\right\}.$$

Dal triangolo ACD, per le relazioni esistenti tra gli elementi d'un triangolo, si ottiene

$$x = \frac{d \operatorname{sen}(C - \alpha)}{\operatorname{sen} D}, \qquad y = \frac{d \operatorname{sen}(A - \beta)}{\operatorname{sen} D},$$

e quindi

(2) $$xy = \frac{d^2 \operatorname{sen}(C - \alpha) \operatorname{sen}(A - \beta)}{\operatorname{sen}^2 D}.$$

Dal triangolo ABC si ottiene

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a \operatorname{sen} B}{d}, \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{b \operatorname{sen} B}{d},$$

$$\cos\alpha = \frac{b - a\cos B}{d}, \qquad \cos\beta = \frac{a - b\cos B}{d}.$$

Sviluppando la (2), e sostituendo in essa questi valori si ha

$$xy = \frac{ab\left[\operatorname{sen} A.\operatorname{sen} C + \operatorname{sen}(A+B).\operatorname{sen}(B+C)\right] - a^2 \operatorname{sen} A.\operatorname{sen}(B+C) - b^2 \operatorname{sen} C.\operatorname{sen}(A+B).}{\operatorname{sen}^2 D}$$

Posto questo valore nella (1) risulta, essendo $\operatorname{sen} D = -\operatorname{sen}(A+B+C)$,

$$S = \left\{ab\left[\operatorname{sen} B.\operatorname{sen} A(+B+C) - \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} C - \operatorname{sen}(B+C).\operatorname{sen}(A+B)\right] + a^2 \operatorname{sen} A.\operatorname{sen}(B+C) + b^2 \operatorname{sen} C.\operatorname{sen}(A+B)\right\} : \operatorname{sen}(A+B+C).$$

Si osservi che se il quadrilatero è iscritto, $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} C$; $\operatorname{sen}(A+B+C) = -\operatorname{sen} B$; $\operatorname{sen}(B+C) = \operatorname{sen}(A-B)$ e che la formola diviene in valore assoluto

$$S = \frac{2ab \operatorname{sen}^2 A - \left[(a^2+b^2)\operatorname{sen} A \cos B - (a^2-b^2)\cos A \operatorname{sen} B\right]\operatorname{sen} A}{2 \operatorname{sen} B}.$$

Se il quadrilatero è un parallelogrammo, la formola si semplifica in

$$S = ab \operatorname{sen} B.$$

Altre risoluzioni del Prof. Castelli e del sig. Celestri.

298*. *Scomporre un numero* N *in tre parti* x, y, z *in progressione aritmetica, e tali che la somma dei loro cubi sia eguale al cubo di un numero* P, *e trovare le condizioni perchè i tre numeri* x, y, z *resultino reali e positivi.*

Risoluzione dei sigg. Giulio Michetti, studente dell'Università di Pisa e G. Lubrano.

Si ha il sistema:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x + y + z = N \\ (2) & x^3 + y^3 + z^3 = P^3 \\ (3) & x + z = 2y.\end{array}\right\}$$

Sostituendo nella (1) il valore di $x+z$ dato dalla (3) si ha l'equazione

$$y + 2y = N \quad , \quad \text{da cui} \quad y = \frac{N}{3}.$$

Sostituendo nella (2) questo valore di y, si ha

(4) $$x^3 + \frac{N^3}{27} + z^3 = P^3;$$

dall'identità

$$x^3 + z^3 = (x+z)^3 - 3xz(x+z),$$

sostituendoci i valori noti avremo:

$$x^3 + z^3 = \frac{8N^3}{27} - 2xzN,$$

e per conseguenza la (4) diviene

$$\frac{8N^3}{27} - 2xzN + \frac{N^3}{27} = P^3,$$

e da questa equazione si ricava

$$xz = \frac{N^3 - 3P^3}{6N};$$

ed essendo

$$x + z = \frac{2N}{3}$$

i valori di x e z sono le radici dell'equazione di 2° grado

$$(5) \qquad m^2 - \frac{2N}{3}m + \frac{N^3 - 3P^3}{6N} = 0;$$

dunque:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\left(N \pm \sqrt{\dfrac{9P^3 - N^3}{2N}}\right) \\ y = \dfrac{N}{3} \\ z = \dfrac{1}{3}\left(N \pm \sqrt{\dfrac{9P^3 - N^3}{2N}}\right). \end{cases}$$

Queste due soluzioni sono simmetriche, e ragione di ciò si ha ricordando le proprietà delle progressioni aritmetiche.

Discussione. — Il numero dato N è da supporsi positivo, e quindi perchè x e z sieno reali bisogna che sia

$$9P^3 - N^3 \geqq 0,$$

da cui

$$N \leqq P\sqrt[3]{9}.$$

Siccome x e z sono le radici dell'equazione (5), affinchè sieno positive, bisognerà che il primo membro della (5) abbia due variazioni; il che richiede che sia

$$N^3 - 3P^3 \geqq 0,$$

da cui

$$N \geqq P\sqrt[3]{3}.$$

Dunque la condizione affinchè x, y, z sieno reali e positivi è:

$$P\sqrt[3]{9} \geqq N \geqq P\sqrt[3]{3}.$$

342*. *Indicando i vertici di un quadrilatero inscritto in un circolo con 1, 2, 3, 4 i lati con* a, b, c, d, *con* h_{3a}, *per esempio, la distanza dal vertice* 3 *al lato* a, *e con* m_{3a} *il segmento congiungente il vertice* 3 *col punto medio del lato* a. *Dimostrare le seguenti formule:*

$$a) \qquad \frac{h_{1b}}{h_{2d}} = \frac{h_{3a}}{h_{2c}} = \frac{h_{3d}}{h_{4b}} = \frac{h_{1c}}{h_{4a}},$$

$$b) \qquad S = \frac{1}{2}\sqrt[4]{(ah_{1a} + bh_{4b})(bh_{1b} + ch_{1c})(ch_{2c} + dh_{2d})(dh_{3d} + ah_{3a})},$$

$$c) \qquad (h_{1b} + h_{3d} + h_{1c} + h_{3a})\left(\frac{1}{h_{1b}} + \frac{1}{h_{3d}} + \frac{1}{h_{1c}} + \frac{1}{h_{3a}}\right) =$$

$$(h_{2c}+h_{4a}+h_{2d}+h_{4b})\left(\frac{1}{h_{2c}}+\frac{1}{h_{4a}}+\frac{1}{h_{2d}}+\frac{1}{h_{4b}}\right)$$
$$=(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right),$$

d) $$m^2_{1b}+m^2_{2c}+m^2_{3d}+m^2_{4a}=m^2_{3a}+m^2_{2d}+m^2_{1c}+m^2_{4b}.$$

G. Candido.

Risoluzione del sig. Gino Lubrano, studente d'Istituto tecnico a Livorno.

Dato un quadrilatero 1, 2, 3, 4 inscritto in un circolo di raggio R, indichiamo con x ed y le sue diagonali 13, 24.

Consideriamo separatamente i triangoli formati da una diagonale e da due lati consecutivi; per un teorema noto avremo

$$h_{1b}=\frac{ax}{2R},\ h_{3a}=\frac{bx}{2R},\ h_{3d}=\frac{cx}{2R},\ h_{1c}=\frac{dx}{2R},\ h_{2d}=\frac{ay}{2R},\quad h_{2c}=\frac{by}{2R},\ h_{4b}=\frac{cy}{2R},\ h_{4a}=\frac{dy}{2R}.$$

Se dividiamo la prima di queste eguaglianze per la quinta, la seconda per la sesta, la terza per la settima, la quarta per l'ottava, abbiamo

$$\frac{h_{1b}}{h_{2d}}=\frac{x}{y},\quad \frac{h_{3a}}{h_{2c}}=\frac{x}{y},\quad \frac{h_{3d}}{h_{4b}}=\frac{x}{y},\quad \frac{h_{1c}}{h_{4a}}=\frac{x}{y}.$$

Siccome i secondi membri di queste eguaglianze sono eguali, così devono essere pure eguali i primi, e la formula (a) è dimostrata.

La superficie S di tutto il quadrilatero è uguale alla somma delle superficie dei due triangoli, nei quali è scomposto da ciascuna dalle due diagonali, così le aree dei triangoli 123, 341 essendo rispettivamente eguali a $\frac{1}{2}\,b\,h_{1b}$, $\frac{1}{2}ch_{1c}$, si ha

$$S=\frac{1}{2}(bh_{1b}+ch_{1c}),$$
$$S=\frac{1}{2}(ah_{4a}+bh_{4b}),$$
$$S=\frac{1}{2}(ch_{2c}+dh_{2d}),$$
$$S=\frac{1}{2}(dh_{3d}+ah_{3a}).$$

Moltiplicando membro a membro queste eguaglianze e risolvendo rispetto ad S, si ha la formula (b).

Per dimostrare la formula (c) basta sostituire alle altezze i valori che sono espressi dalle formule sopra stabilite, e si ha

$$\left(h_{1b}+h_{3d}+h_{1c}+h_{3a}\right)\left(\frac{1}{h_{1b}}+\frac{1}{h_{3d}}+\frac{1}{h_{1c}}+\frac{1}{h_{3a}}\right)=\frac{x}{2R}\left(a+b+c+d\right)\frac{2R}{x}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=$$
$$=\left(a+b+c+d\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

Similmente

$$\left(h_{2c}+h_{4a}+h_{2d}+h_{4b}\right)\left(\frac{1}{h_{2c}}+\frac{1}{h_{4a}}+\frac{1}{h_{2d}}+\frac{1}{h_{4b}}\right)=\frac{y}{2R}\left(a+b+c+d\right)\frac{2R}{y}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=$$
$$=\left(a+b+c+d\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

e la formula (c) è dimostrata.

Per dimostrare l'eguaglianza (d) applicheremo il teorema delle mediane ai triangoli già osservati, ed avremo:

$$m^2_{1b}=\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{2}{a}-\frac{b^2}{2}\right) \qquad m^2_{3a}=\frac{1}{2}\left(x^2+b^2-\frac{a^2}{2}\right)$$

$$m^2_{2c}=\frac{1}{2}\left(y^2+b^2-\frac{c^2}{2}\right) \qquad m^2_{2d}=\frac{1}{2}\left(y^2+a^2-\frac{d^2}{2}\right)$$

$$m^2_{3d}=\frac{1}{2}\left(x^2+c^2-\frac{d^2}{2}\right) \qquad m^2_{1c}=\frac{1}{2}\left(x^2+d-\frac{c^2}{2}\right)$$

$$m^2_{4a}=\frac{1}{2}\left(y^2+d^2-\frac{a^2}{2}\right) \qquad m^2_{4b}=\frac{1}{2}\left(y^2+c^2-\frac{b^2}{2}\right).$$

Sommando avremo:

$$m^2_{1b}+m^2_{2c}+m^2_{3d}+m^2_{4a}=x^2+y^2+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2),$$

$$m^2_{3a}+m^2_{2d}+m^2_{1c}+m^2_{4b}=x^2+y^2+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2);$$

ma due quantità eguali ad una terza sono eguali fra loro, e la formula (c) resta dimostrata.

Altre risoluzioni del sig. Barbagallo e del sig. G. Guadalupi, alunno del R. istituto tecnico di Bari.

343*. *La cifra delle decine di qualunque potenza di 3 non può mai essere dispari.*

Bonolis.

Risoluzione del sig. Francesco Barbagallo, alunno del R. istituto tecnico di Catania e del sig. T. Mari.

Infatti la cifra delle unità in qualunque potenza di 3 non può essere che 1, 3, 7, 9, poichè una potenza di 3 non è divisibile nè per 2, nè per 5, epperò moltiplicando una potenza di 3 per 3 la cifra delle decine da riportare è sempre 0 o 2; per cui, essendo il prodotto di due numeri dispari uguale ad un numero dispari ed il prodotto di un numero dispari per un numero pari uguale ad un numero pari, la cifra delle decine in una potenza di 3 o è sempre pari, o è sempre dispari, ma nella terza potenza di 3 la cifra delle decine è 2, sicchè resta dimostrato che in una potenza qualunque di 3 la cifra delle decine non può essere mai dispari.

344*. *In qualunque potenza di 5 la cifra delle unità è sempre 5, quella delle decine è sempre 2, la cifra delle centinaia non può essere che 1 o 6, quella delle unità di migliaia non può essere che 0, 3, 5, 8 (0 e 5 corrispondono al 6; 3 ed 8 all'1), e finalmente la cifra delle decine di migliaia non può mai essere nè 3, nè 8.*

Bonolis.

Risoluzione del sig. Francesco Barbagallo.

Essendo una potenza di 5 divisibile per 5 e non per 2, è evidente che la cifra delle unità è sempre 5, onde moltiplicando una potenza di 5 per 5 la cifra delle decine da riportare è sempre 2. Ora essendo il prodotto di 5 per un numero pari uguale ad un multiplo di 10, ed il prodotto di 5 per un numero dispari = ad un multiplo di 10 più 5, risulta chiaro che in qualunque potenza di 5 la cifra delle decine deve essere o sempre 2, o sempre 7; ma è 2 nella potenza 5^2, onde resta dimostrato che la cifra delle decine in una potenza di 5 è sempre 2.

Moltiplicando così una potenza di 5 per 5 la cifra delle centinaia da riportare è sempre 1, epperò qualunque sia la cifra delle centinaia nella potenza 5^{m-1} è chiaro che nella potenza 5^m la cifra delle centinaia è o 1, o 6; e precisamente, se nella potenza 5^m è 1 la cifra delle centinaia è chiaro che in 5^{m+1} deve essere 6 ed in 5^{m+2} deve essere nuovamente 1, e così di seguito alternativamente: e siccome in 5^3 la cifra delle centinaia è 1, possiamo stabilire che in una potenza di 5, la cifra delle centinaia è 1 o 6 secondo che l'esponente è dispari o pari.

Moltiplicando una potenza di 5 per 5 la cifra delle unità di migliaia da riportare è 0 ovvero 3; epperò qualunque sia la cifra delle unità di migliaia nella potenza 5^{m-1}, la cifra delle unità di migliaia nella potenza 5^m deve essere 0, 3, 5, 8, e precisamente se $m = 2n$, nella potenza 5^{m-1} la cifra delle centinaia è 1, onde moltiplicando 5^{m-1} per 5 la cifra delle unità di migliaia da riportare è 0, per cui in 5^m la cifra delle centinaia è 6, e la cifra delle unità di migliaia è o 0, o 5; se poi $m = 2n + 1$ allora nella potenza 5^{m-1} la cifra delle centinaia è 6 e moltiplicando 5^{m-1} per 5 la cifra delle unità di migliaia da riportare è 3, onde nella potenza 5^m la cifra delle centinaia è 1 e la cifra delle unità di migliaia è 3 o 8.

Moltiplicando una potenza di 5 per 5 la cifra delle decine di migliaia da riportare è sempre 0, 1, 2, 4, onde qualunque sia la cifra delle decine di migliaia nella potenza 5^m, nella potenza 5^{m+1} la cifra delle decine di migliaia non può essere nè 3, nè 8.

345*. *La cifra delle decine di qualunque potenza di 7 non può essere che 0 o 4; e propriamente è 0 se la cifra delle unità della potenza è 1 o 7, ed è invece 4 se la cifra delle unità è 3 o 9.*

BONOLIS.

Risoluzione del sig. Francesco Barbagallo.

Infatti è evidente che, se due potenze di 7 hanno contemporaneamente la stessa cifra delle unità e la stessa cifra delle decine, nelle potenze successive le cifre delle unità e le cifre delle decine si debbono ripetere con lo stesso ordine come nelle antecedenti, ed essendo, 7, 9, 3, 1, 7,... le cifre delle unità; 0, 4, 4, 0, 0,... le cifre delle decine nelle rispettive potenze 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª,..., possiamo dire che nelle potenze di 7 in cui la cifra delle unità è 7, 9, 3, 1, la cifra delle decine è rispettivamente 0, 4, 4, 0, e possiamo osservare inoltre che dette potenze debbono essere rispettivamente della forma $4K + 1$, $4K + 2$, $4K - 1$, $4K$.

346*. *Il quadrato d'un numero, formato da* p *cifre* 9 *seguite da una cifra qualunque* a, *si compone di* p − 1 *cifre* 9, *seguite dal complemento* a 100 *del doppio di* 10 − a, *da* p − 1 *zeri e dal quadrato di* 10 − a *preceduto da uno zero se è di una cifra. Per esempio*

$$999998^2 = 9999\ 96\ 0000\ 04,$$
$$999993^2 = 9999\ 86\ 0000\ 49.$$

BONOLIS.

Risoluzione del sig. Francesco Barbagallo e del sig. Guido Bordi.

Infatti indicando con $999\ldots 9$ un numero in cui sono p cifre uguali a 9, abbiamo:

$$\begin{aligned}
999\ldots 9a^2 &= [10^{p+1} - (10 - a)]^2 \\
&= 10^{2p+2} - 2(10 - a)\,10^{p+1} + (10 - a)^2 \\
&= 10^{2p+2} - 2 \times 10^{p+2} + 2a\,10^{p+1} + (10 - a)^2 \\
&= (10^p \quad - 2)\,10^{p+2} + 2a\,10^{p+1} + (10 - a)^2 \\
&= (\underset{12\ldots p}{99\ldots 9} \times 10 + 8)\,10^{p+2} + 2a\,10^{p+1} + (10 - a)^2 \\
&= \underset{12\ldots p}{99\ldots 9} \times 10^{p+3} + 8 \times 10^{p+2} + 2a\,10^{p+1} + (10 - a)^2 \\
&= \underset{12\ldots p}{99\ldots 9} \times 10^{p+3} + (80 + 2a)\,10^{p+1} + (10 - a)^2
\end{aligned}$$

e siccome

$$80 + 2a = 100 - 2(10 - a)$$

e

$$a < 9$$

anche

$$80 + 2a < 100$$

onde $(80 + 2a)\,10^{p+1}$ non può contenere più di 2 cifre seguite da $p + 1$ zeri; e analogamente essendo

$$(10 - a)^2 < 100$$

anche $(10 - a)^2$ non può contenere più di 2 cifre, onde il teorema resta dimostrato.

317*. *Se un numero P è formato da n cifre uguali ad* a, *seguite dalla cifra* b, *e da ognuna di queste cifre si tolgono* c *unità, si avrà un nuovo numero il cui quadrato si otterrà dal quadrato di P togliendo da ognuna delle sue cifre* c *unità, soltanto per*

$$a = 5,\ 6,\ 7,\ 8$$
$$b = 6,\ 7,\ 8,\ 9$$
$$c = 1,\ 3,\ 5,\ 7$$

per esempio

$$(55\ldots56 - 11\ldots11)^2 = 55\ldots56^2 - 11\ldots11$$
$$(66\ldots67 - 33\ldots33)^2 = 66\ldots67^2 - 33\ldots33$$
$$(77\ldots78 - 55\ldots55)^2 = 77\ldots78^2 - 55\ldots55$$
$$(88\ldots89 - 77\ldots77)^2 = 88\ldots88^2 - 77\ldots77$$

BONOLIS.

Risoluzione del sig. Francesco Barbagallo, alunno del R. Istituto Tecnico di Catania.

Indichi λ un numero formato di n cifre uguali ad a, seguite dalla cifra b: e μ un numero formato di $n + 1$ cifre uguali a c; allora il problema può ridursi all'espressione

(1)
$$(\lambda - \mu)^2 = \lambda^2 - [(\mu - c)\,10^n + \mu]$$

ovvero

(2)
$$(\lambda - \mu)^2 = \lambda^2 - (\mu\,10^{n+1} + \mu)$$

secondo che λ^2 contenga $2n + 1$, o $2n + 2$ cifre. Dalle precedenti uguaglianze si può escludere il caso di $c = 9$ poichè allora in esse i secondi membri dovrebbero essere negativi.

Ora dalla (1) si ha:

$$\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu = \lambda^2 - \mu\,10^n + c\,10^n - \mu$$

da cui

$$10^n + \mu + 1 - \frac{c}{\mu}\,10^n = 2\lambda$$

ciò che è impossibile, poichè n contenendo $n + 1$ cifre uguali a c sarà:

$$c\,10^n < \mu$$

per cui $10^n + \mu + 1 - \dfrac{c}{\mu}\,10^n$ è sempre frazionario, mentre 2λ è sempre intero.

Escluso il caso quindi che λ^2 contenga $2n + 1$ cifre, si ha dalla (2)

$$\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu = \lambda^2 - \mu\,10^{n+1} - \mu$$

cioè $10^{n+1} + \mu + 1 = 2\lambda$ ovvero

$$c\,.\underset{12\,\ldots\,n+1}{11\ldots1} + 9\,.\underset{12\,\ldots\,n+2}{11\ldots1} + 2 = 2a\,.\underset{12\,\ldots\,n+1}{11\ldots1} - 2a + 2b$$

da cui

$$c = 2a - 9 - 2\,\frac{a - b + 1}{\underset{12\,\ldots\,n+1}{11\ldots1}}$$

ed in conseguenza, essendo c un numero intero di una sola cifra,

$$a-b+1=9, \quad c=2a-q, \quad a \overline{\geq} 5; \quad b=a+1.$$

Dando quindi ad a i valori 5, 6, 7, 8 si ricavano per b i valori 6, 7, 8, 9 e per c i valori 1, 3, 5, 7.

348*. *Il prodotto d'un numero qualunque* N *di* p *cifre, per un numero formato da* p *cifre uguali a* 9, *è uguale al numero* N — 1, *seguito dal complemento di* N *rispetto a* 10^p.

BONOLIS.

Risoluzione dei sigg. Francesco Barbagallo, Guido Bordi, G. Guadalupi e T. Mari.

Indicando con N un numero in cui le cifre sono p, e con Ψ un numero formato da p cifre uguali a 9 si ha:

$$\begin{aligned} N \cdot \Psi &= N \times (10^p - 1) \\ &= N\,10^p - N \\ &= (N-1)\,10^p + 10^p - N; \end{aligned}$$

e siccome N contiene p cifre sarà:

$$N > 10^{p-1}$$

onde

$$10^p - N < 10^{p-1}(10-1)$$

e a più forte ragione

$$10^p - N < 10^p$$

onde $10^p - N$ non può contenere più di p cifre; epperò il teorema resta dimostrato.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

349.* Se, A, B sono due punti qualunque di due piani α, β non paralleli, si trovi il punto X della retta (α, β) per il quale l'angolo $A\widehat{X}B$ è massimo.

350*. Dati due punti A, B, ambedue esterni o ambedue interni ad un circolo o ad una sfera, si trovi un punto del circolo o della sfera, tale che la somma delle due distanze da A e B sia massima o minima.

GAMBIOLI.

351*. Risolvere il sistema

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2 \\ y(x+z+u) = b \\ x(z+u) + zu = c \\ xz = d \end{gathered}$$

CANDIDO.

352*. Determinare una piramide triangolare regolare, conoscendo la superficie totale s e la distanza h dei vertici della base dalle facce opposte.

353*. Determinare un triangolo, dati il perimetro $2p$ e due altezze h, k.

LUIGI BOSI.

(*) Le quistioni contrassegnate con un asterisco sono proposte particolarmente agli studenti delle scuole secondarie; le altre a tutti gli studiosi indistintamente.

354. Dati in un piano due cerchi, la conica K^2 avente per fuochi i loro centri, e inscritta nel quadrilatero ad essi circoscritto, è bitangente al cerchio radicale [1] dei cerchi dati: Il luogo dei punti di mezzo delle corde (reali o ideali), che le tangenti di K^2 staccano nei due cerchi, è il cerchio radicale.

355. Se due cerchi eguali si segano sotto un angolo di 60°, il loro cerchio radicale è il luogo della projezione (ortogonale) di un punto dell'un cerchio sulla sua polare rispetto all'altro.

356. Costruire le parabole che hanno una data direttrice, e

a) passano per due punti dati,

b) passano per un punto e toccano una retta data,

c) toccano due rette date.

357. Costruire le parabole, aventi per direttrice una retta data, e

a) bitangenti ad un cerchio dato;

b) osculatrici ad un cerchio dato.

358. Se (ρ_0, ω_0), (ρ_1, ω_1), (ρ_2, ω_2) sono i raggi vettori e le corrispondenti anomalie vere di un pianeta in tre posizioni P_0, P_1, P_2, il parametro dell'orbita è

$$p = \frac{\rho_0\,\rho_1\,\rho_2}{2\,\Delta}\left[\operatorname{sen}(\omega_0 - \omega_1) + \operatorname{sen}(\omega_1 - \omega_2) + \operatorname{sen}(\omega_2 - \omega_0)\right],$$

ove Δ è l'area del triangolo $P_0 P_1 P_2$.

363*. Sapendosi che per $a > 7$, tra $\frac{a}{2}$ ed $a - 2$ esiste per lo meno un numero primo, dimostrare che il prodotto dei fattori primi inferiori ad n e che non lo dividono è, da un certo valore di n in poi, maggiore di n.

364. Indicando in generale con $f(a, b)$ l'espressione [2]

$$d_1 \,.\, d_2 \ldots d_n \,.\, \varphi\left(\frac{a}{d_1 \,.\, d_2 \ldots d_n}\right),$$

nella quale è

$$d_1 = D(a,b),\ d_2 = D\left(\frac{a}{d_1}, d_1\right),\ d_3 = D\left(\frac{a}{d_1\, d_2}, d_2\right) \ldots, d_n = D\left(\frac{a}{d_1\, d_2 \ldots d_{n-1}}, d_{n-1}\right),$$

e si suppone $d_{n+1} = 1$, dimostrare che se a, b sono divisori di m sussiste la relazione:

$$f(n, a) \,.\, f(a, b) \,.\, b = + \ f(n, b)\, f(b, a) \,.\, a$$

365. Sia m multiplo di a, b.

Se m non contiene altri fattori primi oltre a quelli di a, b, sussiste la relazione

$$f(a, b) \,.\, m = f(m, b) .\, a;$$

ed inversamente, se ha luogo tale relazione, m si compone con soli fattori primi di a, b.

U. Scarpis.

---

(1) Intendiamo per *cerchio radicale* di due cerchi posti in un medesimo piano il luogo dei punti aventi, rispetto ai due cerchi, potenze eguali e di segno contrario. (v. Durán Loriga — *Sopra los circulos radicales;* Progr. mat. T. V. pag. 200. — *Sur les cercles radicaux;* Mathésis, T. VI, p. 105).

(2) I simboli $D(a, b)$ e $\varphi(m)$ indicano rispettivamente il massimo comun divisore di a, b ed il numero dei numeri non superiori ad m e primi con esso.

BIBLIOGRAFIA

GAETANO FRASCA. — *Nozioni di algebra ad uso delle Scuole Tecniche.* — Napoli, 1896.

Il libro è diviso in due parti: nella prima l'A., dopo le necessarie definizioni, espone con studiata chiarezza le principali proprietà delle operazioni con numeri algebrici e con monomi e polinomi, alcuni brevi cenni sulla decomposizione in fattori, sulla ricerca del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo di più monomi interi e sulle proprietà delle operazioni con frazioni algebriche. — La seconda parte, è riservata alle *equazioni ed ai problemi di primo grado* e contiene le proprietà generali e la risoluzione delle equazioni di primo grado ad un'incognita, i metodi di risoluzione dei sistemi di primo grado a due incognite, e un brevissimo cenno sul modo di risolvere un sistema di tre equazioni con tre incognite. In fine di ogni paragrafo trovasi una copiosa raccolta di esercizi e problemi accuratamente scelti ed ordinati.

Il libro comprende adunque tutto il programma per la licenza della *scuola tecnica.*

L'A. segue il metodo *intuitivo,* riuscendo sempre chiaro e rigoroso nell'esposizione, e superando felicemente molte delle non lievi difficoltà che presenta la compilazione dei trattati elementari. — Le mende sono così piccole e rare che non meritano rilievo. Forse era desiderabile uno svolgimento più ampio della seconda parte specialmente in ciò che riguarda la risoluzione delle equazioni e dei sistemi, ma a ciò può supplire l'insegnante.

L'A. ha avuto lo scopo (come Egli scrive nella prefazione) di fare un lavoro utile dal punto di vista didattico: questo scopo può dirsi raggiunto.

A. MASONI.

ERNESTO PASCAL. — *Calcolo delle Variazioni e delle Differenze finite (III^a Parte del Calcolo infinitesimale).* — Manuali Höepli.

La importante collezione dei Manuali Höepli è stata arricchita ultimamente di un altro volumetto che s'intitola " Calcolo delle Variazioni e delle Differenze finite ", il quale forma la terza parte del Calcolo infinitesimale, che il chiar. prof. E. Pascal dell'Università di Pavia ha dato recentemente alle stampe. La parte di Matematiche esposta in questo breve trattato è limitata, si può dire, ad un corso regolare di Calcolo, e benchè molto spesso la ristrettezza dello spazio obblighi l'autore a dare soltanto un rapido cenno di alcune teorie o di certe considerazioni svolte dai vari autori, tuttavia, con delle preziose indicazioni storiche e bibliografiche razionalmente ordinate, riesce a rendere interessante in ogni punto lo studio del suo libro, nel quale un misurato rigore scientifico si trova sempre in accordo con una mirabile chiarezza.

In quest'ultima parte del Corso, l'autore ha dato un maggiore e più accurato sviluppo alle indicazioni bibliografiche, indicando sommariamente la ragione d'essere dei metodi ivi studiati, e donde sono derivati. Così lo studioso, condotto passo a passo e quasi a sua insaputa, a ragionare intorno ad importanti problemi e a trattare di argomenti, su cui l'esame critico ebbe ed ha tuttora tanto da discutere, si trova senza fatica, con la scorta intelligente dell'autore, preparato dinanzi il terreno e facilitata l'indagine.

L'interesse sempre vivo che accompagna la lettura di quest'ultima pubblicazione del sig. Pascal, è la migliore prova ch'egli è riuscito nel suo intento, cioè di creare una guida veramente utile ai giovani studiosi.

A. B.

Dott. Prof. GIOVANNI LOZZI — *Primo libro sull'istruzione secondaria in Italia* " IL PERSONALE INSEGNANTE „ Napoli 1896.

Il Prof. D'Ovidio disse, che le piaghe della Pubblica Istruzione in Italia sono tante, che non basterebbero dieci Rosmini a descriverle e dieci Petrarca a piangerle. Questa, che parrebbe una esagerazione rettorica, apparisce la verità dalla lettura dell'accuratissimo lavoro del Dott. Lozzi prof. di matematica nei RR. Licei di Roma.

Il libro è così ricco di argomenti e di notizie con somma cura raccolte, che non è possibile in un breve cenno riassumerlo convenientemente.

Sono notevoli le critiche che l'A. fa al modo di formazione dei professori per le scuole secondarie, la sua proposta del *tirocinio* anche per i laureati, le censure al difetto di ore di insegnamento per la matematica nelle scuole classiche.

Condotte con fine acume le osservazioni sugli orari, e giusta la proposta di perequazione degli orari medesimi.

Notevolissimi poi gli ultimi capitoli, nei quali sono esposti con chiarezza due progetti di nuovo organico, secondo i quali si potrebbero sensibilmente migliorare le condizioni degli insegnanti senza aggravare maggiormente il bilancio dello stato.

In conclusione l'A., mentre con precisione rinnova critiche già note, tratta molti ed importanti argomenti nuovi, trae conclusioni nuovissime, e studia il problema del personale da capo a fondo con amore vivo e sincero.

Il libro è dedicato all'ex-ministro Martini, e noi crediamo che possa essere utilmente consultato da insegnanti e studenti, e da quanti si occupano di scuole e di professori; perciò non è sembrato fuori di posto un breve cenno di tale opera in questo periodico.

A. MASONI.

DOTT. S. ORTU CARBONI. — *Problemi elementari di applicazione dell'algebra alla Geometria.* — Livorno, Tip. di R. Giusti, 1897.

Questo libro contiene un'introduzione sugli elementi della teoria delle equazioni e sulla risoluzione di problemi geometrici mediante l'Algebra, e circa 800 problemi.

Dei problemi non è data la soluzione, e questo è un pregio dell'opera; perchè, come giustamente osserva l'autore, nessuno può considerare come aventi meta plausibilmente didattica le Raccolte *con chiavi*, ossia con le soluzioni più o meno sviluppate in modo costante ed uniforme.

Però, di ogni problema, pochi eccettuati, l'autore dice qualche cosa che possa rendere più facile all'alunno la soluzione, in alcuni accenna le formole adatte che bisogna applicare o ricorda problemi analoghi, in molti dà il sistema risolvente, ed in altri indica soltanto il risultato.

Questi problemi son divisi in 10 paragrafi: nel primo ci sono quelli relativi ai segmenti, nel secondo quelli relativi ai triangoli, ecc., ed, infine, il decimo comprende dei problemi di ripetizione ed alcuni temi degli esami di licenza degli istituti tecnici (sezione F. M.).

I problemi di ciascun paragrafo sono posti in ordine progressivo di difficoltà, e sono preceduti dalle formole che riguardano le proprietà fondamentali della figura a cui i problemi si riferiscono.

Gli insegnanti delle scuole secondarie, considerando l'utilità di questa raccolta di problemi, saranno certamente grati all'autore per averla compilata con tanta cura e diligenza, e non mancheranno di accoglierla favorevolmente.

K.

RIVELLI. — *Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi ed alla loro costruzione in carta.* — Manuali Höepli — Serie artistica.

Questo nuovo manuale pubblicato dal solerte editore U. Höepli non ha altro scopo, come dice il suo titolo, che quello di addestrare i giovani studenti specialmente delle scuole tecniche e industriali a costruire con poca spesa i modelli in cartoncino dei principali solidi che si presentano nello studio della geometria. — Questo scopo può dirsi felicemente raggiunto; l'eleganza dell'edizione contribuirà ad invogliare i giovanetti a darsi a questo utile passatempo.

A. B.

ESAMI DI BACCALAUREATO DELL'APRILE 1896

(Continuazione vedi pag. 69)

Accademia di Rennes.

1°. **Quistioni a scelta.** — *a)* In qual caso si dice che alcune relazioni fra più variabili sono distinte? Quante relazioni distinte esistono fra le sei linee trigonometriche di uno stesso angolo? Trovarle, e mostrare perchè esse sono distinte. Dedurne i valori di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ in funzione di $\operatorname{tang} x$.

b) Calcolare $\operatorname{sen}\frac{x}{2}$ e $\cos\frac{x}{2}$ in funzione di $\operatorname{sen} x$.

Discussione.

c) Risolvere un triangolo conoscendo due lati e l'angolo opposto ad uno di essi. Discussione.

Problema. — Si formi 1° il quadrato della somma dei quadrati di due numeri interi consecutivi a, $a-1$, 2° il quadrato del doppio $2a$ del maggiore di essi; dimostrare che nella divisione di questi due quadrati la parte intera del quoziente ed il resto sono pure dei quadrati. Se a è il numero che segue immediatamente un quadrato, il resto è il quadrato che segue immediatamente il quadruplo del quoziente.

Accademia di Tolosa.

Per gli estremi A e B d'un diametro d'una circonferenza data, di raggio R e centro O, si conducano le tangenti AC, BD a questa circonferenza, e s'indichino con C, D i punti d'incontro con una tangente CD alla circonferenza.

1°. Dimostrare che il triangolo COD è rettangolo e che $AC \times BD = R^2$.

2°. Determinare la tangente CD in modo che l'area del trapezio ACDB sia equivalente a quella d'un quadrato di lato dato a.

3°. Determinare il minimo dell'area del trapezio ACDB, quando si fa variare la tangente CD.

WEIERSTRASS

Il 19 febbraio ultimo scorso si è spento a Berlino **Carlo Teodoro Guglielmo Weierstrass**, al quale poco più di un anno prima, in occasione del suo ottantesimo anniversario, tutta la Germania aveva reso solenni onoranze come al più illustre dei Matematici tedeschi.

L'indole del *Periodico* non ci consente di parlare delle opere insigni di lui, per le quali fu detto il padre dell'analisi moderna; crediamo però di fare cosa grata ai lettori dando qualche cenno sulla sua vita.

C. Weierstrass nacque il 31 ottobre 1815 a Ostenfelde in Vestfalia. Dal 1834 al 1838 studiò diritto e scienza delle finanze nell'Università di Bonn; ma poco soddisfatto degli studi giuridici all'età di 23 anni si dedicò alle matematiche, che studiò privatamente a *Münster* dove nell'estate del 1841 dette l'esame *pro facultate docendi*.

Dal 1842 insegnò in vari Ginnasi e pubblicò i lavori sulle funzioni Abeliane, che furono il fondamento della sua gloria, e gli dischiusero nel 1856 le porte dell'Università di Berlino, che ha illustrato per oltre 40 anni.

Inchiniamoci reverenti dinanzi alla tomba, che chiude il corpo di C. W. ma non il suo spirito, il quale vive e vivrà nelle sue opere.

CONCORSI

Accademia delle scienze fisiche e matematiche. — L'Accademia, non avendo ritenuta degna di premio nessuna delle due memorie presentate per il concorso del 1896, ha bandito il concorso per un premio di L. 1000 sul medesimo tema, che è il seguente:

Esporre, discutere e coordinare in forma possibilmente compendiosa tutte le ricerche concernenti la determinazione della totalità dei numeri primi, apportando qualche notevole contributo alle leggi secondo le quali questi numeri si distribuiscono fra i numeri interi.

Le memorie dovranno essere inviate al segretario dell'Accademia non più tardi del 31 marzo 1898.

Accademia Pontoniana (Concorso al premio Tenore). — Si ripropone al concorso pel premio di L. 500 il seguente tema:

Le Matematiche in Napoli dalla fondazione dell'antica Reale Accademia delle Scienze (1762) alla nuova (1861).

I lavori dovranno farsi pervenire, franchi da ogni spesa, al Segretario generale dell'Accademia non più tardi del 31 marzo 1898.

Errata-Corrige. — Nel fascicolo II a pag. 57, riga 7ª, alle parole: ....*apparisce come fattore coseno*, devono seguire le altre: *mentre la seconda parte ci dà tutti i termini in cui lo stesso arco apparisce come fattore seno;* ....

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 4 Maggio 1897.

UN' OSSERVAZIONE SULL' EQUIVALENZA DEI POLIEDRI

per congruenza delle parti

Quando un poliedro convesso P è diviso in parti poliedriche convesse in modo che, se un punto è vertice di una delle parti, esso sia vertice anche di tutte quelle parti cui appartiene, noi diremo che P è diviso in parti *annodate*, e diremo *nodo* ogni punto in cui cadano i vertici delle parti.

Ciò posto vale il seguente

Teorema. — *Se un poliedro convesso* P *è diviso in parti poliedriche convesse annodate, la somma degli angoloidi delle parti aumentata o diminuita di un multiplo di un diedro piatto eguaglia la somma di convenienti multipli, secondo numeri non minori di 2, dei diedri di* P.

Dimostrazione. — Consideriamo infatti i 4 seguenti possibili casi relativi alle varie posizioni di un nodo.

1. *Il nodo sia interno a P.* In tal caso tutti gli angoloidi delle parti che hanno il vertice in esso riempiono l'intero spazio, cioè sommano due diedri piatti. Se dunque n è il numero di tali nodi ed S_1 è la somma di tutti quegli angoloidi delle parti che hanno i vertici in essi, si avrà $S_1 = 2n\pi$.

2. *Il nodo sia interno ad una faccia di P.* Allora tutti gli angoloidi delle parti che hanno il vertice in quel nodo riempiono soltanto quella metà dello spazio in cui cade P, cioè un diedro piatto. Se dunque m è il numero di tali nodi ed S_2 è la somma degli angoloidi delle parti che hanno i vertici in essi, si avrà $S_2 = m\pi$.

3. *Il nodo sia interno a uno spigolo di P.* Allora tutti gli angoloidi delle parti di P che hanno il vertice in esso riempiono il diedro D_i corrispondente a quello spigolo. Se dunque r_i è il numero dei nodi interni a tale spigolo ed S_3 è la somma di tutti gli angoloidi delle parti che hanno i vertici in nodi interni agli spigoli di P, sarà $S_3 = r_1 D_1 + r_2 D_2 + \ldots$

4. *Il nodo cada infine in un vertice di P.* Allora gli angoloidi delle parti che hanno il vertice in esso riempiono quell'angoloide di P che ha il vertice in quel nodo. Detta dunque A la somma degli angoloidi di P ed S_4 la somma di tutti quegli angoloidi delle parti di P che hanno i vertici nei vertici di P, sarà $S_4 = A$.

D'altronde, se A_1 è un angoloide di P, n_1 il numero degli spigoli di A_1 e Σ_1 la somma dei diedri di A_1, si ha $A_1 = \Sigma_1 - (n_1 - 2)\pi$.

Perciò

$$S_4 = (\Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots) - (n_1 + n_2 \ldots - 2\,V)\pi,$$

essendo V il numero dei vertici di P. Ma, poichè ogni diedro di P appartiene a due angoloidi, si ha

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots = 2\,D_1 + 2\,D_2 + \ldots, \quad n_1 + n_2 + \ldots = 2\,C,$$

essendo C il numero degli spigoli di P.

Rimane dunque in ultimo

$$S_4 = 2D_1 + 2D_2 + \ldots \quad - (2C - 2V)\,\pi.$$

Raccogliendo ora in una sola S le quattro somme S_1, S_2, S_3, S_4, e facendo

$$\mp K = 2n + m - 2V + 2C,$$

otterremo appunto

$$S \pm K\pi = (r_1 + 2)\,D_1 + (r_2 + 2)\,D_2 + \ldots$$

conformemente all'enunciato.

Da questo teorema si può ricavare un notevole corollario, che richiede però due particolari lemmi.

LEMMA 1°. — *Se* D *è il diedro del tetraedro regolare* R *e* δ *il diedro acuto del tetraedro trirettangolo isoscele* T, *si ha*

$$2\delta = \pi - D.$$

Dimostrazione. — Bisogna ricordare che in ogni tetraedro una faccia qualunque è la somma delle projezioni delle altre tre su di essa. Applicando questo principio ad R avremo dunque (se α indica l'area di una faccia di R) $\alpha = 3\,\alpha \cos D$, donde

$$\cos D = \frac{1}{3}.$$

Applichiamo poi lo stesso principio a T; allora, indicando con β l'area della base e con γ l'area di una qualunque delle tre faccie rettangole di T, avremo le due equazioni

$$\beta = 3\gamma \cos \delta,$$
$$\gamma = \beta \cos \delta,$$

donde, moltiplicando,

$$\cos^2 \delta = \frac{1}{3}.$$

Da questa si ha successivamente

$$2 \cos^2 \delta = 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = 1 - \cos(\pi - 2\delta) = \frac{2}{3},$$

epperò

$$\cos(\pi - 2\delta) = \frac{1}{3} = \cos D.$$

Ora, essendo $\delta < \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\pi > \pi - 2\delta > o; \text{ ed è poi } \pi < D > o,$$

dunque

$$D = \pi - 2\delta.$$

Lemma 2°. — *Il diedro* D *del tetraedro regolare è incommensurabile con* π.

Infatti, essendo (lemma 1°) $\cos D = \frac{1}{3}$, si ha $\operatorname{sen} D = \frac{\sqrt{8}}{3}$.

Allora, ponendo

$$\varepsilon = \frac{1 \pm i\sqrt{8}}{3},$$

se fosse

(1) $$D = \frac{m}{n}\pi$$

sarebbe

$$\varepsilon = \cos\frac{m}{n}\pi + i \operatorname{sen}\frac{m}{n}\pi;$$

e perciò

$$\varepsilon^n \pm 1 = o.$$

Ma ε è radice dell'equazione $3x^2 - 2x + 3 = o$, dunque nell'ipotesi (1) deve essere $x^n \pm 1$ divisibile per $P = 3x^2 - 2x + 3$.

Sia $\frac{Q}{K}$ il quoziente di tale divisione, ed indichi Q un polinomio intero (di grado $n - 2$) e K un numero intero primo con Q.

Potremo scrivere

$$K(x^n \pm 1) = QP.$$

Detto a_0 il coefficiente di x^{n-2} in Q, dovrà essere intanto

$$K = 3\,a_0,$$

epperò QP dovrà essere divisibile per 3. Ora 3 non può dividere Q, perchè 3 divide K, dunque (Bertrand, *Alg. elem.*) 3 deve dividere P. Ma poichè 3 non divide P, Q non esiste e quindi D è incommensurabile con π. [1]

Veniamo ora all'accennato

Corollario. — *Un tetraedro regolare* R *e un tetraedro trirettangolo isoscele* T *non si possono dividere in uno stesso numero di parti annodate rispettivamente simili (e tanto meno congruenti).*

Sia infatti possibile dividere R e T in parti annodate rispettivamente simili; allora la somma degli angoloidi delle parti di R o di T sarebbe la stessa. Perciò, indicando con r, ρ, σ, K degli interi non negativi dovrebbe essere pel teorema dimostrato

$$(r + 12)\,D = (\rho + 6)\,\delta + (\sigma + 6)\frac{\pi}{2} \pm K\pi,$$

---

[1] Anche i diedri dell'ottaedro, del dodecaedro e dell'icosaedro regolare sono incommensurabili con π. Infatti, se si chiama D il diedro di un poliedro regolare convesso, si trova (v. *Traité de Géom* di Rouché e Comberousse pag. 245 del 2° vol. 5ª edizione)

$$\operatorname{sen}\frac{D}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{m}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}},$$

ove m è il numero degli spigoli di ciascun angoloide e n il numero dei lati di ciascuna faccia.

Facendo allora

$$\varepsilon = \cos D + i \operatorname{sen} D,$$

si vede facilmente che pel tetraedro

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{3}};$$

per l'ottaedro

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{1 + i\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

per l'icosaedro

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{(\sqrt{5} - 1) + i(1 + \sqrt{5})}{2\sqrt{3}}$$

e infine pel dodecaedro

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{(\sqrt{5} - 1) + 2i}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}.$$

Si trova perciò che pei primi due solidi ε è radice della stessa equazione $3x^2 - 2x + 3 = o$ (e quindi i D corrispondenti sono supplementari); mentre per l'icosaedro ε è radice della

$$9x^4 - 2x^2 + 9 = o,$$

e per il dodecaedro ε è radice della

$$5x^4 + 6x^2 + 5 = o,$$

e si prova come pel caso del tetraedro (e dell'ottaedro) che questi due ultimi diedri sono incommensurabili con π. Nel testo citato è detto invece che il diedro dell'icosaedro è dato *esattamente* da

138°.11'.22'',75.

ossia

$$(2r + 24)\,D = (\rho + 6)\,.\,2\delta \pm \tau\pi,$$

ove τ è un intero, D è il diedro di R e δ è il diedro acuto di T.

Ma pel lemma 1° $2\delta = \pi - D$, dunque la precedente relazione diviene

$$(2r + 24)\,D = (\rho + 6)\,\pi - (\rho + 6)\,D \pm \tau\pi$$

ossia

$$(2r + \rho + 30)\,D = (\rho + 6 \pm \tau)\pi;$$

e quindi, poichè $2r + \rho + 30$ non può essere zero perchè r e ρ debbono essere positivi o nulli, dovrà essere $D = \frac{m}{n}\pi$, cioè D commensurabile con π, ciò che è contrario al lemma 2°.

Aprile 1897.

G. Sforza.

Una definizione di poligono convesso

1. Le definizioni di poligono convesso, che comunemente vengono date nei trattati di geometria elementare per le scuole secondarie, sono *sovrabbondanti*, cioè contengono più di quanto è strettamente necessario per *definire*, nel vero senso di questa parola, tale figura. Proposizioni di tal fatta le chiamerei piuttosto *denominazioni*.

Mi propongo in questa Nota di esporre una *definizione* di poligono convesso. Le citazioni che si trovano nel seguito si riferiscono agli " Elementi di Geometria di Giuseppe Veronese trattati con la collaborazione di Paolo Gazzaniga ". Avrei potuto conseguire forse maggior brevità nell'esposizione, ricorrendo per le citazioni ad un lavoro nel quale fosse svolto più completamente l'argomento della divisione del piano in parti mediante rette, ma preferisco attenermi al libro accennato come quello che più è conforme al metodo di trattazione da me seguito in altre Note sui fondamenti della geometria. Ho invece pensato di tener distinto ciò che è affatto inerente alla quistione che mi son proposto di trattare, da quanto è, dirò così, d'indole più generale, e che espongo in alcune

Osservazioni preliminari. — I^a. Dal fatto che una retta a divide il piano in due parti M, N (n. 3 oss. e def.) e che se una retta b taglia a in un punto, essa vien divisa in due raggi posti uno in M e uno in N (n. 23 t. III), resulta immediatamente con dimostrazione per assurdo che, *se un segmento ha gli estremi in una delle due parti* M, N *vi giace per intero.*

II^a. Se C è un punto di a e CQ un raggio di N, esso divide questa regione in due parti, corrispondenti a quelle in cui vien diviso da esso il mezzo fascio con centro in C posto in N (n. 23 lemma), parti che sono due angoli piani (n. 21 def. I 4) $\widehat{KCQ}$, $\widehat{QCH}$. Se si prende un punto X in $\widehat{KCQ}$ ed uno Y in $\widehat{QCH}$, cioè da bande opposte rispetto alla retta CQ, il segmento (XY) taglia questa (c. t. III) e precisamente il raggio CQ, trovandosi tutto in N. Cioè:

Un semipiano è diviso da un suo raggio qualunque CQ, uscente da un punto C della retta origine a in due parti, e ogni segmento che ha un estremo in una e l'altro nell'altra di queste taglia il raggio CQ, e perciò, se una retta non parallela ad a taglia il raggio opposto a CQ, quel suo raggio che si trova nel semipiano in discorso giace tutto in una delle due parti considerate.

III^a. Dato un triangolo ABC (lascio le figure alla cura del lettore), il suo lato BC divide il piano in due parti, di cui chiameremo M quella che contiene il triangolo, N l'altra. Il raggio CQ opposto a CA si trova nella seconda (n. 23 t. III) e la divide (oss. prelim. II) in due angoli piani $\widehat{BCQ}$, $\widehat{QCH}$ (CH opposto a CB), ed ogni raggio AS che taglia la BC in un punto S e che perciò appartiene, a partire da S, ad N, deve trovarsi, a partire da S, tutto o in $\widehat{BCQ}$ o in $\widehat{QCH}$ (oss. II). Per conseguenza tutti e soli quei raggi in discorso, per i quali S cade sul raggio CB, saranno in $\widehat{BCQ}$, e quelli per cui S cade in (BC) danno la parte comune ai due angoli $\widehat{BCQ}$, $\widehat{BAC}$, mentre quelli, per i quali S cade sul raggio BK (opposto a BC), ci danno la parte che il primo non ha in comune col secondo, la quale, essendo BK da banda opposta a BH rispetto alla AB, trovasi rispetto a questa retta da banda opposta all'angolo $\widehat{BAC}$. Possiamo concludere: *L'angolo piano interno* $\widehat{BAC}$ *del triangolo* ABC *e l'angolo esterno* $\widehat{BCQ}$ *hanno in comune tutta la parte del primo che si ha astraendo dal triangolo dato, la qual parte è tutta quella che l'angolo esterno ha dalla stessa banda in cui trovasi l'angolo interno considerato rispetto al lato* AB.

IV^a. *Dati due angoli adiacenti* $\widehat{ACB}$, $\widehat{ACD}$, *se un raggio* CE *dell'angolo piatto opposto a quello che risulta dalla somma dei due nominati determina col raggio* CA *un angolo* $\widehat{ACE}$ *convesso che contenga il raggio* CB, *l'opposto di* CE *cade in* $\widehat{ACD}$. Difatti CF, opposto di CE, deve trovarsi o nell'uno o nell'altro dei due angoli adiacenti anzidetti (23 t. III). Ma essendo $\widehat{ACE}$ convesso, il raggio opposto a CE cade fuori di esso (21 def.), e quindi anche di $\widehat{ACB}$, perciò si trova in $\widehat{ACD}$.

2. Consideriamo una retta A_1A_2 che divide il piano in due parti M, N, ed in una di queste, per es. in M, prendiamo un punto A_3; vien così determinato un triangolo $A_1A_2A_3$ di M.

Nella parte che $\widehat{A_1A_3K}$ (A_3K opposto a A_3A_2) ha in M si prenda un punto A_4; nella parte che $\widehat{A_1A_4L}$ (A_4L opposto ad A_4A_3) ha in M si prenda un punto A_5, e così si proceda fino ad un ultimo punto A_n. I punti $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ determinano un poligono che chiamerò *convesso*. Possiamo perciò porre la seguente

Definizione. — *Chiamasi convesso ogni poligono che sia tutto da una parte rispetto uno dei suoi lati* A_1A_2, *e sia tale che ognuno dei triangoli determinati da un vertice* A_1 *di questo lato con le coppie* A_2, A_3; A_3, A_4; .... A_{n-1}, A_n *abbia il vertice, che non è comune col precedente, nell'angolo esterno di questo che è adiacente al lato comune, e che non ha il vertice in* A_1.

3. Conduco (supposto eseguita la figura determinata dalla definizione) la A_3A_4. Essendo A_1 in $\widehat{A_1A_3K}$ e in M, è pure (n. 1 oss. III) in $\widehat{A_1A_2A_3}$, nel quale trovasi adunque il raggio A_4A_1, che perciò taglia (A_2A_3), per cui il raggio A_4A_2 trovasi in $\widehat{A_1A_4A_3}$, e così i raggi A_4A_1, A_4A_3 si trovano da parte opposta rispetto alla retta A_4A_2. Perciò i due angoli adiacenti $\widehat{A_2A_4A_1}$, $\widehat{A_1A_4P}$ (A_4P opposto ad A_4A_2) e A_4A_3 si trovano nelle condizioni dell'oss. IV, e quindi A_4L è in $\widehat{A_1A_4P}$ e $\widehat{A_1A_4L}$ è parte di $\widehat{A_1A_4P}$, per cui A_5 cadendo in quello per definizione, si trova pure in questo, dunque (oss. III) essendo A_5 anche in M, trovasi pure in $A_1\widehat{A_2}A_4$ fuori del triangolo $A_1A_2A_4$. Così proseguendo si vede che *gli angoli* $A_3\widehat{A_2}A_1$, $A_4\widehat{A_2}A_3$, ... $A_n\widehat{A_2}A_1$ *sono successivi, e che il poligono trovasi tutto nell'angolo* $A_1\widehat{A_2}A_3$, *cioè tutto da una parte rispetto al lato* A_2A_3.

Ora abbiamo gli angoli adiacenti $A_2\widehat{A_1}A_1$, $A_1\widehat{A_1}P$ e in quest'ultimo c'è A_5L, per cui $A_1\widehat{A_4}L$ è consecutivo a $A_2\widehat{A_4}A_1$, cioè A_4A_1 è interno all'angolo convesso (minore del piatto $A_2\widehat{A_1}P$) $A_2\widehat{A_4}L$, perciò A_5 cadendo per ipotesi in $A_1\widehat{A_4}L$, trovasi anche in $A_2\widehat{A_4}L$. Così continuando si conclude: *Se un poligono è convesso in un dato verso a partire da un suo vertice* A_1, *esso lo è anche a partire dal suo successivo* A_2, *nello stesso verso, e quindi da ogni altro.*

Dalla definizione e da questi teoremi si ricava facilmente: *Ogni angolo di un poligono convesso è convesso.* (Per il triangolo ciò si suppone già noto.) *Il poligono è tutto contenuto in ciascuno dei suoi angoli. Ogni diagonale divide il poligono in due poligoni convessi. Considerando le diagonali uscenti da un vertice, il poligono risulta somma di* n — 2 *triangoli.*

4. Riferendoci alla figura precedente, e supponendo, per fissare le idee, che sia A_7 l'ultimo vertice, esso è situato in $A_1\widehat{A_6}V$ (A_6V opposto ad A_6A_5), perciò i raggi A_6A_1, A_6V sono da bande opposte rispetto alla A_7A_6, ed applicando agli angoli adiacenti $A_1\widehat{A_6}A_7$, $A_1\widehat{A_6}R$ (A_6R opposto ad A_6A_7) l'oss. IV, si vede che A_4 cade in $A_1\widehat{A_6}R$. Così continuando si arriva a concludere: *Ogni poligono che è convesso a partire da un vertice* A_1 *in un dato verso, lo è pure nel verso opposto.*

5. Arrivati nella costruzione del nostro poligono per es. al vertice A_5, si prenda A_6 in $A_1\widehat{A_5}A_4$. Allora la A_5A_6 deve tagliare (A_1A_4), che ha gli estremi sui lati dell'angolo; e perciò taglierà un altro lato (segmento) del triangolo $A_1A_2A_4$. Proseguendo si vede che A_6A_5 deve tagliare un lato del poligono, che così non rimane tutto da una parte rispetto a quella retta. Analogamente avviene se A_6 si oprende nell'opposto di $A_1\widehat{A_5}A_4$. Prendendolo poi nell'opposto di $A_1\widehat{A_5}U$ (A_5U opposto ad A_5A_4) viene a trovarsi con A_1 da parte opposta rispetto A_4A_6, e perciò continuando nella costruzione si dovrà arrivare ad un vertice che converrà unire con A_1 o con un altro vertice che si trova dalla stessa banda di A_1, e allora il lato che si ottiene è segato dalla A_4A_5, rispetto alla quale dunque il poligono non trovasi tutto da una parte. Concludendo: *Un poligono non convesso non si trova tutto da una parte rispetto ad ognuno dei suoi lati. Un poligono che si trova tutto da una parte rispetto ciascuno dei suoi lati è convesso.*

Ed ora rimane tolto l'inconveniente lamentato dal Prof. Frattini nel Periodico del 1896, al quale si può del resto ovviare mantenendo anche la solita definizione, come trovasi dimostrato nel Trattato di Geometria dei signori Lazzeri e Bassani.

Sondrio febbraio 1897.

FRANCESCO PALATINI.

NECROLOGIO

La scienza matematica ha perduto uno dei suoi più illustri cultori.

GIACOMO GIUSEPPE SYLVESTER

è morto a Londra il 15 marzo scorso nella grave età di 83 anni.

ALCUNE PROPRIETÀ DELLA SVILUPPANTE DI CERCHIO

(Continuazione e fine vedi fascicolo precedente).

§ 3. *Dividere un arco* AB *di* Λ *in due parti, aventi un dato rapporto* m. — Chiamando C il punto di divisione ed x il raggio vettore OC, si ha:

$$m = \frac{AC}{CB} = \frac{x^2 - R^2}{R_1^2 - x^2},$$

d'onde:

$$x = \sqrt{\frac{mR_1^2 + R^2}{m+1}}. \tag{6}$$

Se dunque m è razionale, il problema proposto si risolve colla riga e col compasso.

A questo problema si può connettere l'altro di dividere un dato arco AB di Λ in n parti eguali. Basta fare nella (6) $m = \frac{1}{n-1}$.

Facendo nella (6) $m = 1$, si ha la formola (facilmente costruibile):

$$x = \sqrt{\frac{R_1^2 + R^2}{2}}, \tag{7}$$

corrispondente alla divisione del dato arco AB per metà.

Nella (7) si supponga $R_1 = nR$, con n intero; si ottiene allora:

$$x = R\sqrt{\frac{n^2+1}{2}}.$$

Se si mette la condizione che anche x sia multiplo di R, il numero $\frac{n^2+1}{2}$ deve essere un quadrato perfetto intero e perciò n dispari. Posto allora $n = 2p + 1$, si ha:

$$\frac{n^2+1}{2} = p^2 + (p+1)^2$$

e, dovendo il secondo membro, che è la somma dei quadrati di due numeri interi consecutivi, essere un quadrato perfetto, si deve avere necessariamente $p = 3$ e per conseguenza:

$$n = 7\,, \qquad x = 5R.$$

Dunque:

« *Se in una sviluppante di cerchio si tirano, dal centro del cerchio* *evoluta, tre raggi vettori proporzionali ai numeri* 1, 5, 7, *il medio divide per metà l'arco intercetto dagli estremi* ».

Questo è il solo caso possibile, quando si metta la condizione che il secondo e il terzo raggio vettore siano multipli del primo.

Se nell'equazione (6) si suppone $m = \frac{R}{R_1}$, risulta:

$$x = \sqrt{RR_1}.$$

Perciò:

« *Se in una sviluppante di cerchio si tirano, dal centro del cerchio evoluta, tre raggi vettori, di cui il medio sia media proporzionale fra gli altri due, esso divide l'arco in due parti proporzionali ai raggi vettori estremi* ».

Siccome, qualunque sia m, si può scrivere:

$$x = \sqrt{(mR) \cdot \frac{R_1}{m}},$$

si ha:

« *Vi sono infiniti archi* AB *i quali, da un punto fisso* C, *sono divisi in parti proporzionali ai raggi vettori estremi; il prodotto di questi raggi è costante ed eguale al quadrato del raggio vettore* OC ».

Dividere un arco di sviluppante in sezione aurea. —

Tenute ferme le notazioni del problema precedente, se la parte aurea è AC, deve essere:

$$AB : AC = AC : CB$$

Si ha dunque l'equazione:

$$(R^2_1 - R^2)(R^2_1 - x^2) = x^2 - R^2$$

che, risolta rispetto ad x^2, dà:

$$x^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot R^2 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot R^2_1, \tag{8}$$

essendo l'altra radice da escludere.

Perciò:

« *Il quadrato del raggio vettore* x *è eguale alla somma di due rettangoli, uno dei quali è la parte minore del quadrato di* R *diviso in sezione aurea e l'altro è la parte aurea del quadrato di* R_1 »

Se invece si mette la condizione che la parte aurea dell'arco AB sia CB, si ottiene per x^2 l'espressione a cui si riduce (8) scambiando fra loro R e R_1.

Esprimere il rapporto anarmonico di quattro punti della sviluppante.

I quattro punti siano A, B, C, D e si supponga che i primi due siano separati dagli altri; si ha:

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

ossia, in causa dell'equazione (4):

$$(ABCD) = \frac{(R_2^2 - R^2)(R_3^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)(R_3^2 - R^2)}$$

Ponendo:

$$(ABCD) = \lambda$$

e risolvendo l'equazione precedente rispetto a R_3^2, si trova:

$$R_3^2 = \frac{R_1^2 (R^2 - R_2^2) - \lambda R^2 (R_1^2 - R_2^2)}{(R^2 - R_2^2) - \lambda (R_1^2 - R_2^2)}$$

Con questa formola si può determinare il quarto punto di una sviluppante di cerchio che, insieme a tre punti dati della medesima, formano un gruppo di punti avente un dato rapporto anarmonico.

Fatto $\lambda = -1$, si ha il teorema:

« *Se in una sviluppante di cerchio, e a partire dal centro del cerchio evoluta, si descrivono quattro raggi vettori* R, R_1, R_2, R_3, *i primi tre arbitrari e il quarto definito dalla relazione:*

$$(9) \qquad R_3^2 = \frac{2R^2R_1^2 - (R^2 + R_1^2) R_2^2}{R^2 + R_1^2 - 2R_2^2},$$

i quattro estremi formano, sulla spirale, un gruppo armonico ».

Siccome l'equazione (9) è identicamente soddisfatta da:

$$(10) \qquad R_2 = \sqrt{R^2 - RR_1 + R_1^2}, \quad R_3 = \sqrt{R^2 + RR_1 + R_1^2},$$

si ha:

« *I quattro punti della sviluppante che corrispondono ai due raggi vettori arbitrari* R, R_1 *e ai due altri* R_2, R_3 *definiti dalle equazioni* (10), *costituiscono un gruppo armonico* ».

§ 4. Ci proponiamo di trovare l'area di un settore compreso fra due raggi vettori qualunque e l'arco compreso fra i loro estremi.

Siano OA, OA_1 due raggi vettori vicinissimi, Aa, A_1a_1 i raggi di curvatura corrispondenti, AC l'arco di centro O descritto col raggio OA ed intercetto fra i raggi vettori OA, OA_1. Abbiamo, applicando i risultati precedenti:

$$\text{Area } OAC = \frac{1}{2} OA \,.\, \text{arco } AC = \frac{1}{2} OA \,.\, \text{arco } AA_1 \,.\, \text{sen}\,\theta =$$

$$= \frac{1}{2} R \,.\, AA_1 \,.\, \sqrt{1 - \frac{h^2}{4R^2}} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot \rho$$

$$\text{Area } ACA_1 = \frac{1}{2} AC \,.\, CA_1 = \frac{1}{2} AA_1 \,.\, \text{sen}\,\theta \,.\, CA_1 =$$

$$= \frac{1}{2} AA_1 \,.\, CA_1 \,.\, \sqrt{1 - \frac{h^2}{4R^2}} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot \rho \frac{CA_1}{R}$$

Perciò:

$$\text{Area } OAA_1 = \frac{1}{2} AA_1 \cdot \rho \left(1 + \frac{CA_1}{R}\right)$$

D'altronde potendosi considerare la figura AA_1aa_1 come un settore circolare di centro a e di raggio ρ, si ha

$$\text{Area } AA_1aa_1 = \frac{1}{2}\rho \,.\, AA_1$$

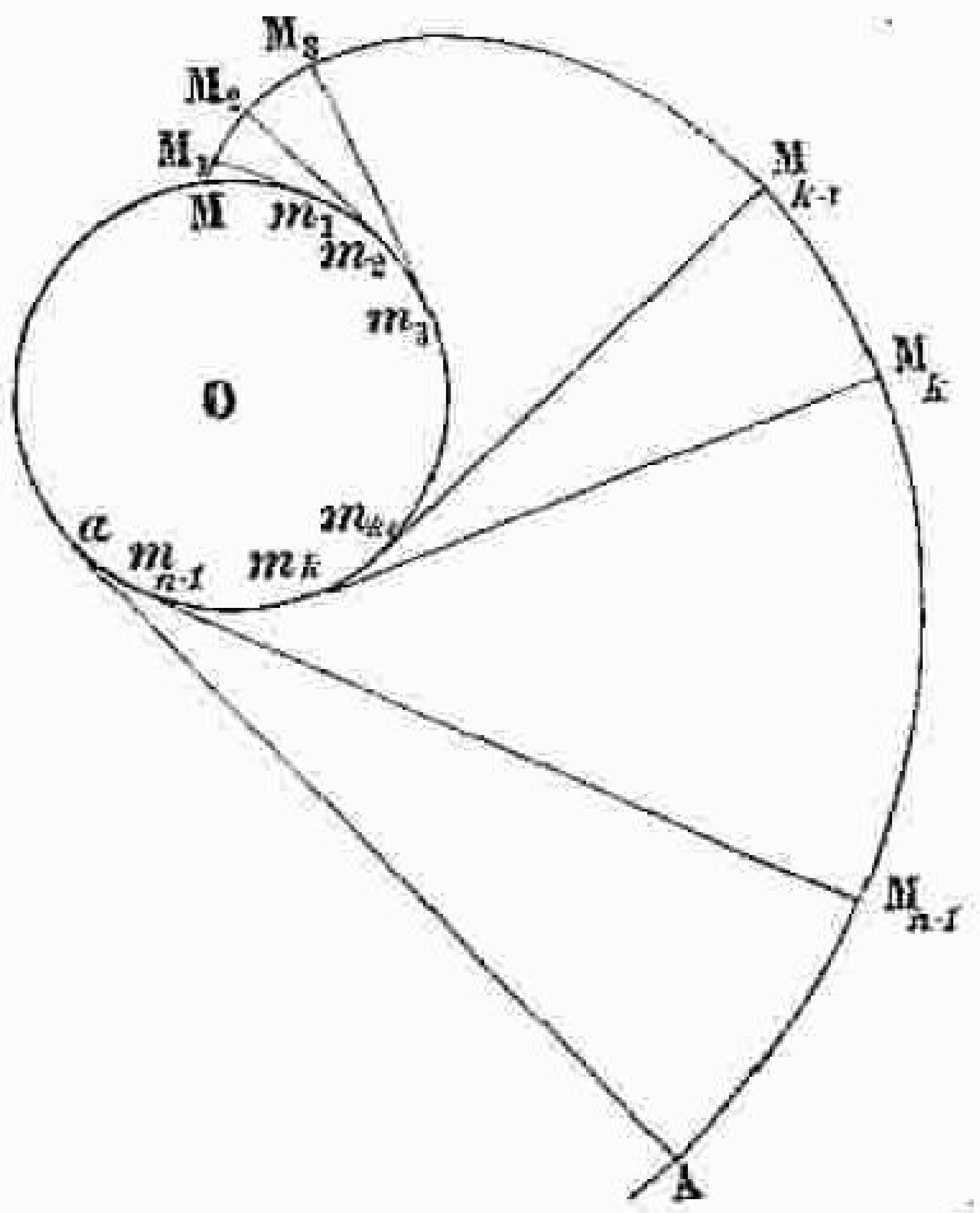
e quindi:

$$\frac{\text{Area } OAA_1}{\text{Area } AA_1\, aa_1} = 1 + \frac{CA_1}{R}$$

Passando al limite col supporre che A_1 vada avvicinandosi indefinitamente ad A, si ha:

$$\lim.\ \text{Area } OAA_1 = \lim.\ \text{Area } AA_1aa_1$$

Scomponendo quindi un settore qualunque OAB e l'area corrispondente



ABab in un numero grandissimo di settori analoghi ai precedenti OAA_1, AA_1aa_1, ed applicando la proprietà ora dimostrata, si giunge al teorema:

« *In una sviluppante di cerchio l'area* ABab *compresa fra l'arco qualsivoglia* AB, *l'arco corrispondente* ab *dell'evoluta e i due raggi di curvatura estremi* Aa Bb *è equivalente all'area del settore* OAB ».

Facendo uso della figura, si ha:

$$\text{Area } M_{k-1}\, M_k m_{k-1}\, m_k = \frac{1}{2}\, m_k\, M_k \,.\, \text{arco } M_k\, M_{k-1} = \frac{1}{2}\, kt \,.\, \text{arco } M\ \ M_{k-1}$$

Siccome (V. § 1):

$$M_{k-1}\, M_k = kt.\, \varepsilon = \frac{2}{h}\, kt^2,$$

risulta:

$$\text{Area } M_{k-1}\, M_k\, m_{k-1}\, m_k = \frac{1}{h}\, k^2\, t^3,$$

e perciò:

$$\sum_{k=1}^{k=n} M_{k-1}\, M_k\, m_{k-1}\, m_k = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots + n^2)\frac{t^3}{h} =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\frac{t^3}{h} = \frac{1}{6h}\, nt\,(nt+t)\,(2nt+t).$$

Passando al limite per $n = \infty$, si trova:

$$\text{Area } MAa = \frac{\sigma^3}{3h},$$

essendo σ l'arco circolare Ma.

Se dunque si indica con S l'area del settore compreso fra il raggio vettore iniziale OM e un raggio vettore qualunque OA e si applica il teorema dimostrato in questo § e le formole (1), (2), (3), si trova:

$$\text{(11)} \qquad S = \frac{(hs)^{\frac{3}{2}}}{3h} = \frac{\rho^3}{3h} = \frac{(4R^2 - h^2)^{\frac{3}{2}}}{24h}$$

Con tale formola si può evidentemente trovare l'area di un settore qualunque OAB, considerandolo come differenza dei due settori OMB, OMA.

Se S, S_1 sono due settori contati dal raggio vettore iniziale OM; s, s_1 gli archi corrispondenti; ρ, ρ_1 i raggi di curvatura nei punti estremi di questi archi, si ha:

$$\frac{S^2}{S_1^2} = \frac{s^3}{s_1^3}, \quad \frac{S}{S_1} = \frac{\rho^3}{\rho_1^3}.$$

Dunque:

« *I settori, contati dall'origine della sviluppante, sono proporzionali ai cubi dei raggi di curvatura nelle estremità degli archi; e i quadrati di detti settori sono proporzionali ai cubi degli archi corrispondenti* ».

Ne viene di conseguenza che:

« *Prendendo sopra una sviluppante di cerchio una serie di archi, tutti contati dall'origine, e formanti una progressione geometrica di ragione* q, *i corrispondenti settori formano un'altra progressione geometrica di ragione* $q^{\frac{3}{2}}$, *e reciprocamente* ».

Se gli archi consecutivi MA, AA_1, A_1A_2, ... dell'evolvente sono proporzionali ai numeri dispari, si può mettere:

$$MA = \alpha,\ AA_1 = 3\alpha,\ A_1A_2 = 5\alpha, \dots$$

Risultando allora:

$$MA = \alpha,\ MA_1 = 4\alpha,\ MA_2 = 9\alpha; \dots$$

dall'equazione (11) si ricava per i settori:

$$MOA = \frac{\sqrt{h}}{3}\alpha^{\frac{3}{2}}; \quad MOA_1 = 8.\frac{\sqrt{h}}{3}.\alpha^{\frac{3}{2}};$$
$$MOA_2 = 27.\frac{\sqrt{h}}{3}.\alpha^{\frac{3}{2}}; \dots\dots$$

Perciò:

« *Se sopra una sviluppante di cerchio si prendono degli archi successivi proporzionali ai numeri dispari, il primo dei quali abbia un estremo nell'origine, i settori corrispondenti sono proporzionali ai numeri* 1, 7, 19, 37, 61, . . . *differenze dei cubi dei numeri della serie naturale; e reciprocamente* ».

§ 5. Se MB_1, B_1B_2, B_2B_3, . . . sono archi eguali del cerchio evoluta ed MA_1, A_1A_2, A_2A_3, . . . gli archi corrispondenti della sviluppante, ponendo $MB_1 = \sigma$, si ha:

$$OA_1 = \sqrt{\sigma^2 + \frac{h^2}{4}},\ OA_2 = \sqrt{4\sigma^2 + \frac{h^2}{4}},\ OA_3 = \sqrt{9\sigma^2 + \frac{h^2}{4}}, \ldots$$

e quindi:

$$MA_1 = \frac{\sigma^2}{h},\quad MA_2 = \frac{4\sigma^2}{h},\quad MA_3 = \frac{9\sigma^2}{h}, \ldots$$

Avremo dunque:

$$MA_1 = 1\,MA_1,\ A_1A_2 = 3MA_1,\ A_2A_3 = 5\,.\,MA_1, \ldots$$

cioè:

« *Gli archi della sviluppante di cerchio che corrispondono ad archi eguali del cerchio evoluta, il primo dei quali ha un estremo nell'origine sono proporzionali ai numeri dispari; e conseguentemente* (§ 4) *i settori che corrispondono a questi archi sono proporzionali ai numeri* 1, 7, 19, 37, 61, . . . *differenze dei cubi dei numeri della serie naturale* ».

Soddisfano evidentemente a questo teorema gli archi MP_1, P_1P_2, P_2P_3... dell'evolvente che sono compresi fra le estremità dei vari *cicli* (V. § 2).

Sicome poi si ha:

$$MP_1 = h\pi \quad \text{e quindi:} \quad OP_1 = \sqrt{\pi^2 h^2 + \frac{h^2}{4}},$$

sarà:

$$\text{arco } MP_1 = \pi^2 h$$

Dunque:

« *L'arco di sviluppante che corrisponde a tutto lo sviluppo del cerchio evoluta è eguale alla circonferenza avente per diametro la circonferenza del cerchio evoluta* ».

Se si prendono gli archi MA_1, A_1A_2, A_2A_3, . . . tutti eguali ad l, si hanno le eguaglianze:

$$(\text{arco } MB_1)^2 = hl;\ (\text{arco } MB_2)^2 = 2hl;\ (\text{arco } MB_3)^2 = 3hl; \ldots$$

le quali dimostrano il teorema:

« *Se più archi successivi della sviluppante (il primo dei quali abbia un estremo nell'origine) sono eguali fra loro, i quadrati degli archi corrispondenti del cerchio evoluta, contati tutti a partire dall'origine, formano una progressione aritmetica di ragione* hl, *essendo* l *la lunghezza degli archi dell'evolvente* ».

Se fra l'arco s della sviluppante e l'arco corrispondente σ del cerchio evoluta ha luogo la condizione $s = m\sigma$, siccome:

$$hs = \sigma^2,$$

si ottiene:

$$s = m^2 h, \quad \sigma = mh$$

Dunque:

« *Quell'arco della sviluppante che comincia dall'origine e che è eguale ad* m *volte il corrispondente arco dell'evoluta, ha una lunghezza eguale a* m² *volte il diametro del cerchio evoluta, e il raggio di curvatura nella sua estremità è* m *volte questo diametro* ».

Se poi la proprietà precedente ha luogo per un arco AB non cominciante dall'origine, ponendo $MA_1 = s$, $MA_2 = s_1$, si ha:

$$hs_1 = \sigma^2{}_1, \quad hs = \sigma^2$$

e quindi:

$$h(s_1 - s) = (\sigma_1 - \sigma)(\sigma_1 + \sigma) = \frac{1}{m}(s_1 - s)(\sigma_1 + \sigma)$$

Dividendo per $s_1 - s$, risulta:

$$\sigma_1 + \sigma = \rho_1 + \rho = mh$$

Dunque:

« *Gli archi della sviluppante che sono eguali ad* m *volte i corrispondenti dell'evoluta, sono quelli in cui la somma dei raggi di curvatura estremi è eguale ad* m *volte il diametro del cerchio evoluta* ».

Se OA, OA_1, OA_2, ... OA_{n-1}, OA_n sono dei raggi vettori in progressione geometrica di ragione q e si pone:

$$R = OA, \ s_1 = AA_1, \ s_2 = A_1A_2, \ldots s_n = A_{n-1}A_n,$$

si ha:

$$s_n = \frac{q^2 - 1}{h} \cdot q^{2(n-1)} \cdot R^2,$$

ovvero:

$$s_n = \frac{1 - q^2}{h} \cdot q^{2(n-1)} \cdot R^2,$$

secondo che gli archi s sono diretti dalla parte dei raggi vettori crescenti o decrescenti.

Possiamo dunque dire:

« *Se si prendono dei raggi vettori consecutivi in progressione geometrica di ragione* q, *gli archi successivi che essi determinano sono in progressione geometrica di ragione* q² ».

Se $q > 1$, si ha un'infinità di raggi vettori R e di archi s; se $q < 1$, dalla parte dei raggi vettori decrescenti si potranno portare m archi consecutivi purchè si abbia:

$$R \geqq \frac{h}{2q^m}.$$

Siano A, B, C tre punti della sviluppante, R, R_1, R_2 i loro raggi vettori, e sia:

$$R_1 = mR, \quad R_2 = nR$$

Avendosi:

$$AB = \frac{m^2-1}{h} R^2, \qquad AC = \frac{n^2-1}{h} R^2,$$

risulta:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{m^2-1}{n^2-1} \tag{12}$$

Se ora consideriamo gli altri tre punti A_1, B_1, C_1 corrispondenti ai raggi vettori qR, qR_1, qR_2, si ha pure:

$$A_1B_1 = \frac{m^2-1}{h} q^2R^2, \qquad A_1C_1 = \frac{n^2-1}{h} q^2R^2$$

e quindi:

$$\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{m^2-1}{n^2-1} = \frac{AB}{AC}$$

Da questo teorema derivano molte proprietà della sviluppante di cerchio. Così ad esempio:

« *Se quattro raggi vettori consecutivi di una particolare sviluppante di cerchio determinano tre archi che si possano considerare come i lati di un triangolo rettangolo, i medesimi raggi, o altri ad essi proporzionali, hanno la stessa proprietà in tutte le sviluppanti di cerchio* ».

Così pure:

« *Il rapporto anarmonico di quattro punti* A, B, C, D *di una particolare sviluppante di cerchio è eguale al rapporto anarmonico degli altri quattro punti* A_1, B_1, C_1, D_1 *di qualsivoglia sviluppante di cerchio, i cui raggi vettori sono eguali, o proporzionali, a quelli dei primi* » ecc. ecc.

Dall'equazione (12) si ricava l'altra:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{n^2-m^2}{m^2-1}, \tag{13}$$

la quale conduce a molte proprietà della nostra curva.

Supponendo per esempio successivamente $m = 2, 3, 4, 5$ e determinando per quali valori di n il rapporto $\frac{BC}{AB}$ è intero, nonchè il valore di detto rapporto, si giunge al teorema:

« *Se in una sviluppante, di cerchio si conducono tre raggi vettori* OA, OB, OC, *il primo arbitrario, il secondo multiplo del primo secondo uno dei numeri* 2; 3; 4; 5 *e il terzo multiplo del primo rispettivamente secondo uno dei numeri*:

$3\alpha \pm 1$; $8\alpha \pm 1$, *ovvero* $8\alpha \pm 3$; $15\alpha \pm 1$, *ovvero* $15\alpha \pm 4$; $24\alpha \pm 1$, *ovvero* $24\alpha \pm 5$, *ovvero* $24\alpha \pm 7$, *ovvero* $24\alpha \pm 11$,

l'arco BC *è multiplo di* AB *rispettivamente secondo i numeri:*

$3\alpha^2 \pm 2\alpha - 1$; $8\alpha^2 \pm 2\alpha - 1$, *ovvero* $8\alpha^2 \pm 6\alpha$; $15\alpha^2 \pm 2\alpha - 1$, *ovvero* $15\alpha^2 \pm 8\alpha$; $24\alpha^2 \pm 2\alpha - 1$, *ovvero* $24\alpha^2 \pm 10\alpha$, *ovvero* $24\alpha^2 \pm 14\alpha + 1$, *ovvero* $24\alpha^2 \pm 22\alpha + 4$, *essendo* α *un numero intero qualunque* ».

Parma, maggio 1896.

G. Pirondini.

NOTA SOPRA ALCUNE FORMOLE DI STEINER

Si descrivano due circonferenze interne l'una all'altra coi raggi R, r ed i centri O ed E alla distanza d; il punto D della retta OE di egual potenza rispetto ai due cerchi lontano da O del segmento $OD = \delta$, vien determinato da

(1) $$t^2 = \delta^2 - R^2 = (\delta - d)^2 - r^2;$$

da cui si traggono (2)

$$\delta = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d}, \quad t = \frac{1}{2d}\sqrt{(d + R + r)(d + R - r)(d - R - r)(d - R + r)}\,.$$

Sulla stessa OE prendiamo il punto I alla distanza $OI = \delta \pm t$ per centro d'inversione e p^2 per potenza, i cerchi O ed E si trasformeranno in due altri concentrici coi raggi (3) $r' = \dfrac{p^2 r}{2t(t + \delta - d)}$, $R' = \dfrac{p^2 R}{2t\,(t + \delta)}$ e col centro comune O' definito per $IO' = \dfrac{p^2}{2t}$. Due circonferenze C_n, C_{n+1} tangenti ai cerchi O, E ed esternamente fra loro si convertono nei cerchi inversi C'_n, C'_{n+1}, che toccheranno le circonferenze concentriche O' e fra loro avranno pure il contatto esterno; la distanza di due centri successivi pari al diametro $r' - R'$ di ciascuna apparirà dal centro O' sotto l'angolo ω dato per (4) $\operatorname{sen}\dfrac{\omega}{2} = \dfrac{r' - R'}{r' + R'}$. Supponendo m cerchi $C_1, C_2, C_3, \ldots C_{m-1}, C_m$, tangenti fra loro e l'ultimo col primo, iscritti nello spazio comune ai cerchi O ed E, ne conseguirà i centri degl'inversi C'_n esser i vertici di un poligono regolare stellato m-latero e della specie h; quindi $m\omega = 2h\pi$ ed in virtù delle relazioni (1), (2), (3) (4) ricaveremo

$$4\,\mathrm{tang}^2\frac{\pi h}{m} = \frac{(r' - R')^2}{r'R'} = \frac{1}{Rr}\left(\frac{r}{t + \delta - d} - \frac{R}{t + \delta}\right)^2 (t + \delta)(t + \delta - d) =$$
$$= \frac{1}{Rr}\left[(R - r)^2 - d\left(\frac{R^2}{t + \delta} - \frac{r^2}{t + \delta - d}\right)\right] = \frac{1}{Rr}\left[(R - r)^2 - d^2\right];$$

il qual teorema di Steiner si enuncia " *affinchè* m *cerchi* $C_1, C_2, C_3 \ldots C_m$ *tangenti successivamente fra loro e l'ultimo al primo tocchino due cerchi* R, r *interni l'uno all'altro e coi centri alla distanza* d, *dovrà sussistere la condizione*

(5) $$d^2 = (R - r)^2 - 4Rr\,\mathrm{tang}^2\frac{\pi h}{m},$$

essendo h *ed* m *interi positivi;* la condizione è indipendente dalla situazione del cerchio iniziale.

In secondo luogo consideriamo due cerchi della superficie sferica, descritti coi poli O ed E, i raggi sferici R, r e d rappresenti l'arco OE di cerchio massimo; scegliendo per origine d'inversione il punto della sfera opposto ad O, si denotino con R_1, r_1 i raggi delle proiezioni stereografiche aventi i loro centri O_1, E_1 alla distanza d_1; posto uno il raggio della sfera facilmente otterremo le relazioni

$$d_1 = \frac{\operatorname{sen} d}{\cos d + \cos r}, \quad r_1 = \frac{\operatorname{sen} r}{\cos d + \cos r}, \quad R_1 = \operatorname{tang}\frac{R}{2}; \tag{6}$$

sostituendo questi valori nella (5), dopo aver messo l'indice 1 ai simboli d, R, r, deduciamo l'eguaglianza

$$\cos^2\frac{R}{2}\operatorname{sen}^2 d - \left[\operatorname{sen}\frac{R}{2}\cos d + \operatorname{sen}\left(\frac{R}{2} - r\right)\right]^2 = 2\operatorname{sen}R\operatorname{sen}r(\cos r + \cos d)\operatorname{tang}^2\frac{\pi h}{m}.$$

Osservando il primo membro essere identico a

$$2\operatorname{sen}\frac{d+R-r}{2}.\operatorname{sen}\frac{d+r-R}{2}.(\cos d + \cos r),$$

ne scaturisce la seconda formola di Steiner

$$\cos d = \cos(R - r) + 2\operatorname{sen} r \operatorname{sen} R \operatorname{tang}^2\frac{\pi h}{m}. \tag{7}$$

Infine due sfere interne l'una all'altra coi centri O ed E situati alla distanza d e coi raggi R, r mediante l'inversione per le relazioni (3) si cambieranno in due sfere coi raggi r', R$'$ ed il centro comune O$'$; ogni sfera ad essa tangente avrà il diametro $r' - R'$. Ora i centri C'_n della m sfere tangenti fra loro successivamente ed alle sfere concentriche sono distanti dal centro O$'$ dei segmenti eguali ad $\frac{r'+R'}{2}$ e giacciono in una certa circonferenza avente il centro O$''$ ed il raggio $\rho' = \frac{r'-R'}{2}\operatorname{sen}\theta$, dove θ simboleggia l'angolo O$''$O C'_n. Gli stessi punti C'_n saranno vertici di un poligono regolare stellato m-latero e della specie h, allorchè l'ultima sfera C'_m tocchi la prima C'_1; ponendo $\alpha = \frac{2h\pi}{m}$ per l'angolo sotto cui vedesi dal centro O$''$ la distanza $C'_n\, C'_{n+1}$ eguale al diametro di ogni sfera C'_n troveremo

$$r' - R' = 2\rho' \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2};$$

e eliminando ρ' ed α fra le precedenti eguaglianze risulterà

$$\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\frac{h\pi}{m} = \frac{r'-R'}{r'+R} = \frac{dR - (R-r)(t+\delta)}{(R+r)(t+\delta) - dR} \tag{8}$$

a causa delle (3). Nel caso particolare di $\theta = \omega$ a motivo della (4) dedurremo

$$\rho' = 2\left(\frac{r'-R'}{r'+R'}\right)\sqrt{r' R'} \quad , \quad \operatorname{sen}^2\frac{h\pi}{m} = \frac{(r'+R')^2}{16 r' R'}$$

e riducendo con le formole (3) si conchiuderà la terza relazione di Steiner

$$d^2 = (R + r)^2 - 16\, Rr \operatorname{sen}^2\frac{h\pi}{m}.$$

G. Bellacchi.

GRANDEZZE FINITE ED INFINITE

(*Estratto di una lettera del Prof.* RODOLFO BETTAZZI *al direttore del " Periodico di Matematica ")*

Carissimo Amico,

Il tuo articolo « Sul postulato dell'equivalenza » comparso nel fascicolo 2° del Periodico di quest'anno, mi suggerisce alcune osservazioni in proposito, che vedrei volentieri pubblicate sul tuo giornale.

Trovo opportunissimo quello che dici circa la definizione *Frattini-Giudice* della grandezza finita, che cioè un ente, in quanto è grandezza, va giudicato a seconda della classe a cui si considera appartenente, poichè variano insieme a questa gli enti che possonò dirsi sue parti; ma osservo che non si è fatto abbastanza quando si siano dette finite od infinite le grandezze, secondochè appartengono a classi di 1ª o di 2ª specie.

Infatti nelle classi di 2ª specie vi possono essere grandezze tali che convenienti multiple di qualunque loro parte le superano, e grandezze per cui esistono parti nessuna multipla delle quali può superarle: e una distinzione fra le une e le altre è opportuna, non essendo conveniente dire infinite tutte quelle grandezze per il solo fatto che appartengono a classi di 2ª specie. Pure ammettendo dunque che lo studio delle grandezze debba farsi dopo definite le classi a cui si fanno appartenere, (come dico ancor io nella mia « Teoria delle grandezze ») e che nelle classi di 1ª specie non occorrono altre distinzioni, essendo in esse finite tutte le loro grandezze, resta stabilito che per quelle di 2ª specie convenga distinguere le grandezze stesse, secondochè hanno il carattere del finito o dell'infinito. Ciò, in particolare, è necessario nella classe di tutte le superficie piane (poligoni, striscie, angoli) e in quella delle parti dello spazio (poliedri, prismi indefiniti, strati, diedri ed angoloidi) le quali sono di 2ª specie.

Sta bene poi che le grandezze infinite si potrebbero graduare anche per l'ordine d'infinito, secondo quello che tu dici; ma purchè ciò si faccia *nell' interno di ciascuna classe*, potendo una grandezza da dirsi infinita del 1° ordine in una classe divenire di 2°, di 3°,... ed anche di nessun ordine in un'altra.

Venendo all'ultima parte del tuo articolo, alla questione cioè se convenga o no adottare il concetto delle grandezze finite da dirsi trascurabili di fronte a quelle infinite, rispondo che, a mio credere, *non conviene* sia per la complicazione dell'idea eccessiva in un corso elementare, sia perchè la ritengo come pericolosissima in mano ad uno scolaro, che potrebbe finire facilmente col trascurare anche quello che non è trascurabile.

Si potrebbe eliminare questo secondo pericolo dando al postulato la forma più precisa: « *Due grandezze infinite di una classe, tali che l'una si ottenga dall'altra sottraendo una parte finita, o infinita d'ordine inferiore, sono equivalenti* » ma non scompaiono nonostante tutte le difficoltà. Ed invero l'equivalenza di cui si parla in questo postulato non può essere in generale l'uguaglianza: per es. un piano non sarà mai uguale ad un piano a cui sia tolto un poligono. Allora o è necessario che venga data una prima definizione d'equivalenza anche per le grandezze infinite di una classe, il che in geometria non si è soliti a fare contentandosi di considerare l'uguaglianza per le grandezze di classi di 1ª specie (segmenti, angoli, strisce, archi, settori circolari, diedri, strati ecc.) e l'equivalenza per le grandezze finite di classi di 2ª specie (poligoni nelle superficie piane, poliedri fra le parti di spazio ecc.) oppure il postulato può includersi nelle definizioni di equivalenza, dicendo equivalenti due grandezze infinite di una classe quando sono scomponibili in parti uguali, tranne alcuna finita o infinita di ordine inferiore che compaiono nell'una e non nell'altra.

Che la questione abbia importanza scientificamente debbo essere io il primo ad ammetterlo; giacchè usare il tuo postulato equivale a considerare isolata nella classe di 2ª specie la sottoclasse delle sue grandezze infinite, e l'isolamento delle sottoclassi introdussi appunto e studiai nella mia « Teoria delle grandezze » (§§ 34 e segg.) Ma credi tu che convenga trattar questo nella scuola? Io giudico di no, quando penso al da fare che, e nella scuola e fuori, dà ai geometri la teoria dell'equivalenza anche per le sole grandezze finite!

Anche ammettendo il postulato o la nuova definizione d'equivalenza, ti confesso poi che non vedo come con esso si semplifichino le dimostrazioni dei teoremi che tu citi, almeno quando queste si vogliono avere rigorose. Esse invero sono fondate sul fatto che due figure equivalenti fra loro in una classe abbiano ad essere equivalenti in un'altra, ed anzi uguali, ciò che, colle osservazioni da me fatte in principio, non è cosa davvero evidente. P. es. nel Teorema 1° sulla somma degli angoli di un triangolo tu dimostri che la somma degli angoli esterni (cioè il piano meno il triangolo) è equivalente all'intero piano, il che è giusto, considerando tali figure come grandezze della classe *superficie piane*, nella quale il triangolo, grandezza finita, è trascurabile rispetto all'intero piano, almeno dato il postulato. Ma quando tu consideri la somma degli angoli come un angolo ed il piano come un giro, cioè quando consideri quegli enti non più nella classe delle superficie piane ma bensì in quella degli angoli, come fai a concludere che in questa nuova classe, dove il concetto di equivalenza è diverso, e le parti non sono che angoli, le figure continuino ad essere equivalenti, e più ancora che siano uguali? Ciò sarà anche vero; ma per lo meno richiede una dimostrazione, che toglie ogni semplicità al teorema.

Concludo che l'idea della graduazione degli ordini d'infinito nelle classi geometriche non mi pare appropriata alla geometria elementare: e, quanto meno, non può usarsi per applicare ad enti, considerati in una classe, conclusioni dedotte quando quegli enti si considerano in un'altra.

Osservo qui di passaggio che l'ammissione del postulato da te chiesto darebbe come conclusione che una grandezza che è infinita in una classe, essendo equivalente a quella che si ottiene trascurandone una parte finita, non sodisfarebbe al Postulato De Zolt-De Paolis: e avremmo la distinzione delle grandezze in finite ed infinite secondochè sodisfano o no a tale postulato.

tuo aff^{mo}
RODOLFO BETTAZZI.

Torino 23 Marzo 1897.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 339* 340* 352* 356* 364* 365*

339. *Nel cono descritto dalla rotazione dell'angolo* θ *intorno ad un suo lato si conduce un piano perpendicolare ad una generatrice e distante dal segmento* d *dal vertice; esprimere in funzione di* θ *e* d *gli assi, il parametro della conica e gli angoli formati dalle generatrici passanti per due vertici della curva.*

340. *Per un punto di una superficie conica circolare retta, condurre un piano secante in modo che gli assi della ellisse (o dell'iperbole) abbiano una data ragione* k. *Si conosce la distanza* d *del punto dal vertice e l'angolo* 2θ *del cono.*

BELLACCHI.

Risoluzione del sig. Riccardo Micks professore al Ginnasio Comunale di Trieste.

Facendo passare pel vertice del cono un piano normale al piano dato (MN), otterremo le due generatrici e l'asse della conica. Sia O il punto in cui una di queste generatrici viene tagliata dal detto asse, d la distanza del punto O dal vertice V del cono e β l'angolo che l'asse forma colla generatrice.

Facendo inoltre passare per un punto qualunque Q di quest'asse un piano parallelo alla base del cono, questo taglierà il cono secondo un cerchio di raggio TR (diametro STR) ed il piano della conica nella retta PQ, ove P è un punto della conica.

Prendendo O quale origine delle coordinate, il menzionato asse della conica come asse delle ascisse ed una parallela alla PQ come asse delle ordinate avremo

$$OQ = x \quad e \quad PQ = y.$$

Essendo 2θ l'angolo delle due generatrici del cono, avremo che l'angolo OQR del triangolo OQR sarà $= 90° - (\beta - \theta)$ e quindi, applicando al triangolo OQR il teorema dei seni, avremo

$$OR = \frac{x \cos(\beta - \theta)}{\cos\theta} \quad e \quad QR = \frac{x \operatorname{sen}\beta}{\cos\theta}.$$

E quindi il raggio $TR = (VO + OR) \operatorname{sen}\theta$,

$$TR = \left(d + \frac{x \cos(\beta - \theta)}{\cos\theta}\right) \operatorname{sen}\theta,$$

ed

$$SQ = SR - QR = 2 \,.\, TR - QR.$$

Da un teorema noto si ha

$$\overline{PQ}^2 = \overline{SQ \,.\, QR};$$

da cui, sostituendo tutti i valori e riducendo, si ottiene

$$(1) \qquad y^2 = 2d \,.\, \operatorname{tg}\theta \,.\, \operatorname{sen}\beta \,.\, x - \frac{\operatorname{sen}\beta \,.\, \operatorname{sen}(\beta - 2\theta)}{\cos^2\theta} x^2,$$

la quale equazione della conica confrontata coll'equazioni

$$\begin{array}{ll} y^2 = 2px - qx^2 & \text{per l'elisse} \\ y^2 = 2px & \text{" la parabola} \\ y^2 = 2px + qx^2 & \text{" l'iperbole,} \end{array}$$

dà

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \text{per l'elisse la condizione} & \beta > 2\theta \\ \text{" la parabola} & \beta = 2\theta \\ \text{" l'iperbole} & \beta < 2\theta. \end{array} \right.$$

Calcoliamo ora i semiassi.

Dalla (1) risulta $p = d \operatorname{tg}\theta \,.\, \operatorname{sen}\beta$, e

$$q = \frac{p}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta \,.\, \operatorname{sen}(\beta - 2\theta)}{\cos^2\theta};$$

per cui otteniamo facilmente i semiassi

$$a = d \operatorname{sen}\theta \,.\, \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}(\beta - 2\theta)}$$

$$b = d \operatorname{sen}\theta \,.\, \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta - 2\theta)}}$$

Problema 339. — Dalle condizioni (2) risulta che pel caso speciale $\beta = 90°$ avremo

una elisse se $2\theta < 90°$, una parabola se $2\theta = 90°$, ed un'iperbole se $2\theta > 90°$.

I semiassi si ottengono dalla (3) per $\beta = 90°$,

$$a = \frac{d}{2} \operatorname{tg} 2\theta \quad e \quad b = d \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}};$$

per cui in tal caso l'angolo (φ) che inchiudono le due generatrici, che passano pei vertici della conica, si ottiene dall'equazione

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos 2\theta}\sqrt{3\cos^2\theta - 1}.$$

Problema 340. — Sia la ragione dei semiassi $\frac{a}{b} = k$.

Da (3) si ottiene allora

$$\operatorname{sen}\beta \,.\, \operatorname{sen}(\beta - 2\theta) = \frac{\cos^2\theta}{k^2},$$

e quindi

$$\cos 2(\beta - \theta) = \cos 2\theta - \frac{2\cos^2\theta}{k^2}$$

ci dà l'angolo β, che deve in tal caso inchiudere il piano.

Altre risoluzioni della questione 340 del Prof. Retali, delle 339 e 340 del sig. Guido Fubini studente della Scuola normale superiore di Pisa e del sig. Ernesto Laura allievo del R. Istituto tecnico di Torino.

352.* *Determinare una piramide triangolare regolare, conoscendo la superficie totale* s *e la distanza* h *dei vertici della base dalle facce opposte.*

LUIGI BOSI.

Risoluzione del sig. Ernesto Tucci, alunno del R. Istituto Tecnico di Livorno.

Sia (S, ABC) la piramide, SD $= z$ l'apotema di essa, SP $= y$ l'altezza relativa ad ABC, x il lato della base, m la sua mediana. — Poniamo, per l'omogeneità $s = a^2$.

Si ha per dato:

(I) $$\frac{3xz}{2} + \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = a^2, \text{ ossia } 6xz + x^2\sqrt{3} = 4a^2.$$

Dal triangolo rettangolo SPD si ha $z^2 = y^2 + \mathrm{PD}^2$.

P essendo il baricentro del triangolo ABC, è $\mathrm{PD} = \frac{1}{3}m = \frac{x\sqrt{3}}{6}$ e quindi $\mathrm{PD}^2 = \frac{x^2}{12}$, per cui

(II) $$z^2 = y^2 + \frac{x^2}{12}$$

Si ha pure

(III) $$\frac{1}{6}xzh = \frac{1}{6}yx^2\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ da cui } z = \frac{xy\sqrt{3}}{2h}.$$

Innalzando a quadrato e sostituendo nella (II) avremo,

(IV) $$\frac{3x^2y^2}{4h^2} = y^2 + \frac{x^2}{12}, \text{ da cui } x^2 = \frac{12h^2y^2}{9y^2 - h^2}$$

Sostituendo nella (I) il valore di z dato dalla (III), avremo

$$x^2\sqrt{3}(3y + h) = 4a^2h, \text{ e per la (IV) } \frac{12h^2y^2\sqrt{3}(3y+h)}{9y^2 - h^2} = 4a^2h,$$

ovvero

(V) $$f(y) = 3hy^2\sqrt{3} - 3a^2y + a^2h = 0$$

$$y = \frac{a^2\sqrt{3} \pm a\sqrt{3a^2 - 4h^2\sqrt{3}}}{6h}.$$

DISCUSSIONE. — Affinché y sia reale dev'essere $3a^2 \geq 4h^2\sqrt{3}$, ossia

(VI) $$a \geq \frac{2h}{\sqrt[4]{3}}.$$

Soddisfatta questa condizione, le due radici della (V) sono positive, però y dev'essere tale da rendere positivo il secondo membro della (IV) e così dev'essere $y > \frac{h}{3}$. Ora sostituendo nella (V) si ha: $f\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{h^3\sqrt{3}}{3} > 0$; d'altra parte la semisomma delle radici della (V) è espressa da $\frac{a^2}{2h\sqrt{3}}$, quindi, in causa della (VI), sarà maggiore di $\frac{2h}{3}$ e a fortiori di $\frac{h}{3}$. Si conclude che, soddisfatta la (VI), entrambi le radici sono reali e maggiori di $\frac{h}{3}$. Il problema ha quindi, in tale ipotesi, due soluzioni che si riducono ad una nel

Caso particolare $a = \frac{2h}{\sqrt[4]{3}}$. Sarà in questo caso $x = \frac{4h}{3}$, $y = \frac{2h}{3}$, $z = \frac{4h\sqrt{3}}{9}$; e quindi: „Data solamente h, la superficie totale s è minima ed uguale a $\frac{4h^2}{\sqrt{3}}$, quando il lato della base è uguale a $\frac{4h}{3}$ „.

356. *Costruire le parabole che hanno una data direttrice, e*

a) *passano per due punti dati;*

b) *passano per un punto e toccano una retta data;*

c) *toccano due rette date.*

Retali.

Risoluzione del sig. Ernesto Tucci, alunno nel R. Istituto Tecnico di Livorno.

Basta, per ogni caso costruire il fuoco della curva.

a) Siano M ed N i punti dati. Centro in M ed in N successivamente si descrivano due circonferenze tangenti alla direttrice. Il fuoco, per una proprietà della parabola, dovendo appartenere ad ambedue le circonferenze sarà sulla loro intersezione. Avremo quindi due, una, o nessuna soluzione, secondo che le circonferenze sono secanti, tangenti esternamente o esterne l'una all'altra. Se sono tangenti esternamente, i punti e il fuoco sono in linea retta. Se la retta MN è perpendicolare alla direttrice, le circonferenze sono tangenti internamente e la parabola degenera in una semiretta.

b) Sia M il punto dato, t la retta data. Centro in M si descriva la circonferenza tangente alla direttrice.

Per il punto d'incontro P della retta t colla direttrice conducasi la retta PQ simmetrica della direttrice rispetto alla t. Il fuoco, per un noto teorema, dovendo appartenere alla PQ e alla circonferenza, sarà sulla loro intersezione. Avremo quindi due, una o nessuna soluzione, secondo che la PQ è secante, tangente o esterna alla circonferenza. Per avere il punto di contatto della tangente t, basta costruire il simmetrico del fuoco rispetto a t, il quale apparterrà alla direttrice, e da quel punto innalzare una perpendicolare alla direttrice fino all'incontro della t in un punto, che sarà quello richiesto. Oppure si può innalzare dal fuoco una perpendicolare alla PQ fino all'incontro della t in un punto, etc. Se la PQ è tangente alla circonferenza M, il punto M, il fuoco ed il punto di contatto saranno in linea retta.

c) Si conducano le simmetriche d, d' della direttrice rispetto alle tangenti date t, t'. Il loro punto d'incontro F è il fuoco della parabola. Al solito i punti di contatto si troveranno, determinando le intersezioni rispettive della t e t' con le normali alle d, d' condotte da F.

Se le tangenti t e t' sono parallele, oppure se fanno con la direttrice angoli uguali a un semiretto, allora le d e d' saranno parallele ed il problema non avrà soluzione.

Altre risoluzioni del Prof. Umberto Ceretti e del sig. Emilio Stretti, allievo della R. Accademia navale.

364. *Indicando in generale con* $f(a, b)$ *l'espressione:*

$$d_1 \,.\, d_2 \ldots d_n \,.\, \varphi\left(\frac{a}{d_1 \,.\, d_2 \ldots d_n}\right),$$

nella quale è

$$d_1 = D(a,b),\ d_2 = D\left(\frac{a}{d_1}, d_1\right),\ d_3 = D\left(\frac{a}{d_1\, d_2}, d_2\right); \ldots d_n = D\left(\frac{a}{d_1\, d_2 \ldots d_{n-1}}, d_{n-1}\right),$$

e si suppone $d_{n+1} = 1$, *dimostrare che, se* a, b *sono divisori di* m, *sussiste la relazione*

$$f(m, a) \,.\, f(a, b) \,.\, b = f(m, b)\, f(b, a) \,.\, a.$$

365. *Sia* m *multiplo di* a *e* b.

Se m *non contiene altri fattori primi oltre quelli di* a, b *sussiste la relazione:*

$$f(a, b) \,.\, m = f(m, b) \,.\, a;$$

ed inversamente, se ha luogo tale relazione, m *si compone con soli fattori primi di* a, b.

U. Scarpis.

Risoluzione del sig. Eugenio Sirocchi alunno del R. Istituto tecnico di Ravenna.

Lemma. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni fattore primo di* p *sia fattore primo di* q *e viceversa, è che i due numeri siano proporzionali ai loro indicatori.*

Sia

$$p = a^{\alpha}\, b^{\beta} \ldots l^{\lambda} \qquad , \qquad q = a^{\alpha_1}\, b^{\beta_1} \ldots l^{\lambda_1};$$

si ha quindi

$$\varphi(p) = p\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{l}\right) \quad , \quad \varphi(q) = q\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{l}\right);$$

$$\frac{\varphi(p)}{p} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{l}\right) \quad , \quad \frac{\varphi(q)}{q} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{l}\right);$$

quindi
$$\frac{\varphi(p)}{p} = \frac{\varphi(q)}{q}$$

La condizione è dunque necessaria.

Si abbia ora

$$\frac{\varphi(p)}{p} = \frac{\varphi(q)}{q},$$

e si ponga

$$q = a^{\alpha_1}\, b^{\beta_1}\, c^{\gamma_1} \ldots$$
$$p = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma} \ldots$$

Allora si ha

$$\frac{\varphi(p)}{p} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) \ldots \quad , \quad \frac{\varphi(q)}{q} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) \ldots;$$

quindi per ipotesi

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) 1 - \frac{1}{c}\Big) \ldots = \left(1 - \frac{1}{a_1}\right)\left(1 - \frac{1}{b_1}\right)\left(1 - \frac{1}{c_1}\right) \ldots;$$

ossia

(1) $$\frac{(a-1)(b-1)(c-1)\ldots}{a \,.\, b \,.\, c \ldots} = \frac{(a_1-1)(b_1-1)(c_1-1)\ldots}{a_1\, b_1\, c_1 \ldots}.$$

Ed ora riducendo, ai minimi termini la frazione $\frac{(a-1)(b-1)\ldots}{a\, b \ldots}$, otterremo la frazione $\frac{h}{k}$, in cui k, non potendo essere eguale al 1, perchè la frazione considerata è evidentemente minore dell'unità, contiene qualcuno dei fattori primi $a, b, c, \ldots$ Supponiamo che contenga a. — D'altra parte la frazione $\frac{(a_1-1)(b_1-1)\ldots}{b_1\, b_1 \ldots}$ ha i suoi termini equimultipli dei termini della $\frac{h}{k}$, dunque il prodotto dei fattori primi $a_1\, b_1\, c_1, \ldots$ è divisibile per k e quindi per a; ma allora a è eguale ad uno di essi; sia eguale ad a_1. Allora si ha $\frac{a-1}{a} = \frac{a_1-1}{a_1}$, per cui dalla (1) si ricava

$$\text{(2)} \qquad \frac{(b-1)\,(c-1)\ldots}{b\, c \ldots} = \frac{(b_1-1)\,(c_1-1)\ldots}{b_1\, c_1 \ldots}$$

In modo analogo possiamo provare che uno dei fattori primi $b, c, \ldots$ è uguale ad uno dei fattori primi $b_1, c_1, \ldots$; sia $b = b_1$. Ma allora si ricava $\frac{b-1}{b} = \frac{b_1-1}{b_1}$, per cui dalla (2) si ha

$$\frac{(c-1)\ldots}{c\ldots} = \frac{(c_1-1)\ldots}{c_1\ldots}.$$

È chiaro che così continuando potremo provare che ciascuno dei fattori primi $a, b, c, \ldots$ è eguale ad uno dei fattori primi $a_1, b_1, c_1, \ldots$; e non può darsi che si esaurisca l'una serie di fattori prima dell'altra perchè allora si avrebbe un'eguaglianza della forma

$$1 = \frac{(m-1)\,(n-1)\ldots}{m\,.\,n\ldots},$$

il che è evidentemente impossibile.

La condizione è quindi anche sufficiente.

Passiamo ora alla risoluzione delle quistioni proposte.

364. Si formino i seguenti specchi di eguaglianze:

(1)

(5) $\begin{matrix} a = d\alpha \\ b = d\beta \end{matrix}$; α primo con β

(5) $\begin{matrix} \alpha = d_1 \alpha_1 \\ d = d_1 \beta_1 \end{matrix}$; α_1 primo con β_1

(5) $\begin{matrix} \alpha_1 = d_2 \alpha_2 \\ d_1 = d_2 \alpha_2 \end{matrix}$; α_2 primo con β_2

. . . .

(5) $\begin{matrix} \alpha_{h-2} = d_{h-1} \alpha_{h-1} \\ d_{h-2} = d_{h-1} \beta_{h-1} \end{matrix}$; α_{h-1} primo con β_{h-1}

(5) $\alpha_{h-1} = d_h \alpha_h$; α_h primo con β_h
$d_{h-1} = d_h \beta_h$; α_h » » d_h.

(2)

(6) $\begin{matrix} m = a\,.\,r \\ a = a\,.\,1 \end{matrix}$

(6) $\begin{matrix} r = t_1\, \omega_1 \\ a = t_1\, \mu_1 \end{matrix}$; ω_1 primo con μ_1

(6) $\begin{matrix} \omega_1 = t_2\, \omega_2 \\ t_1 = t_2\, \mu_2 \end{matrix}$; ω_2 primo con μ_2

. . . .

(6) $\begin{matrix} \omega_{p-2} = t_{p-1}\, \omega_{p-1} \\ t_{p-2} = t_{p-1}\, \omega_{p-1} \end{matrix}$; ω_{p-1} primo con μ_{p-1}

(6) $\varphi_{p-1} = t_p\, \omega_p$; ω_p primo con μ_p
$t_{p-1} = t_p\, \mu_p$; ω_p » » t_p

(3)

(7) $\begin{matrix} b = d\beta \\ a = d\alpha \end{matrix}$; β primo con α

(7) $\begin{matrix} \beta = \delta_1 \rho_1 \\ d = \delta_1 \sigma_1 \end{matrix}$; ρ_1 primo con σ_1

(7) $\begin{matrix} \rho_1 = \delta_2 \rho_2 \\ \delta_1 = \delta_2 \sigma_2 \end{matrix}$; ρ_2 primo con σ_2

. . . .

(7) $\begin{matrix} \rho_{k-2} = \delta_{k-1} \rho_{k-1} \\ \delta_{k-2} = \delta_{k-1} \sigma_{k-1} \end{matrix}$; ρ_{k-1} primo con σ_{k-1}

(7) $\rho_{k-1} = \delta_k \rho_k$; ρ_k primo con σ_k
$\delta_{k-1} = \delta_k \sigma_k$; ρ_k " " δ_k.

(4)

(8) $\begin{matrix} m = bs \\ b = b \, . \, 1 \end{matrix}$

(8) $\begin{matrix} s = u_1 \psi_1 \\ b = u_1 \theta_1 \end{matrix}$; ψ_1 primo con θ_1

(8) $\begin{matrix} \psi_1 = u_2 \psi_2 \\ u_1 = u_2 \theta_2 \end{matrix}$; ψ_2 primo con θ_2

. . . .

(8) $\begin{matrix} \psi_{q-2} = u_{q-1} \psi_{q-1} \\ u_{q-2} = u_{q-1} \theta_{q-1} \end{matrix}$; ψ_{q-1} primo con θ_{q-1}

(8) $\psi_{q-1} = u_q \psi_q$; ψ_q primo con θ_q
$u_{q-1} = u_q \theta_q$; ψ_q " " u_q.

Si consideri uno qualunque di questi specchi, il 1° p. es.; è facile vedere che si ha:

$$d = \mathrm{D}(a, b);\ d_1 = \mathrm{D}(\alpha, d) = \mathrm{D}\left(\frac{a}{d}, d\right);\ d_2 = \mathrm{D}(\alpha_1, d_1) = \mathrm{D}\left(\frac{a}{d\,d_1}, d_1\right) \ldots .$$

$$d_h = \mathrm{D}(\alpha_{h-1}, d_{h-1}) = \mathrm{D}\left(\frac{a}{d\,d_1 \ldots d_{h-1}}, d_{h-1}\right);$$

infine $d_{h-1} = \mathrm{D}(\alpha_h, d_h) = \mathrm{D}\left(\frac{a}{d\,d_1 \ldots d_h}\right) = 1$; a quest'ultimo risultato si giunge necessariamente, perchè le α e le d vanno continuamente decrescendo.

Sopra i medesimi specchi facciamo le seguenti osservazioni, che ci serviranno in seguito:

Si consideri lo specchio (1), e sia γ un fattore primo di a, non comune a b; non potendo γ dividere b, non può dividere d; e allora dividendo a dovrà dividere α; non dividendo d non può dividere d_1, ma, dividendo α, dovrà dividere α_1; non dividendo d_1 non divide d_2 e dividendo α_1 dovrà dividere α_2; ecc. Così proseguendo si arriva a provare che γ divide α_h. Sia ora γ un fattore primo di α_h; esso non può dividere nè β_h nè d_h (perchè primi con α_h), non può dunque dividere d_{h-1}, però dividendo α_h divide α_{h-1}, e allora non può dividere β_{h-1} (perchè β_{h-1} è primo con α_{h-1}), quindi non dividendo nè d_{h-1} nè β_{h-1} non divide α_{h-1} ecc. Continuando si arriva a provare che γ divide a e non b. Si può osservare che conseguenza di queste considerazioni è che α_h è formato con tutti e coi soli fattori di a non comuni a b.

Si tratta dunque di provare che:

$$(9)\quad a t_1 t_2 \ldots t_p \,.\, \varphi\left(\frac{m}{a t_1 t_2 \ldots t_p}\right) . \, d_1 d \ldots d_h \,.\, \varphi\left(\frac{a}{d d_1 \ldots d_h}\right) . \, b =$$
$$= b u_1 u_2 \ldots u_q \,.\, \varphi\left(\frac{m}{b u_1 u_2 \ldots u_q}\right) . \, d \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_k \,.\, \varphi\left(\frac{b}{d_1 \delta_2 \ldots \delta_k}\right).$$

Moltiplicando membro a membro le (5) dello specchio (1); e lo stesso facendo per le (6) dello specchio (2); per le (7) dello specchio (3); per le (8) dello specchio (4), si ha facilmente:

$$\begin{cases} a = d d_1 d_2 \ldots . d_h \alpha_h \\ m = a\, t_1 t_2 \ldots . t_p \omega_p \\ b = d \delta_1 \delta_2 \ldots . \delta_k \rho_k \\ m = b\, u_1 u_2 \ldots . u_q \psi_q \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} d d_1 \ldots . d_h = \dfrac{a}{\alpha_h} \\ a\, t_1 \ldots . t_p = \dfrac{m}{\omega_p} \\ d \delta_1 \ldots . \delta_k = \dfrac{b}{\rho_k} \\ b\, u_1 \ldots . u_q = \dfrac{m}{\psi_q} \end{cases}$$

e sostituendo nella (9) essa diviene:

$$\frac{m}{\omega_p} \cdot \varphi\left(\frac{m}{\frac{m}{\omega_p}}\right) \cdot \frac{a}{\alpha_h} \cdot \varphi\left(\frac{a}{\frac{a}{\alpha_h}}\right) \cdot b = \frac{m}{\psi_q} \cdot \varphi\left(\frac{m}{\frac{m}{\psi_q}}\right) \cdot \frac{b}{\rho_k} \cdot \varphi\left(\frac{b}{\frac{b}{\rho_k}}\right) \cdot a$$

ossia:

$$(10) \qquad \frac{\varphi(\omega_p) \cdot \varphi(\alpha_h)}{\omega_p \cdot \alpha_h} = \frac{\varphi(\psi_q) \cdot \varphi(\rho_k)}{\psi_q \cdot \rho_k}.$$

Consideriamo ora un fattore primo γ di α_h; sappiamo che esso divide a. Supponiamo che γ divida anche ω_p; allora esso (specchio 2) non può dividere a, il che è assurdo. Dunque α_h è primo con ω_p.

Analogamente si prova che ρ_k è primo con ψ_q. Dunque si ha

$$\varphi(\omega_p) \cdot \varphi(\alpha_h) = \varphi(\omega_p \cdot \alpha_h) \quad , \quad \varphi(\psi_q) \cdot \varphi(\rho_k) = \varphi(\psi_q \cdot \rho_k).$$

Quindi la (10) diviene:

$$(11) \qquad \frac{\varphi(\omega_p \cdot \alpha_h)}{\omega_p \cdot \alpha_h} = \frac{\varphi(\psi_q \cdot \rho_k)}{\psi_q \cdot \alpha_k}.$$

Prendiamo un fattore primo γ del prodotto $\omega_p \alpha_h$, esso dividerà ω_p od α_h; supponiamo che divida α_h: ma allora specchio (1) divide a e non b; dividendo a divide m; quindi dividendo m e non b specchio (4) divide ψ_q e per conseguenza il prodotto $\psi_q \rho_k$. Supponiamo ora che γ divida ω_p allora specchio (2) divide m e non a; dividendo m potrà dividere b e potrà non dividerlo. Lo divida, allora specchio (3) dividendo b e non a divide ρ_k quindi $\psi_q \rho_k$. Infine si supponga che γ non divida b, allora specchio (4) dividendo m e non b divide ψ_q. Concludiamo dunque che un fattore primo di $\omega_p \alpha_h$ è pure fattore di $\psi_q \rho_k$; in modo analogo possiamo provare che ogni fattore primo di $\psi_q \rho_k$ divide $\omega_p \alpha_h$; ma allora per il Lemma premesso la (11) è vera, quindi anche la (10) ed infine la (9).

365. Si formino gli specchi:

(1)	(2)
(3) $\begin{array}{l} a = d\alpha \\ b = d\beta \end{array}$; α primo con β	(4) $\begin{array}{l} m = b \cdot n \\ b = b \cdot 1 \end{array}$
(3) $\begin{array}{l} \alpha = d_1 \alpha_1 \\ d = d_1 \beta_1 \end{array}$; α_1 primo con β_1	(4) $\begin{array}{l} n = \delta_1 \rho_1 \\ b = \delta_1 \sigma_1 \end{array}$; ρ_1 primo con σ_1
(3) $\begin{array}{l} \alpha_1 = d_2 \alpha_2 \\ d_1 = d_2 \beta_2 \end{array}$; α_2 primo con β_2	(4) $\begin{array}{l} \rho_1 = \delta_2 \rho_2 \\ \delta_1 = \delta_2 \sigma_2 \end{array}$; ρ_2 primo con σ_2
. . . .	. . . .

(3) $\left.\begin{array}{l}\alpha_{h-2}=d_{h-1}\alpha_{h-1}\\ d_{h-2}=d_{h-1}\beta_{h-1}\end{array}\right\}$; α_{h-1} primo con β_{h-1}

(3) $\alpha_{h-1}=d_h\alpha_h$; α_h primo con β_h
$d_{h-1}=d_h\beta_h$; α_h " " d_h

(4) $\left.\begin{array}{l}\rho_{k-2}=\delta_{k-1}\rho_{k-1}\\ \delta_{k-1}=\delta_{k-1}\sigma_{k-1}\end{array}\right\}$; ρ_{k-1} primo con σ_{k-1}

(4) $\rho_{k-1}=\delta_k\rho_k$; ρ_k primo con σ_k
$\delta_{k-1}=\delta_k\sigma_k$; ρ_k " " δ_k

La condizione posta dal problema è:

$$(5) \qquad dd_1d_2\ldots d_h\,.\,\varphi\left(\frac{a}{dd_1\ldots d_h}\right)m=b\,\delta_1\delta_2\ldots\delta_k\,.\,\varphi\left(\frac{m}{b\,\delta_1\delta_2\ldots\delta_k}\right).\,a.$$

Ma moltiplicando membro a membro le (3) dello specchio (1); poscia le (4) dello specchio (2) si ha

$$a=dd_1\ldots d_h\alpha_h, \qquad m=b\,\delta_1\delta_2\ldots\delta_h\rho_h,$$

da cui

$$dd_1\ldots d_h=\frac{a}{\alpha_h}, \qquad b\,\delta_1\delta_2\ldots\delta_h=\frac{m}{\rho_k};$$

per le quali la 5 diviene

$$\frac{a}{\alpha_h}\,.\,\varphi\left(\frac{a}{\frac{a}{\alpha_h}}\right)m=\frac{m}{\rho_h}\,.\,\varphi\left(\frac{m}{\frac{m}{\rho_k}}\right).\,a,$$

ossia

$$6) \qquad \frac{\varphi(\alpha_h)}{\alpha_h}=\frac{\varphi(\rho_k)}{\rho_k}.$$

Supponiamo che m sia formato da soli fattori semplici di a, b. Sia γ un fattore primo di α_h; per le considerazioni fatte nella risoluzione della precedente quistione, si ha che γ divide a e non β. Ma dividendo a divide m, e allora divide m e non b per cui specchio (2) divide ρ_k, Inversamente sia γ un fattore primo di ρ_k, esso divide m e non b, quindi per l'ipotesi fatta dovrà dividere a; ma allora dividendo a e non b specchio (1) divide α_h. Ma allora per il Lemma premesso sussiste la (6), quindi la (5).

La condizione è necessaria.

Supponiamo ora che la (5) sia vera, quindi anche la (6), allora per il suddetto Lemma α_h è formato con tutti e coi soli fattori semplici di ρ_k. Sia γ un fattore primo di m, esso dividerà b o non lo dividerà: se non lo divide, dividendo m e non b specchio (2) divide ρ_k, ma allora divide α_h quindi a. Dunque qualunque fattore primo di m o divide b o se non divide b divide a.

La condizione è dunque anche sufficiente.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

359*. In un triangolo qualunque ciascuna bisettrice è divisa dal centro del circolo iscritto in due parti, che stanno fra loro come la somma dei lati che comprendono l'angolo bisecato sta al terzo lato.

(*) Le quistioni contrassegnate con un asterisco sono proposte particolarmente agli studenti delle scuole secondarie; le altre a tutti gli studiosi indistintamente.

360*. In un triangolo qualunque il rettangolo dei due segmenti determinati su ciascuna altezza dal punto d'incontro con le altre due è costante (ed equivalente al quadruplo del rettangolo che ha per lati i raggi dei cerchi iscritto e circoscritto al triangolo, che ha per vertici i piedi delle altezze).

G. Cardoso-Laynes.

361*. Costruire il triangolo conoscendo un lato, l'angolo opposto e la bisettrice dell'angolo noto.

A. Vivarelli.

362*. 1ª. Determinare tre numeri in progressione geometrica, conoscendo la loro somma S e quella P^3 dei loro cubi.

Supposto che S e P siano reali e positivi, quali condizioni si richiedono perchè siano reali e positivi anche i tre numeri domandati?

363*. 2ª. Sui lati AB, BC, CD, DA di un quadrilatero gobbo ABCD siano quattro punti A_1, B_1, C_1, D_1 presi in modo che il loro baricentro coincida con quello dei vertici A, B, C, D del quadrilatero dato. Dimostrare che si ha

$$\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{CC_1}{C_1D} = \frac{DD_1}{D_1A}.$$

Luigi Bosi.

366*. 1°. La condizione necessaria e sufficiente, perchè un numero a sia eguale alla somma di p numeri dispari consecutivi è che p sia un divisore di a tale che

$$\frac{a}{p} - p = \text{numero pari (lo 0 compreso).}$$

367*. 2°. La condizione necessaria e sufficiente, perchè un numero a sia eguale alla somma di p numeri pari consecutivi è che p sia un divisore di a tale che

$$\frac{a}{p} - p = \text{numero dispari.}$$

A. Fontebasso.

368. Dimostrare che

$$2 = \lim_{n=\infty} \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{3}{2n}}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{5}{2n}}} \cdots \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2-\frac{1}{n}}} \right\}$$

G. Fubini.

369*. Se T è un tronco di prisma, che ha per base un poligono regolare S, P è il punto d'incontro dell'altra base S' colla retta parallela agli spigoli laterali condotta per il centro del circolo circoscritto ad S, h la distanza di P dal piano di S, h_1 la media aritmetica delle distanze dei vertici di S' dal piano di S, si dimostri che T è equivalente alla somma di tre piramidi, che hanno la base eguale ad S e l'altezza una eguale ad h e due ad h_1.

370*. Il volume di un segmento sferico ad una base di altezza h ha per misura $\frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)$. Da questa misura si deducano quelle più comunemente usate per il segmento sferico ad una e due basi.

G. Lazzeri.

BIBLIOGRAFIA

Paolo Gazzaniga. — *Libro di Aritmetica ed Algebra elementare.* — (IIª edizione. Padova, Tip. Prosperini, 1897. L. 3,50).

La letteratura matematica, in questo ultimo decennio, specialmente, si è arricchita anche in Italia di opere pregevoli, che al rigore scientifico uniscono eccellenti qualità didattiche. Non sono, purtroppo, ancora scomparsi i mestieranti, che pubblicano libri per le scuole raffazzonati alla peggio, e che incontrano il favore dei pigri e degli ignoranti, ma alla loro azione deleteria si oppone ora quella benefica (che dovrà pure trionfare) di egregî scienziati, i quali non isdegnano di scendere dalla loro altezza per occuparsi della scienza elementare. Anche nelle scuole secondarie deve penetrare un soffio di vita nuova, che, iniziandole nei metodi della scienza moderna, tolga quella discontinuità tanto deplorata quanto dannosa fra gli studi secondarii e quelli superiori. È doveroso, in un tempo che alla scienza deve tante conquiste, dare ad essa la dovuta importanza nella scuola, cominciando dalla più bella, dalla più pura, da quella che alle altre dà forza e diritto di esistere: la matematica.

Il libro del Gazzaniga per l'aritmetica razionale e per l'Algebra elementare mira a questo scopo nobilissimo e lo raggiunge.

Il libro del Gazzaniga in 324 pagine comprende tutto il programma attuale di Aritmetica ed Algebra elementare del corso secondario, compresa la trigonometria piana e qualche argomento, che, sebbene non compreso nei programmi ufficiali, può, ove l'indole della scuola lo permetta, essere svolto anche nel Liceo, perchè importante e divertente.

Della prima edizione di questo libro si occupò nel *Periodico* il prof. Ciamberlini (anno XI, fascicolo IV-V, 1896), quindi io mi limiterò ad accennare alle differenze esistenti tra la prima e la seconda edizione, per non ripetere un'altra recensione pubblicata da me nel *Comune* di Padova del 8 marzo 1896.

Nel § 7, n. 44, del cap. I, il Gazzaniga, accogliendo volentieri un'osservazione rivoltagli, modificò il teorema: *Se fra i numeri* $1, \ldots, \mathrm{E}\left(\sqrt{n}\right)$ *non vi è alcun divisore primo di* n, *il numero stesso* n *o è primo, oppure è il quadrato di un numero primo*, sopprimendo l'ultima parte. Nel § 10 " Osservazioni ed aggiunte „ sono trasportati i principî dell'analisi combinatoria, che nella Iª edizione comparivano nel § 8, e così chiunque voglia non oltrepassare mai i limiti dei programmi ufficiali, può omettere nella scuola lo svolgimento di quella parte del testo, del resto interessante e piacevole. Nelle osservazioni è accennato in modo breve e chiaro alle condizioni sufficienti perchè un gruppo sia numerabile.

Nel § 11 " Prime proprietà dei numeri frazionari „ le frazioni sono introdotte in modo *formale:* le osservazioni preliminari sono utili per togliere quel senso di arbitrarietà, che presenta ai giovani il sistema formale, l'unico però da adottarsi in un insegnamento veramente razionale dell'aritmetica e dell'algebra.

Nel § 12, n. 80 vi è un breve cenno sulla proporzionalità dei numeri interi e frazionari dedotto dalla teoria delle frazioni.

Il § 13 (corrispondente al 12º della 1ª edizione) contiene le *proprietà generali dei numeri razionali* (con una nota storica importante che riferisce il vero significato della parola *irrazionale*), salvo il cenno sulle frazioni continue trasportato al § 11 "osservazioni ed aggiunte, „ anche qui collo scopo di separare nettamente lo svolgimento del programma ufficiale da quelle nozioni che, per quanto importanti, non figurano in esso. Approvo anche l'aggiunta del § 19, ove, dopo aver introdotto *formalmente* lo zero ed i numeri negativi, e studiate le operazioni con i numeri algebrici positivi e negativi, si accenna al fatto che anche i numeri negativi servono ad esprimere aggregati di oggetti o rapporti di grandezze, e quindi le operazioni con questi numeri possono servire a risolvere questioni di importanza pratica. Fra le aggiunte di questo § troviamo un cenno sulla teoria delle congruenze, i teoremi di Wilson e di Fermat (che nella prima edizione appartenevano al § 8 *" altre proprietà dei numeri "*), e sul n.° dei termini periodici di $\frac{1}{n}$ con n primo o potenza di numero primo.

La teoria dei numeri reali, svolta magistralmente anche nella 1ª edizione, non presentava ragione alcuna per essere modificata; soltanto nella ristampa del libro le osservazioni e le aggiunte, prima sparse per il capitolo vennero raccolte nell'ultimo paragrafo (il 27°).

In fine del cap. V° *(Numeri complessi)* una tabella riassume i diversi numeri studiati fin allora, e si passa quindi all'Algebra propriamente detta.

E a proposito dei numeri complessi ripeto quanto scrissi altrove qualche tempo fa: non so perchè la loro teoria, bella, semplice e feconda, non faccia parte del programma liceale, quando è accettata quella degli irrazionali, introdotti per uno scopo, che viene raggiunto completamente soltanto coll'introduzione dei numeri complessi: alludo all'estrazione di radice, di qualunque indice, di un numero reale.

Nel primo § dell'algebra è introdotto esplicitamente il concetto di *numero finito e determinato* (di solito ammesso in silenzio dagli autori e dai docenti) e alla definizione di *espressione algebrica* e di ciò che s'intende per suo valore fa seguito l'osservazione: *Non sempre una espressione algebrica produce un numero finito e determinato*, che mancava nella prima edizione.

Il teorema n. 45 a pag. 222 è enunciato, nella ristampa, in modo completo e chiaro, mentre la sua distinzione in parti (adottata da quasi tutti gli altri autori) lascia sempre dei dubbi ai discenti.

L'applicazione della teoria generale delle equazioni alle equazioni ad una incognita di I°, II°, III° e IV° grado è opportunamente raccolta in un solo paragrafo, nel quale il docente, ove non sia persuaso di estendere il suo programma, può sopprimere i cenni sulle equazioni di III° e IV° grado, indipendenti da quelle di I° e II°, svolte con brevità, semplicità ed eleganza.

Al § sui sistemi di equazioni segue un'aggiunta interessante sulle equazioni non algebriche, (esponenziale, logaritmica, applicazione dei logaritmi ai problemi d'interesse composto, ecc.).

Il libro termina con l'applicazione dell'Algebra alla Geometria, svolgendo la trigonometria piana. La chiusa è degno epilogo del libro bellissimo, prova luminosa dell'alto sapere e delle ottime qualità didattiche di chi lo scrisse.

L'autore nella ristampa ha tenuto conto delle lievi osservazioni degli amici, ha raccolto una maggior quantità di esercizi per ogni paragrafo, ha distinto con caratteri speciali tutte le definizioni, le proprietà caratteristiche e gli enunciati dei teoremi, e infine ha esteso qualche nota storica interessante. Il libro del Gazzaniga a mio parere, è uno dei migliori fra quanti uscirono finora in Italia per l'insegnamento dell'aritmetica e dell'algebra nei Licei e ad esso non può, non deve mancare il favore degli insegnanti colti e studiosi.

Dr. G. B. Marangoni.

Giuseppe Veronese (con la collaborazione di P. Gazzaniga). — *Elementi di Geometria, ad uso dei Licei e degli Istituti Tecnici (1° biennio).*

Questo del Prof. Veronese è diverso dagli altri trattati di geometria, che sono in uso nelle nostre scuole secondarie. Le ragioni del libro sono svolte nella Prefazione, e si riducono alle seguenti: coordinare gli *Elementi* di Euclide allo stretto rigore scientifico dei metodi moderni; formare della geometria un sistema di verità tale che l'osservazione empirica dia i concetti limitati e concreti, l'intuizione ne tragga alimento a concetti generali, e la scienza dia a questi ultimi leggi indipendenti dall'esperienza e logicamente connesse ognuna alla successiva.

Notevole è specialmente: 1° la soppressione del concetto del movimento senza deformazione nello studio della eguaglianza delle figure, per non restringere il concetto di eguaglianza a quello di congruenza; 2° l'applicazione di un principio moderno, secondo il quale: se è data una figura A mediante alcuni postulati e un'altra figura B in tale corrispondenza con A che collo scambio di alcune parole valgono per B le proposizioni contenute nei postulati di A, allora valgono pure per B, con lo scambio di quelle medesime parole, tutte le proposizioni dedotte per A.

Il Libro è preciso, è chiaro, è breve, ma non è facile, nel senso volgare della parola; offerto a menti, non addestrate alla perfezione logica, reca fatica in sul principio ma poi — io lo dico per l'esperimento che ne ho fatto quest'anno — riesce più facile di ogni altro, e reca diletto ed utile a scolari e a maestri.

Anche gli esercizi, che sono numerosi, e divisi paragrafo per paragrafo, danno argomento di utile ricapitolazione della materia, ed aggiungono pregio didattico al trattato.

Questo è diviso in IX Capitoli, ed è preceduto da alcune nozioni generali sui gruppi, sulle serie e sulla corrispondenza univoca e del medesimo ordine tra i gruppi; nozioni che hanno importanza essenziale nel testo.

Senza volere addentrarci in un esame minuto di tutti i capitoli, che richiederebbe spazio non breve, mi limiterò per ora ad accennare i punti più importanti e le piccole lacune che, a parer mio, si riscontrano in quelle parti che furono argomento delle mie lezioni al 1° corso dell'Istituto.

Ad es. nel § 1° del libro primo le dimostrazioni dei teoremi, che per l'addizione dei segmenti valgono la legge associativa e la legge commutativa, non sono estese al caso di un numero qualsivoglia di segmenti. Al Teorema I (pag 18) sui segmenti multipli, converrebbe mettere innanzi alcuni cenni sul metodo di conclusione da n ad $n+1$, che è opportunemente applicato qui ed altrove.

Notevoli sono: la definizione di *figure opposte* rispetto ad un punto; quella dell'eguaglianza di esse, che viene data prima e indipendentemente dalla nozione del piano, e quella di rette parallele, che discende immediatamente dal concetto di figure opposte.

Non intendo piuttosto come, date le definizioni di figure eguali e di coppie rettilinee, non debba dedursi immediatamente che gli angoli di due coppie rettilinee eguali e gli angoli opposti al vertice sono eguali. Perchè, se l'angolo è definito come una parte del fascio limitato da due raggi, esso è una figura di una coppia. Il teorema, ad es., che: " due figure F, F' eguali ad una terza F'', sono eguali tra loro " non è rigorosamente dimostrato nel caso che le figure non siano rettilinee; perchè la figura rettilinea che stabilisce la corrispondenza di eguaglianza tra F'' ed F può essere diversa da quella che stabilisce la corrispondenza d'eguaglianza tra F'' ed F'.

Noto ancora che il perimetro di un triangolo è considerato da Veronese come *parte esterna*, il che lascia dubbio su alcune altre definizioni, come ad es. su quella di *parte interna* del poligono convesso cioè " parte interna dei triangoli che hanno un vertice comune in un vertice del poligono, e per lati le rette congiungenti il vertice comune cogli altri vertici del poligono " perchè in tal modo i punti delle diagonali del poligono potrebbero essere supposti esterni al poligono stesso.

Il Postulato IV (pag. 85) dovrebbe essere preceduto da un teorema che dimostrasse la possibilità di costruire i segmenti a e b.

Ma queste ed altre poche osservazioni che si potrebbero fare sugli altri capitoli sono di poca importanza per sè medesime, e possono essere completate o illustrate dal maestro.

Ciò che importa di dire è che il trattato è un'opera originale e degna del suo autore; il quale, dedicando il suo intelletto alla soluzione del problema dell'insegnamento della Geometria elementare, ha bene meritato della scienza; tanto meglio ha meritato, quanto più il suo libro è lontano dalla speculazione materiale.

Per parte mia io lo ringrazio, perchè con questo suo lavoro egli mi ha procurato più vivo il piacere di insegnare le cose vecchie e di trovarvi dentro insieme il fresco spirito delle nuove.

G. Bordiga.

ERRATA-CORRIGE.

Le quistioni dalla 354 alla 358 pubblicate nel fascicolo III sono del *Prof. Retali* il cui nome fu omesso per errore d'impaginazione. Per la stessa ragione fu errata la numerazione delle quistioni saltando i numeri da 359 a 362. Correggiamo tale errore nel presente fascicolo.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 2 Luglio 1897.

GENERALIZZAZIONE DI UN TEOREMA DEL PROF. E. CESÀRO

1. All'illustre prof. E. Cesàro è dovuto il seguente elegantissimo teorema:

Se con α si rappresentano gli interi positivi pei quali

$$E\left(\frac{2n}{\alpha}\right) = 2k + 1,$$

essendo n *un numero intero positivo qualunque, si ha:*

$$\Sigma\varphi(\alpha) = n^2. \; (*)$$

Il simbolo $E\left(\frac{2n}{\alpha}\right)$ indica la parte intera del quoziente $\frac{2n}{\alpha}$ e la funzione $\varphi(\alpha)$ è la nota funzione di Gauss, la quale rappresenta il numero dei numeri primi con α e inferiori ad esso.

Il teorema precedente può essere notevolmente esteso in base alla generalizzazione da me fatta della funzione φ di Gauss. (**)

2. Col simbolo $\varphi_p(\alpha)$ indicheremo il numero dei gruppi costituiti ciascuno di p numeri non superiori ad α, il cui massimo comun divisore è primo con α. La funzione $\varphi_p(\alpha)$ è definita da una delle seguenti uguaglianze:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi_p(\alpha) = \alpha^p \left(1 - \frac{1}{a^p}\right)\left(1 - \frac{1}{b^p}\right)\cdots\cdots, \\ \Sigma\, \varphi_p(\delta) = \alpha^p, \end{cases}$$

dove $a, b, \ldots.$ sono i divisori primi del numero α e la sommatoria s'intende estesa a tutti i divisori δ di α.

Faremo uso del simbolo $s_m^{(p)}$ per indicare la somma delle p^{me} potenze dei primi m numeri naturali.

(*) U. Scarpis: *Primi elementi della teoria dei numeri* - pag. 24, vol. 225. - Manuali Hoepli.

(**) Veggasi la mia nota: *Sopra un problema della teoria dei numeri* (Roma, *Periodico di matematica*, anno 1891, pag. 119) e l'articolo del Prof. E. Cesàro: *A proposito di una generalizzazione della funzione φ di Gauss*, (Roma, *Periodico*, anno 1892, pag. 1).

Teorema. — *Se con* α *si rappresentano gli interi positivi, pei quali* E $\binom{2n}{\alpha} = 2k + 1$, *essendo* n *un intero positivo qualunque, si ha:*

$$\Sigma\varphi_p(\alpha) = s_{2n}^{(p)} - 2\, s_n^{(p)}.$$

Indichiamo con β quei numeri che entrano, esattamente o no, un numero dispari di volte in $2(n-1)$, con h tutti i divisori di $2n-1$, tolta l'unità, e con k tutti i divisori pari di $2n$, che danno quozienti dispari.

È chiaro che il gruppo dei numeri α sarà costituito:

1° di tutti i numeri β, meno però quei numeri $\beta_1 > 1$ divisori di $2n$ che danno quozienti pari;

2° di tutti i numeri h;

3° di tutti i numeri k.

Avremo quindi

$$\Sigma\varphi_p(\alpha) = \Sigma\varphi_p(\beta) - \Sigma\varphi_p(\beta_1) + \Sigma\varphi_p(h) + \Sigma\varphi_p(k). \tag{2}$$

Poniamo

$$n = 2^\nu n_1\,,$$

essendo n_1 un numero dispari (è evidente che se n è dispari, deve essere $\nu = 0$).

I numeri $\beta_1 > 1$, cioè i divisori di $2n$, tolta l'unità, che danno quozienti pari sono della forma $2^{\nu'}\delta$, essendo $\nu' < \nu + 1$ e δ divisore di n_1; i divisori di $2n$ che invece danno quozienti dispari, sono della forma $2^{\nu+1}\delta$. Quindi, se indichiamo con d tutti i divisori di $2n$, avremo

$$\Sigma\varphi_p(\beta_1) = \Sigma\varphi_p(d) - \Sigma\varphi_p(2^{\nu+1}\delta) - \varphi_p(1).$$

Ora, essendo δ numero dispari e quindi primo con $2^{\nu+1}$, ed osservando la prima delle (1), ricaviamo

$$\varphi_p(2^{\nu+1}\delta) = \varphi_p(2^{\nu+1})\,\varphi_p(\delta) = 2^{\nu p}(2^p - 1)\,\varphi_p(\delta);$$

applicando la seconda delle (1), abbiamo inoltre

$$\Sigma\varphi_p(d) = 2^p n^p\,,$$

$$\Sigma\varphi_p(2^{\nu+1}\delta) = 2^{\nu p}(2^p - 1)\,\Sigma\varphi_p(\delta) = 2^{\nu p}(2^p - 1)\,n_1^p = (2^p - 1)\,n^p\,.$$

Pertanto avremo, giacchè è $\varphi_p(1) = 1$,

$$\Sigma\varphi_p(\beta_1) = 2^p n^p - (2^p - 1)\,n^p - 1,$$

ossia

$$\Sigma\varphi_p(\beta_1) = n^p - 1.$$

I numeri h sono i divisori di $2n-1$, esclusa l'unità, quindi sarà:

$$\Sigma\varphi_p(h) = (2n-1)^p - \varphi_p(1) = (2n-1)^p - 1.$$

Infine i numeri k, cioè i divisori pari di $2n$ che danno quozienti dispari, sono della forma $2^{\nu+1}\delta$, essendo δ divisore di n_1: quindi avremo, come abbiamo trovato poco fa,

$$\Sigma\varphi_p(k) = \Sigma\varphi_p(2^{\nu+1}\delta) = (2^p - 1)\, n^p.$$

Sostituendo nella (2) le espressioni trovate per

$$\Sigma\varphi_p(\beta_1),\ \Sigma\varphi_p(h)\ \text{e}\ \Sigma\varphi_p(k),$$

otteniamo dopo semplici riduzioni,

$$(3)\qquad \Sigma\varphi_p(\alpha) = \Sigma\varphi_p(\beta) + (2n)^p + (2n-1)^p - 2n^p.$$

Se rappresentiamo ora rispettivamente con

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ldots,\ \lambda,\ \mu,\ \omega$$

i numeri che sono contenuti esattamente o no un numero dispari di volte nei numeri

$$2n,\quad 2(n-1),\quad 2(n-2),\ \ldots\ldots,\ 2\,.\,3,\quad 2\,.\,2,\quad 2\,.\,1,$$

ed applichiamo la (3), otteniamo

$$\begin{aligned}
\Sigma\varphi_p(\alpha) &= \Sigma\varphi_p(\beta) + (2n)^p + (2n-1)^p - 2\,.\,n^p,\\
\Sigma\varphi_p(\beta) &= \Sigma\varphi_p(\gamma) + (2n-2)^p + (2n-3)^p - 2\,.\,(n-1)^p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Sigma\varphi_p(\lambda) &= \Sigma\varphi_p(\mu) + 6^p + 5^p - 2\,.\,3^p,\\
\Sigma\varphi_p(\mu) &= \Sigma\varphi_p(\omega) + 4^p + 3^p - 2\,.\,2^p,\\
\Sigma\varphi_p(\omega) &= \qquad\qquad 2^p + 1^p - 2\,.\,1^p.
\end{aligned}$$

Addizionando membro a membro tutte queste uguaglianze, riducendo e ricordando il significato del simbolo $s^m{}_{(p)}$, otteniamo infine:

$$\Sigma\varphi_p(\alpha) = s_{2n}{}^{(p)} - 2s_n{}^{(p)},$$

appunto come volevasi dimostrare.

Esempio. — Supponiamo $n=5$ e $p=3$; i numeri che entrano esattamente o no un numero dispari di volte in $2\,.\,5 = 10$, sono

$$2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10.$$

Ora abbiamo

$$\begin{aligned}
&\varphi_3(2) + \varphi_3(3) + \varphi_3(6) + \varphi_3(7) + \varphi_3(8) + \varphi_3(9) + \varphi_3(10) =\\
&\quad = 7 + 26 + 182 + 342 + 448 + 702 + 868 = 2575,
\end{aligned}$$

ed è effettivamente

$$s_{10}{}^{(3)} - 2s_5{}^{(3)} = (1^3 + 2^3 + \ldots + 10^3) - 2\,(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3) = 2575.$$

Dott. Luigi Carlini.

Melfi, giugno 1897.

DIMOSTRAZIONE ELEMENTARE

di un teorema della teoria delle equazioni

Siano $2n$ incognite $x_1 \ldots . x_n$, $y_1 \ldots . y_n$. Indichiamo con $(x_1 \ldots . x_n)_k$ la somma dei prodotti k a k delle $x_1 \ldots . x_n$ ed analogamente con $(y_1 \ldots . y_n)_k$ quella dei prodotti k a k delle $y_1 \ldots . y_n$. Mi propongo di dimostrare in modo elementare il seguente

Teorema. — *La condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema di equazioni*

$$
(1) \qquad \begin{array}{c}
(x_1 \ldots . x_n)_1 = (y_1 \ldots . y_n)_1 \\
(x_1 \ldots . x_n)_2 = (y_1 \ldots . y_n)_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(x_1 \ldots . x_n)_n =)y_1 \ldots . y_n)_n
\end{array}
$$

sia soddisfatto da un dato sistema di valori delle x *ed* y *si è che questi possano distribuirsi in* n *coppie, i due di ciascuna coppia essendo uguali fra loro.*

Che la condizione sia sufficiente risulta subito dall'ispezione del sistema (1). Sia infatti $\eta_1 \ldots . \eta_n$, $\theta_1 \ldots . \theta_n$ un sistema di valori delle $x_1 \ldots . x_n$, $y_1, \ldots y_n$ tali che

$$
(2) \qquad \eta_{r_1} = \theta_{s_1} ; \; \eta_{r_2} = \theta_{s_2} ; \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \eta_{r_n} = \theta_{s_n} ,
$$

$r_1 \, r_2 \ldots . r_n$, $s_1 \, s_2 \ldots . s_n$ essendo due permutazioni degli indici 1, 2, $\ldots . n$. Se λ è un intero positivo tale che $1 \leq \lambda \leq n$, evidentemente si avrà:

$$
(3) \qquad (\eta_1 \, \eta_2 \ldots . \eta_n)_\lambda = (\theta_1 \, \theta_2 \ldots . \theta_n)_\lambda
$$

giacchè a motivo delle (2) ad ogni prodotto del 1° membro della (3) ne corrisponde uno uguale nel 2°, ed oltre a ciò ambo i membri della (3) contengono lo stesso numero $\binom{n}{\lambda}$ di prodotti. Dunque le $\eta_1 \ldots . \eta_n$ $\theta_1 \ldots . \theta_n$ soddisfano la λ^{ma} equazione del sistema (1), e quindi anche tutto il sistema, giacchè λ può farsi uguale ad uno qualunque dei numeri 1, 2,... n.

Che poi la condizione (2) sia necessaria si dimostra facilmente. Intanto per $n = 1$ il sistema (1) si riduce alla sola equazione $x_1 = y_1$; se questa è soddisfatta ponendo $x_1 = \eta_1$, $y_1 = \theta_1$; dev'essere $\eta_1 = \theta_1$, vale a dire per $n = 1$ il teorema è dimostrato. Dico ora, che supposta la condizione (2) necessaria quando le x e così le y sono in numero di $n - 1$, vale a dire quando il sistema (1) si riduce a

$$(4)\qquad \begin{array}{c}(x_1 \ldots . x_{n-1})_1 = (y_1 \ldots . y_{n-1})_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_1 \ldots . x_{n-1})_{n-1} = (y_1 \ldots . y_{n-1})_{n-1}\,;\end{array}$$

lo è pure quando le x e così le y sono in numero di n.

Sia adunque $\eta_1 \ldots . \eta_n$, $\theta_1 \ldots . \theta_n$ un sistema di valori delle $x_1 \ldots . x_n$ $y_1 \ldots . y_n$ soddisfacente il sistema (1). Avremo allora le identità

$$(5)\qquad \begin{array}{c}(\eta_1 \ldots . \eta_n)_1 = (\theta_1 \ldots . \theta_n)_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\eta_1 \ldots . \eta_n)_n = (\theta_1 \ldots . \theta_n)_n\,.\end{array}$$

Posto $X_1 = 0$ possiamo scrivere $\eta_1 = \eta_1 + X_1$. Possiamo poi determinare in un modo unico $2n - 1$ quantità $X_2 \ldots . X_n$, $Y_1 \ldots Y_n$ tali che:

$$(6)\quad \eta_2 = \eta_1 + X_2\,; \ldots . \eta_n = \eta_1 + X_n\,;\ \theta_1 = \eta_1 + Y_1\,; \ldots . \theta_n = \eta_1 + Y_n\,.$$

Tenuto conto delle (6), la 1ª della identità (5) diviene

$$(X_1 \ldots . X_n)_1 = (Y_1 \ldots . Y_n)_1\,.$$

Analogamente, tenuto conto di questa, dalla 2ª delle (5) si ricava:

$$(X_1 \ldots . X_n)_2 = (Y_1 \ldots . Y_n)_2\,.$$

In generale se sono vere le identità

$$(7)\qquad \begin{array}{c}(X_1 \ldots . X_n)_1 = (Y_1 \ldots . Y_n)_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (X_1 \ldots . X_n)_m = (Y_1 \ldots . Y_n)_m\end{array}$$

($m < n$) sarà vera anche quest'altra

$$(8)\qquad (X_1 \ldots . X_n)_{m+1} = (Y_1 \ldots . Y_n)_{m+1}$$

Infatti l'identità

$$(\eta_1 \ldots . \eta_n)_{m+1} = (\theta_1 \ldots . \theta_n)_{m+1},$$

tenuto conto delle (6) e ritenendo $(X_1 \ldots . X_n)_0 = (Y_1 \ldots . Y_n)_0 = 1$ si può scrivere

$$\sum_{i=0}^{i=m+1} \binom{n-m+i-1}{i} (X_1 \ldots . X_n)_{m-i+1}\, \eta_1{}^i = \sum_{i=0}^{i=m+1} \binom{n-m+i-1}{i} (Y_1 \ldots . Y_n)_{m-i+1}\, \eta_1{}^i,$$

la quale a motivo delle (7) si cambia appunto nella (8).

Ora si è visto che le identità (7) sussistono quando $m = 2$; perciò sussistono anche quando $m = 3, 4, \ldots . n$, vale a dire le $X_1 \ldots . X_n$, $Y_1 \ldots . Y_n$ verificano il sistema (1). Abbiamo adunque le identità

$$(9)\qquad \begin{array}{c}(X_1 \ldots . X_n)_1 = (Y_1 \ldots . Y_n)_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (X_1 \ldots . X_n)_n = (Y_1 \ldots . Y_n)_n\end{array}$$

l'ultima delle quali si può anche scrivere:

$$X_1\, X_2 \ldots . X_n = Y_1\, Y_2 \ldots . Y_n$$

ma poichè segue che una almeno delle Y ad es. Y_1 è nulla, perciò il sistema di identità (9) diviene

$$\begin{gathered}(X_2 \ldots . X_n)_1 = (Y_2 \ldots . Y_n)_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (X_2 \ldots . X_n)_{n-1} = (Y_2 \ldots . Y_n)_{n-1} \\ 0 = 0\end{gathered}$$

vale a dire, le $X_2 \ldots . X_n$, $Y_2 \ldots . Y_n$ costituiscono un sistema di $2(n-1)$ numeri soddisfacenti le (4) quando si ponga: $x_i = X_{i+1}$; $y_i = X_{i+1}$; $(i = 1, 2, \ldots . ; n-1)$. Perciò, a causa delle ipotesi fatte, tra le $X_2 \ldots . X_n$, $Y_2 \ldots . Y_n$ passeranno $n-1$ relazioni del tipo

$$X_{p_1} = Y_{q_1};\ X_{p_2} + Y_{q_2};\ \ldots . X_{p_{n-1}} = Y_{q_{n-1}};\ p_1 p_2 \ldots . p_{n-1};\ q_1 q_2 \ldots . q_{n-1}$$

essendo due permutazioni degli indici 2, 3, ... n. Da queste relazioni, tenuto conto delle (6), si deducono le altre

$$\eta_{p_1} = \theta_{q_1},\ \eta_{p_2} = \theta_{q_2};\ \ldots . \ \eta_{p_{n-1}} = \theta_{q_{n-1}},$$

che insieme alla $Y_1 = 0$ ossia $\eta_1 = \theta_1$ costituiscono un sistema di n relazioni del tipo (2). È così provato che se le condizioni (2) sono necessarie per un dato valore di n, lo sono pure aumentando tale valore di 1. Ma si vide ch'esse sono necessarie per $n = 1$; quindi lo saranno per $n = 2, 3, \ldots .$ Il teorema è pertanto dimostrato.

N. Traverso.

SULLE FRAZIONI PERIODICHE

Proprietà dei gruppi in cui si può scomporre il periodo e dei relativi resti (*)

1. Abbiasi la frazione propria $\frac{a}{b}$, ridotta ai minimi termini, e nella quale b sia primo con 10. Suppongasi x il numero delle cifre del periodo *corrispondente*, vale a dire del periodo della frazione periodica semplice che si ottiene convertendo $\frac{a}{b}$ in frazione decimale. Nella divisione occorrente per eseguire tale conversione siano $r_1, r_2, \ldots . r_x$ i successivi resti che si ottengono, cosicchè sarebbe $r_x = a$, e, supposto di continuare ancora il processo della divisione, $r_{x+1} = r_1$, $r_{x+2} = r_2, \ldots .$

(*) Questo articoletto è la seconda parte di uno studio che da molti mesi avevo fatto e quasi completato su le frazioni periodiche. Nella prima parte trattavo, seguendo il metodo già da me tracciato nel giornale *Il Pitagora* (Anno II, n. 6) la questione del numero di cifre che deve avere il periodo; ma, prevenuto dal Prof. Bettini, il quale, nel suo pregevole articolo inserito nel fascicolo III di questo periodico, risolve la questione, non mi resta che pubblicare quel poco che non ha, per quanto mi pare, perduto in nulla, e forse anzi aumentato, il suo interesse.

Osserviamo che i resti sono primi con b, come subito si ricava dalla

$$a . 10^k \equiv r_k \ (\text{mod. } b).$$

Questo conferma la nota proprietà che x può essere al più eguale a $\varphi(b)$, e mostra che la frazione $\frac{r_k}{b}$ è essa pure ridotta ai minimi termini. È poi evidente che i resti corrispondenti a questa frazione sono $r_{k+1}, \ldots\ldots r_x \ldots\ldots r_{k+x}$, e che il periodo è la corrispondente permutazione circolare di quello relativo alla $\frac{a}{b}$.

2. Supponiamo che x sia scomponibile in due fattori interi m e q; dove $q > 1$, e, per conseguenza, $x > 1$. (Ciò esclude quindi il solo caso $x = 1$, epperò $b = 3$ oppure 9). Il periodo allora si può spezzare in q gruppi successivi di m cifre l'uno, $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_q$, e sarà eguale a

$$P = p_1 . 10^{(q-1)m} + p_2 . 10^{(q-2)m} + \ldots\ldots + p_{q-1} . 10^m + p_q .$$

Avremo poi, per lo stesso procedimento della divisione

$$\begin{aligned}
&a . 10^m = b\, p_1 + r_m \\
&a . 10^{2m} = b\,(p_1 . 10^m + p_2) + r_{2m} \\
&a . 10^{3m} = b\,(p_1 . 10^{2m} + p_2 . 10^m + p_3) + r_{3m} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a . 10^{qm} = b\,(p_1\, 10^{(q-1)m} + p_2 . 10^{(q-2)m} + \ldots\ldots + p_{q-1} . 10^m + p_q) + r_{qm}.
\end{aligned}$$

Levando da ognuna di queste eguaglianze, moltiplicata per 10^m, la successiva, otterremo

$$\begin{aligned}
10^m . r_m &= b . p_2 + r_{2m} \\
10^m . r_{2m} &= b . p_3 + r_{3m} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
10^m . r_{(q-1)m} &= b . p_q + r_{qm};
\end{aligned}$$

cui si può aggiungere

$$10^m . r_{qm} = b . p_1 + r_m ,$$

che è la prima delle eguaglianze precedenti, per essere $r_{qm} = a$.

Poniamo

$$\Sigma r = r_m + r_{2m} + \ldots\ldots r_{qm} , \quad \Sigma p = p_1 + \ldots\ldots + p_q .$$

Sommando le eguaglianze precedenti avremo

$$(10^m - 1)\, \Sigma r = b \Sigma p.$$

Supponiamo ora, e supporremo sempre in tutto quanto segue, che b sia primo con $10^m - 1$. Dovrà allora b essere contenuto in Σr, e per conseguenza, $10^m - 1$ in Σp; avremo cioè, detto k un intero:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\Sigma r}{b} = \frac{\Sigma p}{10^m - 1} = k$$

Risulta chiaro in tal modo che la somma dei resti di posto m, $2m$, $3m, \ldots\ldots qm$, è multipla di b, e la somma dei corrispondenti gruppi consecutivi di m cifre, in cui il periodo si può scomporre, è multipla, secondo lo stesso fattore, del numero composto di m cifre eguali a 9.

3. Il teorema si può estendere in questo senso: che i q resti, invece di contarli a partire dal primo, si potrebbero contare, sempre di m in m, a partire da uno qualunque di essi; ed i q gruppi di m cifre andrebbero contati in modo corrispondente, supposta continuata la successione delle cifre al quoziente, anche dopo l'ultima cifra del periodo.

E infatti, questi nuovi resti e questi corrispondenti nuovi gruppi, contati a partire dal k^{esimo} resto, sarebbero resti e gruppi, contati a partire dal primo resto, nella divisione che si farebbe per convertire in decimali la $\frac{r_{k-1}}{b}$. E per questa, essendo essa ridotta ai minimi termini (n. 1), vale il teorema precedente.

Abbiamo dunque:

Se il periodo corrispondente alla $\frac{a}{b}$ *ha* $x = mq$ *cifre, dove* $q > 1$, *e (supposto continuata indefinitivamente la divisione necessaria per convertire* $\frac{a}{b}$ *in decimali) si considerano* q *resti di posto* $m, 2m, 3m, \ldots$ *a partire dal* k^{esimo}; *e, parimenti a partire dalla* k^{esimo} *cifra del periodo si considerano in esso* q *gruppi consecutivi di* m *cifre l'uno, le somme di quei resti e le somme di quei gruppi saranno equimultiple di* b *e del numero formato da* m *cifre eguali a* 9.

4. Ci sia permesso porgere qui un esempio un po' minuzioso, per fissare meglio le idee sulle cose dette e su quelle che diremo.

Convertendo in decimali la frazione $\frac{12}{19}$ si ottengono al periodo le cifre

631. 578. 947. 368. 421. 052

e, come resti successivi, i numeri

6, 3, 11; 15, 17, 18; 9, 14, 7; 13, 16, 8; 4, 2, 1; 10, 5, 12.

Ora abbiamo, scomponendo in tutti i modi possibili il periodo in gruppi, a cominciare dalla prima cifra:

Somma dei gruppi di 9 cifre $= 631.578.947 + 368.421.052 = 999.999. \times 1$.
" " 6 " $= 631.578 + 947.368 + 421.052 = 999.999 \times 2$.
" " 3 " $= 631 + 578 + 947 + 368 + 421 + 052 = 999 \times 3$.
" " 2 " $= 63 + 15 + 78 + 94 + 73 + 68 + 42 + 10 + 52 = 99 \times 5$.
" di tutte le 8 " $= 6 + 3 + \ldots \quad + 5 + 2 = 9 \times 9$.

E per i resti, contati a partire dal primo:

Somma dei resti di 9 in 9 $= 7 + 12 = 19 \times 1$.
" " 6 " 6 $= 18 + 8 + 12 = 19 \times 2$.
" " 3 " 3 $= 11 + 18 + 7 + 8 + 1 + 12 = 19 \times 3$.
" " 2 " 2 $= 3 + 15 + 18 + 14 + 13 + 8 + 2 + 10 + 12 = 19 \times 5$.
" di tutti i resti $= 6 + 3 + \ldots \quad + 10 + 5 + 12 = 19 \times 9$.

Se i gruppi si contassero a partire dalla seconda cifra, invece che dalla prima, si avrebbe:

Somma dei gruppi di 9 cifre $= 315.789.473 + 684.210.526 = 999.999.999 \times 1$.
" " 6 " $= 315.789 + 473.684 + 210.526 = 999.999 \times 1$.
" " 3 " $= 315 + 789 + 473 + 684 + 210 + 526 = 999 \times 3$.
" " 2 " $= 31 + 57 + 89 + 47 + 36 + 84 + 21 + 05 + 26 = 99 \times 4$.
" di tutte le " $= 3 + 1 + \ldots\ldots + 2 + 6 = 9 \times 9$.

Le analoghe somme dei resti, contati a partire dal secondo di essi, 3, sono rispettivamente eguali a 19 moltiplicato per gli stessi coefficenti che si sono trovati per i corrispondenti gruppi di cifre, e cioè per 1, 1, 3, 4, 9.

5. Si può determinare la condizione perchè il periodo abbia mq cifre, essendo q un numero primo contenuto in $b-1$.

Dovendosi infatti avere, (sempre rispetto al modulo b) le congruenze

$$a\,10^m \equiv r_m \qquad a \,.\, 10^{mq} \equiv a$$

si avrà, innalzando i membri della prima di queste alla q^{esima} potenza

$$a^q \,.\, 10^{mq} \equiv r_m{}^q ;$$

e moltiplicando per a^{q-1} quelli della seconda,

$$a^q \,.\, 10^{mq} \equiv a^q ,$$

donde

$$r_m{}^q \equiv a^q$$

L'm^{esimo} resto deve quindi essere un numero x che soddisfi alla congruenza

(II) $$x^q \equiv a^q \quad (\text{mod. } b)$$

E la condizione è anche sufficiente e cioè se l'm^{esimo} resto è il *primo* che soddisfi a questa congruenza, ed è diverso da a, il periodo avrà qm cifre. E infatti essendo in questo caso

$$r_m{}^q \equiv a^q , \qquad a.10^m \equiv r_m ,$$

si avrà

$$a^q \,.\, 10^{mq} \equiv r_m{}^q \equiv a^q , \text{ onde } a \,.\, 10^{mq} \equiv a,$$

la quale dimostra che l'mq^{esimo} resto è a, epperò il periodo finisce alla qm^{esima} cifra. E non prima; vale a dire il trovato periodo di qm cifre non può essere la riunione di periodi irriducibili di un altro numero di cifre, y. Perchè, se ciò fosse, dovrebbe y essere contenuto in qm, e due casi potrebbero darsi: o la y contiene il fattore q, ed è quindi della forma qm', con $m' < m$, oppure non contiene q ed allora, essendo esso un numero primo, epperò primo con q, divide m, e sarà per es. eguale ad $\frac{m}{s}$. Nel primo caso, della congruenza $a \,.\, 10^{m'q} \equiv a$ si ricaverebbe $a^q \,.\, 10^{m'q} \equiv a^q$ e dalla $a \,.\, 10^{m'} \equiv r_{m'}$ si avrebbe $a^q .\, 10^{m'q} \equiv r_{m'}{}^q$ onde $r_{m'}{}^q \equiv a^q$ e non sarebbe l' m^{esimo} resto il primo che verifica la (II). Nel secondo il periodo sarebbe finito alla $\left(\frac{m}{s}\right)^{esima}$ cifra, epperò m, resto di posto m, (che dovrebbe essere una ripetizione di quello di posto $\frac{m}{s}$) sarebbe a, contro il supposto.

Osserviamo poi che la (II) ha, come è noto, q soluzioni, (perchè una ne ha certamente, ed è $x = a$), e che nel caso che una di queste fosse il resto di posto m, le altre sarebbero rispettivamente i resti di posto $2m$, $3m$, ... qm.

Si può dunque dire:

« *Il periodo della frazione irriducibile* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ *si potrà scomporre in* q
« (q *numero primo contenuto in* b — 1) *gruppi di* m *cifre aventi le pro-*
« *prietà vedute, quando, e solo quando, l'* m^{esimo} *resto sia il primo resto*
« *diverso da* a, *che soddisfi alla congruenza* (II). *I resti poi di posto*
« 2m, 3m, ... qm *saranno le rimanenti radici della stessa* ».

6. Dei teoremi ora veduti sono degni di speciale menzione i casi particolari di $m = 1$ e di $q = 2, 3$, che esamineremo quindi separatamente.

Se si suppone $m = 1$, ossia se si considerano tutte le cifre del periodo e tutti i resti ottenuti nella divisione di a per b, si ha subito:

« *La somma delle cifre del periodo è multipla di* 9, *e quella dei resti*
« *è multipla di* b, *denominatore della frazione, secondo lo stesso numero*
« *nel caso che* b *sia primo con* 3 ».

Che la somma delle cifre del periodo sia multipla di 9, qualora b sia primo con 3, si ricava anche immediatamente dalla $\frac{P}{10^x - 1} = \frac{a}{b}$, dalla quale appare essere P un multiplo di 9. Ma che la somma dei resti debba essere multipla di b, e precisamente secondo lo stesso numero, non è ancora stato da altri, ch'io sappia, dimostrato.

Così per le frazioni aventi per denominatori i numeri primi

7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67,
71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127,

i periodi delle quali hanno rispettivamente

6, 2, 6, 16, 18, 22, 28, 15, 3, 5, 21, 46, 13, 58, 60, 33,
35, 8, 13, 41, 44, 96, 4, 34, 53, 108, 112, 42

cifre, (*) ho verificato (e riporto questi numeri per comodo di chi volesse studiar meglio l'argomento) che la somma delle cifre del periodo è 9 moltiplicato risp. per

3, 1, 3, 8, 9, 11, 14, 6, 1, 2, 10, 23, 7, 29, 30, 16,
14, 4, 6, 19, 22, 48, 2, 17, 25, 54, 56, 21

(*) Vedasi anche la tav. che il prof. Bettini pubblica in altro numero di questo periodico, dove è bene osservare che è incorso un errore: per $p = 23$, n deve essere 22 e non 32 e la somma dei resti è il rispettivo denominatore, moltiplicato per questi stessi numeri. Si noti che questi numeri sono le metà del numero delle cifre del corrispondente periodo, nel caso che tal numero sia pari (ciò che è evidente dalle proprietà generali esposte e si vedrà meglio nel n. seg.), e press'a poco la metà negli altri casi (non saprei formulare, nè tanto meno dimostrare, una regola più precisa).

7. Pongasi ora invece $q = 2$, il che presuppone che le cifre del periodo (periodo *binario*) siano in numero pari. Allora il periodo si potrà dividere in due semiperiodi di $\frac{x}{2} = m$ cifre l'uno, i quali avranno per somma un numero composto di 9. Si osservi che il valore k nella formola (I) non può evidentemente essere diverso da 1. Segue che l'm^{mo} resto sommato col $2m^{esimo}$ darà b, epperò sarà $b - a$, poichè quest'ultimo è a; e parimente daranno per somma b due resti qualunque che distano di m posti.

Viceversa, se l'm^{mo} resto è $b - a$, avendosi, sempre rispetto al modulo b,

$$r_m \equiv b - a \equiv -a, \text{ epperò } r_m^2 \equiv a^2,$$

il periodo avrà $2m$ cifre, per quanto è detto nel n. 5. Dunque:

Se l'm^{esimo} *resto (e non un altro precedente) è* $b - a$, *il periodo avrà* $2m$ *cifre. Arrivati al resto* $b - a$, *si sarà ottenuta la prima metà del periodo e quella dei resti. Le rimanenti cifre del periodo si avranno levando dal 9 quelle del primo semiperiodo, e parimente si otterranno i resti successivi all'*m^{esimo} *levando da* b *quelli che li precedono di* m *posti.* (*)

In questo caso il periodo si può anche scomporre in m gruppi di 2 cifre, tanto a cominciare dalla prima cifra che dalla seconda, e parimente i resti si possono raggruppare nelle due somme di quelle di posto pari e di quelli di posto dispari. E perchè tutti insieme i resti hanno per somma bm, se la somma dei resti di posto pari è km, quella dei resti di posto dispari sarà $(m - k)\,b$: e i coefficienti k e $m - k$ saranno necessariamente diversi se m dispari, mentre sono eguali per m pari. Parimente la somma dei gruppi di 2 cifre in cui si può dividere il periodo sarà $99 \times k$ oppure $99\,(m - k)$, a seconda che i gruppi si contino a partire dalla prima o dalla seconda cifra. Se poi, essendo m' un divisore di m, si scompone il periodo in gruppi di m cifre (sottogruppi del semiperiodo) la somma di questi gruppi sarà sempre (qualunque sia la cifra da cui si comincia), eguale al numero composto di m' cifre 9, moltiplicato per $\frac{m}{m'}$; e quindi la corrispondente somma dei gruppi di m' resti sarà $b \times \frac{m}{m'}$. E infatti quei gruppi si possono associare in modo da formare $\frac{m}{m'}$ coppie, che danno per somma numeri composti di tutti 9.

(*) Questo teor. fu già dimostrato dal Lugli per il solo caso di $a = 1$ e b numero primo (*Periodico di Matem.* Anno II), e poi da me con metodo differente, ma colle stesse restrizioni, nell'accennata nota inserita nel giornale *Il Pitagora*.

Così per la frazione $\frac{12}{19}$ la somma dei resti di posto dispari, è, come vedemmo, 19×5, e quella dei resti di posto pari è 19×4; mentre la somma dei resti di 3 in 3, da qualunque s'incominci, è $19 \times \frac{9}{3}$.

Meglio si vedono queste cose considerando la frazione $\frac{1}{97}$, il periodo della quale ha le seguenti 96 cifre

010. 309. 278. 350. 515. 463. 917. 525. 773. 195. 876. 288. 659. 793. 814. 432.
989. 690. 721. 649. 484. 536. 082. 474. 226. 804. 123. 711. 340. 206. 185. 567.

I resti poi sono

10, 3, 30; 9, 90, 27; 76, 81, 34; 49, 5, 50; 15, 53, 45; 62, 38, 89; 17, 73, 51; 25, 56, 75;
71, 31, 19; 93, 57, 85; 74, 61, 28; 86, 84, 64; 58, 95, 77; 91, 37, 79; 14, 43, 42; 32, 29, 96;
87, 94, 67; 88, 7, 70; 21, 16, 63; 48, 92, 47; 82, 44, 52; 35, 59, 8; 80, 24, 46; 72, 41, 22;
26, 66, 78; 4, 40, 12; 23, 36, 69; 11, 13, 33; 39, 2, 20; 6, 60, 18; 83, 54, 55; 65, 68, 1.

Qui si ha che il valore di k (vedi formola (I)) è per la somma dei gruppi di 48 cifre $= 1$, epperò 48 per la somma di tutte le cifre. Per i gruppi di 24, 12, 8, 6, 4, 3, 2 cifre è quindi rispettivamente di $\frac{48}{24} = 2$, $\frac{48}{12} = 4$, $\frac{48}{8} = 6$, $\frac{48}{6} = 8$, $\frac{48}{4} = 12$, $\frac{48}{3} = 16$, $\frac{48}{2} = 24$. Invece per le somme dei gruppi di 32 cifre, epperò anche dei resti, di 32 in 32, (dove 32 non è divisore di 48, numero delle cifre del semiperiodo), si ha $k = 1$, se s'incomincia dalla prima cifra, ma non sempre per gli altri punti di partenza. Così mentre i resti di posto 32, 64, 96 sono 61, 35, 1, che hanno per somma 97, quelli di posto 35, 67 e 99 ovvero di posto 3, 35, 67 sono 30, 84, 80 la cui somma è 97. E che k non possa sempre essere eguale a 1 per le somme dei resti di 32 in 32 lo si poteva prevedere dal fatto che, se così fosse, la somma dei resti dovrebbe essere 97×32, mentre è invece 97×48. (*)

Le stesse cose si possono ripetere per qualunque altra frazione avente per denominatore 97, il periodo e i resti delle quali si possono subito dedurre, con permutazione circolare, da quelli che ora abbiamo riportato (vedi n. 1).

Non parmi inopportuno richiamare poi l'attenzione del lettore su questo fatto, che le cose ora dette per i periodi binari valgono per qualunque denominatore b che sia primo con $10^m - 1$, (dove m è la metà del numero delle cifre del periodo); epperò, in particolare, quando b è primo, sempre escluso, s'intende, $b = 3$.

Ad es. $\frac{45}{77}$ dà per periodo 584. 415 e per resti 65, 34, 32; 12, 43, 45, i quali soddisfano alle leggi suesposte, essendo appunto il 77 primo

(*) I resti sono collocati, per modo che il lettore possa subito verificare, (anche per correggere qualche eventuale errore di stampa), che le somme dei 4 resti contati di 24 in 24, è sempre $97 \times 2 = 194$.

con $10^3 - 1$. Non così avviene per $\frac{1}{99}$ o per $\frac{1}{259}$, cui corrispondono i periodi 01 o 003. 861; ma qui 99 non è primo con $10 - 1$, nè 259 con $10^3 - 1$.

8. Suppongasi ora che sia $q = 3$. Il periodo potrà dunque scomporsi in 3 gruppi di m cifre l'uno (periodo *ternario*) i quali, sommati, daranno k volte il numero composto di m cifre 9. Il valore di k non può evidentemente superare il 2; ma può essere tanto 1 che 2. Si può osservare che k sarà $= 1$ quando a sia < 3, e cioè per le frazioni $\frac{1}{b}$ $\frac{2}{b}$; supponendo i gruppi siano contati dalla prima cifra. E infatti le somme dei resti di posto m, $2m$, $3m$ deve dare bk; e siccome l'ultimo di esso è a, i primi due daranno per somma $bk - a$. Ma questa somma non può superare $2b - 3$, perchè questi resti saranno al più $b - 1$ e $b - 2$, onde se $a < 3$, sarà $k = 1$.

Può bastare però che sia $a = 3$ perchè sia $k = 2$. La frazione $\frac{3}{7}$, ad es. dà il periodo 428. 571 e i resti 2, 6, 4, 5, 1, 3. Ora si ha

$$42 + 85 + 71 = 99 \times 2 \text{ e, analogamente, } 6 + 5 + 3 = 6 \times 2.$$

Quando il periodo è *ternario*, trovati i due primi gruppi del periodo, è subito determinato il terzo, sommando i due primi, e levando questa somma dal numero composto di tutti 9 oppure dal doppio di questo. Quale di questi due casi (se cioè $k = 1$ oppure $k = 2$) si verifichi, non può essere dubbio, nei casi pratici.

La condizione perchè il periodo sia ternario è, per quanto si disse nel n. 5, che tra i resti ottenuti ci sia una delle radici (diversa da a) della

$$x^3 \equiv a^3 \pmod{b}$$

oppure, poichè il numero delle cifre del periodo non dipende da a, che, convertendo la frazione $\frac{1}{b}$ in decimali, si giunga a un resto, diverso da 1, che soddisfi la

$$x^3 \equiv 1 \pmod{b}.$$

Questa congruenza ha sempre 3 radici non congruenti, se $b - 1$ è divisibile per 3.

La condizione si può presentare sotto un'altra forma più pratica. Se il periodo ha $3m$ cifre dovrà essere $r_m + r_{2m} + r_{3m} = kb$; ed essendo $r_{3m} = a$ sarà $r_m + r_{2m} = kb - a$. Ed è poi sufficiente che si abbia $r_m + r_{2m} = kb - a$ (con $k = 1$ oppure 2), perchè il periodo abbia $3m$ cifre. Infatti si ha, sempre rispetto al modulo b,

$$a \,.\, 10^m \equiv r_m\,, \qquad a \,.\, 10^{2m} \equiv r_{2m};$$

epperò
$$r_m + r_{2m} = kb - a \equiv a\,(10^m + 10^{2m}) \equiv -a,$$

e quindi
$$a\,(10^{2m} + 10^m + 1) \equiv 0.$$

Sarà pertanto
$$a\,(10^m - 1)\,(10^{2m} + 10^m + 1) \equiv 0;$$

cioè $a(10^{3m}-1)\equiv 0$ epperò anche: $10^{3m}-1\equiv 0$,

dalla quale si ha

$$a \, . \, 10^{3m}\equiv a.$$

Questa dimostra essere a il $3m^{esimo}$ resto, epperò avere il periodo $3m$ cifre

Nè può nascere il dubbio che questo periodo di $3m$ cifre possa poi essere la riunione di periodi irriducibili (in questo caso il periodo *vero* avrebbe meno di $3m$ cifre). Basta ripetere il ragionamento generale fatto nel n. 5. Si ha quindi:

Se il $2m^{esimo}$ *resto, che si ottiene dalla divisione di* a *per* b, *è il primo che sommato coll'* m^{esimo} *dà* kb — a (*dove* k = 1 *oppure* 2), *la frazione periodica equivalente alla* $\frac{a}{b}$ *avrà* 3m *cifre. Trovate le prime* 2m *cifre del periodo, si potranno ottenere le altre* m, *e dai primi* 2m *resti si potranno avere i seguenti* m, *applicando le ora vedute proprietà dei periodi ternari.*

Così nell'esempio citato della frazione $\frac{1}{97}$, arrivati al resto di posto $64 = 2.\,32$, si vede che esso, sommato con quello di posto 32, dà $61 + 35 = 96$, che è la differenza fra il denominatore e il numeratore della frazione. Si può dunque dire che i primi due terzi del periodo sono già trovati, e che l'altro terzo si otterrà sommando i primi due e levando le cifre della somma dal 9. E parimente si troveranno tutti i resti dopo il 64^{esimo} con questa formola: $r_{64+n} = k\,.\,97 - r_n - r_{32+n}$, dove tra il valore 1 e il valor 2, che k può avere, non è possibile ambiguità.

E si ha: $r_{65} = k\,.\,97 - r_1 - r_{33} = k\,.\,97 - 10 - 28 = 97 - 10 - 28 = 59$;
$r_{66} = k\,.\,97 - r_2 - r_{34} = k\,.\,97 - 3 - 86 = 97 - 3 - 86 = 8, \ldots\ldots$
$r_{70} = k\,.\,97 - r_6 - r_{38} = k\,.\,97 - 27 - 95 = 2\,.\,97 - 27 - 95 = 72$, ecc. ecc.

Anche qui insisteremo nel far notare che queste proprietà furono dimostrate nella ipotesi che b sia primo con $10^m - 1$; epperò, possono sussistere anche in altri casi, oltre quello considerato in precedenti lavori sulle frazioni periodiche, cioè di b primo, diverso da 3.

Così la frazione $\frac{72}{259}$ dà luogo al periodo 27. 79. 92 e ai resti 202, 207, 257, 239, 59, 72. Essi soddisfanno alle leggi del periodo ternario, avendosi che il 259 è primo con $10^2 - 1 = 99$.

Alessandria, 24 marzo 1897.

V. Murer.

INTERMEZZO

I lettori di questa Rassegna mi useranno indulgenza, se usurpo alquanto spazio a cose di maggiore importanza per occuparlo con la mia persona. Rispondo al Prof. F. AMODEO, che in una lettera aperta " *A proposito dei postulati della Geometria Projettiva* „ comparsa da poco sul Giornale di Matematiche (vol. 34) discorre con mirabile disinvoltura de' fatti miei, preso argomento da poche osservazioni, da me volute inserire in un articolo " *Sugli enti primitivi della Geometria Projettiva* „ (che può vedersi agli atti di Torino del gennaio 1897) per far palese la temerità di qualche giudizio dello stesso sig. AMODEO circa un mio precedente lavoro. Trattandosi di cose molto pedestri, il lettore, che non fosse al corrente dell'antefatto, non si ritragga per ciò dal seguirmi: chè non gli sarà forse discaro ricrearsi alquanto con me di alcuni amenissimi inganni, nei quali è, non volendo, caduto il geniale e intraprendente geometra di Napoli.

" ...Il sig. Pieri (così l'AMODEO) ha messo un postulato soverchio, il X. (*) Il suo post. IX, che dice *se π è un piano projettivo, fuori di esso giace almeno un punto,*... afferma l'esistenza dell'S_3 (**) e i punti o rette non complanari e i piani differenti fra loro di cui si può parlare non possono che far parte di quelli che mediante il piano π e il punto fuori di esso si possono costruire „. — Quest'ultimo giudizio, per chi nol sapesse, *equivale precisamente al* (mio) *post. X:* nel senso che da una proposizione si deduce l'altra, e viceversa, presenti le più comuni notizie circa la retta ed il piano. Per la qual cosa avviene che il sig. AMODEO si valga senza saperlo di quel principio, introdottosi furtivamente nel discorso; anzi lo adoperi appunto per mostrarne l'inutilità.

" E siccome in base al post. IX si dimostra che *nello* S_3 *un* S_2 *e un* S_1 *che non si appartengono hanno un* S_0 *a comune*, risulta che è inutile introdurre il postulato X „. — Tra parentesi, non è pur vero che il teorema citato si regga " in base al post. IX „: anzi questo potrebbe esser tolto, senza niuna offesa alla stabilità di quella proposizione, contenente già nell'ipotesi il giudizio esistenziale espresso da IX. Ma il sig. AMODEO non ristà dal produrre argomenti contro la propria tesi, neanche dopo avere smentito con singolare efficacia ed eleganza (come abbiam visto) quella sua conclusione circa l'*inutilità* del post. X. Ed eccolo poche righe appresso ad ammettere, che " con quel post. *si chiude lo spazio*, e lo *si limita alla terza dimensione* „. Un servizio da nulla, come ognun vede! Ben è vero che una dimensione di più o di meno poco importa al sig. AMODEO: *de minimis non curat praetor*.

Nè, del resto, può darsi in una scienza deduttiva un postulato assolutamente *inutile soverchio:* fuorchè nel caso, che esso sia conseguenza delle altre premesse. Sicchè bisognepotrà esser soltanto di fronte allo scopo che l'autor si prefigge. Sicchè bisognerebbe al sig. AMODEO di provare, che il X è conseguenza di altre premesse da me pure accettate; o che certi fini (p. es. la *dualità* fra gli enti *punto proj*°.

(*) Questo: " *Una retta (projettiva) e un piano (projettivo) hanno sempre almeno un punto (projettivo) a comune* „.

(**) Per S_3 s'intende l'insieme dei punti pr.^{i} (dagli S_0) che stanno in raggi projettanti i vari punti d'un piano pr.° (di un S_2) da un punto esterno al medesimo. L'S_1 è la retta pr.^{a}.

e *piano proj°.*, ed il fatto che l'*ambiente projettivo*, o *classe dei punti projettivi*, risulti precisamente *un* S_3) si possono egualmente raggiungere con gli altri miei postulati. Impresa vana ed assurda; perocchè si dimostra, come due e due fanno quattro, che è vero appunto il contrario. (*)

A chi mi chiedesse, onde nascono gli equivoci del sig. AMODEO in questa parte, direi senza punto esitare: da poca avvertenza a certe particolarità di un'ipotesi; da poco o niun conto di certe differenze ideali, che paion piccine, e son grandi: particolarità e differenze, che men facilmente si scuoprono a chi non è familiare con quelle tali " idee ai simboli logici „, di cui tocca elegantemente il mio critico verso la fine. Se per es. si faccia astrazione dal post. X, corre un'enorme distanza fra il dire " una retta ed un piano „ e il dire " una retta ed un piano d'un S_3 „. Chi non avverte una tal differenza, non potrà neanche avvedersi dell'ufficio di quel postulato. — E come spiegarsi altrimenti l'ingenuità di chi pronunzia, ad es.: " avere io implicitamente accettata altrove la soppressione del post. X, non avendolo più ripresentato in un'altra Nota sopra *Un sistema di postulati per la Geometria projettiva degli iperspazi:* „ nota, che ha per iscopo appunto il definire l'*ambiente projettivo assoluto*, senz'alcun limite al numero delle dimensioni? (**)

Poscia il sig. AMODEO, guidato dal suo " buon senso geometrico „, che " gli fa riconoscer distinte due proposizioni deducibili immediatamente l'una dall'altra per assurdo „ (dunque, per es., anche queste: ogni *a* è *b*, ogni *non b* è *non a*) mi domanda ancora una dimostrazione del come e perchè succeda che nella proposizione: 1°) " Due S_0 indipendenti A e B *individuano* una (ed una sola) classe AB di infiniti S_0, di cui fan parte quei due „ sia affermata senz'altro anche questa: 2°) " Se C, D sono due S_0 di AB, sarà CD = AB „. Ma, forse presago dell'imbarazzo in che mi poneva con questa (veramente non troppo discreta) esigenza, (***)

(*) Da questa confusione dell'S_3 con la *classe dei punti* neppure si guardan sempre i Maestri. Nessun dubbio che il post. X si possa evitare, come qualunque altra premessa; ma a patto di *sopprimere* o *mutare sostanzialmente* parecchie proposizioni. Così p. es. una trattazione della Geometria Elementare indipendente da quel postulato (o da un altro che ne faccia le veci) — com'è quella recata dal prof. VERONESE negli *Elementi di Geometria*, Verona, 1897 — porterebbe a modificar gli enunciati consuetudinari d'un gran numero di proposizioni; a motivo della clausola " il tutto essendo supposto giacere in un dato spazio a tre dimensioni „ — cioè dentro una figura definita p. es. come al loc. cit., pag. 108 — che bisognerebbe inserir nelle ipotesi. Questa regola è in fatti osservata sul principio del Libro terzo (op. cit., pag. 105); benchè il prof. Veronese adoperi la frase " giacenti *nello* spazio, „ troppo atta ad insinuar nella mente de' giovani l'idea che di quelle figure non esista più d'una, cioè ad introdurre tacitamente il postulato che si vorrebbe appunto evitare. Ma essa è già trascurata sin dal § 1 (vedi a pag. 113 il teorema V e il corollario che lo precede), per poi cadere in dimenticanza al § 3: risultandone proposizioni (come gli importantissimi teoremi I, II e III a pagg. 118-19) le quali, così come stanno e senza una qualche premessa che riduca la classe de' punti ne' confini d'uno spazio da tre dimensioni, non possono aversi per dimostrate; giacchè non son vere se l'ambiente geometrico può anche supporsi maggiormente esteso.

(**) Tralascio a malincuore di alcune altre riflessioni del Sig. AM., che toccano da vicino al suo modo di vedere e d'intendere in certe quistioni fondamentali di logica e senso comune: ma disgraziatamente vi manca ogni appiglio per una discussione un po' concludente. — Altra bontà d'idee chiare e ben definite, altra precisione di linguaggio, altro stile, altri metodi insomma ci vogliono ormai per trattare con qualche frutto di certi argomenti.... Che costrutto si può cavare ad es. da tutti i discorsi che allegramente si rincorrono a pag. 2 fra le linee 2ª e 20ª della sua lettera?

(***) " .... Che poi nella 1ª sia affermata esplicitamente la 2ª sarà manifesto a chiunque consideri un poco addentro il senso della prop. stessa, la quale in somma consiste nelle due affermazioni seguenti: *a)* Dati due S_0 indipendenti A e B, esiste una classe d'infiniti S_0 contenente que' due; *b)* questa classe è *determinata* dai punti stessi ed *unica*. — Or che cosa può mai significare la prop. *b*), se non vuol dire, che la classe AB non deve mutare, quando al posto di A, B s'introduca un'altra coppia di punti C, D, presi a piacere tra gli infiniti che compongono AB? „ (PIERI, loc. cit.) — Tolgasi il punto interrogativo (se così piace) e si legga: le prop. *b*) e 2) rivestono entrambe un solo e medesimo concetto in forme grammaticali alquanto diverse (diversità che sparisce immediatamente alla prova, p. es., dei simboli logici).

candidamente si affretta a porgermi con le sue proprie mani l'invocata riprova; facendo ben constatare qualmente egli dimostri la proposizione 2ª a questo modo: " infatti, se non fosse AB = CD, per C e D passerebbero due S_1 distinti CD ed AB „ — che è quanto dire: " infatti, se non fosse vera la 2), non sarebbe vera la 1. Deduzione di ottima lega, e tale invero, che neanche il sig. Simplicio stenterebbe a riconoscer perfetta: ma che nel vigore della sua natività e concisione rivela appunto e tradisce la bontà del mio asserto.

Ma i confini segnati alla controversia paiono ormai troppo angusti alle armi cortesi del prof. Amodeo: il quale preso del campo a sua posta (sempre a cavallo del " buon senso geometrico „) corre una impresa più illustre facendosi incontro alcuni degli altri miei principî:

" Col IV [*Se* A, B *sono punti distinti, la classe* AB *contiene il punto* A] si afferma che in AB è il punto A, non B, e che in BC vi è il punto B, non C; col V [*Se... C è un punto della classe* AB, *purchè diverso da* B, *sarà sempre* AB = BC (*)] si afferma che le classi AB, BC, che non hanno alcun punto comune, sono identiche... „. Una chiosa, per quanto arguta, qui non servirebbe che ad oscurar le bellezze del testo, con poco riguardo ai lettori. Ai quali voglio anzi batter le mani per avermi ascoltato fin qui: l'intermezzo è finito.

Torino, luglio 1897.

M. Pieri.

SULLA QUESTIONE 342*

In questa piccola nota osservo come la formola c) della questione indicata non è estensibile all'n-gono inscritto in un circolo, $(n > 4)$.

Indichiamo di detto n-gono tre vertici consecutivi con $i, i+1, i+2$; con $a_{i,i+1}$, $a_{i+1,i+2}$ rispettivamente i lati congiungenti i vertici $i, i+1$; $i+1, i+2$; e con $d_{i,i+2}$ la congiungente i vertici $i, i+2$. Di più indichiamo con $h_{i,a_{i+1,i+2}}$ la distanza del vertice i dal lato $a_{i+1,i+2}$ ed analogamente per $h_{i+2,a_{i,i+1}}$. Allora manifestamente si ha

$$(A)\begin{cases} h_{i+2,a_{i,i+1}} = \dfrac{d_{i,i+2} \times a_{i+1,i+2}}{2R} \\ h_{i,a_{i+1,i+2}} = \dfrac{d_{i,i+2} \times a_{i,i+1}}{2R} \end{cases} \qquad (i = 1 \ldots\ldots n)$$

badando, nell'applicare queste formole, che gli indici della forma $n+k$, $n+t$ vanno ritenuti solamente come indici k, t, e che lo scambio di posto degli indici

(*) Questa prop. fu poi risoluta in principî di minor peso nei lavori, che fanno seguito a quello preso in mira dal Sig. Am.: e il simile fu fatto di parecchi altri postulati; aggiungendo e togliendo, mutando o modificando in ogni parte. Con tutto ciò, (a sentir l'Am.) " il Sig. Pieri... dichiara che ad essi [i primi sei postulati del mio primissimo saggio] ha nulla da aggiungere o togliere „. — Un tale sciocco e presuntuoso giudizio non fu mai da me pronunziato: nè in quella forma (dico a tutela del mio buon nome in grammatica) nè in altra.

stessi lascia inalterato l'elemento. È subito visto intanto che l'unico aggruppamento che possa dedursi dalla (A) e della natura della formola c), in generale, è il seguente:

$$(B)\quad \sum_{i=1}^{i=n}\left[h_{i,a_{i+1,i+2}}+h_{i+2,a_{i,i+1}}\right]\left[\frac{1}{h_{i,a_{i+1,i+2}}}+\frac{1}{h_{i+2,a_{i,i+1}}}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{i=n}\left[a_{i,i+1}+a_{i+1,i+2}\right]\left[\frac{1}{a_{i,i+1}}+\frac{1}{a_{i+1,i+2}}\right]\ldots.$$

Diciamo in generale, perchè, oltre al triangolo ed al quadrangolo, per i quali si hanno rispettivamente le formole

per il triangolo
$$\left[\begin{array}{ll} h_{1,a_{23}}=\dfrac{a_{13}\,a_{12}}{2R}, & h_{3,a_{12}}=\dfrac{a_{13}\,a_{23}}{2R} \\ h_{2,a_{31}}=\dfrac{a_{21}\,a_{23}}{2R}, & h_{1,a_{23}}=\dfrac{a_{21}\,a_{31}}{2R} \\ h_{3,a_{12}}=\dfrac{a_{32}\,a_{31}}{2R}, & h_{2,a_{31}}=\dfrac{a_{32}\,a_{12}}{2R} \end{array}\right.$$

per il quadrangolo
$$\left[\begin{array}{ll} h_{1,a_{23}}=\dfrac{d_{13}\,a_{12}}{2R}, & h_{3,a_{12}}=\dfrac{d_{13}\,a_{23}}{2R} \\ h_{2,a_{34}}=\dfrac{d_{24}\,a_{23}}{2R}, & h_{4,a_{23}}=\dfrac{d_{24}\,a_{34}}{2R} \\ h_{3,a_{41}}=\dfrac{d_{31}\,a_{34}}{2R}, & h_{1,a_{34}}=\dfrac{d_{31}\,a_{41}}{2R} \\ h_{4,a_{12}}=\dfrac{d_{42}\,a_{41}}{2R}, & h_{2,a_{41}}=\dfrac{d_{42}\,a_{12}}{2R}, \end{array}\right.$$

che permettono gli aggruppamenti noti, non vi sono altri casi: Di vero, perchè le espressioni delle somme delle distanze dei vertici moltiplicate per le inverse di quelle siano confrontabili nel modo noto, con le espressioni della somma dei lati moltiplicate per la somma delle inverse di questi, è necessario che la espressione che ci dà ciascuna delle dette distanze non contenga più di una diagonale, ossia che questa diagonale sia il terzo lato di un triangolo di cui i due altri lati sono lati del poligono che si considera, epperò concludiamo che di formole analoghe alla c) per l'n^{gono} inscritto in un circolo ($n > 4$) non vi è che la (B).

G. Candido.

SOLUZIONE DELLE QUISTIONI

271* 272 276 279 282* 338* 351* 355 366* 367* 368 369*

271*. *Il trinomio:*

$$a^{n+1}-(n+1)\,ab^n+nb^{n+1}$$

è divisibile per $(a-b)^2$; *dare l'espressione del quoziente. Dedurne poi che le espressioni* $2^{2n}+15n-1$ *e* $2^{4n}-15n-1$ *per* n *intero e positivo sono multiple rispettivamente di* 9 *e* 25.

G. Bellacchi.

Risoluzione del sig. G. Gallucci, studente a Napoli.

Sostituendo in $a^{n+1}-(n+1)ab^n+nb^{n+1}$ alla b la a si ottiene zero, perciò essa è divisibile per $a-b$. Se nel quoziente $a^n+ba^{n-1}+b^2a^{n-2}+\ldots . b^{n-1}a-nb^n$ si sostituisce alla b la a si ottiene di nuovo zero, quindi il trinomio proposto è divisibile per $(a-b)^2$. Il quoziente è:

$$a^{n-1}+2ba^{n-2}+3b^2a^{n-3}+\ldots .+(n-1)b^{n-2}a+nb^{n-1}.$$

Invece di $a, b, n+1$ poniamo $4, 1, n$; l'espressione data si cangia in

$$4^n-n.4+n-1=4^n-3n-1$$

che dovrà essere divisibile per $(4-1)^2=9$. Aggiungendo $18n$ non si cambia questo carattere di divisibilità, onde $4^n+15n-1$ è multiplo di 9. Invece di $a, b, n+1$ poniamo $4, -1, 2n$; l'espressione data si cambia in

$$4^{2n}+2n.4+2n-1=2^{4n}+10n-1$$

che dovrà essere divisibile per $[4-(-1)]^2=25$. Togliendo $25n$ non si cambia questo carattere di divisibilità, onde $2^{4n}-15n-1$ è multiplo di 25.

272. *Le coniche, passanti per un punto e bitangenti sopra una retta fissa alle coniche di un fascio, formano un altro fascio; gli 8 punti base dei due fasci sono in una conica.*

V. Retali.

Risoluzione del sig. G. Gallucci.

Sia $\varphi-k\psi=0$ il fascio dato di coniche individuato dalle due coniche $\varphi=0$ e $\psi=0$; $L=0$ la retta fissa; φ_1, ψ_1, L_1 ciò che diventano le espressioni φ, ψ, L quando alle coordinate correnti si sostituiscono quelle del punto dato. La conica passante per questo punto e bitangente secondo L alla φ è $\varphi-k_1L^2=0$, ove

$$k_1=\frac{\varphi_1}{L_1^2}.$$

Similmente la conica passante pel punto e bitangente alla ψ secondo L è

$$\psi-k_2L^2=0 \text{ ove } k_2=\frac{\psi_1}{L_1^2}.$$

Una conica qualunque del fascio individuato da queste due coniche è

$$\varphi-k_1L^2-k_3(\psi-k_2L^2)=0, \tag{1}$$

che si può porre sotto la forma $\varphi-k_3\psi-k'L^2=0$, e perciò è bitangente ad una conica del fascio dato. Dunque il fascio (1) è quello delle coniche passanti pel punto e bitangenti secondo L alle coniche del fascio dato. Prendiamo per k_3 il valore speciale $\frac{k_1}{k_2}$; otterremo la conica

$$\varphi-k_1L^2-\frac{k_1}{k_2}(\psi-k_2L^2)=\varphi-\frac{k_1}{k_2}\psi=0,$$

che appartiene anche all'altro fascio; dunque gli 8 punti base dei due fasci stanno sulla conica $\varphi-\frac{k_1}{k_2}\psi=0$.

276. *Fra tutti i triangoli le cui mediane formano una progressione aritmetica di data ragione, quali sono rettangoli, quali acutangoli, quali ottusangoli.*

L. Bosi.

Risoluzione del sig. G. Gallucci.

Sia m la ragione ed x la mediana minore, saranno $m+x$, $2m+x$ le altre due mediane. Ad x corrisponde il lato maggiore a, ad $m+x$ il lato medio b, ad $x+2m$ il lato minore c. Si avrà

$$b^2+c^2=2x^2+\frac{1}{2}a^2;\ c^2+a^2=2(m+x)^2+\frac{1}{2}b^2;\ a^2+b^2=2(2m+x)^2+\frac{1}{2}c^2;$$

da questa si deduce

$$a^2+b^2+c^2=\frac{4}{3}\left[x^2+(m+x)^2+(2m+x)^2\right].$$

Sostituendo in questa eguaglianza $2x^2+\frac{1}{2}a^2$ a b^2+c, si ricava

$$a^2+\frac{1}{2}a^2+2x^2=\frac{4}{3}\left[x^2+(m+x)^2+(2m+x)^2\right],$$

da cui

$$\frac{9}{8}a^2=\frac{3}{2}x^2+6mx+5m^2,$$

In modo analogo si ricava:

$$\frac{9}{8}b^2=\frac{3}{2}x^2+3m\times+\frac{7}{2}m^2 \quad , \quad \frac{9}{8}c^2=\frac{3}{2}x^2-m^2.$$

Il triangolo dato è rettangolo, acutangolo od ottusangolo secondo che $a^2 \begin{smallmatrix}=\\<\\>\end{smallmatrix} b^2+c^2$ cioè secondo che

$$\frac{3}{2}x^2+6m\times+5m^2 \begin{smallmatrix}=\\<\\>\end{smallmatrix} \frac{3}{2}x^2+3m\times+\frac{7}{2}m^2+\frac{3}{2}x^2-m^2$$

e riducendo $3x^2-6m\times-5m^2 \begin{smallmatrix}=\\>\\<\end{smallmatrix} 0$. Le radici dell'equazione, che si ottiene egualiando a 0 il trinomio, sono

$$x_1=m\left(1+\sqrt{\frac{8}{3}}\right) \quad , \quad x_2=m\left(1-\sqrt{\frac{8}{3}}\right).$$

quindi si ha

$$3x^2-6mx-5m=3\left[x-\left(1+\sqrt{\frac{8}{3}}\right)m\right]\left[x-\left(1-\sqrt{\frac{8}{3}}\right)m\right],$$

ed essendo x_2 negativa, il segno del trinomio per valori positivi della x dipende solo dal fattore

$$x-\left(1+\sqrt{\frac{8}{3}}\right)m.$$

Per conseguenza il triangolo sarà rettangolo acutangolo ed ottusangolo secondo che $x \begin{smallmatrix}=\\>\\<\end{smallmatrix} m\left(1+\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$.

Altra risoluzione del sig. F. Celestri.

279. *Si considerino tutte le coniche aventi a comune un fuoco* F *e la direttrice* f *corrispondente,* F *ed* f *essendo dati.*

1°. *Per ogni punto* M *del piano passa una ed una sola di queste coniche. Dire in quale regione deve trovarsi il punto* M, *perchè la conica corrispondente sia un'ellisse, una parabola od un'iperbole.*

2°. *Trovare il luogo dei vertici posti sugli assi non focali.*

G. Scorza.

Risoluzione del prof. U. Ceretti a Badia Polesine.

1°. Si sa che una conica può definirsi come il luogo di un punto, di cui la distanza da un punto fisso (fuoco) ha un rapporto costante e (eccentricità) colla distanza da una retta fissa (direttrice).

Prendendo per asse delle ordinate la retta fissa e per asse delle ascisse la perpendicolare alla direttrice condotta per il fuoco, l'equazione della conica (indicando con a la distanza dal fuoco alla direttrice) è

$$e^2 = \frac{(x-a)^2 + y^2}{x^2}. \tag{1}$$

Poichè ciascuna conica deve passare per il punto M del piano, indicando con X ed Y le sue coordinate, si ha

$$e^2 = \frac{(\mathrm{X}-a)^2 + \mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^2}; \tag{2}$$

e quindi secondo che e^2, e perciò e, al variare di X e di Y sarà minore, maggiore od uguale ad 1, la conica sarà ellisse, iperbole o parabola.

Risulta perciò evidente che, se il punto X, Y appartiene alla parabola rappresentata dall'equazione (2) ovvero

$$\mathrm{Y}^2 = 2a\left(\mathrm{X} - \frac{a}{2}\right) \tag{3}$$

che ha f per direttrice ed F per fuoco, *la conica del fascio è la parabola stessa.*

Per ogni punto M interno alla parabola (3) risulta: $\mathrm{Y}^2 < 2a\left(\mathrm{X} - \frac{a}{2}\right)$, e però anche: $e^2 < 1$, $e < 1$; mentre per ogni pumto M esterno si ha analogamente: $e > 1$; quindi in corrispondenza la conica del fascio è un'ellisse od un'iperbole. E perciò: *per ogni punto* M *interno alla parabola:* $\mathrm{Y}^2 = 2a\left(\mathrm{X} - \frac{a}{2}\right)$ *la conica del fascio è un'ellisse; per ogni punto esterno è un'iperbole.*

Osservazione. — Per il caso particolare: $\mathrm{X} = a$, $\mathrm{Y} = 0$, si ha: $e = 0$; questo risultato dice che la conica del fascio si riduce al punto F, considerato come cerchio di raggio nullo.

2°. Dalle relazioni 1) e 2), eliminando e^2, si ottiene l'equazione della conica passante per il punto (X, Y), e cioè:

$$x^2(a^2 + \mathrm{Y}^2 - 2a\mathrm{X}) - \mathrm{X}^2 y^2 + 2a\mathrm{X}^2 x = a^2 \mathrm{X}^2,$$

questa equazione si può anche scrivere:

$$\left(x + \frac{a\mathrm{X}^2}{a^2 + \mathrm{Y}^2 - 2a\mathrm{X}}\right)^2 \left(a^2 + \mathrm{Y}^2 - 2a\mathrm{X}\right) - \mathrm{X}^2 y^2 = a^2 \mathrm{X}^2 \left(1 + \frac{\mathrm{X}^2}{a^2 + \mathrm{Y}^2 - 2a\mathrm{X}}\right);$$

le coordinate dei vertici situati sull'asse non focale, sono le soluzioni del sistema formato da questa equazione e dall'altra

$$x + \frac{a\mathrm{X}^2}{a^2 + \mathrm{Y}^2 - 2a\mathrm{X}} = 0,$$

ovvero del sistema

$$\begin{cases} x = -\dfrac{aX^2}{a^2+Y^2-2aX}, \\ -X^2y^2 = a^2X^2\left(1+\dfrac{X^2}{a^2+Y^2-2aX}\right). \end{cases}$$

Da queste equazioni eliminando $\dfrac{X^2}{a^2+y^2-rax}$ si deduce

$$y^2 = -a^2\left(1-\frac{x}{a}\right) = a(x-a);$$

quindi: *il luogo dei vertici posti sugli assi non focali è la parabola d'equazione:* $y^2=a(x-a)$; tale parabola, ha per asse l'asse delle ascisse, si ha per vertice il punto $F(x=a,\ y=0)$ ha per fuoco il punto $\left(\dfrac{5a}{4},\ 0\right)$ e per direttrice la retta $x=\dfrac{3}{4}a$.

282*. *Date due circonferenze concentriche di centro* O *ed un punto* S, *si tiri* SO *ad incontrare la circonferenza esterna in* A *e si congiunga un punto qualunque* C *di questa circonferenza con* A. *Condotta* CO *che sega la circonferenza interna in* B *e poi* SB *che incontra* CA *in* M, *trovare il luogo descritto dal punto* M *al variare di* C *sul cerchio.*

A. Lugli.

Risoluzione del sig. G. Gallucci.

Sia A′ l'incontro di SO con la circonferenza interna. Siccome le due circonferenze sono concentriche risulta CA parallela a BA′, e per conseguenza $\dfrac{SB}{SM}=\dfrac{SA'}{SA}$. Dunque al variare di C sul circolo il rapporto $\dfrac{SB}{SM}$ è sempre eguale ad $\dfrac{SA'}{SA}$, quindi il punto M descrive una circonferenza omotetica alla circonferenza interna col centro di omotetia in S e col rapporto di omotetia $\dfrac{SA'}{SA}$.

Altra risoluzione del sig. F. Celestri.

338*. *Determinare la parte di superficie sferica racchiusa fra due archi l'uno di circolo massimo, l'altro di circolo minore terminati alla corda comune.*

Bellacchi.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Sopra una sfera di centro O e raggio r, sieno tracciati un cerchio minore ACBD di centro H e raggio σ, e un cerchio massimo ECFD: vuolsi determinare la superficie S del fuso sferico di prima specie (*), CADEC, limitato da due archi CAD e CED *supposti entrambi minori della metà delle circonferenze cui appartengono.* Se P e P′ sono i poli del cerchio minore, condotti i cerchi massimi PCP′ e PDP′, la superficie cercata è la differenza fra il settore di calotta sferica PCADP (limitato dall'arco CAD e dai due archi eguali PC e PD) e il triangolo sferico isoscele PCD; denotando con α e β le misure dell'arco di circolo di raggio 1 cor-

(*) Direno essere un fuso sferico (Zweieck, Onglet), di prima o di seconda specie, secondochè uno solo o entrambi gli archi che lo limitano appartengono a cerchi minori.

rispondenti all'angolo CHD, e all'angolo sferico C del triangolo PCD, con h la distanza OH del centro della sfera del cerchio minore, avremo:

$$S = r(r-h)\alpha - r^2(\alpha + 2\beta - \pi) = 2r^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - rh\alpha;$$

per le superficie S′, S″, S‴ degli altri tre fusi CBDEC, CBDFC, CFDAC, abbiamo:

$$S' = \text{calotta PACBD} - S = 2r^2\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - rh(2\pi - \alpha)$$

$$S'' = \text{emisf.} - S' = 2r^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + rh(2\pi - \alpha)$$

$$S''' = \text{emisf.} - S = 2r^2\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) + rh\alpha.$$

Osservando ora che nelle espressioni di S, S′, S″, S‴ il coefficiente di $2r^2$ è l'angolo η formato dalle tangenti in C ai lati del fuso; e che il coefficiente di rh è l'angolo λ corrispondente all'arco del cerchio minore, le quattro formole precedenti si riducono all'altra

$$\Sigma = 2r^2\eta \mp rh\,.\,\lambda,$$

ove deve prendersi il segno — o il segno +, secondochè l'arco di cerchio massimo che è lato del fuso, è minore o maggiore di un semicerchio massimo. Fissando, arbitrariamente, il senso positivo dei lati del fuso vale la formola generale

$$\Sigma = 2r^2\eta - rh\lambda,$$

che esprime il teorema: „ *la superficie di un fuso sferico di prima specie eguaglia quella di un fuso ordinario avente uguale angolo (delle tangenti) diminuita di un settore di zona sferica, la cui altezza è la distanza del cerchio minore dal centro della sfera, e il cui angolo è misurato dall'arco del cerchio minore* „.

L'ultima formola risolve completamente la quistione proposta, ma possiamo anche esprimere facilmente Σ in funzione della corda comune $2s$ e dei raggi r, ρ. Abbiamo infatti, $s = \rho \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{\sqrt{\rho^2 - s^2}},\quad h = \sqrt{r^2 - \rho^2},\quad \cos\widehat{PC} = \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - \rho^2};$$

del triangolo sferico isoscele CPD abbiamo poi;

$$\cot PC\,.\operatorname{sen} DP = \cot C\,.\operatorname{sen} P + \cos DP\,.\cos P$$

dalla quale,

$$\cot C = \cot\beta = \cos PC\,.\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - \rho^2}\,.\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\cot\beta = \frac{s}{r}\sqrt{\frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2 - s^2}},$$

e finalmente

$$\Sigma = 2r^2 \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{s}{r}\sqrt{\frac{r^2-\rho^2}{\rho^2 - s^2}}\right) - 2r\sqrt{r^2 - \rho^2}\,.\operatorname{arc\,sec}\frac{s}{\rho};$$

che è la formola a cui si perviene col Calcolo Integrale.

Le superficie di ogni poligono sferico limitato da archi di circoli minori può esprimersi mediante quelle di fusi di prima specie, come mostrerò in altra occasione, in una nota su questo argomento.

Altra risoluzione del sig. Emanuele Palumbo Todaro.

351*. *Risolvere il sistema*

(1) $$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2$$
(2) $$y(x + z + u) = b$$
(3) $$x(z + u) + uz = c$$
(4) $$xz = d.$$

CANDIDO.

Risoluzione del sig. Egidio Tamagnini alunno del R. Istituto Tecnico A. Secchi, Reggio Emilia.

Dalla (2) ottengo

$$x + z + u = \frac{b}{y},$$

e quadrando

$$x^2 + z^2 + u^2 + 2xz + 2xu + 2uz = \frac{b^2}{y^2}.$$

Ma $x^2 + z^2 + u^2 = a^2 - y^2$ e $2xz + 2xu + 2uz = 2c$, quindi si ha

$$a^2 - y^2 + 2c = \frac{b^2}{y^2}$$

oppure

$$y^4 - (a^2 + 2c)\,y^2 + b^2 = 0,$$

La quale risolta dà:

$$y = \pm\sqrt{\frac{a^2 + 2c \pm \sqrt{(a^2 + 2c)^2 - 4b^2}}{2}}.$$

Conosciuto y il sistema diventa:

(1)′ $$x^2 + z^2 + u^2 = a^2 - y^2 = a'$$
(2)′ $$x + z + u = \frac{b}{y} = b'$$
(3)′ $$xz + xu + uz = c$$
(4)′ $$xz = d.$$

Dalla (2)′ ho ancora

$$x + z = b' - u,$$

e quadrando di nuovo

$$x^2 + z^2 + 2xz = b'^2 + u^2 - 2b'u.$$

Ma dalla (1)′ ho $x^2 + z^2 = a' - u^2$ e dalla (4)′ $2xz = 2d$ e di conseguenza

$$a' - u^2 + 2d = b'^2 + u^2 - 2b'u,$$

ossia

$$2u^2 - 2b'u + b'^2 - a' - 2d = 0,$$

che risoluta mi dà

$$u = \frac{b' \pm \sqrt{2a' + 4d - b'^2}}{2}.$$

Restano le due incognite x, z di cui conosco la somma

$$x + z = b' - u = b''$$

e il prodotto

$$xz = d.$$

Posso quindi scrivere l'equazione in t che ha per radici x e z

$$t^2 - b' t + d = 0,$$

la quale mi dà

$$t = \frac{b'' \pm \sqrt{b''^2 - 4d}}{2};$$

e avrò finalmente

$$x = \frac{b'' \pm \sqrt{b''^2 - 4d}}{2} \qquad z = \frac{b'' \mp \sqrt{b''^2 - 4d}}{2}$$

Altre soluzioni dei sigg. Guido Bordi, Gino Lubrano, Attilio Crepas, Michele Bello.

355. *Se due cerchi eguali si segano sotto un angolo di* 60°, *il loro cerchio radicale è il luogo della proiezione (ortogonale) di un punto dell'un cerchio sulla sua polare rispetto all'altro.*

Retali.

Risoluzione del prof. Cardoso-Laynes.

Indicando con $2a$ la distanza dei centri e con r il raggio, supposta la figura riferita ad un sistema cartesiano formato dalla retta centrale (asse x) e dall'asse radicale (asse y), le equazioni di due cerchi eguali qualunque saranno

$$(1) \qquad (x-a)^2 + y^2 - r^2 = 0 \qquad ; \qquad (2) \qquad (x+a)^2 + y^2 - r^2 = 0$$

e quella del loro cerchio radicale sarà:

$$x^2 + y^2 + a^2 - r^2 = 0.$$

Nel caso particolare in cui si supponga che i due circoli s'incontrino secondo un angolo $=\frac{\pi}{3}$, se congiungiamo il centro di uno dei circoli dati con uno dei punti d'intersezione degli stessi circoli, dal triangolo che questa retta forma con gli assi coordinati si ha

$$(3) \qquad a = r \cos\frac{\pi}{6} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

e perciò l'equazione del cerchio radicale diviene

$$(4) \qquad x^2 + y^2 = \frac{r^2}{4}.$$

Ciò posto, consideriamo la polare, rispetto al circolo (2), di un punto $(x_1 y_1)$ appartenente al circolo (1). Essa sarà:

$$(5) \qquad (x+a)(x_1+a) + yy_1 - r^2 = 0.$$

La normale a questa, condotta da $(x_1 y_1)$ è

$$(6) \qquad y - y_1 = \frac{y_1}{x_1 + a}(x - x_1).$$

Risolvendo il sistema (5) (6) rispetto a x_1, y_1 si ha

$$(7) \qquad x_1 = \frac{r^2(x+a) - a\left[(x+a)^2 + y^2\right]}{(x+a)^2 + y^2}; \qquad y_1 = \frac{r^2 y}{(x+a)^2 + y^2}$$

nelle quali formole x, y indicano le coordinate della proiezione ortogonale di $(x_1 y_1)$ sulla polare (5).

Sostituendo le (7) nella (1) si avrà l'equazione del luogo cercato, cioè:

$$r^4 - 4ar^2(x+a) + (4a^2 - r^2)\left\{(x+a)^2 + y^2\right\} = 0.$$

Tenendo conto della (3), la (8) si trasforma nella (4), il che dimostra il teorema.

Altra risoluzione del sig. Ernesto Laura.

366*. *La condizione necessaria e sufficiente perchè un numero* a *sia eguale alla somma di* p *numeri dispari consecutivi è che* p *sia un divisore di* a *tale che*

$$\frac{a}{p} - p = \textit{numero pari (lo 0 compreso).}$$

367*. *La condizione necessaria e sufficiente perchè un numero* a *sia eguale alla somma di* p *numeri pari consecutivi è che* p *sia un divisore di* a *tale che*

$$\frac{a}{p} - p = \textit{numero dispari.}$$

A. Fontebrasso.

Risoluzione del prof. Cardoso-Laynes.

Se indichiamo con S_k la somma dei primi k numeri dispari, avremo:

$$a = (2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + \ldots + (2n+2p-1) = S_{n+p} - S_n$$

ossia

$$a = (n+p)^2 - n^2 = p^2 + 2np$$

da cui

$$\frac{a}{p} - p = 2n$$

e inversamente da quest'ultima formola si risale facilmente alla prima, perciò il teorema del n. 366 resta dimostrato.

Se indichiamo con Σ_k la somma dei primi k numeri pari avremo:

$$a = (2n+2) + (2n+4) + \ldots + (2n+2p) = \Sigma_{n+p} - \Sigma_n$$

ossia

$$a = (n+p)(n+p+1) - n(n+1) = p^2 + (2n+1)p$$

da cui

$$\frac{a}{p} - p = 2n+1$$

e inversamente da quest'ultima formola si può risalire alla prima e quindi il teorema del n. 367 resta dimostrato.

Altra risoluzione del sig. Michele Belfo.

368. *Dimostrare che*

$$2 = \lim_{n=\infty} \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{3}{2n}}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{5}{2n}}} \cdots \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2-\frac{1}{2n}}} \right\}$$

G. Fubini.

Risoluzione del sig. E. Strocchi.

È noto che: $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$; e si ha pure (Vedi: Cesàro, *Corso di analisi algebrica*, pag. 149, § 18) indicando con $\log a$ il logaritmo naturale di a,

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \ldots + \frac{1}{4n-1}\right) = {}^1/_2 \log 2$$

Ciò premesso si ha:

$$\lim_{n=\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{3}{2n}}}\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2-\frac{1}{2n}}}\right\}=$$

$$=\lim_{n=\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{2n}}+\cdots+\frac{1}{2-\frac{1}{2n}}}\right\}=$$

$$=\lim_{n=\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{2n+1}+\frac{2n}{2n+3}+\cdots+\frac{2n}{4n-1}}\right\}=$$

$$=\lim_{n=\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}\right)}=$$

$$=\lim_{n=\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{2\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}\right)}=$$

$$=e^{2\cdot\frac{1}{2}\log.2}=e^{\log.2}=2.$$

Altre risoluzioni del sig. Angiolo Pensa e del Prof. Riccardo Micks.

369*. *Se* T *è un tronco di prisma, che ha per base un poligono regolare* S, P *è il punto d'incontro dell'altra base* S *colla retta parallela agli spigoli laterali condotta per il centro del circolo circoscritto ad* S, h *la distanza di* P *dal piano di* S, h_1 *la media aritmetica delle distanze dei vertici di* S′ *dal piano di* S; *si dimostri che* T *è equivalente alla somma di tre piramidi che hanno la base eguale ad* S *e l'altezza una eguale ad* h *e due ad* h_1.

G. LAZZERI.

Risoluzione del sig. Prof. R. Micks di Trieste.

I semipiani condotti per la retta che congiunge P col centro del circolo circoscritto ad S e per gli spigoli laterali del tronco rispettivamente, scompongono il tronco in n tronchi di prismi triangolari le cui basi sono eguali ad $s=\frac{S}{n}$. — Chiamando $h', h'', h''', \ldots h^{(n)}$, le distanze dei vertici di S′ dal piano di S, la misura del volume di uno di questi prismi triangolari è

$$v=\frac{s}{3}\,(h+h'+h'').$$

E quindi quella dell'intero tronco dato è

$$T=\frac{s}{3}\left[(h+h'+h'')+(h+h''+h''')+\ldots+(h+h^{(n-1)}+h^{(n)})+(h+h^{(n)}+h')\right]$$

ovvero
$$T=\frac{s}{3}\left[n\,.\,h+2\,(h'+h''+h'''+\ldots.h^{(n)})\right].$$

Essendo
$$h_1=\frac{h'+h''+h'''+\ldots+h^{(n)}}{n},$$

si ha pure
$$T=\frac{s}{3}\,[nh+2nh_1],$$

$$T=\frac{ns\,.\,h}{3}+2\,\frac{ns\,.\,h_1}{3},$$

che (essendo $ns=S$) si può scrivere

$$T=\frac{S\,.\,h}{3}+2\,\frac{S\,.\,h_1}{3}$$

q. e. d.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

371*. Se N indica il numero dei numeri che hanno per caratteristica n, ed N′ indica il numero dei numeri i cui reciproci hanno per caratteristica $-n'$, si ha $\frac{N}{N'} = 10^{n-n'+1}$

372*. La sesta potenza di qualunque numero intero è congrua a 0, o ad 1 rispetto al modulo 9.

373. La terza potenza d'ogni numero intero è congrua a 0, o a ± 1, o ± 5 rispetto al modulo 13.

374*. La sesta potenza di ogni numero intero è congrua a 0, o a ± 1, rispetto al modulo 13.

375*. La quarta potenza di qualunque numero intero è congrua a 0, o ad 1, o a 6, o a 10 rispetto al modulo 15.

376*. Se si ha $N \equiv 6$ (mod. 15), qualunque potenza di N sarà congrua a 6 rispetto al modulo 15.

377. Se si ha $N \equiv 10$ (mod. 15), qualunque potenza di N sarà congrua a 10 rispetto al modulo 15.

BONOLIS.

378. Dimostrare le identità

$$\mathrm{Sen}\,(n\,x) = \begin{vmatrix} 2\,\mathrm{Cos}\,x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\,\mathrm{Cos}\,x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\,\mathrm{Cos}\,x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\,\mathrm{Cos}\,x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\,\mathrm{Cos}\,x \end{vmatrix} \mathrm{Sen}\,x$$

$$\mathrm{Cos}\,(n\,x) = \begin{vmatrix} \mathrm{Cos}\,x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\,\mathrm{Cos}\,x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\,\mathrm{Cos}\,x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\,\mathrm{Cos}\,x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\,\mathrm{Cos}\,x \end{vmatrix}$$

dove il primo determinante è di ordine $n-1$ ed il secondo di ordine n.

BETTINI.

379. Se A, A′; B, B′; C, C′; D, D′ sono quattro coppie di elementi coniugati in una involuzione quadratica I, i coniugati di A′, B′, C′ rispettivamente nelle involuzioni (B, C; D, D′), (C, A; D, D′), (A, B; D, D′) sono un medesimo elemento E; e i coniugati rispettivi di A, B, C nelle involuzioni (B′, C′; D, D′), (C′, A′; D, D′), (A′, B′; D, D′) coincidono nell'elemento E′ coniugato ad E nella I.

380. Determinare lo inviluppo di un cerchio, il cui centro percorre una parabola data e che tocca una retta parallela alla direttrice. Trovare il punto di contatto del cerchio mobile col suo inviluppo; e dimostrare che quest'ultimo è pure lo inviluppo delle rette simmetriche della retta data rispetto alle tangenti della parabola.

(*) Le quistioni contrassegnate con un asterisco sono proposte agli studenti delle scuole secondarie; le altre a tutti gli studiosi indistintamente.

381. Due parabole omofocali hanno le direttrici parallele, ed r è la bisettrice della striscia formata da queste direttrici: dimostrare che lo inviluppo delle bisettrici degli angoli formati da una tangente variabile dell'una o dell'altra parabola con r è un medesimo cerchio.

382. Luogo dei fuochi delle parabole, che toccano una parabola data e hanno per direttrice una medesima retta, parallela alla direttrice della parabola data.

RETALI.

ERRATA-CORRIGE. — Alla questione 360, proposta nel precedente fascicolo, va aggiunto quanto segue, che fu omesso:

...... *se il triangolo dato è acutangolo. (Modificare la seconda parte del teorema negli altri casi).*

BIBLIOGRAFIA

Coi tipi di Raffaello Giusti (Livorno) sono uscite 5 operette didattiche del Dottor GIUSEPPE M. TESTI, delle quali diamo qui un breve cenno.

1°. — *Elementi di Algebra ad uso più specialmente dei licenziandi delle Scuole Tecniche.* — 5ª ediz. conforme ai programmi, con 235 esercizi appropriati a ciascun argomento. — Pagine 107. L. 1,20.

Questo libretto contiene le quattro operazioni razionali fondamentali, un cenno del calcolo dei radicali (su esempi), le equazioni di 1° e 2° grado a un'incognita, i sistemi di 1° grado a due incognite e anche (su esempi) a tre o più incognite. Buona mi sembra l'esposizione della regola per la divisione dei polinomi, perchè mentre è pratica è anche ragionata. I numeri negativi sono introdotti senza sottilizzare molto sulla legittimità delle operazioni con esse, e ciò è bene in un corso elementarissimo. In un punto mi è parso che l'A. non abbia bene espresso il suo pensiero ed è là dove per spiegare l'uso della parentesi presenta come differenti le espressioni $a + b \times c$, $(a + b \times c)$.

2°. — *Corso di Aritmetica con 500 esercizi e problemi ad uso degli alunni delle Scuole Tecniche, dei Ginnasi inferiori e delle Scuole Complementari.* — 5ª ediz. nuovamente corretta. — Pagine 295. L. 1,75.

Il pubblico, cui si indirizza l'A., è senza dubbio immaturo per certe dimostrazioni, e l'A. le ha molto opportunamente tralasciate; in compenso poi la materia è copiosa e ben disposta a preparare l'alunno allo studio dell'algebra; infatti nel nostro libro troviamo anche un capitolo pel calcolo con espressioni numeriche e l'uso delle parentesi. Lo studio dell'A. per conciliare la facilità coll'esattezza, se in generale può dirsi ben riuscito, mi sembra non abbia ben raggiunto lo scopo nel delicato argomento della misura (Cap. VI). Ecco il pensiero dell'A. Premessa una definizione di misura numerica, che equivale sostanzialmente a quella di rapporto di una grandezza all'unità nel caso che la grandezza sia commensurabile coll'unità, l'A. accennando al caso dell'incommensurabilità pone in evidenza la necessità delle misure inesatte.

Ora questo modo di vedere è intanto contrario all'usuale, perchè generalmente per misura numerica di una grandezza si intende quel numero cui si perviene *misurando* la grandezza data coll'unità o con parti aliquote *prescritte* dell'unità; il qual numero può essere il rapporto della grandezza all'unità, ma in generale non è che un numero variabile col suo denominatore il quale ha per limite il rapporto della grandezza all'unità, anche se questo rapporto è razionale (come accade ad es. misurando $\frac{1}{3}$ di litro in decilitri o centilitri, ecc.). Inoltre il punto di vista dell'A. è contrario (mi sembra) al buon metodo, perchè, mentre lo mette nella necessità di accennare senza poterlo sufficientemente sviluppare (nemmeno su un esempio) il concetto sottile di incommensurabilità, non gli consente poi di evitare l'inconveniente che presenta il concetto usuale di misura numerica, che cioè una stessa grandezza abbia rispetto a una stessa unità infinite misure rappresentate da frazioni non equivalenti; perchè l'A. urta appunto in tale inconveniente, quando considera le misure inesatte nel caso dell'incommensurabilità.

In seguito poi l'A. definisce il *rapporto* di due grandezze come il quoziente delle loro misure (supposte esatte), lasciando così senza rapporto due grandezze aventi misure inesatte; mentre stando al concetto comune di rapporto (che è quello di misura esatta o che si considera come esatta) può avvenire che abbiano rapporto anche due grandezze aventi misure inesatte. Naturalmente accettando il concetto usuale di rapporto, invece di dimostrare come fa l'A. (pag. 220) che il rapporto di due grandezze è eguale alla misura della prima per mezzo della seconda, sarebbe da provare che, se esistono i rapporti di due grandezze ad una terza, il loro quoziente è il rapporto di una delle grandezze all'altra.

Queste osservazioni di indole tutta teorica non possono certo in niun modo menomare un lavoro d'intenti tutti pratici, il quale rimane sempre un pregevole libro di testo per le nostre Scuole.

3°. — *Elementi di Aritmetica teorico-pratica ad uso più specialmente delle Scuole Normali con numerosi esercizi e problemi.* Parte 1ª. *Operazioni e proprietà dei numeri (pel 1° corso normale). 300 esercizi.* Pagine 171 — 2ª edizione. L. 1,50.

A differenza del precedente questo libretto è naturalmente tutto ragionato e contiene le teorie che riguardano l'Aritmetica pura e non le applicazioni. Mi sembra molto chiaro e ben fatto. Spero che l'A. nella 3ª edizione (che non può mancare) inserirà quella comoda disposizione di calcolo suggerita dal Bertrand per l'estrazione della radice cubica, senza della quale l'operazione è quasi impraticabile.

4°. — *Elementi di geometria ad uso degli alunni delle Scuole Tecniche e Normali con 177 figure e 510 esercizi.* — 4ª edizione riveduta. — Pagine 208. L. 1,75.

I programmi delle Scuole Tecniche e Normali sembrano esigere che le relazioni fra le grandezze geometriche siano ricavate il più che si può dalle relazioni fra i numeri che le rappresentano; e poichè in una Scuola Tecnica o Normale non si può parlare con esattezza degli irrazionali, questa esigenza conduce a delle dimostrazioni che valgono solo in certi casi.

Il nostro A., che scrive appunto per le Scuole Tecniche e Normali, ha quindi questo peccato originale nel metodo, e bisogna perdonargli se scrive una geometria dirò così approssimata. Anche accettando il suo metodo dovrei però intanto ripetere qui le osservazioni ai suoi concetti di misura e di rapporto che ho già fatte parlando del 2° libretto. Inoltre non posso tacere che le qualità imprecise del metodo si sono comunicate talora allo stile dell'A.. come per es. nella definizione di tangente al cerchio (pag. 60), nella dimostrazione del teor. 236 sull'equivalenza dei prismi e nell'introduzione di certe locuzioni poco corrette, come quella di poligono di un numero infinitamente grande di lati (pag. 103).

Infine debbo notare che vi è grande incertezza sui criteri che hanno guidato l'A. talora a esporre tal'altra a tacere le dimostrazioni delle proposizioni; per es. le principali proprietà degli angoli solidi nonchè le descrizioni dei solidi regolari sono date senza dimostrazione, mentre si pretende dimostrare la formola pel calcolo della circonferenza per mezzo del raggio (col poligono di infiniti lati) o del volume della sfera (come somma d'infinite piramidi), oppure si danno dimostrazioni alquanto difficili come quella del teor. 279 sull'equivalenza dei prismi. Tutti questi difetti sono poi compensati da molti buoni capitoli, come quello sulle parallele sulle posizioni relative di rette e piani, ecc., i quali provano ancora una volta che, ove lo scrittore non fosse stato traviato dal metodo (quasi obbligatorio), avrebbe saputo darci un volumetto incensurabile.

5°. — *Nozioni di geometria ad uso più specialmente delle allieve dei Corsi complementari (già Scuole preparatorie alle Normali) con 124 figure e 180 esercizi.* — Pagine 92. L. 1.

Qui l'A. vuole di proposito dare non dimostrazioni ma semplici illustrazioni delle proposizioni enunciate; e francamente mi sembra che, sia per la forma dell'esposizione, sia per la cura con cui sono disegnate le figure, Egli sia perfettamente riuscito a comporre un buon libro di testo.

G. Sforza.

B. Carrara. — *Raccolta di problemi di fisica e chimica.* — G. B. Paravia 1897.

La prima parte (pag. 368, L. 5) contiene settecento problemi sui varii rami della fisica che s'insegna nelle nostre scuole secondarie. Molti di essi sono seguiti da soluzioni assai sviluppate, che devono servire di esempio all'allievo, e che sono sempre semplici ed eleganti: indichiamo, per tutte, quelle relative ai problemi di ottica. Di tutti gli altri è data almeno la risposta; cosa utile, se gli errori di stampa fanno difetto, ad avvertire, nel caso, il giovane sia di un calcolo errato, sia di una soluzione sbagliata.

Parecchi problemi ci sembrano assolutamente superflui; perchè si riducono a vane applicazioni numeriche senza riscontro alcuno nei casi della vita ordinaria, o della pratica scientifica. Citiamo, abbreviandolo, questo che è fra i più innocenti: " quanti pezzi da 10 centesimi abbisognerebbero per fabbricare un emisfero della " stessa lega di cm. 50 di diametro? (prob. 90) ".

Altresì avremmo desiderato che si avesse avuto, sempre e dovunque, riguardo alla realtà scientifica. Così leggiamo: " Un vaso è fatto di una sostanza il cui " calore specifico è 0,5... (prob. 393) ". Ora l'unico corpo che risponda a questo dato è il ghiaccio, il quale non può certo adoperarsi per farne un vaso calorimetrico. Ma ci affrettiamo subito a dire che questi medesimi difetti si trovano in tutte le opere congeneri.

Con molta cura è fatta la parte seconda, (pag. 87, L. 2) la quale contiene i problemi di chimica; sono notevoli specialmente quelli svolti ad esempio.

In complesso si tratta di una buona raccolta da consigliarsi ai professori ed ai giovani, che vogliono realmente impadronirsi delle teoriche esposte nei corsi. Un breve riassunto dei principii applicati nei varii problemi torna comodo allo studioso, ed opportune figure servono ad illustrare molte delle questioni sviluppate.

R. Pitoni.

G. Z. Reggio. — *Complementi di Algebra per gli allievi degli istituti tecnici* (2° biennio). — G. B. Paravia, 1897.

Nel primo libro *(calcolo combinatorio)* l'autore espone, in modo molto chiaro e preciso, gli ordinari teoremi sulle combinazioni, disposizioni e permutazioni e lo sviluppo della potenza intera e positiva di un binomio e di un polimonio. Seguono poi le formole che danno le somme delle varie potenze dei termini di una progressione aritmetica; un cenno, forse troppo limitato, sulle probabilità, e la teorica dei determinanti quale comunemente s'insegna nei libri per le scuole secondarie.

Nel secondo libro *(numeri e grandezze)* l'autore, premesso il concetto di numero intero, ricorda brevemente le caratteristiche delle operazioni dirette e inverse su questi numeri. Partendo poi dal bisogno di render sempre possibili quest'ultime operazioni, l'autore si fa strada a parlare dei numeri frazionari e negativi, ed estende ad essi le operazioni già indicate pei numeri interi. Dopo questo breve riassunto, l'autore si ferma più a lungo sui numeri irrazionali sviluppando il concetto del Dedekind, un po' più difficile, secondo noi, a farsi capire ai principianti di quello del Cantor. Vero è che quest'ultimo concetto, di riguardare cioè gl'irrazionali come limiti di due serie convergenti di numeri razionali, è ripreso nel libro terzo e il chiarissimo autore se ne serve per illustrare le operazioni sugl'irrazionali medesimi. Ma si poteva perciò appunto in un libro elementare evitare il primo modo di vedere, e dare un più ampio sviluppo al secondo. I numeri complessivi sono dall'autore esposti tanto col metodo del Cauchy quanto colla rappresentazione del Gauss.

Nel libro terzo si dichiarano, col rigore voluto dalla scienza moderna i concetti di funzioni e di limite e si sviluppa ampiamente la teorica delle frazioni continue.

Il quarto libro comincia con un riassunto, che poteva fors'anche tralasciarsi, sulle equazioni di 1° e 2° grado, per accennare poi alla risoluzione dell'equazioni binomie, ed all'analisi indeterminata di primo grado. Segue un brevissimo capitolo, che può omettersi dall'insegnante, sulle congruenze, e il libro si chiude con cenni molto ben fatti sulle diseguaglianze e sui massimi e minimi.

Trattandosi di soggetti così elementari e disparati il libro non contiene, nè poteva contenere, nulla di nuovo. Si ha soltanto il diritto di richiedere una esposizione chiara, precisa e sicura e a questo l'autore soddisfa completamente. L'essere poi il libro giunto alla seconda edizione ci dispensa da qualunque altro giudizio.

Soltanto ci auguriamo che in una prossima ristampa siano più curate le note storiche, alcune delle quali si riducono ad un puro accenno di nomi senza indicazioni di date.

Buoni e bene scelti sono i problemi posti alla fine di ogni capitolo.

R. Pitoni.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 31 Agosto 1897.

NUOVO METODO PER LO STUDIO E PER IL CALCOLO DELLE FUNZIONI TRASCENDENTI ELEMENTARI

I. — Funzioni circolari.

1. - LEMMA 1°. — *Essendo a, b due numeri tali che sia $|b| > |a|$, si formi la successione*

(1) $a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\ldots a_m, b_m, \ldots\ldots a_{n-1}, b_{n-1}, a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1} \ldots\ldots$

colla seguente legge. Sia a_1 la media aritmetica di a e di b; sia b_1 la media geometrica di b e di a_1; in generale sia:

(2) $$a_{m+1} = \frac{1}{2}(a_m + b_m)$$ (3) $$b_{m+1} = \sqrt{b_m . a_{m+1}}$$

Se tutti i radicali, che ci danno le b_m vengono presi con lo stesso segno del numero b, allora a_n, b_n sono variabili convergenti, che tendono, col crescere di n, ad un medesimo limite $\psi(a, b)$.

Distingueremo due casi secondo il segno di b; sia dapprima $b > 0$, allora tutte le b_m sono per ipotesi positive: poichè $|b| > |a|$ ed $a_1 = \frac{a+b}{2}$, il numero a_1 sarà positivo, minore di b e maggiore di a; poichè $b_1 = +\sqrt{a_1 . b}$ e $b > a_1$, si avrà $a_1 < b_1 < b$; quindi $b > b_1 > a_1 > a$. Nell'identico modo si dimostra essere: $b_1 > b_2 > a_2 > a_1$; $b_2 > b_3 > a_3 > a_2$; ecc. dalle quali diseguaglianze risulta che col crescere dell'indice le b vanno diminuendo, le a aumentando; ma le b restano sempre superiori alle a. Inoltre la differenza $a_n - b_n$ decresce indefinitamente: infatti $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$ e per conseguenza $a_n - b_{n-1} = \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1})$; e siccome b_n è compreso tra b_{n-1} ed a_n si ha

$$a_n - b_n < \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1}).$$

Ne segue che a_n, b_n sono due variabili convergenti, ed hanno un limite.

Sia ora $b < 0$, tutte le b_m saranno per ipotesi negative; anzi si riconosce immediatamente che se poniamo: $a' = -a$, $b' = -b$ e formiamo i numeri

$$(\alpha) \qquad a',\ b',\ a'_1,\ b'_1,\ a'_2,\ b'_2, \ldots\ldots$$

in modo che (analogamente a quanto si è indicato per la (1)) ogni a'_n sia la media aritmetica e ogni b'_n sia la media geometrica dei due numeri che lo precedono, un numero qualunque della (1) non differisce che nel segno dal corrispondente della (α). Ma per il primo caso il limite di a'_n e di b'_n (per n crescente indefinitamente) esiste ed è positivo, perchè $b' > 0$; questo limite cambiato di segno sarà dunque il limite di a_n e di b_n, limite che perciò esiste ed è negativo.

Indicherò con $\psi(a, b)$ il limite delle variabili convergenti a_n, b_n per n crescente all'infinito.

Corollario. — *Il limite $\psi(a, b)$ è dello stesso segno di b e resta moltiplicato per un numero qualunque K, se si moltiplicano per K i numeri a, b.*

Lemma 2°. — *Se $b > 0$, il limite $\psi(a, b)$ non solo è compreso tra un numero a e un numero b (consecutivi o no) qualunque, ma anche, per ogni valore di m tra $b_m - \frac{1}{3}(b_{m-1} - b_m)$ ed $\frac{1}{3}(a_m + 2b_m)$.*

La prima parte di questo lemma, importante non per la teoria ma per il calcolo numerico di $\psi(a, b)$, risulta subito dalla dimostrazione precedente. Per la seconda parte si osservi che seguendo la via indicata nel *Traité de Géométrie* par E. Rouché et Ch. De Comberousse a proposito del teorema di Schwab, si ha

$$b_m - \frac{1}{3}(b_{m-1} - b_m) < \psi(a, b) < a_m + \frac{1}{3}(a_m - a_{m-1})\,;$$

ora, posto nel terzo membro di questa diseguaglianza $m+1$ in luogo di m, otteniamo appunto a causa della (2)

$$b_m - \frac{1}{3}(b_{m-1} - b_m) < \psi(a, b) < \frac{1}{3}(a_m + 2b_m)$$

2. - Teorema. — *Se $a^2 + c^2 = b^2$, sussiste la identità*

$$(3) \qquad \text{arc. cos}\,\frac{a}{b} = \frac{c}{\psi(a, b)} \cdots\cdots$$

che dà un arco in funzione del suo coseno. In questa identità il segno di c è indifferente, e per arc cos $\frac{a}{b}$ *s'intende un arco il cui valore assoluto non supera un angolo piatto.*

Sia dapprima $b > 0$; quando a, b tendono ad uno stesso limite t la frazione $\frac{a}{b}$ tende ad 0, l'arc cos $\frac{a}{b}$ tende a zero e perciò il rapporto fra il suo seno $\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$, e l'arco stesso $\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}}{\text{arc cos}\frac{a}{b}}$ tende ad 1 e perciò

$$b\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}}{\text{arc cos}\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\text{arc cos}\frac{a}{b}} = \frac{c}{\text{arc cos}\frac{a}{b}}$$

tende precisamente a t. In altre parole: *se noi possiamo far sì che a, b differiscano da un numero t di una quantità piccola ad arbitrio, lo stesso accadrà di* $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\text{arc cos}\frac{a}{b}}$.

Se in questa frazione pongo ora in luogo di a e di b rispettivamente a_1 e b_1 essa diventa

$$\frac{\sqrt{b_1^2-a_1^2}}{\text{arc cos}\frac{a_1}{b_1}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}}{\text{arc cos}\frac{a+b}{2\sqrt{b\frac{a+b}{2}}}} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{2\,\text{arc cos}\sqrt{\frac{a+b}{2b}}};$$

ma se $\cos y = \frac{a}{b}$, $\cos\frac{1}{2}y = \sqrt{\frac{a+b}{2b}}$; quindi

$$\text{arc cos}\frac{a}{b} = 2\,\text{arc cos}\sqrt{\frac{a+b}{2b}}$$

e quindi
$$\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\text{arc cos}\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b_1^2-a_1^2}}{\text{arc cos}\frac{a_1}{b_1}}$$

Nell'identico modo si prova

$$\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\text{arc cos}\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b_1^2-a_1^2}}{\text{arc cos}\frac{a_1}{b_1}} = \frac{\sqrt{b_2^2-a_2^2}}{\text{arc cos}\frac{a_2}{b_2}} = \ldots\ldots \frac{\sqrt{b_n^2-a_n^2}}{\text{arc cos}\frac{a_n}{b_n}} = \ldots\ldots$$

Ma coll'ingrandire abbastanza n posso fare sì che a_n e b_n differiscano da $\psi(a, b)$ di una quantità piccola ad arbitrio; lo stesso, per il già detto, accadrà di $\frac{\sqrt{b_n^2-a_n^2}}{\text{arc cos}\frac{a_n}{b_n}}$, ma questa frazione è eguale a $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\text{arc cos}\frac{a}{b}}$, quindi la differenza fra $\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{\text{arc cos}\,\dfrac{a}{b}}$, e $\psi(a, b)$ è minore di qualsiasi quantità arbitraria ε, ossia (ricordando che $c=\sqrt{a^2-b^2}$).

$$\frac{c}{\text{arc cos}\,\dfrac{a}{b}}=\psi(a,b)$$

e la (3) è dimostrata. Il segno dato a c è indifferente, perchè archi differenti solo per il segno hanno uguali coseni.

Se $b<0$ si ha: $-b>0$ e per il caso precedente

$\text{arc cos}\dfrac{a}{b}=\text{arc cos}\dfrac{-a}{-b}=\dfrac{c}{\psi(-a,-b)}=-\dfrac{c}{\psi(a,b)}$ e la (4) è ancor vera, sia perchè il segno meno si può anche dare a c, sia perchè, come or ora si fece notare,

$$\cos\left(-\text{arc cos}\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}.$$

Al lettore poi che chiedesse per qual ragione tra i valori di $\text{arc cos}\dfrac{a}{b}$ la (3) ce ne dia uno minore di π in valore assoluto, ricorderò che per la dimostrazione si usò la proprietà, che $\text{arc cos}\dfrac{a}{b}$ tende a zero per a, b tendente ad uno stesso valore t e che per $b>0$ abbiamo supposto, come si vede dal corso della dimostrazione che la metà, il quarto, l'ottavo ecc. del nostro arco abbiano positivo il coseno.

Sia p. es. da trovarsi $x=\text{arc cos}\dfrac{3}{5}$ coll'approssimazione di $2:100000$.

Si avrà

$$\begin{array}{ll} a=3 & b=5 \\ a_1=4 & b_1=4{,}47214 \\ a_2=4{,}23607 & b_2=4{,}352500 \\ a_3=4{,}294283 & b_3=4{,}32329 \end{array}$$

per il secondo lemma $\psi(a,b)=\psi(3,5)$ è compreso tra $b_3-\dfrac{1}{3}(b_2-b_3)$ e $\dfrac{1}{3}(a_3+2\,b_3)$ cioè tra 4,31355 e 4,313621 e per la (4) l'$\text{arc cos}\dfrac{3}{5}$ è compreso tra 0,92729 e 0,92731; la media aritmetica dei due ultimi numeri cioè 0,92730 è il valore cercato; valore ottenuto con la ricerca di tre medie geometriche, una divisione (facilmente esigribili coi logaritmi) ed altre poche semplicissime operazioni.

L'ampiezza dell'arco x è $9273 : 174{,}533 = 53^\circ, 7', 49''$, essendo 0,0174532925..... la lunghezza dell'arco di 1°.

3. - Problema. — *Trovare arc sen $\frac{a}{b}$ per a, b positivi.*

Essendo $a^2 + c^2 = b^2$, si ha

$$\text{arc sen}\,\frac{a}{b} = \text{arc cos}\,\frac{c}{b} = \frac{a}{\psi(c, b)}.$$

Così per es.

$$\text{arc sen}\,\frac{4}{5} = \text{arc cos}\,\frac{3}{5} = \frac{4}{\psi(3,5)} = 0{,}92730 = 53^\circ\,7'49''. \tag{4}$$

Similmente si troverebbero arc tg $\frac{a}{b}$, ecc.

4. - Problema. — *Dedurre dalle precedenti formule il teorema di Schwab.* Questo elegantissimo teorema non è che un caso particolare della (3). Poniamo nella (3) $a = 0$ (si noti che non si può porre $b = 0$ perchè per ipotesi $|b| > |a|$) ed otteniamo $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2b}\psi(0, b)$, che per $b = \frac{1}{2}$ ci dice appunto

$$\frac{1}{\pi} = \psi\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

5. - Teorema. — *Se a, b, c sono tre numeri positivi tali che $a^2 + c^2 = b^2$, hanno luogo le identità:*

$$\frac{c}{\psi(a, b)} + \frac{a}{\psi(c, b)} = \frac{\pi}{2} \ldots\ldots \tag{5}$$

$$\frac{1}{\psi(a, b)} + \frac{1}{\psi(-a, b)} = \frac{\pi}{c} \ldots\ldots \tag{6}$$

$$\frac{c}{\psi(-a, b)} - \frac{a}{\psi(c, b)} = \frac{\pi}{2} \ldots\ldots \tag{7}$$

La (5) si ottiene sostituendo in arc cos $\frac{a}{b}$ + arc sen $\frac{a}{b} = \frac{\pi}{2}$ i valori che per arc cos $\frac{a}{b}$ e per arc sen $\frac{a}{b}$ ci danno la (3) e la (4).

La (6) si dimostra sostituendo in arc cos $\frac{a}{b}$ + arc cos $\frac{-a}{b} = \pi$ i valori che per arc cos $\frac{a}{b}$ e per arc cos $\frac{-a}{b}$ ci dà la (3) e dividendo per c.

La (7) risulta dall'eliminazione di $\psi(a, b)$ tra la (5) e la (6).

Tutte queste identità sono molto più generali del teorema di Schwab, che ne è un particolarissimo caso.

II. — Definizione elementare delle funzioni iperboliche.

6. - Se a, b sono positivi, ma $a > b$ si riconosce facilmente, anche in questo caso, l'esistenza di $\psi(a, b)$; la (3) diventa in tale caso $\arccos \frac{a}{b} = i \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\psi(a, b)}$, ed è naturale il definire

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{arc\,cosh} \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\psi(a, b)} \dots\dots$$

Nello stesso modo s'introdurrebbero le altre funzioni iperboliche. La (8) e le formule analoghe facilmente scopribili ci possono servire a calcolarne i valori e trovarne, come si dirà più avanti, le proprietà; ecco ora un esempio semplicissimo del modo, con cui queste si potrebbero studiare. Per definizione del limite $\psi(a, b)$ si ha

$$\psi(a, b) = \psi(a_1, b_1) = \psi\left(\frac{a+b}{2},\ \sqrt{b \cdot \frac{a+b}{2}}\right).$$

Sostituendo per il primo ed il terzo membro di queste identità i loro valori dati dalla (8) si ottiene la nota proprietà

$$\operatorname{arc\,cosh} \frac{a}{b} = \operatorname{arc\,cosh} \sqrt{\frac{a+b}{2b}}.$$

III. — Funzione logaritmica.

7. - Lemma. — *Quando x tende ad 1 la frazione $\frac{x-1}{\log x}$ tende ad un limite.*

Questa proprietà è notissima, ma voglio stabilirne qui una elegantissima dimostrazione.

Posto $y = \log x$, per $y > 0$ la frazione $\frac{x-1}{\log x} = \frac{10^y - 1}{y}$ è sempre positiva; basta quindi provare che essa diminuisce con y per dimostrare che tende ad un limite.

Moltiplichiamo y per la frazione $\frac{h}{k}$ minore di 1 ed a termini interi. Ponendo $y_1 = \frac{y}{k} = \log x_1$ ed $y_2 = \frac{h}{k} y = h y_1 = \log x_2$ otteniamo poichè $x = x_1^k$

$$(\beta) \quad \frac{y}{10^y - 1} = \frac{x-1}{\log x} = \frac{x_1^{k-1} + x_1^{k-2} + \dots\dots + x_1 + 1}{k} \cdot \frac{x_1 - 1}{\log x_1} \dots\dots$$

e poichè $x_2 = x_1^h$

$$(\gamma) \qquad \frac{10^{y_2}-1}{y_2} = \frac{x_2-1}{\log x_2} = \frac{x_1^{h-1}+x_1^{h-2}+\ldots\ldots+x_1+1}{h} \cdot \frac{x_1-1}{\log x_1} \ldots\ldots$$

Ma essendo $x_1 > 1$, la frazione $\dfrac{x_1^{m-1}+x_1^{m-2}\ldots\ldots+1}{m}$ con m intero aumenta, se si accresce m di una unità, perchè

$$\frac{x_1^m+\ldots\ldots+1}{m+1} - \frac{x_1^{m-1}+\ldots\ldots+1}{m} = \frac{m x_1^m - x_1^{m-1} - \ldots\ldots - 1}{m(m+1)} =$$

$$= \frac{(x_1^m - x_1^{m-1}) + \ldots\ldots + (x_1^m - 1)}{m(m+1)} > 0,$$

ed aumenta a fortiori anche se si accresce m di più unità. Quindi, essendo $k > h$, si ha

$$\frac{x_1^{k-1}+x_1^{k-2}+\ldots+x_1+1}{k} > \frac{x_1^{h-1}+x_1^{h-2}+\ldots+x_1+1}{h},$$

ed in virtù delle (β) e (γ) la $\dfrac{10^y-1}{y}$ è diminuita moltiplicando y per la $\dfrac{h}{k} > 1$.

Coi metodi con cui si trattano ora i numeri irrazionali si dimostra che ciò avviene anche se $\dfrac{h}{k}$ è irrazionale.

8. - Teorema. — *Se a, b sono rispettivamente la media aritmetica e la media geometrica dei due numeri a_0 e b_0, esiste l'identità*

$$(9) \qquad log\ \frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{b_9}\,\frac{a_0-b_0}{\psi(a,b)} \ldots\ldots$$

dove $\dfrac{1}{q}$ è una costante per un medesimo sistema di logaritmi.

Per dimostrare la (9) seguiremo la stessa via tenuta per dimostrare la (3). Quando a e b tendono ad un medesimo limite t, i numeri a_0 e b_0 tendono pure allo stesso limite t, la frazione $\dfrac{a_0}{b_0}$ tende ad 1 e la frazione

$$\frac{a_0-b_0}{\log \dfrac{a^0}{b_0}} = b_0\,\frac{\dfrac{a_0}{b_0}-1}{\log \dfrac{a_0}{b_0}}$$

tende quindi al numero t moltiplicato per il limite q di $\dfrac{x-1}{\log x}$ quando x tende ad 1.

In altre parole: *Se si possono rendere a e b tanto poco differenti, quanto si vuole, da un numero t, la frazione* $\varphi = \dfrac{a_0 - b_0}{\log \dfrac{a_0}{b_0}}$ *differisce di quanto poco si vuole da $q\,t$.*

Di più, se nella φ poniamo in luogo di a, b rispettivamente a_1 e b_1 essa diventa (essendo $a_0 = a + \sqrt{a^2 - b^2}$, $b_0 = a - \sqrt{a^2 - b^2}$ $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$, $b_1 = \sqrt{b\,a_1}$).

$$\frac{2\sqrt{a^2 - b}}{2 \log \dfrac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}}{a+b-\sqrt{a^2-b^2}}} = \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{\log \left(\dfrac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}}{a+b-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2} = \frac{a_0 - b_0}{\log \dfrac{a_0}{b_0}},$$

e la frazione φ non è cambiata per effetto di questa sostituzione, e non muterà quindi di valore neppure se in luogo di a_1 e b_1 porrò a_2 b_2 ecc. ecc.

Ma coll'ingrandire abbastanza n posso fare sì che a_n, b_n differiscano da $\psi(a, b)$ di una quantità piccola ad arbitrio; $q.\,\psi(a, b)$, per il già detto, differirà di quanto poco si vuole da φ, dove in luogo di a, b si sono posti rispettivamente a_n, b_n; ma questa sostituzione, si dimostrò testè, non cambia il valore della φ, quindi la differenza fra φ e $q.\,\psi(a, b)$ è minore di qualsivoglia numero arbitrario ε, e perciò

$$\varphi = q.\,\psi(a, b)$$

e da questa eguaglianza si deduce la (9).

Così la $\psi(a, b)$ per $a > b$ (che già ci servì per lo studio delle funzioni iperboliche) serve pure per le funzioni logaritmiche.

Anche in questo caso il secondo lemma del § 1 riesce di massima utilità nei calcoli numerici; per la sua dimostrazione in questo caso, in cui $a > b$, basta in tutte le disuguaglianze del *Traité de Géométrie* sopracitato che servirono alla dimostrazione del secondo lemma nel caso di $a < b$, sostituire al segno $<$ il segno $>$ e viceversa. Si noti pure che anche $\sqrt[3]{\frac{1}{2} a_m b_m (a_m + b_m)}$ è un valore approssimato di $\psi(a, b)$; questo radicale è il limite, a cui si tende particolare da a_{m+1}, b_{m+1} con successive medie geometriche.

IV. — Definizione elementare dei logaritmi neperiani.

9. - La (9) serve a trovare i logaritmi dei numeri di qualunque sistema, basta perciò (per un noto teorema di algebra elementare) far variare la quantità q; il più naturale dei sistemi di logaritmi è quello corrispondente a $q=1$, la cui base indicherò provvisoriamente con z.

Teorema. — *I logaritmi corrispondenti a $q=1$ sono i logaritmi neperiani.*

Infatti poichè $\log_z \frac{a}{b} = \frac{a_0 - b_0}{\psi(a,b)}$, la (9) si può scrivere

$$\log_{10} \frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{q} \log_z \frac{a_0}{b_0},$$

ma d'altra parte

$$\log_{10} \frac{a_0}{b_0} = \log_{10} z \,.\, \log_z \frac{a_0}{b_0}$$

quindi

$$\frac{1}{q} = \log_{10} z; \quad q = \lim_{y=0} \frac{10^y - 1}{y} = \log_e 10$$

e perciò $z = e = 2{,}718\ldots$ base dei logaritmi neperiani come v. d.

Si possono quindi *definire elementarmente i logaritmi neperiani dall'uguaglianza*

$$(10) \qquad \log \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_0 - b_0}{\psi(a,b)}$$

e dedurne poi in modo assai semplice *il logaritmo neperiano di un numero p eguaglia $\lim_{y=0} \frac{p^y - 1}{y}$ e che la base dei logaritmi neperiani è $\lim_{y=0} (1+y)^{\frac{1}{y}}$.*

Esempio. — Trovare $\log_e 7$.

Nel nostro caso

$$\begin{array}{ll}
a_0 = 7 & b_0 = 1 \\
a = 4 & b = 2{,}645751 \\
a_1 = 3{,}3228755 & b_1 = 2{,}965046 \\
a_2 = 3{,}14396075 & b_2 = 3{,}0531931 \\
a_3 = 3{,}0985769 & b_3 = 3{,}0758 \\
a_4 = 3{,}087188 & b_4 = 3{,}08149
\end{array}$$

Per il secondo lemma $\psi(a,b)$ è compreso tra $\frac{1}{3}(a_4 + 2b_4)$ e $b_4 + \frac{1}{3}(b_4 - b_3)$, cioè il suo valore approssimato è 3,083389. Per la (10) si ha che $\log_e 7 = 1{,}9459101485\ldots$ e l'errore è minore di $6:10^{10}$; a questo risultato si giunge con la ricerca di sole quattro medie geometriche.

V. — Osservazioni e conclusione.

Ecco dunque dimostrato e generalizzato in più modi nelle (5), (6), (7) il teorema di Schwab *e col mezzo della sola funzione* $\psi(a, b)$ *espresse tutte le funzioni trascendenti elementari e definite elementarmente alcune* (funzioni iperboliche e logaritmi neperiani), *il cui vero significato manca nei testi elementari.* Questo fatto *di essere tutte queste funzioni esprimibili mediante una sola funzione a variabili reali* è un fatto capitale e credo nuovo; le loro molteplici relazioni sono facilmente dimostrabili col mezzo delle (3), (8), (9), (10); le loro proprietà si riducono tutte a proprietà della $\psi(a, b)$ con $a < b$ oppure con $a > b$: dimostrate queste proprietà per $a < b$ con la (3), per $a > b$ con le (9) ed (10) si possono, come avevamo promesso, *trovare le proprietà delle funzioni iperboliche mediante la* (8); *ammesse queste ultime come naturale estensione delle proprietà delle funzioni circolari si ottiene dalla* (11) *un nuovo metodo per trattare la teoria dei logaritmi.* Ma a tutto questo basta avere accennato, notando che queste proprietà di $\psi(a, b)$ possono riuscire preziose nei calcoli numerici di questo limite e cooperare col secondo lemma del § 1 per una sufficientemente rapida approssimazione. La $\psi(a, b)$ ha pure una notevole importanza pratica perchè offre *un mezzo completo ed elementarmente dimostrabile,* (il che fin ora, credo, mancava affatto) di calcolare le tavole trigonometriche e logaritmiche: specialmente le prime, quando si usino le tavole dei logaritmi.

Venezia, 10 ottobre 1897.

GUIDO FUBINI
studente nella R. Scuola Normale sup. di Pisa.

SUL SIGNIFICATO DI UNA NOTA ESPRESSIONE ARITMETICA

Nei diversi trattati che si adottano nelle scuole non è stato fino ad oggi ben definito il significato da darsi ad un'espressione della forma:

$$a : b : c : d\,; \tag{1}$$

è quindi naturale che alcuni insegnanti si attengano al primo, altri al secondo dei due possibili modi d'interpetrazione.

Questi due modi d'interpetrazione sono, com'è noto, i due seguenti:

$$a:b:c:d=[(a:b):c]:d, \tag{α}$$
$$a:b:c:d=a:[b:(c:d)]; \tag{β}$$

ed essendo alcuni abituati a dare all'espressione considerata il significato (α), altri il significato (β), ne nasce una deplorevole confusione nella scrittura e nell'interpetrazione delle formole.

Questa confusione può togliersi facendo uso costantemente delle parentesi, ma ciò non mi sembra nè bello nè utile dal momento che tutte le espressioni analoghe:

$$a+b+c+d,$$
$$a-b-c-d,$$
$$a\times b\times c\times d,$$

hanno un significato fisso e determinato senza bisogno di alcuna parentesi. Perchè la divisione dovrebbe fare eccezione?

Secondo il mio debole parere, sarebbe opportuno stabilire una volta per tutte il significato da darsi all'espressione (1) perchè in matematica, più che in ogni altra scienza, è necessario *uniformità e precisione* di scrittura e di linguaggio.

Io non pretendo di risolvere la questione, mi limito semplicemente ad esporre la mia opinione affinchè altri esponga la sua e si possa così togliere un'ambiguità dannosa sia alla scienza che alla didattica.

Se vogliamo intanto che la *dualità* esistente fra le 2 operazioni inverse di 1ª e 2ª specie (vedi mie *lezioni di Aritmetica teorica*, cap. V) non soffra in nessun caso eccezioni dovremo adottare l'interpetrazione (α) perchè per la sottrazione si ha:

$$a-b-c-d=([a-b]-c)-d,$$

quindi cambiando il segno — nel segno corrispondente dell'operazione correlativa, si ha:

$$a:b:c:d=([a:b]:c):d.$$

Inoltre, se osserviamo che:

$$a-b-c-d=a-(b+c+d),$$

se vogliamo che la dualità accennata sussista ancora, dovremo cambiare i segni $-$, $+$ nei segni delle due corrispondenti operazioni e avremo

$$a:b:c:d=a:(b\times c\times d),$$

e siccome per un noto teorema:

$$a:(bcd)=([a:b]:c):d;$$

siamo di nuovo condotti a dovere accettare l'interpetrazione (α).

Infine se ricordiamo che dividere per un numero significa moltiplicare per il suo inverso, avremo:

$$a:b:c:d=a\,.\,\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{d}\cdot=\frac{a}{bcd}$$

che ci conduce pure alla interpetrazione (α); mentre se si adottasse la 2ª interpetrazione l'applicazione del teorema citato all'espressione:

$$a : b : c : d,$$

ne farebbe mutare il significato.

È bene anche osservare che adottando la 1ª interpetrazione si può enunciare il correlativo del teorema sul valore dei polinomi algebrici, e cioè:

In un'espressione costituita di termini separati fra loro dai segni delle operazioni di 2ª specie, ($\times$:) [espressione monomia] *per avere il valore basta fare il quoziente del prodotto dei termini preceduti dal segno* $\times$ *e del prodotto dei termini preceduti dal segno* :

In favore della seconda interpetrazione si può dire che scrivendo l'espressione (1) col segno di divisione rappresentato da una linea orizzontale, si avrebbe:

$$\cfrac{a}{\cfrac{b}{\cfrac{c}{d}}}$$

e che quindi sarebbe logico anche dividere b per la frazione $\frac{c}{d}$ e poi dividere a per il resultato.

Ma si può rispondere che il segno di frazione ha un significato in questo caso indeterminato, perchè, per averlo determinato, bisognerebbe scrivere in uno dei modi seguenti:

$$\cfrac{a}{\cfrac{b}{\cfrac{c}{d}}} \qquad \frac{a}{\left[\dfrac{b}{\left(\dfrac{c}{a}\right)}\right]} \qquad \frac{\left[\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{c}\right]}{d} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{a}{b}}{c}}{d}$$

i quali conducono, come si vede, all'uno o all'altro dei due citati modi d'interpetrazione.

AROLDO MARTINI ZUCCAGNI.

Per una dimostrazione elementare

La dimostrazione data a pag. 140 del numero precedente (Sett.-Ott.) di questo Periodico è tutt'altro che elementare, relativamente a quella che si suol dare, e che sostanzialmente è questa.

In conseguenza delle (1) è identicamente

$$(x - x_1) \ldots (x - x_n) = (x - y_1) \ldots (c - y_n);$$

per cui i numeri $x_1, \dots, x_n$ debbono essere uguali ai numeri $y_1, \dots, y_n$ indipendentemente dall'ordine.

Questa semplicissima dimostrazione può certamente darsi in una teoria delle equazioni, dove si suppone conosciuto il calcolo letterale con la relativa teoria della scomposizione dei polinomii in fattori primi. Siccome però sono ancora parecchi i libri d'Algebra incompleti o poco rigorosi, così richiamerò le nozioni, che l'esposta dimostrazione presuppone, e delle quali si ha bisogno appena si principia il calcolo letterale, per poterne insegnare le prime operazioni con vero rigore, e senza ambiguità.

Osservo anzitutto che, se $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono numeri dati ed a_0 non è nullo,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

è diverso da zero per infiniti valori di x. È infatti sicuramente

$$|a_0x^n| > |a_1x^{n-1} + \dots + a_n|,$$

per cui è anche

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

se $|x|$ supera il maggiore dei due numeri

$$1, \ (|a_1| + \dots + |a_n|) : |a_0|.$$

Di qui segue che, se $b_0, b_1, \dots, b_n$ son numeri dati, dei quali potrebbe esser nullo anche b_0, e non sono tutte nulle le differenze $a_0 - b_0, a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n$, sono allora diversi per infiniti valori di x così i due polinomii

$$a_0x^n + \dots + a_n, \qquad b_0x^n + \dots + b_n$$

come pure i loro prodotti per $x - x_1$, x_1 essendo un qualsiasi numero dato.

Queste nozioni, che sono già necessarie per stabilire con precisione il significato di uguaglianza di due polinomii, bastano per giustificare l'esposta dimostrazione di poche parole, la quale, negli elementi d'Algebra, si potrebbe sviluppare così.

Il prodotto $(x - y_1)\dots(x - y_n)$, essendo uguale ad $(x - x_1)\dots(x - x_n)$, si deve annullare per $x = x_1$, e ciò esige che uno dei numeri $y_1, \dots y_n$ sia uguale ad x_1; sia p. es.:

$$y_1 = x_1.$$

Saranno uguali i due prodotti

$$(x - x_2)\dots(x = x_n), \qquad (x - y_2)\dots(x - y_n),$$

cioè saranno identici i due polinomii in x ad essi equivalenti, perchè, se non fossero tali, non sarebbero uguali neppure i loro prodotti per $x - x_1$, che sono invece uguali, essendo essi

$$(x - x_1)\dots(x - x_n), \qquad (x - y_1)\dots(x - y_n).$$

Essendo

$$(x - x_2)\dots(c - x_n) = (x - y_2)\dots(x - y_n),$$

deve essere x_2 eguale ad uno dei numeri $y_2, \dots, y_n$; se per es. è

$$x_2 = y_2,$$

deve ancor essere

$$(x-x_2)\dots(x-x_n)=(x-y_2)\dots(x-y_n).$$

Continuando, così concludesi appunto che i numeri $x_1, \dots, x_n$ debbono essere uguali ai numeri $y_1, \dots, y_n$ indipendentemente dall'ordine.

F. GIUDICE.

SOPRA UN NUOVO MODO DI DEFINIRE LE RADICI PRIMITIVE
di una congruenza

È noto che *le radici primitive relative al modulo* p, *o le radici primitive della congruenza*

$$x^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$$

sono quei numeri che appartengono, secondo il modulo p, *all'esponente* $p-1$; o in altri termini: a *è radice primitiva relativamente al modulo* p, *se per qualsivoglia valore* $\nu < p-1$, *è* a^ν *incongruo all'unità, secondo il modulo* p.

Orbene, è facile dare per queste radici una nuova definizione, che si può anche riguardare come un corollario di un notissimo teorema. Si ha infatti: (*)

Essendo p *primo, e* θ *un divisore di* $p-1$, *sieno* x_1 *e* ξ *due numeri compresi fra* θ *e* p; *se si ha*

$$x_1^\theta \equiv \xi \pmod{p},$$

si ha anche:

$$\xi^{\frac{p-1}{\theta}} \equiv 1 \pmod{p};$$

e reciprocamente, se si ha

$$\xi^{\frac{p-1}{\theta}} \equiv 1 \pmod{p},$$

la congruenza

$$x^\theta \equiv \xi \pmod{p}$$

ha θ *radici.*

Ora, l'ipotesi

$$x_1^\theta \equiv \xi \pmod{p}$$

equivale evidentemente a quest'altra

$$\xi = kp + x_1^\theta;$$

e il dire che la congruenza

$$x^\theta \equiv \xi \pmod{p}$$

(*) Vedi J. A. SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*. T. II, pag. 64.

ha θ radici, è lo stesso che dire che esistono θ numeri, tali che messi al posto di x, nella

$$\xi = kp + x^{\theta},$$

la soddisfano; dunque si ha questa nuova forma per il precedente

TEOREMA. — *La condizione necessaria e sufficiente affinchè si possa determinare un esponente* $\nu < p - 1$, *tale che la congruenza*

$$\xi^{\nu} \equiv 1 \pmod{p}$$

sia soddisfatta, è che sia possibile scomporre il numero ξ *nella somma* $kp + x^{\theta}$.

È evidente dopo ciò che ogni numero scomponibile nella somma $kp + x^{\theta}$ non potrà essere radice primitiva relativamente al modulo p; per conseguenza potremo dire che:

Un numero ξ *è radice primitiva relativamente al modulo* p, *se non è possibile la decomposizione*

$$\xi = kp + x^{\theta},$$

dove k *è un numero intero,* x *primo con* p, *e* θ *un divisore di* $p - 1$ *diverso dall'unità.*

Consideriamo per es. la congruenza

$$\xi^4 \equiv 1 \pmod{5}.$$

Essa ammette 4 radici, che sono i numeri 1, 2, 3, 4: di questi due soltanto appartengono all'esponente 4, ossia sono radici primitive: il 2 e il 3. In conseguenza sarà impossibile porre il 2 e il 3 sotto la forma

$$kp + x^{\theta};$$

e poichè si ha $\theta = 4$ oppure $\theta = 2$, sotto una delle forme

$$5k + x^4 \quad ; \quad 5k + x^2.$$

È facile verificarlo: infatti, essendo x primo con 5, sarà di una delle forme:

$$5n + 1, \quad 5n + 2, \quad 5n + 3, \quad 5n + 4.$$

Ma se supponiamo che x sia della 1ª forma o della 4ª, x^2 e x^4 saranno della forma $5n + 1$; e se supponiamo che x sia della 2ª forma o della 3ª, x^2 e x^4 saranno della forma $5n + 4$; dunque le due espressioni

$$5k + x^4 \quad \text{e} \quad 5k + x^2$$

sono impossibili pei numeri 2 e 3.

Resta poi ancora dimostrato che sotto tale forma possono mettersi i numeri 1 e 4, che non sono radici primitive.

Da ultimo si può osservare che, messo sotto la nuova forma, il teorema che ho ricordato, è suscettibile di una lieve estensione: infatti per poter determinare un esponente $\nu < p - 1$, tale che $\xi^{\nu} \equiv 1 \pmod{p}$, nel caso che $\frac{p-1}{\theta} =$ numero pari e k positivo, basta che sia, essendo $x > 0$, $\xi = kp - x^{\theta}$; e che dal teorema stesso segue ancora il

Corollario. — *Se θ è il più grande divisore di* $p-1$, *che soddisfa la relazione*

$$\xi = kp + x^{\theta},$$

nella quale x *è primo con* p, (p *primo e* k *un numero intero*), *sarà* $\frac{p-1}{\theta}$ = *al minimo valore di* ν *che soddisfa alla congruenza*

$$\xi^{\nu} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Genova, 25 Gennaio 1897.

G. Musso.

SULLE DEFINIZIONI DI EQUAZIONE E DI SISTEMA DI EQUAZIONI

1. Alcuni autori (1) danno la definizione seguente: *equazione è un'eguaglianza che non è verificata se non per certi valori delle lettere che si trovano nei termini dell'eguaglianza.* — Altri (2) danno quest'altra: *si chiama equazione un'eguaglianza la quale non è soddisfatta per qualunque valore delle lettere che in essa compariscono.*

Varie obiezioni possono esser mosse contro queste definizioni. Anzitutto si può osservare che non v'è regola generale per stabilire se una data eguaglianza sia soddisfatta soltanto da particolari valori delle lettere, o se non sia soddisfatta da tutti i valori delle lettere contenutevi; (3) e quindi, volendo seguire l'una o l'altra delle suddette definizioni, si urta contro la difficoltà di decidere se ad una data eguaglianza spetti il nome di equazione. Allorquando poi la difficoltà si sappia superare, il nome di equazione non potrebbe esser dato che in ultimo, quando cioè non vi sia alcun dubbio sulla specie dell'eguaglianza di cui si tratta. — D'altra parte, le suddette definizioni corrispondono esse nel modo il più esatto a ciò che in pratica s'intende ordinariamente colla parola equazione? Secondo le definizioni stesse, l'equazione apparisce come il contrapposto della identità, (4) ma se si va a sfogliare i nostri libri di testo si vedrà che quasi tutti gli autori conservano il nome di equazione anche all'eguaglianza identica. Così Arzelà, (5) discutendo la formula di risoluzione dell'equazione:

$$ax + b = a'x + b',$$

dice che se $a - a' = 0$, $b - b' = 0$, ogni valore che si possa pensare per la x soddisfa all'*equazione;* Amanzio (6) dice che se $= P\,0$, $Q = 0$, l'*equazione:*

$$Px = Q$$

(1) Bellacchi, *Lezioni ed esercizi d'algebra*, V. II, P. II, Firenze, Barbera 1891, pag. 2; Bertrand, *Traité d'algèbre*, Paris, Hachette 1879, V. I, pag. 81; Faifofer, *Algebra*, Venezia, tip. Emiliana 1895, pag. 109; Visalli e Mandes, *Algebra*, Livorno, Giusti 1893, pag. 164; Giuliani, *Algebra*, Torino, Loescher, pag. 29, ecc.

(2) Cuneo e Poggi, *Algebra*, Torino, Paravia 1895, pag. 96; Moreno, *Algebra*, Napoli, Pellerano 1887, pag. 116; Testi, *Corso di Matematiche*, VII, Livorno, Giusti, pag. 314; Garbieri, *Algebra*, Padova, Sacchetto 1896, pag. 106; Amanzio, *Algebra*, Napoli, Pellerano 1882, pag. 242; ecc.

(3) V. per es. Gazzaniga, *Libro d'aritmetica e d'algebra elementare*, Padova, Sacchetto 1896, pag. 220.

(4) Su questo punto insistono infatti quasi tutti gli autori. V. per es. Arzelà, *Algebra elementare*, Firenze, Le Monnier 1890, pag. 163; Testi, *o. c.* pag. 313; Faifofer, *o. c.* pag. 108; ecc.

(5) *o. c.* pag. 187.

(6) *o. c.* pag. 258.

si riduce alla identità $0 = 0$, e perciò essa stessa è un' identità; BERTRAND (¹) dice che l'*equazione*

$$ax + b = ax + b$$

è soddisfatta qualunque sia x; ecc. ecc. Insomma da tutti si adopera, anche nel caso considerato la parola *equazione* invece dell'altra *identità*, e ciò contrariamente alla definizione data. Egli è che, con ragione, si trova conveniente di dare alla parola equazione un senso più esteso di quello espresso dalle definizioni suddette. Si può infine aggiungere che, secondo la prima definizione, una eguaglianza come ad es. la seguente:

$$3x + 4 = 3x + 7$$

non potrebbe meritare il nome di equazione, giacchè essa non è verificata da nessun valore, mentre, secondo la definizione stessa, sembrerebbe necessario che, per meritare il nome di equazione, l'uguaglianza dovesse essere soddisfatta da un valore almeno. Limitandosi ai numeri reali, come fanno parecchi autori, neppure si potrebbe chiamare equazione, secondo la prima definizione, un' eguaglianza della forma $x^{2n} = a$, dove a è un numero negativo, appunto perchè anche questa uguaglianza non sarebbe soddisfatta da nessun valore. Tuttavia, gli autori che seguono la prima definizione, conservano anche in questi casi il nome di equazione. P. es. FAIFOFER (²) dice che se $a = a'$, $b \gtrless b'$, l'*equazione*:

$$ax + b = a'x + b'$$

non ammette nessuna soluzione. Lo stesso autore, (³) considerando l'equazione di 2.° grado:

$$x^2 + px + q = 0,$$

dice che se $p^2 - 4q < 0$, l'*equazione* non ha soluzioni. (⁴)

2. È bene quindi di vedere come deve esser posta la definizione di equazione, se si vuole che contro di essa non si possano muovere le obiezioni suddette, o altre che sieno. A me pare che si potrebbe, a tal uopo, procedere nell' insegnamento come segue.

Con opportuni esempi, si comincierà col fare osservare che, date due espressioni algebriche qualisivogliano, (⁵) possono darsi i casi seguenti: 1° esse assumono valori uguali soltanto per alcuni valori delle lettere; (⁶) 2° assumono valori disuguali per tutti i valori delle lettere; 3° assumono valori uguali per tutti i valori delle lettere. — Si dirà poi che, nell'intento di scoprire quale di questi tre casi abbia luogo quando sono date due espressioni algebriche qualisivogliano, si comincia col frapporre a queste il segno $=$, chiamando *equazione* la scrittura che si ottiene. Cosicchè si potrebbe dare la definizione che segue:

(¹) *o. c.* VI, pag. 153.

(²) *o. c.* pag. 133.

(³) *o. c.* pag. 299.

(⁴) V. anche VISALLI e MANDES, *o. c.* pag. 173; BERTRAND, *o. c.* pag. 153; BELLACCHI, *o. c.* pag. 16.

(⁵) Le due espressioni potrebbero anche essere l'una *aritmetica* e l'altra *algebrica*. — Sul senso dato qui alle *espressioni aritmetiche* e *algebriche* e ai *valori* delle medesime, si legga GAZZANIGA, *o. c.* pag. 191, 192.

(⁶) In quanto all'eguaglianza, o meno, delle due espressioni algebriche per il caso in cui per qualche valore delle lettere esse assumono valori infiniti, si vegga quanto ottimamente dice in proposito AMANZIO, *o. c.* pag. 385 e seg.

Equazione è l'eguaglianza POSTA *tra due espressioni algebriche nell'intento di scoprire se esistono o no valori delle lettere per i quali le due espressioni algebriche acquistano valori uguali e di trovare tutti i detti valori nel caso che esistano.* (1)

3. Passando ai sistemi di equazioni, trovo che alcuni autori (2) pongono la definizione: *si chiama sistema di equazioni un insieme di equazioni che debbono essere soddisfatte dai medesimi valori delle incognite;* mentre altri (3) danno l'altra poco differente: *si dice sistema di equazioni un insieme di equazioni che sono soddisfatte dagli stessi valori delle incognite.*

Contro queste definizioni possono pure essere mosse alcune obiezioni. Anzitutto si può osservare che anche qui si urta contro la difficoltà di decidere se ad un insieme di equazioni spetti il nome di *sistema.* Quando poi questa difficoltà si sappia superare, il nome di sistema non potrebbe esser dato che in ultimo. Inoltre le dette definizioni non corrispondono esattamente a ciò che in pratica s'intende ordinariamente per *sistema* di equazioni. Seguendo le definizioni stesse, sembrerebbe che il nome di sistema non si potesse dare ai complessi di equazioni che non sono soddisfatte dagli stessi valori delle incognite, per es. al complesso:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 3x + 4y = 7\,; \end{cases}$$

tuttavia tutti gli autori citati chiamano sistemi anche i complessi di equazioni incompatibili. Così AMANZIO, (4) considerando il complesso delle due equazioni:

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ a'x + b'y &= k' \end{aligned}$$

nell'ipotesi $ab' - a'b = 0$, dice: in questo caso dunque si deve concludere che il dato *sistema* non ammette soluzione. (5) GAZZANIGA, (6) scostandosi un po' dagli altri autori, contempla dapprima il caso di due equazioni con due incognite e dice che esse costituiscono un sistema *se fra le soluzioni dell'una vi sono anche soluzioni dell'altra; e se vi sono inoltre soluzioni dell'una che non sono anche soluzioni dell'altra equazione.* Con ciò sono esclusi tanto i sistemi impossibili, come quelli indeterminati. Benchè l'A. si attenga poi scrupolosamente alla definizione posta, io non credo che sia conveniente in pratica di seguirlo in questa definizione più ristretta. Anche in geometria analitica, per esempio, la parola *sistema* ha un significato più largo di quello attribuitole da GAZZANIGA.

4. A me pare che si potrebbe procedere nell'insegnamento come segue. — Con opportuni esempi si comincierà col fare osservare che, date più equazioni con più incognite, sono possibili i seguenti casi: 1° che le equazioni abbiano soltanto alcune soluzioni comuni; 2° che non abbiano nessuna soluzione comune; 3° che abbiano infinite soluzioni comuni. Si potrà quindi dare la seguente definizione:

---

(1) AMANZIO, *o. c.* pag. 291; CUNEO e POGGI, *o. c.* pag. 136; FAIFOFER, *o. c.* pag. 163; TESTI, *o. c.* pag. 371; GARBIERI, *o. c.* pag. 146; MORENO, *o. c.* pag. 118; BERTRAND, *o. c.* pag. 97; ecc.

(2) BELLACCHI, *o. c.* pag. 67; VISALLI e MANDES, *o. c.* pag. 204; ecc.

(3) Questa mia noterella era preparata fin dall'agosto 1896. Nel frattempo, l'egregio mio amico prof. GAZZANIGA, pubblicando la 2ª edizione del suo ottimo *libro di Aritmetica e di Algebra,* tenne conto delle idee che esprimo in questa nota, idee che avevo sottoposto al suo autorevole parere.

(4) *o. c.* pag. 304.

(5) Si vegga anche FAIFOFER, *o. c.* pag. 181; TESTI, *o. c.* pag. 396; VISALLI e MANDES, *o. c.* pagina 213; ecc.

(6) *o. c.* pag. 249 e seg.

Chiamasi sistema di equazioni un complesso di equazioni che si considerano contemporaneamente nell'intento di scoprire se esse hanno o no delle soluzioni comuni, e di trovare tutte queste soluzioni nel caso che esistono.

5. Quanto si è detto relativamente alle equazioni e ai sistemi di equazioni può estendersi alle *inequazioni* e ai *sistemi di inequazioni*. Testi [1] chiama inequazione *(disuguaglianza problematica) una disuguaglianza che sia soddisfatta soltanto quando ai simboli si danno valori maggiori o minori di certi determinati numeri.* — Visalli e Mandes [2] dicono che *inequazione è un' ineguaglianza che non è verificata per tutti i valori delle lettere che contiene.*

Contro queste definizioni si possono muovere le solite obbiezioni, e quindi mi sembra conveniente, anche per seguire una via analoga a quella indicata per le equazioni, di procedere come segue.

Per mezzo di esempi, si comincierà col fare osservare che date due espressioni algebriche qualisivogliano, può darsi che la prima di esse assuma un valore maggiore o minore di quello che assume la seconda: 1° soltanto per particolari valori delle lettere; 2° per nessun valore delle lettere; 3° per tutti i valori delle lettere. Si dirà poi che, nell' intento di scoprire quale di questi tre casi abbia luogo quando sono date due espressioni algebriche qualisivogliano, si comincia col frapporre a queste il segno $>$ o $<$, chiamando *inequazione* la scrittura che si ottiene. Cosicchè si potrà dare la definizione che segue:

Inequazione è una disuguaglianza posta *tra due espressioni algebriche nell'intento di scoprire se esistono o no valori delle lettere per i quali una delle due espressioni algebriche acquisti un valore maggiore o minore di quello che assume l'altra, e di trovare tutti i detti valori nel caso che esistono.*

Osservazioni analoghe alle precedenti possono essere fatte pei sistemi d' inequazioni.

Fermo, agosto 1896.

Corrado Ciamberlini.

UN TEOREMA SUL TRIANGOLO [3]

In ogni triangolo, il rettangolo di un'altezza e del segmento che va dall'ortocentro al lato corrispondente a quella, è equivalente al rettangolo delle projezioni degli altri due lati sul primo.

Sia ABC un triangolo qualunque; dalla figura risulta che l'angolo B è considerato nei tre casi $B \lesseqgtr 90°$; sia H l'ortocentro del triangolo e sia D il piede

(1) *o. c.* pag. 182.
(2) *o. c.* pag. 245.
(3) *Journ. de Mathématiques élémentaires* par H. Vuibert, ann. 21, n. 7.

dell'altezza partente da B. Osservando allora che i due triangoli AHD, BDC sono simili, si ha

$$\frac{\mathrm{HD}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}},$$

da cui

$$\overline{\mathrm{HD}\,.\,\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{DC}\,.\,\mathrm{AD}}.$$

Siccome si può ripetere la cosa per gli altri due lati del triangolo ABC il teorema è dimostrato.

Applicazione I. — Indichiamo gli elementi relativi all'altezza con $h_a, h''_a,\ldots$ e quelli relativi al lato con $a_1, a_2,\ldots$ Dal teorema dimostrato si ha

$$h_a h''_a = a_1 a_2,$$

da cui

$$a_1^2 + a_2^2 + 2h_a h_a'' = a^2,$$

essendo d'altra parte

$$h_b'^2 - h_a''^2 = a_1^2 \quad , \quad h_c'^2 - h_a''^2 = a_2^2 \quad , \quad (h_a' = h_a - h_a'')$$

sostituendo questi valori di a_1^2, a_2^2 nella precedente si ottiene

$$2h_a' h_a'' + h_c'^2 + h_b'^2 = a^2,$$

ed analogamente si trovano le altre eguaglianze

$$2h_b' h_b'' + h_c'^2 + h_a'^2 = b^2$$
$$2h_c' h_c'' + h_a'^2 + h_b'^2 = c^2.$$

Da queste si ha

(1) $$2\,[h_a' h_a'' + h_b' h_b'' + h_c' h_c'' + h_a'^2 + h_b'^2 + h_c'^2] = a^2 + b^2 + c^2.$$

È noto ora, essendo H'H'' incognito, che

$$h_a' h_a'' = h_b' h_b'' = h_c' h_c'' = \mathrm{H'H''};$$

ed è noto ancora che

$$a^2 + h_a'^2 = b^2 + h'^2_b = c^2 + h_c'^2 = 4\mathrm{R}^2;$$

e combinando queste due ultime formole colla (1), si ha

$$2\,(\mathrm{H'H''} + 4\mathrm{R}^2) = (a^2 + b^2 + c^2);$$

da cui si ha la formola

$$h_a' h_a'' = h_b' h_b'' = h_c' h_c'' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 4\mathrm{R}^2.$$

II. — Indicando con x, y, z le coniugate isogonali delle altezze di un triangolo, si ha

$$\frac{x + y + z}{4\mathrm{RS}} = \frac{1}{a\,(h_a + h_a')} + \frac{1}{b\,(h_b + h_b'')} + \frac{1}{c\,(h_c + h_c'')}$$

È noto il seguente teorema di Steiner: se due coniugate isogonali AM, AN dell'angolo BAC del triangolo ABC, incontrano il lato opposto BC in M ed in N, si ha la relazione

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 : \overline{\mathrm{AN}}^2 = \overline{\mathrm{BM}\,.\,\mathrm{MC}} : \overline{\mathrm{BN}\,.\,\mathrm{NC}}.$$

Osservando allora che la coniugata isogonale dell'altezza passa per il centro del cerchio circoscritto al triangolo, applicando il teorema ora enunciato, si ha

$$\frac{h^2}{x^2} = \frac{h_a h_a''}{\mathrm{BN}\,.\,\mathrm{NC}} = \frac{h_a h_a''}{x\,(2\mathrm{R} - x)},$$

da cui

$$x = \frac{2Rh_a}{h_a + h_a'} = \frac{bc}{h_a + h_a'},$$

epperò

$$x = \frac{abc}{a(h_a + h_a'')} = \frac{4RS}{a(h_a + h_a')}.$$

Analogamente operando per y e z si ha la formola enunciata.

III. — Indicando con D, E, F rispettivamente i piedi delle altezze h_a, h_b, h_c di un triangolo acutangolo ABC (è facile stabilire le considerazioni analoghe per gli altri casi), si ha la formola

$$\frac{c^2 . DC + b^2 . BD}{h_a + h_a''} = \frac{a^2 . EA + c^2 . CE}{h_b + h_b''} = \frac{b^2 . FB + a^2 . AF}{h_c + h_c''} = S.$$

Dal teorema di Stewart si ha

$$\overline{AB}^2 . DC + \overline{AC}^2 . BD = BC(\overline{AD}^2 + BD . DC),$$

ossia

$$c^2 . DC + b^2 . BD = S(h_a + h_a'').$$

Analogamente si deducono le altre parti della formola enunciata.

IV. — Colle notazioni precedenti si ha in generale

$$\frac{BD . FC}{DC . BE} = \frac{c}{b}.$$

Applicando il teorema di Stewart al triangolo ABC, si ha

$$BC . AD^2 - BD . AC^2 - DC . AB^2 + BC . BD . DC = 0.$$

Applicando lo stesso teorema al triangolo BHC (H è l'ortocentro del triangolo ABC), si ha

$$BC . \overline{HD}^2 - BD . \overline{HC}^2 - DC . \overline{HB}^2 + BC . BD . DC = 0,$$

Sommando ora queste due formole si ha l'altra

$$BC(\overline{AD}^2 + \overline{HD}^2) - BD(\overline{AC}^2 + \overline{HC}^2) - DC(\overline{AB}^2 + \overline{HB}^2) + 2BC . BD . DC = 0,$$

e tenendo conto che si ha pure

$$\overline{AD}^2 + \overline{HD}^2 = \overline{HA}^2 + 2AD . HD,$$
$$\overline{AC}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{AH}^2 + 2AC . FC,$$
$$\overline{AB}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{HA}^2 + 2AB . BE,$$

la precedente diviene

$$\overline{HA}^2(BC - BD - DC) + 2BC(AD . HD - BD . DC) + 2(DC . AB . BE - BD . CA . FC) = 0,$$

ma

$$BC - BD - DC = 0, \quad AD . HD - BD . DC = 0,$$

epperò la precedente diviene la formola enunciata.

V. Dal teorema enunciato in principio risulta ancora: Costruendo sui lati di un triangolo ABC i tre triangoli simmetrici A'BC, B'AC, C'BA, il cerchio circoscritto al triangolo ABC taglia le AA', BB', CC' rispettivamente negli ortocentri di questi triangoli; e le circonferenze a queste circoscritte si tagliano nell'ortocentro del triangolo fondamentale ABC.

Guagnano (Lecce). Dott. G. Candido.

SOLUZIONE DELLE QUISTIONI
291 292* 295* 324* 359* 372* 373* 374* 376* 377* E 378

---

291. 1°. *Se per un punto M del piano di un triangolo si tracciano delle parallele ai lati e si costruiscono i coniugati armonici di M rispetto ai segmenti intercetti dai lati su queste parallele, i tre punti così determinati sono in linea retta.*

2°. *Le rette ottenute colla costruzione precedente per un punto ed i suoi isobarici, o per i tre punti semireciproci di un punto dato, formano un triangolo che è triplamente omologico a quello fondamentale.*

JUAN I. DURÁN LORIGA.

Risoluzione e generalizzazione del sig. prof. F. Ferrari.

1°. Si tirino dal punto M tre rette qualunque MX, MX′, MX″ ad incontrare rispettivamente i lati a, b, c (o i loro prolungamenti) del triangolo fondamentale ABC nei punti X, X′, X″, e sieno Q, Q′, Q″ rispettivamente i coniugati armonici di M rispetto ai segmenti delle rette MX, MX′, MX″ intercetti dalle coppie di lati (b, c), (c, a), (a, b) rispettivamente. La condizione necessaria e sufficiente perchè Q, Q′, Q″ sieno in linea retta è che sieno in linea retta i punti X, X′, X″.

Ponendo $\frac{BX}{CX} = m$, le coordinate baricentriche di X rispetto ad ABC sono $(o, 1, m)$, e ponendo dunque in coordinate baricentriche M $(\alpha', \beta', \gamma')$, Q (α, β, γ), poichè M, Q, X sono in linea retta, sarà

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ o & 1 & m \end{vmatrix} = o, \tag{1}$$

Chiamando Y, Z i punti ove MX sega rispettivamente b, c; ed M_a, Q_a le proiezioni di M, Q su a da A, si ha inoltre

$$(ZYMQ) = (BCM_aQ_a) = -1$$

donde

$$\frac{BQ_a}{Q_aC} = -\frac{BM_a}{M_aC}, \tag{2}$$

ossia

$$\frac{\gamma}{\beta} = -\frac{\gamma'}{\beta'}$$

Dalle (1), (2) si ottengono le coordinate di Q, e cioè

$$\alpha : \beta : \gamma = \alpha'(m\beta' + \gamma') : \beta'(m\beta' - \gamma') : -\gamma'(m\beta' - \gamma').$$

Le coordinate di Q′, Q″, ponendo

$$\frac{CX'}{X'A} = m' \quad , \quad \frac{AX''}{X''B} = m'' ,$$

si avranno evidentemente da quelle di Q, mutando m in m' o in m'', e permutando circolarmente fra α', β', γ' e fra α, β, γ; si avrà dunque per Q′

$$\beta : \gamma : \alpha = \beta'(m'\gamma' + \alpha') : \gamma'(m'\gamma' - \alpha') : -\alpha'(m'\gamma' - \alpha')$$

per Q''
$$\gamma : \alpha : \beta = \gamma'(m''\alpha' + \beta') : \alpha'(m''\alpha' - \beta') : - \beta'(m''\alpha' - \beta').$$

La condizione perchè Q, Q', Q'' sieno in linea retta è quindi

$$\begin{vmatrix} \alpha'(m\beta' + \gamma') & \beta'(m\beta' - \gamma') & -\gamma'(m\beta' - \gamma') \\ -\alpha'(m'\gamma' - \alpha') & \beta'(m'\gamma' - \alpha') & \gamma'(m'\gamma' - \alpha') \\ \alpha'(m''\alpha' - \beta' & -\beta'(m''\alpha' - \beta') & \gamma'(m''\alpha' + \beta') \end{vmatrix} = o$$

Il determinante è eguale a
$$4\,\alpha'^2\,\beta'^2\,\gamma'^2\,(m\,m'\,m'' + 1);$$
onde la condizione predetta ritenendo che M non sia sul perimetro di ABC (cioè che nessuna delle α', β', γ' sia zero), nel quale caso evidentemente le Q, Q', Q'' sono sempre in linea retta, perchè due di esse coincidono con M, si riduce alla

(3) $$m\,m'\,m'' = -1,$$

cioè X, X', X'' in linea retta.

2°. Sieno ora $P(\beta', \gamma', \alpha')$, $S(\gamma', \alpha'\,\beta')$ i due punti isobarici di M. Da P si tirino tre rette a dividere a, b, c rispettivamente nei rapporti m', m'', m, e da S tre rette a dividere a, b, c rispettivamente nei rapporti m'', m, m', e si costruiscano rispetto a P e ad S le due terne di punti
$$(Q_1, Q'_1, Q''_1),\ (Q_2, Q'_2, Q''_2)$$
analoghe alla terna (Q, Q', Q'').

Permutando circolarmente fra m, m', m'' e fra α', β, γ', dalle coordinate di Q si dedurranno quelle di Q_1 e Q_2, dalle coordinate di Q' quelle di Q'_1 e Q'_2, dalle coordinate di Q'' quelle di Q''_1 e Q''_2. Fatto ciò, si trova che i punti (Q, Q''_1, Q'_2) sono fra loro isobarici, come pure i punti (Q', Q_1, Q''_2), e i punti (Q'', Q'_1, Q_2), e perciò le rette QQ', Q'_1Q_1, $Q'_2Q''_2$, ossia, nell'ipotesi (3), le rette $QQ'Q''$, $Q''_1Q_1Q'_1$, $Q'_2Q''_2Q_2$ si incontrano in tre punti fra loro isobarici, che quindi formano un triangolo triplamente omologico ad ABC.

Tre punti semireciproci di un punto dato sono fra loro isobarici; onde questo caso rientra nel precedente.

Si noti che, indipendentemente dall'ipotesi (3), i triangoli (Q, Q''_1, Q'_2), (Q', Q_1, Q''_2), (Q'', Q'_1, Q_2) e i trilateri $(QQ', Q''_1Q_1, Q'_2Q''_2)$, $(QQ'', Q''_1Q'_1, Q'_2Q_2)$, $(Q'Q'', Q_1Q'_1, Q''_2Q_2)$ sono tutti triplamente omologici con ABC, siccome aventi per vertici terne di punti isobarici.

292*. *Mostrare che le radici dell'equazione quadratica*
$$(1 - \lambda)\,x^2 - \left[a + a' - \lambda\,(b + b')\right]x + aa' - \lambda bb' = 0,$$
ove a, b, a', b', λ *sono numeri reali, sono sempre reali e distinte se è*
$$\lambda(a - b)\,(a' - b') > 0; \quad \textit{e se è} \quad \lambda(a - b)\,(a' - b') < 0,$$
dette radici possono essere reali e distinte, reali ed eguali, o immaginarie coniugate.

A. Del Re.

Risoluzione del sig. Guido Bordi alunno del R. Istituto Tecnico di Piacenza.

Calcolo il discriminante dell'equazione quadratica proposta:

$$D = \left[a + a' - \lambda(b + b')\right]^2 + 4(\lambda - 1)\,(aa' - \lambda bb'),$$
$$D = (a + a')^2 + \lambda^2\,(b + b')^2 - 2\lambda(a + a')(b + b') + 4\lambda aa' - 4\lambda^2 bb' - 4aa' + 4\lambda bb'$$
$$D = a^2 + a'^2 + 2aa' + \lambda^2 b^2 + \lambda^2 b'^2 + 2\lambda^2 bb' - 2\lambda ab - 2\lambda ab' - 2\lambda a'b - 2\lambda a'b' +$$
$$+ 4\lambda aa' - 4\lambda^2 bb' - 4aa' + 4\lambda bb',$$

$$D = a^2 + \lambda^2 b^2 - 2\lambda ab + a'^2 + \lambda^2 b'^2 - 2\lambda a'b' - 2aa' - 2\lambda ab' - 2\lambda a'b - 2\lambda^2 bb' + + 4\lambda aa' + 4\lambda bb',$$

$$D = (a - \lambda b)^2 + (a' - \lambda b')^2 - 2aa' - 2\lambda bb' + 2\lambda ab' + 2\lambda a'b' + 4\lambda aa' + 4\lambda bb' - - 4\lambda ab' - 4\lambda a'b,$$

$$D = (a - \lambda b)^2 + (a' - \lambda b')^2 - 2[aa' + \lambda^2 bb' - \lambda ab' - \lambda a'b] + 4\lambda [aa' + bb' - - ab' - a'b],$$

$$D = (a - \lambda b)^2 + (a' - \lambda b')^2 - 2\left[a(a' - \lambda b') - \lambda b(a' - \lambda b')\right] + 4\lambda\left[a(a' - b') - - b(a' - b')\right],$$

$$D = (a - \lambda b)^2 + (a' - \lambda b')^2 - 2(a - \lambda b)(a' - \lambda b') + 4\lambda(a - b)(a' - b'),$$

$$D = \left[(a - \lambda b) - (a' - \lambda b')\right]^2 + 4\lambda(a - b)(a' - b'),$$

$$D = \left[a - a' - \lambda(b - b')\right]^2 + 4\lambda(a - b)(a' - b').$$

Ora il primo termine essendo un quadrato è positivo, quindi per

$$\lambda(a - b)(a' - b') \geqq 0$$

le radici sono reali e distinte, perchè $D > 0$.

Se $\lambda(a - b)(a' - b') < 0$, si possono considerare tre casi: che il primo termine superi il secondo in valore assoluto, e allora le radici sono reali e distinte, perchè $D > 0$; che il primo termine sia eguale al secondo in valore assoluto, allora $D = 0$, e quindi le radici sono reali ed uguali; in fine che il primo termine sia minore del secondo, e in questo caso, essendo $D < 0$, le radici sono immaginarie coniugate.

295*. *Di un triangolo isoscele sono dati il perimetro* 2p *e l'altezza* h, *determinare i lati e gli angoli del triangolo.*

Condizione di possibilità del problema e caso in cui il triangolo è equilatero.

BELLACCHI.

Risoluzione del sig. Emanuele Palumbo Todaro, studente della R. Università di Palermo.

Indicando con x e y rispettivamente il lato e la base del triangolo isoscele, le equazioni per mezzo delle quali si risolve il problema sono:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 2x + y = 2p \\ (2) & 4h^2 + y^2 = 4x^2 \end{array}\right\}$$

Risolvendo la (1) rispetto ad y, e sostituendo il valore di questo nella (2) si ha riducendo

$$h^2 + p^2 = 2px$$

da cui

$$x = \frac{h^2 + p^2}{2p}.$$

Sostituendo poi questo valore nella (1) e risolvendo rispetto ad y otteniamo:

$$y = 2p - \frac{h^2 + p^2}{p} = \frac{p^2 - h^2}{p}.$$

Denotando ora con α uno degli angoli alla base, risulta evidente la seguente relazione

$$\text{sen } \alpha = \frac{2ph}{h^2 + p^2};$$

e chiamando β l'angolo al vertice si ha:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{y}{x}\operatorname{sen}\alpha = \frac{4ph(p^2-h^2)}{(h^2+p^2)^2}.$$

Discussione. — Dalle formole trovate emerge che la condizione di possibilità del problema è che $p^2 - h^2$ sia maggiore di zero, cioè che p sia maggiore di h.

Affinchè il triangolo sia equilatero deve essere $3x^2 = 4h^2$ ossia $p = h\sqrt{3}$ essendo in questo caso $x = \frac{2p}{3}$.

324*. *Mostrare come, risolvendo rispetto ad* u, v, w *le equazioni*

$$\begin{cases} u' = \dfrac{\lambda(-u^2+v^2+w^2) - 2(\mu v + \nu w)u}{u^2+v^2+w^2-2\lambda u - 2\mu v - 2\nu w} \\ v' = \dfrac{\mu(u^2-v^2+w^2) - 2(\nu w + \lambda u)v}{u^2+v^2+w^2-2\lambda u - 2\mu v - 2\nu w} \\ w' = \dfrac{\nu(u^2+v^2-w^2) - 2(\lambda u + \mu v)w}{u^2+v^2+w^2-2\lambda u - 2\mu v - 2\nu w}, \end{cases}$$

si hanno, posto $\qquad \mathrm{H} = \sqrt{u'^2+v'^2+w'^2},$

ed $\qquad \mathrm{K} = \sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2},$

le formole

$$\begin{cases} u = \dfrac{\mathrm{H}\lambda \pm \mathrm{K}u'}{\mathrm{H} \pm \mathrm{K}} \\ v = \dfrac{\mathrm{H}\mu \pm \mathrm{K}v'}{\mathrm{H} \pm \mathrm{K}} \\ w = \dfrac{\mathrm{H}\nu \pm \mathrm{K}w'}{\mathrm{H} \pm \mathrm{K}} \end{cases}$$

Risoluzione del sig. Francesco Barbagallo alunno del R. Istituto Tecnico di Catania.

Aggiungendo e sottraendo $2\lambda u^2$, $2\mu v^2$, $2\nu w$, rispettivamente ai numeratori delle frazioni che sono per ipotesi eguali a u', v', w' rispettivamente, si ha, facendo

$$u^2+v^2+w^2 = x, \qquad 2(\lambda u + \mu v + \nu w) = y,$$

$$\begin{cases} u' = \dfrac{\lambda x - yu}{x-y} \\ v' = \dfrac{\mu v - yv}{x-y} \\ w' = \dfrac{\nu x - yw}{x-y}; \end{cases}$$

donde
$$(1)\begin{cases} u(x-y) = \lambda x - yu \\ v'(x-y) = \mu x - yw \\ w'(x-y) = \nu x - yu \end{cases}$$

cioè
$$\begin{cases} x(u'-\lambda) = y(u'-u) \\ x(v'-\mu) = y(v'-v) \\ x(w'-\nu) = y(w'-w), \end{cases}$$

per cui
$$(2)\ \frac{u'-\lambda}{u'-u} = \frac{v'-\mu}{v'-v} = \frac{w'-\nu}{w'-w} = \frac{y}{x}.$$

Dalle (1) ora si ha

$$\begin{cases} u'^2 (x-y)^2 = \lambda^2 x^2 + y^2 u^2 - 2\lambda uxy \\ v'^2 (x-y)^2 = \mu^2 x^2 + y^2 v^2 - 2\mu vxy \\ w'^2 (x-y)^2 = \nu^2 x^2 + y^2 w^2 - 2\nu wxy; \end{cases}$$

sommando membro a membro e facendo

$$H^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2; \quad K^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,$$

si ha
$$H^2 (x-y)^2 = K^2 x^2;$$
ed allora
$$Hx - Hy \pm Kx = o,$$
ovvero
$$(H \pm K)\, x = Hy,$$
donde
$$\frac{H \pm K}{H} = \frac{y}{x}.$$

Dalle (2) si ricava

$$\frac{u'-\lambda}{u'-u} = \frac{v'-\mu}{v'-v} = \frac{w'-\nu}{w'-w} = \frac{H \pm K}{H},$$

ovvero

$$\begin{cases} (u'-\lambda)\, H = (H \pm K)(u'-u) \\ (v'-\mu)\, H = (H \pm K)(v'-v) \\ (w'-\nu)\, H = (H \pm K)(w'-w); \end{cases}$$

cioè eseguendo le moltiplicazioni, eliminando i termini simili e raccogliendo a fattor comune si ha:

$$\begin{cases} u\,(H \pm K) = \lambda H \pm u'K \\ v\,(H \pm K) = \mu H \pm v'K \\ w\,(H \pm K) = \nu H \pm u'K \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} u = \dfrac{\lambda H \pm uK}{H \pm K} \\ v = \dfrac{\mu H \pm v'K}{H \pm K} \\ w = \dfrac{\nu H \pm w\,K}{H \pm K} \end{cases}$$

359*. *In un triangolo qualunque ciascuna bisettrice è divisa dal centro del circolo inscritto in due parti, che stanno fra loro come la somma dei lati che comprendono l'angolo bisecato sta al terzo lato.*

CARDOSO LAYNES.

Risoluzione del sig. Michele Bello alunno dell'Istituto Tecnico di Bari.

Siano ABC il triangolo, ED e AE due bisettrici ed O il centro del circolo inscritto. Essendo BD bisettrice di $\widehat{B}$ si ha: AB : BC :: AD : DC, e componendo,

(1) $$AB + BC : AB :: AC : AD.$$

Essendo AO bisettrice di $\widehat{A}$ si ha pure, BO : AB :: OD : AD, e paragonandola con la (1) risulta: BO : OD :: AB + BC : AC, *c, d, d.*

372*. *La sesta potenza di qualunque numero intero è congrua a* 0 *o ad* **1** *rispetto al mod.* 9.

Risoluzione del sig. Eugenio Strocchi.

Ogni intero x o è primo con 9 od ha la forma $3y$.

In quest'ultimo caso è evidente che si ha

$$(3y)^6 \equiv 0 \pmod{9}.$$

Nel 1° caso poi, pel teor. di Fermat generalizzato, si ha

$$x^{\varphi(9)} \equiv 1 \pmod{9} \quad \text{ossia} \quad x^6 \equiv 1 \pmod{9}.$$

373*. *La terza potenza di ogni numero intero è congrua a* 0 *o a* ± 1 *o a* ± 5 *rispetto al mod.* 13.

374*. *La sesta potenza di ogni numero intero è congrua a* 0 *o a* ± 1 *rispetto al mod.* 13.

BONOLIS.

Risoluzione del sig. Eugenio Strocchi.

Premettiamo che, essendo p un numero primo, da

$$a^2 \equiv b^2 \pmod{p} \quad \text{si ricava} \quad a \equiv \pm b \pmod{p}.$$

Infatti, essendo $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, p dovrà dividere o $a+b$ o $a-b$.

Osserviamo ora che ogni intero x o è divisibile per 13 o è primo con 13. — Nel primo caso, qualunque sia k, si ha

$$x^k \equiv 0 \pmod{13}.$$

Supponendo poi che x sia primo con 13, pel teor. di Fermat si ha

$$x^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

da cui, per quanto si è premesso,

$$x^6 \equiv \pm 1 \pmod{13}. \tag{1}$$

Resta così dimostrata la 2ª questione.

Dalla prima delle congruenze (1), per ciò che abbiamo premesso si ha pure:

$$x^3 \equiv \pm 1 \pmod{13}.$$

Dalla seconda delle congruenze (1) si ha evidentemente

$$x^6 \equiv 25 \pmod{13},$$

da cui

$$x^3 \equiv \pm 5 \pmod{13}.$$

Resta dunque dimostrata la 1ª questione.

376*. *Se si ha* $N \equiv 6 \pmod{15}$, *qualunque potenza di* N *sarà congrua a* 6, (mod. 15).

377*. *Se si ha* $N \equiv 10 \pmod{15}$, *qualunque potenza di* N *sarà congrua a* 10, (mod. 15).

BONOLIS.

Risoluzione del sig. Eugenio Strocchi.

Si ha

$$6 \equiv 1 \pmod{5}, \qquad 10 \equiv 1 \pmod{3};$$

e qualunque sia p si ricava

$$6^{p-1} \equiv 1 \pmod{5}, \qquad 10^{p-1} \equiv 1 \pmod{3};$$

da cui si ha facilmente

$$6^p \equiv 6 \pmod{15}, \qquad 10^p \equiv 10 \pmod{15}.$$

E siccome dall'ipotesi si ricava

$$N^p \equiv 6^p \ (\text{mod. } 15), \qquad N^p \equiv 10^p \ (\text{mod. } 15),$$

si ha infine

$$N^p \equiv 6 \ (\text{mod. } 15), \qquad N^p \equiv 10 \ (\text{mod. } 15).$$

378. *Dimostrare le identità*

$$(1) \quad \operatorname{sen}(nx) = \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & 0 & 0 \ldots. & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 \ldots. & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & 1 \ldots. & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots. & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots. & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} \operatorname{sen} x$$

$$(2) \quad \cos(nx) = \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 \ldots. & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 \ldots. & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & 1 \ldots. & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots. & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots. & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}$$

dove il primo determinante è di ordine n — 1 *il secondo di ordine* n.

BETTINI.

Risoluzione del sig. Eugenio Strocchi.

a) Per $n = 2$ la (1) è evidente; infatti essa diventa $\operatorname{sen} 2x = 2\cos x \operatorname{sen} x$. Ma essa è poi vera anche per $n = 3$; infatti si ha

$$\begin{vmatrix} 2\cos x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} \operatorname{sen} x = (4\cos^2 x - 1) \operatorname{sen} x = (3 - 4\operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 3x.$$

Proveremo ora, che se è vera fino ad $n = p - 1$, è vera anche per $n = p$. Indicando con D_r il determinante di ordine r della forma (1), ed applicando una nota formola sui determinanti (Vedi CESARO, *Analisi algebrica*, pag. 12, § 7) si ha

$$D_{p-1} = 2\cos x \, D_{p-2} - D_{p-3}.$$

Ed essendo per quanto si è supposto,

$$D_{p-2} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(p-1)x, \qquad D_{p-3} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(p-2)x$$

si ha

$$D_{p-1} \operatorname{sen} x = 2\cos x \operatorname{sen}(p-1)x - \operatorname{sen}(p-2)x = [\operatorname{sen} px + \operatorname{sen}(p-2)x] - \operatorname{sen}(p-2)x$$

$$D_{p-1} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} px.$$

Possiamo dunque asserire che la (1) è vera in generale.

b) Lascieremo al lettore la cura di verificare che la (2) è verificata per $n = 1, 2$. Per poter affermare che è vera in generale, basta che, supponendola vera fino ad $n = p - 1$, si dimostri che è vera anche per $n = p$.

Indicando con D'_r il determinante di r^{mo} ordine del tipo (2) si ha:

$$D'_p = 2\cos x \, D'_{p-1} - D'_{p-2}.$$

Ed essendo per ipotesi

$$D'_{p-1} = \cos(p-1)x \qquad D'_{p-2} = \cos(p-2)x,$$

si ha

$$D'_p = 2\cos x \cos(p-1)x - \cos(p-2)x = [\cos px + \cos(p-2)x] - \cos(p-2)x$$

$$D'_p = \cos px.$$

Altra risoluzione del sig. E. Laura.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

383*. Trovare l'espressione dell'area d'un quadrilatero ABCP del quale si conoscono due lati consecutivi e l'angolo da essi compreso, $\overline{AC} = a$, $\overline{BC} = b$, $A\widehat{B}C = B$, e gli angoli che la diagonale passante pel vertice B forma coi due lati adiacenti nel vertice P, $A\widehat{P}B = \alpha$ $B\widehat{P}C = \beta$.

384. Trovare l'espressione dell'area d'un poligono $ABCP_nP_{n-1} \dots P_2P_1$ di $(n + 3)$ lati del quale si conoscono due lati consecutivi e l'angolo da essi compreso $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $A\widehat{B}C = B$ e gli angoli che le diagonali passanti pel vertice B formano cogli altri lati successivi nei vertici:

$$P_1, P_2, P_n,\ A\widehat{P_1}B = \alpha_1,\ B\widehat{P_1}P_2 = \beta;\ B\widehat{P_2}P_1 = \alpha_2,\ B\widehat{P_2}P_3 = \beta_2;\ \dots$$
$$B\widehat{P_n}P_{n-1} = \alpha_n,\ B\widehat{P_n}C = \beta_n.$$

DELITALA.

385*. Dimostrare l'uguaglianza

$$\sqrt[7]{29 + 13\sqrt{5}} - \sqrt[7]{29 - 13\sqrt{5}} = \sqrt[7]{2}.$$

GÉLIN.

386. Date in un medesimo piano tre punteggiate simili, il luogo del centro del cerchio circoscritto al triangolo formato da tre punti omologhi è una cubica razionale.

387. Date in un piano tre punteggiate eguali trovare il luogo del centro del cerchio circoscritto al triangolo avente per vertici tre punti omologhi.

RETALI.

388*. Dati due corpi di forma sferica e di peso P, P', determinare la relazione fra p e p' (pesi specifici), perchè, essendo $P = nP'$, il corpo di peso P', cadendo nell'aria, acquisti una velocità costante maggiore di quella che acquisterebbe il corpo di peso P, ammettendo che la resistenza dell'aria sia proporzionale al quadrato della velocità.

BARBAGALLO.

389*. Se N e k sono numeri interi ed $r > 1$, si ha $N^{6k+r} \equiv N^r$ (modulo 9).

390*. La quinta potenza d'ogni numero intero è congrua a 0, o a ± 1 rispetto al modulo 11.

BONOLIS.

(*) Le quistioni contrassegnate con un asterisco sono proposte agli studenti delle scuole secondarie; le altre a tutti gli studiosi indistintamente.

BIBLIOGRAFIA

TOLOMEI. — *Tavole dei logaritmi a cinque decimali.* — Firenze, Succ. Le Monnier 1897.

Questo manualetto si distingue dagli altri dello stesso genere per la nitidezza ed eleganza dell'edizione. Oltre alle tavole dei numeri e delle linee trigonometriche, precedute da una succinta spiegazione sul loro uso, contiene varie altre tavole di uso frequente. Crediamo quindi che esso potrà esser molto utile agli studenti.

RIBONI Dott. G. — *Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori, 2ª edizione con molte aggiunte e correzioni.* — Bologna, Zanichelli 1898.

Della 1ª edizione di questo libro, già favorevolmente conosciuto dal pubblico si occupò diffusamente il *Periodico di Matematica*, (Fasc. III-IV anno 1894). Le aggiunte fatte sono enunciate nella *prefazione* colle parole seguenti:

" Fra le innovazioni noterò un maggiore sviluppo nei preliminari; l'aggiunta " di alcune nozioni sulle figure direttamente ed inversamente eguali e simili; di " qualche teorema sull'equivalenza, sulle serie, sulla misura, sulle grandezze pro- " porzionali; del teorema di Stewart; di qualche nozione sulla divisione armo- " nica; di un'applicazione del teorema di Tolomeo sul quadrilatero iscritto. Infine " dove mi si presentò l'occasione, ho dato qualche notizia storica, che credo utile " anche agli studenti delle scuole secondarie ".

SERRET. — *Trattato di trigonometria piana e sferica tradotto da Francesco Grassi, 4ª edizione con note ed aggiunte del traduttore, 1000 esercizi colle risposte, ed un formulario di matematica e fisica.* — Bocca, Firenze 1898.

Questo libro è tanto conosciuto che crediamo inutile parlare di esso. Il rapido succedersi delle edizioni, attesta il favore degli insegnanti per questa ormai vecchia opera.

Prospetto degli studi della I. R. Accademia di commercio e nautica in Trieste, pubblicato alla fine dell'anno scolastico 1896-97. — Trieste, Herrmanstorfer.

Questo prospetto contiene oltre i programmi d'insegnamento di quell'importante accademia e la cronaca dell'anno scolastico, una interessante biografia del celebre scienziato e violinista Giuseppe Tartini scritta dal prof. Giorgio Benedetti, e un curioso lavoro inedito dello stesso Tartini, intitolato: *Scienza dei triangoli pitagorici dipendenti dai tre mezzi determinati dalle proporzioni geometriche, discrete di questa scienza di cui sono una parte integrante.*

Lo stesso prof. Benedetti presenta ai lettori l'articolo suddetto colle seguenti parole:

" Dissi in quei miei studi (su Tartini) di un matematico punto dispregevole " di questa città, che essendo stato per parecchi anni a Pirano, mercè la genti- " lezza del bibliotecario comunale, che gli aveva aperto i battenti del sacrario " tartiniano, aveva potuto comporre un suo studio sulla scienza dei triangoli pi-

" tagorici del Tartini, studio questo che poi ridotto e compendiato ebbe l'alto " onore di venire stampato nella Rivista dei Ginnasi Austriaci. Il Professore in " parola è il sig. Enrico Zavagna, che, da me pregato a volere stampare questo " suo studio, di 20 anni addietro, di buon grado accondiscese, che in questo pro- " gramma, non più in compendio, ma in tutta la sua interezza, potesse trovar " posto „.

Il prof. Benedetti infine cita le seguenti parole del prof. Zavagna, alle quali volentieri ci associamo. " Sarebbe desiderabile che i manoscritti del Tartini, an- " cora inediti, venissero tolti dalla polvere della biblioteca, poichè contengono " importantissime ricerche nel campo della matematica e della fisica „.

ASSOCIAZIONE "MATHESIS„

L'Associazione *Mathesis* pubblicò per due volte il suo Bollettino nel decorso anno sulle pagine di questo giornale. Nell'anno attuale l'Associazione, resasi indipendente dal *Periodico*, ha pubblicato separatamente i fascicoli 3 e 4. In essi, oltre le notizie interessanti i Soci, si trovano un elenco delle pubblicazioni matematiche recenti, fatte sul catalogo quindicinale della Biblioteca Nazionale di Firenze, una rubrica destinata a raccogliere quanto di notevole o di interessante per la matematica elementare si trova in libri o periodici italiani ed esteri, i programmi da insegnamento per la matematica nelle Scuole secondarie estere (per ora di Svizzera e Francia), le relazioni sui lavori dell'Associazione rappresentati da adunanze, da risposte alle questioni del Comitato, da memoriali al Ministero, e infine articoli originali dei Soci.

Il N. 4 contiene già le relazioni sulle risposte spedite dai Soci alla questione II (V. N. 1 del Bollettino) « Modificazioni da portarsi nei vigenti programmi per l'insegnamento scientifico nelle scuole medie, affinchè quello di matematica riesca maggiormente coordinato con quello delle scienze affini » e alla questione VI (ivi) « Se e come convenga modificare e completare l'insegnamento della matematica attualmente impartito nelle scuole secondarie, e specialmente nei Licei, per ottenere un migliore ordinamento con la facoltà di matematica pura ed applicata ». Contiene anche il Memoriale spedito all'on. Ministro dal Comitato; nel quale sono chieste alcune riforme nell'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie, suggerite dalle risposte alle questioni del Comitato indicate dai Soci. Le riforme domandate sono: che nelle scuole secondarie classiche sia data alla matematica l'importanza che le spetta, e che nei Licei, alleggerito il programma per la comune degli studenti, sia istituito un corso complementare per i soli iscrivendi alle facoltà scientifiche universitarie, e negli Istituti tecnici sia alleggerito e meglio distribuito il programma della sezione fisico-matematica; che nel Liceo la materia comune a tutti gli studenti si svolga entro i primi due anni; che dell'aritmetica razionale una parte sia tolta al Ginnasio ed al 1°

anno d'Istituto e portata al Liceo ed al 2° biennio d'Istituto; che sia modificato il programma di geometria nel Ginnasio; che sia resa possibile nell'insegnamento della geometria la scelta fra il metodo della separazione e quello della fusione della planimetria e stereometria; che sia ripristinata la prova scritta di matematica almeno negli esami di Licenza.

I N. 3 e 4 del Bollettino portano inoltre i verbali delle adunanze, promosse dall'associazione e tenute fra professori soci e non soci, nelle quali si sono discusse le quistioni proposte dal Comitato: adunanze che hanno potuto aver luogo nelle città di Palermo, Milano, Padova, Torino, Chieti, Firenze.

Nel N. 3 sono pubblicate due comunicazioni sulla questione VII relativa all'equivalenza, una del prof. Ciamberlini, il quale propone di sostituire al postulato del Giudice « ogni sfera è finita » l'altro « esistono un triangolo e un tetraedro finito » che apparisce più semplice, e che è sufficiente per trattare la teoria dell'equivalenza — l'altra del prof. Serana nella quale l'autore stabilisce che, a parer suo, i postulati necessari alla teoria delle grandezze, in un corso elementare di Geometria, sono quello della rovesciabilità dell'angolo, quello sull'equivalenza dei solidi, e quello d'Archimede sui segmenti, e suggerisce come definizione d'equivalenza quello da lui data già nel 1894, che cioè due grandezze si dicano equivalenti, se possono decomporsi in modo che ogni parte dell'una abbia la sua corrispondente uguale nell'altra e reciprocamente, sia finito od infinito il numero di queste parti.

Nel N. 4 col titolo « Un appunto agli attuali programmi di matematica del 1° biennio degli Istituti Tecnici » il prof. Sforza propone una miglior distribuzione delle materie nell'Istituto tecnico per evitare gli inconvenienti che si hanno ora nell'insegnare la teoria delle proporzioni fra grandezze senza ricorrere al concetto di rapporto, mentre dalle Scuole tecniche i giovanetti escono conoscendo le proporzioni numeriche. Il professor Bettazzi in un suo articolo che risponde alla questione VII suggerisce che per evitare le difficoltà della trattazione della teoria dell'equivalenza nella scuola, si definiscano equivalenti due enti, che siano o somma di enti uguali - o differenza di enti uguali - o equisummultipli di enti uguali - o equivalenti ad uno stesso ente per una di tali ragioni - o somma, differenza, equimultipli, equisummultipli, o equivalenti di enti già riconosciuti equivalenti: e che si scansi il concetto di limite facendo comparire le grandezze, nelle quali esso si suole usare come somme di infinite grandezze. Riferiamo la definizione di equivalenza proposta dal Prof. Bettazzi, ma non l'approviamo affatto, poichè ci sembra della stessa natura di questa evidentemente assurda. *Si chiama parallelogrammo un quadrangolo che ha ogni lato parallelo al suo opposto, oppure che ha ogni lato eguale al suo opposto, oppure che ha ogni angolo eguale al suo opposto, oppure che ha due lati opposti eguali e paralleli, oppure che ha le diagonali che si dividono scambievolmente per metà.*

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 1° Novembre 1897.