Indice Articoli Anno 1896

tangenti, il loro punto d'intersezione, il loro angolo, e l'area del triangolo compreso fra le tangenti e la corda. Costruzione.

Freistadt: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. $4x^2 + 12xy + 9x^2 - 6x = 37$, $3x^2 + 8xy + 5y^2 + 12y = 45$.

2. Un tale paga per 12 anni al principio d'ogni anno un premio di 250 f. onde ricevere esso stesso o i suoi eredi alla fine del 18^0 anno e così per altri 14 anni successivi, una certa rendita; qual è questa rendita se si calcola l'interesse al $4\frac{1}{2}$ $^0/_0$?

3. I tre lati d'un triangolo stanno fra loro come $5:8:9$ e l'area dei quadrati costruiti sui lati importa $680\,m^2$. Quali sono i lati e gli angoli del triangolo?

4. Qual è l'equazione riferita al centro, di un'ellisse, la quale riferita ad un altro sistema di assi coordinati è $5x^2 - 4xy + 5y^2 - 48x + 36y + 120 = 0$. Si determini l'eccentricità numerica, il parametro e l'area dell'ellisse.

Radautz: *i. r. ginnasio sup.* — 1.

$$4(\operatorname{tg} x - \cot x) = -3\frac{\cot 2x}{1 + \operatorname{sen} 2x}.$$

2. Trovare l'area d'un triangolo nel quale $\alpha = 50^0\,53'\,45''$, $h_a = 18{,}059$ e $h_b = 15{,}52$.

3. Calcolare l'area del segmento parabolico compreso fra la parabola $y^2 = 8x$ e la corda che congiunge i due punti colle ascisse $x_1 = 2$, $x_2 = -8$.

4. Un bosco che cresce annualmente del $2\frac{1}{4}$ $^0/_0$ ha uno stato attuale di 145678 m^3. Quale sarà il suo stato dopo 18 anni, se alla fine di ogni anno vengono tagliati 1175 m^3?

Saaz: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Da un capitale di 4058,22 f. vengono ritirati ogni anno in fine dell'anno 365 f. Dopo quanti anni verrà consumato il capitale, se si calcola l'interesse del 4 $^0/_0$?

2. Un osservatore vede da una certa distanza da una sfera di raggio $R = 30\,cm$. $\frac{1}{5}$ della superficie della stessa. Che dimensioni (r, h, l) ha il cono formato dai raggi visuali estremi ed a quale distanza dal centro si trova l'osservatore?

3. Qual è l'equazione di un cerchio che passa pei tre punti: $(6 - 4)$, $(2, 2)$, $(7, 1)$?

ObreholLabrunn: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Scomporre la frazione $\frac{2199}{1001}$ in tre frazioni, le quali, abbiano per denominatori 7, 11 e 13.

2. Sono dati 18 elementi: quanti elementi si devono cancellare affinchè la differenza fra i numeri delle combinazioni della terza classe, con ripetizione e senza ripetizione dei rimanenti, sia eguale al numero delle variazioni di seconda classe, con ripetizioni, fatte cogli elementi cancellati?

3. In un triangolo sono dati un lato $a = 3\,cm$. e gli angoli adiacenti $\beta = 45^0\,26'\,37''$ e $\gamma = 63^0\,24'\,35''$; qual è il volume del corpo di rotazione che descrive il triangolo girando intorno al lato a?

4. Dal punto A avente le coordinate $x' = 8\frac{1}{5}$, $y' = 2\frac{7}{9}$ vengono condotte le due tangenti al circolo $x^2 + y^2 = 25$. Quale distanza ha il punto A dalla

corda di contatto, e qual è l'area del triangolo formato dalle tangenti e dalla corda di contatto?

SEITENSTETTEN: *i. r. Ginnasio sup.* — 1.

$$\log \sqrt[4]{8x(4x-2)+20(x-10)} - \log \sqrt[4]{x-2} = \frac{1}{2}.$$

2. Si deve dividere l'angolo $\alpha = 60^0$ in due parti, i cui seni stanno fra loro come $4:3$.

3. Sul vertice d'un colle di forma conica sorge una torre. Per misurare la sua altezza si discende di 100 *m.* sino in A e quindi ancora di 300 *m.* sino in B e si guidano visuali da A e da B tanto al piede che alla sommità della torre. L'angolo formato dalle visuali in A è $\alpha = 10^0\,47'\,8''$, in B è $\beta = 5^0\,9'\,23'',2$. Che altezza ha la torre?

4. Qual è l'equazione di una retta, la quale passa per il punto $(1, 3)$ e taglia dagli assi coordinati un triangolo di area $s = 8$?

IGLAU: *i. r. Ginnasio sup.* — 1.

$$4 \cdot 2^{2x-3} - 3 \cdot 2^{y+4} = 320; \quad 2 \cdot 2^{x+1} + 2^{y-2} = 129.$$

2. Qual capitale devesi porre oggi al 4 %, affinchè produca, capitalizzando l'interesse ogni semestre, una rendita di 500 f. pagabile per 10 anni al principio d'ogni semestre?

3. I raggi delle basi di un tronco di cono retto sono $R = 5{,}45$ *m*, $r = 2$ *m*, ed il lato $a = 8{,}97$ *m*. La sezione media di questo tronco deve esser base di un cono il quale ha il vertice nel centro della base minore del tronco. Qual è il volume e la superficie di questo cono?

4 Le coordinate dei vertici di un triangolo sono A_1 $(x_1 = 2,\ y_1 = 1)$, B_1 $(x_2 = 4, y_2 = 5)$ e C_1 $(x_3 = 20, y_3 = 4)$. Che distanza ha il centro del cerchio circoscritto dal punto d'intersezione delle rette $y = 2x - 3$ e $(x_4 = 0, y_4 = 3)$ $(x_5 = -5, y_5 = -12)$?

M^A^HR. WEISKIRCHEN: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. In una sfera di raggio $R = 17$ *cm.* vengono condotti ad eguale distanza $d = 8$ *cm.* dal centro, due piani paralleli. Qual è il volume del tronco sferico così ottenuto? Si domanda poi anche il volume del corpo che resta levando da questo tronco il cilindro interno, ed il raggio d'una sfera equivalente a questo corpo.

2. Data la somma $a + b = 121{,}653$ *m.* di due lati di un triangolo, il terzo lato $c = 71{,}9$ *m.* ed il raggio $r = 37{,}8$ *m.* del cerchio circoscritto, si risolva il triangolo.

3. A quanto sale dopo $n = 8$ anni una somma $a = 125$ f. che cresce in progressione aritmetica colla differenza $d = 45$ f. e viene pagata ad una cassa alla fine di ogni anno, calcolando il 4 % d'interesse?

4. Ad una iperbole, che ha l'asse principale $2a = 10$ e l'asse secondario $2b = 6$, si deve guidare una tangente nel primo quadrante che formi colla direzione positiva dell'asse delle x un angolo $\alpha = 45^0$; si trovino le coordinate del punto di contatto e le equazioni della tangente e della normale in questo punto.

MELK: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Il primo termine di una progressione aritmetica è di 1 maggiore del primo termine di una progressione geometrica; il secondo termine è pure di 1 maggiore del secondo termine della progressione geometrica, i terzi termini sono eguali, il quarto termine della geometrica è però di 3 unità maggiore di quello dell'aritmetica. Quali sono le progressioni?

2. Determinare i due angoli x ed y di un triangolo se $4^{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = 8$ e $16^{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y} = 8$.

3. Il volume di un cono retto è 179,044; i lati fanno colla base l'angolo $\alpha = 67^\circ 5' 20''$; qual è la superficie laterale?

4. La retta $3y + 4x + 12 = 0$ deve girare intorno a quel suo punto che ha la minima distanza dal centro del circolo $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$, così che divenga tangente; qual è l'angolo di rotazione?

Praga: *i. r. Ginnasio sup. nella Neustadt.* — 1. Un tale pone in un istituto di credito che paga il $4\frac{1}{2}\,\%$ una somma di 6000 *c.*; quanto può egli ottenere per 18 anni alla fine d'ogni anno?

2. Si domanda la superficie laterale di un cono retto il cui lato fa colla base l'angolo $\alpha = 65^\circ 22'$, se il volume del cono è eguale a quello di una sfera di raggio $r = 5{,}95$ *dm.*

3. Le coordinate di tre punti sono $M_1 \begin{pmatrix} x_1 = 7 \\ y_1 = 5 \end{pmatrix}$, $M_2 \begin{pmatrix} x_2 = 13 \\ y_2 = 12 \end{pmatrix}$, $M_3 \begin{pmatrix} x_3 = 14 \\ y_3 = 5 \end{pmatrix}$; qual è l'equazione del cerchio che passa per questi punti, e l'equazione di quella retta che si può condurre pel centro perpendicolarmente alla corda $M_2 M_3$?

Lubbiana: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. *A* offre la sua casa stimata del valore di 50000 f. verso una rendita annuale di 3000 f. percepibile al principio di ogni anno. Per quanti anni godrà egli questa rendita, calcolando il 5 % d'interesse?

2. In un cilindro di raggio $r = 24{,}35$ è inscritto un prisma triangolare, la cui base ha gli angoli α, β, γ. L'altezza comune dei due corpi è la quarta proporzionale geometrica dopo i tre lati a, b, c della base. Qual è il volume del cilindro e quale quello del prisma? Applicazione al caso: $\alpha = 55^\circ 56'$ $\beta = 44^\circ 44' 44''$.

3. Si domandano le equazioni delle tangenti che si possono guidare dal punto (5,3) all'ellisse $9x^2 + 25y^2 = 225$.

4. Risolvere l'equazione: $\log \sqrt{3z - 2} + \log \sqrt{4z - 7} = 9{,}11394$.

St. Pölten: *Ginnasio reale sup. provinc.* — 1. La somma, la differenza ed il prodotto dell' 8.° e del 3.° termine di una progressione aritmetica stanno fra loro come 4 : 2 : 25; qual è la progressione?

2. In un pentagono regolare col lato $a = 12$ *cm.* viene inscritto un pentagono regolare, così che i suoi vertici sono i punti di mezzo dei lati del primo. Si domanda il lato dell'iscritto e l'area di ambedue.

3. In una sfera di volume $v = 135$ *cm.*^{3} è inscritto un cono retto che ha il diametro della base eguale alla sua altezza. Se ne domanda l'altezza, il volume e l'angolo al vertice.

4 Per il punto (3,5) si ha da guidare una retta, così che i segmenti formati sugli assi delle y e delle x stiano fra loro come 2 : 1. Qual è l'equazione di questa retta?

Krems: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. I due termini medi di una progressione aritmetica di otto termini danno per somma 53; il prodotto del primo e dell'ultimo termine è 102; determinare la progressione.

2. Un tale ha il diritto di ricevere una rendita di 500 f. per 25 anni alla fine d'ogni anno; protraendo il godimento della rendita di 10 anni, di modo che egli riceverà la rendita per la prima volta alla fine dell'11° anno, quanto importerà questa, se dovrà durare solo per 15 anni? (4 $^0/_0$).

3. Lo spigolo laterale di una piramide ottagonale regolare è $b = 42{,}8$ *cm.* e fa coll'altezza della piramide un angolo $\alpha = 23^0$. Qual è il volume della piramide?

4. Alla parabola $y^2 = 12x$ è condotta una tangente nel punto $x_1 = 3$, $y_1 = ?$; qual è l'area della figura compresa fra la tangente, la parabola e l'asse delle ordinate?

Landskron: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. *A* ha 49 anni e vuole assicurare alla sua morte ai propri eredi un capitale di 4800 f. Quale premio annuale deve pagare ad una società di assicurazioni, se la durata media della sua vita viene ritenuta di 21 anno? (4 $^0/_0$).

2. Una sfera cava di rame (peso spec. $= 8{,}9$) che pesa 5 *Kg.* galleggia nell'acqua, così che ne sporge dal pelo dell'acqua $\frac{1}{8}$ del diametro. Si calcoli la grossezza del guscio.

3. Si deve determinare sulla retta $y - 2x + 5 = 0$ quel punto, tale che i raggi ad esso condotti dai punti ($x_1 = 9$, $y_1 = 3$) e ($x_2 = 17$, $y_2 = 13$) formino colla retta angoli eguali.

Krumau: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Dopo quanti anni verrà estinto un debito di 5000 f. al 4,5 $^0/_0$ pagando ogni anno 500 f.?

2. Gli spigoli di un parallelepipedo rettangolare, il quale ha una superficie di 7,36 $m.^2$, stanno fra loro come $2:3:8$. Che volume ha il parallepipedo?

3. Si ricavi l'equazione della retta che passa per il punto $A(m, n)$ e tocca il cerchio $x^2 + y^2 = r^2$, e si calcoli la lunghezza della tangente.

Feldkirch: *i. r. Ginnasio reale sup.* — 1. In una progressione aritmetica la somma del 2° e del 4° termine è 38, la somma del 3° e del 7° è 74; quanti sono i termini la cui somma è 606?

2. In un trapezio isoscele l'angolo formato dalle diagonali i cui segmenti sono lunghi 3 *m.* e 4 *m.*, è 120°; quali sono i lati, gli angoli e l'area del trapezio?

3. Un triangolo coi lati $a = 17$ *cm*, $b = 10$ *cm*, e $c = 21$ *cm.* ruota intorno ad un asse che è perpendicolare al lato c nel suo punto d'intersezione con a; qual è il volume del corpo di rotazione?

4. Un emisfero col raggio $r = 1$ *dm.* ed un cono retto coll'altezza $h = 2$ *dm.* hanno la base comune. Quanto è grande il circolo nel quale la superficie sferica viene tagliata dal cono?

Leoben: *Ginnasio sup. provinciale.* — 1. Calcolare l'area ed i lati di un triangolo, se questi sono numeri interi e positivi dati dalle equazioni $8x + 13y = 183$ e $3y - z = 18$.

2. Il volume di una sfera è doppio del volume di un tronco di cono retto, le cui basi hanno i raggi di 6 m. e di 2,5 m. e i cui lati fanno colla base un angolo di 58° 32′ 16″. Qual è la superficie della sfera? (In generale ed in particolare).

3. Calcolare le equazioni delle tangenti che si possono guidare pel punto (3,1) alla curva $5x^2 - 9y^2 = 45$, l'angolo d'inclinazione delle stesse coll'asse delle x ed i segmenti da loro intercettati sugli assi.

Rovereto, giugno 1894.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE (*)

Una bella osservazione del De Paolis. — Mi fu comunicata da lui stesso più anni or sono, quando attendeva ai suoi elementi di geometria. Mi diceva dunque il De Paolis, che, senza far uso delle proporzioni o dell'equivalenza, non è facile dimostrare che le tangenti condotte a due cerchi segantisi in un piano per un punto del loro asse radicale sono eguali. Che a lui, ragionando nel piano, ciò non era riuscito; provassi anch'io, *per maggior sicurezza.* Provai: ma sì! se non era riuscito egli, De Paolis....! Ho detto, *ragionando nel piano;* del resto, usando di considerazioni nello spazio, il De Paolis risolveva la questione in un modo semplicissimo e ingegnosissimo, che citava come esempio dell'efficacia della stereometria anche in questioni puramente planimetriche.

Dopo aver fatto rotare la figura di un angolo diedro qualsiasi intorno alla retta che unisce i punti d'intersezione dei due cerchi, faceva passare per questi una sfera. Basta farla passare pei loro due punti d'intersezione e per due altri punti arbitrariamente presi, uno su ciascun cerchio. Ciò fatto, le due tangenti da dimostrarsi eguali divengono tangenti da un punto ad una sfera, e la loro eguaglianza risulta evidente. Analizzando i principî che servono alla precedente dimostrazione, si trova che essi non appartengono affatto, nè alla teorica dell'equivalenza nè a quella delle proporzioni. Il lettore può persuadersene facilmente da sè, cosicchè l'insistere su questo punto sarebbe inutile. Noterò piuttosto che dell'asse radicale di due cerchi posti in un piano, tanto nel caso delle intersezioni reali come in quello delle intersezioni immaginarie dei medesimi, si può dare la seguente definizione: *quella retta del piano attorno alla quale conviene far rotare i due cerchi, affinchè per le nuove posizioni di essi passi una sfera.* Uno studio dell'asse radicale di due cerchi sulla base di questa definizione sarebbe certo non priva d'importanza.

G. Frattini.

(*) Le questioni da risolversi o risolute, sono rimandate ai prossimi fascicoli.

Poligoni concavi e convessi. — In tutti i libri di geometria che io conosco la convessità e concavità dei poligoni è definita come segue: Se un poligono giace tutto da una banda di qualsiasi suo lato indefinitamente prolungato, esso è convesso: altrimenti è concavo. Senza dire che la suddistinzione dei poligoni concavi in intrecciati e non intrecciati è in generale trascurata, quantunque i secondi limitino una porzione di piano al pari de' poligoni convessi ed abbiano comuni con questi molte proprietà importanti, come il teorema della somma degli angoli interni, mi sembra che la citata definizione non sia punto indicata per l'uso che deve poi farsene in una geometria elementare. E valga il vero: Apro un libro di geometria elementare e leggo: « La somma degli angoli interni di un poligono *convesso* vale tante volte due retti quanti sono i lati del poligono meno due. – Dividendo infatti il poligono, supposto di n lati in $n-2$ triangoli mediante le diagonali uscenti da un suo vertice, ecc. ecc. » Ora io domando: perchè è possibile una tal divisione? Certo, perchè il poligono è convesso. Ma tra l'essere il poligono convesso, il giacere cioè del medesimo tutto da una parte di qualsivoglia suo lato indefinitamente prolungato, e la sua divisibilità in triangoli mediante questo o quel sistema di diagonali, la relazione non è davvero evidente. E fino a che tale relazione non venga messa in chiaro (il che non è agevole) la dimostrazione del citato teorema sarà difettosa in un punto essenziale. Se non che a tutto si rimedierebbe abbandonando l'ordinaria definizione, e ponendo in sua vece queste altre:

Un poligono si chiama convesso quando è divisibile in triangoli mediante le diagonali uscenti da qualsivoglia suo vertice.

Un poligono dicesi concavo non intrecciato quando non è convesso, ma può dividersi in qualche maniera in triangoli mediante le sue diagonali.

Un poligono dicesi concavo intrecciato quando non è divisibile in alcun modo in triangoli mediante le sue diagonali.

Poste queste definizioni, la dimostrazione del teorema relativo alla somma degli angoli interni di un poligono convesso verrà tosto rettificata, e di più verrà esteso il teorema ai poligoni concavi non intrecciati. Come pure, adottando definizioni analoghe per gli angoli e pei solidi poliedri, si porrebbero fuor di censura le dimostrazioni di parecchi importanti teoremi stereometrici.

G. FRATTINI.

(Dalla *Scuola educatrice*, Periodico per le scuole elementari e normali, diretto dal prof. A. Avòli, anno 1895-96, n. II).

Di un'equazione del 6° grado risolubile per radicali. — Mediante la regola di estrazione della radice quadrata dai polinomi (*), il polinomio generale del 6° grado si può mettere sotto la forma $P_3^2 + P_2$, dove P_3 e P_2 indicano due polinomi, l'uno di 3° e l'altro di 2° grado rispetto alla lettera ordinatrice x. A

(*) Perchè questa regola, che pur getta tanta luce su quella relativa ai numeri e ne è di tanto più facile, viene trascurata nei moderni trattati elementari? Negli antichi, non è così.

sua volta, e nella stessa maniera, si potrà mettere P_2 sotto la forma $P_1^2 + P_0$, essendo P_1 di 1° grado rispetto ad x e P_0 una quantità indipendente da x. L'equazione generale del 6° grado potrà dunque scriversi sotto la forma:

$$P_3^2 + P_1^2 + P_0 = 0.$$

Ciò premesso, ove tra i coefficienti dell' equazione esista la relazione $P_0 = 0$, essa si ridurrà all'altra:

$$P_3^2 + P_1^2 = 0;$$

e decomponendosi nelle due del 3° grado:

$$P_3 + iP_1 = 0$$
$$P_3 - iP_1 = 0,$$

sarà risolubile per radicali. La condizione $P_0 = 0$ e la relativa equazione del 6° grado risolubile algebricamente, mi sembrano meritevoli di uno studio più profondo, che propongo ai lettori del Periodico.

G. Frattini.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

A. NEPPI-MODONA e T. VANNINI. — *Questioni e formule di geometria analitica.* Palermo, tip. Alberto Reber, 1896.

È una pregevolissima raccolta compilata dai distinti ingegneri professori A. Neppi-Modona e T. Vannini col fine di esercitare gli studiosi nell'analisi applicata agli spazi piani e lineari. Come le api van gustando il nettare di fiore in fiore, così dalle famose opere dei geometri Salmon, D'Ovidio, ecc., i giovani autori ebbero cura di scegliere i più attraenti enunciati, e di svilupparne in 319 pagine le soluzioni con i metodi perfezionati da Plücher e Clebsch. Seguono il principio di dualità nel descrivere molti luoghi geometrici dei punti e inviluppi delle rette; adoperano le coordinate baricentriche ed omogenee per svolgere le varie relazioni fra le coppie degli elementi omologhi nelle forme proiettive di 1ª e di 2ª specie, per dedurne le sovrapposte od involutive, i punti ciclici e le rette isotrope. Dalle coordinate trimetriche del punto e della retta fanno discendere le cartesiane, le pluckeriane, le polari, insieme alle diverse trasformazioni delle une nelle altre. Succedono curiose ed utili ricerche sui centri delle distanze proporzionali, sui punti notevoli dei triangoli rettilinei, indi le genesi bipolare e modulare delle coniche, le principali curve algebriche di 3° e 4° grado in coordinate di punti e di tangenti, linee rappresentative delle funzioni trascendenti, esponenziale e circolari, le spirali, le trocoidi a basi retta e ciclica, avvertendo i casi nei quali l'equazioni riduconsi algebriche.

La prima parte di ciascun capitolo è un breve compendio delle proposizioni stabilite nei corsi completi di geometria analitica, a guisa di quadro sintetico, giovevole agli studenti per apparecchiarsi agli esami, e per conoscere gli opportuni teoremi e le formule atte alla risoluzione dei quesiti proposti.

Le figure omografiche, omologiche, le polari reciproche, le podarie delle coniche, sono trattate nel modo più generale; come pure i luoghi dei centri, dei fuochi appartenenti alle coniche soggette a tre o quattro condizioni, gl'inviluppi delle polari, delle normali alle coniche omofocali, i cerchi ortotomici ed isogonali, vengono espressi da equazioni definite per determinanti e funzioni simmetriche. In uno studio speciale per ogni conica si discutono problemi che versano sui triangoli iscritti di area massima o circoscritti di area minima, sopra i diametri coniugati, i circoli osculatori, i quadrangoli ciclici di Ioachimsthal, ecc.

Il capitolo X, ultimo dell'opera, insegna le coordinate proiettive e trilineari, le belle proprietà del quadrilatero completo, i cerchi di Lemoine, di Brocard, ecc., ed investiga diverse locali ed inviluppi di elementi, che dipendono dalle coniche iscritte e circoscritte ai poligoni.

Spero che i valenti autori per il felice esito dell'opera prenderanno animo a proseguirla in un secondo volume, il quale contenga i problemi relativi allo spazio a tre dimensioni. G. Bellacchi.

SOLONE STROMILLO. — *Lezioni elementari di geometria per le scuole secondarie.* Napoli.

L'A. ha diviso il libro in tre parti, nelle quali con buon ordine, con precisione e con chiarezza, svolge le solite teorie di geometria elementare. Il trattato si chiude con alcune lezioni sulle grandezze proporzionali e sulle figure simili, piane e solide. Il metodo seguito dall'A. si accosta più a quello del Legendre che a quello di Euclide; se il suo libro è fatto per le scuole secondarie inferiori, può dirsi ottimo; tale non potrebbe dirsi per le superiori, per insufficienza di materia, per la mancanza del voluto rigore in alcune definizioni e dimostrazioni, per l'abbondanza di postulati, non sempre necessarii. Cito, ad esempio: « Possiamo avere l'immagine di piano in un *forbito specchio* »; volendo dimostrare che due rette intersecantisi determinano un piano, prova invece che è possibile tracciare su un piano due rette che s'incontrano. Mette fra i postulati che ogni segmento rettilineo ha un punto medio, che ogni angolo rettilineo ha una bisettrice, ecc., ed in seguito li dimostra quando dimezza un segmento ed un angolo.

Lo Stromillo ha pure pubblicato alcune lezioni di aritmetica pratica sui numeri complessi, sui rapporti, sulle proporzioni e loro applicazioni, e sulle radici quadrate e cubiche. Questo trattatello, degno di lode per l'accurata e chiara esposizione, ed il precedente, sono prova certa che l'A. è anche un valoroso insegnante.

GIUSEPPE INGRAMI. — *Elementi di algebra ad uso delle scuole secondarie superiori.* Bologna, G. Cenerelli, 1895.

Nella introduzione l'A. definisce i numeri positivi, interi e frazionari, le operazioni dirette ed inverse, e ne dimostra le principali proprietà; così questa introduzione serve opportunamente come anello di congiunzione fra l'aritmetica razionale e l'algebra. Nei successivi sette capitoli si trovano le operazioni con numeri algebrici, con monomii e con polinomi, le frazioni algebriche, le equazioni ed inequazioni di 1° grado con alcune nozioni sull'analisi indeterminata, le radici, alcuni cenni sui limiti, i numeri irrazionali considerati come limiti di una sola serie di numeri, i radicali, le equazioni di grado superiore al primo, le proporzioni, le progressioni aritmetiche, geometriche ed armoniche, le equazioni esponenziali ed i logaritmi. Chiude il libro una buona raccolta di esercizi.

Pregi principali di questa opera sono: la concisione, che ha permesso all'A. di riunire in poche pagine tutte le cognizioni necessarie agli alunni dei licei e degli istituti tecnici; il rigore delle definizioni, dei postulati e delle dimostrazioni; l'uso di termini e metodi che si incontrano negli studi superiori. Le mende sono così lievi che non torna conto rilevarle, e di alcune si è già accorto l'A. che le ha corrette; le altre correggerà nella seconda edizione, che, ne son certo pel valore del libro, non tarderà a rendersi necessaria.

A. Massa.

SAGGIO DI UNA NUOVA TEORIA
DELLE APPROSSIMAZIONI ARITMETICHE

PREFAZIONE.

Pubblicando negli annali del R. Istituto tecnico di Torino (anno 1884) una mia *nuova teoria delle approssimazioni aritmetiche*, più semplice di quelle prima conosciute, ho dovuto rinunciare ad una ulteriore notevolissima semplificazione della parte che riguarda il calcolo delle *funzioni monomie* — cioè dei numeri che dipendono da numeri dati per via di operazioni aritmetiche, esclusa la addizione e la sottrazione — perchè non ero riuscito a dimostrare il teorema fondamentale, che riferisco qui sotto al § 39.

Avendo al fine raggiunto questo intento, offro in esame un breve sunto di quella parte semplificata, allo scopo di provocare qualche autorevole giudizio, che mi conforti a pubblicare una seconda edizione dell'intera teoria.

Torino, aprile 1895 GIUSEPPE MAZZOLA.

Riduzione di una funzione monomia qualunque in un prodotto di potenze de' suoi argomenti.

1. *Se* $f(v_1, v_2, v_3, \ldots)$ *è una funzione monomia degli argomenti* $v_1, v_2, v_3, \ldots$, *si ha*

$$f(v_1, v_2, v_3, \ldots) = v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} v_3^{\alpha_3} \ldots,$$

essendo α_k *l'esponente che si ottiene facendo uguali ad 1, nella funzione data, tutti gli argomenti, eccetto* v_k *e riducendo il risultato in una potenza di* v_k.

2. Data, p. es., la funzione

$$f(7, v, \pi) = v^2 \sqrt[4]{\frac{7v}{\pi}} \sqrt[9]{\frac{\pi^2}{7}},$$

si avrà

$$f(7,\,1,\,1) = \sqrt[4]{7}\,\sqrt[9]{\frac{1}{7}} = 7^{\frac{1}{4}} \,.\, 7^{-\frac{1}{9}} = 7^{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}} = 7^{\frac{5}{36}}.$$

$$f(1,\,v,\,1) = v^2\,\sqrt[4]{v} = v^{\frac{9}{4}},$$

$$f(1,\,1,\,\pi) = \sqrt[4]{\frac{1}{\pi}}\,\sqrt[9]{\pi^2} = \pi^{-\frac{1}{36}}.$$

$$f(7,\,v,\,\pi) = 7^{\frac{5}{36}}\,v^{\frac{9}{4}}\,\pi^{-\frac{1}{36}}.$$

Errori assoluti ed errori relativi.

3. Posto che siano

$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots\ldots$ gli argomenti veri d'una funzione,

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots$ i loro valori impiegati nel calcolo della funzione,

A il risultato definitivo di questo calcolo, e

V il valore vero della funzione;

i valori aritmetici delle differenze

$$v_1 - a_1 \qquad v_2 - a_2 \qquad v_3 - a_3 \qquad \ldots\ldots \qquad V - A$$

saranno gli *errori assoluti* dei valori $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ A$; ed i rapporti di questi errori assoluti agli stessi valori $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ A$, saranno i loro *errori relativi.* (*)

4. Supponiamo, p. es., che coi dati

$$V = \pi^2 v : \sqrt[3]{70\pi},$$
$$v = 38{,}75 \text{ a meno di } 0{,}005 \text{ per difetto,}$$

siasi istituito il calcolo qui sotto indicato:

$3{,}142^2 = 9{,}87$ a meno di $0{,}005$ per difetto,
$9{,}87 \times 38{,}75 = 382{,}4625,$
$70 \times 3{,}142 = 219{,}94,$
$\sqrt[3]{219{,}94} = 6{,}04$ a meno di $0{,}005$ per eccesso,
$382{,}4625 : 6{,}04 = 63{,}3$ a meno di $0{,}05$ per difetto,

(*) Scegliendo per *conseguenti* i valori *approssimati* invece di quelli *veri*, assunti dal VIEILLE, si semplifica notevolmente la teoria.

e preso, quindi, per risultato definitivo

$$A = 63{,}3.$$

Allora gli errori relativi degli argomenti impiegati nel calcolo, e quello del risultato definitivo, saranno rispettivamente eguali a

$$\frac{v - 38{,}75}{38{,}75} \quad \frac{3{,}142 - \pi}{3{,}142} \quad \frac{70 - 70}{70} \quad \frac{\pm(V - 63{,}3)}{63{,}3},$$

e gli antecedenti di questi rapporti saranno gli errori assoluti.

5. Insieme agli errori degli argomenti intervengono, ed influiscono sull'errore del risultato definitivo, gli errori che si commettono volontariamente nelle singole operazioni, e che chiamerò *errori operativi.*

6. Nella prima delle operazioni qui sopra indicate l'*errore operativo assoluto* è

$$3,142^2 - 9,87,$$

nelle due operazioni seguenti gli errori operativi assoluti sono nulli, e nelle ultime due operazioni sono rispettivamente

$$6{,}04 - \sqrt[3]{219{,}94}\,, \qquad (382{,}4625 : 6{,}04) - 63{,}3.$$

7. Generalmente, se sono a_1, a_2 i due argomenti impiegati in una moltiplicazione, od una divisione, e se a è l'argomento impiegato in una estrazione di radice q^{ma}, gli *errori operativi assoluti* hanno per misura i valori aritmetici delle differenze

$$a_1 a_2 - A, \qquad (a_1 : a_2) - A, \qquad \sqrt[q]{a} - A.$$

8. Ad ogni *errore operativo assoluto* corrisponde un *errore operativo relativo*, eguale al rapporto dell'errore operativo assoluto al risultato dell'operazione.

(Continua).

FONDAMENTI
PER UNA TEORIA GENERALE DEI GRUPPI

DI RODOLFO BETTAZZI

(Continuazione: Vedi pagina 81).

CAPITOLO VI.

ORDINAMENTO DEI GRUPPI.

31. Definizione. — Supponiamo che con una legge qualunque, in un gruppo G ad ogni ente a di esso sia collegata una parte del gruppo stesso, che indicheremo per brevità con Sa e diremo gruppo degli enti *seguenti* di a (e che può anche mancare), così definita:

1° Se b è di Sa, a non è di Sb.

2° Se a e b sono enti distinti di G, o a è di Sb, o b è di Sa.

3° Se b è di Sa e c è di Sb, c è di Sa.

Diremo che in tal caso G è un gruppo *ordinato* (*).

Se in G un ente a è di Sb, diremo b *precedente* a; il gruppo dei precedenti di a lo indicheremo con Pa.

Se un ente è di Pb e di Sa, diremo che esso è *compreso* fra a e b, o fra b ed a.

Se b è di Sa, ma nessun ente è compreso fra a e b, diremo b *immediatamente seguente* ad a, ed a *immediatamente precedente* a b, scrivendo $b = \sigma(a)$, $a = \pi(b)$.

Discende immediatamente dalle definizioni date:

4° Se b non è a nè è di Sa, esso è di Pa.

5° Se b è di Pa, a non è di Pb.

6° Se a e b sono distinti, o a è di Pb, o b è di Pa.

7° Se b è di Pa, e c è di Pb, sarà c di Pa.

8° Dati a, b, c distinti, uno di essi deve essere compreso fra gli altri due.

(*) Di un tale concetto di ordine si hanno tracce in BOLZANO l. c. § 7. Vedi poi CANTOR. «Zur Lehre von Transfiniten» pag. 68 e seg., e con maggior precisione VAILATI «Sui principii fondamentali della geometria della retta» Rivista di Matematica, vol. II — BURALI-FORTI «Sulle classi ordinate e sui numeri transfiniti» Rendiconti del Circolo matematico di Palermo T. VIII — VIVANTI «Teoria degli aggregati» — Parte VI del «Formulaire de Mathématiques publié par la Rivista di Matematica» — Cfr. anche VERONESE «Fondamenti di Geometria» Introduzione Cap. I, §§ 5, 6, 9, e la memoria già citata BETTAZZI. «Sulla catena di un ente in un gruppo.

9° In un gruppo ordinato può esistere un solo ente privo di precedenti, ed un solo privo di seguenti.

10° Un ente non potrà avere più di un ente σ (immediatamente seguente) nè più di un ente π (immediatamente precedente).

Osservazione. — Se l'ordinamento di un gruppo si faccia in varie volte con leggi differenti, distingueremo queste leggi una dall'altra, apponendo segni alle lettere S, P, σ, π.

32. Definizione. — Sarà utile distinguere i gruppi ordinati in *limitati* ed *illimitati*, indicando col primo nome quelli in cui esiste un ente senza precedenti ed uno senza seguenti, col secondo quelli in cui ogni ente ha seguenti, o ogni ente ha precedenti, o si hanno i due casi insieme.

33. Definizione. — Un gruppo si dirà *ordinabile*, se sia possibile stabilire una legge con la quale esso sia ordinato.

Corollario. — Una coppia di enti è un gruppo ordinabile: e così gli enti del gruppo composto di una coppia e di un ente, o di una coppia di coppie di enti.

34. Definizione. — Se due gruppi ordinati sono in corrispondenza in modo che rispetto ad essa siano equivalenti, e che in uno di essi l'ente a segua o preceda l'ente b secondochè il corrispondente di a nell'altro segue o precede il corrispondente di b, diremo i due gruppi in *corrispondenza ordinata.*

Due gruppi ordinati che si possono porre in corrispondenza ordinata, devono chiaramente essere entrambi limitati od entrambi illimitati.

35. Teorema. — Un gruppo Γ equivalente ad uno ordinabile G, è ordinabile esso pure.

Basta infatti in Γ dire che un ente a è seguente o precedente b secondochè debba dirsi l'una cosa o l'altra dei corrispondenti in G, perchè quando G è ordinato tale sia anche Γ.

Osservazione. Si può in tal caso, come si è già fatto, stabilire fra G e Γ una corrispondenza ordinata (§ 34).

36. Teorema. — Se un gruppo G è ordinabile, tale è ogni sua parte G_1.

Infatti, reso G ordinato, basterà in G_1 di due enti a o b dire b seguente o precedente ad a, secondochè è seguente o precedente ad a in G, perchè chiaramente anche G_1 sia ordinato.

37. Sia G un gruppo ordinato, avente per enti dei gruppi (i gruppi Γ) che due a due non abbiano enti comuni, e ciascuno dei gruppi Γ sia ordinato. Se a e b sono due enti di gruppi Γ, si dica b seguente ad a: 1° nel caso che a e b siano di uno stesso gruppo Γ, se in esso b è seguente di a: 2° nel caso che a e b siano di due distinti gruppi Γ, se b appartiene al gruppo Γ che in G è seguente all'altro. Evidentemente in tal modo il gruppo G è ordinato anche rispetto agli enti dei suoi singoli gruppi.

Definizione. Potremo, quando occorra brevità, indicare un tale ordinamento di G, dicendolo *ordinamento secondo i gruppi parziali* Γ.

Corollario 1° — Un gruppo ordinabile i cui enti siano gruppi ordinabili, è gruppo ordinabile rispetto agli enti di questi gruppi.

Cor. 2° — Se un gruppo si spezza in due gruppi ordinabili, è ordinabile esso pure.

38. Definizione. — Un gruppo G si dirà *bene ordinato* quando:

1° sia ordinato, (§ 31);

2° di ogni ente che ammette seguenti esista l'immediatamente seguente, o risp. di ogni ente che ammette precedenti esista l'immediatamente precedente (gruppo ordinato risp. *secondo il criterio* σ o π).

Tali gruppi, come in generale i gruppi ordinati, potranno essere limitati od illimitati (§ 32).

I primi hanno un ente senza seguente ed uno senza precedente.

I gruppi illimitati ordinati secondo σ in cui esista un ente privo di precedenti e quindi (§ 32) non ve ne sia nessuno privo di seguenti e neppure nessuno privo di ente σ, e così pure quelli ordinati rispetto a π in cui esista un ente privo di seguenti e nessuno privo di ente π, si diranno *gruppi bene ordinati ad un senso*, (se occorre, risp. ordinati secondo σ o π): quelli in cui non vi sono enti privi di seguenti nè enti privi di precedenti, si diranno *gruppi bene ordinati a due sensi* (se occorre, secondo il criterio σ o π, secondochè ogni ente ammette l'ente σ, o ammette l'ente π).

Nei gruppi bene ordinati ad un senso dicesi ente *originario* quello privo di precedenti o di seguenti; in quelli bene ordinati limitati secondo il criterio σ si dice *originario* l'ente privo di precedenti, *finale* quello privo di seguenti: in quelli bene ordinati limitati secondo il criterio π inversamente, *originario* quello privo di ente seguente e *finale* quello privo di precedente.

39. Definizione. — Un gruppo in cui sia possibile stabilire una legge con cui esso sia bene ordinato, si dirà *bene ordinabile*.

Corollario. — È bene ordinabile un gruppo di due enti e quello composto dagli enti di una coppia e di un ente, o di due coppie; ed è bene ordinato, appena esso sia ordinato.

40. Teorema. — Un gruppo I' equivalente ad un gruppo bene ordinabile G, è bene ordinabile esso pure.

Basta infatti, perchè I' divenga bene ordinato, dire un suo ente precedente o seguente un altro, secondochè accade l'uno o l'altro caso nei corrispondenti di G. Chiaramente I' risulterà così limitato, illimitato, secondo il criterio σ o π ecc., quando i casi consimili accadono in G.

41. Teorema. — Un gruppo bene ordinabile i cui enti siano gruppi bene ordinabili, è bene ordinabile rispetto agli enti di questi.

Basta infatti chiaramente, perchè il gruppo sia bene ordinato, fare in esso l'ordinamento secondo i gruppi parziali (§ 37, Corollario 1°) dopo avere resi i criteri di ordinamento tutti σ o tutti π, scambiando fra loro, se occorre, in alcuni dei gruppi il significato di π o di σ.

Corollario. — Se un gruppo si spezza in due bene ordinabili, è bene ordinabile esso pure.

42. In un gruppo bene ordinato secondo il criterio σ e limitato, ogni ente, eccetto uno (il finale), ammette l'ente σ, e ve n' è uno (l'originario) che non è σ di alcuno. Se associamo ad ogni ente che non sia il finale il suo ente σ, ed all'ente finale l'originario, veniamo a costruire una corrispondenza del gruppo con sè stesso nella quale il gruppo equivale o a sè stesso o ad una sua parte propria, secondochè vi è il solo ente originario privo di π o ve ne sono altri. Similmente pel criterio π.

In un gruppo bene ordinato ad un senso secondo σ, associando ad ogni ente il suo σ, si ha una corrispondenza del gruppo con sè stesso. nella quale il gruppo equivale ad una sua parte, che è propria, non contenendo per lo meno l'ente originario. Lo stesso dicasi per il criterio π.

In un gruppo bene ordinato a due sensi secondo σ, associando ancora ad ogni ente il suo σ, si ha una corrispondenza in cui il gruppo equivale a se stesso o ad una sua parte propria, secondochè mancano od esistono enti privi di π. Analogamente per il criterio π.

Definizione. — In ciascuno dei casi anzidetti la corrispondenza ora definita si dirà *corrispondenza ordinatrice* del gruppo.

43. Teorema. — Un gruppo che possa rendersi bene ordinato illimitato, è sviluppabile (§ 12).

Invero, se quando è bene ordinato è ad un senso, nella corrispondenza ordinatrice esso equivale ad una sua parte propria. Se è a due sensi, il gruppo sua parte che è composto di un suo ente a e di Sa è bene ordinato ad un senso, e quindi come si è ora visto, è sviluppabile, e perciò (§ 14) tale è l'intero gruppo.

44. Teorema. — Dato un gruppo G di cui p è un ente, se G è equivalente o a $G-p$ od a sè stesso in una corrispondenza α priva di cicli parziali, esso è bene ordinabile; e dà origine nel 1° caso ad un gruppo ad un senso, nel 2° caso sempre ad uno limitato, e talora anche ad un gruppo a due sensi.

a) « Si può nel gruppo stabilire il concetto di seguente in modo da « soddisfare alle condizioni imposte ad esso nel § 31°. »

Infatti consideriamo nel 1° caso, in cui si ha $(G-p \backsim G)_\alpha$, la corrispondenza completa: nel caso $(G \backsim G)_\alpha$ se p è il corrispondente di q (distinto da p a causa della mancanza di cicli) consideriamo la corrispondenza $(G-p \backsim G-q)_\alpha$.

Se a è un ente di G o di $G-q$, si indichi con σa il suo corrispondente a' in $G-p$, e a si indichi reciprocamente con $\pi a'$. Esisterà il σ di ogni ente di G, tranne al più di q, ed il π di ogni ente di g eccetto di p.

Si definisca allora così il gruppo Sa dei seguenti di un ente qualunque a di G: Sa è il gruppo composto (§ 3) di tutti i gruppi possibili, che accenneremo per brevità con γ_a, formati con enti di G in modo che

1° non contengano a;

2° contengano σa;

3° se contengono un ente di G contengano anche il suo ente σ (quando esiste).

I. Innanzi tutto osserviamo che tali gruppi γ, di cui $S\,a$ deve essere composto, non esistono evidentemente per q (privo di ente σ), e quindi non esistono seguenti di q; ma per gli altri enti [e quindi per tutti nel caso $(G - p \backsim G)_2$] tali gruppi esistono.

Infatti — 1° Essi esistono per p, essendo evidentemente $G - p$ uno di essi perchè può contenere il σ di ogni suo ente senza contenere p, per la ragione che p non ha ente π, e che quindi non è σ di nessun ente. — 2° Esistono per $\pi\, q$, essendo uno di essi il gruppo del solo ente q. — 3° Se per un ente c che non sia $\pi\, q$ esistono, esisteranno pure per $\sigma\, c$, giacchè i gruppi γ_c fatti rispetto a c contengono $\sigma\, c$, $\sigma\,(\sigma\, c)$ (poichè $\sigma\, c$ non è q e quindi ammette lo ente σ) e sopprimendo in essi il $\sigma\, c$ (il che può farsi, mancando già in essi c e quindi potendo mancare il $\sigma\, c$) divengono altrettanti gruppi γ per $\sigma\, c$. Si conclude di qui che se per un ente d che non sia q non esistessero, non esisterebbero neanche per $\pi\, d$ (ente che esiste, essendo d diverso da p, poichè d non ha per ipotesi gruppi γ_d, mentre per p esistono invece, come si è visto, i gruppi γ_p). — 4° Se per un ente c che non sia p esistono, esisteranno anche per $\pi\, c$, avendosi da quelli di c altrettanti gruppi γ di πc, coll'aggiungere ad essi l'ente c. Quindi se per un ente d che non sia q non esistono, non esistono neppure per σd, il quale σd esiste e non è q, giacchè se no sarebbe d identico a $\pi\, q$, e per $\pi\, q$ i gruppi γ esistono (2°). — 5° Essi devono esistere per tutti gli enti che non sono q. Ed invero se per un ente c diverso da q e naturalmente anche da p (1°) non esistono i gruppi γ, non esisterebbero gruppi γ nè per $\sigma\, c$ (4°) nè per $\pi\, c$ (3°), enti ambedue esistenti: talchè se vi fosse il gruppo degli enti di G diversi da q pei quali non esistono i gruppi γ, in esso se esistesse un ente c esisterebbero anche $\sigma\, c$ e $\pi\, c$, e quindi un tal gruppo nella corrispondenza proposta corrisponderebbe a sè stesso, ossia sarebbe un ciclo, contro l'ipotesi che cicli non vi siano.

Dunque esistono i gruppi γ_a, e perciò anche il loro gruppo composto $S\,a$, eccetto per q (quando esiste) c. d. d.

Osservazione 1ª. — Il gruppo $S\,p$ non è che $G - p$.

Osservazione 2ª. — Si ha chiaramente che

$$S\,(\sigma\, a) = S\,a - \sigma\, a$$
$$S\,(\pi\, a) = S\,a + a$$

Osservazione 3ª. — In un gruppo $S\,a$, se vi è un ente b che non sia $\sigma\, a$, vi è anche l'ente $\pi\, b$. Ed invero, se b è di $S\,a$ e non è σ a, ciò vuol dire che deve esistere almeno un gruppo γ_a di cui fa parte b. Se in esso già non comparisce $\pi\, b$, ad esso aggiungo $\pi\, b$, che non è a, ed ottengo un nuovo gruppo γ_a, del quale $\pi\, b$ fa parte. Tale ente $\pi\, b$ si troverà perciò nel gruppo composto dei γ_a, e quindi sarà ente di $S\,a$. c. d. d.

Osservazione 4ª. — Nel caso $(G - p \backsim G - q)_\sigma$ l'ente q comparisce nel gruppo S di qualunque ente di G, giacchè se in un gruppo γ_a manca q, esso vi si può aggiungere e si ottiene così un nuovo gruppo γ_a, giacchè σq non esiste, e la presenza di q non richiede quindi la presenza di altri nuovi enti perchè il gruppo soddisfi alle condizioni imposte ai gruppi γ. In Sa verrà quindi a comparire anche q.

II. Se b è di Sa, a non è di Sb.

Ed infatti: 1° La proprietà è vera se b è σa: giacchè $Sb = S(\sigma a) = Sa - \sigma a$ (Oss. 2ª) ed Sa non contiene a per definizione, talchè a non è di Sb — 2°. Se la proprietà vale per un ente b vale per σb (quando b non è q), giacchè se b è di Sa, σb lo è pure, e $S(\sigma b) = Sb - \sigma b$, per cui Sb non contenendo a, neppure lo contiene $S(\sigma b)$. — 3° Se vale per b vale per πb, poichè $S(\pi b) = Sb + b$, e in questo gruppo non comparisce a che non è, per ipotesi, in Sb, e non è b. — 4° La proprietà vale se b è q, giacchè q è di Sa (Oss. 4ª) ed Sq non esiste, e quindi a non è di Sq; perciò se per un ente essa non vale, tale ente non è q. — 5° La proprietà è vera per qualunque ente di Sa, giacchè se non valesse per un ente c non varrebbe, per quanto si è ora dimostrato, nè per πc nè per σc, i quali esistono entrambi per i seguenti motivi: il πc non essendo c l'ente privo di π in Sa, il quale ente è σa, giacchè per σa vale la proprietà; il σc perchè c non è q (Oss. 4ª) e ogni ente che non è q ammette il σ in Sa. Allora il gruppo degli enti di Sa per cui la proprietà non vale, equivarrebbe a sè stesso nella corrispondenza fra G e $G - p$ e costituirebebe un ciclo, che invece, per ipotesi, non esiste.

Dunque la proprietà è vera per qualunque ente di Sa.

III. Se a e b sono distinti, o a è di Sb, o b di Sa.

Infatti se b è q esso è di Sa (Oss. 4ª), e ciò prova l'asserto. Sia invece b distinto da q. Se b non è di Sa, neppure lo è σb (Oss. 3ª); ciò prova che in nessun gruppo γ_a si trova σb, ossia che in ogni gruppo che contenga σb deve mancare qualcuna delle condizioni che si danno i gruppi γ_a. Preso ora un gruppo γ_b, esso sarà tale che se contiene un ente c di G, contiene anche σc (quando σc esiste). Ora se tal gruppo conterrà σa (che non è b, essendo b non di Sa) godrà due delle tre proprietà dei gruppi γ_a: e siccome contiene σb, non dovrà, come ora si diceva, godere la terza, cioè *dovrà* contenere a, laonde a sarà di Sb. Se invece quel gruppo non conterrà σa, si potrà comporlo con un gruppo γ_a: siccome b non è di Sa, tale gruppo γ_a non conterrà b, ed il gruppo composto risultante sarà tale che conterrà σb, il σ (se esiste) di ogni ente di G che contiene, e non b, e sarà dunque un gruppo γ_b contenente σa, per il quale si ripeterà il ragionamento precedente, concludendo ancora che a è di Sb, c. d. d.

IV. Se c è di Sb, e b è di Sa, sarà c di Sa.

Dati comunque b ed a, — 1° la proprietà è vera se c è σb, giacchè essendo per ipotesi b di Sa, deve esserlo σb — 2° se è vera per c di Sb, deve esserlo per σc (se esiste) che è pure ente di Sb: giacchè se c è di Sa, deve esserlo anche σc — 3° se è vera per c di Sb (che non sia σb) lo è pure per πc che è pure ente di Sb. Infatti c non è σa, perchè se lo fosse, essendo c e b distinti, b non sarebbe σa e apparterrebbe dunque anche a $Sa - \sigma a$, cioè a $S(\sigma a)$, ossia ad Sc, mentre è c che appartiene ad Sb, e le due ipotesi si escludono (II). Allora c non essendo σa, esiste πc in Sa, se vi esiste c — 4° la proprietà è vera per q (se esiste), essendo q ente di qualunque gruppo Sa, quando a sia un ente del gruppo — 5° la proprietà è vera per qualunque ente Sb; giacchè se non è vera per un ente c (che non dev'essere σb per la 1ª parte di questa dimostrazione nè q per la 4ª), non lo è per πc nè per σc, a causa di ciò che si è già dimostrato (parti 2ª, 3ª) e quindi nel gruppo degli enti di Sb, per cui la proprietà non vale, se comparisce un ente c compariscono πc e σc, cioè quel gruppo equivale a sè stesso nella corrispondenza, ed è un ciclo, contro l'ipotesi. La proprietà è quindi dimostrata.

Resta così provata la parte a) del teorema.

b) Il gruppo è bene ordinabile e può divenire o illimitato ad un senso, o, altrimenti, sempre limitato, e in determinati casi anche a due sensi.

Infatti per la parte a) del teorema si è definito il concetto di seguente, e possiamo ora definire b come precedente ad a (b è di Pa), se a è di Sb.

Inoltre se a è un ente di G, dico essere σa (che è appunto di Sa e che esiste tranne al più per q) il suo immediatamente seguente. Infatti, se vi fosse un ente c seguente di a precedente σa, avremmo che σa è di Sc e c di Sa; ma siccome c non è σa, dovrebbe c, perchè di Sa, appartenere anche a $S(\sigma a)$, e quindi insieme sarebbero σa di Sc e c di $S(\sigma a)$, contro quanto si è dimostrato nella parte a), II. Del pari se a non è p esiste πa, ed è l'immediatamente precedente ad a, giacchè $\sigma(\pi a)$ è a, e $\sigma(\pi a)$ è, come si è visto, l'immediatamente seguente di πa.

Nel caso $(G - p \backsim G)_\chi$ il gruppo è così illimitato e ad un senso secondo il il criterio σ.

Nel caso $(G - p \backsim G - q)_\chi$, cioè $(G \backsim G)_\chi$ non esistendo σq, il gruppo risulta limitato secondo il criterio σ. In questo caso, si costruisca la catena G_0 di p rispetto al criterio σ. Se essa non equivale all'intero gruppo, si dica G_1 il gruppo degli enti di G che non le appartengono. Poichè in G_0, che è catena di p, comparisce l'ente π di ogni suo ente (eccetto p), dovrà mancare in essa l'ente σ di ogni ente che vi manchi, e quindi dovrà in G_1 comparire l'ente σ di ogni proprio ente, eccetto di q, se q vi comparisce: e comparendo in G_0 l'ente σ di ogni suo ente (eccetto di q, qualora q fosse in G_0) comparirà in G_1 l'ente π di ogni suo ente. Se in G_1 non fosse q, allora in esso di ogni ente comparirebbe l'ente σ e l'ente π, e G_1 sarebbe un ciclo, che per ipotesi non deve esistere. Comparirà dunque in G_1 l'ente q, e se un ente anche l'ente π di esso, cioè l'intera catena di q presa rispetto al criterio π. Vi sono dunque in G, e sono senza enti comuni, la catena G_0 di p rispetto a σ, e quella di q rispetto a π. Oltre gli enti di queste due catene non possono esserci altri enti in G, giacchè altrimenti nel gruppo di questi ultimi comparirebbero i loro enti σ e π (i quali se fossero nelle catene obbligherebbero gli enti stessi ad esservi) ed esso costituirebbe un ciclo che non può esservi: così lo stesso G_1 è catena di q rispetto a π. Se in queste catene G_0 e G_1 diciamo q ente π di p e p ente σ di q, evidentemente il loro insieme costituisce una bicatena (§ 23). E dicendo tutti gli enti di G_1 precedenti a tutti quelli di G_m, il gruppo resta, com'è facile a vedersi, un gruppo in cui ogni ente ha precedenti e seguenti, anzi ha l'immediatamente precedente, e l'immediatamente seguente, cioè è un gruppo bene ordinato a due sensi, secondo il criterio σ e quello π.

Il teorema è pienamente provato.

Osservazione 5ª. — Nel caso $(G - p \backsim G)_\chi$, il gruppo bene ordinato ad un senso, secondo il corollario 1° del § 27, è catena aperta illimitata di p, rispetto al criterio σ.

Nel caso $(G \backsim G)_\chi$, fatto l'ordinamento nel modo dato dal teorema, si ha o una catena aperta limitata, od un gruppo che può ridursi ad una bicatena.

Osservazione 6ª. — I due casi in cui si è spezzato il teorema precedente non si escludono a vicenda, potendo un gruppo in una corrispondenza essere equivalente a sè stesso, in un'altra prevalente.

Corollario 1° — Un ciclo semplice è bene ordinabile, e si può rendere bene ordinato, limitato.

Cor. 2°. — Una catena di un ente a, la quale sia aperta ed illimitata, è bene ordinabile (§§ 29, 30): ed è bene ordinata ad un senso, prendendo a per ente originario, e il σ di ogni ente (o risp. il π) come suo immediatamente seguente (o risp. precedente).

Cor. 3°. — Una catena chiusa è bene ordinabile (§§ 30 Corollario, 44 Cor. 1°): ed è un gruppo bene ordinato limitato, prendendo per ente originario un ente qualunque p, e per finale quello q a cui tale ente corrisponde nella corrispondenza χ della catena, quando sia $(G - p \backsim G - q)_\chi$.

Cor. 4°. — Una catena aperta limitata è bene ordinabile (§§ 29-30), ed è un gruppo bene ordinato limitato, prendendo per ente originario il suo ente privo di σ.

Cor. 5°. — Una bicatena è bene ordinabile, e dà un gruppo bene ordinato a due sensi. Essa infatti consta delle due catene opposte di un suo ente qualunque (§ 23), per esempio a: rendendo bene ordinate queste due catene, secondo il Cor. 2° ed il Teorema precedente, e precisamente riducendo quella rispetto al criterio σ in un gruppo bene ordinato ad un senso secondo σ, l'altra in uno bene ordinato ad un senso secondo π, l'intero gruppo diviene bene ordinato, e precisamente bene ordinato a due sensi, tanto secondo σ quanto secondo π.

Considerando poi che la bicatena è un ciclo semplice (§ 30 Corollario), si conclude, anche in base al Corollario 1°, che si può ordinare in modo da essere un gruppo bene ordinato limitato.

Cor. 6°. — È bene ordinabile un gruppo, che in una conveniente corrispondenza si spezza in un gruppo di cicli semplici, rispetto ai quali, presi come enti, sia bene ordinabile (§ 41, § 44 Cor. 1°).

45. Teorema. — Se in una corrispondenza α un gruppo G equivale ad una sua parte propria, e, rispetto ad α, G si spezza in un gruppo di cicli semplici che sia bene ordinabile rispetto a questi cicli presi come enti (gruppo che può anche mancare) ed in una parte Γ necessariamente equivalente ad una relativa parte propria Γ', ed il gruppo $\Gamma - \Gamma'$, inoltre, è bene ordinabile, anche G è bene ordinabile.

Infatti (§ 27, Cor. 2°) il gruppo Γ non è che un gruppo di catene aperte ed illimitate, una per ciascuno degli enti di $\Gamma - \Gamma'$. Ognuna di esse si può rendere bene ordinata ad un senso col criterio dato dalla propria corrispondenza (§ 44, Cor. 2°), ed ognuno dei cicli semplici di G si può esso pure rendere bene ordinato limitato con l'analogo criterio (§ 44, Cor. 1°)

Il gruppo Γ è allora un gruppo bene ordinabile di gruppi bene ordinabili, e quindi (§ 41) è bene ordinabile esso pure rispetto agli enti primitivi. Sarà dunque tale anche il gruppo G dato, che si spezza in Γ e nel gruppo bene ordinabile (§ 41, § 44 Cor. 5) degli enti dei cicli semplici.

Corollario. — È bene ordinabile un gruppo G che in una conveniente corrispondenza privi di cicli equivalga ad una sua parte propria G_1, in modo che il gruppo $G - G_1$ sia bene ordinabile.

Capitolo VII.

CATENE NEI GRUPPI BENE ORDINATI PRINCIPIO D'INDUZIONE.

46. In un gruppo bene ordinato si costruisca la catena (§ 16) di un suo ente a rispetto al criterio σ che serve all'ordinamento. Essa costituirà chiaramente un gruppo bene ordinato, colla stessa legge del gruppo dato, e con a per ente originario.

Teorema. — La catena di un ente a di un gruppo bene ordinato contiene solo enti seguenti di a.

Infatti tale catena contiene chiaramente σa che è di Sa Se contenesse enti di Pa, potremmo sopprimerli — il gruppo restante conterrebbe a, e se contenesse un ente (che è di Sa giacchè quelli di Pa sono soppressi) conterrebbe il suo σ, giacchè questo pure è di Sa, e perciò non di Pa e quindi non soppresso. Dunque tal gruppo sarebbe un gruppo $(a)_\sigma$ parte della catena di a, il che è assurdo (§ 16).

Corollario. — La catena di un ente a di un gruppo bene ordinato è aperta, non esistendo in essa l'ente πa.

47. Teorema. — Se nella catena di un ente a di un gruppo bene ordinato manca un ente b di Sa, mancano anche tutti gli enti di Sb.

Infatti se vi fossero enti di Sb, sopprimendoli tutti resterebbe sempre un gruppo contenente a per ipotesi e contenente il σ di ogni ente che esso contiene; poichè se un ente si è soppresso esso è di Sb, e quindi il suo π o è b che manca per ipotesi, o è un ente di Sb e si è pure soppresso, e quindi manca il π di ogni ente mancante cioè esiste il σ di ogni ente rimasto. Il gruppo restante sarebbe perciò un gruppo $(a)_\sigma$, parte della catena di a, il che (§ 16) non può essere.

Corollario I. — Se la catena di a in un gruppo bene ordinato contiene un ente c, che è di Sa (§ 46), contiene tutti gli enti compresi fra a e c.

Corollario 2. — Se il gruppo dato è bene ordinato e se la catena del suo ente originario contiene l'ente finale, essa coincide con l'intero gruppo: e quindi se reciprocamente essa non coincide con l'intero gruppo, non contiene l'ente finale ed è perciò illimitata.

48. Teorema. — In un gruppo bene ordinato G se si dimostra una proprietà P per un suo ente a e si prova che se essa è vera per un ente lo è anche per il suo ente σ, tale proprietà resta provata per tutti gli enti della catena di a.

Invero il gruppo degli enti di G che godono la proprietà P contiene a, e se un ente anche il suo ente σ: dunque contiene la catena di a (§ 16).

Corollario. — Se un gruppo bene ordinato, illimitato ad un senso o limitato, è catena del suo ente originario, una proprietà che si dimostri per il suo ente originario e che, dimostrata per un ente, si provi vera per il suo ente σ, è provata per qualunque ente del gruppo.

Definizione. — Il fatto di cui si è parlato nel Corollario precedente, e che si verifica in certi gruppi bene ordinati, quello cioè che « una pro« prietà valida per l'ente originario e per l'ente σ di ogni ente per cui vale « è valida per qualunque ente del gruppo » è il fatto, così importante nella matematica, cui si dà il nome di *principio di induzione matematica* (*).

49. È vero anche il reciproco del Corollario del § precedente, cioè:

Teorema. — Se in un gruppo bene ordinato, illimitato ad un senso o limitato, vale il principio di induzione, esso è catena del suo ente originario.

Infatti se un gruppo qualunque Γ contiene l'originario a del gruppo dato G, l'ente σ di ogni ente di G che contiene, per il principio di induzione supposto in G la proprietà di appartenere a quel gruppo Γ varrà per ogni ente di G: e G apparterrà intero ai gruppi che contengono a

(*) Dedekind § 4 N. 59, 60 — Veronese, l. c. Introd. N. 39, *b*).

e il σ di ogni ente di G che contengono, dei quali quindi sarà il legame. Sarà dunque G, secondo la definizione del § 16, catena di a, c. d. d.

Corollario. — La condizione necessaria e sufficiente in un gruppo bene ordinato, illimitato ad un senso o limitato, affinchè valga in esso il principio d'induzione è che esso sia catena del proprio ente originario.

Capitolo VIII.

GRUPPI SEMPLICI.

50. Definizione. — I gruppi bene ordinati che hanno un ente originario di cui sono catena, si diranno *semplicemente ordinati* (*).

E si dirà *semplice* un gruppo che si possa rendere semplicemente ordinato.

Corollario 1. — I gruppi semplicemente ordinati sono tutte (§ 44 Cor. 2°, 4°) e sole (§ 50 Def.) le catene aperte.

Cor. 2. — Nei gruppi semplicemente ordinati vale il principio d'induzione (§ 48) e, fra i gruppi bene ordinati, vale in essi soli (§ 49).

Dalle proprietà esposte al § 18 per le catene, si deduce poi subito il

Cor. 3. — In un gruppo semplicemente ordinato ogni ente (eccetto l'originario) ne ammette uno immediatamente precedente.

E da questo discende che nella corrispondenza ordinatrice (§ 42) del gruppo semplicemente ordinato, G, di cui sia a l'ente originario, il gruppo G se è limitato equivale a sè stesso, se è illimitato equivale alla sua parte propria $G - a$.

Inoltre si vede dallo stesso Cor. 3° che la corrispondenza ordinatrice è identica alla corrispondenza della catena di a (§ 29), e si ha quindi il

Cor. 4. — La corrispondenza ordinatrice di un gruppo semplice è priva di cicli (§ 30).

51. Teorema. — Un gruppo Γ equivalente ad un gruppo semplice G è semplice esso pure.

Basta infatti ridurre G in un gruppo semplicemente ordinato e porre poi Γ in corrispondenza ordinata (§ 34) con G, per avere Γ bene ordinato e limitato od illimitato secondochè in un modo o nell'altro è G. In tali condizioni è chiaro che la catena dell'ente originario di Γ coincide col gruppo e che quindi Γ è semplicemente ordinato c. d. d.

52. Teorema. — Se un gruppo bene ordinato limitato non è semplicemente ordinato, esso è un gruppo sviluppabile.

(*) Cfr. Biasi l. c. § 5.

Infatti la catena del suo ente originario a sarà illimitata (§ 46 Cor. 2°) non coincidendo col gruppo per ipotesi. Perciò la catena di a è un gruppo bene ordinato illimitato, e quindi (§ 43) è sviluppabile ed è tale anche l'intero gruppo dato, di cui esso è parte.

53. Teorema. — In un gruppo semplicemente ordinato la catena di un suo ente b consta di b e di tutti i seguenti di b.

Infatti: 1° tale proprietà è vera per l'ente originario a, essendo appunto il gruppo (§ 50) catena di a, e gli enti diversi da a essendo tutti di $S\,a$; 2° se è vero per un ente b, lo è per σb giacchè la catena di σb differisce da quello di b solo per l'ente b, e $S(\sigma b)$ equivale ad $S\,b - \sigma b$. Per il principio d'induzione (§ 48) la proprietà è dimostrata per qualunque ente.

Corollario. — Se in un gruppo semplicemente ordinato si dimostra una proprietà per un suo ente b (anche non originario) e si prova che se è vera per un ente lo è per il suo ente σ, tale proprietà resta provata per tutti gli enti seguenti di b, giacchè $S\,b + b$ è catena di b, è bene ordinato, e quindi è semplicemente ordinato esso pure e vale per esso il principio d'induzione.

54. Definizione. — Diremo *parte fondamentale* (*parte* Z) (*) di un gruppo semplicemente ordinato il gruppo composto da un ente del gruppo e dal gruppo dei precedenti di quell'ente, il quale ente si dirà *finale* della Z. La parte Z, che ha un speciale ente finale b, si indicherà con Z_b.

In una parte fondamentale un ente si dirà *precedente* o *seguente, immediatamente* o no, di un altro, secondochè sia risp. nell'una o nell'altra condizione nel gruppo primitivo.

55. In una parte fondamentale Z_b di un gruppo G se comparisce un ente di G, p. es. c, compariscono pure i precedenti (eccetto, s' intende, per l'ente originario di G) giacchè se c è di Pb e d è di Pc, si ha (§ 31) che d è di Pb.

Se comparisce c (che non sia l'ente finale b) comparisce anche l'immediatamente seguente σc. Infatti: 1° o σc è b, ed allora esso è di Z_b per definizione; 2° o σc non è b, ed allora se σc non fosse di Z sarebbe del gruppo $S\,b$, nel quale pure si dovrebbe trovare il suo immediatamente precedente c (§ 44 Oss. 3°) essendo σc distinto da σb perchè c è distinto da b; ma c non è di $S\,b$, dunque è provato quanto si diceva. E perciò si ha il

Teorema. — In una parte fondamentale di un gruppo semplicemente ordinato se vi è un ente vi è l'immediatamente seguente, tranne per il finale, e vi son tutti i suoi precedenti.

Corollario I. — Se in una parte fondamentale di un gruppo semplicemente ordinato manca un ente del gruppo, mancano tutti i suoi seguenti.

(*) La notazione è presa dal Dedekind che l'usa per i numeri (§ 7. N. 98).

Cor. 2. — Se b è un ente non finale di una parte fondamentale Z di un gruppo, la Z_b dello stesso gruppo è parte propria della prima Z.

Cor. 3. — Di due distinte parti fondamentali di un medesimo gruppo semplicemente ordinato l'una è parte propria dell'altra.

Cor. 4. — Se in un gruppo semplicemente ordinato si sopprime una parte fondamentale, il gruppo restante è ancora semplicemente ordinato.

56. Teorema. — Ogni parte fondamentale di un gruppo semplicemente ordinato è catena del proprio ente originario.

Ed invero sia Z_b una parte fondamentale di un gruppo semplicemente ordinato G, ed a sia l'ente originario di Z_b e di G. Se la catena di a rispetto al gruppo Z_b fosse parte propria di Z_b, poichè essa contiene a, e se un ente il suo σ, senza eccezione giacchè non può contenere l'ente finale di Z_b (§ 47. Cor. 2°), essa sarebbe un gruppo $(a)_\sigma$ rispetto al gruppo G, e quindi la catena di a in G ne sarebbe parte, e sarebbe perciò parte propria di G, contro l' ipotesi che G sia semplicemente ordinato, e che quindi sia catena di a. Dunque la catena di a in Z_b non è parte propria di Z_b ma coincide con Z_b.

Corollario. — Nella corrispondenza ordinatrice di un gruppo semplicemente ordinato, una parte fondamentale è un gruppo semplicemente limitato.

57. Se di un gruppo semplicemente ordinato prendiamo tutte le parti fondamentali ed associamo ciascuna di essi al proprio ente finale, stabiliamo una corrispondenza fra il gruppo dato G ed il gruppo delle Z nel quale si considerino le Z come enti, ed in tale corrispondenza i due gruppi sono equivalenti.

Se diciamo una Z seguente o precedente di un'altra quando nel gruppo dato l'ente finale della prima è seguente o risp. precedente di quello dell'altra, si vede chiaramente che così risulta il gruppo delle Z ordinato e in corrispondenza ordinata con G, ed esso pure è semplicemente ordinato, limitato o no, secondochè è limitato o no il gruppo G.

Definizione. — Quando diremo *gruppo ordinato* delle Z di un gruppo semplicemente ordinato intenderemo il loro gruppo ordinato nel modo ora detto.

Cor. — Il gruppo ordinato delle Z di un gruppo semplicemente ordinato sodisfa al principio d'induzione.

CAPITOLO IX. (*)

GRUPPI FINITI.

58. I gruppi semplicemente ordinati sono o limitati od illimitati: i gruppi semplici devono poter dare origine o agli uni od agli altri (§ 50). Senza escludere, almeno per ora, che uno stesso gruppo semplice, possa, diversamente ordinato, dare origine agli uni ed agli altri, studiamo separatamente i due casi.

Definizione. — Diremo *finito* un gruppo semplice quando possa farsi divenire semplicemente ordinato e limitato (**).

Corollario 1. — Esistono gruppi finiti p. es. quello di uno o due enti (§ 39).

Cor. 2. — Un gruppo non ordinabile non è finito.

Cor. 3. — Un gruppo equivalente ad uno finito è finito esso pure.

Cor. 4. — Ogni parte fondamentale di un gruppo semplicemente ordinato è un gruppo finito (§ 56, Cor.)

Cor. 5. — Il gruppo delle parti fondamentali Z di un gruppo finito, considerando le Z come enti, è finito esso pure. (§ 57).

59. Teorema. — In un gruppo finito nessuna parte propria può essere equivalente all' intero gruppo (***).

Si consideri il gruppo G dato semplicemente ordinato (come devesi poter fare per la definizione di gruppo finito) e si consideri il gruppo ordinato delle parti fondamentali (gruppi Z) di G (§ 57). Esso è semplicemente ordinato limitato, e quindi sodisfa al principio d'induzione.

Il teorema è evidentemente vero per l'originario di tali gruppi, che consta di un solo ente. Dimostriamo ora che supposto vero per uno di quei gruppi Z_a, è vero anche per l'immediatamente seguente che si ottiene da esso aggiungendovi un altro ente $b = \sigma a$. Sia Γ una parte di $Z_b = Z_a + b$, e sia, in qualche corrispondenza χ, se è possibile $[\Gamma \backsim \Gamma_b]_\chi$. Allora:

(*) Per questo capitolo vedi BETTAZZI: Gruppi finiti ed infiniti di enti (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Vol. *XXXI*).

(**) V. CANTOR *Zur Lehre* ecc. pag. 60. Nota. — Tale autore peraltro non richiede, per lo meno esplicitamente, il principio d'induzione (che qui si dà dicendo il gruppo semplicemente ordinato) sebbene lo usi poi nelle dimostrazioni. Il DEDEKIND (l. c. § 5 N. 64) dice finiti i gruppi non infiniti (secondo il nostro linguaggio, non sviluppabili); ma pare troppo vasto tale concetto per rispondere a ciò che in pratica si intende per aggregati finiti (Vedi Introduzione) Il nostro gruppo finito corrisponde, quando è semplicemente ordinato e limitato, a quello che il VERONESE nei suoi *Fondamenti di Geometria* al N. 35 dell'Introduzione definisce come *serie naturale o limitata di 1. specie*.

(***) CANTOR *Zur Lehre* etc. pag. 60, Nota. — VERONESE l. c. Introd. N. 48 *f*).

1. o Γ contiene b, ed allora soppresso b in Γ ed in Z_b, si ha facilmente che $\Gamma - b \backsim Z_a$, contro l'ipotesi, essendosi supposto per Z_a che nessuna sua parte sia equivalente a esso, ed essendo $\Gamma - b$ parte di Z_a.

2. o Γ non contiene b; allora Γ è parte anche di Z_a. Sopprimendo b in Z_b, ed in Γ il corrispondente b' di b avremo $\Gamma - b' \backsim Z_a$, il che non può essere, essendo $\Gamma - b'$ parte di Z_a.

Si conclude che Z_b non è mai equivalente ad una sua parte propria.

Per il principio d'induzione tale proprietà sarà vera per tutti gli enti del gruppo della Z, e quindi anche per il suo ente finale, che è il gruppo proposto nel teorema. Il teorema è dunque dimostrato.

Cor. 1. — I due concetti di gruppo finito e di gruppo sviluppabile si escludono a vicenda (§ 12).

Cor. 2. — Nessuna parte di un gruppo finito può essere sviluppabile (§ 14).

60. Teorema. — Le parti di un gruppo finito sono esse pure finite.

Ordinato infatti semplicemente il gruppo dato G in modo che sia limitato (§ 58), se G_1 è una sua parte, si dica in essa un ente precedente o seguente ad un altro quando a questo sia risp. precedente o seguente in G. Il gruppo G_1 sarà allora chiaramente ordinato.

Dico che in tal modo esso è anche bene ordinato. Sia invero un suo ente a_1 (non finale) e si consideri il gruppo degli enti di G, ciascuno dei quali è precedente di tutti gli enti che in G_1 segnono a_1. Tale gruppo parte di G può mancare, ed allora l'ente σa_1 non è di tal gruppo e quindi è non precedente di tutti gli enti che in G_1 seguono a_1, e non potendo essere seguente di alcuno di essi, che sarebbe altrimenti compreso fra a e σa_1, sarà uno di essi, e sarà perciò l'immediatamente seguente di a_1. Se il gruppo degli enti di G ciascuno dei quali precede tutti gli enti di G_1 seguenti di a_1 esiste, esso è chiaramente bene ordinato e non può essere illimitato giacchè altrimenti sarebbe (§ 43) sviluppabile, mentre G non lo è. Allora se b_1 è il suo ente finale, si vede come nel caso precedente che σb_1 è ente di G_1; e precisamente è l'immediatamente seguente ad a_1. Si conclude che G_1 è bene ordinato.

Inoltre G_1 è limitato, altrimenti esso sarebbe sviluppabile (§ 43) ed allora tale sarebbe anche G, che invece è finito.

Ed infine se G_1 non fosse catena dal suo ente originario a', costruita in esso la catena Γ di a', che allora dovrebbe essere illimitata (§ 46 Cor. 2), il gruppo degli enti di G precedenti qualcuno di Γ sarebbe ancora un gruppo (a), parte di G, il che non può essere.

La parte G_1 soddisfa adunque a tutte le condizioni per essere un gruppo finito c. d. d.

Corollario. — Un gruppo che in qualche corrispondenza sia suvvalente ad uno finito è finito esso pure. (§ 58, Cor. 3°).

61. Teorema. — Se un gruppo finito, Γ, è o suvvalente, o equivalente, o prevalente ad un gruppo qualunque G in una speciale corrispondenza, la stessa relazione si avrà in tutte le possibili corrispondenze fra Γ e G

Se infatti con una conveniente corrispondenza α ed un altra qualunque β si avesse

$$(\Gamma < G)_\alpha, \quad (\Gamma \gtrsim G)_\beta,$$

oppure

$$(\Gamma \sim G)_\alpha, \quad (\Gamma \gtrless G)_\beta;$$

oppure

$$(\Gamma > G)_\alpha, \quad (\Gamma \lesssim G)_\beta;$$

nella corrispondenza composta $\beta\alpha$ sarebbe Γ prevalente o suvvalente a sè stesso, e quindi equivalente ad una propria parte, il che non può darsi con Γ finito.

Corollario 1. — Per giudicare la relazione di potenza che lega un gruppo finito ad un'altro gruppo qualunque, basta esaminare che cosa accade in una sola corrispondenza (Cfr. § 9).

Cor. 2. — Le parti proprie di un gruppo finito sono di potenza minore al gruppo, essendo suvvalenti ad esso nella corrispondenza identità.

Cor. 3. — Di due distinte parti fondamentali di un medesimo gruppo semplicemente ordinato una è di potenza minore dell'altra (§ 55 Cor. 3°).

62. Teorema. — In qualunque modo si renda bene ordinato un gruppo finito, esso dovrà essere sempre limitato e semplicemente ordinato.

Infatti se mancasse la prima proprietà sarebbe (§ 45) sviluppabile; e tale sarebbe pure se, verificata questa, il gruppo non fosse semplicemente ordinato (§ 52). In ogni caso quindi (§ 59, Cor. 1°) il gruppo non sarebbe finito.

63. Teorema. — Un gruppo finito se è ordinato è sempre bene ordinato.

Infatti sia G il gruppo finito, e si supponga che esso sia bene ordinato (il che è sempre possibile per lo meno in un modo) (§ 58) e quindi (§ 62) che sia semplicemente ordinato. Si consideri il gruppo ordinato delle sue parti fondamentali Z (§ 57): esso sodisfa al principio d'induzione (§ 57, Cor.) e di esso fa parte G come ente finale. Se dunque si dimostrerà vero il teorema per il gruppo Z ente originario, e per l'immediatamente seguente di un gruppo Z per cui è vero, si sarà provato per ogni gruppo, e quindi anche per G.

1° Il teorema è chiaramente vero per il gruppo originario, formato da un ente.

2° Sia supposto vero il teorema per un gruppo Z_a, e si consideri l'immediatamente seguente Z_b formato da Z e da $b = \sigma c$, che è ente di G e non di Z_a.

Se Z_b è ordinato, sopprimendo b e usando gli stessi criteri di seguente e precedente, il gruppo restante Z_a è ancora ordinato, e quindi, secondo la ipotesi, bene ordinato. Gli enti di Z_a precedenti b in Z_b formano un gruppo bene ordinato, il quale, perchè parte di un gruppo finito, è finito, (§ 60) e quindi limitato (§ 62) ed ha dunque un ente finale b'. Di tale ente è immediatamente seguente il b in Z_b. L'ente immediatamente seguente di b in Z_a sarà un certo ente b, che risulterà ora immediatamente seguente di b' in Z_b. E tale ultimo gruppo sarà perciò bene ordinato c. d. d.

Corollario 1. — Un gruppo finito comunque sia ordinato è limitato e semplicemente ordinato (§ 62).

Cor. 2 — Un gruppo finito è sempicemente ordinato anche scambiando le parole *precedente* e *seguente* e quelle *finali* ed *originarie* o brevemente *rovesciando il gruppo* (*)

Cor. 3. — Un gruppo ordinato in cui qualche ente non abbia l'immediatamente seguente non è finito.

64. Si è visto (§ 44, Cor. 1°) che se in una corrispondenza priva di cicli un gruppo G è equivalente a sè stesso, esso è bene ordinabile in modo da essere limitato. Questo ordinamento consiste nel considerare un ente qualunque p del gruppo, nell'indicare con σ di un ente il suo corrispondente nella corrispondenza, eccetto per l'ente q che avrebbe per corrispondente p, e nel prendere come gruppo Sb quello composto di tutti i gruppi che non contengono b, contengono σb, e l'ente σ (quando c'è) di qualunque ente che essi contengono. Ora dico che se il gruppo non è sviluppabile in tale ordinamento, il gruppo è semplicemente ordinato. Infatti, se in questa corrispondenza il gruppo non fosse catena di p, costruita la catena di p, essa, non coincidendo col gruppo, non dovrebbe contenere l'ente q privo di σ (§ 47, Cor. 2°) e quindi essa sarebbe illimitata e perciò costituirebbe un gruppo sviluppabile e tale sarebbe G con-tro l'ipotesi. Si conclude che il gruppo risulta così semplicemente ordinato: ed essendo limitato, sarà finito.

D'altra parte sappiamo che la corrispondenza ordinatrice di un gruppo semplicemente ordinato se il gruppo è limitato fa corrispondere il gruppo a sè stesso (§ 42) ed è priva di cicli (§ 52, Cor.), e quindi si ha il

Teorema. — La condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo non sviluppabile sia finito è che possa stabilirsi una corrispondenza priva di cicli, nella quale il gruppo sia equivalente a sè stesso.

65. Un gruppo di enti è definito quando si possa giudicare se un ente qualunque gli appartiene o no. A tale scopo dovranno esser date leggi colle

(*) Cfr. Veronese, l. c. Introduzione. N. 39. e). Il Cantor, (*Zur Lehre, ecc.*, pag. 61. Nota) dà questo come una *condizione* ad un gruppo per essere finito: secondo questo Corollario essa è inutile.

quali poter fare un simile riconoscimento. Tra queste leggi è utile spesso includere la legge detta « *arbitrio* » la quale fa dipendere la presenza degli enti di un gruppo, soltanto della volontà dell'operatore.

Per disciplinare l'uso di essa in modo anche che si dia immagine di quanto accade nella realtà, converremo che tale legge serva solo pei gruppi finiti, ammettendo il

Postulato (*) 1°: « Non si possono prendere ad arbitrio « enti che costituiscano un gruppo non finito, sia « che si voglian togliere da un gruppo solo (fosse « pur quello di tutti gli enti) sia che debban esser « presi parte da alcuni, parte da altri gruppi.

2°: « Si possono prendere ad arbitrio enti uno per « ciascuna di speciali parti (distinte o no) di un grup- « po, se queste parti, considerate come enti, costi- « tuiscono un gruppo finito.

3°: « Si possono prendere ad arbitrio enti distinti « da un gruppo G, i quali debbono costituire un grup- « po equivalente ad uno qualunque finito dato, che « sia di potenza minore a G.

Corollario. — Si può prendere ad arbitrio un ente di un gruppo qualunque. »

66. Se occorre estrarre da un gruppo una parte che sia sviluppabile, per quanto si soglia usare talora la frase *ad arbitrio*, pure in omaggio al postulato precedente dovrà intendersi che sia data una legge diversa dall'arbitrio colla quale si possano ottenere tutti quegli enti, o almeno tutti all'infuori di quelli di un gruppo finito che siano dati ad arbitrio, cioè una legge colla quale si possa giudicare se un ente del gruppo appartiene alla parte in questione.

Può talora essere utile il considerare una parte di un gruppo non finito G ottenuta prendendo un ente, *che non importa del resto quale sia*, per ciascuna di certe sue parti costituenti esse pure (considerate come enti) un gruppo non finito. Per quanto si è detto, occorrerebbe, perchè un tal gruppo fosse definito, aver nota una legge, applicando la quale a ciascuna di quelle parti ne venga determinato un ente, e ciò qualunque sia quella parte. Non potendo, per la ampiezza che abbiamo nel concetto di gruppo, asserirsi che tale legge possa darsi in generale, si vede chiara l'utilità della distinzione dei gruppi in due categorie. Dicendo *legge di scelta* (**) una legge con la quale in un gruppo si determini *un ente* (del resto qualunque) in *ciascuna* delle sue parti, dovremo distinguere i gruppi per i quali tale legge di scelta è nota, da quelli per i quali essa non è nota.

(*) A tale proposizione, che intendiamo accettare, diamo il nome di Postulato, non essendo tale che, per ora, sembri potersi provare. La cosa sembrerà così rigorosa anche a chi dissentisse dal fare uso di simili proposizioni.

(**) Bettazzi. — Sui punti di discontinuità delle funzioni di variabile reale. - (Rendic. del Circ. Mat. di Palermo. T. IV).

Non si esclude che possano aversi gruppi per i quali esistano leggi di scelta per *speciali* parte di essi. P. es. nei gruppi finiti possiamo dire fin d'ora esistere una legge di scelta, l'arbitrio (§ 65, Post. 2), per i gruppi Z loro parti fondamentali, giacchè questi, considerati come enti, costituiscono un gruppo finito (§ 58, Cor. 5).

Capitolo X.

GRUPPI SEMPLICEMENTE SVILUPPABILI.

67. Definizione. — Si dirà *gruppo semplicemente sviluppabile* quel gruppo semplice che si possa ordinare semplicemente in modo da essere illimitato (*). Se un tal gruppo si consideri quando appunto è semplicemente ordinato ed illimitato, si dirà per brevità che si è reso *normale*.

Cor. 1. — Il gruppo di cui si fa parola è sviluppabile (§ 43).

Cor. 2. — Le qualità di gruppo finito e di semplicemente sviluppabile si escludono a vicenda (§ 59, Corollario 1).

Cor. 3. — Un gruppo semplice o è finito o è semplicemente sviluppabile.

Cor. 4. — Un gruppo equivalente ad uno semplicemente sviluppabile, è tale esso pure.

Cor. 5. — Il gruppo delle parti fondamentali Z di un gruppo semplicemente sviluppabile che si sia reso normale, quando si considerano le Z come enti è semplicemente sviluppabile esso pure (§ 57) (**).

68 Teorema. — Di ogni gruppo sviluppabile fa parte un gruppo semplicemente sviluppabile (***).

Sia G un gruppo sviluppabile ad α la corrispondenza nella quale G è equivalente ad una sua parte propria G': e sia a un ente di G e non di G'. Si costruisca la catena Γ di a prendendo come ente σ di un ente di G il corrispondente in G': tale catena deve essere illimitata, ogni ente avendo il suo σ, e deve essere aperta non essendo a per ipotesi σ di nessun ente. E siccome nella corrispondenza α una tale catena è bene ordinata illimitata ad un senso (§ 44, Cor. 2), così essa è semplicemente sviluppabile c. d. d.

Corollario. — Esistono dei gruppi semplicemente sviluppabili (§ 12).

(*) Dedekind § 6, N. 71. — Cfr. Veronese l. c. Introd. N. 89. Def. III. — Il Dedekind dice tal un gruppo *semplicemente infinito* (Vedi Nota al nostro § 12, Introduzione); questo gruppo corrisponde, quando è ordinato, a quello che il Veronese dice *serie illimitata di 1ª specie.*

(**) Veronese l. c. N. 89 i).

(***) Dedekind § 6 N. 72.

69. Abbiamo visto (§ 44) che se un gruppo G, di cui p è un ente, equivale a $G-p$ in una corrispondenza priva di cicli, il gruppo G è bene ordinabile, dicendo gruppo dei seguenti Sb di un ente b quello composto dei gruppi i quali non contengono b, contengono σb e contengono l'ente σ di ogni ente che comparisce in essi.

Dico ora che in tale corrispondenza il gruppo è semplicemente ordinato. Infatti, se non lo fosse, la catena Γ del suo ente originario p sarebbe parte propria di G, e gli enti di G non appartenenti a Γ formerebbero un ciclo: giacchè G corrisponde all'equivalente $G-p$, e Γ all'equivalente $\Gamma-p$, e sopprimendo risp. in G e $G-p$ le parti Γ e $\Gamma-p$ corrispondenti, le restanti sarebbero due gruppi identici equivalenti nella corrispondenza e darebbero perciò un ciclo, che invece non deve esistere. Dunque G è semplicemente ordinato, e, perchè illimitato, esso è semplicemente sviluppabile.

D'altra parte si vide (§ 50) come reciprocamente la corrispondenza ordinatrice di un gruppo semplicemente ordinato illimitato fa corrispondere al gruppo G il gruppo $G-p$, dove p è un ente di G, e ciò in una corrispondenza senza cicli. Se ora si osserva che data una corrispondenza senza cicli fra G e $G-p$ scambiando in G l'ente p con un altro qualunque a ed in $G-p$ al posto di a che si sopprime ponendo p si ottiene una nuova corrispondenza senza cicli, si conclude il

Teorema. — La condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo G sia semplicemente sviluppabile è che preso in esso un ente qualunque a, fra G e $G-a$ si possa stabilire una corrispondenza senza cicli, nella quale G e $G-a$ siano equivalenti.

70. Teorema. — Se un gruppo è parte di uno semplicemente sviluppabile, p. es. G, ed è tale che in esso se vi è un ente ve ne siano anche di quelli che siano seguenti in G quando G è semplicemente ordinato, sarà anche Γ semplicemente sviluppabile (*).

Sia infatti G già semplicemente ordinato ed illimitato (§ 67 def.). Se, essendo a e b due enti di Γ diciamo a seguente o precedente di b (a è di Sb, risp. a è di Pb) secondochè accade risp. l'un caso o l'altro in G, evidentemente il gruppo Γ è ordinato (§ 31).

Dico inoltre che Γ è così bene ordinato ed illimitato.

1° Invero dapprima ogni ente di Γ ne ammette dei seguenti per le condizioni richieste dal teorema.

2° Ogni ente di Γ ammette in Γ l'immediatamente seguente. Ed invero se ciò non fosse, e per un ente b di Γ accadesse che per ogni ente di $S'b$ ne esistesse uno compreso fra b ed esso, se c di $S'b$ si formi il gruppo G' composto degli enti di Γ che sono seguenti di b e non seguenti di c, e degli altri enti di G che sono compresi fra due qualunque degli ora nominati.

(*) Cfr. Dedekind, § 8, N. 122 — Veronese l. c. N. 39 e). — Cenni anche in Cantor, Acta Math. pag. 313.

In tale gruppo G' se vi sono due enti di G vi sono chiaramente anche tutti quelli di G compresi fra essi. Se in essi vi è un ente, vi è il suo immediatamente precedente in G, giacchè: I. o esso è ente di Γ e quindi di $S'b$ e $P'c$ o ne esiste per ipótesi un altro di Γ che è suo precedente ed è di $S'b$, il quale dunque è ancora in G', ossia ve ne sono in G' dei precedenti quell'ente in G, e quindi vi è anche il suo immediatamente precedente: II. o esso è ente non di Γ ma di G compreso fra due α, β di Γ, ed ammette per ciò solo in G dei precedenti (p. es. α o β) e quindi anche il suo immediatamente precedente. Se in G' vi è un ente, che non sia c, vi è anche l'immediatamente seguente essendovi, per ipotesi, tutti gli enti compresi fra esso e c: per c invece non esiste in G' l'immediatamente seguente. I gruppi G' e $G' - c$ sono dunque equivalenti facendo corrispondere ad ogni ente di $G' - c$ il suo immediatamente seguente; dunque G' è sviluppabile, il che invece non può essere, essendo G' parte della Z che ha c per ente finale, la quale è gruppo finito. Si conclude che ogni ente di Γ ammette in Γ l'immediatamente seguente. Sarà Γ dunque un bene ordinato secondo σ.

3° Dico infine che, così, Γ è semplicemente ordinato. Infatti vi è un ente in Γ senza precedenti; giacchè se ogni ente di Γ avesse precedenti e preso un ente qualunque di Γ, si costruisse il gruppo G'' composto degli enti che lo precedono in Γ e di quelli di G compresi fra due di questi, si proverebbe come nel caso precedente che G'' è sviluppabile, il che è impossibile.

Inoltre se a è il suo ente originario, la corrispondenza ordinatrice fra Γ e $\Gamma - a$ non può avere cicli. Se infatti ne avesse, ed uno di essi fosse Γ_0, costruito il gruppo G_0 di tutti gli enti di G tali che ciascuno o è di Γ_0 o è in G compreso fra due enti di Γ_0, sarà G_0 chiaramente tale che per ogni suo ente esistono in essi gli immediatamente seguente e precedente, e quindi G_0 sarà un ciclo nella corrispondenza ordinatrice di G, mentre invece essendo G semplice tale corrispondenza non può contenere cicli (§ 50 Cor. 4°). Sarà dunque priva di cicli anche la corrispondenza ordinatrice di Γ, e Γ sarà perciò semplicemente ordinato (§ 69).

È così provato che Γ è semplicemente sviluppabile esso pure.

Corollario 1. — Il gruppo ottenuto da uno semplicemente sviluppabile, che si sia reso normale sopprimendovi una parte fondamentale, è semplicemente sviluppabile esso pure, ed è semplicemente ordinato nella stessa corrispondenza ordinatrice del primitivo.

Cor. 2. — In ogni parte finita di un gruppo semplicemente sviluppabile che si sia reso normale vi è un ente del quale nessun altro è seguente.

71. Teorema. — In ogni parte Γ di un gruppo semplicemente sviluppabile che si sia reso normale, e che sia allora p. es. G, deve esistere un ente tale che in Γ non comparisca nessuno degli enti che sono suoi precedenti in G.

Ed in vero se Γ contiene l'originario di G, questo è l'ente in questione. Se non contiene l'originario di G, che precederà allora tutti gli enti di Γ, si dica G_0 il gruppo (allora esistente) di tutti gli enti di G precedenti tutti gli enti di Γ. Se G_0 contenesse l'ente σ di ogni proprio ente, contenendo l'originario di G, pel principio d'induzione conterrebbe l'intero gruppo G, il che non dev'essere; dovrà dunque contenere almeno un ente a senza il suo σ e quindi nessuno dei seguenti, giacchè se contenesse b seguente di a, essendo a e b per le definizioni di G_0 precedente tutti gli enti di Γ, tale sarebbe anche σa compreso fra a e b, e σa sarebbe di G_0 contro l'ipotesi. E di tali enti privi di seguenti dev'essercene uno solo, giacchè di due uno sarebbe seguente all'altro, e questo seguente dovrebbe non comparire in G_0. Se a è dunque l'ente in questione, l'ente σa deve essere non precedente a tutti quelli di Γ; e non potendo essere seguente a nessuno, giacchè se fosse seguente a b dovrebbe essere b compreso fra a e σa, il che non può essere, dovrà σa essere un ente appartenente a Γ, del quale in Γ non comparisce nessun precedente c. d. d.

È chiaro che di tali enti ne esiste uno solo.

72. Teorema. — Una parte di un gruppo semplicemente sviluppabile è o finita o semplicemente sviluppabile (*).

Ed invero si consideri che il gruppo si sia reso normale. Se Γ è la sua parte: — 1° o sarà tale che esista in essa un ente b del quale in Γ non figura nessun seguente (e di tali enti ve ne dovrà essere al più uno) ed allora Γ è parte (propria o no) della Z che ha b per ente finale, ed è dunque finito; — 2° o non vi è nessun ente nella condizione di b, ed allora per il teorema del § precedente, sarà Γ semplicemente sviluppabile.

Corollario 1. — Le parti finite di un gruppo semplicemente sviluppabile sono tutte e sole quelle in cui comparisce un ente, del quale nessuno dei seguenti comparisca nella parte (§ 71).

Cor. 2. — Ogni parte sviluppabile di un gruppo semplicemente sviluppabile è un gruppo semplicemente sviluppabile.

Cor. 3. — Le parti di un gruppo semplice (finito o semplicemente sviluppabile) sono gruppi semplici, (§ 60, 72).

(*) Dedekind, § 8. N. 123.

CAPITOLO XI.

COMPOSIZIONE DEI GRUPPI SEMPLICI.

73. Teorema. — Se G è un gruppo finito ed a un ente che non gli appartiene, è finito anche il gruppo $G + a$ (*).

Infatti G, perchè finito, si può ordinare in modo da essere semplicemente ordinato limitato: se b è il suo ente finale e a si dice seguente a b, il gruppo $G + a$ è chiaramente semplicemente ordinato limitato, e quindi $G + a$ è finito.

74. Teorema. — Il gruppo composto di due gruppi finiti è un gruppo finito (**).

Siano infatti G_1 e G_2 i gruppi e indichi G'_2 il gruppo degli enti di G_2 distinti da quelli di G_1; esso pure sarà finito ed il gruppo composto sarà $G_1 + G'_2$. Se G'_2 non esiste, il teorema è evidente. Se G'_2 esiste si ordini G'_2 e sia a il suoente originario. Allora — 1° essendo finito G_1 tale è $G_1 + a$ (§ 73) — 2° essendo finito il gruppo composto di una Z_b di G'_2 lo sarà il gruppo composto di G_1 e della Z_b immediatamente seguente, che risulta dal precedente gruppo aggiungendovi l'ente σb. Dunque per il principio d'induzione (§ 58, Cor. 5.) sarà finito anche il gruppo composto di G_1 e della Z che ha per ente finale l'ente finale di G'_2 cioè il gruppo $G_1 + G'_2$ *c. d. d.*

75. Teorema. — È finito il gruppo composto di più gruppi finiti, i quali considerati come enti costituiscano un gruppo finito (***).

Si ordini il gruppo di tali gruppi e sia, così ordinato $G_1, G_2, \ldots G_p$. Si formino le parti fondamentali Z_{g_r} di tale gruppo: e si consideri il loro gruppo ordinato. Il suo ente originario $Z_{g_1} = G_1$ è un gruppo finito: e se uno dei suoi enti Z_{g_r} è gruppo finito, tale è il suo immediatamente seguente (§ 74) essendo esso uguale alla somma dei due gruppi finiti di cui uno è Z_{g_r} e l'altro il σ di G_2. Dunque poichè (§ 57 Cor. 5) il gruppo della Z è finito, varrà il principio d'induzione, e sarà finito anche l'ente finale Z_{g_p} che è il gruppo in questione *c. d. d.*

76. Teorema. — Il gruppo composto di più gruppi finiti i quali, considerati come enti, costituiscono un gruppo o finito o semplicemente sviluppabile.

Sia Γ il gruppo dato dei gruppi finiti che si suppongano dapprima non aventi a due a due enti comuni e che si indichino con G_r. Si renda Γ normale considerando enti i gruppi finiti, e si ordinino questi gruppi; se si fa

---

(*) DEDEKIND, § 5, N. 70.

(**) DEDEKIND, § 14, N. 169.

(***) Cfr. DEDEKIND, § 14, N. 170.

l'ordinamento secondo i gruppi parziali (§ 37), il gruppo composto Γ_0 apparisce ordinato. Esso è anche bene ordinato avendo ogni ente per ente σ o il σ del proprio gruppo parziale o l'originario del gruppo immediatamente seguente.

Inoltre Γ sarà catena del proprio ente originario, e quindi sarà semplicemente ordinato. Ed infatti sia un gruppo G_0 che contenga il suo ente originario ed il σ di ogni suo ente che contiene. Esso contiene tutti gli enti del gruppo G_1 originario nel gruppo semplicemente sviluppabile dei G_r, contenendo il suo ente originario (che si è preso originario in Γ_0) ed il σ di ogni suo ente, ed essendo il gruppo in questione finito. Se poi G_0 contiene un gruppo G_r contiene tutto il gruppo σG_r, giacchè conterrà il σ del finale di G_r, che è l'originario del gruppo σG_r, ed il σ di ogni ente che contiene, e quindi tutto σG_r che è finito. Essendo il gruppo della G_r un gruppo semplicemene ordinato di tali gruppi presi come enti, si conclude che G_0 li contiene tutti, e quindi contiene l'intero Γ_0. Dunque ogni gruppo che contenga l'ente originario di Γ_0 ed il σ di ogni ente che contiene conterrà l'intero Γ_0, e Γ sarà semplicemente ordinato.

È provato così che Γ_0 è semplicemente sviluppabile, c. d. d.

Supponiamo ora che i gruppi G_r possano avere anche degli enti comuni e ad ogni gruppo G_r sostituiamo quello G'_r degli enti di esso non comuni a nessuno dei gruppi G_r che lo precedono in Γ quando è reso normale. Chiaramente il gruppo composto dei gruppi G_r è identico a quello composto dei G'_r. Alcuni dei gruppi G'_r potendo essere nulli e restando così soppressi, il gruppo Γ' dei gruppi G'_r considerati come enti sarà equivalente a Γ o ad una sua parte, e sarà quindi (§ 72) un gruppo finito o semplicemente sviluppabile di gruppi finiti senza enti comuni G_r ed il loro gruppo composto o per il Teor. del § 75 o per la parte già dimostrata dal Teorema attuale, sarà risp. o finito, o semplicemente sviluppabile.

Con ciò il teorema è pienamente dimostrato.

Osservazione. La prima parte della dimostrazione ha provato che un gruppo semplicemente sviluppabile i cui enti sono gruppi finiti i quali non hanno due a due enti comuni, è, rispetto a questi enti semplicemente sviluppabile.

77. Teorema. — Il gruppo composto di più gruppi uno almeno dei quali è sviluppabile, è tale esso pure.

Ed invero (§ 14) una sua parte, è, per ipotesi, un gruppo sviluppabile.

78. Teorema. — È semplicemente sviluppabile il gruppo (svilupabile (§ 77)) composto di un gruppo semplicemente sviluppabile e di uno finito.

Se G è il gruppo finito è Γ l'altro, supposti dapprima senza enti comuni, si ordini il gruppo composto secondo i gruppi parziali G e Γ (§ 37) essendo G precedente a Γ. Il gruppo composto, che così è bene ordinato, è anche semplicemente ordinato. Infatti si consideri un gruppo G_0 che contenga il suo ente originario, e l'immediatamente seguente di ogni ente che comparisce in essi. Un tal gruppo G_0 contiene l'originario di G e, se un ente, anche l'immediatamente seguente, e valendo il principio d'induzione per il gruppo G che è finito, si ha che contiene tutti gli enti di G. Inoltre G_0 contenendo il finale di G contiene il suo ente σ, che è l'originario di Γ, e l'ente σ di ogni ente σ di Γ che contenga, e quindi essendo Γ un gruppo semplicemente ordinato, contiene tutto Γ. Dunque G_0 contiene gli enti di G e Γ; perciò il gruppo proposto è comune a tutti gruppi della natura di G_0 ed è quindi catena dell'ente originario, ossia è un gruppo semplicemente ordinato, e, perchè illimitato, è semplicemente sviluppabile.

Se G e Γ hanno enti comuni vale pure il teorema, potendosi sostituire a G il gruppo G' degli enti di G non comuni a Γ, che pure è finito, e per il quale vale la dimostrazione precedente.

79. Teorema. — Il gruppo composto di due gruppi semplicemente sviluppabile è tale esso pure.

Infatti se dapprima tutti gli enti dell'uno G_1 sono distinti da quelli dell'altro G_2, si pongano G_1 e G_2 in corrispondenza ordinata (Cfr. § 34) dopo averli resi normali. Nel gruppo composto G si prenda come originario l'originario di G_1, come immediatamente seguente di esso l'originario di G_2, per σ di questo il σ dell'originario di G_1, ed in generale per σ di un ente di G_1 il corrispondente di G_2, e per σ di un ente di G_2 il σ del corrispondente di G_1. Il gruppo sarà così chiaramente bene ordinato. Inoltre sarà semplicemente ordinato, giacchè se un gruppo Γ contiene il suo originario e, contenendo un suo ente, contiene il suo σ, allora se contiene un ente b p. es. di G_1 deve contenere il σ in G che è il corrispondente di G_2, ed il σ di questo in G, che è il σ di b in G_1 — dunque Γ contiene l'originario di G_1, e se un ente di esso il suo σ in G_1, e perciò essendo G_1 semplicemente ordinato, contiene l'intero G_1. Così contiene anche G_2, e quindi l'intero gruppo G; dunque sarà G catena del suo ente originario, e perciò sarà semplicemente ordinato.

Se i due gruppi contengono qualche ente comune, in uno dei due gruppi si sopprimono tali enti e resterà di esso una parte che sarà un gruppo o finito o semplicemente sviluppabile (§ 72). Il gruppo cercato sarà quindi composto o di un gruppo semplicemente sviluppabile e di uno finito o di due semplicemente sviluppabili, e o per il Teorema del § 78 o per la prima parte del Teorema attuale si concluderà che il gruppo cercato è semplicemente sviludpabile, c. d. d.

80. Teorema. — Il gruppo composto di più gruppi semplicemente sviluppabili (considerato ciascuno come un ente) un gruppo finito, è un gruppo semplicemente sviluppabile (*).

Dimostrazione, per induzione analoga a quella del § 75 applicando il Teorema del § 79.

81. Teorema. — Il gruppo composto di più gruppi semplicemente sviluppabili costituenti (considerati cia-

---

(*) Vedi cenni in CANTOR - Acta Math, Vol. II, pagg. 312. 365.

scuno come un ente) un gruppo semplicemente sviluppabile, è esso pure un gruppo sempicemente sviluppabile. (*)

Infatti si suppongano dapprima distinti gli enti di due, comunque presi, dei gruppi dati, che supporremo tutti resi normali e indicheremo dicendoli gruppi G_r e si pongano questi gruppi in corrispondenza ordinata. Il gruppo Γ i cui enti sono i gruppi dati, sia, perchè semplicemente sviluppabili e supposto esso pure reso normale, in corrispondenza ordinata coi gruppi suoi enti, e sia G_1 il suo ente originario, ed a l'ente originario del gruppo G_1. Diciamo *quadrato* di una Z del gruppo G_1 il gruppo parte di Γ costituito dagli enti di una Z di G_1 e dalle corrispondenti Z di tutti i gruppi che in Γ costituiscono la Z corrispondente a quella scelta in G_1. Tali quadrati formano un gruppo, il quale essendo di ugual potenza e quello delle Z di Γ sarà (§ 67 Cor. 5) un gruppo semplicemente sviluppabile, che risulterà semplicemente ordinato se al quadrato di una Z di G_1 si dà per immediatamente seguente quello della Z successiva in G_1. Gli enti di ciascun quadrato costituiscono (§ 75) un gruppo finito, e finito è quindi il gruppo differenza fra due quadrati successivi. Tali differenze costituiscono esse pure un gruppo semplicemente sviluppabile che si rende normale prendendo come originaria la differenza fra il quadrato originario (a), ed il suo immediatamente seguente e come σ di una differenza fra due quadrati la differenza fra i due quadrati che sono σ di quelli. Il gruppo composto di tutte le differenze è identico al gruppo Γ composto dei gruppi dati..

Ogni differenza consta di un ente per ciascuno dei gruppi dati comparenti in essa, eccetto il finale, del quale contiene una Z. Se ne ordinino gli enti, prendendo come originario l'ente del gruppo originario che appartiene ad essa, per σ di un ente l'ente del gruppo σ, eccetto per l'ente del gruppo immediatamente precedente il gruppo finale, del quale si prenderà come σ l'originario della Z del gruppo finale appartenente alla differenza ed anche per gli enti di tale Z dei quali si prenderanno come enti σ gli enti σ nel gruppo stesso finale, meno che per il finale della Z che comparisce nella differenza, che si prenderà come finale della differenza: ad ogni ente finale di una differenza si dia come ente σ l'originario della differenza immediatamente seguente. In tal modo si viene ad avere chiaramente ordinato il gruppo composto

Esso riuscirà inoltre così semplicemente ordinato. Ed invero se si costruisce un gruppo che contenga il suo ente originario, e che se contiene un ente contenga il suo ente σ, esso se contiene un ente di una differenza li contiene tutti, per il principio di induzione, essendo la differenza in questione gruppo finito: se contiene un ente di una differenza ne contiene anche quello finale, come ora si è detto, e quindi anche il suo ente σ, originario della differenza immediatamente seguente, e quindi tutta questa differenza. Allora esso contiene la differenza originaria e se una differenza

(*) Vedi cenni in CANTOR - Acta Math. pagg. 315, 365.

anche la immediatamente seguente, dunque, poichè il gruppo delle differenze è semplicemente ordinato, le contiene tutte, e perciò contiene tutto il gruppo composto.

Questo gruppo composto è dunque semplicemente sviluppabile.

Se i gruppi dati hanno enti comuni, ad ogni gruppo G_r si sostituisca quello G'_r degli enti che esso ha distinti da tutti i gruppi che lo precedono nel gruppo composto, se questo si considera come gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale, di gruppi G_r. Ogni gruppo G'_r sarà o il gruppo nullo, o un gruppo finito, od uno semplicemente sviluppabile (§ 72): il gruppo originario G_1 resterà inalterato, e sarà quindi $G_1' = G_1$ un gruppo semplicemente sviluppabile. I gruppi G_i diversi da G'_1 sopprimendo quelli nulli, costituiranno essi pure, presi come enti, o il gruppo nullo, o un gruppo finito, o uno semplicemente sviluppabile: talchè ricorrendo, secondo i casi, o al Teor. del § 75, o a quello del § 78, o a quello del § 76, o a quello del § 80, o alle parti già dimostrate del Teorema attuale, o a questi Teoremi combinati fra loro, si vedrà che il loro gruppo composto sarà un gruppo nullo, o finito, o semplicemente sviluppabile: e quindi infine il gruppo composto di esso e di G'_1 che è semplicemente sviluppabile, sarà, per gli stessi teoremi un gruppo semplicemente sviluppabile.

Così il Teorema è pienamente dimostrato.

Capitolo XII.

POTENZA DEI GRUPPI SEMPLICI.

82. Teorema. — Se G è un gruppo finito ed a un ente non di G, sarà $G+a$ di potenza superiore a G.

Infatti, se G è finito, tale è $G+a$ (§ 73) ed allora G, che è sua parte propria, gli è suvvalente (§ 61).

83. Teorema. — I due gruppi finiti G e $G+a$, dove a è un ente non di G, hanno potenze consecutive (*).

Supponiamo infatti che possa esistere un gruppo Γ tale che sia

$$G < \Gamma < G + a:$$

qualunque siano le corrispondenze χ e β, possibili rispettivamente fra G e Γ e fra Γ e $G+a$, dovrà essere:

$$(G < \Gamma)_\chi, (\Gamma < G + a)_\beta.$$

Avremo nella corrispondenza β per lo meno un ente isolato nel gruppo $G+a$, e potremo sempre supporre che uno degli enti isolati sia a, altrimenti potremo scambiare a con uno degli isolati. Sopprimendo a, gli enti di Γ avranno ancora tutti il loro corrispondente nel gruppo restante G, e potremo scrivere $(G < \Gamma)_\chi$, $(\Gamma \lesssim G)_\beta$ donde $(G < G)_{\beta\chi}$ (§ 8), vale a dire che nella corrispondenza composta $\beta\chi$ risulta G prevalente a sè stesso, e

(*) Cfr. Dedekind, § 14. N. 166.

quindi sviluppabile (§ 15 Cor. I) il che non può essere (§ 59 Cor. 1°) essendo G finito. È dunque vero che G e $G+a$ hanno potenze consecutive.

Corollario. — Due Z di uno stesso gruppo semplicemente ordinato, che siano una immediatamente seguente all'altra, hanno potenze consecutive.

84. Teorema — Ogni gruppo finito è equivalente ad una conveniente ed una sola Z di un gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale, qualunque (*).

Se $Z_1, Z_2 \ldots . Z_\Gamma$ è il gruppo ordinato delle Z del gruppo finito ordinato dato Γ, sarà Z_1 equivalente a quella Z' del gruppo semplicemente sviluppabile dato, G, la quale consta del suo ente originario: e se Z_s è una Z di Γ che si supponga equivalente ad una conveniente Z'_s di G, l'immediatamente seguente $Z_{\sigma s}$ in Γ sarà equivalente alla $Z'_{\sigma s}$ immediatamente seguente a Z'_s in G, mantenendo associati nella corrispondenza gli enti che lo erano in Z_s e Z'_s, e associando i due enti stati aggiunti a Z_s e Z'_s per cambiarli in $Z_{\sigma s}$ e $Z'_{\sigma s}$. Per il principio d'induzione applicato al gruppo $Z_1, Z_2 \ldots Z_\Gamma$ si potrà stabilire una corrispondenza fra $Z_\Gamma = \Gamma$ ed una conveniente Z' di G, che in essa saranno equivalenti. Così è provata la prima parte del Teorema.

Comunque poi si faccia corrispondere un gruppo finito ad una equivalente Z di un gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale, dovrà sempre corrispondere ad una stessa Z, altrimenti le due Z a cui esso equivalesse dovrebbero essere equivalenti fra loro, il che non può essere (§ 61 Cor. 3°).

Corollario I. — Ogni gruppo finito può essere esso stesso Z di un gruppo semplicemente sviluppabile reso normale, potendosi sostituire alla Z di un gruppo cosiffatto alla quale esso equivalga.

85. Teorema. — Un gruppo finito è necessariamente di potenza o maggiore, o uguale, o minore a quella di un dato gruppo qualunque (**).

Infatti noi possiamo associare all'ente originario di un gruppo finito ordinato G, uno arbitrario del gruppo dato Γ, all'ente σ dell'originario di G uno qualunque di quelli restanti in Γ, e in generale se ad un ente b di G si è associato un ente di Γ, si può associare all'ente σb di G un ente qualunque del gruppo Γ', che si ottiene da Γ sopprimendovi gli enti di esso già associati ai precedenti di b ed a b, se un tal gruppo Γ' esiste. Questa associazione, per il principio d'induzione valido in G, è una corrispondenza fra G e Γ, nella quale o G ha per immagine una parte, propria o no, di Γ, oppure una parte propria di G ha per immagine Γ. Lo stesso accadrà quindi in qualunque corrispondenza possibile fra G e Γ (§ 61) e sarà perciò G necessariamente di potenza o maggiore, o uguale, o minore a quella di Γ.

(*) Cfr. VERONESE, l. c., N. 45, a).
(**) BETTAZZI, Gruppi infiniti ed infiniti di enti.

Corollario 1. — Ogni gruppo finito è paragonabile con qualunque altro gruppo.

Cor. 2. — Due gruppi finiti sono sempre paragonabili.

86. Teorema. — Ogni gruppo che non sia di potenza maggiore a tutte quelle di qualunque gruppo finito è finito esso pure (*).

Ed infatti (§ 85) se il gruppo Γ non è di potenza maggiore a quella di un conveniente gruppo finito p. es. G, dovrà essere o di potenza uguale ad esso, o di potenza minore di esso, e quindi di potenza uguale a quella di una sua parte propria, e perciò in ogni caso di ugual potenza ad un gruppo finito, e finito esso pure.

Corollario 1. — Un gruppo o è finito, o è di potenza maggiore a quella di tutti i gruppi finiti.

Cor. 2. — Ogni gruppo finito è di potenza minore a qualunque gruppo sviluppabile (§ 59 Cor. 1. § 83 Cor. 1).

Cor. 3. — Si possono prendere ad arbitrio enti di un gruppo sviluppabile che debbano costituire un gruppo equivalente ad uno finito qualunque dato (§ 65 Post. 3).

87. Teorema. — Due gruppi semplicemente sviluppabili qualunque G_1 e G_2 sono di ugual potenza (**).

Infatti nei gruppi G_1 e G_2 già resi normali si facciano corrispondere i due enti originari, e gli enti σ di enti già corrispondenti. Allora:

1º Ogni ente di G_1 ha il corrispondente in G_2, per il principio d'induzione, e così ogni ente di G_2 lo ha in G_1.

2º Ogni ente di G_1 corrisponde così ad uno solo di G_2. Ed invero ciò vale per l'ente originario, che non è σ di nessuno, e se è vero per un ente di G_1, lo sarà anche per il suo ente σ, giacchè se questo corrispondesse a più enti di G_2, l'immediatamente precedente dovrebbe corrispondere a più distinti, di cui quelli dovrebbero essere gli enti σ, il che è contro l'ipotesi. Per il principio d'induzione ciò accadrà per ogni ente di G_1. Così dicasi per ogni ente di G_2 rispetto a G_1.

In questa corrispondenza i due gruppi saranno dunque equivalenti, c. d. d.

Osservazione. Quando due gruppi semplicemente sviluppabili si trovano nella corrispondenza esposta nel teorema, sono in corrispondenza ordinata (§ 34).

Corollario. — È sempre possibile porre in corrispondenza ordinata due gruppi semplicemente sviluppabili qualunque.

88. Teorema. — I gruppi semplicemente sviluppabili sono paragonabili con qualunque gruppo sviluppa-

(*) Bettazzi, Gruppi infiniti ed infiniti di enti.
(**) Dedekind. § 10, N. 132. — Veronese. l.c., N. 43. b.

bile, e sono *i gruppi sviluppabili di minima potenza* (*).

Sia G un gruppo sviluppabile, e Γ uno semplicemente sviluppabile. Di G è parte (propria o no) un gruppo semplicemente sviluppabile, p. es. G' (§ 68) il quale in una certa corrispondenza α è equivalente a Γ (§ 87). Conservando gli enti associati di questa corrispondenza e lasciando isolati gli enti di G che non sono di G', se esistono, sarà in tale nuova corrispondenza α', $(\Gamma \lesssim G)_{\alpha'}$.

Se si ha $(\Gamma \backsim G)_{\alpha'}$, Γ è di ugual potenza a G.

Se essendo $(\Gamma < G)_{\alpha'}$ in un'altra corrispondenza β sia $(\Gamma \backsim G)_{\beta}$, avremo ancora la stessa relazione.

Se essendo $(\Gamma < G)_{\alpha'}$ in un'altra corrispondenza β si avesse $(\Gamma > G)_{\beta}$ sarebbe in β il gruppo G equivalente ad una parte propria di Γ, la quale, perchè equivalente a G che è sviluppabile, è tale essa pure, e quindi (§ 72 Cor. 2) dev' essere semplicemente sviluppabile. Allora lo stesso G sarà un gruppo semplicemente sviluppabile (§ 67, cor. 4) e quindi (§ 87) di potenza uguale a Γ.

Se finalmente in qualunque corrispondenza β, anche diversa da α, sia pure $(\Gamma < G)_{\beta}$, sarà allora, secondo la definizione (§ 9), Γ di potenza minore a G.

Il gruppo semplicemente sviluppabile è quindi di potenza uguale o minore a qualunque gruppo sviluppabile, ed il teorema è dimostrato.

89. Teorema. — *Ogni gruppo di potenza minore ad uno semplicemente sviluppabile è finito.*

Ed infatti, dovendo per definizione di potenza equivalere ad una parte propria di un gruppo semplicemente sviluppabile, che sia p. es. G_1, esso non può essere che semplicemente sviluppabile, o finito (§ 72). Non potendo essere nella prima condizione, altrimenti sarebbe equivalente, e non di potenza minore, a G (§ 87), sarà finito c. d. d.

Corollario. — *Una parte di un gruppo semplicemente sviluppabile che sia di potenza minore al gruppo, deve contenere un ente tale che nessun altro ente delle parti gli sia seguente nel gruppo primitivo reso normale*, altrimenti sarebbe sviluppabile (§ 70) e quindi non finito, contro il teorema.

90. In base a quanto si è detto nei precedenti paragrafi, potremo insieme ad ogni gruppo finito introdurre un ente, da dirsi sua *potenza*, non definito in sè, ma nelle sue relazioni di uguale, maggiore o minore cogli altri della sua specie, dicendosi, se α e β sono due potenze, che α è maggiore, uguale o minore di β, secondochè un gruppo cui corrisponda α ha potenza risp. maggiore uguale o minore ad uno cui corrisponda β. Tali potenze di gruppi finiti si diranno potenze *finite*.

(*) Il CANTOR (Acta Math., pag. 312) accenna ad una proprietà simile, rispetto ai gruppi che egli dice infiniti; ma non dà la dimostrazione, nè (come si è accennato nell'Introduzione) definisce quali gruppi per lui siano infiniti.

Esiste allora una potenza finita minima, quella del gruppo di un ente solo, mentre non ne esiste una massima, essendo, se G è un gruppo finito ed a un ente non di G, che ci è lecito supporre esistente, il gruppo $G + a$ di potenza maggiore a quello di G (§ 82).

Poichè ogni gruppo finito ha ugual potenza di una conveniente parte fondamentale (Z) di un gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale (§ 84), è chiaro come per avere tutte le potenze finite basti considerare quelle di tutte le Z di un cosiffatto gruppo.

Il gruppo delle potenze finite è dunque gruppo ordinabile e semplicemente sviluppabile, essendo simile a quello delle Z di un gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale, (§ 67 Cor. 5).

Il gruppo delle potenze non maggiori ad una data costituisce allora una Z del gruppo semplicemente ordinato delle potenze, ed è perciò finita (*).

91. Potremo introdurre enti da dirsi *potenze* anche per i gruppi sviluppabili, come si è fatto per quelli finiti, usando le stesse denominazioni. Dovremo dire allora che la potenza dei gruppi semplicemente sviluppabili è, fra le potenze dei gruppi sviluppabili, quella immediatamente superiore a quelle finite, la minima fra quelle della sua specie (§ 88). Essa suol dirsi la *prima potenza* dei gruppi sviluppabili.

I gruppi di prima potenza si dicono anche gruppi *numerabili* (**).

Il gruppo delle potenze finite essendo semplicemente sviluppabile (§ 90) è un gruppo numerabile.

Osservazione. — Non essendo dimostrato che debba ogni gruppo necessariamente essere o finito o sviluppabile, sebbene questi due concetti si escludano a vicenda, non può asserirsi essere la potenza dei gruppi numerabile veramente la prima dopo quelle finite, ma solo essere la prima fra quelle dei gruppi sviluppabili. (*Continua*).

INTORNO A UNA PROPRIETÀ

DELL'EQUAZIONE DI SESTO GRADO

Non so se la proprietà cui si allude nel titolo, sia conosciuta: ma, quand'anche lo fosse, mi sembrerebbe degna di nota la dimostrazione elementarissima che ne do qui appresso.

La proprietà è questa:

(*) Le potenze dei gruppi finiti possono identificarsi cogli enti che nella mia « Teoria delle Grandezze » dissi *simboli di moltiplicità* (§ 10) ed anche coi numeri interi, per quanto convenga tenerle distinte da questi, essendo il concetto generale di potenza più vasto di quello dei numeri interi.

(**) Cantor. Acta Math. Vol. 2, pag. 312.

Se la somma di tre radici di un'equazione del sesto grado è uguale alla somma delle altre tre, l'equazione è risolubile per radicali. (*)

1. Sia l'equazione

$$x^6 + ax^5 + \cdots = 0$$

Si osservi anzitutto che il suo primo membro si può mettere sotto la forma

$$P_3^2 - P_1^2 + P_0, \qquad (1)$$

dove P_3 e P_1 sono polinomi, l'uno di terzo e l'altro di primo grado rispetto ad x, e P_0 è una quantità nota. Inoltre che, salvo il segno di P_3 e di P_1, la riduzione del primo membro dell'equazione alla forma (1) è possibile in una sola maniera.

Se infatti si pone

$$x^6 + ax^5 + \cdots = (x^3 + \mu x^2 + \nu x + \rho)^2 - (\sigma x + \theta)^2 + k,$$

dove μ, ν, ρ, σ, θ, e k sono indeterminate, e poi si eguagliano i coefficienti delle stesse potenze della x nei due membri, si ottiene un sistema di equazioni dotato della proprietà di somministrare (salvo il segno di σ e quello conseguente di θ) uno ed un solo valore per ciascuna delle indeterminate, come il lettore può verificare. Del resto, il modo più semplice per mettere il polinomio $x^6 + \cdots$ sotto la forma (1) è quello di estrarne la parte intera della radice quadrata polinomiale, per iscriverlo prima sotto la forma $P_3^2 - P_2$; estrarre quindi la parte intera della radice quadrata dal resto mutato di se-

(*) Detto $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, le radici dell'equazione, e supposto

$$a) \qquad x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 0,$$

il gruppo completo di Galois relativo all'equazione si compone delle 72 sostituzioni, che, o permutano fra loro x_1, x_2, x_3, ed x_4, x_5, x_6, o trasformano l'una terna di radici nell'altra. Se infatti un'altra qualsiasi delle 720 sostituzioni fra le radici, per esempio la $(x_1, x_2)(x_3, x_4, x_5, x_6)$ appartenesse al gruppo dell'equazione, cosicchè fosse

$$x_2 + x_1 + x_4 - x_5 - x_6 - x_3 = 0,$$

sottraendo dalla $a)$ e dividendo per 2, si otterrebbe $x_3 = x_4$. L'equazione ammetterebbe dunque radici eguali, e sarebbe certamente risolubile per radicali, come devesi dimostrare.

Esaminando ora i fattori di composizione del gruppo dell'equazione, si troverebbe facilmente che essi sono numeri primi: o 2, o 3. Per un noto teorema di Galois l'equazione è dunque risolubile per radicali. Così è pure dimostrato (ma non elementarmente) che l'equazione del 6° grado è risolubile per radicali, anche quando fra le radici esiste la relazione

$$x_1 x_2 x_3 = x_4 x_5 x_6$$

oppure l'altra:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$$

e via dicendo. Parimenti quando è nota la differenza fra la somma di tre radici e quella delle altre tre; eccetera.

gno, cioè da P_2, così da avere: $P_2 = P_1^2 - P_0$; d'onde poi:

$$x^6 + a x^5 + \cdots = P_3^2 - P_1^2 + P_0.$$

2. Siano x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 le radici di un'equazione del 6° grado, e si supponga

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 \qquad (2)$$

Si formino le due equazioni le cui radici sono x_1, x_2, x_3, e x_4, x_5, x_6. Supponendo i coefficienti di x^3 eguali entrambi all'unità, si dovrà anche supporre, a cagione della (2), che il coefficiente di x^2 sia il medesimo in ambedue le equazioni: cosicchè, determinate convenientemente m ed n, r ed s, le due equazioni si potranno scrivere così:

$$x^3 + p x^2 + (m + n) x + (r + s) = 0$$
$$x^3 + p x^2 + (m - n) x + (r - s) = 0,$$

ovvero

$$(x^3 + p x^2 + m x + r) + (n x + s) = 0,$$
$$(x^3 + p x^2 + m x + r) - (n x + s) = 0.$$

La nostra equazione sarà dunque

$$(x^3 + p x^2 + m x + r)^2 - (n x + s)^2 = 0.$$

Ma questa forma del suo primo membro non è che la (1), alla quale si sa sempre ridurre il primo membro di un'equazione del 6° grado: e propriamente è la forma (1) nel caso particolare $P_0 = 0$. Perciò nell'ipotesi (2) si saprà mettere il primo membro dell'equazione sotto forma di differenza tra due quadrati. La base del primo quadrato sarà la parte intera della radice quadrata polinomiale del primo membro dell'equazione; la base del secondo quadrato sarà la radice quadrata del resto, mutato di segno. E questa radice quadrata si estrarrà esattamente, a cagione della condizione (2), equivalente all'altra: $P_0 = 0$.

Posta così l'equazione sotto forma di differenza tra due quadrati, essa si decomporrà in due fattori del 3° grado, e si potrà quindi risolvere per radicali.

3. *Esempio.* Sia l'equazione

$$x^6 - 6 x^5 - 10 x^4 + 100 x^3 - 111 x^2 - 94 x + 120 = 0,$$

le cui radici sono

$$1, \quad -1, \quad 3, \quad 2, \quad -4, \quad 5.$$

Essendo la somma delle prime tre radici eguale a quella delle altre tre, il primo membro dell'equazione si potrà mettere sotto forma di differenza tra due quadrati noti. A tal fine si estrarrà dal primo membro la radice quadrata, che è

$$x^3 - 3x^2 - \frac{19}{2}x + \frac{43}{2},$$

col resto

$$-\frac{289}{4}x^2 + \frac{629}{2}x - \frac{1369}{4}.$$

Da questo resto, mutato di segno, si estrarrà la radice quadrata, *necessariamente esatta*. Si troverà

$$\frac{17}{2}x - \frac{37}{2};$$

e l'equazione si potrà scrivere:

$$\left(x^3 - 3x^2 - \frac{19}{2}x + \frac{43}{2}\right)^2 - \left(\frac{17}{2}x - \frac{37}{2}\right)^2 = 0.$$

4. Imitando la dimostrazione del teorema precedentemente esposto, si potrebbe altresì dimostrare che *un'equazione del 10° grado nella quale la somma di cinque radici e dei loro prodotti a due due sono rispettivamente eguali alla somma delle altre cinque radici e dei loro prodotti a due a due, è decomponibile in due fattori del 5° grado, epperò risolubile per funzioni ellittiche.*

Ecc., ecc.

Marino di Roma, settembre 1896.

SOLUZIONI DELLE QUESTIONI 209**, 256**, 260**, 304*, 305*, 307*, 308*, 309** e 315**

209.** *Risolvere l'equazione*

$$x^5 - 5ax^2 - 5bx - \frac{a^4 + b^3}{ab} = 0.$$

(F. Giudice).

Soluzione del Sig. *Luigi Bosi*, professore nel R. Istituto tecnico di Teramo

Si ponga, essendo u, v due arbitrarie,

$$x = u + v,$$

d' onde

$$x^5 = u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5,$$

ossia

$$x^5 = 5u^2v(u^2 + 2uv + v^2) + 5uv^3(u + v) + u^5 + v^5,$$

o infine

$$x^5 - 5u^2vx^2 - 5uv^3x - (u^5 + v^5) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1]$$

Vediamo ora se è possibile determinare u e v in modo che l'equazione [1] coincida con quella data: dev'essere perciò

$$u^2v = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [2]$$

$$uv^3 = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [3]$$

$$u^5 + v^5 = \frac{a^4 + b^3}{ab} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [4]$$

Dalle [2] e [3] risulta

$$u = \sqrt[5]{\frac{a^3}{b}}, \qquad v = \frac{a}{u^2} = a : \left(\sqrt[5]{\frac{a^3}{b}}\right)^2,$$

e sostituendo questi valori nella [4], si vede subito che essa è verificata.

L'equazione [1], che evidentemente è soddisfatta per $x = u + v$, coincide dunque con la data, quando si ponga per u uno qualunque dei valori di $\sqrt[5]{\frac{a^3}{b}}$ e per v il valore $\frac{a}{u^2}$. Ne viene che le soluzioni della equazione proposta sono date dalla formola

$$x = u + v = u + \frac{a}{u^2}$$

ponendo per u successivamente tutti i valori di $\sqrt[5]{\frac{a^3}{b}}$.

256**. *Mostrare che, risolvendo le equazioni*

$$\xi' = \xi - \frac{2\,\mathrm{u}}{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}(\mathrm{u}\xi + \mathrm{v}\eta + \mathrm{w}\zeta + 1)$$

$$\eta' = \eta - \frac{2\,\mathrm{v}}{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}(\mathrm{u}\xi + \mathrm{v}\eta + \mathrm{w}\zeta + 1)$$

$$\zeta' = \zeta - \frac{2\,\mathrm{w}}{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}(\mathrm{u}\xi + \mathrm{v}\eta + \mathrm{w}\zeta + 1)$$

rispetto alle u, v, w, *si ha*

$$\mathrm{u} = -\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}\xi + \mathrm{b}\eta + \mathrm{c}\zeta + 1} = \frac{2(\xi' - \xi)}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)}$$

$$\mathrm{v} = -\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}\xi + \mathrm{b}\eta + \mathrm{c}\zeta + 1} = \frac{2(\eta' - \eta)}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\eta'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)}$$

$$\mathrm{w} = -\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}\xi + \mathrm{b}\eta + \mathrm{c}\zeta + 1} = \frac{2(\zeta' - \zeta)}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)},$$

ove si è messo, per brevità,

$$a = 2(\xi - \xi')\,\delta^{-2}, \qquad b = 2(\eta - \eta')\,\delta^{-2}, \qquad c = 2(\zeta - \zeta')\,\delta^{-2}$$

$$\delta^2 = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2.$$

(A. Del Re).

Soluzione del Sig. *Vincenzo Columbo*, alunno dell'Istituto tecnico di Brindisi. (*)

Dalle equazioni date si ricava:

$$\xi - \xi' = \frac{2u}{u^2 + v^2 + w^2}(u\xi + v\eta + w\zeta + 1) \quad . \quad . \quad . \quad [1]$$

$$\eta - \eta' = \frac{2v}{u^2 + v^2 + w^2}(u\xi + v\eta + w\zeta + 1) \quad . \quad . \quad . \quad [2]$$

$$\zeta - \zeta' = \frac{2w}{u^2 + v^2 + w^2}(u\xi + v\eta + w\zeta + 1) \quad . \quad . \quad . \quad [3]$$

Moltiplicando rispettivamente per 2ξ, 2η, 2ζ e sommando, viene:

$$2\xi(\xi - \xi') + 2\eta(\eta - \eta') + 2\zeta(\zeta - \zeta') =$$

$$= \frac{4(u\xi + v\eta + w\zeta)}{u^2 + v^2 + w^2}(u\xi + v\eta + w\zeta + 1) = \quad . \quad . \quad . \quad [4]$$

$$= \left(\frac{2(u\xi + v\eta + w\zeta + 1)}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}\right)^2 - \frac{4(u\xi + v\eta + w\zeta + 1)}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Ora dalle [1], [2] e [3] si ricava ancora:

$$\frac{\xi - \xi'}{u} = \frac{\eta - \eta'}{v} = \frac{\zeta - \zeta'}{w} = \frac{\delta}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{2(u\xi + v\eta + w\zeta + 1)}{u^2 + v^2 + w^2},$$

d'onde

$$\delta = \frac{2(u\xi + v\eta + w\zeta + 1)}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

e perciò la relazione [4] diventa:

$$2\xi(\xi - \xi') + 2\eta(\eta - \eta') + 2\zeta(\zeta - \zeta') - \delta^2 =$$

$$= -2\,\frac{\xi - \xi'}{u} = -2\,\frac{\eta - \eta'}{v} = -2\,\frac{\zeta - \zeta'}{w}$$

e perciò:

$$u = -\frac{2(\xi - \xi')}{2\xi(\xi - \xi') + 2\eta(\eta - \eta') + 2\zeta(\zeta - \zeta') - \delta^2}$$

$$v = -\frac{2(\eta - \eta')}{2\xi(\xi - \xi') + 2\eta(\eta - \eta') + 2\zeta(\zeta - \zeta') - \delta^2}$$

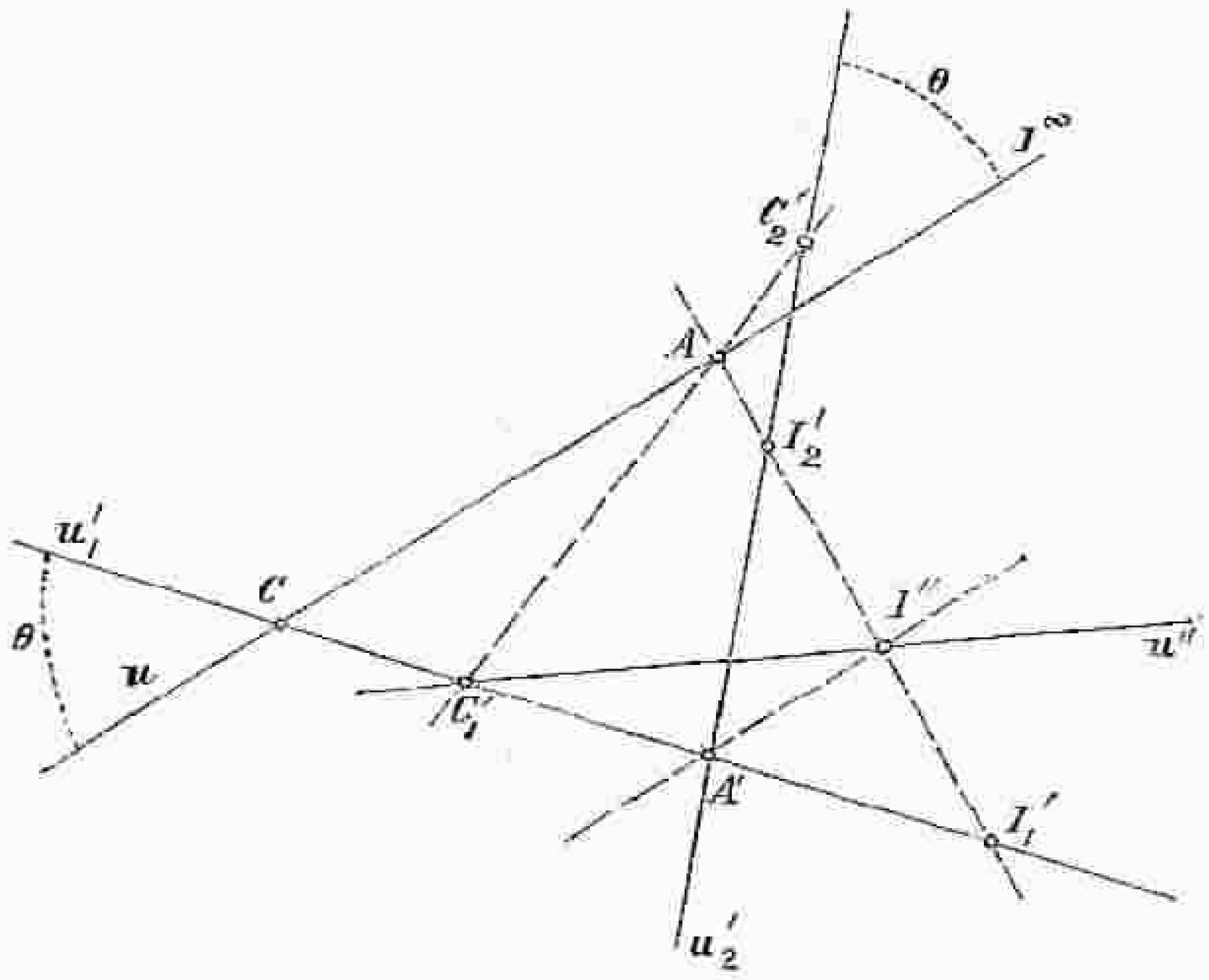
$$w = -\frac{2(\zeta - \zeta')}{2\xi(\xi - \xi') + 2\eta(\eta - \eta') + 2\zeta(\zeta - \zeta') - \delta^2}.$$

(*) Altre soluzioni dai Sigg. *E. Nannei, V. Retali, G. Vitali.*

Sviluppando queste tre espressioni si ottengono le seconde formole di risoluzione, date per u, v, w,. Invece, dividendo in ognuna di esse ambo i termini per δ^2, ed usando le notazioni indicate nell'enunciato, si hanno le prime formole.

260". *Costruire due punteggiate proiettive* (u), (u'), *conoscendo due punti corrispondenti* A, A', *l'asse di proiettività* u'', *la proiezione* I'', *su* u'', *del punto limite di* (u'), *fatta da* A, *e l'angolo* θ *di* u, u'.

Per θ *diverso da* 0° *e da* 90°, *questo problema ha due soluzioni. Mostrare che le due posizioni* (u'_1), (u'_2) *di* u' *che corrispondono ad esse, sono prospettive, col centro di prospettiva in* A. (A. Del Re).



Soluzione del Sig. Prof. *V. Retali*, a Milano. (*)

Il punto I'' è la proiezione da A' sopra u'' del punto all'infinito I^∞ di u, ossia u è la parallela condotta da A alla retta $|A'I''|$. Pel punto A' possono condursi, se θ è diverso da 0° e da 90°, due rette che fanno con u l'angolo θ, le quali sono le due posizioni u'_1, u'_2 di u'. Le due punteggiate (u'_1) e (u'_2) sono proiettive ed hanno in A' un punto unito, dunque son prospettive: al punto I^∞ di u corrispondono in (u'_1) e (u'_2) rispettivamente le intersezioni I'_1, I'_2 di u'_1, u'_2 con la retta $|AI''|$; per avere il punto C'_2, corrispondente nella (u'_2) a C, basta proiettare da A sopra u'_2 il punto d'intersezione della $|CA'| \equiv u'_1$ con l'asse di proiettività u'', cioè il punto C'_1, corrispondente a C nella (u'_1). Le rette $|C'_1 C'_2|$ e $|I'_1 I'_2|$ che uniscono due coppie di punti corrispondenti delle due punteggiate prospettive (u'_1) e (u'_2) si segano in A, che è perciò il centro di prospettiva.

(*) Altre soluzioni inviarono i Sigg. *V. Colombo*, *G. Gallucci*, *E. Nannei*.

304. *Se* A, B, C *sono i punti simmetrici del centro* O *del circolo circoscritto al triangolo* DEF *rispetto ai lati* EF, FD, DE, *le rette* AD, BE, CF *concorrono in un punto, che è il centro del circolo passante pei punti medi dei lati del triangolo* DEF. (S. Resta).

Dimostrazione del Sig. *E. Palumbo Todaro*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Girgenti.

Unisco D con A ed E con B, e queste congiungenti si intersecano in un punto che chiamo M; congiungo poi M con C ed F, e dimostrerò che i segmenti CM, MF sono sulla stessa retta.

Considerando anzitutto i $\triangle$ MDB, MAE, si vede che sono uguali, perchè hanno $DB = EA$, giacchè entrambi uguali al raggio del cerchio circoscritto al triangolo DEF; hanno poi gli angoli MAE, MEA rispettivamente uguali agli angoli MDB, MBD, giacchè i segmenti DB, EA sono paralleli, essendo entrambi paralleli al raggio OF. Da ciò emerge che $MD = MA$ ed $MB = ME$. Considerando poi gli altri due triangoli CMD, MAF, si vede che anch' essi sono uguali, perchè $CD = AF$ (essendo entrambi uguali al raggio del cerchio circoscritto al triangolo DEF), $MA = MD$, e gli angoli CDM, MAF uguali, perchè alterni interni formati dalle parallele CD, AF colla trasversale DA; perciò, per un teorema di geometria piana, CM ed MF stanno per diritto. Con ciò è dimostrata la prima parte del teorema.

Per la 2ª parte del teorema, consideriamo che, unendo il punto M, ossia il punto di mezzo dei tre segmenti AD, CF, EB, coi punti di mezzo dei tre lati del triangolo, otteniamo tre porzioni di rette che, unendo ciascuna i punti di mezzo di due lati di un triangolo, risulteranno metà del terzo lato; così unendo M con N, P e Q (essendo N, P e Q rispettivamente i punti di mezzo dei lati ED, EF, DF) i segmenti MN, MP, MQ risulteranno metà rispettivamente dei lati EA, FB, AF, tutti uguali fra loro, perchè ciascuno è uguale al raggio del cerchio circoscritto al triangolo dato.

305. *Dimostrare che in un triangolo rettangolo, di cui* C *è l'angolo retto, si ha la relazione:*

$$a\left(1 - \cot^2 \frac{A}{2}\right) + 2b \cot \frac{A}{2} = 0:$$

e in qualunque triangolo rettilineo la relazione:

$$ac \operatorname{sen}(A - B) = (a^2 - b^2) \operatorname{sen} A.$$

(G. Giovanetti).

Dimostrazione del Sig. *Giuseppe Ietta*, alunno del R. Istituto tecnico di Arezzo. (*)

(*) Eguale dimostrazione dal Sig. *Ruggero Ermini*, del R. Istituto tecnico di Arezzo. Altre dimostrazioni, per verificazione, dai Sigg. *Vitaliano Colombo* e *M. Giamba*, studenti nel R. Istituto tecnico di Como; *Emanuele Palumbo Todaro*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Girgenti.

Dalla nota formula: $\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}$, si ricava l'altra:

$$2 \cot A \,.\, \cot \frac{A}{2} - \cot^2 \frac{A}{2} + 1 = 0.$$

Ma:

$$\cot A = \frac{b}{a},$$

quindi:

$$2b \cot \frac{A}{2} + a\left(1 - \cot^2 \frac{A}{2}\right) = 0.$$

Dalla relazione: $\frac{c}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$, si ricava l'altra:

$$\frac{c \operatorname{sen}(A - B)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(A + B)\operatorname{sen}(A - B)}{\operatorname{sen} A}$$

ovvero:

$$\frac{c \operatorname{sen}(A - B)}{a} = \frac{\operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen} A},$$

$$\frac{c \operatorname{sen}(A - B)}{a} = \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen}^2 A}\right)\operatorname{sen} A,$$

$$\frac{c \operatorname{sen}(A - B)}{a} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)\operatorname{sen} A,$$

$$ac \operatorname{sen}(A - B) = (a^2 - b^2)\operatorname{sen} A. \qquad \text{c. d. d.}$$

307*. *Se* a, b, c *sono le misure dei lati di un triangolo, ed* α, β, γ *le misure delle distanze dei suoi vertici da un punto del cerchio circoscritto, si ha:*

$$(a^2 - \beta^2 + \gamma^2)(b^2 - \gamma^2 + \alpha^2)(c^2 - \alpha^2 + \beta^2) =$$
$$= (a^2 + \beta^2 - \gamma^2)(b^2 + \gamma^2 - \alpha^2)(c^2 + \alpha^2 - \beta^2).$$

(S. Catania).

Soluzione del Sig. *E. Palumbo Todaro*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Girgenti.

Sia ABC il triangolo, ed M il punto preso sulla circonferenza ad esso circoscritta.

Considerando i triangoli BMC, CAM, ABM, possiamo scrivere (Serret *Trigonometria*, § 105, Teorema IV) le tre relazioni:

$$\beta^2 = a^2 + \gamma^2 - 2a\gamma \cos BCM;$$
$$\gamma^2 = b^2 + \alpha^2 - 2b\alpha \cos CAM;$$
$$\alpha^2 = c^2 + \beta^2 - 2c\beta \cos ABM;$$

dalle quali rispettivamente si deducono le seguenti:

$$2a\gamma \cos BCM = a^2 - \beta^2 + \gamma^2;$$
$$2b\alpha \cos CAM = b^2 - \gamma^2 + \alpha^2; \quad \ldots\ldots\ldots \quad [1]$$
$$2c\beta \cos ABM = c^2 - \alpha^2 + \beta^2.$$

Medesimamente, considerando i triangoli precedenti ed applicando il teorema citato, possiamo scrivere le altre relazioni:

$$\gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2a\beta \cos MBC;$$
$$\alpha^2 = b^2 + \gamma^2 - 2b\gamma \cos MCA;$$
$$\beta^2 = c^2 + \alpha^2 - 2c\alpha \cos BAM;$$

dalle quali:

$$2a\beta \cos MBC = a^2 + \beta^2 - \gamma^2;$$
$$2b\gamma \cos MCA = b^2 + \gamma^2 - \alpha^2; \qquad \ldots\ldots \qquad [2]$$
$$2c\alpha \cos BAM = c^2 + \alpha^2 - \beta^2.$$

Ora, se nella relazione proposta sostituiamo a ciascun termine il rispettivo valore dato dalle [1] e [2], essa, semplificata, diventa:

$$\cos BCM \,.\, \cos CAM \,.\, \cos ABM = \cos MBC \,.\, \cos MCA \,.\, \cos BAM.$$

Ma $CAM = CBM$ perchè alla circonferenza e insistenti sullo stesso arco; $ABM = ACM$, per la stessa ragione; quindi:

$$\cos BCM = \cos BAM. \text{ (*)}$$

308*. *Essendo dato nello spazio un numero dispari di punti* O_1, O_2, ... O_{2n+1} *e preso ad arbitrio un punto* P, *si trovi di questo il simmetrico* P_1 *rispetto ad* O_1, *poi il simmetrico* P_2 *di* P_1 *rispetto al centro* O_2, *e così di seguito, finchè si ottenga* P_{2n+1}, *simmetrico di* P_{2n} *rispetto al centro* O_{2n+1}. *Si ripeta ancora, partendo dal punto* P_{2n+1}, *l'operazione prima fatta partendo dal punto* P; *si otterrà così infine il punto* P_{4n+2}. *Dimostrare che questo punto coincide con* P. (G. Biasi).

Dimostrazione del Sig. *E. Palumbo Todaro*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Girgenti.

Posti i punti O_1, O_2, ... O_{2n+1} nello spazio, e costruito il simmetrico P_1 di P rispetto ad O_1, poi il simmetrico P_2 di P_1 rispetto ad O_2 ecc., e ripetuta l'operazione precedente partendo dal punto P_{2n+1}, congiungiamo i punti P e P_{2n+1}, P_1 e P_{2n+2} fra loro, e consideriamo i triangoli $O_1P_1P_{2n+2}$ e O_1PP_{2n+1}. Questi, per avere $O_1P_{2n+2} = O_1P_{2n+1}$, $O_1P_1 = O_1P$ e gli $\angle\, P_{2n+2}O_1P_1$, $P_{2n+1}O_1P$ uguali, perchè opposti al vertice O_1, sono uguali; quindi i lati PP_{2n+1}, PP_{2n+2} sono uguali non solo, ma anche paralleli.

Congiungendo poi P_2 con P_{2n+3} e considerando i triangoli $O_2P_1P_{2n+2}$, $O_2P_2P_{2n+3}$, per ragioni analoghe alle precedenti, questi risultano uguali; emerge

(*) Fin qui il *Palumbo*. Dall'essere gli angoli BCM e BAM supplementari, egli vuol vuol poi dedurre l'eguaglianza dei loro coseni, ed ha torto. Doveva invece rettificare la enunciazione del teorema, cambiando segno ad uno dei due membri dell'eguaglianza, per esempio così:

$$(a^2 - \beta^2 + \gamma^2)(b^2 - \gamma^2 + \alpha^2)(c^2 - \alpha^2 + \beta^2) =$$
$$= (-a^2 - \beta^2 + \gamma^2)(-b^2 - \gamma^2 + \alpha^2)(-c^2 - \alpha^2 + \beta^2).$$

(N. D. R.).

Un cenno di dimostrazione riceviamo anche dal Sig. *Guido Fubini*, allievo del R. Liceo M. Foscarini di Venezia, ma ha lo stesso difetto che quella del *Palumbo*.

perciò che $P_1 P_{2n+2}$ è uguale e parallela a $P_2 P_{2n+3}$; ma si è dimostrato precedentemente che $P P_{2n+1}$ e $P_1 P_{2n+2}$ sono uguali e paralleli, quindi $P P_{2n+1}$, $P_1 P_{2n+2}$, $P_2 P_{2n+3}$ sono uguali e paralleli. Continuando di questa guisa si perviene alla conclusione che:

$$P P_{2n+1} = P_1 P_{2n+2} = P_2 P_{2n+3} = \ldots = P_{2n} P_{4n+1}$$

e dippiù sono tutti paralleli fra loro.

Finalmente, unendo O_{2n+1} con P_{4n+1} e con P, e considerando i triangoli $O_{2n+1} P_{2n} P_{4n+1}$, $O_{2n+1} P_{2n+1} P$, si vede che hanno $O_{2n+1} P_{2n} = O_{2n+1} P_{2n+1}$ per costruzione, $P_{2n} P_{4n+1} = P_{2n+1} P$ per dimostrazione, e gli $\angle\, O_{2n+1} P_{2n} P_{4n+1}$, $O_{2n+1} P_{2n+1} P$ uguali, perchè alterni interni fatti dalle parallele $P_{2n+1} P$, $P_{2n} P_{4n+1}$ colla trasversale $P_{2n} P_{2n+1}$; quindi i triangoli in discorso sono eguali, e perciò $O_{2n+1} P = O_{2n+1} P_{4n+1}$ non solo, ma giacciono anche l'una sul prolungamento dell'altra, giacchè gli $\angle\, P_{2n} O_{2n+1} P_{4n+1}$, $P O_{2n+1} P_{2n+1}$ sono uguali. Quindi P è il simmetrico di P_{4n+1} rispetto al centro O_{2n+1}, cioè P_{4n+2} coincide con P, c. d. d.

309''. *Dimostrare che la potenza di un triangolo è uguale alla semisomma delle potenze dei triangoli aventi per vertici i centri dei quadrati costruiti esteriormente ed internamente sui lati del triangolo.* (A. BOZAL OBEYERO).

Soluzione del Prof. *U. Ceretti* a Rieti.

Sia ABC il triangolo dato di lati a, b, c; siano M, N, P ed M', N', P' i centri dei quadrati costruiti esternamente ed internamente sui lati a, b, c; si ottengono così i due triangoli MNP ed $M'N'P'$. Si congiunga M con B e con C, e P con A e con B; poichè BM e MC sono i cateti del triangolo rettangolo ed isoscele BMC, si ha: $BM = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = \dfrac{BC\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; e per la stessa ragione, dal triangolo BPA, rettangolo ed isoscele, si ha: $BP = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{c\sqrt{2}}{2}$. Inoltre essendo: $MBC = ABP = 45^\circ$, è: $MBP = 90^\circ + CBA$; e però, applicando la nota relazione: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, si ha:

$$\overline{MP}^2 = n^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BP}^2 + 2 \,.\, BM \,.\, BP \cos MBP = \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \\ - 2ac\cos(90^\circ + CBA);$$

e ricordando che dalla trigonometria si ha: $\cos(90^\circ + x) = -\operatorname{sen} x$, si ricava:

$$\overline{MP}^2 = n^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} + 2ac \operatorname{sen} CBA \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1]$$

Con analoghe considerazioni si ricavano facilmente le relazioni seguenti:

$$\overline{NP}^2 = m^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + 2bc \operatorname{sen} BAC, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [2]$$

$$\overline{MN}^2 = p^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + 2ab \text{ sen } ACB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [3]$$

Si congiunga ora B con M' e con P'; si ha subito: $BP' = BP = \frac{c\sqrt{2}}{2}$, $BM' = BM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, ed anche: $P'BM' = PBP' - PBM' = 90° - - PBM'$; ed essendo: $CBM' = ABP = 45°$, e cioè: $CBA = PBM'$, si ottiene: $P'BM' = 90° - CBA$. Applicando ora al triangolo $P'BM'$ la formola: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, si ha:

$$\overline{M'P'}^2 = n'^2 = \overline{BP'}^2 + \overline{BM'}^2 - 2 \,.\, BP' \,.\, BM' \cos P'BM' =$$
$$\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{2} - 2ca \cos(90° - CBA);$$

e poichè si può scrivere per note relazioni trigonometriche: $\cos(90° - CBA) = \text{sen } CBA$, si ricava:

$$\overline{M'P'}^2 = n'^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - 2ca \text{ sen } CBA, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1']$$

ed analogamente:

$$\overline{N'P'}^2 = m'^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - 2bc \text{ sen } BAC, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [2']$$

$$\overline{M'N'}^2 = p'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - 2ab \text{ sen } ACB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [3']$$

Addizionando termine a termine le [1], [2] e [3] e le [1'], [2'] e [3'] si ha:

$$m^2 + n^2 + p^2 = (a^2 + b^2 + c^2) +$$
$$+ 2(ac \text{ sen } CBA + bc \text{ sen } BAC + ab \text{ sen } ACB),$$
$$m'^2 + n'^2 + p'^2 = (a^2 + b^2 + c^2) -$$
$$- 2(ac \text{ sen } CBA + bc \text{ sen } BAC + ab \text{ sen } ACB),$$

dalle quali si ottiene:

$$(m^2 + n^2 + p^2) + (m'^2 + n'^2 + p'^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2),$$

da cui anche:

$$\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2} + \frac{m'^2 + n'^2 + p'^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2,$$

ed infine:

$$\frac{\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2} + \frac{m'^2 + n'^2 + p'^2}{2}}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

315**. *L'espressione* $[(n + 1)b - na]^2 a^n - b(b^{n+1} + ab^n - a^{n+1})$ *è divisibile per* $(a - b)^2$; *determinare il quoziente; dedurne in particolare, la somma* $2^{2n}(3n - 1)^2 + 2^{2(n+1)}$ *divisa per 27 dare per resto 5.*

(G. Bellacchi).

Dimostrazione del Sig. *Guido Fubini*, alunno del R. Liceo Marco Foscarini di Venezia. (*)

La formola, mutatone il segno, si può scrivere:

$$b^{n+2} + a b^{n+1} - (n+1)^2 a^n b^2 + \left\{ 2n(n+1) a^{n+1} - a^{n+1} \right\} b - n^2 a^{n+2}. \quad [1]$$

Ponendo in quest'espressione $b = a$, essa si annulla; quindi è divisibile per $(b - a)$.

Col metodo indicato nel § 7 del TODHUNTER (*Teoria delle equazioni*) si ha per quoziente della [1] divisa per $b - a$ l'espressione:

$$b^{n+1} + 2ab^n + 2a^2 b^{n-1} + 2a^3 b^{n-2} + \ldots + 2a^{n-1} b^2 + a^n (1 - n^2 - 2n) b + n^2 a^{n+1}.$$

Ponendo in questa espressione $b = a$, si ottiene zero; quindi essa è divisibile per $b - a$, e perciò la [1] è divisibile per $(b - a)^2$, e risulta il quoziente

$$b^n + 3ab^{n-1} + 5a^2 b^{n-2} + \ldots + (2n - 1) a^{n-1} b - n^2 a^n,$$

che si annulla per $b = a$; quindi la [1] è divisibile per $(b - a)^3$, ed il quoziente è $b^{n-1} + 4ab^{n-2} + 9a^2 b^{n-3} + \ldots + n^2 a^{n-1}$.

Ponendo $a = 4$, $b = 1$, la [1] si riduce a

$$(1 - 3n)^2 2^{2n} - (5 - 2^{2(n+1)})$$

che è divisibile per

$$(4 - 1)^3 = 3^3 = 27.$$

Se si aggiunge all'ultima espressione il 5, si ha che

$$2^{2n}(3n - 1)^2 + 2^{2(n+1)}$$

divisa per 27 dà per resto 5.

QUESTIONI DA RISOLVERE (**)

318*. In un triangolo sferico, secondo che $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a$ è uguale, maggiore o minore di $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c$, anche α sarà rispettivamente uguale, maggiore o minore di $\beta + \gamma$; e inversamente.

(*) Analoga soluzione dal Dott. *A. Bassi.*

(**) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle Scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle Scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

319*. In un triangolo sferico, secondo che $\cos^2 \frac{1}{2} \alpha$ è uguale, maggiore o minore di $\cos^2 \frac{1}{2} \beta + \cos^2 \frac{1}{2} \gamma$, $a + 180°$ sarà rispettivamente uguale, minore o maggiore di $b + c$; e inversamente.

N. B. Con a, b, c si indicano i lati del triangolo; con α, β, γ gli angoli opposti.

320*. Fra i triangoli sferici i cui lati formano una progressione aritmetica di data ragione, quali hanno un angolo eguale alla somma degli altri due, quali un angolo maggiore della somma degli altri due, quali ciascun angolo minore della somma degli altri due?

Applicazione al caso che la ragione sia 30°.

321*. Fra i triangoli sferici i cui angoli formano una progressione aritmetica di data ragione, quali sono quelli in cui un lato aumentato di 180° è uguale alla somma degli altri due, quali quelli in cui un lato aumentato di 180° è minore della somma degli altri due, quali quelli in cui ciascun lato aumentato di 180° supera la somma degli altri due?

L. Bosi.

322*. Se i lati di un triangolo sono in progressione aritmetica, i raggi dei cerchi ex-inscritti saranno in progressione armonica.

F. P. Paternò.

323**. Dimostrare che, se due circoli eguali si segano sotto un angolo di 60°:

1° I loro quattro punti comuni formano sopra ogni cerchio un gruppo equianarmonico; (*)

2° In ognuno di essi possono inscriversi ∞^1 triangoli circoscritti all'altro;

3° La polare reciproca di un cerchio rispetto all'altro e la polare reciproca di questo rispetto al primo, coincidono in una medesima iperbole H^2, avente per fuochi i centri dei due cerchi, passante pei punti di contatto delle tangenti comuni ai due cerchi, e tangente in questi punti alle tangenti i due cerchi nei loro due punti proprî comuni;

4° Detto r il raggio dei due cerchi, la iperbole ha r per asse traverso e $r : \sqrt{2}$ per asse coniugato;

(*) Tali che i 3 rapporti anarmonici fondamentali sono eguali.

5° Ogni tangente della iperbole sega i due cerchi in quattro punti armonici (due coniugati sopra uno stesso cerchio). Le tangenti condotte ai due cerchi da un punto arbitrario della iperbole, formano un fascio armonico (due raggi coniugati toccano uno stesso cerchio).

V. Retali.

324*. Mostrare che, risolvendo rispetto ad u, v, w le equazioni

$$u' = \frac{\lambda\,(v^2 + w^2) - 2\,(\mu v + \nu w)\,u}{u^2 + v^2 + w^2 - 2\,\lambda u - 2\,\mu v - 2\,\nu w}$$

$$v' = \frac{\mu\,(w^2 + u^2) - 2\,(\nu w + \lambda u)\,v}{u^2 + v^2 + w^2 - 2\,\lambda u - 2\,\mu v - 2\,\nu w}$$

$$w' = \frac{\nu\,(u^2 + v^2) - 2\,(\lambda u + \mu v)\,w}{u^2 + v^2 + w^2 - 2\,\lambda u - 2\,\mu v - 2\,\nu w},$$

si hanno, posto $H = \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}$, $K = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$, le seguenti:

$$u = \frac{Hu' \pm K\lambda}{H \pm K}$$

$$v = \frac{Hv' \pm K\mu}{H \pm K}$$

$$w = \frac{Hw' \pm K\nu}{H \pm K}$$

dove i segni superiori e gli inferiori (gli uni separatamente dagli altri) si corrispondono.

325*. Se si pone $\varphi = u^2 + v^2 + w^2$, $\Delta = u\,\xi + v\eta + w\zeta + 1$, e si eliminano le ξ', η', ζ' fra le equazioni

$$\begin{gathered} u\,\xi' + v\,\eta' + w\,\zeta' + (u\xi + v\eta + w\zeta + 2) = 0 \\ u'\xi' + v'\eta' + w'\zeta' + 1 = 0 \\ \xi' - \xi : \eta' - \eta : \zeta' - \zeta = u : v : w \end{gathered}$$

si ha, per equazione risultante,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\Delta & -\varphi \\ 1 & 0 & 0 & -\xi & u \\ 0 & 1 & 0 & -\eta & v \\ 0 & 0 & 1 & -\zeta & w \\ u' & v' & w' & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi\,(u'\xi + v'\eta + w'\zeta + 1) - 2\Delta\,(u u' + v v' + w w') = 0.$$

A. Del Re.

326**. Dimostrare che, se p è un numero primo maggiore di 13, e A e λ sono differenti da zero mod. p, la congruenza di quartó grado

$$x^4 - Ay^2 \equiv \lambda \ (\text{mod. } p)$$

è sempre risolvibile, anche con x ed y differenti da zero mod. p. (*)

G. Frattini.

TEMI DI MATEMATICA
ASSEGNATI DAL MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
PER LA LICENZA D'ISTITUTO TECNICO
(Sezione fisico-matematica)

Sessione estiva 1896. — I. In un angolo sono inscritti due circoli i quali si toccano esternamente nel punto T e toccano lo stesso lato dell'angolo nei punti A ed A'. Chiamando α la metà dell'angolo dato, R ed R_1 i raggi dei due cerchi, e supponendo $R > R_1$, si domanda: 1° Esprimere R_1 mediante R ed α; 2° Esprimere anche, mediante R ed α, i lati del triangolo TAA_1 e verificare che l'angolo ATA_1 è retto. – Applicazione al caso di $\alpha = 30°$.

II. Un triangolo rettangolo rotando intorno all'ipotenusa, descrive un solido che si può considerare come l'insieme di due coni di rotazione aventi la base comune. Supponendo noti il volume totale del solido e l'area del triangolo rettangolo, determinare i lati di questo triangolo.

Sessione autunnale. — I. Si determinino la base x, l'altezza y e gli angoli di un triangolo isoscele nel quale i lati uguali hanno una lunghezza data a, e l'area è uguale a quella di un trapezio nel quale i lati paralleli sono $^1/_2\, x$ e y, e l'altezza è h: e s'indichino i casi nei quali il problema è possibile e quello nel quale il triangolo è rettangolo.

II. In un cerchio di raggio r si deve costruire un triangolo ABC che abbia un vertice al centro C del cerchio e gli altri due A e B sulla circonferenza, e la cui area sia uguale alla superficie laterale del cilindro che ha per base il cerchio dato e per altezza una lunghezza data h. Si richiede che si determinino il lato $AB = y$ e la sua distanza x dal centro (altezza del triangolo), e si consideri poi il caso nel quale si voglia anche che il lato AB del triangolo passi per un punto P esterno al cerchio di cui sia data la distanza d da uno dei due punti nei quali il diametro che passa per P taglia la circonferenza; e si discutano i risultati.

(*) L'eccezione fino a $p = 13$ è necessaria. La congruenza $x^4 - y^2 \equiv 1$ (mod. 13), per esempio, non ammette altra soluzione che questa: $y \equiv 5$, $x \equiv 0$.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

P. GAZZANIGA. — *Libro di aritmetica e di algebra elementare.* — Padova, F. Sacchetto, 1896. — Prezzo: L. 3, 25.

Come indica il titolo, il libro è diviso nelle due parti *aritmetica* e *algebra*, la prima delle quali è suddivisa nei 5 capitoli: *i numeri razionali; lo zero e i numeri razionali negativi; i numeri reali; i numeri complessi;* mentre la seconda è suddivisa negli altri tre: *le eguaglianze identiche; le equazioni; applicazioni elementari dell'algebra alla geometria.*

Il libro contiene in sostanza tutto quanto è indicato dai vigenti programmi per i licei e per le prime due classi degli istituti tecnici; ma l'egregio A., con opportuni spostamenti, ha distribuito la materia con ordine più razionale di quello seguito ordinariamente. Il metodo tenuto dall'A. è essenzialmente analitico, e di ciò gli va tributata lode, perchè se è giusto che in un corso razionale di geometria elementare si debba preferire il metodo euclideo, prendendo ad imprestito dall'aritmetica il meno possibile, sembrerebbe altrettanto giusta la preferenza data al metodo analitico per svolgere gradatamente il concetto di numero. Si muoverà forse qualche obiezione per le difficoltà che gli alunni delle nostre scuole possono incontrare nello studio dei numeri quali enti puramente analitici, ma a ciò si può ben rispondere, per esempio, che le maggiori difficoltà che offre lo studio della geometria secondo il metodo euclideo (la teoria delle proporzioni informi) non impediscono che nei nostri licei essa s'insegni col metodo classico, piuttostochè con quello di LEGENDRE. L'A., accorgendosi del resto di queste difficoltà didattiche, ha pensato bene di far precedere ognuno dei 5 capitoli dell'aritmetica da opportunissime *osservazioni preliminari* su oggetti materiali, dal cui esame scaturiscono i concetti intuitivi delle varie specie di numeri. Fermandosi su di esse quanto è necessario, è certo che gli insegnanti di buona volontà potranno poi svolgere con efficacia le varie parti della materia, uniformandosi al metodo dell'A.

L'opera del prof. GAZZANIGA è ricca di molti pregi, alcuni dei quali sono messi in rilievo nella seguente rapida rassegna del libro.

Parte I. Cap. I. — Sono esposti anzitutto i primitivi concetti dell'aritmetica (*uno, numero, successivo*) senza le solite definizioni, sulla cui esattezza c'è ancora da discutere. (L'A. si schiera coi matematici che sostennero efficacemente la non definibilità del numero intero). Successivamente sono poste le relazioni di uguaglianza e disuguaglianza tra i numeri interi, e le operazioni relative a questi numeri, di cui son dimostrate con concisione e con sommo rigore (quasi sempre col metodo d'induzione) le proprietà indipendenti dal sistema di numerazione. Nel paragrafo della divisione, dopo un accenno alle congruenze, sono svolte le proprietà del M. C. D., del M. C. M. e dei numeri primi: nei due paragrafi seguenti si parla di potenza e di radice a meno 1, e così, prima che sia esteso il campo dei numeri, si trovano esposte, e ciò è logico, tutte le operazioni sugli interi. Seguono altre proprietà di questi numeri, fra le quali il teorema di FERMAT, quello di WILSON, le formule che danno le somme delle prime, seconde, terze potenze dei primi n interi, e quelle relative alle permutazioni, disposizioni e combinazioni. Chiudono il primo capitolo le proprietà dipendenti dal sistema di numerazione, cioè le regole pratiche per eseguire le varie operazioni, i criterî di divisibilità, la decomposizione dei numeri *piccoli* in fattori primi, la ricerca dei divisori di un numero e la regola per l'estrazione di $\sqrt{\ }$ a meno 1. Il capitolo è svolto in modo veramemente mirabile. C'è soltanto da osservare che, poichè lo *zero* è definito soltanto nel § 9 del Cap. I, esso dovrebbe essere del tutto sconosciuto nei paragrafi precedenti. Tuttavia, in alcuni punti, come ad es. nella ricerca dei quadrati e dei cubi dei numeri da 1 ad n (pag. 43), l'A. ne fa uso implicitamente. Forse sarebbe meglio, secondo me, che lo zero fosse messo in campo un po' più presto di quel che non faccia l'A., tanto più che esso può esser posto tra i numeri interi. Inoltre, il teorema della pag. 37 andrebbe, se non erro, posto così: *se fra i numeri 1, 2,...* $\mathrm{E}(\sqrt{\mathrm{n}})$ *non v'è alcun divisore primo di* n, *il numero* n *è primo.*

Cap. II. — Dopo le prime proprietà dei numeri frazionari sono esposte, indipendentemente dal sistema di numerazione, le proprietà delle operazioni su questi numeri, compresavi la radice d'indice n a meno di 1, e di $\frac{1}{m}$. Seguono alcune proprietà generali dei numeri razionali, e in particolare delle frazioni continue finite. Chiudono il capitolo le proprietà dipendenti dal sistema di numerazione (le frazioni decimali periodiche, e le regole per tutte le operazioni sui decimali).

Cap. III. — Si entra coi numeri negativi nei programmi dei licei. Colla solita precisione, l'A. estende ai nuovi numeri le proprietà delle diverse operazioni, e definisce le potenze con esponenti nulli e negativi, dimostrandone le proprietà.

Cap. IV. — Viene esposta la teoria degli irrazionali col metodo di DEDEKIND. Limitandosi, per ragioni didattiche, alla contiguità dei gruppi *aperti*, l'A. introduce i numeri irrazionali, svolgendo con molto rigore e con semplicità le proprietà delle operazioni su questi numeri. Seguono alcune proprietà dei prodotti e delle potenze, con un accenno al teorema binomiale; le radici aritmetiche d'indice n dei numeri reali; le ordinarie proprietà dei radicali aritmetici; le potenze ad esponenti frazionari; la teoria dei logaritmi considerati come esponenti; i rapporti delle grandezze; le progressioni aritmetiche e geometriche, e un cenno sui numeri limiti di successioni di numeri reali.

Cap. V. — Con una esattezza maggiore di quella che si riscontra in altri trattati, è esposta una breve teoria dei numeri complessi. L'A. ne fa una bella applicazione alla dimostrazione della formula di EULERO relativa al prodotto di due somme di quattro quadrati.

Dopo aver così generalizzato il concetto di numero, l'A. si trova in migliori condizioni degli altri autori per svolgere l'algebra propriamente detta.

Parte II. Cap. I. — Sono successivamente esposte le proprietà delle uguaglianze identiche, le definizioni fondamentali dell'algebra, le importanti operazioni di riduzione dei termini simili e di raccoglimento del fattor comune, le operazioni sui polinomi, la regola di RUFFINI per il calcolo del quoto e del resto della divisione per $x - a$, le proprietà del M. C. D. e del M. C. M. dei polinomi, e alcune considerazioni sul numero dei valori della variabile indipendente per i quali una funzione intera di 1°, 2°,.... grado acquista un valore determinato, e sui massimi e minimi del trinomio quadratico. Questo capitolo è corredato da una raccolta di interessanti esercizi che l'A. ha tratto, oltre che dalle altre parti della matematica, dalla meccanica e dalla fisica.

Cap. II. — Venendo alle equazioni, l'A. comincia coll'esporne in modo molto esatto i principî fondamentali, e passa quindi successivamente alla risoluzione delle equazioni di 1° e di 2° grado, con accenni a quelle di 3° e di 4°, e all'analisi indeterminata di 1° grado. Le definizioni di *sistemi* di due equazioni con due incognite (pag. 249) e di tre con tre incognite (pag. 262), escludono i casi d'impossibilità e d'indeterminazione. A voler seguire l'A., un complesso di equazioni non potrebbe esser chiamato sistema se non quando sia stato verificato che esso soddisfa alle condizioni richieste dalla definizione. Ora, specialmente per la pratica, ciò non è, a parer mio, conveniente, stante l'abitudine ormai radicata di dare, nella teoria delle equazioni, alla parola sistema un senso più vasto. L'A. stesso, a pag. 260, in alcuni esercizi proposti, dà per inavvertenza il nome di *sistema* a ciascuno dei complessi:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 12 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{6} = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = c \\ \dfrac{x}{d} + \dfrac{y}{e} = f, \end{cases}$$

il primo dei quali non rientrerebbe nella definizione posta dall'A., mentre l'altro, per meritare il nome di sistema, dovrebbe soddisfare a qualche condizione. Nel corso del libro, l'A. si attiene peraltro alle definizioni poste, e trova dapprima le condizioni perchè due o tre equazioni di 1° grado con due incognite, tre equazioni di 1° grado con tre incognite,... formino un sistema. In seguito passa alla risoluzione dei sistemi medesimi. Questo capitolo è anch'esso corredato da una raccolta di scelti problemi.

Cap. III. — Pregevolissimo, come tutti gli altri, quest'ultimo capitolo contiene le più elementari applicazioni dell'algebra alla geometria. Vi si trovano, esposte con molta eleganza, le relazioni tra gli elementi lineari d'un triangolo rettangolo, le espressioni dell'area d'un triangolo qualunque, delle bisettrici, delle mediane, dei raggi del cerchio inscritto e del circumcircolo in funzione dei lati, e le costruzioni geometriche delle espressioni algebriche fondamentali. Chiude il libro un completo corso di trigonometria rettilinea, quale può essere sufficiente per la terza classe dei nostri licei. Al capitolo è annessa una serie di ottimi esercizi.

Do termine a questa breve rivista col far rilevare che il prof. GAZZANIGA, oltre a dimostrazioni semplici e spesso originali, ha arricchito la sua opera di interessantissime notizie storiche le quali, insieme agli altri pregi del libro, varranno a rendere più attraente lo studio della matematica nei nostri licei. E di ciò v'è pur troppo bisogno.

CORRADO CIAMBERLINI.

Fermo, agosto 1896.

ANNO I. 1896-97. NUM. 1.

Bollettino dell'Associazione MATHESIS

FRA GLI

INSEGNANTI DI MATEMATICA DELLE SCUOLE MEDIE

SEDE DELL'ASSOCIAZIONE PER IL BIENNIO 1896-97-98

TORINO

Presso il Presidente del Comitato: Professor RODOLFO BETTAZZI, *Corso S. Martino, 1*

STATUTO DELL'ASSOCIAZIONE

Art. I.

Fra gl' insegnanti di matematica nelle scuole secondarie italiane è costituita un'Associazione denominata - MATHESIS - *Associazione per studi fra gl' insegnanti di matematica delle scuole medie*, il cui oggetto è il miglioramento della scuola e il perfezionamento degl' insegnanti, sotto il punto di vista scientifico e didattico.

Art. II.

A raggiungere il proprio scopo l'Associazione:

a) tiene riunioni plenarie e parziali;

b) promuove e favorisce ricerche scientifiche e discussioni didattiche;

c) pubblica sinossi di corsi di matematiche elementari o di speciali teorie, in relazione ai diversi gradi d'insegnamento;

d) cura la formazione di una biblioteca matematica circolante ad uso dei soci.

Art. III.

Saranno di diritto ammessi come soci, dietro semplice loro domanda, i professori di matematica appartenenti al personale insegnante o direttivo delle scuole medie, governative o pareggiate;

quelli delle altre scuole secondarie dovranno ottenere l'approvazione del Comitato direttivo (Art. IV).

Saranno *soci fondatori* coloro che si inscriveranno entro un mese dalla pubblicazione del presente Statuto.

Art. IV.

L'Associazione è retta da un Comitato direttivo composto di 12 soci ed eletto a maggioranza di votanti. Il Comitato elegge nel proprio seno un Presidente ed un Vice-presidente, ed elegge pure, fra i soci, un Segretario-Economo.

Art. V.

L'anno sociale comincia col 1° luglio. Il Comitato è eletto nel mese di giugno, entra in carica colla prima adunanza (Art. VIII) e rimane in funzione due anni.

Art. VI.

Al Comitato direttivo è affidato l'indirizzo scientifico e didattico dell'Associazione, la redazione di un bollettino e la ripartizione dei fondi sociali.

Art. VII.

La città ove risiede il Presidente del Comitato direttivo è, pel biennio (Art. V), sede dell'Associazione.

Art. VIII.

Nelle vacanze autunnali, in sedi da destinarsi anno per anno, si terrà dal Comitato direttivo un'adunanza. In questa adunanza verrà presentato dal Presidente del Comitato il bilancio dell'anno cessato, e verrà deliberata la ripartizione delle spese pel nuovo anno sociale secondo l'entrata.

Il Presidente in carica, sotto la propria responsabilità, curerà che queste spese non siano oltrepassate nè devolte ad altro scopo.

Nella stessa adunanza verrà stabilito il lavoro dell'anno.

Quando tale adunanza ha luogo nell'anno della elezione, i membri del Comitato cessante potranno intervenirvi, ma non avranno voto deliberativo.

Art. IX.

L'Associazione pubblica un bollettino, nel quale si daranno gli atti della Società, si discuteranno questioni relative al miglioramento dei programmi e alla scelta dei libri di testo, si forniranno notizie su tutto ciò che può interessare l'insegnamento delle matematiche nelle scuole medie, e si darà l'elenco dei libri della biblioteca dell'Associazione (Art. II).

Art. X.

I soci sono tenuti al pagamento di una quota annuale di lire SEI (da trasmettere entro il mese di giugno di ciascun anno al Segretario-Economo) e di una tassa d'ingresso di lire QUATTRO.

I soci fondatori (Art. III) sono esenti dalla tassa d'ingresso.

I soci di nuova inscrizione verseranno la stessa somma, qualunque sia, entro l'anno, l'epoca del loro ingresso nella Società.

Art. XI.

Le dimissioni presentate in qualsiasi epoca da un socio, non lo esonerano dal pagamento del contributo relativo all'anno in corso. I nomi dei contravventori alla presente disposizione, od a quella dell'articolo precedente, saranno pubblicati nel bollettino dell'Associazione sotto la rubrica « *Soci morosi* »; però il Comitato direttivo ne darà preavviso agl'interessati.

Art. XII.

Il modo di funzionare del Comitato direttivo sarà fissato da apposito *Regolamento*, redatto dal Comitato stesso.

Roma, 15 ottobre 1895.

Comitato Direttivo per il biennio 1896-97, 1897-98.

BETTAZZI RODOLFO, *Presidente*
FRATTINI GIOVANNI, *Vice-Presidente*
BRAMBILLA ALBERTO
DE AMICIS ENRICO
DE ZOLT ANTONIO
GAZZANIGA PAOLO
LAZZERI GIULIO
PANIZZA FRANCESCO
RETALI VIRGINIO
SFORZA GIUSEPPE
GIUDICE FRANCESCO, *Segretario-Economo.*

ELENCO DEI SOCI FONDATORI
dell' Associazione MATHESIS

Aicardi Vittorio, Liceo Pareggiato, Novi Ligure. — Amaldi Italo, R. Istituto tecnico, Aquila. — Amodeo Federico, R. Istituto tecnico, Napoli. — Andriani Angelo, R. Liceo, Bari — Angeleri Francesco, R. Liceo, Ivrea. — Beggiato Alessandro, R. Liceo, Vicenza — Bernardi Giuseppe, R. Istituto tecnico, Ancona. — Bettazzi Rodolfo, R. Liceo Cavour, Torino. — Bettini Bettino, Liceo Pareggiato, Osimo (Ancona). — Biasi Giovanni, R. Istituto tecnico, Sassari. — Boccardini Giovanni, R. Liceo, Vigevano — Bonciani Guglielmo, Scuola tecnica pareggiata, Viareggio — Bosi Luigi, R. Istituto tecnico, Teramo — Brambilla Alberto, R. Liceo Vittorio Emanuele, Napoli — Bustelli Anton Maria, R. Provveditore agli studi, Aquila — Carelli Costantino Gregorio, R. Scuola tecnica, Cagliari — Carlini Luigi, R. Scuola tecnica, Udine — Castelli Pietro, R. Istituto tecnico, Piacenza — Catania Sebastiano, R. Istituto nautico, Catania — Ceccaroni Guido, R. Ginnasio, Veroli — Ceretti Umberto, R. Scuola tecnica, Rieti — Certo Luigi, R. Liceo Vittorio Emanuele, Palermo. — Chiari Augusto, Scuola tecnica e Ginnasio pareggiati, Città di Castello — Chini Mineo, R. Scuola allievi macchinisti, Venezia — Ciabò Giorgio, Preside del R. Istituto tecnico, Bergamo — Ciamberlini Corrado, R. Liceo, Fermo — Coen Adolfo, R. Liceo, Mantova — Correale Eugenio, R. Liceo Vittorio Emanuele, Napoli — Cortevesio Edoardo, Ginnasio pareggiato, Avezzano — Costanzi Giuseppe, R. Liceo, Rieti — Cozza Ettore, R. Scuola tecnica, Perugia — Dainelli Ugo, R. Istituto tecnico, Roma — De Amicis Enrico, R. Istituto tecnico, Brescia — De Vincentiis Giuseppe, R. Ginnasio, Chieti — D'Incà Levis Enrico, R. Istituto tecnico, Teramo — De Zolt Antonio, R. Liceo Parini, Milano — Drago Giovanni, R. Ginnasio, Sciacca — Ducci Enrico, R. Scuola tecnica, Varallo-Sesia — Fabris Vittorio, R. Istituto tecnico, Alessandria — Fazzari Gaetano, R. Liceo, Avellino — Fellini Diego, R. Istituto tecnico, Forlì — Fenoglio Luigi, R. Istituto tecnico, Torino — Ferrari Carlo, R. Scuola tecnica, Como — Ferrari Federico, R. Istituto tecnico, Alessandria — Ferrari Francesco, R. Liceo, Chieti — Ferro Giovanni, R. Ginnasio Cavour, Torino — Fiorentino Gioacchino, R. Ginnasio, Caltanissetta — Foschi Emanuele, R. Scuola tecnica, Casal Maggiore — Franconi Enrico, R. Scuola tecnica, Civitavecchia — Frattini Giovanni, R. Istituto tecnico, Roma — Fucini Catone, R. Istituto nautico, Genova — Gambioli Dionisio, R. Scuola tecnica Lombardini, Milano — Garrone Contardo, R. Liceo, Voghera — Gazzaniga Paolo, R. Liceo, Padova — Giudice Francesco, R. Istituto tecnico, Genova — Gremigni Michele, R. Liceo Galilei, Firenze — Grilli Ruggero, R. Liceo, Treviso — Lazzeri Giulio, R. Accademia navale, Livorno — Legrenzi Giuseppe, R. Ginnasio, Sondrio — Leoncini Michele, R. Ginnasio, Pallanza — Lugli Aurelio (*), R. Istituto tecnico, Roma — Marini Raffaello, R. Istituto tecnico, Arezzo — Mariscotti Luigi, R. Ginnasio, Caltanissetta — Marseglia Natale, R. Liceo, Potenza — Martone Alfonso, R. Liceo Tasso, Roma — Martone Michele, R. Istituto tecnico, Reggio Calabria — Masdea Arturo, R. Istituto nautico, Napoli — Massa Alfredo, R. Ginnasio Ennio Quirino Visconti, Roma — Melis Antonio, R. Scuola tecnica Sammartino, Catania — Michelangeli Nazzareno, R. Liceo, Forlì — Misani Massimo, Preside del R. Istituto tecnico, Udine — Mola Giacomo, R. Liceo, Campobasso — Montesano Potito, R. Liceo, Maddaloni — Morelli Ernesto, R. Ginnasio Umberto, Roma — Moreno Giuseppe, R. Istituto tecnico, Napoli — Moretti Alfonso, R. Liceo, Correggio — Moriconi Creonte, R. Liceo, Senigallia — Morino Paolo, R. Liceo, Cosenza — Murer Vittorio, R. Liceo, Alessandria — Nannei Enrico, R. Istituto tecnico, Bari — Neppi Modona Angelo, R. Istituto tecnico, Girgenti — Orto Carboni Salvatore, R. Istituto tecnico, Piacenza — Palatini Francesco, R. Istituto tecnico, Sondrio — Panizza Francesco, R. Liceo M. Polo, Venezia — Pepoli Alessandro, R. Scuola tecnica Gagini, Palermo — Pesci Giuseppe, R. Accademia Navale, Livorno — Perito Pasquale, R. Scuola tecnica, Penne — Pierantoni Venturino, R. Istituto tecnico, Chieti — Pinna Salvatore, R. Ginnasio, Nuoro — Pirondini Geminiano, R. Istituto tecnico, Parma — Pisciotta Francesco, R. Liceo-Ginnasio Vittorio Emanuele, Napoli — Poinelli Giuseppe, R. Ginnasio, Mondovì — Priolo Luigi, Scuola tecnica pareggiata, Reggio Calabria — Pucci Enrico, Preside del R. Liceo Vittorio Emanuele, Napoli — Racca Giuseppe, R. Scuola tecnica, Savigliano — Retali Virginio, R. Liceo Beccaria, Milano — Riboni Gaetano, R. Istituto tecnico, Milano — Rizzoni Enrico, R. Liceo, Lucera — Romano Salvatore, R. Scuola tecnica, Noto — Rozzolino Gerolamo, R. Liceo, Salerno — Russo Giovanni, Istituto tecnico pareggiato, Catanzaro — Sadun Elcia, R. Istituto tecnico, Roma — Santamaria Gerardo, R. Ginnasio Parini, Milano — Sbrana Silvio, R. Liceo, Pistoia — Scoto Giuseppe, R. Scuola normale e R. Scuola tecnica, Ravenna — Sforza Giuseppe, R. Istituto tecnico, Reggio Emilia — Simoncelli Remo, R. Scuola tecnica, Arcevia — Sola Filippo, R. Liceo, Carmagnola — Stromillo Solone, R. Scuola tecnica S. Rosa, Napoli — Testi M. Giuseppe, R. Istituto tecnico, Macerata — Tremontani Gerolamo, Preside del R. Istituto tecnico, Bologna — Treves Eugenio, R. Scuola tecnica, Badia Polesine — Valeri Demetrio, R. Liceo, Modena.

(*) Morto il 27 maggio 1896.

Corrispondenza coi Soci.

I Soci i cui nomi sono pubblicati nel presente fascicolo, hanno pagata la loro quota per l'anno sociale 1896-97. Questa dichiarazione fa le veci di ricevuta.

VERBALI

La nostra Associazione incominciò a vivere solo col 1° luglio del corrente anno 1896, per cui non potè ancora dar pubblica prova di attività utile pel miglioramento degl'insegnamenti e per il progresso degli studî. Peraltro nell'adunanza ordinaria tenutasi in queste vacanze autunnali, secondo l'esigenza dell'articolo VIII del nostro Statuto, il Comitato dell'Associazione ha preparato un lavoro, che gioverà certamente alla scuola ed alla scienza, se, come ne siamo certi, vi prenderanno parte attiva i non pochi valenti insegnanti, e cultori delle matematiche.

Per tenere i soci al corrente degli atti del Comitato, e per norma di tutti coloro che intendono unire l'opera propria alla nostra, pel bene della scuola, pubblichiamo un estratto del verbale dell'adunanza citata sopra.

Estratto del verbale delle sedute del Comitato Direttivo

tenute a FIRENZE *nei giorni* 24, 25 *e* 26 *Agosto,* 1896.

Il Comitato si riunisce in una sala del R. Liceo Galilei, cortesemente concessa. Sono presenti i membri del Comitato direttivo, professori R. Bettazzi (presidente del Comitato), G. Frattini (vice-presidente), F. Giudice (segretario-economo), E. De Amicis, P. Gazzaniga, G. Lazzeri, G. Sforza. Dei quattro membri rimanenti, non intervenuti alla riunione, il prof. A. De Zolt è ammalato; gli altri tre, cioè i professori A. Brambilla, F. Panizza, V. Retali, giustificando l'assenza, hanno inviate le loro osservazioni sulle questioni poste all'ordine del giorno.

Presiede le adunanze il prof. R. Bettazzi, ne è il segretario il professor E. De Amicis.

Il Presidente legge una lettera della presidenza del Circolo matematico di Palermo, nella quale si esprimono vive condoglianze per la morte del prof. A. Lugli, membro del Comitato dell'Associazione *Mathesis*. I convenuti ne prendono atto ringraziando. E, sollevatasi in proposito la questione della opportunità o meno d'invitare i soci ad una votazione per coprire il posto lasciato vacante nel Comitato dal compianto professore, dietro proposta del Presidente unanimamente si delibera che l'Associazione non debba, per questo primo biennio sociale, nominare un successore all'illustre ed amatissimo estinto, per omaggio alla sua memoria.

Il Presidente dà pure comunicazione di una corrispondenza del professore F. Angeleri, salutante i convenuti, plaudente alla questione, inserita nell'ordine del giorno, del coordinamento delle scuole secondarie con le facoltà di matematica e d'ingegneria, e proponente di discutere intorno alla opportunità di officiare Sua Eccellenza il Ministro della pubblica istruzione affinchè voglia rimettere, fin dall'anno scolastico prossimo, il tema scritto di matematica in tutti gli esami, o almeno nelle due licenze, liceale e ginnasiale. I convenuti prendono tosto in esame la proposta del prof. F. Angeleri, e concludono in proposito, approvando unanimamente la proposta fatta dal prof. P. Gazzaniga, d'incaricare il prof. G. Frattini, residente a Roma e vice-presidente del Comitato, di presentare lo Statuto e gli Atti dell'Associazione *Mathesis* a Sua Eccellenza il Ministro della pubblica istruzione, chiedendo l'appoggio di lui agli intenti didattici e scientifici, che soli costituiscono la ragione d'essere di questa Società d'insegnanti, e raccomandandogli in particolare di voler ripristinare la prova scritta di matematica in tutti gli esami di licenza delle scuole secondarie, non tanto per l'efficacia in sè di queste prove, quanto per il prestigio che così si verrebbe a ridonare alla materia, e la conseguente maggiore attività nello studio, che tali prove hanno sempremai risvegliato nella scolaresca.

Dopo lunga discussione sono approvate, per affidarle allo studio dei soci, sei questioni attinenti ai programmi, ed una (questione VII) d'indole scientifico-didattica; *le risposte relative alle medesime, siano esse di soci o di non soci, dovranno spedirsi al Presidente prof. Bettazzi,* che avrà cura di far pubblicare dei riassunti man mano che ne sarà il caso. Alcune delle risposte date all'ultima, potranno anche venir pubblicate integralmente a titolo di premio.

A proposito della stessa questione ultima, il prof. Giudice dà lettura di una sua comunicazione intorno ad una nuova e semplice maniera di trattare la teoria dell'equivalenza; e, dietro proposta del Presidente, unanimemente accettata, si delibera che essa comunicazione sia inserita negli Atti dell'Associazione.

Si approva la relazione sul bilancio sociale, fatta dal segretario-economo, dalla quale risulta la disponibilità, per questo primo anno, della somma di L. 572,16.

Si passa quindi alla discussione delle due questioni, connesse fra loro: assunzione della pubblicazione del *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario* da parte dell'Associazione *Mathesis*, e pubblicazione, prescritta dallo Statuto, del *Bollettino* contenente gli Atti dell'Associazione medesima. Il Presidente comunica in proposito che, in seguito all'autorizzazione precedentemente ricevuta dal Comitato, di trattare colla famiglia del compianto prof. A. Lugli, già direttore del *Periodico*, egli ha convenuto di continuar per l'anno corrente 1896 la pubblicazione del *Periodico*, a cura ed a carico dell'Associazione, profittando anche dell'offerta di contribuzione pecuniaria da parte dell'autore di un lungo articolo da inserirsi nel *Periodico* medesimo, ed affidandone la direzione al prof. G. Frattini. Il Comitato approva l'operato del Presidente, considerando che il grave sacrifizio pecuniario, al quale così viene a sobbarcarsi l'Associazione, è giustificato specialmente dallo scopo di fare per tal modo cosa giovevole alle scuole secondarie, evitando la soppressione di un giornale sommamente utile tanto a docenti che a discenti.

Le spese del Periodico, comprese le postali, ammontano pel rimanente di quest'anno a circa L. 750, la corrispondente entrata è di circa L. 350; e il Comitato, approvando le proposte fatte in proposito dal Presidente e dal Segretario-economo, dà loro facoltà di valersi del fondo di cassa sociale per coprire il corrispondente disavanzo. Pertanto viene stabilito che l'Associazione *Mathesis* concorra con L. 400 a coprire le spese relative alla pubblicazione dei rimanenti fascicoli del Periodico di quest'anno.

Si stabilisce poi che, per tutto il corrente anno 1896, gli Atti dell'Associazione *Mathesis* siano inseriti negli ultimi tre fascicoli del Periodico, di 32 pagine ciascuno; la parte così occupata nel Periodico dagli Atti medesimi, costituirà per quest'anno il *Bollettino* dell'Associazione. Di questi Atti si faranno tanti estratti quanti occorreranno, e si manderà una copia di tali estratti a tutti i soci di *Mathesis;* e pertanto quelli fra questi che saranno abbonati al Periodico riceveranno pure una copia ciascuno dei predetti fascicoli (completi), mentre i soci di *Mathesis* non abbonati al Periodico, riceveranno solamente una copia degli estratti suddetti.

Si approva inoltre la disposizione seguente: « L'Associazione *Mathesis* ha deliberato, avendo a ciò aderito la famiglia del compianto prof. A. Lugli, di continuare anche dopo l'anno corrente la pubblicazione del Periodico, fino a che questa non sia assunta da un privato. Si procureranno in ogni caso facilitazioni ai soci; e intanto, per l'annata 1897, se tale assunzione privata non avrà avuto luogo, il prezzo d'abbonamento al Periodico sarà ridotto pei soci, mentre rimarrà di L. 6 pei non soci ».

Dietro insistente proposta del prof. G. Frattini, si delibera inoltre che pel 1897, sempre nella ipotesi che l'accennata assunzione privata non sia ancora avvenuta, la direzione del Periodico, pubblicato a cura dell'Associazione *Mathesis*, sia affidata al Presidente del Comitato direttivo, prof. R. Bettazzi, coadiuvato dai singoli membri del Comitato medesimo; al detto Presidente dovranno pertanto dirigersi dal 1° gennaio 1897 in poi, tutte le pubblicazioni e gli scritti concernenti il Periodico.

Si dà facoltà al Presidente del Comitato di provvedere nei limiti del disponibile, alle spese del bollettino dal 1° gennaio al 31 luglio 1897.

Da ultimo, riguardo alla formazione di una *Biblioteca* circolante ad uso dei soci, prescritta dallo Statuto, si delibera di cercare per ora di procurarsi all'uopo una prima raccolta di opere ed opuscoli di matematica e scienze affini, mediante libri offerti in dono dai soci, e da tutti coloro che, quantunque non soci, intendono in questo modo giovare all'Associazione. A tale scopo dovrà pubblicarsi nel bollettino un apposito invito. I libri offerti saranno raccolti dal segretario-economo, il quale ne compilerà l'elenco, pubblicandolo di mano in mano sul bollettino, unitamente ai nomi degli oblatori.

Conclusioni della relazione sul bilancio sociale.

Quote spontanee (di 11 membri del Comitato provvisorio) . . .	L.	55,00
» ordinarie (di 106 soci fondatori)	»	636,00
Totale entrata . . .	L.	691,00
Spese circolari stampate, autograf. o poligraf. e di posta . . .	»	118,84
Somma disponibile per il 1896-97 . . .	L.	572,16

Seguono le questioni che il Comitato direttivo propone allo studio dei signori Professori, siano essi soci di MATHESIS o no.

Si prega di spedire le risposte alla sede dell'Associazione.

I.

Studiare in quale misura sia opportuno dare l'insegnamento dell'aritmetica razionale nelle scuole secondarie inferiori e superiori, e in quali classi convenga impartirlo, affinchè riesca più proficuo.

II.

Quali modificazioni si possono suggerire nei vigenti programmi per l'insegnamento scientifico delle scuole medie, affinchè quello della matematica riesca maggiormente coordinato con quello delle scienze affini.

(Nel liceo, per esempio, seguendo l'attuale programma di matematica, si tratta la teoria della misura verso la fine del secondo anno, mentre per l'insegnamento della fisica essa occorre assai prima. L'insegnamento della cristallografia attualmente precede quello della stereometria. Il disegno di costruzioni comincia un anno prima dello studio della geometria descrittiva. Nel secondo anno dell'istituto tecnico il professore di computisteria ha bisogno di valersi, quasi fin dal principio, della teoria dei logaritmi, mentre questa costituisce ora l'ultimo capitolo del corrispondente programma di aritmetica e algebra. Ecc.).

III.

Se sia opportuno semplificare e ridurre in alcune parti, e in pari tempo approfondire e perfezionare in altre, l'insegnamento della matematica nelle scuole normali, in modo da ottenere dagli allievi, futuri maestri elementari, rigore nelle nozioni elementari e precisione nel linguaggio.

IV.

Esame della importante questione della fusione delle scuole tecniche con le ginnasiali, specialmente in riguardo alla matematica.

V.

Opportunità della fusione della geometria piana con la solida nell' insegnamento.

VI.

Se e come convenga modificare e completare l'insegnamento della matematica attualmente impartito nelle scuole secondarie, e specialmente nei licei, per ottenere un migliore coordinamento con le facoltà di matematica pura ed applicata; o quanto meno:

a) Quali sarebbero i migliori limiti da assegnarsi all' insegnamento della trigonometria nei licei; in particolare, se convenga restringere la parte goniometrica e ampliare quella della trigonometria propriamente detta.

b) Se per tale coordinamento sia opportuno semplificare nel secondo biennio della sezione fisico-matematica degl'istituti tecnici l'attuale programma di matematica, una parte del quale è poi ripetuta all'università e nei licei non si svolge, allo scopo eziandio di potere con miglior frutto tornare nel secondo biennio sul programma del primo, trasportandovene anche una parte, e così addestrare maggiormente gli alunni del secondo biennio nelle esercitazioni ed applicazioni matematiche, e segnatamente nella risoluzione e discussione dei problemi, e alleggerire al tempo stesso gli alunni del primo biennio, ai quali attualmente si deve svolgere in due anni quello stesso programma di matematiche elementari, per lo svolgimento del quale nelle scuole classiche sono invece assegnati cinque anni (Ginnasio e Liceo).

NB. Il Comitato aveva esso stesso iniziata la discussione di questa questione; e venne, fra le altre, avanzata questa proposta: che, soppressa la sezione fisico-matematica negli Istituti tecnici, venisse istituito un corso di un anno, comune ai licenziati dai Licei e dagli Istituti tecnici, nel quale fosse dato un insegnamento complementare di matematica a quelli fra essi che aspirassero all'inscrizione alle facoltà matematiche universitarie.

Emersi nella discussione i vantaggi, ma insieme ad essi anche le difficoltà di questa soluzione, si pensò di non pregiudicare la questione con una deliberazione, e di proporla allo studio dei professori tutti delle scuole medie.

VII.

Del miglior modo di trattare in iscuola la teoria dell'equivalenza.

Biblioteca dell' Associazione MATHESIS.

I Soci e le persone che, sebbene non soci, s'interessano all'incremento di *Mathesis* sono pregati d' indirizzare al Segretario-Economo, *prof. Francesco Giudice, Corso Ugo Bassi 40, Genova,* i libri e gli opuscoli che intendessero donare all' Associazione per concorrere alla formazione della sua biblioteca circolante.

Dei libri e dei donatori si pubblicherà l'elenco nel bollettino.

Comunicazione di Francesco Giudice.

La questione dell'equivalenza fu molto discussa in questi ultimi anni. Ora, esaminando quanto fu scritto in proposito ed in particolar modo le pubblicazioni più recenti, si riconosce che le difficoltà sorgono sempre quando cresce all'infinito il numero delle divisioni, ossia quello delle parti. Fermando l'attenzione su questo punto capitale, mi sono accorto che la causa prima delle difficoltà incontrate consiste nel non aver separate nettamente le figure finite dalle infinite: (*) facendo questa separazione, s'ottiene subito la semplicità antica ed il rigore moderno, perchè dimostrasi immediatamente che una grandezza finita non può esser eguale ad una sua parte, e questa, come è noto, è la proposizione fondamentale della teoria dell'equivalenza.

Ciò premesso, passo a provare quanto ho asserito, e lo esporrò senza divagare, affinchè ognuno possa apprezzare da sè la semplicità e l'importanza del metodo.

Grandezza finita ed infinita. — Diremo che una grandezza è finita, se non è possibile toglierne una prima parte (formata d'un sol pezzo o risultante della riunione di più pezzi presi arbitrariamente ed arbitrariamente riuniti), indi una seconda (formata d'un sol pezzo o di più pezzi presi arbitrariamente nel resto ed arbitrariamente riuniti), che sia eguale alla prima, poi una terza, anch'essa eguale alla prima, e così via indefinitamente: se invece sia possibile, allora diremo che la grandezza è infinita.

Teorema. *Una grandezza finita non può superar sè stessa.* — Supponiamo infatti che una grandezza F possa superar sè stessa, supponiamo cioè che sia possibile scomporre F in parti e rimettere poi insieme le medesime, in modo da ottenere una grandezza formata d'una parte eguale ad F e di altra parte, che indicheremo con G: togliamo questa parte, e, rimanendo ancora una grandezza eguale ad F, mediante la stessa scomposizione e ricomposizione di prima, riusciremo a togliere G una seconda volta, lasciando come resto ancora una grandezza eguale ad F, cosicchè, operando di nuovo la stessa scomposizione e ricomposizione, potremo togliere G una terza volta, lasciando di resto ancora F, e così via. In questo modo vediamo esser possibile togliere da F una 1ª parte eguale a G, poi una 2ª ed una 3ª e così via indefinitamente. Una grandezza F, che possa superar sè stessa, è

(*) Godo che il valente prof. Giudice sia della mia opinione. (V. un mio articolo pubblicato nel *Periodico di mat.*, Fasc. V-VI, 1895).

G. Frattini.

dunque necessariamente infinita; per cui non è possibile che una grandezza finita superi sè stessa.

Dopo la definizione e il teorema precedente basterà ammettere, per postulato, che sia finita ogni sfera, per poter trattare con semplicità e rigore la teoria dell'equivalenza. Consideriamo infatti un cerchio: ogni volta che pensiamo segnata in esso una parte, pensiamo costruito sulla medesima un cilindro retto di altezza eguale ad un segmento a fissato comunque, e, se pensiamo spostata o soppressa una parte del cerchio, pensiamo spostato o soppresso con la medesima il sovrapposto cilindro: riconosciamo così subito che, se si potessero togliere successivamente infinite parti eguali dal cerchio, si potrebbero pur togliere dalla sfera circoscritta al sovrapposto cilindro retto di altezza a: e, siccome la cosa non è possibile per la sfera, perchè ogni sfera è finita per postulato ammesso, così la cosa non è possibile neppure pel cerchio: i cerchi son dunque finiti. Consideriamo ora un segmento in un piano: se ogni volta che pensiamo spostata o soppressa una sua parte, pensiamo spostato o soppresso con essa un sovrapposto rettangolo di altezza a, riconosciamo che, se si potessero togliere successivamente infinite parti egnali del segmento, si potrebbero pur togliere dal cerchio circoscritto al sovrapposto rettangolo di altezza a; onde si vede che, essendo finiti i cerchi, sono finiti anche i segmenti.

Giovanni Frattini - *Gerente responsabile*

Roma, 1896 — Tip. Elzeviriana.

FONDAMENTI
PER UNA TEORIA GENERALE DEI GRUPPI

DI RODOLFO BETTAZZI

(*Continuazione e fine: Vedi pagina 112*).

CAPITOLO XIII.

GRUPPI I CUI ENTI SONO PARTI FINITE DI GRUPPI SEMPLICI.

92. Teorema. — In un gruppo finito Γ, i cui enti siano parti finite di un gruppo qualunque G, ve n'è sempre per lo meno uno di potenza non minore a nessuno e per lo meno uno di potenza non maggiore a nessuno.

Infatti il gruppo delle potenze di ciascuna di queste parti è equivalente a Γ, e quindi finito, e finito quello, sua parte, delle potenze distinte di queste parti. Essendo tal gruppo parte di quello numerabile di tutte le potenze finite (§ 90) esisterà in esso una potenza di cui nessuna sarà seguente (§ 72-Cor. 1) ed uno di cui nessuno sarà precedente (§ 71) nel gruppo di tutte le potenze, reso normale col dire seguente la potenza maggiore e precedente la minore. Ciò dimostra il Teorema.

Corollario 1. — In un gruppo finito di Z distinte di un gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale, ve n'è una di potenza massima ed una di potenza minima.

Cor. 2. In un gruppo finito i cui enti sono gruppi finiti, ve n'è per lo meno uno di potenza non maggiore a nessuno degli altri, essendo ogni gruppo finito equivalente ad una Z di un gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale, e valendo il Corollario precedente.

93. Teorema. — In un gruppo Γ di parti prese in un gruppo semplicemente sviluppabile ve n'è sempre per lo meno una di potenza non maggiore a nessuna delle altre.

Se le parti sono tutte sviluppabili, esse sono tutte semplicemente sviluppabili (§ 72) e quindi tutte della prima potenza dei gruppi sviluppabili (§ 91) ed il teorema è provato.

Se alcuna o tutte sono finite, possiamo, se vi sono, trascurare quelle sviluppabili (§ 86, Cor. 2): quelle distinte delle altre saranno allora parte del gruppo di tutte le potenze finite, e quindi (§ 71) di esse una non ne avrà precedenti, il che prova il teorema.

Corollario. — In un gruppo di Z distinte di un gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale, ve n'è sempre una di potenza minima.

94. Teorema. — Il gruppo di tutte le parti distinte di un gruppo finito, considerate esse come enti, è finito.

Sia G il gruppo finito e Γ il gruppo delle potenze distinte delle sue parti, il quale, dovendo queste parti essere di potenza non maggiore a quella di G, sarà finito (§ 90). Immaginiamo Γ ordinato: il suo ente originario sarà la potenza di ogni gruppo di un ente solo. Allora:

1. Le parti di G di potenza non maggiore della prima sono un gruppo che è finito, essendo costituito dai gruppi di un solo ente, i quali formano il gruppo G, finito per ipotesi.

2. Se sono un gruppo finito le parti di G di potenza non maggiore di una α di Γ, così sarà per quelle di potenza non maggiore alla consecutiva (se vi è in Γ). Ed infatti se G' è una parte di G di potenza non maggiore di una potenza di Γ, sarà $G' + a$ (se a è ente di G e non di G') di potenza consentiva a G' (§ 83). Ora i gruppi del tipo $G' + a$ ottenuti da un determinato G' sono un gruppo finito, tale essendo il gruppo degli enti di G e non di G'; quindi, essendo G' ente di un gruppo finito per ipotesi, i gruppi $G' + a$ sono un gruppo finito di gruppi finiti, e perciò costituiscono un gruppo finito (§ 75) il quale insieme a tutti i gruppi di un solo ente, che non compariscono più nei gruppi $G' + a$, e che costituiscono un gruppo finito, dà un nuovo gruppo finito che contiene (ciascuna più di una volta) tutte le parti finite del gruppo G, aventi potenza non maggiore a quella consecutiva ad α. Dunque tutte le parti di G aventi potenza cosiffatta costituiscono un gruppo finito.

Allora essendo Γ finito e valendo perciò in esso il principio d'induzione, la proprietà varrà anche per il suo ente finale, cioè sarà finito il gruppo delle parti di G di potenza non superiore a quella di G, cioè il gruppo di tutte le parti di G, c. d. d.

Corollario 1. — È finito il gruppo di tutti gli enti che costituiscono tutte le parti di un gruppo finito, anche considerando gli enti di una parte qualunque come distinti da tutti quelli di qualunque altra.

Cor. 2. — In virtù del Post. 2º del § 65 e a causa del Cor. precedente: Nei gruppi finiti è nota una legge di scelta (§ 66) che è l'arbitrio.

Cor. 3. — In un gruppo (necessariamente finito) di parti distinte di un gruppo finito (che sono esse pure finite) ve n'è sempre una di potenza non minore ed una di potenza non maggiore a nessuna delle altre. (§ 93).

95. Teorema. — Le parti finite di un gruppo semplicemente sviluppabile, considerate come enti, costituiscono un gruppo semplicemente sviluppabile (*).

Il gruppo Γ delle loro potenze è un gruppo semplicemente sviluppabile (§ 90): lo si supponga reso normale. La dimostrazione si conduce allora simile a quella del § 94, cioè:

1. È numerabile il gruppo delle parti del gruppo dato G aventi un ente solo.

2. Se è numerabile il gruppo delle parti di G di potenza non superiore ad una di Γ, tale è quello dei gruppi di potenza non superiore alla consecutiva, giacchè ogni gruppo può associarsi con un gruppo numerabile di altri, e quindi si ha un gruppo numerabile di gruppi numerabili che è numerabile esso pure (§ 87): in esso vi sono gruppi ripetuti, e quindi i gruppi distinti ne formano una parte, la quale non essendo finita (giacchè contiene per lo meno i gruppi di un ente solo) è numerabile essa pure (§ 72). Pel principio d'induzione la proprietà è vera per qualunque potenza finita. Dunque essendo numerabile il gruppo delle potenze e numerabile il gruppo delle parti di ogni singola potenza, sarà numerabile (§ 81) anche il gruppo totale, c. d. d.

Corollario. — È numerabile il gruppo di tutti gli enti che costituiscono tutte le parti finite di un gruppo semplicemente sviluppabile, anche considerando gli enti di una parte qualunque come distinti da tutti quelli di qualunque altra (§ 76 Oss.).

Capitolo XIV.

GRUPPI INFINITI.

96. Definizione. — Diremo *infinito* ogni gruppo che non sia finito (**).

Cor. 1. — Sono infiniti tutti (Def.) e soli (§ 86) i gruppi di potenza maggiore a quella di qualunque gruppo finito.

Cor. 2. — Un gruppo equivalente ad uno infinito, è infinito esso pure.

Cor. 3. — Ogni gruppo sviluppabile è infinito (§ 86 Cor. 2).

(*) Bettazzi. Sui sistemi di numerazione dei numeri reali. (Periodico di Matematica, Anno VI).

(**) Cfr. Nota al § 12.

Oss. 1. — Non è provata vera la reciproca, che cioè ogni gruppo infinito sia sviluppabile (*).

Cor. 4. — Esistono dei gruppi infiniti (§ 12).

Cor. 5. — Ogni gruppo bene ordinato ad un senso è infinito (§ 43).

Cor. 6. — Se un gruppo bene ordinato limitato non è semplicemente ordinato, esso è infinito (§ 52).

Cor. 7. — Ogni gruppo semplicemente sviluppabile è infinito (Cor. 3).

Oss. 2. — I gruppi semplicemente sviluppabili si dicono anche *semplicemente infiniti* (**).

Oss. 3. — Non è provato se esistono o no gruppi infiniti di potenza minore a quella dei semplicemente sviluppabili (V. Oss. 1. di questo §).

Cor. 8. — Un gruppo è finito od infinito, secondochè equivale o no ad una conveniente parte fondamentale di un qualsivoglia gruppo semplicemente sviluppabile reso normale (***).

(*) Il Dedekind (§ 14, N. 159) crede di provare questo teorema reciproco (enunciato sotto la forma conveniente al linguaggio da lui adoprato); ma alla sua dimostrazione si possono fare delle obiezioni. Ed invero egli (che si riferisce al gruppo dei numeri interi come semplicemente sviluppabile) considera un gruppo Σ (che noi diremmo infinito) tale cioè che ogni sistema Z_n (gruppo dei numeri interi $\leqq n$) sia di potenza minore a Σ, e che quindi ad ogni numero n corrisponda una tale corrispondenza χ_n cogli enti del gruppo dato, che il gruppo dei corrispondenti sia parte propria di Σ. Egli usa tali corrispondenze per fissare con esse determinati enti di Σ, uno per ciascuna: e ricava da Σ un gruppo di enti così scelti, che è quindi equivalente al gruppo dei numeri interi, ed è quindi infinito nel linguaggio del Dedekind, cioè sviluppabile nel linguaggio nostro, il che prova il suo asserto. Per tale dimostrazione gli occorre dunque per ogni n una determinata corrispondenza χ_n, o in altre parole gli occorre un gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale, di corrispondenze fra Z_n e Σ, una per ciascun n. Si osservi peraltro che, secondo le ipotesi, si deve dire che essendo ogni Z_n di potenza minore a quella di Σ, per ogni n vi sono corrispondenze fra Z_n e Σ, ma non già una sola: giacchè data una corrispondenza qualunque fra Z_n e Σ, essendo $Z_n < \Sigma$, potremo sempre trasformarla in un'altra distinta associando un ente qualunque di Z_n con uno di quelli che nella corrispondenza data erano isolati in Σ, e isolando l'ente già corrispondente di Z_n. E allora possiamo dire che per ogni n si ha un gruppo Γ_n di corrispondenze fra Z_n e Σ. Per la dimostrazione del Dedekind occorrerebbe prendere una speciale, benchè qualunque, di tali corrispondenze da ciascun gruppo Γ_n, per costituire il gruppo di corrispondenze di cui si parlava prima. Ora non può dirsi che se ne sceglie uno *ad arbitrio* da ciascun gruppo Γ_n (il che se potesse farsi basterebbe allo scopo) giacchè abbiamo ammesso il Post. 1° del § 65 che a ciò si oppone, trattandosi qui di un gruppo non finito di enti da sciegliere: occorrerebbe quindi, per rendere rigorosa la dimostrazione, poter dare una legge con la quale in ciascun gruppo Γ_n si potesse scegliere una corrispondenza determinata, il che non si vede se possa farsi e, quanto meno, il Dedekind non fa.

Tale obiezione cadrebbe se si intendesse di abbandonare il Post. 1° del § 65.

(**) Dedekind. § 6, n. 71.

(***) Il Dedekind (§ 14, N. 160) dà egli pure un teorema così enunciato, ma applicabile ai suoi gruppi infiniti, che sono i nostri gruppi sviluppabili. Tale teorema sotto la forma datagli dal Dedekind, o per lo meno, colla dimostrazione che questi ne dà, non può ritenersi esatto, dipendendo dal precedente suo n. 159 che, come si è detto, non può asserirsi ben provato.

Cor. 9. — Un gruppo che non sia equivalente a nessuna parte fondamentale di un gruppo semplicemente sviluppabile reso normale, è di potenza maggiore a tutte.

97. Teorema. — Ogni gruppo ordinato illimitato è infinito.

Sia Γ un gruppo finito qualunque che supporremo ordinato, indicando con $Z_1, Z_2, \ldots Z_s = \Gamma$ le sue Z: esse costituiscono un gruppo finito, il quale, ordinato, dev'essere limitato (§ 63, Cor 1). Sia G il gruppo ordinato dato, nel quale p. es. ogni ente abbia seguenti. Dico potersi stabilire corrispondenze fra Γ e G, e che in ciascuna possibile corrispondenza Γ è suvvalente a G. Ed invero:

1° Z_1 può mettersi in corrispondenza con G, constando Z_1 di un solo ente: ed in qualunque modo ciò si faccia esisteranno sempre enti isolati in G, perchè G non deve essere di un ente solo.

2° Se la parte fondamentale Z_r di Γ può mettersi in corrispondenza con G e sempre avanzano enti isolati in G, altrettanto deve accadere per la parte fondamentale immediatamente seguente $Z_{\sigma r}$. Infatti se G_r è il gruppo degli enti di G associati a quelli di Z_r in una corrispondenza qualunque, in G_r vi dev'essere un ente A_r tale che nessuno degli altri di G_r gli sia seguente: altrimenti il gruppo G_r sarebbe tale che ogni ente in esso ne possederebbe dei seguenti e sarebbe un gruppo ordinato illimitato, mentre esso è gruppo finito perchè equivalente a Z_r, e quindi se ordinato dev'essere limitato (§ 63, Cor. 1). Il gruppo degli enti di G seguenti ad a_r esiste (essendo G ordinato illimitato) ed è ordinato illimitato; in esso si scelga un ente arbitrario, e questo si unisca al gruppo G_r, associandolo all'ente $Z_{\sigma r}$ che non è in Z_r: avremo un gruppo G_r equivalente a $Z_{\sigma r}$, in una corrispondenza che è corrispondenza anche fra $Z_{\sigma r}$ e G.

È intanto dunque provato che fra $Z_{\sigma r}$ e G può stabilirsi una corrispondenza. In tale corrispondenza α è $(Z_{\sigma r} < G)_\alpha$. In qualunque altra corrispondenza β che possa stabilirsi fra $Z_{\sigma r}$ e G deve accadere la stessa relazione, a causa del Teor. del § 61. Sarà dunque in *qualunque* corrispondenza $(Z_{\sigma r} < G)_\beta$ che è quanto ora volevasi dimostrare.

Per il principio d'induzione la proprietà sarà vera anche per la Z finale, cioè per $Z_s = \Gamma$, ossia anche Γ può mettersi in corrispondenza con G, e gli è sempre suvvalente.

Ciò prova che G è di potenza maggiore ad un gruppo finito qualunque, ed è dunque infinito.

98. Teorema. — Un gruppo composto di più altri, uno almeno dei quali sia infinito, è infinito esso pure.

Sia G il gruppo composto di quello infinito Γ_1 e di altri gruppi, e sia Γ_1 il gruppo composto degli enti di questi che non sono in Γ: sarà $G = \Gamma + \Gamma_1$. Se P è un gruppo finito qualunque sarà, in ogni corrispondenza α, $(P < \Gamma)_\alpha$ per ipotesi: aggiungendo a Γ gli enti di Γ_1 come enti isolati, avremo altrettante corrispondenze α_1, nelle quali $(P < G)_{\alpha_1}$. Essendo P un gruppo finito, per il Teor. del § 61 ciò basta per provare che G ha potenza maggiore di P e che quindi, essendo P è un gruppo finito qualunque, G è un gruppo infinito.

99. Teorema. — La differenza fra un gruppo infinito G ed una sua parte finita Γ è un gruppo infinito.

Se infatti $G_0 = G - \Gamma$ non fosse infinito sarebbe finito, ed allora sarebbe, contro l'ipotesi, finito anche (§ 74) $\Gamma + (G - \Gamma) = G$. Sarà dunque G di potenza maggiore a qualunque gruppo finito, cioè G sarà infinito.

Capitolo XV.

ALCUNE FRASI IN USO FRA I GRUPPI.

100. Se due gruppi finiti hanno ugual potenza, si dice anche che l'uno contiene *tanti enti quanti* l'altro.

Se hanno disugual potenza, si dice che quello di maggior potenza contiene *più enti* dell'altro e questo *meno enti* del primo.

Possiamo quindi dire che, dati due gruppi finiti, o ciascuno contiene tanti enti quanti l'altro, o dei due l'uno ne contiene di più, l'altro di meno (§ 84, cor. 2) e che una parte di un gruppo finito contiene meno enti che l'intero gruppo (§ 61, cor. 2).

Se un gruppo finito G è composto di due gruppi G_1 e G_2 senza enti comuni, si dirà che G contiene *tanti enti quanti* sono quelli di G_1 *più* quelli di G_2, e G_1 *tanti quanti* sono quelli di G *meno* quelli di G_2.

Così se G è un gruppo finito ed a un ente non di G, potremo dire che $G + a$ contiene *un ente di più* di G, e che non esistono gruppi che contengano meno di un ente più di G (§ 83).

Dato un gruppo finito di gruppi finiti, può dirsi che fra essi ve n'è almeno uno che contiene non meno enti degli altri, ed almeno uno che ne contiene non più degli altri (§ 92, cor. 2).

Poichè un gruppo finito è equivalente a sè stesso nella corrispondenza identità, così accadrà in qualunque altra corrispondenza (§ 61). Se dunque si dice *cambiar l'ordine degli enti* di un gruppo il metterlo in corrispondenza non identica con sè stesso, si può usare la frase che, se si cambia l'ordine degli enti in un gruppo in un modo qualunque, *ogni volta* contiene esso *tanti enti quanto un'altra*.

Di un gruppo infinito si dirà che contiene *più enti* di qualunque gruppo finito (§ 86) (*).

(*) In questo paragrafo vengono ad essere definite e rese rigorose le frasi « tanti.... quanti » « più.. - che » ecc. delle quali si fa spesso uso inavvertito senza definirle, e che mi sono sfuggite anche nella citata « Teoria delle Grandezze (Vedi introduzione). Ora esse possono essere rigorosamente usate.

Capitolo XVI (*).

ESEMPI DI GRUPPI.

101. Possiamo dare alcuni fra i più notevoli esempi di gruppi, scegliendoli tanto nel mondo materiale come nell'ideale.

I gruppi di oggetti che ci vengono forniti dal mondo esteriore, quando di questi oggetti uno ad uno apprezziamo materialmente l'esistenza, sono gruppi finiti: lo stesso apprezzamento dell'esistenza loro, fatto in tempi necessariamente successivi, ci fornisce gli oggetti in gruppo bene ordinato, limitato, dicendo seguente quello cui si pensa dopo, e in questo ordinamento accadendo che chi voglia pensare all'ente originario ed al seguente di ogni ente cui pensi finirà col pensare a tutti (prescindendo dagli ostacoli di tempo, ecc.) il che ci dice essere il gruppo catena (§ 16) del suo ente originario.

A gruppi infiniti si perviene coll'astrazione. Dicendo che si hanno enti che non finiscono mai si accenna a gruppi di potenza maggiore di qualunque gruppo finito, e quindi infinito; ma così si indica un fatto astratto e si dà al gruppo un carattere ideale.

Una delle più importanti astrazioni più prossime alla realtà è quella dei gruppi di enti i quali, contandoli uno ad uno, uno dopo l'altro, non si possono mai esaurire tutti, ma si può così contando pervenire ad uno qualunque di essi. Tale è p. es. il concetto che possiamo farci dei minuti secondi successivi a partire da uno determinato di essi quando non vogliamo pensare ad un tempo limitato. Essi sono gruppi semplicemente sviluppabili. E siccome i gruppi finiti sono tutti e soli quelli che sono di ugual potenza colle parti fondamentali dei gruppi semplicemente sviluppabili, resi normali, così ne viene che (usando il concetto di tempo) sono gruppi finiti tutti e soli quelli i cui enti si possono cominciare e finire di contare nel tempo, contandoli nel modo ordinario, facendo correre dall'uno all'altro uguali intervalli di tempo.

102. — Fornisce esempi di gruppi la fisica: ogni corpo è un gruppo di atomi, gruppo finito od infinito secondo le varie teorie.

103. — L'aritmetica ci dà notevolissimi gruppi formati coi suoi numeri. Il gruppo dei numeri interi è un gruppo semplicemente sviluppabile che si rende normale dicendo seguente il numero maggiore. È semplicemente sviluppabile anche il gruppo dei numeri razionali (**) e così quelli dei numeri algebrici, e sono quindi bene ordinabili, sebbene non più col concetto

---

(*) In questo e nei successivi paragrafi non s'intende di definire ogni nuovo concetto a cui si abbia ricorso, ma solo di *accennare* esempi di gruppi in speciali argomenti, ai quali qui non è il caso di dare sviluppo.

(**) Cantor. Acta Math. T. 2. Pag. 219 e 305.

precedente, col quale sono soltanto ordinabili. Il gruppo di tutti i numeri reali invece non è semplicemente sviluppabile, ma è di potenza superiore (*). Esso pure è ordinato, ma non bene ordinato, dicendo seguente il numero maggiore.

104. — Spettano all'Aritmetica anche i gruppi transfiniti del Cantor (**) ottenuti, se indichiamo con n, m ecc. uno qualunque dei numeri interi, considerando il numero ω minimo fra quelli maggiori di tutti i numeri interi, il gruppo dei numeri $\omega + n$, il numero $2\,\omega$ minimo fra i maggiori di tutti gli $\omega + n$, e così $3\,\omega$, $3\,\omega + n$ ecc. il numero ω^2 maggiore di ogni $n\,\omega + m$ ecc.

Tali gruppi sono bene ordinabili, anzi già bene ordinati nel modo con cui vengono definiti. Prendendo tutti i numeri di tal natura dal numero 1 fino ad uno $\geqq \omega$, si hanno gruppi infiniti e sviluppabili.

105. — In Geometria fra gli altri un notevole gruppo di punti è fornito da quelli che costituiscono la linea retta. Questa può definirsi come gruppo di punti in modo rigoroso, p. es. ricorrendo al metodo del professore Peano (***), usando i suoi quattro assiomi I. II, IV, VII e i tre proposti dal dott. Vailati (****) che possono sostituire i suoi restanti sette, e che contengono il concetto di ordine. La retta apparisce allora un gruppo ordinato (non bene ordinato) e perciò un gruppo infinito, senza che con quei soli assiomi si possa asserire se è sviluppabile o no.

Aggiunto il concetto di ugnaglianza ed il postulato della continuità, la retta diviene un gruppo sviluppabile, di potenza uguale a quella del gruppo dei numeri reali, e perciò superiore alla prima dei gruppi sviluppabili.

SAGGIO DI UNA NUOVA TEORIA
DELLE APPROSSIMAZIONI ARITMETICHE

(Continuazione: Vedi pagina 109)

9. Se di una grandezza vera v si conosce un valore a, ed un numero λ, che non può essere superato dal suo errore assoluto, questo errore ammette per limite (superiore) il numero λ, e qualunque numero maggiore di λ.

Se intorno alla grandezza vera v non si ha altra nozione, che

(*) Cantor. Acta Math. T. 2. Pag. 305.

(**) Cantor. Acta Math. T. 2. *Zur Lehre* ecc. — Burali-Forti ll. cc.

(***) Peano. Principi di Geometria. Torino (Bocca, 1889) e « Sui fondamenti di geometria » Rivista di Matematica. Vol. IV.

(****) Vailati. « Sui principi fondamentali della Geometria della Retta. » Rivista di Matematica. Vol. II.

quelle qui sopra specificate, λ è il *minimo limite* assegnabile all'errore assoluto del valore a.

Ma se di questo errore si conosce anche il *senso*, il suo limite si può far discendere fino a quest'altro *minimo*: $\frac{1}{2}\lambda$, prendendo in vece del dato valore, a,

$$a + \frac{1}{2}\lambda, \text{ quando l'errore è \textit{per difetto},}$$

$$a - \frac{1}{2}\lambda, \text{ quando l'errore è \textit{per eccesso}.}$$

10. Ogni errore operativo si può assoggettare ad un limite piccolo quanto si voglia.

Rapporti dei valori veri ai valori approssimati.

11. Rappresenterò con

$$\rho_1, \ \rho_2, \ \rho_3, \ \ldots \ R$$

i rapporti degli argomenti veri v_1, v_2, v_3, ... ai valori a_1, a_2, a_3... impiegati nel calcolo, e del valore vero V della funzione al risultato definitivo A.

12. Fra un rapporto ρ e l'errore relativo corrispondente, e, ha luogo la relazione

$$\rho = 1 + e, \quad \text{oppure} \quad \rho = 1 - e,$$

secondo che l'errore è per difetto, o per eccesso.

E reciprocamente si ha, nei due casi, rispettivamente

$$e = \rho - 1, \quad e = 1 - \rho.$$

13. Per ogni operazione rappresenterò con ω il rapporto, che ha per conseguente il risultato adottato, e per antecedente la funzione semplice (prodotto, o quoziente, o radice), corrispondente all'operazione di cui si tratta, degli argomenti in essa impiegati.

14. Così avremo, nell'esempio del § 4,

$$\omega_1 = \frac{3{,}142^2}{9{,}87}, \quad \omega_2 = 1, \quad \omega_3 = 1,$$

$$\omega_4 = \frac{\sqrt[3]{219{,}94}}{6{,}04}, \quad \omega_5 = \frac{382{,}4625 : 6{,}04}{63{,}3}.$$

15. In generale avremo, nei tre casi distinti al § 7, rispettivamente

$$\omega = \frac{a_1 a_2}{A}, \quad \omega = \frac{a_1 : a_2}{A}, \quad \omega = \frac{\sqrt[0]{a}}{A}.$$

16. Le proposizioni del § 12 si estendono, naturalmente, agli *errori relativi operativi*, confrontati coi rapporti ω.

17. Un rapporto ρ, od ω è uguale ad **1**, quando l'errore corrispondente, sia relativo, sia assoluto, è uguale a 0.

18. II. *Per qualunque funzione monomia*, $f(v_1, v_2, v_3, \ldots)$ *si ha*

$$R = R' R'',$$

essendo

$$R' = f(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots)$$

ed R″ *il risultato che si ottiene introducendo nella funzione data, come moltiplicatori delle singole funzioni semplici, da cui essa dipende, i rispettivi rapporti* ω, *e facendo uguali ad* **1** *tutti gli argomenti primitivi.*

19. Volendo applicare questo teorema ad una funzione data, bisognerà *distinguere chiaramente* le singole operazioni occorrenti per il suo calcolo, e le *funzioni semplici* che ad esse corrispondono.

20. Per la funzione calcolata nel § 4 queste operazioni e funzioni semplici sono:

la elevazione al quadrato di π . . . . π^2
la moltiplicazione di π^2 per v . . . . $\pi^2 v$
la moltiplicazione di 70 per π 70π
l'estrazione della radice cubica da 70π . . $\sqrt[3]{70\pi}$
la divisione di $\pi^2 v$ per $\sqrt[3]{70\pi}$. . . . . . $\pi^2 v : \sqrt[3]{70\pi}$

Di queste funzioni la prima e la terza sono *semplici assolutamente;* le rimanenti sono ancora *semplici rispetto agli argomenti delle operazioni corrispondenti*, perchè $\pi^2 v$ è semplicemente il *prodotto di* π^2 *per* v, ecc.

21. Per allontanare il pericolo di cadere in qualche confusione, o duplicazione, converrà introdurre ciascuno dei rapporti ω in un posto determinato rispetto agli argomenti della funzione semplice, alla quale si riferisce, e preferibilmente:

dopo il moltiplicando,	quando la f. semplice è		un prodotto (*),
dopo il quadrato,	»	»	un quadrato,
dopo il dividendo,	»	»	un quoziente,
innanzi al segno radicale	»	»	una radice.

22. Così per la formola proposta nel § 4 avremo

$$R = (\overset{2}{\rho_1}\rho_2 : \sqrt[3]{\rho_3\rho_1})\,(\omega_1\,\omega_2\,\omega_3 : \omega_4 \sqrt[3]{\omega_5}),$$

essendo ρ_1, ρ_2, ρ_3 i rapporti ρ corrispondenti, rispettivamente, agli argomenti π, v, 70; ω_1 il rapporto ω corrispondente all'elevazione di π al quadrato, ecc. O più semplicemente, omettendo i rapporti uguali ad 1, relativi all'argomento esatto 70 ed alle operazioni seconda e terza, le quali converrà sempre effettuare esattamente,

$$R = (\overset{2}{\rho_1}\rho_2 : \sqrt[3]{\rho_1})\,(\omega_1\,\omega_2 : \omega_3).$$

23. Il fattore R' non cambia di valore, se si trasforma la funzione data in un'altra, calcolabile mediante un complesso di operazioni, comunque differente da quello indicato nella funzione primitiva.

L'altro fattore, R'', invece, dipende da questo complesso di operazioni, che pertanto si dovrà stabilire prima di costruire quel fattore.

24. Data, p. es., la funzione

$$V = \pi^{15 + \frac{17}{27}}\, v^{-\left(7 + \frac{7}{8}\right)}$$

la forma più conveniente per il suo calcolo approssimato sarà

$$V = (\pi^2 : v)^8 \sqrt[8]{v} : \sqrt[3]{\pi \sqrt[9]{\pi}}$$

ossia, mettendo in evidenza tutte le operazioni *semplici*,

$$V'' = \{[(v^2 : \pi)^2]^2\}^2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{v}}} : \sqrt[3]{\pi \sqrt[3]{\sqrt[3]{\pi}}}.$$

(*) Di due fattori distinti.

Supposto, pertanto, che il calcolo si voglia effettuare secondo questa ultima espressione, da essa, in vece che della V, si dovrà desumere il fattore R'', che sarà

$$R'' = \left\{ \left[(\omega_1 \omega_2)^2 \omega_3 \right]^2 \omega_4 \right\}^2 \omega_5 \omega_6 \omega_7 \sqrt{\omega_8 \sqrt{\omega_9}}\, \omega_{10} : \omega_{11} \sqrt[3]{\omega_{12} \omega_{13} \sqrt[3]{\omega_{14}}}$$

Ma l'altro fattore, R', sarà lecito, e conveniente, costruirlo secondo l'espressione primitiva, V.

Proprietà della funzione $\dfrac{x}{1 - xy}$.

25. Questa funzione rappresenterò colla notazione $\psi(x, y)$.

Per $y = 0$ si ha semplicemente $\psi(x, 0) = x$.

Reciprocamente, qualunque numero dato, x, è uguale alla funzione $\psi(x, 0)$.

26. III. *Nei due membri d'una eguaglianza, quando sono della forma* $\psi(x, y)$, *si può aggiungere uno stesso numero qualsivoglia all'argomento* y. Vale a dire che dall' uguaglianza

$$\psi(x, y) = \psi(x', y')$$

consegue l'uguaglianza

$$\psi(x, y + h) = \psi(x', y' + h),$$

essendo h un numero arbitrario.

27. IV. *Per ricavare* x *dall' uguaglianza*

$$\psi(x, y) = \psi(x', y'),$$

basta aggiungere al secondo argomento, in entrambi i membri, $- y$. Si avrà così

$$x = \psi(x', y' - y).$$

Limiti di un prodotto di fattori della forma $1 \pm \psi(x, y)$.

28. Ogni numero rappresentato mediante la lettera d si dovrà intendere che è positivo.

29. V. *Quando i fattori sono tutti maggiori di 1, si ha*

$$1 + \psi(S, y_m) < [1 + \psi(d_1, y_1)][1 + \psi(d_2, y_2)][1 + \psi(d_3, y_3)] \ldots$$
$$\ldots < 1 + \psi(S, y_M),$$

essendo:

S *la somma* $d_1 + d_2 + d_3, \ldots,$

y_m *il minimo fra i numeri* $y_1, y_2, y_3, \ldots,$ *se questo minimo è negativo, e 0 nel caso contrario,*

y_M *il massimo fra questi stessi numeri, se è almeno uguale a* $\frac{1}{2}$, *e* $\frac{1}{2}$ *nel caso contrario;*

e sotto la condizione che i denominatori delle frazioni rappresentate mediante la caratteristica ψ *siano tutti positivi.*

30. Questo teorema dà del prodotto

$$1{,}007\,[1 + \psi(0{,}02, 8)][1 + \psi(0{,}03, 6)]$$

il limite inferiore 1,057 ed il limite superiore $1 + \psi(0{,}057, 8)$. Invece, di quest'altro prodotto

$$[1 + \psi(0{,}2, 3)][1 + \psi(0{,}1, 4)]$$

non fornisce alcun limite superiore, ma solo il limite inferiore 1,3.

31. *Se i numeri y sono tutti nulli, si ha*

$$1 + S < (1 + d_1)(1 + d_2)(1 + d_3) \ldots < 1 + \psi\left(S, \frac{1}{2}\right),$$

ed ancora quando i fattori sono due soli,

$$1 + d_1 + d_2 < (1 + d_1)(1 + d_2) < 1 + \psi\left(d_1 + d_2, \frac{1}{4}\right).$$

sotto la condizione che il denominatore della frazione rappresentata da $\psi\left(S, \frac{1}{2}\right)$, *o da* $\psi\left(d_1 + d_2, \frac{1}{4}\right)$ *sia positivo.*

32. *La condizione, che i denominatori delle frazioni rappresentate mediante la caratteristica* ψ *siano positivi* dovrà essere adempiuta in tutte le proposizioni seguenti; laonde per evitarne la continua ripetizione, *la riterrò d'ora innanzi come sottintesa.*

33. VII. *Quando i fattori sono tutti minori di 1, si ha*

$$1 - \psi(S, y_M) < [1 - \psi(d_1, y_1)][1 - \psi(d_2, y_2)][1 - \psi(d_3, y_3)] \ldots$$
$$\ldots < 1 - \psi(S, y_m),$$

essendo:

S *la somma* $d_1 + d_2 + d_3 \ldots,$

y_M *il massimo fra i numeri* y, *se è positivo, e 0 nel caso contrario,*

y_m *il minimo fra i numeri* y, *se questo minimo è tutt'al più uguale a* -1, *e* -1 *nel caso contrario.*

34. VIII. *Se i numeri* y *sono tutti nulli, si ha*

$$1 - S < (1 - d_1)(1 - d_2)(1 - d_3) \ldots < 1 - \psi(S_1, -1);$$

ed ancora, quando i fattori sono due soli,

$$1 - (d_1 + d_2) < (1 - d_1)(1 - d_2) < 1 - \psi\left(d_1 + d_2, -\frac{1}{2}\right).$$

35. I *limiti di prodotti*, determinati secondo i teoremi precedenti, hanno questo di notevole, che *sono sempre della forma* $1 \pm \psi(x, y)$, che *l'argomento* x *è sempre uguale alla somma* S, e che *l'argomento* y *non dipende punto dagli argomenti dati*, d, *ma solamente, e secondo una legge semplicissima, da* $y_1, y_2, y_3, \ldots$

36. IX. *Per un prodotto di due soli fattori, uno maggiore e l'altro minore di 1, quando l'argomento* y *è, per entrambi, nullo, si ha*

$$(1 + d_1)(1 - d_2) < 1 + d_1 - d_2;$$

cosicchè quel prodotto ammette ancora un *limite superiore*, che gode le proprietà dichiarate nel § precedente.

Ma un tal limite non sussiste più, in generale, quando gli argomenti y, nei fattori, sono differenti da 0.

E in nessun caso il prodotto ammette un analogo *limite*, generale, *inferiore*.

37. I limiti del prodotto

$$[1 + \psi(d_1, y_1)]\,[1 - \psi[(d_2, y_2)],$$

che non si possano determinare secondo la proposizione precedente, si cercheranno, naturalmente, effettuando la moltiplicazione ordinaria dei due fattori.

38. Quando i fattori sono più di due, e alcuni maggiori e gli altri minori di 1, il prodotto non ammette, in generale, alcun limite analogo ai precedenti, nè superiore nè inferiore.

Si può tuttavia trar partito dei teoremi precedenti, cercando prima i limiti del prodotto dei fattori d'una specie, e poi quelli del prodotto dei fattori dell'altra specie, e moltiplicando quindi fra loro i limiti omonimi.

Teorema relativo alle potenze del binomio $1+x$.

39. X. *Se la variabile reale* x *cresce da* -1 *fino a* ∞, *la funzione* y, *che è determinata dall'equazione*

$$(1+x)^n = 1 + \psi(nx, y),$$

[25] *varia sempre in un medesimo senso.*

da $1 - \frac{1}{n}$ *fino a* 0, *se l'esponente* n *è positivo,*

da $\;\; -\frac{1}{n}$ *fino a* 1, *se l'esponente* n *è negativo;*

e diviene uguale a $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$, *quando* x *diviene uguale a* 0.

S'intende che: 1° *di* $(1+x)^n$ *si deve prendere in ogni caso solamente il valore reale positivo;* 2° *il valore assegnato alla funzione* y, *per* $x=0$, *è il limite verso cui essa tende, quando* x *si avvicina indefinitamente a* 0; 3° *quando i valori estremi di* y *divengono uguali, cioè quando l'esponente* n *è uguale a* 1, *e quando è uguale a* -1, *la variazione di* y *è costantemente nulla.*

Limiti delle potenze dei numeri prossimi ad 1.

40. XI. *Per avere un limite inferiore,* l *od un limite superiore,* L *della potenza* $(1 \pm d)^{\pm k}$, *essendo* d *e* k *numeri positivi, basta mettere:*

nella somma $1 + \psi(kd, y)$, *se* d *e* k *hanno lo stesso segno,*
nella differenza $1 - \psi(kd, y)$, *se* d *e* k *hanno segni contrari,*

[25] *i valori indicati nella tavola seguente* [32]:

POTENZE	$k > 1$		$k < 1$		$k = 1$
	per avere l	per avere L	per avere l	per avere L	per avere l ed L
$(1 + d)^k$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2k}$	0	0
$(1 - d)^{-k}$	0	1	0	$\frac{1}{k}$	1
$(1 + d)^{-k}$	0	-1	0	$-\frac{1}{k}$	-1
$(1 - d)^k$	0	-1	$\frac{1}{k}$	0	0

Calcolo approssimato di una funzione monomia di argomenti prossimi ad 1 conosciuti esattamente.

41. I teoremi precedenti suggeriscono, in certi casi, un procedimento semplice per effettuare questo calcolo, senza eseguire neppure una delle operazioni, che costituiscono la funzione data.

42. Supponiamo, p. es., che questa funzione, ridotta in un prodotto di potenze [1], divenga

$$V = (1 - d_1)^{\frac{27}{8}} (1 + d_2)^{-\frac{17}{9}} (1 + d_3)^{-1}.$$

Combinando fra loro convenientemente i limiti dei fattori, determinati secondo la proposizione XI [40], si avranno del prodotto V i limiti inferiore e superiore,

$$l = \left(1 - \frac{27}{8} d_1\right)\left(1 - \frac{17}{9} d_2\right)\left[1 - \psi(d_3, -1)\right]$$

$$L = \left[1 - \psi\left(\frac{27}{8} d_1, -1\right)\right]\left[1 - \psi\left(\frac{17}{9} d_2, -1\right)\right]\left[1 - \psi(d_3, -1)\right].$$

La proposizione VII [33] dà, del limite l, il limite inferiore

$$l' = 1 - \psi(S, 0), \qquad S = \frac{27}{8} d_1 + \frac{17}{9} d_2 + d_3;$$

e del limite L il limite superiore,

$$L' = 1 - \psi(S, -1).$$

Pertanto saranno l' un limite inferiore, ed L' un limite superiore della funzione data.

E prendendo uno di questi due limiti in vece della funzione data, si farà un errore minore della loro differenza.

Così quando fosse

$$d_1 = 0,00022 \qquad d_2 = 0,00017 \qquad d_3 = 0,00512,$$

si avrebbe

$$0,0011836 < S < 0,0011837,$$
$$l' > 1 - 0,0011837, \qquad l' > 0,9988163;$$
$$L' < 1 - \frac{0,0011836}{1 + 0,0011836}, \quad L' < 1 - 0,0011836 + 0,0011836^2,$$
$$L' < 0,9988179,$$

ed in conseguenza

$$V = 0,998817 \quad \text{a meno di} \quad 0,000001.$$

(Continua).

SOLUZIONI DELLE QUESTIONI 299**, 311*, 312* e 322*

299.** *Determinare un triangolo isoscele, dati il perimetro* 2p *e l'altezza* h *relativa a ciascuno dei lati eguali. Qual è il minimo valore del rapporto* $\frac{2p}{h}$ *e quali sono gli angoli corrispondenti?* (G. Bellacchi).

Soluzione del prof. *Luigi Bosi* del R. Istituto tecnico di Teramo.

Siano y, $2x$, z le misure dei lati eguali, della base e della corrispendente altezza: si ha il sistema

$$\begin{aligned} y + x &= p \\ y^2 - x^2 &= z^2 \\ 2xz &= hy. \end{aligned}$$

La seconda equazione si può scrivere

$$(y - x)\,p = z^2,$$

e da questa e dalla prima si ricava

$$x = \frac{p^2 - z^2}{2p}, \quad y = \frac{p^2 + z^2}{2p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Sostituendo nella terza, si ha

$$z^3 + \frac{h}{2} z^2 - p^2 z + \frac{p^2 h}{2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

e questa, ponendo

$$z = z_1 - \frac{h}{6},$$

si trasforma in

$$z_1^3 - \frac{12 p^2 + h^2}{12} z_1 + \frac{h^3 + 72 p^2 h}{108} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Si vede con la regola di Cartesio che ciascuna delle equazioni (β), (γ) ha una radice reale negativa e due o nessuna radice reale positiva.

Si formi ora il discriminante della (γ): esso è

$$\frac{p^2}{432} (h^4 + 44 h^2 p^2 - 16 p^4),$$

e ponendo

$$\frac{2p}{h} = \lambda$$

si può scriverlo così

$$\frac{p^2 h^4}{432} (1 + 11 \lambda^2 - \lambda^4).$$

Se

$$\lambda^4 - 11 \lambda^2 - 1 < 0,$$

la (γ) ha una sola radice reale (quella negativa), e così pure la (β).

Se

$$\lambda^4 - 11 \lambda^2 - 1 > 0.$$

la (γ) e la (β) hanno tutte le radici reali, e quindi due radici reali positive.

Se poi

$$\lambda^4 - 11 \lambda^2 - 1 = 0,$$

allora ciascuna delle (γ), (β) ha tutte le radici reali e di più ha eguali le due radici positive.

La (γ) e la (β) hanno dunque delle radici reali e positive, se, e soltanto se

$$\lambda^4 - 11 \lambda^2 - 1 \geqq 0,$$

cioè se λ, che evidentemente dev'essere sempre positivo, sia maggiore o almeno eguale a $\sqrt{\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}}$.

Perchè ad un valore reale e positivo di z corrisponda una soluzione del problema, si richiede poi (vedi la 1ª delle formole (α)) che quel valore di z sia minore di p. Ora il primo membro della (β) si può scrivere

$$z(z^2 - p^2) + \frac{h}{2}(z^2 + p^2)$$

ed è evidentemente positivo per ogni valore reale di z eguale o maggiore di p: dunque, quando esistono radici reali e positive della (β), esse sono minori di p e però ad ognuna di esse corrisponde una soluzione del problema.

Dunque, quando

$$\lambda < \sqrt{\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}},$$

il problema non ha soluzione.

Quando

$$\lambda > \sqrt{\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}},$$

il problema ha due soluzioni: ricavati i due valori positivi di z_1 dalla (γ) (per la quale si presenta però il caso irriducibile), si hanno i corrispondenti valori di z dalla

$$z = z_1 - \frac{h}{6},$$

e quindi dalle (α) quelli di x ed y.

Quando poi

$$\lambda = \sqrt{\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\delta)$$

il problema ha una soluzione sola.

Occupiamoci ora in particolare di quest'ultimo caso. Intanto dalla (δ) risulta

$$h^2 = 2p^2(5\sqrt{5} - 11). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon)$$

E poichè in questo caso la radice positiva della (γ) è una radice doppia, essa apparterrà anche alla derivata prima

$$3z_1^2 - \frac{12p^2 + h^2}{12} = 0,$$

e quindi sarà data dalla formola

$$z_1 = \frac{1}{6}\sqrt{12p^2 + h^2}$$

nella quale ad h^2 si dovrà sostituire il valore ricavato dalla (ε): si ha così

$$z_1 = \frac{p}{6}\sqrt{10\sqrt{5} - 10},$$

e quindi

$$z = z_1 - \frac{h}{6} = \frac{p}{6}\left(\sqrt{10\sqrt{5} - 10} - \sqrt{10\sqrt{5} - 22}\right) = \frac{h}{4}(\sqrt{5} + 1).$$

Quadrando e riducendo viene

$$z^2 = p^2 (\sqrt{5} - 2),$$

e sostituendo nelle (α)

$$x = \frac{p}{2}(3 - \sqrt{5}), \quad y = \frac{p}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Il coseno dell'angolo alla base del triangolo isoscele è poi dato da

$$\frac{x}{y} = \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2};$$

ne risulta che tale angolo è circa

$$51^0 \;.\; 49' \;.\; 38''.$$

311*. *Eliminare* x ed y *dal sistema*

$$a^2 y (2rx + dy)^2 = c^2 x^2 (1 + ry^2) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$2a^2 y (2rx + dy) = cx (dx + cy - 2a) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$
$$c^3 x^3 + 8a^4 y^2 (2rx + dy) = 4a^2 cx (rx^2 + cy^2 + 2dxy - 2ay). \quad (3)$$

(G. Frattini).

Soluzione del Sig. *Guido Fubini*, alunno del R. Liceo « Marco Foscarini » di Venezia.

Moltiplicando (2) per $4a^2 y$ e sottraendo da (3), si ha:

$$c^3 x^3 = 4a^2 cx (rx^2 + dxy).$$

Dividendo per cx^2, si ha:

$$x (c^2 - 4a^2 r) = 4a^2 dy \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Ponendo nella (1) per y il valore dato da (4), si ha:

$$a^2 y^2 \left(2rx + \frac{c^2 - 4a^2 r}{4a^2} x\right)^2 = c^2 x^2 (1 + ry^2).$$

Dividendo per x^2 e sviluppando risulta:

$$y^2 \left(4r^2 a^2 + \left(\frac{c^2 - 4a^2 r}{4a}\right)^2 + rc^2 - 4a^2 r^2 - rc^2\right) = c^2;$$

donde

$$y^2 \left(\frac{c^2 - 4a^2 r}{4a}\right)^2 = c^2 \quad \text{ossia} \quad y \left(\frac{c^2 - 4a^2 r}{4a}\right) = \pm c \quad . \quad (5)$$

Pongasi nella (2) per dy e per dx i loro valori ricavati da (4), e si avrà:

$$2a^2 y \left(2rx + \frac{c^2 - 4a^2 r}{4a^2} x\right) = cx \left(\frac{4a^2 d^2}{c^2 - 4a^2 r} y + cy - 2a\right).$$

Dividendo per x, risulta:

$$y\left(4a^2r+\frac{c^2-4a^2r}{2}-\frac{4a^2d^2c}{c^2-4a^2r}-c^2\right)=-2ac$$

$$y\left(\frac{4a^2d^2c}{c^2-4a^2r}+\frac{c^2}{2}-2ra^2\right)=2ac \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Dividendo la (6) per la (5) membro a membro, si ottiene:

$$\left(\frac{4a^2d^2c}{c^2-4a^2r}+\frac{c^2}{2}-2ra^2\right):\frac{c^2-4a^2r}{4a}=\pm 2a$$

ossia

$$\frac{4a^2d^2c}{c^2-4a^2r}+\frac{c^2}{2}-2ra^2=\pm\frac{c^2-4a^2r}{2}.$$

Se si considera il segno $+$, allora $\frac{4a^2d^2c}{c^2-4a^2r}=0$ ossia $adc=0$. Se si considera il segno $-$, allora $\frac{4a^2d^2c}{c^2-4a^2r}+c^2-4a^2r=0$ ossia

$$4a^2d^2c+(c^2-4a^2r)^2=0. \quad (*)$$

312*. *Eliminare* x *ed* y *dal sistema*

$$(2arxy+ady^2-cx)^2=c^2x^2\left(1+ry^2-\frac{cy}{a}\right) \quad . \; . \; . \quad (1)$$

$$(2arxy+ady^2-cx)\,2a=cx\,(dx+cy-2a) \quad . \; . \; . \quad (2)$$

$$c^3x^3+8a^3y\,(2arxy+ady^2-cx)=4a^2cx\,(rx^2+cy^2+2dxy-2ay) \quad (3)$$

(G. FRATTINI).

Soluzione del Sig. *Guido Fubini*, alunno del R. Liceo « Marco Foscarini » di Venezia.

Sottraendo dalla (3) la (2) moltiplicata per $4a^2y$, si ha:

$$c^2x^3=4a^2cx\,(rx^2+dxy)$$

e dividendo tutti i termini per cx^2 risulta:

$$x\,(c^2-4a^2r)=4a^2dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Dividendo la (1) per x^2, si ha:

$$\left(2ary+ady\cdot\frac{y}{x}-c\right)^2=c^2\left(1+ry^2-\frac{cy}{a}\right) \quad . \; . \quad (5)$$

Ponendo nella (5) invece della frazione $\frac{y}{x}$ il suo valore dato da (4), sviluppando e dividendo per y, si ha

$$y\left(\frac{c^2-4a^2r}{4a}\right)^2=2arc-\frac{c^3}{2a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

(*) In questo esercizio e nel seguente il Sig. *Fubini* ha supposto evidentemente che a, d e c, siano differenti da zero. (N. D. R.).

Dividendo la (2) per x, si ha:

$$2a\left(2ary + ady \cdot \frac{y}{x} - c\right) = c(dx + cy - 2a) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Sostituendo nella (7) alla frazione $\frac{y}{x}$ ed al termine dx i valori respettivi dati dalla (4), sviluppando e riducendo, si ottiene:

$$y\left(2a^2r - \frac{c^2}{2} - \frac{4a^2d^2c}{c^2 - 4a^2r}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

quindi, o è nullo il fattore $\left(2a^2r - \frac{c^2}{2} - \frac{4a^2d^2c}{c^2 - 4a^2r}\right)$ ossia

$$8a^2d^2c + (c^2 - 4a^2r)^2 = 0,$$

oppure è nullo y, e quindi per la (6) è nullo

$$2arc - \frac{c^3}{2a}$$

ossia si ha: $c^2 - 4a^2r = 0$.

322'. *Se i lati di un triangolo sono in progressione aritmetica, i raggi dei cerchi ex-inscritti saranno in progressione armonica.* (F. P. PATERNÒ).

Dimostrazione del Sig. *Umberto Bertocchini*, studente nel R. Istituto tecnico di Livorno (*).

Per ipotesi, indicando con a, b, c le misure dei lati del triangolo in ordine crescente o decrescente, si ha: $a - b = b - c$, da cui $\frac{a + c}{2} = b$.

È noto che tre numeri sono in progressione armonica quando i loro inversi sono in progressione aritmetica. Per dimostrare quindi che, nell'ipotesi ammessa, i raggi r_a, r_b, r_c dei cerchi ex-inscritti sono in progressione armonica, basterà dimostrare che le loro inverse sono in progressione aritmetica. Ora, indicando con $\triangle$ e p l'area e il semiperimetro del triangolo, abbiamo:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} = \frac{p - a}{\triangle} + \frac{p - c}{\triangle} = \frac{2p - (a + c)}{\triangle};$$

$$\frac{2}{r_b} = \frac{2(p - b)}{\triangle} = \frac{2p - (a + c)}{\triangle};$$

quindi sarà, come dovevamo dimostrare,

$$\frac{2}{r_b} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c}.$$

(*) Simile dimostrazione dal Sig. *Gaetano Lami*, studente di IV corso nello stesso Istituto.

Viceversa, se r_a, r_b, r_c, sono in progressione armonica, le inverse saranno in progressione aritmetica. Se infatti

$$\frac{2(p-b)}{\triangle} = \frac{p-a}{\triangle} + \frac{p-c}{\triangle},$$

si deduce che $2b = a + c$: quindi i lati del triangolo sono in progressione aritmetica.

Dimostrazione del Sig. *Francesco Barbagallo*, studente nel R. Istituto tecnico di Catania.

Sieno a, $a+d$, $a+2d$, i lati di un triangolo, e tali che formino una progressione aritmetica di ragione d. Dico che

$$r_1 = \frac{S}{s-a}; \quad r_2 = \frac{S}{s-(a+d)}; \quad r_3 = \frac{S}{s-(a+2d)};$$

cioè i raggi dei cerchi ex-inscritti, saranno in progressione armonica.

Infatti i loro inversi

$$\frac{s-a}{S}; \quad \frac{s-(a+d)}{S}; \quad \frac{s-(a+2d)}{S};$$

sono in progressione aritmetica di ragione

$$-\frac{d}{S}.$$

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

U. SCARPIS — *Teoria dei numeri.* — Manuali Hoepli. Serie scientifica 225.

È un lavoro chiaro, esatto, conciso, e tanto completo quanto lo permette la brevità dello spazio. Si compone di sette capitoli. Nel primo l'A. tratta dei multipli e dei divisori: è notevole per semplicità il metodo col quale ricava le proprietà del minimo comune multiplo; ma forse era meglio evitare le considerazioni geometriche. Si diffonde sulla funzione φ di Gauss, ed E di Legendre, e chiude con una proposizione del chiarissimo prof. Cesàro.

Apre il Capitolo II coll'esporre le proprietà generali delle congruenze. Dati i teoremi della somma, della moltiplicazione e della divisione, viene a dimostrare il teorema di Fermat generalizzato, e poi quello di Wilson. Risolve la congruenza di 1° grado ad una incognita, e il sistema di due congruenze simultanee rispetto a moduli primi fra loro.

Nel IV e nel V Capitolo tratta rispettivamente delle congruenze binomie e dei residui quadratici. A proposito delle prime, si vede che l'A. non ha dimenticato i lavori recenti, come un teorema del Frattini, pubblicato in questo Periodico (anno VII, fasc. III). Ho notato chiarezza e precisione, e numerosi esempi, scelti opportunamente

Qui termina la parte propriamente aritmetica del lavoro. Le applicazioni, che riguardano le equazioni binomie (Cap. VI) e la divisione del cerchio in parti eguali (Cap. VII), sono state ben scelte.

La parte storica è piuttosto difettosa. Intorno alla nota a pag. 114 osservo che il Dott. Zignago non è riuscito a darci una dimostrazione elementare del teorema di Dirichlet; perchè nella Proposizione IV del suo lavoro (Annali di matematica, 1893) invoca, (e accenna appena come si dimostra) la proprietà: Se $K \leq a$, allora

$$\underset{y=0}{\overset{y=a-1}{m}} \; \underset{z=1}{\overset{z=K}{M}} MD(b+ay,z) = \underset{y=0}{\overset{y=a-1}{m}} \; \underset{z=0}{\overset{z=K-1}{M}} MD(b+ay,z)$$

oppure

$$= \underset{y=0}{\overset{y=a-1}{m}} MD(b+ay,K);$$

proprietà che non è elementare e non è ridotta ad altra elementare.

Ma in complesso il lavoro dello Scarpis è eccellente e mi auguro che in altro volume l'autore tratti quelle parti che per mancanza di spazio ha dovuto ommettere.

Genova, 5 dicembre 1896.

PROFESSOR AUGUSTO CHIARI. — *Elementi di geometria ad uso delle scuole tecniche e normali, con una raccolta di oltre trecento esercizi e problemi, e un sunto di storia della geometria.* — Lapi, Città di Castello, 1896. — Prezzo L. 1,60.

La prefazione dell'autore, con qualche mia annotazione, daranno un'idea del libro. Riporto dunque la prefazione:

« Questo volumetto, destinato agli studenti delle scuole tecniche e normali, ho compilato nella massima parte in conformità dei programmi vigenti.

In alcuni punti ho stimato opportuno sorpassare questi limiti, perchè, se molte notizie non hanno interesse per i giovani che frequentano queste scuole, altre è bene non restino sconosciute. (*) Così, prima d'intraprendere la risoluzione di quei problemi che si trovano d'ordinario in ogni trattato di Geometria, ho creduto utile accennare ai principali metodi di risoluzione, affinchè

(*) O non piuttosto il segno fu oltrepassato perchè si volle fare il libro su due differenti programmi, quello per le scuole tecniche e quello per le normali? Del resto, se è bene che certe notizie non siano ignorate, non è giusto che per far posto ad esse si mettano allo strettoio le nozioni fondamentali, come i concetti di rapporto e proporzione tra grandezze, ai quali l'autore a pag. 77 non dedica più di una dozzina di righe.

il giovane che si accinge a risolvere simili questioni, non proceda a caso, ma abbia una norma da seguire. Del pari, pensando quanto sia deplorevole che gli studenti delle scuole medie ignorino perfino che esiste una storia della Geometria, ho stimato utile aggiungere in appendice un breve sunto di storia di questa parte delle Matematiche, il quale da un lato servirà all' introduzione nell' insegnamento di quell' elemento storico, anche da eminenti scienziati italiani raccomandato; dall'altro contribuirà a render meno arido lo studio di questa disciplina.

Avendo il volumetto carattere elementare, molte verità ho ommesse; di altre, specialmente nella seconda parte, ho dato l'enunciato soltanto, lasciando alla cura dell'insegnante di dimostrare quelle che dalla sua scolaresca possono essere *intese*. (*) Del concetto di *limite*, che anche in un primo studio potrebbe aver posto, non ho tenuto parola; a ciò mi ha spinto la considerazione che il poco tempo assegnato alle lezioni di Geometria, ne renderebbe disagevole l'esposizione.

Nell'impiegare i più comuni simboli della Geometria, ho distinto quello di uguaglianza da quello d' equivalenza, sembrandomi giusto indicare con segni diversi, questi due differenti concetti. (**) In alcuni pochi teoremi e nella raccolta d'esercizi e problemi, ho trascurato di disegnar le figure, le quali, con maggior profitto, potranno esser fatte dallo studente.

Con tali criteri e con il desiderio vivissimo di poter riuscire in qualche modo utile ai giovani che s'iniziano negli studi geometrici, ho compilato questo tenue lavoro. (***)

(*) Disgraziatamente le cose che si lasciano alla cura dell' insegnante sono d' ordinario le più ostiche e difficili!

(**) A proposito dell' equivalenza, l'autore pone a base la definizione di Duhamel, e subito dopo prosegue: « Poichè le figure equivalenti hanno la stessa *estensione di superficie*, ecc. ». Ma allora a che serve la definizione di Duhamel? Non era meglio, tanto più trattandosi di un libriccino per le scuole tecniche, chiamare equivalenti due figure eguali in superficie, salvo a far poi menzione della decomposizione in parti congruenti, come d'un criterio per verificare, *in qualche caso*, la detta eguaglianza?

(***) Ed io spero che lo stesso vivissimo desiderio indurrà l'autore a migliorarlo, non dirò per la sostanza, che in generale è buona, ma per un migliore adattamento al fine.

G. Frattini.

ANNUNZIO BIBLIOGRAFICO

Prof. AURELIO LUGLI. — *Raccolta di temi di matematica redatti dalla Giunta centrale esaminatrice per la licenza d'Istituto tecnico nella sezione fisico-matematica, con soluzioni e risposte.* — Prezzo L. 1,25.

Di questa raccolta, utilissima a professori e studenti, non rimangono che un centinaio di copie. Sono vendibili in Roma presso la Signora Pia Lugli, vedova del compianto professore, Via Agostino Depretis, n. 86.

ANNO I. 1896-97. NUM. 2.

Bollettino dell'Associazione MATHESIS

FRA GLI

INSEGNANTI DI MATEMATICA DELLE SCUOLE MEDIE

SEDE DELL'ASSOCIAZIONE PER IL BIENNIO 1896-97-98

TORINO

Presso il Presidente del Comitato: Professor RODOLFO BETTAZZI, *Corso S. Martino, 1*

ADUNANZA STRAORDINARIA PARZIALE

dei Soci di MATHESIS

Si avverte che si terrà in Torino nelle vacanze carnevalizie del 1897 una riunione di Soci di *Mathesis*, per discutere verbalmente le questioni proposte nel N. 1 del Bollettino, e qualunque altra, adatta alla natura della Società, piaccia ai convenuti di trattare. Un invito fu diramato in via d'esperimento ai Soci più prossimi a Torino, i quali aderirono in numero soddisfacente; ma l'invito attuale è esteso a tutti i Soci ed a qualunque altro Professore che voglia prender parte ai lavori di *Mathesis*.

L'insegnante, socio o non socio, che aderisca e voglia intervenire a questa riunione, ne mandi avviso al Prof. RODOLFO BETTAZZI, *Corso S. Martino 1, Torino*, perchè gli si possa comunicare a suo tempo l'epoca precisa ed il luogo della riunione.

Sarebbe desiderabile che di siffatte riunioni se ne tenessero anche altre nei vari centri d'Italia, rendendo così possibile a tutti i Soci di *Mathesis* di parteciparvi o qua o là. Il Bollettino accoglierebbe con piacere le relazioni di queste riunioni, e le decisioni prese.

È lasciata naturalmente piena libertà ai Soci nella convocazione di queste adunanze; ma è desiderabile che chi vuol farsene promotore ne informi prima il Comitato Direttivo, perchè non accadano convocazioni di adunanze contemporanee in città troppo vicine, fatte da due Soci all'insaputa uno dell'altro.

Essendo interesse di tutti il far noto il risultato di queste adunanze, si domanda che ne sia trasmesso al Comitato il verbale, o una parziale relazione su quello che ha rapporti con gli scopi di *Mathesis*.

Risposte alle questioni comparse nel Bollettino N. 1.

Fin qui un numero eccessivamente scarso di Soci ha inviato risposte alle questioni inserite nel N. 1 del *Bollettino*. Si pregano caldamente i Soci di volere studiare essi gli argomenti in quello indicati e di invitare a studiarli anche i non soci, mandando poi le conclusioni al Comitato che deve compilarne e pubblicarne le relazioni riassuntive.

A chi manda risposte a più di una questione, si chiede in cortesia che voglia scriverlo su altrettanti fogli staccati, da potersi così esaminare separatamente.

Ai Soci.

Il Comitato sarebbe lieto se i Soci, prendendo a cuore l'incremento della nostra associazione, gli inviassero essi stessi proposte atte a dare a *Mathesis* vita rigogliosa, efficace ed utile alla scuola e alla scienza. Il dar notizie di altre Società del genere della nostra, il suggerire mezzi di esplicare l'azione di essa, il mandare questioni da studiare od articoli opportuni, sono altrettanti modi di aiutare l'opera del Comitato e di contribuire allo scopo per cui *Mathesis* esiste; i nostri ottimi colleghi vogliano usarne.

In particolare il Comitato chiede ai Soci che contribuiscano a procurargli programmi d'insegnamento della Matematica in scuole secondarie estere ed a segnalargli articoli o libri di qualche importanza per gli studi e per l'insegnamento.

Il Periodico di matematica del Prof. Lugli.

Si annunzia ai Soci che quest'ottimo Periodico, del quale *Mathesis* immediatamente dopo la morte del compianto suo Direttore, si era assunta la continuazione pel presente anno 1896, affine di impedire che finisse, è passato col 1° gennaio 1897 in proprietà del nuovo Direttore Prof Giulio Lazzeri, al quale *Mathesis* lo ha regolarmente ceduto.

Secondo gli accordi presi, rimarranno invariate l'indole del giornale e le condizioni di abbonamento (L. 6 annue; ma sarà accordata una riduzione ai Soci di *Mathesis*, nei seguenti termini:

Il prezzo cumulativo della quota annuale di Socio di *Mathesis* per un anno sociale, e di abbonamento al Periodico per l'anno civile, che comincia al 1° gennaio di detto anno sociale, è fissato in L. 10 (oltre, per il primo anno, la tassa d'ingresso di L. 4, art. X) da pagarsi entro il 31 gennaio, al Segretario-Economo dell'Associazione, Prof. Francesco Giudice, *Corso Ugo Bassi 40, Genova;* i Soci già in regola col pagamento della loro quota di un anno sociale hanno l'abbonamento ridotto pagando L. 4 alle stesse condizioni.

Trascorso il 31 gennaio, gli abbonamenti non si riceveranno che a prezzo normale (L. 6) e presso il Direttore del Periodico Prof. GIULIO LAZZERI, della R. Accademia Navale, *Via del Porticciolo 2, Livorno*. Per l'anno in corso, il detto termine è prorogato eccezionalmente fino al 15 febbraio.

Per gli arretrati bisogna invece rivolgersi al Segretario-Economo di *Mathesis*.

Nuovi Soci.

BARTOLI PAOLO, Liceo pareggiato di Molfetta. — BUFFA PIETRO, R. Scuola tecnica di Potenza. — Comm. CALDARERA FRANCESCO, Prof. a riposo del R. Istituto tecnico, ed ordinario di meccanica razionale in servizio nella R. Università di Palermo. — CAMELETTI LUIGI, R. Scuola tecnica di Pergola. — CHELOTTI ABIGAILLE, R. Scuola normale femminile di Livorno. — GRASSI FRANCESCO, professore nei Collegi militari. — SCARPIS UMBERTO, R. Liceo di Verona. — VACCARI ANDREA, R. Liceo di Spoleto.

I Soci i cui nomi furono ora pubblicati hanno pagata la tassa d'entrata di L. 4 e la quota per l'anno 1896-97 di L. 6. Questa dichiarazione fa le veci di ricevuta.

Biblioteca.

Alla biblioteca di *Mathesis* pervennero i doni seguenti:

U. Scarpis. - Teoria dei numeri: Manuale Hoepli 225; Milano 1897: L. 1,50.

B. Carrara. - La coincidenza dei due metodi d'approssimazione di Newton e Lagrange nelle radici quadrate irrazionali dei numeri interi: Torino, G. B. Paravia e C., 1889. - Saggio d'introduzione alla teoria delle quantità complesse geometricamente rappresentate: Cremona, tip. Fezzi 1895, L. 2,50.

Diego Fellini. - I poliedri regolari stellati: Forlì, G. B. Croppi, 1895; L. 1,50 (Due copie).

Augusto Chiari. - Elementi di Geometria ad uso delle scuole tecniche e normali: Città di Castello, S. Lapi tip. edit. 1896, L. 1,60.

Rodolfo Bettazzi. - Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili; Pisa, tip. T. Nistri e comp., 1884. — Dei concetti d'integrazione e di derivazione delle funzioni di più variabili; Giornale di Battaglini, XXII. — Sull'impossibilità di certe divisioni e sull'equivalenza delle equazioni: Periodico di Lugli, 1886 — I postulati e gli enti geometrici: Periodico di Lugli 1886. — Sul concetto di numero: Periodico di Lugli 1887. — Sulla derivata totale delle funzioni di due variabili reali e sull'inversione delle derivazioni: Giornale di Battaglini, XXVI. — Sopra una corrispondenza fra un gruppo di punti ed un continuo, ambedue lineari: Pisa, 1888. — Teoria delle grandezze: Opera premiata dalla R. Accademia dei Lincei: Pisa, Spoerri edit., 1890 - L. 6. — Sui sistemi di numerazione per i numeri reali: Periodico di Lugli, 1891. — Sull'insegnamento della geometria nei Licei: Periodico di Lugli, 1891. — Rivista bibliografica (Elementi di geometria di Lazzeri e Bassani): Periodico di Lugli, 1891. — Sull'infinitesimo attuale: Rivista di Matematica, 1891. — Sull'infinitesimo attuale: Rivista di Matematica, 1892. — Sui punti di discontinuità delle funzioni di variabile reale: Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1892. — La definizione di proporzione ed il V libro d'Euclide: Periodico di Lugli, 1892. — Il concetto di lunghezza e la retta: Annali di Matematica, 1892. — Sulla definizione della retta: Periodico di Lugli, 1892. — Teoria dei limiti: parte VII del formulario pubblicato dalla Rivista di Matematica, 1894. — Sulla catena di un ente in un gruppo: R. Accademia delle Scienze di Torino, 1895-96. — Gruppi finiti ed infiniti di enti: R. Accademia delle Scienze di Torino, 1895-96.

F. Giudice. — Sulla determinazione delle radici reali delle equazioni a coefficienti numerici reali; un teorema sulle sostituzioni; sulle equazioni irreducibili di grado primo risolvibili per radicali; sopra la determinazione di funzioni d'una variabile, definite per mezzo d'un'equazione con due variabili, ed un'osservazione relativa alla costante che compare negli sviluppi in serie delle funzioni circolari: Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1886-87. — Lemmi per la misura della circonferenza e dell'area del circolo; alcune formule ottenibili semplicemente, che possono servire al calcolo approssimato delle funzioni circolari; sull'estrazione di radice approssimata dai numeri aritmetici: Periodico di Lugli, 1887-88. — Trigonometria rettilinea ad uso delle scuole liceali, Palermo, libreria Carlo Clausen, 1888, L. 1,50. — Una considerazione relativa alle serie a termini positivi: Costanti tra le quali trovasi quella d'Eulero: A proposito della questione 88 proposta dal prof. Cesàro: Giornale di Battaglini, 1889. — Sopra una questione di probabilità: Periodico di Lugli, 1890. — Sulle serie a termini positivi: Giornale di Battaglini, 1890.

I doni alla biblioteca di *Mathesis* si dirigono al Segretario Prof. Francesco Giudice, Corso Ugo Bassi, 40, *Genova*.

Per divenire soci di MATHESIS ed abbonati al PERIODICO DI LUGLI, diretto dal prof. Lazzeri.

I professori di Matematica appartenenti al personale insegnante e direttivo delle scuole medie governative o pareggiate, divengono senz' altro soci trasmettendo la tassa d'entrata di L. 4 al Segretario, al quale devesi pure trasmettere la quota annua di L. 6: quelli dell'altre scuole secondarie, che desiderano farsi soci, debbono farne domanda scritta al Presidente professor RODOLFO BETTAZZI, *Corso S. Martino 1, Torino*. (V. nel Bollettino N. 1 gli art. III e X dello Statuto)

Si può divenir socio di *Mathesis* pel 1896-97 (1° Luglio 96 - 30 Giugno 97) ed abbonati al Periodico di Matematica pel 1897 mandando al segretario di *Mathesis*, prima del 31 Gennaio 97, L. 14; delle quali 4 per tassa d'entrata e 10 per quota annua di *Mathesis* ed abbonamento ridotto al Periodico. (V. in questo Bollettino « Il Periodico del Prof. Lugli »).

Premio al socio Pirondini.

Su proposta dei professori *Beltrami*, *Brioschi* e *Cerruti* (relatore) la Reale Accademia dei Lincei, nell'adunanza solenne del 7 giugno 1896, conferiva al Prof. *Geminiano Pirondini*, socio di *Mathesis*, un intero premio ministeriale di lire 1500, pe' seguenti lavori:

1. *Alcune formule relative alle linee tracciate sopra una superficie e loro applicazioni* (st).
2. *Teorema geometrico* (ms).
3. *Sur la conique osculatrice des lignes planes* (st).
4. *Intorno alle indicatrici sferiche delle linee dello spazio* (st).
5. *Sur une famille remarquable de courbes* (st).
6. *Due problemi geometrici* (ms).
7. *Simmetria ortogonale rispetto a una superficie di rivoluzione* (st).
8. *Quelques propriétés de l'hyperbole* (st).
9. *Sur les surfaces réglées* (st).
10. *Di alcune superficie che ammettono un sistema di linee eguali e un secondo sistema di linee eguali o simili* (st).
11. *Simmetria ortogonale rispetto a una linea qualunque* (ms).

Le nostre congratulazioni al valente collega.

Visita a S. E. il Ministro della pubblica istruzione.

Per incarico avuto nell'adunanza del Comitato direttivo, tenutasi a Firenze nell'agosto passato (v. il n. 1 del Bollettino), il prof. Frattini presentò a S. E. il Ministro della pubblica istruzione lo Statuto e gli Atti della nostra Associazione. Il Ministro accolse il prof. Frattini con grande benevolenza, e mostratosi informato dell'esistenza e degli scopi dell'Associazione, plaudì alla nobile iniziativa de' suoi membri, manifestando vivo il desiderio che l'esempio loro fosse universalmente imitato dagli insegnanti delle scuole medie. In tal modo, soggiunse il Ministro, le amministrazioni o le Commissioni preposte alla cura degli ordinamenti e dei programmi delle scuole medie troverebbero negl' insegnanti delle scuole stesse la guida più naturale e sicura per l'ufficio loro.

In quanto al ripristinamento della prova scritta di matematica negli esami di licenza liceale, il Ministro, pur riconoscendo che la matematica nei licei è ormai ridotta anch'essa a materia *decorativa*, non diede al Frattini affidamento certo; ma gli promise che nello studio della grave questione avrebbe tenuto in gran conto il voto di *Mathesis*. Aggiunse che, quantunque propenso a una nuova riduzione del programma di matematica pei licei, e soprattutto all'abolizione della trigonometria, riconosceva tuttavia la necessità di guarentire lo studio delle matematiche, entro la cerchia di quel programma che si stimerà più conveniente e proporzionato al fine. Terminò congratulandosi novamente coll'Associazione e confermandole l'alto suo compiacimento.

Comunicazione di G. Sforza.

Contributo alla questione sull' EQUIVALENZA, *proposta dal Comitato direttivo di* Mathesis.

La comunicazione sulla teoria dell' equivalenza fatta recentemente dal Prof. Giudice al Comitato direttivo di *Mathesis* ha richiamato la mia attenzione sopra un pregevole articolo del Prof. Frattini, inserito nel Periodico di Matematica del compianto Prof. Lugli (1895, pag. 153) e intitolato: *Intorno al postulato dell'equivalenza.* Ivi il Prof. Frattini, precedendo in ciò il Prof. Giudice, dimostra rigorosamente che il postulato di De Paolis sull'equivalenza è una semplice conseguenza del carattere di *grandezze finite* che hanno le superficie e i voluni ai quali si applica.

Ma, ammesso che il carattere di *grandezza infinita* sia questo, che *da essa può sottrarsi successivamente senza termine qualche sua parte di grandezza invariabile*, come può il Prof. Frattini dedurre che *ogni grandezza infinita può sempre decomporsi in parti, in modo che trascurandone una si possa ricomporre il tutto colle altre;* o in altre parole che OGNI *grandezza infinita* NON *sodisfa al postulato di De Paolis?* Per dimostrare quanto importante sarebbe dar di ciò una rigorosa dimostrazione, io proverò che, *se si sapesse dimostrare che ogni grandezza infinita* NON *sodisfa al postulato di De Paolis, si saprebbe anche dimostrare la proposizione espressa dal Postulato di Archimede relativo ai segmenti.*

Giova anzitutto osservare che vi è perfetta equivalenza fra le due proprietà di un segmento rettilineo di essere finito e di sodisfare al postulato d'Archimede. Infatti, se a è un segmento finito e b una sua parte, non potendosi (per definizione) sottrarre b da a indefinitamente, dopo un certo numero m di sottrazioni bisognerà arrestarsi; e ciò si esprime appunto dicendo che $m+1$ volta b supera a. Se invece si ammette il postulato di Archimede, ciò vorrà dire che un certo multiplo di b supera a, cioè che b non può sottrarsi da a se non un numero finito di volte. Perciò invece di dire che una certa grandezza è finita, potremo anche dire che essa sodisfa al postulato d'Archimede generalizzato.

Ciò posto, supponiamo che l'essere una grandezza infinita abbia per conseguenza che essa NON sodisfa al postulato di De Paolis; ne verrà che ogni grandezza che sodisfi al postulato di De Paolis sarà necessariamente finita (come appunto asserisce il Frattini); in particolare il segmento rettilineo, in quanto è una grandezza che sodisfa al postulato di De Paolis, è finito, cioè sodisfa al postulato di Archimede. Ma pei segmenti la proposizione nota sotto il nome di postulato di De Paolis si dimostra (De Paolis, Elem. di Geom. pag. 42, n. 56), dunque nell'ipotesi fatta, si potrebbe dimostrare la proprietà nota sotto il nome di Postulato di Archimede (Post. X del De-Paolis pag. 290).

Rimane perciò dubbio se soltanto le grandezze finite sodisfino al postulato di De Paolis, e non è indifferente, come è parso a tutta prima al Frattini, l'assumere a fondamento della teoria dell'equivalenza piuttosto il postulato di De Paolis, che quello d'Archimede generalizzato; in quanto che noi siamo certi che quest'ultimo comprende quello di De Paolis, mentre non si sa ancora se quello di De Paolis implichi quello di Archimede generalizzato.

L'utilità di assumere a fondamento il postulato di Archimede generalizzato, piuttosto che quello di De Paolis, sembra poi confermata dall'acuta osservazione del prof. Giudice, che richiede tale postulato soltanto pel solido sferico; in sostanza col solo postulato: « la sfera è un solido finito » si sostituiscono il postulato di Archimede sui segmenti e quello di De Paolis sull'equivalenza delle superficie e dei solidi; cioè tre postulati sarebbero ricavati da uno solo; progresso logico notevolissimo.

Reggio Emilia, li 31 Agosto 1896.

GIOVANNI FRATTINI — *Responsabile.*

Roma, 1897 — Tip. Elzeviriana.

RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONE

$$ax^2 + bxy + cy^2 = m$$

A DETERMINANTE POSITIVO

IN NUMERI INTERI

In questo periodico (anno VI, fasc. 6° - anno VII, fasc. 1° e seg.) mi occupai già della risoluzione dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = \pm N$$

in numeri interi, e dimostrai elementarmente come le infinite soluzioni dell'equazione possano tutte dedursi da certe soluzioni *fondamentali* in numero finito, cioè da quelle soluzioni nelle quali il valore assoluto della y è inferiore a un certo limite, ivi determinato. Stabilii anche un algoritmo, (*) differente da quello della frazione continua, e ad esso preferibile per più rispetti, mediante il quale possono trovarsi speditamente le soluzioni fondamentali, e in generale tutte le soluzioni nelle quali il valore della y è inferiore a un qualsivoglia prestabilito limite. Il problema della risoluzione dell'equazione in numeri interi veniva così completamente risoluto.

Nella nota c) in fondo al lavoro accennai poi che il metodo in esso usato poteva applicarsi alla risoluzione dell'equazione

$$\text{(A)} \qquad ax^2 + bxy + cy^2 = m$$

a determinante positivo. Alludevo così alla seguente regola, dalla quale dipende il modo che, a mio credere, è il più facile e spedito per risolvere la precedente equazione in numeri interi:

Posto: $b^2 - 4ac = D$, *e della* (α, β) *la soluzione minima positiva e* (p, q) *una soluzione qualsiasi dell'equazione*

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

si trovino tutte quelle soluzioni (x_0, y_0) *dell'equazione* (A) *nelle quali il modulo o valore assoluto di* y *è inferiore al limite*

$$\sqrt{\frac{(4\alpha^2 \mp 2 - 2)\ \text{mod. a m}}{D}}.$$

(*) § 8, fino a 20. È la parte più importante di quel mio lavoro.

UN' OPERA RECENTE
SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE ELEMENTARI

DI

GINO LORIA

In due modi differenti si possono intendere le ricerche sulla scienza delle età che furono. Si può infatti proporsi di seguire accuratamente, colle opere esistenti alla mano, l'apparire e lo svolgersi delle singole idee direttrici, tenendo conto delle vicende che attraversarono i più eminenti pensatori nell'intento di scoprire dove essi possono aver trovato lo stimolo o l'ispirazione alle loro investigazioni od eventualmente incontrati i germi delle scoperte che ad essi si attribuiscono; è questo il cômpito preciso dello storico nello stretto senso della parola, il quale nell' adempierlo arriva a distinguere nettamente le questioni storiche esaurite da quelle che dall'avvenire attendono una soluzione definitiva. Ma si può anche prescindere in gran parte dagli uomini e fare la storia delle idee, seguendone sin che si può lo svolgimento in base ai materiali esistenti, spingendosi poi a colmare le lacune che nel loro insieme si avvertono col ricostruire il processo logico che presumibilmente avrà diretto i pensieri degli indagatori passati. Il primo di tali modi di procedere si accosta a quello seguito dai bibliografi, esige di regola una copiosa e svariata erudizione e mena di consueto a conclusioni da nessuno combattute, per converso da molti sfruttate. Il secondo invece si può ritenere modellato su quello proprio dello scienziato procedente alla ricerca di nuovi veri. Se del primo indirizzo è oggi maestro insuperato M. Cantor, del secondo il più eminente e schietto rappresentante è il celebre geometra H. G. Zeuthen; ben lo sanno i nostri lettori che conoscono ed apprezzano a dovere la geniale sua opera intorno alla teoria delle sezioni coniche dell'antichità (*).

(*) Per essere la lingua danese poco conosciuta, ne cito la versione tedesca fatta da R. v. Fischer Benzon ed intitolata: *Die Lehre von der Kegelschnitten in Altertum* (Kopenhagen 1886).

Ed in tale situazione egli si riafferma con le *Lezioni sulla storia delle matematiche nell'antichità e nell'evo di mezzo*, uscite in danese nel 1893 (*) ed ora in tedesco (**) e sulle quali intendiamo con queste linee attrarre l'attenzione degli studiosi e degli insegnanti. In esse l'autore si è proposto di esporre quel tanto di storia che a suo avviso importa di sapere tanto agli studenti quanto ai professori di matetiche elementari, cioè non tanto di far conoscere i più minuti particolari biografici e storici, non già chi per primo abbia scoperto una proposizione od usato un procedimento, ma sibbene di porre in luce le forme primitive sotto cui apparvero le varie verità ed i varî procedimenti nonchè le applicazioni che ne furono fatte in origine. È un libro frutto di lavoro originale, di indole piuttosto matematica che storica, giacchè in ultima analisi è uno studio approfondito dei grandi scrittori, inteso, meno forse a determinare quello che sapeva un certo scienziato, una certa generazione, un certo popolo, che a porre allo scoperto le intime ragioni per cui i teoremi e le dimostrazioni dovevano per ineluttabile necessità presentarsi nella forma in cui li incontriamo. La genialità di tali indagini è evidente ed il valore dei risultati a cui esse condussero verrà riconosciuto da tutti, anche da coloro che saranno recalcitranti ad inserirli nel catalogo delle conquiste fatte dalla storia delle matematiche.

Se una cosa ci è impossibile non lamentare è che tali risultati siano esposti sotto una forma dogmatica che ne cela ai profani l'elemento ipotetico (***), il quale era per converso esplicitamente rilevato nell' opera storica anteriore del medesimo autore (tale mutazione è forse l' espressione dell'essersi nell' autore raffermata la fede nella verità delle tesi originali da lui già sostenute?). Di più — ed è questo l'altro appunto che ci permettiamo di muovere all'opera di cui ci occupiamo — la preponderanza dell' elemento sostanziale sull'elemento storico-cronologico fa porre in non cale alcune questioni di cui soltanto la risoluzione a venire darà a certe illazioni

(*) *Forlaesning over Mathematikens Historie* af H. G. Zeuthen. Oldtid og Middelalder (Kjöbenhavn 1893).

(**) *Geschichte der Mathematik in Altertum Mittelalter. Vorlesungen von* H. G. Zeuthen *Professor an der Universität Kopenhagen* (Kopenhagen 1896).

(***) Cito ad esempio l'affermazione che « i Porismi (di Euclide) contenevano parecchie delle proposizioni sulle trasversali e le punteggiate che vengono oggi esposte nella geometria projettiva » (p. 97).

tutta la desiderabile saldezza; basti qui ricordare a sostegno di tale osservazione la questione eroniana, che, nel suo stato attuale, non permette di delineare la figura di Erone con la stessa precisione di quanto sia possibile ad es. per Archimede, e le incertezze intorno all'età in cui fiorì Diofanto, le quali rendono mal sicure le relazioni fra l'algebra dei Greci e quella degli Indiani. Tale preponderanza riesce evidente al solo percorrere l'indice delle lezioni dello ZEUTHEN, ove la divisione in sezioni è fatta in base a considerazioni etnografiche e cronologiche, mentre la divisione in capitoli è determinata dalle varie questioni matematiche trattate.

Il lettore che ricorrerà all'opera originale — a cui auguriamo una traduzione italiana che ne agevoli la diffusione nelle nostre scuole medie, alle quali essa sembra per la maggior parte indirizzata — vedrà qual singolare abilità lo ZEUTHEN possiede nella scoprire il legame che unisce le ricerche che a prima vista possono apparire disgiunte, ed apprenderà delle osservazioni ingegnose e brillanti le quali costituiscono un vero commento storico critico all'antica geometria ed in ispecie agli *Elementi* di Euclide. Mi limito, per non uscire dai limiti impostimi, a segnalare specialmente i capitoli sull'aritmetica geometrica e sull'algebra geometrica, ove sono luminosamente esposti gli artificî mediante i quali gli antichi poterono affrontare anche le ricerche sulle proprietà dei numeri, in virtù dei quali artificî la geometria de' Greci abbraccia in ultima analisi pressochè tutte le diramazioni delle matematica moderna.

Un altro punto di grande importanza a cui lo ZEUTHEN rivolse il suo fine ed acuto senso critico è quello delle ipotesi sulle quali Euclide ha eretto il proprio edificio geometrico; e poichè le questioni ivi trattate sono di quelle che destano maggiore interesse nel pubblico a cui si rivolge il *Periodico di matematica*, credo opportuno spogliarmi della veste del recensore per prendere quella più modesta del traduttore riferendo qui completamente le originali quanto ingegnose osservazioni dell'eminente geometra danese:

Le ipotesi sulle quali Euclide fonda la geometria debbono venir rintracciate nelle definizioni, nei postulati o negli assiomi posti in principio dei varî suoi libri. Offrono un interesse speciale quelli relativi al I libro giacchè essi, nonchè i risultati che sopra essi riposano, servono di base anche ai libri successivi. Perciò noi ci arresteremo di preferenza su di essi, completandoli colle nuove ipotesi introdotte in altri libri. Tuttavia quelle che si riferiscono a teorie speciali, quale sarebbe la teoria delle proporzioni, verranno da noi esaminati più innanzi occupandoci di tali teorie.

Una prima lettura delle definizioni, dei postulati e degli assiomi di Euclide mostra indiscutibilmente che essi non sono per fermo all'altezza delle esigenze formali e logiche che gli antichi, come dicemmo, hanno sollevate. Si vedrà a mo' d'esempio che parecchie definizioni non insegnano niente intorno a quanto doveva essere definito e quindi non danno alcuna garanzia che in corrispondenza ad esse esista realmente qualche cosa. Così la definizione della retta non dice niente di più che se dicesse: c'è una certa categoria di linee che si chiamano rette. Di qual specie di linee si tratti, cioè quali siano le proprietà della retta, che oggidì si introdurrebbero nella definizione, viene fatto conoscere soltanto ne' postulati i quali dicono: noi partiremo da ciò che la retta possiede queste e queste proprietà. Anche i postulati e gli assiomi sono enunciati con una tale brevità che può sembrare enigmatica e che è in aperto contrasto colla prudente prolissità con cui è trattato tutto ciò che si trova nelle proposizioni propriamente matematiche nelle loro dimostrazioni.

La ragione di ciò è che nelle definizioni, nei postulati e negli assiomi viene indicato tutto quello che il matematico è autorizzato a presupporre nel corpo di dottrina, ma non viene dato alcuno chiarimento o alcuna illustrazione del « come », nè alcuna dimostrazione del « perchè ». Lo scopo è principalmente di dare un *catalogo* completo di quanto si supporrà il quale sia così intelligibile che *quando si dovrà servirsene* dia dei ragguagli tanto chiari che riesca evidente in ogni caso di non avere adoperato nè più nè meno di quanto avevasi il diritto; per converso non si dà importanza alle astrazioni che guidarono a stabilire i concetti e ad attribuir loro mediante postulati ed assiomi precisamente quelle certe determinate proprietà, e nemmeno alle prove di avere effettivamente soddisfatto la condizione di non attribuire loro nè soverchie nè insufficienti proprietà. Come matematico Euclide si ritiene responsabile soltanto di questo che colui il quale gli accorda tutte queste cose, *poi*, astretto dalla forza delle sue deduzioni, sia obbligato a concedergli tutto quello che egli ne deduce. Deve perciò sperimentalmente dimostrare che ha stabilito un numero *sufficiente* di ipotesi. Che egli *non ne abbia fatte troppe*, non si può dimostrare con altrettanta facilità; ma ove egli avesse commesso tale errore, sarebbe stato esposto ad apprenderlo da altri scienziati. I quali avrebbero potuto convincernelo sia dimostrando che alcune delle sue supposizioni sono *fra loro contraddittorie*, sia *deducendo alcune di esse dalle rimanenti*.

Volendo valutare a dovere le ipotesi geometriche esplicitamente fatte dagli antichi e specialmente da Euclide si deve badare a quello che sono tali ipotesi piuttosto che alla mancanza di notizie sulla loro provenienza o alla forma sotto cui ci si presentano. Si vedrà allora che sono le medesime di quelle su cui noi oggidì erigiamo la geometria e che vengono esposte in modo così sicuro e completo, che meritano di servire sempre di modello anche a coloro che potessero giudicare opportuno di introdurvi aggiunte o modificazioni. Ciò non ostante per intenderle pienamente dovremo qua e là tener presente la forma imperfetta, almeno secondo le idee moderne, in cui esse sono espresse.

Cominceremo dal porre in disparte quelle Definizioni le quali possono offrire il fianco alla critica. Il *punto* è definito mediante la sua indivisibilità (Libro I, Def. 1). Partendo da esso si procede alla *linea* considerata come lunghezza senza larghezza (I, 2), alle *superficie* con lunghezza e larghezza (I, 5) e, nell'XI libro, al *solido* con lunghezza, larghezza e profondità (XI, 1). Queste definizioni non spiegano in alcun modo per qual via si arrivi ai concetti di punto, linea, superficie e corpo, pongono dunque come ipotesi su cui lavorare che si sia già in possesso di tali concetti e si sia in grado di comprendere il significato delle frasi: il punto ha zero dimensioni, la retta ne ha una, ecc.; in esse è poi inclusa la possibilità di concepire una retta come luogo geometrico di punti, una superficie di linee e un solido di superficie. In pratica per giungere in possesso di tali concetti di regola bisognerà percorrere, non questa via sintetica che va dal punto alla linea, alla superficie ed al solido, ma la via analitica opposta, partendo dal corpo come qualche cosa di dato a *priori*, e considerando le superficie come limiti di corpi, ecc. Che agli antichi non fosse ignota tal via per giungere a questi concetti, emerge da un'altra serie di definizioni — cioè XI, 2, I, 6, e I, 3 — le quali però in Euclide non fanno la parte di nuove definizioni di superficie, linea e punto, ma sono soltanto informazioni intorno al modo in cui sono limitati i corpi, le superficie e le linee.

Ho già rilevato come, non nelle definizioni, ma sibbene nei postulati combinati con uno degli assiomi, si dovesse cercare la spiegazione di ciò che fosse una *retta*. Anche l'esistenza della circonferenza è accertata soltanto dai postulati, giacchè diversamente da quanto accadde per la retta, la definizione di essa (I, 5) dice piuttosto troppo che troppo poco. Essa infatti non soltanto afferma essere tutti i punti della circonferenza equidistanti dal centro, ma eziandio essere il cerchio una figura, cioè una porzione di piano limitato dalla circonferenza, ed essere il centro interno a quella linea. Se non si aggiunge che la circonferenza comprende *tutti* i punti dotati di quella proprietà, il primo dei dati surriferiti rende per nulla superfluo un carattere atto a distinguere la periferia da un arco di circolo. Tale nuovo dato può quindi accampare dei diritti ad un posto fra le definizioni. Del resto vedremo che esso, anche se non avesse potuto trovare luogo qui, avrebbe dovuto venire accolto tra i postulati, vuoi sotto questa, vuoi sotto altra forma.

Al contrario la definizione di *diametro* di un cerchio ha un'appendice senza dubbio superflua, non soltanto nella definizione, ma anche fra le ipotesi. Giacchè ivi è detto, non soltanto che il diametro passa pel centro, ma anche che biseca il cerchio. Quest'ultima proposizione è un teorema che si può dimostrare tenendo conto della congruenza delle due parti in cui il cerchio è diviso da un diametro. Forse qualche editore lo ha più tardi inglobato nella definizione, non trovandolo fra i teoremi di Euclide.

La definizione di *angolo* data da Euclide è vu ta circa quanto la definizione di retta. A tale difetto viene posto riparo con gli *assiomi* nei quali sono stabiliti dei contrassegni generali per distinguere se una quantità geometrica sia maggiore, eguale o minore di un'altra della medesima specie. Infatti questi contrassegni si possono applicare anche agli angoli e siccome è in pari tempi insegnato come gli angoli possano venire addizionati, così si arriva in tal modo a una classe di grandezze ben definite. Si osservi del resto che la primitiva definizione di angolo è applicabile anche ad angoli fra linee curve. Ed infatti questo concetto è usato nella proposizione III, 16, in cui è dimostrato che la retta perpendicolare al diametro passante per un punto della circonferenza forma con questa un angolo minore di quello fatto da qualunque altra retta, in altri termini si accosta alla circonferenza più di ogni altra retta.

*
* *

I POSTULATI stabiliti da Euclide nel I libro sono, se ci atteniamo alla revisi ne del testo più recente e più degna di fede (*), i seguenti:

1. Condurre una retta da un punto ad un altro.
2. Prolungare indefinitamente una retta limitata.
3. Descrivere un cerchio con dato centro e dato raggio.
4. Tutti gli angoli retti sono fra loro eguali.
5. Se una retta, segante altre due, forma con queste da una parte due angoli interni minori in somma di due retti, quelle due rette prolungate all'infinito si taglieranno dalla parte ove la somma è inferiore a due retti.

Tutte le costruzioni che nascono applicando questi postulati sono quelle che in pratica si effettuano con riga e compasso. Ma sarebbe erroneo il considerarli esclusivamente da questo punto di vista. Lo si vede fra l'altro da ciò che facendolo i due ultimi postulati dove si trovano non sarebbero più al loro luogo; appunto da questo i più antichi editori si sono lasciati indurre in errore e li allogarono fra gli assiomi.

Come si vede riga e compasso non sono nemmeno menzionati. Il loro uso condurrebbe ad un'idea imperfetta della retta matematica e del cerchio matematico. I tre primi postulati non spiegano in alcun modo — cosa che del resto osservammo in generale riguardo alle ipotesi di Euclide — donde provenga o con quali mezzi si effettui, quello di cui si tratta. Essendo in ultima analisi i problemi degli antichi proposizioni sull'esistenza e le loro soluzioni dimostrazioni della esistenza di ciò che si tratta o di ciò che si cerca, i postulati sono *asserzioni di esistenza*, delle quali si chiede l'accettazione per vere senza dimostrazione o verificazione. Le asserzioni incluse nei tre primi postulati dicono soltanto che vi è una retta passante per due punti, che

(*) *Euclidis Elementa;* edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg. Lipsiae, 1883-88. 8.°

questa si può prolungare senza limite e che esiste un cerchio avente un centro dato ad arbitrio ed un raggio dato ad arbitrio uscente da questo, in altre parole, un cerchio avente un dato centro e passante per un dato punto. Che il terzo postulato debba intendersi appunto in questo senso, che esso non esiga venga ammessa senza dimostrazione l'esistenza di un cerchio con dato centro e raggio dato in una posizione qualunque del piano, si desume dal fatto che Euclide nella seconda proposizione degli *Elementi* mostra come la determinazione di un tale cerchio si possa, servendosi della costruzione di un triangolo equilatero insegnato nella prima proposizione, comporre con le costruzioni prestabilite. Siccome ciò è effettivamente possibile, così Euclide, introducendo la limitazione richiesta dal terzo postulato, ha adempiuto al già ricordato dovere di *non supporre troppo*. Se invece egli avesse avuto in vista l'esecuzione pratica col compasso, la posizione del dato raggio sarebbe stata indifferente; si può anzi osservare che la via tracciata nella seconda proposizione non fu certamente suggerita tenendo conto dell'effettuazione dei disegni.

Concepito in tal modo il significato dei postulati, è chiaro non essere sufficiente di postulare l'esistenza di rette e circoli determinati nel modo più semplice. Le costruzioni geometriche debbono venire eseguite in modo che i varî punti siano determinati come intersezioni di linee e servano poi a determinare delle nuove linee. Epperò l'esistenza di punti di intersezione, come quella delle linee, deve venire postulata, essendo impossibile che quella sia una conseguenza di questa. Epperò nel quinto postulato viene posta, come nuova *ipotesi*, che due rette si tagliano, pur facendo la restrizione necessaria affinchè quell'asserzione sia vera, restrizione che fa qui la stessa parte del diorisma in un problema. Ove non fosse stata richiesta col postulato 5° l'esistenza del punto d'intersezione, le soluzioni dei problemi in cui intervengono i punti d'intersezione di rette non avrebbero avuto in generale il carattere di dimostrazioni dell' esistenza delle figure costruite nel quale appunto risiedeva il risultato essenziale delle costruzioni.

Se tale modo di vedere è giusto, si avvertirà la mancanza in Euclide di analoghi postulati che accertino l'esistenza di intersezioni di una retta con una circonferenza o di due circonferenze. Ma la determinazione completa de' casi in cui l'intersezione ha luogo effettivamente esige la conoscenza di parecchie proposizioni ed è forse il fatto di non potere fare subito questa determinazione con piena generalità che ha trattenuto Euclide dallo stabilire i relativi postulati. Tuttavia in generale per adoperare il cerchio nelle costruzioni sono inevitabili almeno *alcune* ipotesi intorno alle intersezioni di esso colla retta e con altri circoli; ed è nelle applicazioni esposte che fa mestieri cercare quali siano quelle adoperate da Euclide. Così si vede che nel teorema I, 12 per essere sicuro che un cerchio di dato centro tagli una certa retta, egli fa passare questo cerchio per un punto posto rispetto alla retta dalla parte opposta del centro del cerchio, nel teorema 1 ritiene evidente che due cerchi ognuno dei quali ha il centro sulla periferia dell'altro si taglino, e nel teorema 22 che un cerchio il quale passi per un punto interno e per un punto esterno alla periferia di un altro, taglierà quest'altro. Che egli si fondi su queste supposizioni emerge dai passi citati; altrove egli non ammette nulla sull' intersezione di cerchi fra di loro o di rette con circoli che non sia stato prima dimostrato.

Ora, le ipotesi stabilite esplicitamente da Euclide, non contengono esse assolutamente nulla intorno alle ipotesi di fatto di cui egli nei citati luoghi, e specialmente nella proposizione 12, si mostra pienamente consapevole? I postulati certamente no; ma, come vedemmo, la linea di demarcazione tra postulati e definizioni non è così netta da autorizzare si cerchi soltanto fra i primi. Di più è chiaro che Euclide può rinvenire l'autorizzazione ad usare queste ipotesi nell'aver egli detto essere un cerchio una figura contenente il proprio centro, giacchè da ciò emerge che esso taglierà in due punti una retta sufficientemente prolungata se essa ha il proprio centro da una parte di questa retta e passa per un punto posto dall'altra parte e altrettanto farà per un'altra circonferenza se questa unisce un punto interno ad uno esterno. Del resto si osservi che in certi casi si può dimostrare analogamente l'intersecarsi di rette senza invocare il postulato 5°, tenendo conto del fatto che i contorni di poligoni limitano pure delle aree non estendentisi all'infinito. Di tale circostanza fa uso Euclide in I, 21.

Ci manca ancora una spiegazione dell'esistenza tra i postulati dell'asserzione dell'eguaglianza di tutti gli angoli retti. Dagli assiomi scaturisce che tutti gli angoli sono eguali quando sono congruenti, e soltanto allora, onde quell'asserzione equivale perfettamente all'altra: tutti gli angoli retti sono congruenti. Siccome un angolo retto (nella Def. 10) è caratterizzato dalla proprietà di essere eguale al proprio adiacente, così quel postulato dice in sostanza che l'angolo oggi da noi chiamato *piatto* ha una grandezza determinata, ossia che il prolungamento di una retta al di là di un estremo è determinato *univocamente*. Una piena conferma che appunto questo devesi intendere si ha osservando che quel postulato è in fatto applicato in questo senso nella dimostrazione del teorema I, 14.

Per conseguenza il postulato 4° è un complemento al 2° dal momento che dice essere univoca la determinazione del prolungamento di una retta; ad esso dunque competeva un posto fra i postulati e non fra gli assiomi. Il lettore moderno non avrebbe avvertito la mancanza di quel postulato, perchè egli, essendo abituato a vedere tenuto conto del numero delle soluzioni, avrebbe ritenuto che l'univocità fosse già inclusa nel postulato 2°. Ma, messo ora in quest'ordine di idee, egli avvertirà tosto l'assenza di un altro postulato, di quello cioè che afferma anche l'univocità della determinazione della retta insegnato dal 1° postulato. Di tale univocità Euclide fa uso esplicitamente nella proposizione I, 4 ove egli, nel corso della dimostrazione, adopera come argomento che « due rette non possono includere alcuno spazio »; ma quest' asserzione, che equivale a dire essere univoca la retta determinata dal 1° postulato, non si trova tra le fatte ipotesi. In ciò vi è indubbiamente un'incoerenza. Essa venne notata fin dall'antichità e suggerì agli editori di includere l'ipotesi esplicitamente applicata in I, 4 o — probabilmente dapprima — fra i postulati o fra gli assiomi. Tale nuovo postulato dice poi anche essere univoca la determinazione di un punto data dal 5° postulato come intersezione di due rette.

Al contrario non fa mestieri supporre l'univocità della determinazione di un cerchio mediante centro e raggio insegnati dal 3° postulato. Giacchè qui si può far uso ancora dell'essere il cerchio nelle definizioni di Euclide determinato più completamente della retta. Perciò Euclide è in grado di dimostrare, nei teoremi III, 5 e 6, che due cerchi concentrici non possono tagliarsi o secarsi, che quindi il completo luogo geometrico dei punti aventi da un dato punto la stessa distanza che ha un altro punto, consta soltanto di *una* curva chiusa, che in altri termini al 3° postulato non corrisponde che *un* cerchio.

I postulati 1°, 2°, 4° e 5° di Euclide, completati dall'ipotesi, applicata nella proposizione I, 4, che il primo postulato dia una determinazione univoca, e da un'altra ipotesi che vedremo contenuta nel 7° assioma, esprimono tutte le proprietà della retta usate nei fondamenti della geometria. Come vedremo Euclide ha così quasi senza avvedersene stabilite nello stesso tempo le proprietà fondamentali del piano. La definizione di piano data esplicitamente (I, 7) è altrettanto insignificante di quella di retta. Il piano è ancora menzionato nelle definizioni I, 8 e 15, ove è detto che i lati di un angolo stanno nello stesso piano e che il cerchio è una figura piana. Maggiore importanza ha il fatto che nei postulati proposti è tacitamente supposto che tutto accada in un medesimo piano, altrimenti il 5° postulato sarebbe proprio privo di senso. Ora la proprietà attribuita al piano, specialmente dai postulati 1° e 2°, consiste in ciò che esso contiene qualunque retta passante per due suoi punti nonchè il prolungamento di essa. Ove Euclide l'avesse stabilita espressamente avrebbe ottenuto un solido fondamento per le tre proposizioni dell'XI libro che dicono che una retta parzialmente posta in un piano non può mai uscire da esso, che due rette segantisi stanno in un piano (e lo determinano) e che la linea d'intersezione di due piani è una retta; egli invece congegna alcune altre dimostrazioni, di cui quella per la proposizione XI, 1 suppone l'esattezza della proposizione XI, 2, la quale a sua volta è basata sopra la XI, 1. Dal punto di vista logico, come anche per la forma e pei principî fondamentali, la trattazione della stereometria in Euclide è assai inferiore alla trattazione della planimetria, del che noi troveremo un esempio ancora più significante parlando degli assiomi; tuttavia vedremo che, malgrado questa deficienza, i matematici greci conoscevano i teoremi e le operazioni stereometriche in un ambito molto considerevole.

***

Mentre noi, trattando delle definizioni e dei postulati, per avere un ragguaglio esatto delle ipotesi che le une e gli altri esprimevano, dovemmo in parte ricorrere alle applicazioni che Euclide ne fa nelle sue proposizioni, all'opposto quegli Assiomi del I libro, la cui autenticità non può essere revocata in dubbio e di cui pertanto noi esclusivamente ci occuperemo, cioè

2

gli assiomi 1-3 e 7-8 (*), danno notizia in modo breve quanto chiaro dei fondamenti necessarî all'applicazione dei concetti di eguaglianza e diseguaglianza alle grandezze in generale ed alle grandezze geometriche in particolare. Il primo contributo al concetto di eguaglianza è dato nell'assioma 1, il quale dice: Le quantità che sono eguali ad una medesima quantità sono fra loro eguali. La presenza della parola « eguale » nella definizione del concetto di eguaglianza non annienta il valore di tale definizione, come emerge fra l'altro da ciò che nella definizione inclusa nell'assioma non è lecito surrogare la parola « disuguale » con « uguale ». Essa però non è sufficiente a porgere un concetto di grandezze suscettibile di applicazione. A tale scopo fa mestieri aggiungere che una quantità non si altera dividendola in parti e poi riunendo tutte le parti ottenute. Ciò è espresso dagli assiomi 2 e 3, i quali dicono che aggiungendo o togliendo da cose eguali delle cose eguali si ottengono cose eguali. Inoltre, quando si vuol considerare anche la diseguaglianza, bisogna aggiungere che si ottiene qualche cosa di più piccolo di una quantità se non si prendono tutte le parti in cui questa si è divisa; è quanto dice l'assioma 8: il tutto è maggiore di una parte. È così data anche una definizione dell'addizione e della sottrazione di grandezze generali ed è detto che l'ordine degli addendi non ha influenza sulla somma. Osserviamo che il concetto di grandezza in un'aritmetica moderna (**) è definito così: « Per quelle proprietà delle cose che non mutano riunendo le loro parti in ordine differente dal primitivo, ma si perdono se alcune delle parti sono tolte, si dice che le cose hanno grandezza », e che questa definizione esprime esattamente quanto gli assiomi citati, i quali anzi hanno la prerogativa di definire un po' più direttamente che cosa è l'eguale, il maggiore o il minore.

Il concetto di grandezza deve venire completato affinchè ne sia possibile l'applicazione a speciali categorie di grandezze, quali sarebbero le grandezze geometriche, i pesi ecc. ed anche alle pure grandezze numeriche astratte. Euclide, pel quale la grandezza geometrica coincide con la grandezza astratta — giacchè essa, nell'algebra geometrica, serve a rappresentare grandezze di qualunque specie, anche numeri — è costretto a dare anzitutto dei contrassegni per *l'eguaglianza delle grandezze geometriche;* gli è quello che egli fa nel 7° assioma del I libro, del quale noi parleremo fra un momento. Intanto notiamo che nel V libro è esposta una diretta rappresentazione delle grandezze astratte mediante rapporti ed insegnati anche i caratteri dell'eguaglianza e della diseguaglianza. I rapporti all'*unità* sono numeri nel significato moderno e generale di questa parola. Ma l'unità non è introdotta che nel VII libro ed applicata poi come misura delle grandezze ad essa commensurabili. Le ipotesi relative verranno da noi esaminate assieme al resto di quanto contengono questi libri.

Nell'assioma 7° del I libro — a cui noi ritorniamo dopo questo sguardo

---

(*) *Euclidis Elementa;* ed. Heiberg. Lipsiae, 1883-88.
(**) Julius Petersen, *Arithmetik og Algebra til Skolebrug.* — Kjöbenhavn, 1879, p. 3.

ad una determinazione delle grandezze differenti dalla geometrica — è detto essere eguali le grandezze che sono coincidenti (congruenti) o possono ridursi a coincidere. Questo carattere distintivo dell'eguaglianza geometrica precede naturalmente quello della diseguaglianza contenuto nell'assioma 8° e che non esige alcun speciale complemento per essere applicato a grandezze geometriche. Nell'assioma 7° Euclide addita con grande sicurezza ciò che sarà sempre punto di partenza di ogni ricerca sulle *grandezze* geometriche. Si noti che la congruenza s'incontra già nella misurazione pratica la quale in fondo consiste nell'enumerare in ciò che dev'essere misurato una serie di parti eguali all'unità di misura. Inoltre essa trovasi tanto nell'edificio geometrico di Euclide come in tutti i posteriori che trattano di grandezze geometriche; infatti sempre si prendono le mosse dal fatto che certe grandezze sono eguali per essere coincidenti e diseguali perchè una di esse è una parte dell'altra, ovvero eguale ad una parte dell'altra. Appunto tale procedimento viene applicato da Euclide nel I libro per dimostrare quali relazioni intercedano fra l'eguaglianza o diseguaglianza di lati e angoli dello stesso triangolo o di triangoli differenti. I risultati ottenuti vengono combinati colle ipotesi generali sulle grandezze; egli anzi si industria ad applicare il meno possibile il principio geometrico specifico della eguaglianza; così nella proposizione I, 26 non adopera direttamente la sovrapposizione per dimostrare che se due triangoli hanno eguali una base e i due angoli adiacenti avranno eguali anche gli altri lati, ma deduce questa proposizione per assurdo dai casi di eguaglianza di triangoli già trattati.

Riguardo a rette ed angoli l'eguaglianza coincide con la congruenza (sovrapponibilità). Invece per linee spezzate, aree e volumi, soltanto dopo avere dimostrata l'eguaglianza per congruenza, si è in grado di dimostrare l'eguaglianza senza congruenza coll'aiuto di un'argomentazione fondata sopra le ipotesi generali intorno alle grandezze: ciò ad esempio è fatto in I, 35 ove è dimostrata l'eguaglianza di parallelogrammi aventi la stessa base e la stessa altezza. Alle grandezze delle linee curve e delle superficie da esse limitate, nonchè alla grandezza della maggior parte dei volumi non si può giungere che con passaggi al limite che venivano dagli antichi eseguiti mediante il metodo di esaustione ed esigono delle nuove ipotesi. Lo vedremo trattando del XII libro di Euclide e dei lavori di Archimede.

Per converso dobbiamo subito osservare che il modo adoperato da Euclide per applicare alla geometria dello spazio il postulato 7° ha una menda gravissima. Essa dipende dal fatto che nella stereometria euclidea si cerca invano *la distinzione fra eguaglianza e simmetria;* tuttavia è facile riconoscere che Euclide non ritiene per eguali (sovrapponibili) due figure simmetriche. Giacchè in tal caso egli avrebbe ritenuto di possedere nel 7° assioma un fondamento sufficiente alla determinazione dei volumi. Invece, al posto di esso, egli stabilisce una nuova ipotesi che può servire tanto per figure eguali quanto per simmetriche. Infatti nella 10ª definizione del libro XI vengono definite per *eguali e simili* due figure solide limitate dallo stesso numero di figure piane eguali e simili. Tale definizione racchiude, oltre una denominazione, una ipotesi geometrica, un assioma dunque, quello cioè che dice aver tali figure il medesimo volume (*). Esso è applicato nella proposizione XI, 29 ove è dimostrato essere eguali i parallelepipedi di egual base ed eguale altezza ed inoltre nella XI, 28 ed è dedotto da ciò essere eguali i due prismi triangolari di cui consta un parallelepipedo. Ora si sa che i prismi che nella prima dimostrazione vengono trasportati sono eguali e che i prismi triangolari dell'ultima proposizione possono essere trasformati in prismi eguali distribuendone opportunamente le parti. Gli è quanto Euclide non può avere osservato; giacchè allora l'introduzione di un nuovo principio per l'eguaglianza dei solidi sarebbe stata superflua, cosa contraria all'ordinario suo modo di procedere.

L'assioma 7°, considerato nelle applicazioni surriferite, non ha somministrato che un carattere dell'eguaglianza geometrica o, se meglio piace, una definizione di questa; comunque, è ivi inclusa una vera ipotesi geometrica, ossia un assioma di grande importanza. Esso afferma potersi parlare in genere di figure eguali (sovrapponibili), cioè di *trasporto di figure* in altre posizioni dello spazio. In forza dell'assioma di Euclide le *grandezze* geometriche determinano tutto quello che resta invariato durante un tale trasporto. In che cosa consista tale movimento non viene però in alcun modo dichiarato, anzi di ciò non viene nemmeno fatto cenno nell'assioma; però dalle applicazioni emerge che si deve intendere il trasporto materiale noto pei corpi fisici detti invariabili.

Se noi prima abbiamo detto che l'assioma I, 7 è necessario a caratterizzare pienamente una retta, pensavamo appunto a questo che Euclide, ad esempio nella dimostrazione dei teoremi sull'eguaglianza, adopera esplicitamente la presupposizione che la retta non si alteri per un movimento.

Come potevasi prevedere i capitoli veramente originali dell'opera dello ZEUTHEN sono quelli che concernono la matematica de' Greci, la quale fu sino a poco fa il campo di studi da lui preferito; e val la pena di notare come egli, dopo averla esaminata nel suo stato di floridezza per determinare a quali doti essa dovette la facoltà di riuscir vincitrice in tante e così memorabili battaglie, cerca anche i germi della malattia che la condusse a perire, arriva anzi a farne una diagnosi soddisfacente: e così adempie ad uno dei precipui cômpiti dello storico della scienza, quello cioè di determinare le ragioni della transitorietà di certi metodi.

E qui facciamo punto; non senza però avere nuovamente raccomandata l'opera dello ZEUTHEN, tanto ai cultori della storia delle

(*) CAUCHY dimostrò che in fatto tali figure sono sempre eguali o simmetriche.

matematiche, quanto ai professori inclini ad introdurre un po' di elemento storico e critico nella trattazione della geometria, indotti a ciò dalla persuasione di ridurlo meno arido e più vivace, epperò di rendere più facile il raggiungimento del fine supremo di qualsiasi insegnamento, che è, non soltanto di far apprendere, ma anche di far amare la scienza.

Genova, 25 ottobre 1895.

SULLE FRAZIONI CONTINUE NUMERICHE

Nella presente Nota richiameremo rapidamente alcune proposizioni, che d'ordinario non sono date con chiarezza e rigore sufficienti, e ne dedurremo alcune formule utili (V. 11, ...). Daremo una nuova proposizione molto semplice colla quale si può riconoscere se una data frazione continua ad elementi positivi sia convergente; e ne daremo un'altra, anch'essa nuova ed importante, con la quale si può decidere in molti casi se una frazione continua convergente abbia valor razionale od irrazionale (V. 15, 17, 20, ...).

Definizioni e Trasformazioni.

1. Diremo *catena* di più frazioni date in ordine assegnato la espressione indicante che devesi aggiungere l'ultima frazione al denominatore della penultima, il risultato ottenuto al denominatore della terz'ultima e così via fino ad aver collegate tutte le frazioni date; e diremo valore della catena il risultato, che s'ottiene eseguendo le operazioni con essa indicate.

Dicesi *n^{ma} componente d'una catena* la n^{ma} delle frazioni colle quali la medesima è formata.

2. Dicesi *frazione continua* ogni espressione indicante che, essendo date infinite frazioni ordinarie in ordine assegnato, si vogliono considerare i valori della prima frazione data, della catena delle prime due, di quella delle prime tre, di quella delle prime quattro e così via.

Diremo componente n^{ma} d'una frazione continua la n^{ma} delle frazioni colle quali la medesima è formata; e diremo n^{ma} *catena d'una frazione continua* la catena delle sue prime n componenti. Diremo *elementi* i numeratori ed i denominatori delle componenti.

Diremo *valori d'una frazione continua* i limiti (*), se ve ne siano, dei valori delle sue catene. Diremo che una frazione continua è *insignificante*, od è *monovalente*, *bivalente*, *trivalente*, ecc., oppure è *indeterminata* secondo che non abbia valori, o ne abbia uno, due, tre, ecc., oppure abbia infiniti valori. Una frazione continua si dice *convergente*, quando è monovalente.

3. La frazione continua, che ha per componenti

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \frac{a_4}{b_4},\ \ldots\ldots,$$

si indica in uno qualunque dei seguenti modi:

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ldots\ldots}}} \qquad \cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ldots\ldots}}}$$

$$\left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \frac{a_4}{b_4},\ \ldots\ldots\right)$$

$$\frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3+}\ldots\ldots,\quad \frac{a_1}{b_1}\dot{+}\frac{a_2}{b_2}\dot{+}\frac{a_3}{b_3}\dot{+}\ldots\ldots$$

4. Dalle equivalenze letterali

$$\frac{a}{b+\frac{c}{d}}=\frac{ha}{hb+\frac{hc}{d}},\quad b+\frac{c}{d}=b-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{-c}{c+d}}$$

segue immediatamente che:

Non s'altera il valore d'una catena di frazioni, se si moltiplicano per uno stesso numero i due termini d'una componente ed il numeratore della successiva.

Non s'altera il valore d'una catena di frazioni, se in una componente si toglie 1 al denominatore, nella successiva si aumenta il denominatore del numeratore e mutasi segno al numeratore, e fra le due s'interpone la nuova componente $\frac{1}{1}$.

(*) F. F. Giudice: *Sulle successioni*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo; Tomo V, 1891, pag. 280.

Per le catene di frazioni sussistono dunque le notevoli *formule di trasformazioni:*

$$\text{I)}\qquad \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{c_1 a_1}{c_1 b_1}, \frac{c_1 c_2 a_2}{c_2 b_2}, \ldots, \frac{c_{n-1} c_n a_n}{c_n b_n}\right)$$

$$\text{II)}\qquad \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_m}{b_m}, \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}, \frac{a_n}{b_n}\right) =$$

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_{m-1}}{b_{m-1}}, \frac{a_m}{b_m - 1}, \frac{1}{1}, \frac{-a_{m+1}}{b_{m+1} + a_{m+1}}, \frac{a_{m+2}}{b_{m+2}}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right).$$

Frazioni continue generali.

5. Per la I) si ha che: Se in una catena di frazioni si sopprime il denominatore dell'ultima componente e si moltiplicano per tal denominatore i due termini della penultima componente, s'ottiene una nuova catena, che ha una componente di meno ed è equivalente alla data.

Se si sopprime il denominatore dell' ultima componente della catena n^{ma} d'una frazione continua e si moltiplicano per tal denominatore i due termini della penultima componente, indi si fa analoga operazione sulla nuova catena, poi ancora sulla nuova e così via, si perviene finalmente ad una frazione ordinaria, che tal quale risulta dicesi *ridotta* n^{ma} della frazione continua ed è equivalente alla n^{ma} catena.

6. Teorema. *Ciascuno dei due termini della n^{ma} ridotta s'ottiene addizionando i termini omonimi delle ridotte antiprecedente e precedente dopo d' averli rispettivamente moltiplicati per numeratore e denominatore della componente n^{ma}.*

Dimostrazione. Se sono dati i numeri

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots;\qquad b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,$$

le equazioni

$$\text{III)}\qquad \begin{cases} a_1 u_0 \ - b_1 u_1 = u_2 \\ a_2 u_1 \ - b_2 u_2 = v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n u_{n-1} - b_n u_n = u_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

determinano $u_2, u_3, \ldots$ in funzione delle u_0, u_1, che si possono lasciar arbitrarie. Trasformando ciascuna di queste equazioni per mezzo della precedente, si trova infatti:

$$-u_3 = a_1 b_2 u_0 - (a_2 + b_1 b_2)\, u_1$$
$$u_4 = (a_1 a_3 + a_1 b_2 b_3)\, u_0 - (a_3 b_1 + a_2 b_3 + b_1 b_2 b_3)\, u_1$$

. . . .

cioè si trova in generale:

IV) $$(-1)^{n+1} u_{n+1} = \lambda_n u_0 - \mu_n u_1$$

dove λ_n e μ_n sono formati solamente coi numeri

$$a_1, a_2, \ldots, a_n; \quad b_1, b_2, \ldots, b_n.$$

Dividendo per $a_n u_n$ la n^{ma} delle III) e trasformando convenientemente il risultato, si trova:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{a_n}{b_n + \frac{u_{n+1}}{u_n}}$$

onde si ha:

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{a_1}{b_1 + \frac{u_2}{u_1}}, \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{a_2}{b_2 + \frac{u_3}{u_2}}, \ldots.$$

Trasformando ciascuna delle prime n di queste relazioni per mezzo della successiva, si ottiene:

V) $$\frac{u_1}{u_0} = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \ddots \frac{a_n}{b_n + \frac{u_{n+1}}{u_n}}}}.$$

Questo risultato prova che, se le arbitrarie u_0 ed u_1 si fissano in modo che sia nulla u_{n+1}, il rapporto $u_1 : u_0$ dà il valore della catena delle n frazioni

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}.$$

Indicheremo ciò scrivendo:

$$\left(\frac{u_1}{u_0}\right)_{u_{n+1}=0} = \left(\frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}, \frac{a_n}{b_n}\right)$$

ma la IV) dà:

$$\left(\frac{u_1}{u_0}\right)_{u_{n+1}=0} = \frac{\lambda_n}{\mu_n}$$

onde ne segue essere:

$$\text{VI)}\qquad \frac{\lambda_n}{\mu_n} = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}.$$

Osserviamo ora che la n^{ma} delle equazioni III) e la IV) danno:

$$a_n(\lambda_{n-2}u_0 - \mu_{n-2}u_1) + b_n(\lambda_{n-1}u_0 - \mu_{n-1}u_1) = \lambda_n u_0 - \mu_n u_1.$$

Questa è dunque un'equivalenza per valori arbitrarii delle u_0, u_1; debbono quindi essere eguali i coefficienti di u_0, come pure quelli di u_1, nei due membri cioè dev'essere:

$$\text{VII)}\qquad \begin{cases} \lambda_n = a_n\lambda_{n-2} + b_n\lambda_{n-1} \\ \mu_n = a_n\mu_{n-2} + b_n\mu_{n-1}. \end{cases}$$

Ma dalla VI) e da quanto precede segue che λ_n e μ_n non sono altro che numeratore e denominatore della ridotta n^{ma} della frazione continua

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots}}$$

per cui le VII) provano la verità del teorema.

7. Si riconosce immediatamente che la *legge di formazione delle ridotte*, che è espressa dal teorema dimostrato, vale già per la prima, se ad essa s'antepongano le *ridotte virtuali* $\frac{1}{0}$ e $\frac{0}{1}$. Per introdurre le ridotte virtuali anche nella scrittura della frazione continua, basta osservare che è identicamente:

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}} = \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots}}}}$$

Per le ridotte virtuali sarebbe così:

$$\lambda_{-1} = 1,\ \mu_{-1} = 0;\quad \lambda_0 = 0,\ \mu_0 = 1.$$

8. Teorema. *Il determinante dei termini delle ridotte* $(n-1)^{ma}$ *ed* n^{ma} *è uguale al prodotto dei numeratori delle prime* n *componenti mutati di segno: quello dei termini delle ridotte* $(n-2)^{ma}$ *ed* n^{ma} *è uguale al prodotto dei numeratori delle prime* $n-1$ *componenti mutati di segno per il denominatore della componente* n^{ma}.

DIMOSTRAZIONE. Se si pone

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ \mu_{n-1} & \mu_n \end{vmatrix}$$

e si tien conto della VII), si riconosce subito essere:

$$\Delta_n = -a_n \Delta_{n-1}, \qquad \begin{vmatrix} \lambda_{n-2} & \lambda_n \\ \mu_{n-2} & \mu_n \end{vmatrix} = b_n \Delta_{n-1}$$

per cui, essendo $\Delta_1 = \lambda_0 \mu_1 - \lambda_1 \mu_0 = -a_1$, è

$$\Delta_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \cdot \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \cdots \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot \Delta_1 = (-a_n)(-a_{n-1}) \ldots (-a_2)(-a_1)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_{n-2} & \lambda_n \\ \mu_{n-2} & \mu_n \end{vmatrix} = b_n(-a_{n-1})(-a_{n-2}) \ldots (-a_2)(-a_1).$$

Il teorema è così dimostrato, cioè si ha:

$$\text{VIII)} \quad \begin{cases} \lambda_{n-1}\mu_n - \lambda_n \mu_{n-1} = (-1)^n \; a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n. \\ \lambda_{n-2}\mu_n - \lambda_n \mu_{n-2} = (-1)^{n-1} \; a_1 a_2 \ldots a_{n-1} b_n. \end{cases}$$

9. Dalle ultime formule deducesi immediatamente:

$$\text{IX)} \quad \begin{cases} \dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}} - \dfrac{\lambda_n}{\mu_n} = \dfrac{(-1)^n}{\mu_{n-1}\mu_n} a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n \\[2ex] \dfrac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-2}} - \dfrac{\lambda_n}{\mu_n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\mu_{n-2}\mu_n} a_1 a_2 \ldots a_{n-1} b_n \end{cases}$$

e da queste e dalla identità

$$k_n = k_1 + (k_2 - k_1) + \ldots + (k_{n-1} - k_{n-2}) + (k_n - k_{n-1}$$

segue subito:

$$\text{X)} \begin{cases} \dfrac{\lambda_n}{\mu_n} = \dfrac{a_1}{b_1} - \dfrac{a_1 a_2}{\mu_1 \mu_2} + \dfrac{a_1 a_2 a_3}{\mu_2 \mu_3} - \dfrac{a_1 a_2 a_3 a_4}{\mu_3 \mu_4} + \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{a_1 a_2 \ldots a_n}{\mu_{n-1}\mu_n} \\[2ex] \dfrac{\lambda_{2n+1}}{\mu_{2n+1}} = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1} - \dfrac{a_1 a_2 b_3}{\mu_1 \mu_3} - \dfrac{a_1 a_2 a_3 a_4 b_5}{\mu_3 \mu_5} - \ldots - \dfrac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{2n} b_{2n+1}}{\mu_{2n-1}\mu_{2n+1}} \\[2ex] \dfrac{\lambda_{2n}}{\mu_{2n}} = \dfrac{\lambda_2}{\mu_2} + \dfrac{a_1 a_2 a_3 b_4}{\mu_2 \mu_4} + \dfrac{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 b_6}{\mu_4 \mu_6} + \ldots + \dfrac{a_1 a_2 \ldots a_{2n-1} b_{2n}}{\mu_{2n-2}\mu_{2n}}. \end{cases}$$

10. Da quanto fu detto nel precedente numero si rileva subito la opportunità di porre la seguente definizione: Diremo *serie equipollente*, *serie dispari* e *serie pari* della frazione continua $\dfrac{a_1}{b_1 +} \dfrac{a_2}{b_2 +} \dfrac{a_3}{b_3 +} \ldots$ le

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2}{\mu_1 \mu_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{\mu_2 \mu_3} - \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{\mu_3 \mu_4} + \ldots..$$

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} - \frac{a_1 a_2 b_3}{\mu_1 \mu_3} - \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 b_5}{\mu_3 \mu_5} - \ldots..$$

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{a_1 a_2 a_3 b_4}{\mu_2 \mu_4} + \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 b_6}{\mu_4 \mu_6} + \ldots..$$

11. Dalle formule VII) deducesi:

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = b_n + a_n : \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}}\,; \quad \frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} = b_n + a_n : \frac{\mu_{n-1}}{\mu_{n-2}}\,;$$

$$\frac{\lambda_n + \mu_n}{\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}} = b_n + a_n : \frac{\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}}{\lambda_{n-2} + \mu_{n-2}}$$

e da queste, essendo $\lambda_0 = 0$, $\mu_0 = 1$, $\lambda_1 = a_1$, $\mu_1 = b_1$, segue immediatamente:

$$\text{XI)} \begin{cases} \lambda_n = \left(b_n + \dfrac{a_n}{b_{n-1}+} \cdots \dfrac{a_4}{b_3+} \dfrac{a_3}{b_2}\right) \cdots \left(b_3 + \dfrac{a_3}{b_2}\right) b_2 a_1 \\ \mu_n = \left(b_n + \dfrac{a_n}{b_{n-1}+} \cdots \dfrac{a_3}{b_2+} \dfrac{a_2}{b_1}\right) \cdots \left(b_3 + \dfrac{a_3}{b_2+} \dfrac{a_2}{b_1}\right)\left(b_2 + \dfrac{a_2}{b_1}\right) b_1 \\ \lambda_n + \mu_n = \left(b_n + \dfrac{a_n}{b_{n-1}+} \cdots \dfrac{a_3}{b_2+} \dfrac{a_2}{b_1+a_1}\right) \cdots \left(b_3 + \dfrac{a_3}{b_2+} \dfrac{a_2}{b_1+a_1}\right)\left(b_2 + \dfrac{a_2}{b_1+a_1}\right)(b_1+a_1). \end{cases}$$

12. Dalla prima formula IX) deducesi.

$$\frac{\lambda_n}{\mu_n} - \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}} = -\frac{a_n \mu_{n-2}}{\mu_n}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}} - \frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-2}}\right)$$

ossia, per la seconda delle VII) e la seconda delle XI):

$$\left(\frac{\lambda_n}{\mu_n} - \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}\right) : \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}} - \frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-2}}\right) =$$

$$(-1) : \left[1 + \frac{b_n}{a_n}\left(b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-2}+} \ldots. \frac{a_3}{b_2+} \frac{a_2}{b_1}\right)\right]$$

e da queste segue immediatamente:

$$\text{XII)} \quad \frac{(-1)^{n-1}}{\dfrac{\lambda_n}{\mu_n} - \dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}} = \left[1 + \frac{b_n}{a_n}\left(b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-2}+} \cdots \frac{a_3}{b_2+} \frac{a_2}{b_1}\right)\right] \ldots.$$

$$\ldots. \left[1 + \frac{b_3}{a_3}\left(b_2 + \frac{a_2}{b_1}\right)\right]\left(1 + \frac{b_2}{a_2} b_1\right) \frac{b_1}{a_1}.$$

13. Teorema. *Se le quantità* u_0, u_1 *sono date e le* u_2, u_3, u_4, ... *sono determinate dalle equazioni* III), *perchè la frazione continua*:

$$\frac{a_1}{b_1+} \frac{a_2}{b_2+} \frac{a_3}{b_3+} \ldots\ldots$$

abbia per unico valore $u_1 : u_0$, *è necessario e sufficente che sia*

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}} - \frac{\lambda_n}{\mu_n}\right) : \left(1 + \frac{\mu_n u_n}{\mu_{n-1} u_{n+1}}\right) = 0$$

dove λ_n *e* μ_n *sono numeratore e denominatore della* n^{ma} *ridotta della frazione continua.*

Dimostrazione. Da quanto fu detto al num. 6, e specialmente dalla V), segue essere:

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\lambda_{n-1} u_{n+1} + \lambda_n u_n}{\mu_{n-1} u_{n+1} + \mu_n u_n}$$

per cui è:

$$\frac{u_1}{u_0} - \frac{\lambda_n}{\mu_n} = \frac{u_{n+1}(\lambda_{n-1}\mu_n - \lambda_n \mu_{n-1})}{\mu_n(\mu_{n-1} u_{n+1} + \mu_n u_n)} = \frac{\dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}} - \dfrac{\lambda_n}{\mu_n}}{1 + \dfrac{\mu_n u_n}{\mu_{n-1} u_{n+1}}}$$

da cui si vede appunto che $\frac{\lambda_n}{\mu_n}$ tende all'unico limite $u_1 : u_0$, che è quindi unico valore della frazione continua, allora e solo allora che la condizione enunciata nel teorema è soddisfatta.

(Continua).

F. Giudice.

TEMI DI MATEMATICA DATI PER L'ESAME DI MATURITÀ
IN GINNASI E SCUOLE REALI SUPERIORI DELL'AUSTRIA-UNGHERIA
alla fine degli anni scolastici 1891-92 e 1892-93.

(Continuazione: V. pag. 27, 55, 97, 148, 184 dell'anno IX e 25, 58 dell'anno X).

Budweis: *i. r. Ginnasio sup. ted.* — 1. In un vaso conico col vertice in giù e coll'asse verticale l'acqua contenutavi ha un altezza $h = 37$ *cm.* e una superficie col diametro $d = 44$ *cm.*; dopo immersavi una palla di sasso l'acqua s'eleva di $a = 4$ *cm.*; qual' è il diametro della palla?

2. Trovare x dall'equazione $2 + 3 \cot 2x = 4 \operatorname{tg} x$.

3. Si costruisca il cerchio $x^2 + y^2 = 25$ e la parabola $3y^2 = 16x$ e si calcoli la superficie delle parte comune.

Kremsier: *i. r. Ginnasio sup. ted.* — 1. $6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0$.

2. Qualcuno paga ad una banca 300 fr. al principio di ogni anno durante 10 anni per procurarsi il diritto ad una rendita che duri per 20 anni cominciando colla fine dell' 11° anno. Quanto importa questa rendita? (4 %).

3. Una sfera viene tagliata da un piano. Qual' è la superficie di ciaschedano dei due segmenti sferici, sapendo che il primo è alto 3 *dm.* ed ha un angolo al centro di $38^\circ 35' 18''$?

4. Dal punto $x_1 = 3$, $y_1 = 0$ si devono guidare delle tangenti all'iperbole $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, determinare le equazioni di queste tangenti e le coordinate di contatto per quel punto di contatto che ha le coordinate positive.

Klagenfurt: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. $3^{y+2} = \sqrt[x+1]{9^{8-x}}$, $2^{y+2} = \sqrt[x-1]{8^{5-x}}$.

2. Da una via retta si diramano alla distanza di 1,5 *km.* due vie rette, la prima a sinistra sotto un angolo di 30°, e l'altra sotto un angolo di 60° a destra; sulla prima si arriva dopo 4 *km.* ad un luogo *A*, sulla seconda dopo 2,5 *km.* ad un luogo *B*. I due luoghi sono congiunti da una via retta; quanto è lunga questa?

3. Per il fuoco situato sulla parte positiva dell'asse delle x è condotta una corda nell'ellisse $16x^2 + 25y^2 = 400$, la quale taglia l'asse minore dalla parte negativa per metà. Si trovi l'equazione della corda e della tangente e normale parallela alla stessa.

Pilsen; *i. r. Ginnasio sup. ted.* — 1. Un prestito di 120000 fr. deve venire ammortizzato entro 24 anni. Qual' è la quota annua da pagarsi, se l' interesse viene calcolato al $4\frac{1}{2}\%$?

2. Dato lo spigolo alla base a d' una piramide n-gonale regolare e l'angolo γ che fa una faccia laterale colla base, trovarne il volume.

$$(n = 24,\ a = 18{,}7\ m.,\ \gamma = 32^\circ 15' 10'').$$

3. Si domanda il perimetro e l'area del triangolo i cui lati hanno le equazioni $y = 3x - 2$, $y = x + 14$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$.

Bressanone: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Si domanda quella progressione geometrica nella quale la somma del primo e del settimo termine è 195 ed il quarto termine è 24.

2. Una piramide ottagonale regolare nella quale uno spigolo laterale $a = 64\ cm.$ fa colla base un angolo $\alpha = 74^\circ 42' 34''$ deve venir fusa in una sfera. Qual' è la superficie della sfera se nella fusione va perduto l'8 %?

3. È data l'equazione di una ellisse $16x^2 + 25y^2 = 400$. Si devono cercare le equazioni delle tangenti guidate alle estremità del parametro e calcolare gli angoli formati da queste col parametro ed inoltre l'area compresa fra il parametro e l'arco minore dell'ellisse.

Hall: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. $16x^2 + 80x = 69$; determinare x mediante funzioni goniometriche.

2. Si determini $\sqrt{41}$ per mezzo delle frazioni continue, per mezzo del teorema binominale ed abbreviatamente, ogni volta con 5 decimali esatti.

3. Si determini il volume di una piramide formata da quattro triangoli isosceli congruenti (sfenoide tetragonale), se la base de' triangoli è $= 3\ dm.$ ed il lato $= 5\ dm.$

4. La differenza di due lati di un triangolo è di 15 *m.*, l'angolo da essi compreso 140^0, il lato opposto 84 *m.*; risolvere il triangolo.

MARBURG: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Gli angoli (in numeri intieri) di un triangolo sono tali che la quinta parte del primo, l'ottava parte del secondo e la tredicesima parte del terzo fanno insieme 21^0. Quali sono i lati del triangolo se $c > b$ e l'area del triangolo è $s = 1\,a$.

2. Costruire e trovare l'equazione di quel cerchio che ha il raggio $r = 5$ e passa per il punto $P\,(5,9)$ e tocca la retta $4\,x + 3\,y + 3 = 0$.

3. In una progressione aritmetica il prodotto dei quattro primi termini è $= -15$, il quoziente del secondo e del terzo termine 3. Quanti termini si devono sommare perchè la somma sia $= 0$?.

UNGARISCH-HRADISCH: *i. r. Ginnasio sup.* —. 1. Qualcuno pone in una banca per 12 anni al principio d'ogni anno 380 f. e leva negli otto anni seguenti alla fine d'ogni anno una somma tale che il suo avere viene consumato. Qual'è questa somma venendo calcolato l'interesse al $4\,\frac{1}{4}\,{}^0/_0$?

2. In un triangolo si ha $a : b = 63 : 52$, l'angolo compreso da questi due lati è $\gamma = 22^\circ\,37'\,10''$ ed il perimetro $p = 70\,m$. Viene domandato il terzo lato, gli altri due angoli, l'area ed i raggi dei circoli inscritto e circostritto.

3. Un triangolo coi lati di 41, 29 e 21 *cm.* ruota attorno ad un'asse parallelo al lato maggiore e distante da questo di 10 *cm.*. Qual'è la superficie ed il volume del corpo di rotazione?

4. Pel vertice della parabola $y^2 = 10\,x$ sono condotte due rette perpendicolari fra loro. La prima ha una costante di direzione $= \frac{15}{8}$. Uniti i due punti d'intersezione della parabola si domanda il punto d'intersezione della congiungente coll'asse della parabola.

TESCHEN: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Da quale altezza sopra il polo Nord della Terra si può ancora vedere quel parallelo del quale ogni grado è lungo 10 *Km.*?

2. Un tale incassa di un capitale di 6827 f. impiegato al $5\,\frac{1}{2}\,{}^0/_0$ alla fine del 9^0 anno ed in ognuno dei successivi 1390 f. Quando il capitale sarà consumato?

3. Quali angoli positivi minori di 360^0 soddisfanno l'equazione

$$2{,}16^{\operatorname{sen}^2\left(45^0 + \frac{x}{2}\right)} + 18 = 15{,}2^{1 + \operatorname{sen} x} ?$$

4. Che distanza ha la tangente ad una estremità del parametro della curva $9\,x^2 - 16\,y^2 = 144$ dall'altro estremo?

MÄHR.-TRÜBAU: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Quali radici comuni hanno le equazioni $x^4 + 4 = 0$ e $x^4 + 5\,x^3 + 10\,x^2 + 10\,x + 4 = 0$ e quali non comuni?

2. Una rendita temporaria di 5000 f., che scade per 20 anni (ogni volta alla fine dell'anno) si deve trasformare in una rendita perpetua, ponendo a base il $4\,{}^0/_0$, che scade alla fine dell'anno.

3. Un punto luminoso è distante di 25 *dm.* dal centro d'una sfera che ha il raggio di 15 *dm.*; qual parte della sua superficie viene da esso illuminata?

4. Qual punto della curva $4\,x^2 + 9\,y^2 = 36$ ha la minima distanza dalla retta $2\,y = x + 7$, e quale la massima?

BRAUNAU: *Ginnasio superiore dei Benedettini.* — 1. Per sostenere le spese di costruzione di un palazzo municipale una città deve assumere un prestito che verrà estinto in 22 anni con 9000 f. annui al 4 %. Quanto importa il prestito?

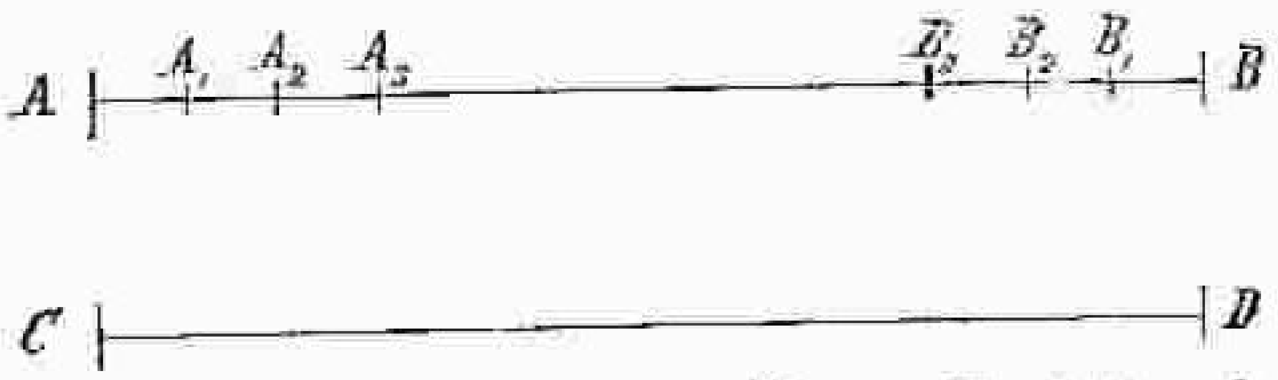
2. L'altura Elisabetta presso Braunau è alta 704 *m*; da quale distanza può essere veduta ancora la sua sommità, considerando la terra come sfera di raggio = 6377 *Km*?

3. Dati i vertici (5, -7), (1, 11), (-4, 13) di un triangolo calcolare le lunghezze delle mediane e gli angoli formati fra esse.

(Continua).

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Sur l'équivalence de deux portions de droites. — On dit que deux portions de droites AB et CD sont égales quand on peut les appliquer l'une sur l'autre de façon que C coïncide avec A et D avec B. Il n'en résulte pas que CD soit égal à BA; mais on peut le démontrer en s'appuyant sur le postulat suivant qui est d'ailleurs indispensable à tous les points de vue.



Postulat. *Si* A_1 *est un point d'une portion de droite* AB *et si on prend sur le prolongement de* AA_1 *une série de points* $A_2, A_3, \ldots$ *tels que*

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots$$

on finira par trouver un point A_n *qui ne soit plus sur la portion de droite* AB.

Ceci dit, supposons que CD soit égal à AB et que, en portant CD sur BA, de façon que le point C coïncide avec le point B, il arrive que le point D tombe en A_1 entre A et B. Alors, comme la portion de droite BA_1 est égal à la portion de droite AA_1B, il y aura entre B et A_1 un point B_1 tel que

$$A_1B_1 = BA_1 = AB.$$

Puis, A_1B_1 étant égal à AB, il y a entre A_1 et B_1 un point A_2 tel que $AA_1 = A_1A_2$, et ainsi de suite indéfiniment: ce qui est en contradiction avec le postulat ci-dessus. Donc, quand on porte CD sur BA de façon que C coïncide avec B, le point D ne peut pas tomber entre B et A; on voit de même qu'il ne peut tomber sur le prolongement de BA. Donc il tombe en A.

Le même raisonnement prouve qu'une portion de droite ne peut être égal à l'une de ses parties. La démonstration subsiste même si on n'admet pas la possibilité de la superposition de deux figures. L. Gérard.

Sul metodo dell'antica scuola giapponese per determinare l'area del cerchio. — Sia dato un circolo di diametro $AB = d$. Si divida AD in $2m$ parti uguali e pei punti di divisione, escluso il centro, si conducano delle corde perpendicolari ad AD. Chiamando queste corde C_1C_1', C_2C_2', C_3C_3', ... e D_1D_1', D_2D_2', D_3D_3', ... a cominciare da quelle più prossime al centro, secondo che si trovano dall'una o dall'altra parte di esso, e tirando D_1C_1, D_2C_2, D_3C_3, ... (parallele ad AB), se $2m = n$ e $\frac{d}{n} = a$, si ha subito

$$b_1^2 = \overline{C_1C_1'}^2 = \overline{D_1C_1'}^2 - \overline{C_1D_1}^2 = d^2 - a^2 = d^2 - \frac{1^2 \cdot d^2}{n^2}$$

$$b_2^2 = \overline{C_2C_2'}^2 = \overline{D_2C_2'}^2 - \overline{C_2D_2}^2 = d^2 - 2^2a^2 = d^2 - \frac{2^2 \cdot d^2}{n^2}$$

. . . .

quindi

$$b_1 = \left(d^2 - \frac{1^2 \cdot d^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = d - \frac{1^2 \cdot d}{2n^2} - \frac{1^4 \cdot d}{8n^4} - \frac{1^6 \cdot d}{16n^6} - \frac{1^8 \cdot 5 \cdot d}{128n^8} \cdots\cdots$$

$$b^2 = d - \frac{2^2 \cdot d}{2n^2} - \frac{2^4 \cdot d}{8n^4} - \frac{2^6 \cdot d}{16n^6} - \frac{2^8 \cdot 5 \cdot d}{128n^8} \cdots\cdots$$

. . . .

Posto $a \cdot b_1 = A_1$, $a \cdot b_2 = A_2$, ... è chiaro che la somma di A_1, A_2, A_3, ..., al crescere indefinitamente di n ha per limite l'area del circolo. Ma

$$\frac{A_1}{d^2} = \frac{b_1}{nd} = \frac{1}{n} - \frac{1^2}{2n^3} - \frac{1^4}{8n^5} - \frac{1^6}{16n^7} - \frac{1^8 \cdot 5}{128n^9} \cdots\cdots$$

$$\frac{A_2}{d^2} = \frac{b_2}{nd} = \frac{1}{n} - \frac{2^2}{2n^3} - \frac{2^4}{8n^5} - \frac{2^6}{16n^7} - \frac{2^8 \cdot 5}{128n^9} \cdots\cdots$$

. . . .

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots}{d^2} = \frac{n}{n} - \frac{\Sigma i^2}{2n^3} - \frac{\Sigma i^4}{8n^5} - \frac{\Sigma i^6}{16n^7} - \frac{5\Sigma i^8}{128n^9} \cdots\cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4n} - \frac{1}{12n^2}$$

$$- \frac{1}{5 \cdot 8} - \frac{1}{16n} - \frac{1}{24n^2} + \frac{1}{240n^4}$$

$$- \frac{1}{7 \cdot 16} - \frac{1}{32n} - \frac{1}{32n^2} - \frac{1}{96n^4} - \frac{1}{672n^6}$$

$$- \frac{5}{9 \cdot 128} - \frac{5}{256n} - \frac{5}{192n^2} + \frac{7}{384n^4} - \frac{7}{576n^6} + \frac{1}{768n^8} \cdots$$

. . . .

quindi

$$\frac{\text{Area circolo}}{d^2} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{5 \cdot 8} - \frac{1}{7 \cdot 16} - \frac{5}{9 \cdot 128} \cdots\cdots$$

Ora il primo termine del secondo membro è il numero originale, il 2° la prima differenza, il 3° la seconda differenza e così via.

La prima differenza si ottiene dal numero originale moltiplicando per $\frac{1}{2 \cdot 3}$, la seconda differenza proviene dalla prima moltiplicando per $\frac{3}{4\,.\,5}$ o $\frac{1\,.\,3}{4\,.\,5}$, la 3ª dalla 2ª moltiplicando per $\frac{5}{2\,.\,7}$ o $\frac{3\,.\,5}{6\,.\,7}$, la 4ª dalla 3ª moltiplicando per $\frac{5\,.\,7}{8\,.\,9}$ e così di seguito. Questi fattori sono dunque

$$\frac{1}{2\,.\,3},\quad \frac{1\,.\,3}{4\,.\,5},\quad \frac{3\,.\,5}{6\,.\,7},\quad \frac{5\,.\,7}{8\,.\,9},\ \ldots .$$

e la legge secondo la quale si succedono è evidente.

Facendo i calcoli si trova

$$\frac{\text{area circolo}}{d^2}\left(=\frac{\pi}{4}\right)=0{,}785398163397448309615660845 8\ (^*).$$

Prof. D. KIKUCHI.

2ª Nota sul problema del Malfatti. (*Continuazione*, v. pag. 156 del vol. X). — Si risolve ancora il sistema (4) esprimendo i seni e i coseni degli archi x, y, z in funzioni delle loro tangenti; ponendo $\frac{a_0}{d_0}=A_0$, $\frac{a_1}{d_1}=A_1$, $\frac{b_0}{d_0}=B_0$, $\frac{b_1}{d_1}=B_1$, $\frac{c_0}{d_0}=C_0$, $\frac{c_1}{d_1}=C_1$, il detto sistema diviene

$$(13)\qquad \begin{aligned} A_0+A_1\operatorname{tang}x\operatorname{tang}y&=\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2 x)(1+\operatorname{tang}^2 y)}\\ B_0+B_1\operatorname{tang}y\operatorname{tang}z&=\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2 y)(1+\operatorname{tang}^2 z)}\\ C_0+C_1\operatorname{tang}z\operatorname{tang}x&=\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2 z)(1+\operatorname{tang}^2 x)}\end{aligned}$$

Dalle due ultime si ricava linearmente $\operatorname{tang}z$ e $\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 z}$; onde eliminando $\operatorname{tang}z$ scaturisce la risultante sotto la forma

$$(D_0C_0-D_1B_0)^2=(B_0E_1-C_0E_0)^2+(E_0D_1-E_1D_0)^2;$$

dove i simboli significano $D_0=B_1\operatorname{tang}y$, $D_1=C_1\operatorname{tang}x$, $E_0=\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 y}$, $E_1=\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x}$. Siccome la precedente eguaglianza si scrive pure $(B_0C_0+D_0D_1-E_0E_1)^2=(B_0^2+D_0^2-E_0^2)(C_0^2+D_1^2-E_1^2)$, e la prima delle (13) è identica ad $E_0E_1=A_0+A_1\operatorname{tang}x\operatorname{tang}y$; con la sostituzione dei surriferiti valori conchiuderemo l'eliminata razionale

$$(14)\qquad \begin{gathered}[B_0C_0-A_0+(B_1C_1-A_1)\operatorname{tang}x\operatorname{tang}y]^2=\\ [B_0^2-1+(B_1^2-1)\operatorname{tang}^2 y]\,.\,[C_0^2-1+(C_1^2-1)\operatorname{tang}^2 x],\end{gathered}$$

che unita alla prima delle (13) offre il modo di calcolare le tangenti degli archi x, y.

A causa delle formule $A_0=\dfrac{\cos\left(\frac{p}{2}-a\right)}{\cos\frac{p}{2}}=\cos a+\operatorname{sen}a\operatorname{tang}\frac{p}{2}$, $A_1=$

(*) Abbiamo creduto utile riportare questa semplice valutazione dell'area del circolo, traducendola liberamente dal periodico giapponese: *Tōkyō Sūgaku Butsurigaku Kwai Kiji* (VII, 1895) e ci ripromettiamo di dare in seguito il sunto di un altro lavoro del Professor D. KIKUCHI sopra argomento affine. [N. d. R.].

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{p}{2}-a\right)}{\operatorname{sen}\frac{p}{2}} = \cos a - \operatorname{sen} a \cot\frac{p}{2}$$ e delle altre simili B_0, B_1, C_0, C_1, che si deducono da A_0, A_1 per lo scambio di a nelle rispettive lettere b, c troveremo le relazioni

$$\frac{A_1^2-1}{A_0^2-1}=\frac{B_1^2-1}{B_0^2-1}=\frac{C_1^2-1}{C_0^2-1}=-\cot^2\frac{p}{2},\ A_0^2-1=\frac{\operatorname{sen} a}{\cos^2\frac{p}{2}}\operatorname{sen}(p-a),$$

(15) $$B_0C_0-A_0=\frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\cos^2\frac{p}{2}}\operatorname{sen}(p-c),$$

$$B_1C_1-A_1=(B_0C_0-A_0)\cot^2\frac{p}{2},\ 1+A_0A_1=2\frac{\cos a}{\operatorname{sen} p}\operatorname{sen}(p-a).$$

In virtù di queste l'equazione (14) e la prima della (13) acquistano le forme simmetriche

$$(B_0C_0-A_0)^2\left(1+\cot^2\frac{p}{2}\operatorname{tang} x\operatorname{tang} y\right)^2=$$
$$(B_0^2-1)(C_0^2-1)\left(1-\cot^2\frac{p}{2}\operatorname{tang}^2 x\right)\left(1-\cot^2\frac{p}{2}\operatorname{tang}^2 y\right):$$
$$(\operatorname{tang} x+\operatorname{tang} y)^2=(A_0^2-1)\left(1-\operatorname{tang}^2 x\operatorname{tang}^2 y\cot^2\frac{p}{2}\right)+$$
$$2(A_0A_1+1)\operatorname{tang} x\operatorname{tang} y.$$

Assumendo le incognite ausiliarie $s=\operatorname{tang} x+\operatorname{tang} y$, $w=\operatorname{tang} x\operatorname{tang} y$ e sostituendo le surriferite espressioni dei coefficienti avremo il sistema

(16) $$\left(1+w\cot^2\frac{p}{2}\right)^2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}=\left(1+w\cot^2\frac{p}{2}\right)^2-s^2\cot^2\frac{p}{2},$$
$$s^2\cos^2\frac{p}{2}=\operatorname{sen} a\operatorname{sen}(p-a)\left[1+2w\cot a\cot\frac{p}{2}-w^2\cot^2\frac{p}{2}\right],$$

dalla prima equazione viene

(17) $$s=\left(\operatorname{tang}\frac{p}{2}+w\cot\frac{p}{2}\right)\cos\frac{A}{2},$$

e posto nella seconda questo valore di s ne discenderà la quadrica

$$w^2\left(\operatorname{sen} p\cos^2\frac{p}{2}+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\right)-$$
$$w\operatorname{tang}\frac{p}{2}(2\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\cos a-\operatorname{sen}^2 p)+\operatorname{tang}^2\frac{p}{2}\left(\operatorname{sen} p\operatorname{sen}^2\frac{p}{2}-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\right)=0;$$

da cui si traggono le radici

(18) $$w=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{p}{2}\cdot\frac{2\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\left(\cos a\pm\operatorname{sen}\frac{A}{2}\right)-\operatorname{sen}^2 p}{\operatorname{sen} p\cos^2\frac{p}{2}+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c}$$

Mediante i valori delle ausiliarie s e w si possono determinare le tangenti degli archi x, y, ω_1, ω_2, ρ_1, ρ_2 in funzione dei lati a, b, c; sibbene ci proporremo di calcolare il prodotto $\operatorname{tang}\rho_1 \operatorname{tang}\rho_2 = \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega_2 \dfrac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} p}$.

Infatti a motivo dell' eguaglianze $\omega_1 = \dfrac{p}{2} - x$, $\omega_2 = \dfrac{p}{2} - y$ troveremo successivamente

$$\operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega_2 = \left(\frac{\operatorname{sen}\frac{p}{2} - \cos\frac{p}{2}\operatorname{tang} x}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x}}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{p}{2} - \cos\frac{p}{2}\operatorname{tang} y}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 y}}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} p \left(\frac{\operatorname{tang}\frac{p}{2} + w\cot\frac{p}{2} - s}{A_0 + A_1 w}\right) = \operatorname{sen} p \left(\frac{\operatorname{tang}\frac{p}{2} + w\cot\frac{p}{2}}{A_0 + A_1 w}\right)\operatorname{sen}^2\frac{A}{4}$$

e per conseguenza

$$\operatorname{tang}\rho_1 \operatorname{tang}\rho_2 = \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}^2\frac{A}{4}\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{p}{2} + w\cot\frac{p}{2}}{A_0 + A_1 w}\right);$$

sostituendo i valori dei coefficienti A_0, A_1 e dalle radici w si ottiene

$$\operatorname{tang}\rho_1 \operatorname{tang}\rho_2 = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}^2\frac{A}{4}\left[\operatorname{tang}\frac{p}{2}\operatorname{sen} a + \cos a \pm \operatorname{sen}\frac{A}{2}\right]}{\operatorname{sen} p \cos(p-a) + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c\left[\operatorname{tang}\frac{p}{2}\left(1 \pm \cos a \operatorname{sen}\frac{A}{2}\right) \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen}\frac{A}{2}\right]} \tag{19}$$

Permutando fra loro le lettere a, b ed A con B ne conseguirà il prodotto $\operatorname{tang}\rho_2 \operatorname{tang}\rho_3$; similmente scambiando nella (19) le lettere a, c ed A con C si avrà $\operatorname{tang}\rho_3 \operatorname{tang}\rho_1$; da questi tre prodotti è facile ricavare le tangenti sferiche dei raggi ρ_1, ρ_2, ρ_3 in funzione dei lati a, b, c. Nel caso del triangolo equilatero le relazioni (1) e (2) si riducono alle $\operatorname{tang}\rho_1 = \operatorname{sen}\left(\dfrac{a}{2} - \omega_1\right)$ $= \dfrac{\operatorname{sen}\omega_1}{\sqrt{4\cos^2\frac{a}{2} - 1}}$, e ne discendono le formule

$$\begin{aligned}\cot\omega_1 &= \cot\frac{a}{2} + \frac{1+\cot^2\frac{a}{2}}{\sqrt{3\cot^2\frac{a}{2} - 1}} \\ \cot\rho_1 &= \sqrt{4\cot^2\frac{a}{2} + 2\cot\frac{a}{2}\sqrt{3\cot^2\frac{a}{2} - 1}}.\end{aligned} \tag{20}$$

(Continua).

G. Bellacchi.

Osservazioni circa la nota " Sulla simmetria in alcune dimostrazioni della geometria elementare ", (*V.* Anno X. p 163). — Il signor prof. Ciamberlini nella nota citata osserva *che in geometria accade di frequente che una stessa proprietà sia relativa a più enti geometrici, i quali entrano nello stesso modo a far parte dell' enunciato della proprietà stessa,* e che perciò la dimostrazione dovrebbe essere tale *che in essa gli enti stessi fossero egualmente considerati, mentre non di rado avviene che la dimostrazione dia la preferenza a qualcuno di essi; e ciò,* dice, *è artificioso.*

Convengo in massima nell' osservazione dell'egregio professore e trovo lodevole la modificazione fatta alla dimostrazione della propos. VI del libro XI di Euclide, perchè questa (senza richiedere speciali premesse, nè complicare la costruzione) dà alla dimostrazione la desiderata simmetria. Ma altrettanto, non credo possa dirsi degli altri esempi citati. Così per la dimostrazione del Teorema: *La somma degli angoli d'un triangolo è uguale a due retti,* l'A., in omaggio alla simmetria, conduce da un punto qualunque le parallele ai lati del $\triangle$ e fa osservare che i *sei* angoli così formati intorno al punto sono uguali a tre a tre agli angoli del triangolo per una stessa ragione, donde conclude la verità dell' enunciato ed aggiunge: *Se l'ordinaria dimostrazione si pone in confronto con questa, si vedrà subito quanto nella prima vi sia d' artificioso.* Ora tutto l'artificio sta in questo, che scegliendo per la sopradescritta costruzione invece di un punto qualunque *uno dei vertici* del triangolo, due delle tre parallele si confondono con due lati del triangolo, e perciò non resta che tracciare la parallela al lato opposto al vertice scelto, e ciò con *notevole semplicità nella costruzione.*

Pel Teorema fondamentale: *In un triangolo un lato è minore della somma degli altri due,* la dimostrazione dell'A., sebbene assai spedita, richiede che si sappia costruire la bisettrice di un angolo, od almeno che ne sia provata la esistenza, premessa non necessaria e che da buona parte dei trattatisti è data in seguito.

Pel Teorema: *In un triangolo la bisettrice di un angolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due,* la dimostrazione dell'A. richiede una speciale costruzione. Eccone una che (rispettando questa volta anche la simmetria) non ne esige alcuna:

Nel triangolo ABC sia AD la bisettrice dell' angolo in A. I triangoli ABD, ACD hanno la stessa altezza rispetto al vertice A perciò:

$$ABD : ACD = BD : CD$$

Gli stessi triangoli hanno altezze eguali rispetto al vertice D, perciò:

$$ABD : ACD = AB : AC$$

dalle quali proporzioni si ha appunto:

$$AB : AC = BD : DC.$$

Dimostrazione che vale anche per la bisettrice dell'angolo esterno.

Così pel Teorema relativo alla distanza di due rette sghembe l'A. alla solita costruzione sostituisce altre, più eleganti se si vuole, ma meno semplici.

Riassumendo mi sembra che l'A. alla eleganza della simmetria nella dimostrazione sacrifichi talvolta un po' troppo altre doti non meno apprezzabili, secondo il mio avviso, dal lato didattico, quali cioè che la costruzione sia ridotta allo stretto necessario, sì che la figura riesca semplice il più possibile, e che la dimostrazione richiegga il minimo numero di premesse.

Così per dare un nuovo esempio, si definisce come angolo di due rette sghembe, quello formato da due parallele alle prime condotte da un punto qualunque. Ora il guastare la simmetria non mi sembra motivo sufficiente, perchè ci si astenga dal prender il punto sopra una delle rette date, il che risparmia la costruzione di una parallela.

E tanto più mi sembra eccessiva la cura per la simmetria, in quanto che la preferenza data a qualche elemento nella dimostrazione è apparente più che altro: poichè ciascuno degli elementi di cui si parla può trovarsi nelle stesse condizioni in cui è posto uno di essi: il che del resto converrà far notare ai discenti nell'esporre la dimostrazione stessa.

G. Riboni.

Sulla deduzione della relazione $a^2 = b^2 + c^2$ dalle due relazioni $b = a \operatorname{sen} \beta$, $c = a \operatorname{sen} \gamma$. — Nei trattati di Trigonometria che ho letto, non escluso quello eccellentissimo del Prof. G. Pesci, ultimamente pubblicato coi tipi del solerte editore R. Giusti, si suole cadere in una petizione di principio che credo possa riuscire utile rilevare. Si dice che le tre relazioni $\beta + \gamma = 90^0$ (1), $b = a \operatorname{sen} \beta$ (2), $c = a \cos \beta = a \operatorname{sen} \gamma$ (*) (3) sono sufficienti a risolvere qualunque triangolo rettangolo, e ogni relazione che intercede fra gli elementi del medesimo, è conseguenza di quelle tre. E si deduce per es.: che $a^2 = b^2 + c^2$ (4) quadrando e sommando le (2) e (3), e osservando poi che $\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$. Ora questa formola nei detti trattati si dimostra facendo uso del teorema di Pitagora, esteso alle misure dei lati d'un triangolo; vi è dunque petizione di principio a dedurre la (4) dalle (2) e (3).

Potrebbe dalle (2) e (3) dedursi la (4) nel seguente modo. Calando dal vertice dell'angolo retto la perpendicolare sull'ipotenusa, dalle (2) e (3) si deduce subito che $a = b \operatorname{sen} \gamma + c \operatorname{sen} \beta$. In seguito si ha: $b^2 + c^2 = b \cdot b + c \cdot c = b \cdot a \operatorname{sen} \beta + c \cdot a \operatorname{sen} \gamma = a\,(b \operatorname{sen} \beta + c \operatorname{sen} \gamma) = a^2$.

S. Catania.

(*) a, b, c sono ordinatamente le misure dell'ipotenusa e dei cateti d'un triangolo rettangolo; β e γ le misure, in gradi, degli angoli opposti ai lati b e c.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
247*, 250, 251**, 255**, 256**, 261* e 262*

247*. *Un triangolo* A B C *è inscritto in un cerchio ed è tirato il diametro* A D.

1° *Le proiezioni di* A B, A C *su di un diametro perpendicolare ad* A D *sono rispettivamente eguali a due lati del triangolo* ortico *di* A B C.

2° *Se* B C *è parallela ad* A D, *la differenza dei quadrati dei due lati* A B, A C *del triangolo è maggiore di quella relativa ad ogni altro triangolo inscritto, col vertice in* A *e con base eguale a* B C.

3° *Se l'altezza su* B C *è uguale alla proiezione di* B C *sopra* A D, *i due lati* A B, A C *sono l'uno il segmento aureo dell' altro.* (G. Gallucci).

Dimostrazione del Sig. *G. Scorza*, studente a Pisa.

Indicheremo in seguito con A, B, C, a, b, c gli angoli e i lati del triangolo ABC, con H l'ortocentro, con H_a, H_b, H_c i piedi delle altezze, con R e con O il raggio e il centro del cerchio circoscritto.

1° Sia M il punto ove il diametro perpendicolare ad AD incontra AC. Dal triangolo isoscele AOC in cui $\angle AOC = 2B$ si ricava $\angle OAC = 90^0 - B$ e quindi dal triangolo rettangolo AOM segue che l'angolo OMA è uguale a B. Allora la proiezione di AC sul diametro perpendicolare ad AD sarà data da: $AC \cos CMO = b \cos B$. D'altronde dal triangolo $H_a H_c B$, simile al triangolo ABC, si ricava $\dfrac{H_a H_c}{H_a B} = \dfrac{b}{c}$ e dal triangolo rettangolo $AH_a B$ si ha pure: $H_a B = c \cos B$, dunque $H_a H_c = b \cos B$, ossia eguale alla proiezione di AC sul diametro perpendicolare ad AD. Similmente si dimostrerebbe che $H_a H_b$ è uguale alla proiezione di AB sullo stesso diametro.

2° Sia S il punto ove AD incontra BC: si ponga per comodità $\angle ASC = \varphi$ e si indichi con r la distanza OT del punto O dalla retta BC.

Sarà $ST = r \cot \varphi$, $OS = \dfrac{r}{\operatorname{sen} \varphi}$ e quindi

$$BS = \frac{a}{2} - r \cot \varphi, \quad CS = \frac{a}{2} + r \cot \varphi, \quad AS = R + \frac{r}{\operatorname{sen} \varphi};$$

inoltre

$$c^2 = \overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 + 2\, AS \,.\, SB \cos \varphi; \quad b^2 = \overline{AS}^2 + \overline{SC}^2 - 2\, AS \,.\, SC \cos \varphi$$

dunque

$$c^2 - b^2 = \overline{BS}^2 - \overline{CS}^2 + 2\, AS \times a \cos \varphi$$

ossia sostituendo a BS, CS ed AS i loro valori:

$$c^2 - b^2 = 2\, Ra \cos \varphi.$$

Da ciò segue che la differenza $c^2 - b^2$ è massima quando è massimo $\cos \varphi$, rimanendo costanti a ed R, ossia quando $\varphi = 0$ e la retta BC è parallela ad AD.

3° L'angolo φ che ci ha servito precedentemente può essere determinato mediante A, B, C osservando che nel triangolo ASC l'angolo $SAC = 90^0 - B$ e quindi $\varphi = 90^0 + B - C$. Allora la proiezione l di BC su AD sarà data da: $l = a \cos \varphi = a \operatorname{sen}(C - B)$.

L'altezza calata da A su BC è data da

$$AH_a = a\,\frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = a\,\frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}(B + C)},$$

dunque dal porre $l = AH_a$ segue $\operatorname{sen}(C - B)\operatorname{sen}(B + C) = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$ ossia $\operatorname{sen}^2 C - \operatorname{sen}^2 B = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$, da cui dividendo per $\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$, sostituendo ai rapporti $\dfrac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$ e $\dfrac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$ gli equivalenti $\dfrac{c}{b}$ e $\dfrac{b}{c}$ e riducendo si ottiene $c^2 - b^2 = bc$ la quale uguaglianza scritta nel modo seguente

$$b^2 = c(c - b)$$

ci indica appunto che AC è il segmento aureo di AB.

Possiamo osservare che in quest'ultima ipotesi si hanno anche i seguenti risultati:

4° *La distanza dei piedi delle bisettrici dell'angolo* A *è uguale a* 2a.

Difatti tale distanza è data da

$$\frac{ab}{c + b} + \frac{ab}{c - b} = \frac{2abc}{c^2 - b^2} = 2a$$

poichè nel caso nostro $c^2 - b^2 = bc$.

5° *Il segmento intercettato sul lato* a *dal cerchio dei nove punti è dato da* $\dfrac{bc}{2a}$ *e quindi se* AN *è la mediana che parte dal vertice* A *si ha* $\operatorname{tg} ANC = 2 \operatorname{sen} A$.

Difatti il segmento intercettato dal cerchio dei nove punti sul lato a è la proiezione su questo lato della mediana AN, e si ha quindi, come è facile verificare, $NH_a = \dfrac{c^2 - b^2}{2a} = \dfrac{bc}{2a}$.

Da qui segue:

$$\operatorname{tg} ANC = \frac{AH_a}{NH_a} = \frac{2ac \operatorname{sen} B}{bc} = 2 \operatorname{sen} A.$$

250. *Dato il triangolo* ABC ($= \triangle$) *e il punto interno* M, *si tirino per i vertici le trasversali* AM, BM, CM *ad incontrare i lati opposti in* A′, B′, C′ *e si costruiscano i coniugati armonici* M_a, M_b, M_c (*) *di* M *rispetto ad* A *e* A′, B *e* B′, C *e* C′. *Posto* BA′ : A′C = m, CB′ : B′A = n, AC′ : C′B = p, *dimostrare che l'area del triangolo* $M_a M_b M_c$ *è data da*

$$4\triangle : \left[\left(m + 1 - \frac{1}{p}\right)\left(n + 1 - \frac{1}{m}\right)\left(p + 1 - \frac{1}{n}\right)\right].$$

(A. Lugli).

(*) *Punti armonicamente associati ad* M *rispetto al triangolo* A B C, che supponiamo cadano esternamente ad esso entro gli angoli CAB, ABC, BCA.

Dimostrazione del Sig. *G. Sforza*, studente nella R. Università di Pisa.

Anzitutto noteremo che i punti M_a, M_b, M_c sono a due a due allineati con C, A, B rispettivamente, poichè dall'essere per es. armoniche le due forme $(B M B' M_b)$, $(C M C' M_c)$ si deduce che le due rette $A M_b$, $A M_c$, separano armonicamente AM da AB e AC: dunque AM_b, AM_c sono per diritto.

Poi indicheremo per brevità con a, b, c, A, B, C i lati e gli angoli del triangolo ABC e con φ e ψ gli angoli $M_b A C$ ed $A C M_b$.

Allora dall'essere armonico il fascio di rette $A(B, M, C, M_b)$, si deduce $\dfrac{\text{sen } BAM}{\text{sen } MAC} = \dfrac{\text{sen } BAM_b}{\text{sen } CAM_b} = \dfrac{\text{sen }(A+\varphi)}{\text{sen } \varphi}$ ossia, poichè dai triangoli BAA' ed $A'AC$ aventi la medesima altezza e le basi nel rapporto di $m:1$ risulta $\dfrac{\text{sen } BAM}{\text{sen } MAC} = \dfrac{mb}{c}$, si ha anche $\dfrac{\text{sen }(A+\varphi)}{\text{sen } \varphi} = \text{sen } A \cot \varphi + \cos A = \dfrac{mb}{c}$.

Dall'ultima eguaglianza segue evidentemente $\text{tg } \varphi = \dfrac{c \text{ sen } A}{mb - c \cos A}$ e dalla considerazione del fascio armonico $C(M_b A M B)$ si ricaverebbe in un modo analogo

$$\text{tg } \psi = \frac{ap \text{ sen } C}{b - ap \cos C}.$$

Note le tangenti dei due angoli φ e ψ si trova l'area del triangolo AM_bC adoperando la formula

$$\text{area } AM_bC = \frac{b^2}{2} \frac{\text{tg } \varphi \text{ tg } \psi}{\text{tg } \varphi + \text{tg } \psi}$$

e sostituendovi i valori ormai conosciuti di $\text{tg } \varphi$ e $\text{tg } \psi$. Si trova così:

$$\text{area } AM_bC = \frac{p}{2} \frac{ab^2c \text{ sen } A \text{ sen } C}{bc \text{ sen } A - pac \text{ sen } B + mpab \text{ sen } C}$$

ossia per essere $bc \text{ sen } A = ac \text{ sen } B = ab \text{ sen } C = 2\triangle$ e quindi $4\triangle^2 = ab^2c \text{ sen } A \text{ sen } C$, si trova finalmente

$$\text{area } AM_bC = \frac{p\triangle}{1 - p + mp}.$$

Seguendo una via affatto analoga si troverebbe che le aree dei triangoli CM_aB e BM_cA sono date rispettivamente dalle espressioni:

$$\frac{n\triangle}{1 - n + np}; \quad \frac{m\triangle}{1 - m + mn}$$

quindi l'area richiesta del triangolo $M_a M_b M_c$ sarà data da

$$\triangle\left(1 + \frac{p}{1 - p + mp} + \frac{m}{1 - m + mn} + \frac{n}{1 - n + np}\right).$$

Facendo le convenienti riduzioni nell'espressione contenuta fra le parentesi e servendosi della relazione:

$$mnp = 1$$

che risulta dall'applicare il teorema di Ceva alle rette concorrenti AA', BB', CC' si trova

$$M_a M_b M_c = 4\triangle : \left[(1-p+mp)(1-m+mn)(1-n+np)\right]$$

o, dividendo l'espressione contenuta fra parentesi per il prodotto $mnp = 1$,

$$M_a M_b M_c = 4\triangle : \left[\left(m-1+\frac{1}{p}\right)\left(n-1+\frac{1}{m}\right)\left(p-1+\frac{1}{n}\right)\right].$$

Questa espressione è alquanto differente da quella dell'enunciato, ma si verifica senza pena che egli è appunto

$$\left(m-1+\frac{1}{p}\right)\left(n-1+\frac{1}{m}\right)\left(p-1+\frac{1}{n}\right) =$$
$$\left(m+1-\frac{1}{p}\right)\left(n+1-\frac{1}{m}\right)\left(p+1-\frac{1}{m}\right)$$

servendosi della relazione

$$mnp = 1.$$

Dimostrazione del Sig. Prof. *G. Mola* a Campobasso.

Determinerò primieramente l'area del triangolo i di cui lati sono dati in coordinate baricentriche; passando poi alla soluzione della quistione e di quella che ha il n. **249'**.

1. Siano i punti X, X', X'', riferiti ai vertici del triangolo ABC, dati dalle equipollenze (*):

$$\begin{aligned} l\,AX + m\,BX + n\,CX &= 0 \\ l'AX' + m'BX' + n'CX' &= 0 \\ l''AX'' + m''BX'' + n''CX'' &= 0. \end{aligned}$$

Dalle due prime, ponendo $BA + AX$, $CA + AX$, $BA + AX'$, $CA + AX'$, rispettivamente in luogo di BX, CX, BX' e CX', si ha

$$\begin{aligned} (l+m+n)\,AX &= m\,AB + n\,AC, \\ (l'+m'+n')\,AX' &= m'AB + n'AC. \end{aligned}$$

Da quest'ultima, moltiplicata per $l+m+n=s$, sottraggo l'antecedente, moltiplicata per $l'+m'+n'=s'$; ed ho

$$XX' = \frac{(m's - ms')\,AB + (n's - ns')\,AC}{ss'}.$$

Identicamente operando, si ha pure

$$XX'' = \frac{(m''s - ms'')\,AB + (n''s - ns'')\,AC}{ss''}.$$

Moltiplico, membro a membro, la prima di queste due equipollenze per la coniugata (**) dell'altra, e la seconda per la coniugata della prima, e poi sot-

(*) Bellavitis: *Esposizione del metodo delle equipollenze.*
(**) Idem, n. 45.

traggo i prodotti; si ha:

$$XX' . cjXX'' - cjXX' . XX'' =$$
$$\frac{[(m's-ms')(n''s-ns'')-(m''s-ms'')(n's-ns')](AB . cjAC - cjAB . AC)}{s^2 s' s''}.$$

Il fattore algebrico del secondo membro è uguale a

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{s s' s''}.$$

E poichè, essendo i l'unità immaginaria, (*)

$$\frac{i}{4}(AB . cjAC - cjAB . AC) = ABC \ (= \triangle)$$
$$\frac{i}{4}(XX' . cjXX'' - cjXX' . XX'') = XX'X'' \ (= \triangle'),$$

si ottiene

$$\triangle' = \begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix} \cdot \frac{\triangle}{ss's''} \ (**).$$

2. Applichiamo questa formola al caso della quistione che domanda l'area del triangolo che ha per vertici i punti M_a, M_b, M_c, armonicamente associati, per rispetto al $\triangle ABC$, al punto M; il quale è comune alle trasversali menate dai vertici di ABC ai lati opposti, nei punti A', B', C' dati dalle relazioni

$$BA' + mCA' = 0, \quad CB' + nAB' = 0, \quad AC' + pBC' = 0.$$

Facciamo $p_1 : n_1 = m$, $m_1 : p_1 = n$, $n_1 : m_1 = p$; l'equipollenza del punto M sarà

$$m_1 AM + n_1 BM + p_1 CM = 0,$$

e quelle dei punti M_a, M_b, M_c saranno rispettivamente

$$\begin{aligned} -m_1 AM_a + n_1 BM_a + p_1 CM_a &= 0, \\ m_1 AM_b + n_1 BM_b + p_1 CM_b &= 0, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad [1] \\ m_1 AM_c + n_1 BM_c - p_1 CM_c &= 0. \end{aligned}$$

Onde l'area del triangolo $M_a M_b M_c$ $(= \triangle')$ sarà data da

$$\triangle' = \begin{vmatrix} -m_1 & n_1 & p_1 \\ m_1 & -n_1 & p_1 \\ m_1 & n_1 & -p_1 \end{vmatrix} \cdot \frac{\triangle}{(-m_1+n_1+p_1)(m_1-n_1+p_1)(m_1+n_1-p_1)}.$$

È evidente che il determinante è uguale a $4 m_1 n_1 p_1$; e però,

$$\triangle' = 4\triangle : \left[\frac{-m_1+n_1+p_1}{n_1} \cdot \frac{m_1-n_1+p_1}{p_1} \cdot \frac{m_1+n_1-p_1}{m_1}\right]$$

(*) Bellavitis: *Esposizione del metodo delle equipollenze*, n. 57.

(**) Si possono derivare da questa formola quelle [7] e [8] che sono nel pregevole articolo del Prof. A. Lugli: *Alcuni teoremi di geometria*. V. Vol. X, pp. 6 e 7.

da cui il valore domandato, in funzione di m, n, p,

$$\triangle' = 4\triangle : \left[\left(m+1-\frac{1}{p}\right)\left(n+1-\frac{1}{m}\right)\left(p+1-\frac{1}{n}\right)\right].$$

3. Se invece delle [1] si avessero

$$\begin{aligned} -\operatorname{sen} A \,.\, AI' + \operatorname{sen} B \,.\, BI' + \operatorname{sen} C \,.\, CI' &= 0, \\ \operatorname{sen} A \,.\, AI'' - \operatorname{sen} B \,.\, BI'' + \operatorname{sen} C \,.\, CI'' &= 0, \\ \operatorname{sen} A \,.\, AI''' + \operatorname{sen} B \,.\, BI''' + \operatorname{sen} C \,.\, CI''' &= 0 \end{aligned}$$

che sono le equipollenze dei centri I', I'', I''' dei circoli ex-inscritti al $\triangle ABC$, l'area del $\triangle I' I'' I'''$ avrebbe per valore

$$\frac{4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \,.\, \triangle}{(-\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)(\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B - \operatorname{sen} C)} =$$

$$\frac{\triangle}{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}} = \frac{pabc}{2\triangle} = 2pR,$$

(SERRET: *Trigonometria*, nn. 121, 122).

Evidentemente questo è un caso particolare dell'altro.

251$^{\text{ss}}$. *Se* r *è un intero arbitrario non negativo, e* n *un intero pure arbitrario ma superiore a* r, *si avrà*

$$\binom{n}{0}\binom{n}{r} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{r} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{r} - \ldots\ldots + (-1)^{n-r}\binom{n}{n-r}\binom{r}{r} = 0.$$

(G. NONNI).

Dimostrazione del Sig. Prof *E. Nannei* a Bari (*).

Dalla nota formola

$$\binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \ldots\ldots + (-1)^k \binom{k}{k} = 0$$

ponendo $k = n - r$ e sostituendo ai simboli i valori corrispondenti, risulta

$$1 - \frac{n-r}{\lfloor 1} + \frac{(n-r)(n-r-1)}{\lfloor 2} - \ldots + (-1)^{n-r} \frac{(n-r)(n-r-1)\ldots 2 \,.\, 1}{\lfloor n-r} = 0$$

e moltiplicando per $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}$:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r} - \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)(n-r)}{\lfloor 1 \lfloor r} + \ldots \\ + (-1)^{n-r} \frac{n(n-1)\ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{\lfloor n-r \lfloor r} = 0. \end{aligned} \qquad [1]$$

(*) Un'altra dimostrazione pervenne dal Sig. F. CECCHERINI studente della R. Università di Roma.

Ora poichè si ha

$$\frac{n(n-1)\dots(n-r-s+1)}{\lfloor s \lfloor r} = \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{\lfloor s} \cdot$$
$$\frac{(n-s)\dots(n-r-s+1)}{\lfloor r} = \binom{n}{s}\binom{n-s}{r},$$

la [1] può scriversi

$$\binom{n}{0}\binom{n}{r} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{r} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{r} - \dots + (-1)^{n-r}\binom{r}{n-r}\binom{r}{r} = 0,$$

che è la relazione da dimostrare.

Si può osservare poi che

$$\binom{n}{s}\binom{n-s}{r} = \frac{n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{\lfloor s \lfloor r \lfloor n-r-s} = \frac{n(n-1)\dots(s+1)}{\lfloor r \lfloor n-r-s} =$$
$$\frac{n(n-1)\dots(r+s+1)}{\lfloor n-r-s} \cdot \frac{(r+s)\dots(s+1)}{\lfloor r} = \binom{n}{n-r-s}\binom{r+s}{r};$$

e perciò due termini dell' espressione data, equidistanti dagli estremi, sono eguali: sicchè nel caso che il numero dei termini sia pari, la dimostrazione è ovvia.

255**. *Dimostrare che per due triangoli sferici polari sussiste la seguente proprietà: I tre circoli massimi passanti per le coppie di vertici corrispondenti (cioè tali che uno sia polo del lato opposto dell' altro) s' incontrano negli estremi di uno stesso diametro, mentre le tre coppie di lati corrispondenti s' incontrano in punti di uno stesso circolo massimo, il cui piano risulta perpendicolare al suddetto diametro.* (*) (M. Chini).

Dimostrazione del Sig. *S. Resta*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari.

Siano ABC, $A'B'C'$ due triangoli sferici polari, e sia O il centro della sfera alla quale appartengono. Essendo OA' perpendicolare al piano BOC, l'arco di cerchio massimo passante per A ed A' sarà perpendicolare al lato BC. Similmente avendosi $OB' \perp COA$ e $OC' \perp AOB$, risulta che gli archi di cerchio massimo BB', CC' sono perpendicolari a CA, AB, quindi perchè in ogni triangolo sferico gli archi condotti dai vertici perpendicolarmente ai lati opposti, passano per lo stesso punto, gli archi considerati passeranno per lo stesso punto, e sia H. Ma AA', BB', CC' sono anche i circoli massimi delle coppie di vertici corrispondenti A, A'; B, B'; C, C' dei due triangoli polari, sicchè la prima proprietà enunciata è dimostrata.

Siano ora H', H'', H''' i punti d' incontro delle coppie di lati corrispondenti BC, $B'C'$; CA, $C'A'$; AB, $A'B'$. Poichè OA' è perpendicolare al piano BOC ed OA a $B'OC'$ (essendo i triangoli ABC, $A'B'C'$ reciproci), il piano AOA' sarà perpendicolare tanto a BOC che a $B'OC'$, quindi alla loro intersezione OH', donde si deduce $OH \perp OH'$. In modo analogo si dimostra che anche

(*) Questa proprietà si trova anche enunciata in Baltzer: *Stereometria*: § 4, 15. [N. d. R.]

OH'', OH''' sono perpendicolari ad OH. I tre punti H', H'', H''', come le rette OH', OH'', OH''' si trovano dunque in uno stesso piano il quale è perpendicolare ad OH, c. v. d..

Dimostrazione del Sig. Prof. *V. Retali* a Milano.

Se due triangoli (ABC) (abc), $(a'b'c')$ $(A'B'C')$ situati in un medesimo piano σ sono reciproci rispetto a una conica C^2, posta nel piano σ, essi sono omologici: le tre rette

$$|AA'|,\ |BB'|,\ |CC'|$$

concorrono in un punto P; i tre punti

$$(aa'),\ (bb')\ (cc')$$

giacciono sulla polare p' di P rispetto a C^2.

Se due triedri concentrici $S(\alpha\beta\gamma)$ (abc), $S(a'b'c')$ $(\alpha'\beta'\gamma')$ sono reciproci rispetto a un cono quadrico Γ^2 di vertice S, le tre rette

$$|\alpha\alpha'|,\ |\beta\beta'|,\ |\gamma\gamma'|$$

giacciono in un piano ω e i tre piani

$$(aa'),\ (bb'),\ (cc')$$

passano per la polare p' di ω rispetto a Γ^2.

Assumendo nel teorema a destra per Γ^2 il cono isotropo (*) uscente da S e segando con una sfera arbitraria di centro S otteniamo il teorema proposto.

256**. *Mostrare che risolvendo le equazioni*

$$\xi' = \xi - \frac{2u}{u^2+v^2+w^2}(u\xi+v\eta+w\zeta+1)$$
$$\eta' = \eta - \frac{2v}{u^2+v^2+w^2}(u\xi+v\eta+w\zeta+1)$$
$$\zeta' = \zeta - \frac{2w}{u^2+v^2+w^2}(u\xi+v\eta+w\zeta+1),$$

rispetto alle u, v, w, *si ha*

$$u = -\frac{a}{a\xi+b\eta+c\zeta+1} = \frac{2(\xi'-\xi)}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)}$$
$$v = -\frac{b}{a\xi+b\eta+c\zeta+1} = \frac{2(\eta'-\eta)}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)}$$
$$w = -\frac{c}{a\xi+b\eta+c\zeta+1} = \frac{2(\zeta'-\zeta)}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)},$$

ove si è messo, per brevità,

$$a = 2(\xi-\xi')\delta^{-2},\quad b = 2(\eta-\eta')\delta^{-2},\quad c = 2(\zeta-\zeta')\delta^{-2}$$
$$\delta^2 = (\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2.$$

(A. Del Re).

(*) Il cono che proietta da S il cerchio immaginario all' infinito.

Risoluzione del Sig. *G. Vitali*, studente nella R. Università di Bologna.

Le equazioni date possono essere surrogate dalle seguenti

$$\frac{2u}{u^2+v^2+w^2}(u\xi+v\eta+w\zeta+1)=\xi-\xi'$$

$$\frac{2v}{u^2+v^2+w^2}(u\xi+v\eta+w\zeta+1)=\eta-\eta'$$

$$\frac{2w}{u^2+v^2+w^2}(u\xi+v\eta+w\zeta+1)=\zeta-\zeta'.$$

Ora dividendo la seconda e la terza per la prima di queste equazioni si ha

$$\frac{v}{u}=\frac{\eta-\eta'}{\xi-\xi'},\quad \frac{w}{u}=\frac{\zeta-\zeta'}{\xi-\xi'}$$

e sostituendo i valori di v e di w che risultano da queste ultime due relazioni nella prima equazione si ricava

$$\frac{2u}{u^2+u^2\frac{(\eta-\eta')^2}{(\xi-\xi')^2}+u^2\frac{(\zeta-\zeta')^2}{(\xi-\xi')^2}}\left(u\xi+u\eta\frac{\eta-\eta'}{\xi-\xi'}+u\zeta\frac{\zeta-\zeta'}{\xi-\xi'}+1\right)=\xi-\xi'$$

$$\frac{2}{u[(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2]}[u\xi(\xi-\xi')+u\eta(\eta-\eta')+u\zeta(\zeta-\zeta')+(\xi-\xi')]=1,$$

$$\frac{2u\xi(\xi-\xi')+2u\eta(\eta-\eta')+2u\zeta(\zeta-\zeta')+2(\xi-\xi')}{u\delta^2}=1,$$

$$a\xi+b\eta+c\zeta+\frac{a}{u}=1$$

e finalmente

$$u=-\frac{a}{a\xi+b\eta+c\zeta-1}.$$

Di qui sostituendo convenientemente si può avere

$$u=\frac{2(\xi'-\xi)}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)}.$$

In modo analogo si possono determinare i valori di v e di w. (*)

261*. *Eliminare* a *e* δ *dalle tre equazioni*

$$s_1=\frac{a}{\tan(\delta+\varphi_1)},\quad s_2=\frac{a}{\tan(\delta+\varphi_2)},\quad s_3=\frac{a}{\tan(\delta+\varphi_3)}.$$

(G. Pesci).

Risoluzione del Sig. *E. Zella*, alunno del R. Istituto tecnico di Piacenza.

Osservando che $\varphi_1-\varphi_2=(\delta+\varphi_1)-(\delta+\varphi_2)$, segue

(*) Soluzioni della quistione pervennero anche dal Sig. *V. Columbo* già studente nella R. Università di Napoli e dai Sigg. Proff. *E. Nannei* e *V. Retali*.

$$\tan(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\tan(\delta + \varphi_1) - \tan(\delta + \varphi_2)}{1 + \tan(\delta + \varphi_1)\tan(\delta + \varphi_2)} = \frac{a(s_2 - s_1)}{s_1 s_2 + a^2},$$

a motivo di $\tan(\delta + \varphi_1) = \dfrac{a}{s_1}$, $\tan(\delta + \varphi_2) = \dfrac{a}{s_2}$, $\tan(\delta + \varphi_3) = \dfrac{a}{s_3}$.

Analogamente si trova

$$\tan(\varphi_2 - \varphi_3) = \frac{a(s_3 - s_2)}{s_2 s_3 + a^2}, \quad \tan(\varphi_3 - \varphi_1) = \frac{a(s_1 - s_3)}{s_3 s_1 + a^2}.$$

Ponendo per brevità $\tan(\varphi_1 - \varphi_2) = m$, $\tan(\varphi_2 - \varphi_3) = n$, $\tan(\varphi_3 - \varphi_1) = p$, le tre relazioni precedenti si possono scrivere

$$\begin{aligned} a(s_2 - s_1) &= m(s_1 s_2 + a^2) \\ a(s_3 - s_2) &= n(s_2 s_3 + a^2) \\ a(s_1 - s_3) &= p(s_3 s_1 + a^2). \end{aligned}$$

Eliminando primieramente a^2 dalla prima e seconda, poi dalla seconda e terza di queste eguaglianze, si ricava con facilità

$$\begin{aligned} a\left\{ n(s_2 - s_1) - m(s_3 - s_2) \right\} &= mn\, s_2 (s_1 - s_3), \\ a\left\{ p(s_3 - s_2) - n(s_1 - s_3) \right\} &= np\, s_3 (s_2 - s_1), \end{aligned}$$

ed ora dividendo membro a membro, si ha

$$\frac{n(s_2 - s_1) - m(s_3 - s_2)}{p(s_3 - s_2) - n(s_1 - s_3)} = \frac{m}{p} \cdot \frac{s_2(s_1 - s_3)}{s_3(s_2 - s_1)},$$

che è la relazione cercata.

Risoluzione del Sig. Prof. *V. Retali* a Milano.

Dalle

$$\begin{aligned} s_1 : s_2 &= \operatorname{tg}(\delta + \varphi_2) : \operatorname{tg}(\delta + \varphi_1) \\ s_2 + s_3 &= \operatorname{tg}(\delta + \varphi_3) : \operatorname{tg}(\delta + \varphi_2) \end{aligned}$$

abbiamo

$$\operatorname{sen}(2\delta + \varphi_1 + \varphi_2) = \frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2} \cdot \operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) = h_{12}$$

$$\operatorname{sen}(2\delta + \varphi_2 + \varphi_3) = \frac{s_2 + s_3}{s_2 - s_3} \cdot \operatorname{sen}(\varphi_3 - \varphi_2) = h_{23},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\delta \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos 2\delta \,.\, \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) &= h_{12} \\ \operatorname{sen} 2\delta \cos(\varphi_2 + \varphi_3) + \cos 2\delta \,.\, \operatorname{sen}(\varphi_2 + \varphi_3) &= h_{23}; \end{aligned}$$

le quali, risolute rispetto a sen 2δ e cos 2δ, dànno:

$$\operatorname{sen} 2\delta = \begin{vmatrix} h_{12} & \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) \\ h_{23} & \operatorname{sen}(\varphi_2 + \varphi_3) \end{vmatrix} : \operatorname{sen}(\varphi_3 - \varphi_1)$$

$$\cos 2\delta = \begin{vmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & h_{12} \\ \cos(\varphi_2 + \varphi_3) & h_{13} \end{vmatrix} : \operatorname{sen}(\varphi_3 - \varphi_1);$$

quadrando e sommando membro a membro si trova, dopo qualche riduzione,

$$\begin{gathered}(s_1 + s_2)^2 (s_2 - s_3)^2 \operatorname{sen}^2 (\varphi_1 - \varphi_2) + \\ (s_1 - s_2)^2 (s_2 + s_3)^2 \operatorname{sen}^2 (\varphi_2 - \varphi_3) - \\ (s_1 - s_2)^2 (s_2 - s_3)^2 \operatorname{sen}^2 (\varphi_1 - \varphi_1) = \\ 2 (s_1^2 - s_2^2) (s_2^2 - s_3^2) \operatorname{sen} (\varphi_1 - \varphi_2) \operatorname{sen} (\varphi_2 - \varphi_3) \cos (\varphi_3 - \varphi_1).\ (^*)\end{gathered}$$

262*. *Trovare col solo compasso il raggio del cerchio inscritto in un triangolo rettangolo.* (G. Candido).

Risoluzione dei Sigg. *S. Resta*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari, *E. Biscaldi* e *F. Marzoni*, alunni del R. Liceo di Novara. (**)

Sia ABC un triangolo, rettangolo in A. Con centro in B e raggio BA si tagli l'ipotenusa BC in D, quindi con centro C e raggio CD, si tagli AC in E. Poichè la differenza di due lati d'un triangolo è minore del terzo E cadrà nell'interno del cateto AC.

Ora essendo AE, per costruzione, la differenza fra la somma dei cateti e l'ipotenusa, in seguito al fatto che la somma dei diametri del cerchio inscritto e circoscritto in un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei cateti, sarà AE uguale al diametro del cerchio inscritto nel triangolo rettangolo ABC. La quistione, come vedesi, è ridotta a dividere per metà col solo compasso un segmento dato.

Una soluzione di quest'ultimo problema (V. Mascheroni: *Geometria del compasso*), è la seguente: Sia AB il segmento da dividersi per metà. Si trovi il punto simmetrico C di A rispetto a B e con centri A e C e raggi rispettivamente eguali ad AB e AC si descrivano due cerchi che si tagliano in L ed M. Poi con centri in questi ultimi punti e raggio AB si descrivano due altri cerchi segantisi in K, fra A e B, questo punto K è il centro del segmento AB.

QUISTIONI PROPOSTE (***)

295*. Di un triangolo isoscele sono dati il perimetro $2p$ e l'altezza h; determinare i lati e gli angoli del triangolo.

Condizione di possibilità del problema e caso in cui il triangolo diviene equilatero.

(*) Risposte alla quistione pervennero anche dai Sigg. *E. Biscaldi* (R. Liceo di Novara) e *G. Gallucci* (R. Università di Napoli).

(**) Buone soluzioni pervennero anche dai Sigg. *G. Santoro* (R. Liceo Maddaloni) e *F. Squassi* (R. Ist. tec. Piacenza).

(***) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

296*. Dato un rettangolo R di lati $2a$ e $2b$, si vuole costruirne un altro R', interno ad R, coi lati paralleli e ad eguale distanza da quelli di R, tale che la sua area sia in un rapporto dato q $(q < 1)$ con quella del rettangolo dato. Determinare la comune distanza dei lati paralleli dei due rettangoli, esaminando i casi più notevoli, e discutere i risultati.

297*. Inscrivere un rettangolo in un dato cerchio di raggio R tale che facendo ruotare il cerchio attorno al diametro parallelo ad un lato del rettangolo, il cilindro che si genera abbia la superficie totale in un rapporto dato q colla superficie della sfera di raggio R.

Condizione di possibilità del problema, e caso speciale di $q = \frac{1}{2}$.

298*. Scomporre un numero N in tre parti x, y, z in progressione aritmetica, e tali che la somma dei loro cubi sia uguale al cubo di un numero dato P; e trovare le condizioni perchè i tre numeri x, y, z risultino reali e positivi (*).

299**. Determinare un triangolo isoscele dati il perimetro $2p$ e l'altezza h relativa a ciascuno dei lati eguali. Qual'è il minimo valore del rapporto $2p$ e quali sono gli angoli corrispondenti?

G. Bellacchi.

300**. Dati il perimetro $2p$ di un triangolo sferico isoscele e l'altezza h dei lati eguali, sono questi definiti da un'equazione biquadratica; riducibile al 2^0 grado quando sia $p = \frac{\pi}{2}$.

G. Bellacchi.

301*. Dati due cerchi O, O' eguali e che si tagliano ortogonalmente, se per uno M dei punti di loro intersezione si conduce una secante comune AMA' e per A ed A' due corde AB, $A'B'$ parallele fra loro, in una direzione qualsiasi, dimostrare che la somma $\overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2$ è costante.

F. Celestri.

302*. Calcolare gli angoli di un triangolo rettangolo sapendo che la metà dell'ipotenusa è media proporzionale fra la somma dei cateti e il raggio del cerchio inscritto.

G. Vitali.

(*) Le quistioni 295*, 296*, 297* e 298*, salvo una forma più succinta per le prime tre, non sono altro che i temi dati per la licenza dagli Istituti tecnici nella Sezione *Fisico-matematica*, le prime due nel luglio, le altre nell'ottobre 1895.

RIVISTE E NOTIZIE BIBLIOGRAFICHE

Didaktik und Methodik des Rechen -, Mathematik - und Physik - Unterrichts von Dott. Max Simon, *Professor am Lyzeum in Strassburg, und Dott.* J. Kiessling, *Professor an der Gelehrtenschule des Johannenms in Hamburg. Sonderausgabe aus Dott.* A. Baumeister's *« Handbuch der Erziehungs - und Unterrichtslehre für höhere Schulen.* — München, 1895, pp. 128 + 73.

Le ricerche didattiche non sono di gusto dei matematici italiani; è vano negarlo come riuscirebbe probabilmente infruttuoso qualunque sforzo inteso a far germogliare un sentimento al quale sembra refrattario chi nacque e crebbe sotto il bel cielo d' Italia; il genio di un popolo non si muta per volontà umana e d' altronde il popol nostro ha già un corredo di qualità sufficiente a compensarlo dell' assenza di entusiasmo per le investigazioni di ordine didascalico. Invece quello che importa è di colmare la conseguente lacuna della nostra letteratura matematica ricorrendo alle letterature straniere, affinchè noi non siamo tacciati di sprezzare quello che ignoriamo. Ed è appunto ad impedire che passi inosservata in Italia un' opera che, quantunque piccola di mole, per essere densa di pensiero e frutto di lunghe e coscienziose esperienze e di indagini acute e perseveranti è degna di considerazione e di studio da parte di coloro che all' insegnamento *della matematica* (*) consacrarono la loro vita. Tanto più che ne è autore uno che, dopo avere inaugurata sotto buoni auspici la propria carriera di scienziato, mise in disparte le tanto seducenti indagini nelle regioni inesplorate del pensiero, per consacrare tutta la propria attività a sbocconcellare il pane della scienza, a togliere gl' impedimenti di cui è cosparsa la via che conduce alle verità algebriche e geometriche. Seguendo le tradizioni de' suoi connazionali egli è sceso in campo corazzato di tutta la scienza del suo secolo; ma – ed è questo un appunto che già mi occorse di fare in altre opere uscite in Germania (**) – egli sembra propenso ad attribuire il nome di scienza esclusivamente a quanto produssero i pensatori suoi conterranei, epperò non ha tenuto il debito conto dei risultati conseguiti da una falange di pedagogisti inglesi lavoranti in associazione (***), da un'altra analoga costituitasi in America (****), e da alcuni scienziati italiani operanti, per impulso proprio, da rivoluzionari o da riformatori.

Seguire passo passo il sig. Simon nell' esposizione da lui fatta dei risultati delle proprie esperienze è impresa ineseguibile; d'altronde modo e tempo a noi farebbero difetto per verificarle e discuterne le conseguenze; basti accennarle per sommi capi. Dopo un capitolo introduttorio contenente una rapida ma interessantissima rassegna dello sviluppo storico dell' insegnamento della matematica in Germania (*****), il nostro autore espone (cap. II) alcune considerazioni generali di didattica matematica per poi occuparsi successivamente dell' insegnamento del calcolo numerico (cap. III), dell'aritmetica e dell' algebra (cap. IV e V) e della geometria (cap. VI e VII). Risalendo poi a considerazioni di più ampia portata egli dà dei saggi consigli e degli ottimi suggerimenti ai professori di ogni ramo

(*) Ciò equivale ad un' esplicita dichiarazione che le nostre considerazioni si limitano alla parte matematica dell' opuscolo in esame, nella parte fisica basti rilevare lo studio delle relazioni fra l'insegnamento di questa scienza e quello della matematica.

(**) Cfr. questo *Periodico*, t. VIII, pp. 94, 95.

(***) Cfr. questo *Periodico*, t. IV. p. 125-128 e t. VIII. p. 101 e seg.

(****) *Report of the Committee of Ten on Secondary School Studies* (New-York, Cincinnati, Chicago; 1894).

(*****) Esiste una rassegna analoga di quanto accadde in Italia?

di matematica (cap. VIII), per finire discorrendo dei trattati e delle raccolte di di problemi (cap. IX).

Fra le tesi a noi simpatiche che l'autore sostiene noteremo quella dell'introduzione dell'elemento storico nell'insegnamento elementare (*) (del qual elemento egli determina la portata ed i confini), quella dell'utilità di fondere planimetria e stereometria, e quella delle relazioni di buon vicinato che importa stabilire e rendere quanto più è possibile strette fra l'istruzione secondaria e l'universitaria (**). Fra le questioni più ricche di interesse ed importanza noteremo la determinazione degli scopi che ha l'insegnamento delle matematiche nelle scuole medie e dell'aiuto che esso può prestare all'insegnamento degli altri rami ivi professati, nonchè quella del genere di lavoro personale a cui può dedicarsi un professore di ginnasio o liceo per evitare i due scogli altrettanto pericolosi del cristallizzarsi nello stesso cerchio di idee in cui si aggira la sua opera didattica e del perdersi nelle nubi delle questioni irresolute che la scienza nostra presenta.

Eccellenti sono le osservazioni del sig. Simon sulle opere a cui l'insegnante può ricorrere per allargare un po' il campo intellettuale de' migliori fra suoi studenti, per dar loro almeno un' idea dei campi sconfinati che stanno al di là di quello in cui sono trattenuti dei programmi governativi, osservazioni che sembrano ispirate dalle auree parole di Abel: « Si l'on veut faire des progrès dans les mathématiques, il faut étudier les maîtres et non pas les écoliers ». Inoltre va data a lui lode incondizionata per avere richiamata in vita una geniale osservazione di Möbius, che cioè le dimostrazioni *per assurdo* che intervengano nella geometria elementare si possono in generale trasformare in altre dirette fondandosi sulla proposizione seguente: « Se due serie di concetti a_k, b_k ($k = 1, 2, ..$) appartenenti a due distinte totalità di concetti A, B contengono lo stesso numero di elementi e sono in tale relazione di corrispondenza che ogni elemento a_k di A abbia in B un determinato corrispondente b_k, allora ogni elemento b_k di B troverà in A un corrispondente determinato a_k ». Per converso non ci troviamo d'accordo coll'autore nell'annoverare la Trigonometria fra le scienze applicate; era tale nell'origine, quando fungeva da semplice ausiliare dell'astronomia; non lo è più oggi che forma un capitolo della geometria di misura (***) ed in certo modo una propedeutica all'applicazione dell'algebra alla geometria.

A queste notizie ed osservazioni potremmo aggiungere; ma (per usare le parole di Amleto)

. . . . . since brevity is the soul of wit
I will be brief.

Genova, 20 novembre 1895. GINO LORIA.

GARDENGHI dott. GIUSEPPE. — *Manuale tecnico per le Società di mutuo soccorso.* 174° Manuale della collezione Hoepli. — Milano, 1895. — Prezzo, L. 1. 50.

Di questo libretto, scarso di mole ma ricco d'importanza, che viene a far seguito a diversi lavori congeneri meritamente apprezzati (****) dello stesso A., si occupò con parole molto lusinghiere il sig. dott. Ch. Moser in una recensione pubblicata nel fascicolo di luglio dei *Schweizerische Blätter für Wirtschafts und Socialpolitik*. Pare nondimeno che non sia fuori di proposito parlarne di nuovo per contribuire a rendere edotto il pubblico italiano dei pregi del libro, facendolo in questo periodico, giacchè l'operetta, malgrado la sua forma popolare, ha fondamento matematico.

(*) Cfr. questo *Periodico*, t. V, p. 59-61.
(**) Cfr. questo *Periodico*, X, p. 187.
(***) Cfr. questo *Periodico*, t. III, p. 50.
(****) V. ad es. la recensione pubblicata nel vol. IV, pp. 156-159 di questo *Periodico* dell'opera *Teoria matematica della previdenza*.

Scopo dell'A. è di stabilire con quale ordinamento tecnico siano da regolare le Società di mutuo soccorso basate sostanzialmente sul risparmio, affinchè possano corrispondere ai loro fini principali che sono i seguenti: 1° Assicurazione di un sussidio di malattia; 2° assicurazione di un sussidio di vecchiaia; 3° assicurazione di un sussidio alle vedove o alle famiglie dei soci defunti. È perciò che l'A., mostrando la necessità che tali Società vengano considerate come Istituti di assicurazione poggiati su basi matematiche, si propone di dare le norme per stabilire l'*ordinamento tecnico* in base al quale la Società può venir costituita con criteri razionali, e le norme con le quali sia possibile di calcolare il valore capitale attuale, cioè in un istante qualsiasi, di tutti i sussidi promessi e di tutte le quote da versarsi dagli assicurati, ciò che costituisce il *bilancio tecnico*.

Il Manuale comprende quattro capitoli, ossia: I. *Considerazioni generali sulle Società di mutuo soccorso;* II. *Questioni fondamentali di aritmetica sociale;* III. *Applicazioni;* IV. *Elementi e norme da applicarsi in casi speciali.* Segue un'*appendice* in cui si trova uno schema di statuto per le Società in parola, redatto in base ai principii fondamentali dell'ordinamento razionale e alle prescrizioni della legge vigente (15 aprile 1886) sulla costituzione legale delle Società di mutuo soccorso, e infine la *proposta* dell'ipotesi da farsi per i calcoli relativi ai sussidi d'invalidità.

Il libretto è poi ricchissimo di valori calcolati in base a diverse tavole di mortalità e morbosità.

Il consiglio della previdenza (nell'ultima sessione), dovendo esaminare le condizioni tecniche di diverse casse-pensioni e in particolare il progetto di una cassa d'assicurazione per gli operai addetti all'industria dei marmi di Carrara, non esitò a prendere per guida il manuale del prof. Gardenghi (*).

Ove si aggiunga che questo manuale è redatto con molta chiarezza di stile così da far entrare con facilità il lettore nell'ordine d'idee dell'A., ognuno intenderà di leggieri il nuovo importante contributo portato dal prof. Gardenghi allo svolgersi della previdenza sociale (**).

A. L.

Annuaire pour l'an 1896 publié par le Bureau des Longitudes. *Avec des Notices scientifiques.* In-18 de IV-894 pages, avec 2 Cartes magnétiques. Paris, Gauthier-Villars et fils. — Prix: fr. 1,50; franco, fr. 1,85.

Come ogni anno a quest'epoca è comparso l'*Annuaire du Bureau des Longitudes.* L'annuario per il 1896 contiene in gran copia delle indicazioni pratiche riunite in questo piccolo volume per comodo degli studiosi e degli uomini pratici. Vi si trovano anche articoli dovuti agli scienziati più illustri sulle Monete, la Statistica, la Geografia, la Mineralogia, ecc., infine le notizie seguenti: *Les Forces à distance et les ondulations;* per A. CORNU — *Les Travaux de Fresnel en Optique;* per A. CORNU — *Sur la construction des nouvelles Cartes magnétiques du globe*, intraprese sotto la direzione dell'Ufficio delle Longitudini; per DE BERNARDIÈRES — *Sur une troisième ascension à l'observatoire du sommet du mont Blanc et les travaux exécutés pendant l'été de 1895 dans le massif de cette montagne;* per J. JANSSEN — *Notice sur la vie et les travaux du contre-amiral Fleuriais;* per DE BERNARDIÈRES — *Allocutions prononcées aux funérailles de M. É. Brunner;* per J. JANSSEN e F. TISSERAND.

(*) V. *Annali del credito e della previdenza*, n. 20, pag. 13 e seguenti.

(**) Il presente manualetto fu premiato con medaglia d'argento dalla Giuria delle Esposizioni riunite di Milano, Sezione Previdenza.

Finita la Redazione il dì 20 gennaio 1896.

DI UNA NUOVA FORMULA
PER CALCOLARE LA SOMMA DELLE POTENZE SIMILI
DEI NUMERI NATURALI

1. Alle formule note per determinare la somma delle potenze simili dei numeri naturali se ne può aggiungere un'altra nella quale non appariscono esplicitamente i coefficienti binomiali. A tale oggetto osserviamo che dalla identità $n^k = n\,(n^{k-1})$ seguono, quando n sia anche intero e positivo, le seguenti:

$$\begin{array}{l} n^k = n^{k-1} + n^{k-1} + n^{k-1} + \ldots + n^{k-1} + n^{k-1} + n^{k-1} \\ (n-1)^k = (n-1)^{k-1} + (n-1)^{k-1} + (n-1)^{k-1} + \ldots + (n-1)^{k-1} + (n-1)^{k-1} \\ (n-2)^k = (n-2)^{k-1} + (n-2)^{k-1} + (n-2)^{k-1} + \ldots + (n-2)^{k-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2^k = 2^{k-1} + 2^{k-1} \\ 1^k = 1^{k-1} \end{array}$$

ove i secondi membri hanno rispettivamente $n,\ n-1,\ \ldots\ 2,\ 1$ termini. Sommando per colonne si ha

$$\sum_{x=1}^{x=n} x^k = \sum_{x=1}^{x=n} x^{k-1} + \sum_{x=2}^{x=n} x^{k-1} + \sum_{x=3}^{x=n} x^{k-1} + \ldots + \sum_{x=n-1}^{x=n} x^{k-1} + \sum_{x=n}^{x=n} x^{k-1}.$$

Ma per ogni intero positivo $r \leq n$ si ha ($r = 1$ escluso)

$$\sum_{x=r}^{x=n} x^{k-1} = \sum_{x=1}^{x=n} x^{k-1} - \sum_{x=1}^{x=r-1} x^{k-1} \qquad (r = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ n),$$

onde sostituendo nella precedente

$$\sum_{x=1}^{x=n} x^k = n \sum_{x=1}^{x=n} x^{k-1} - \left[\sum_{x=1}^{x=1} x^{k-1} + \sum_{x=1}^{x=2} x^{k-1} + \ldots + \sum_{x=1}^{x=s} x^{k-1} + \ldots + \sum_{x=1}^{x=n-1} x^{k-1}\right]$$

ovvero

$$\sum_{x=1}^{x=n} x^k = n \sum_{x=1}^{x=n} x^{k-1} - \sum_{s=1}^{s=n-1} \sum_{x=1}^{x=s} x^{k-1}$$

e posto per brevità $\sum_{x=1}^{x=n} x^k = \sigma_{k,n}$ si avrà per k qualunque,

$$(1) \ldots\ldots\ldots \quad \sigma_{k,n} = n\,\sigma_{k-1,n} - \sum_{s=1}^{s=n-1} \sigma_{k-1,s}$$

2. Di questa formula ci varremo dapprima per stabilire in generale la *forma* della funzione di n che rappresenta il valore di $\sigma_{k,n}$. Vi si ponga a tal fine $k=1$, si avrà

$$\sigma_{1,n} = n\,\sigma_{0,n} - \sum_{s=1}^{s=n-1} \sigma_{0,s}.$$

Ma $\sigma_{0,n} = n$, quindi $\sigma_{0,s} = s$, $\sum_{s=1}^{s=n-1} \sigma_{0,s} = \sum_{s=1}^{s=n-1} s = \sigma_{1,n} - n$ onde

$$\sigma_{1,n} = n^2 - \sigma_{1,n} + n$$

ovvero la notissima relazione

$$\sigma_{1,n} = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n.$$

La somma $\sigma_{k,n}$ per $k=1$, è dunque una funzione intera di grado $k+1=2$ in n. Supponiamo che questo fatto si verifichi per alcuni valori consecutivi dell'esponente k, e precisamente supponiamo che per $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, k-1$ la somma $\sigma_{\lambda,n}$ sia definita dalla relazione

$$(2) \qquad \sigma_{\lambda,n} = a_{0,\lambda} n^{\lambda+1} + a_{1,\lambda} n^{\lambda} + \ldots + a_{\lambda,\lambda} n + a_{\lambda+1,\lambda}$$

e dimostriamo che una relazione analoga sussiste per $\lambda = k$.

Poniamo infatti nella (2) $\lambda = k-1$ e sostituiamo il valore così trovato di $\sigma_{k-1,n}$ (e quello di $\sigma_{k-1,s}$) nella (1). Avremo subito:

$$\sigma_{k,n} = n\left[a_{0,k-1} n^k + a_{1,k-1} n^{k-1} + \ldots + a_{k,k-1}\right] - \\ \sum_{s=1}^{s=n-1} (a_{0,k-1} s^k + a_{1,k-1} s^{k-1} + \ldots + a_{k-1,k-1} s + a_{k,k-1}).$$

Ma alla $\sum$ del secondo membro può sostituirsi una somma di $k+1$ termini della forma $\sum_{s=1}^{s=n-1} a_{k-r,k-1} \cdot s^r = a_{k-r,k-1} \cdot \sigma_{r,n-1}$ ($r = k, k-1, \ldots 1, 0$), quindi la relazione precedente diviene:

$$\sigma_{k,n} = n\left[a_{0,k-1} n^k + a_{1,k-1} n^{k-1} + \ldots + a_{k,k-1}\right] - \\ \left[a_{0,k-1}\sigma_{k,n-1} + a_{1,k-1}\sigma_{k-1,n-1} + \ldots + a_{k-1,k-1}\sigma_{1,n-1} + a_{k,k-1}\sigma_{0,n-1}\right].$$

Per la prima delle σ del secondo membro, che ha l'indice k, si ha evidentemente

$$\sigma_{k,n-1} = \sigma_{k,n} - n^k$$

onde sostituendo e trasportando nel primo membro il termine $-a_{0,k-1}\sigma_{k,n}$ si ricava

$$(\alpha)\quad \sigma_{k,n} = \frac{n[a_{0,k-1}n^k + a_{1,k-1}n^{k-1} + \dots + a_{k,k-1}] + a_{0,k-1}n^k}{1 + a_{0,k-1}} - \frac{a_{1,k-1}\sigma_{k-1,n-1} + a_{2,k-1}\sigma_{k-2,n-1} + \dots + a_{k,k-1}\sigma_{0,n-1}}{1 + a_{0,k-1}}.$$

Ma le σ del secondo membro hanno indice non maggiore di $k-1$, e quindi, a causa della (2), sono funzioni intere rispettivamente di grado k, $k-1$, ... 2, 1 nella variabile $n-1$, per cui anche nella variabile n. Ne segue immediatamente che il secondo membro dell'ultima relazione è una funzione intera di grado $k+1$ in n, sicchè potremo scrivere

$$\sigma_{k,n} = a_{0,k}n^{k+1} + a_{1,k}n^k + \dots + a_{k,k}n + a_{k+1,k}$$

come si voleva provare.

3. La formula (α) può ora ritenersi vera per *qualunque* valore di k, e poichè la quantità entro la prima parentesi del secondo membro è $\sigma_{k-1,n}$, assumerà la forma

$$(3)\quad \sigma_{k,n} = \frac{n[\sigma_{k-1,n} + a_{0,k-1}n^{k-1}]}{1 + a_{0,k-1}} - \frac{a_{1,k-1}\sigma_{k-1,n-1} + a_{2,k-1}\sigma_{k-2,n-1} + \dots + a_{k-1,k-1}\sigma_{1,n-1} + a_{k,k-1}\sigma_{0,n-1}}{1 + a_{0,k-1}}.$$

Questa formula serve a determinare il valore di $\sigma_{k,n}$ quando siano già noti quelli di $\sigma_{0,n}$, $\sigma_{1,n}$, ... $\sigma_{k-1,n}$, giacchè in tale ipotesi sono note anche le $a_{r,k-1}$ ($r = 0, 1, 2, \dots k$) *perchè coefficienti della funzione già trovata*, che rappresenta il valore di $\sigma_{k-1,n}$. La (3) è appunto la formula cercata.

Cesena, dicembre 1895.

ALBERTO TAGIURI.

SULLE FRAZIONI CONTINUE NUMERICHE

(Continuazione: V. pag. 13).

Frazioni continue ad elementi positivi.

14. Da quanto fu detto al numero 9 [*V.* X)] segue immediatamente che: *Ogni frazione continua ad elementi positivi è monovalente o bivalente;* se è monovalente, il suo valore è limite inferiore delle ridotte d'ordine dispari ed è limite superiore di quelle d'ordine pari; se è bivalente, il maggior valore è limite inferiore delle ridotte d'ordine dispari ed il minore è limite superiore delle ridotte d'ordine pari.

Se sono positivi tutti gli elementi della frazione continua

$$\frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3+}\,\cdots\cdots$$

e $\frac{\lambda_n}{\mu_n}$ è la n^{ma} ridotta della medesima, sono certamente convergenti le serie

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1}-\frac{a_1\,a_2\,b_3}{\mu_1\,\mu_3}-\frac{a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,b_5}{\mu_3\,\mu_5}-\cdots\cdots$$
$$\frac{\lambda_2}{\mu_2}+\frac{a_1\,a_2\,a_3\,b_4}{\mu_2\,\mu_4}+\frac{a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,b_6}{\mu_4\,\mu_6}+\cdots\cdots$$

e le loro somme sono i valori della frazione continua, che è monovalente o bivalente secondo che le due somme sono uguali o diseguali. Nel primo caso il valore della frazione continua è pur dato dalla serie

$$\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_1\,a_2}{\mu_1\,\mu_2}+\frac{a_1\,a_2\,a_3}{\mu_2\,\mu_3}-\frac{a_1\,a_2\,a_3\,a_4}{\mu_3\,\mu_4}+\cdots\cdots$$

che allora è convergente, e nel 2° caso questa serie non è convergente e precisamente è bivalente ed ha gli stessi due valori della frazione continua, cioè questi sono i limiti dell'insieme $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ dove s_n indichi la somma dei primi n termini dell'ultima serie.

15. Teorema. *Se sono tutti positivi i numeri* $a_1, a_2, a_3, \ldots;$ $b_1, b_2, b_3, \ldots,$ *perchè sia monovalente la frazione continua*

$$\frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3+}\,\cdots\cdots$$

è necessario e sufficiente che sia divergente il prodotto di infiniti fattori:

$$\left(1+\frac{b_2}{a_2}b_1\right)\left[1+\frac{b_3}{a_3}\left(b_2+\frac{a_2}{b_1}\right)\right]\left[1+\frac{b_4}{a_4}\left(b_3+\frac{a_3}{b_2+}\frac{a_2}{b_1}\right)\right]\ldots\ldots$$

Dimostrazione. La XII) mostra infatti che, se è soddisfatta la condizione del teorema e soltanto se è soddisfatta, si ha

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{\lambda_{2m}}{\mu_{2m}}-\frac{\lambda_{2m-1}}{\mu_{2m-1}}\right)=0 \quad \text{ossia} \quad \lim\frac{\lambda_{2m}}{\mu_{2m}}=\lim\frac{\lambda_{2m-1}}{\mu_{2m-1}}.$$

La condizione enunciata nel teorema è dunque appunto necessaria e sufficiente perchè le ridotte d'ordine pari e quelle d'ordine dispari tendano al medesimo limite, cioè (V. 14) sia monovalente la frazione continua.

16. Come *Corollario* del teorema precedente abbiamo per es. che: Se sono tutti positivi i numeri $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ ed è divergente il prodotto

$$\left(1+\frac{b_1 b_2}{a_2}\right)\left(1+\frac{b_2 b_3}{a_3}\right)\left(1+\frac{b_3 b_4}{a_4}\right)\ldots,$$

allora è monovalente la frazione continua

$$\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}\cdots$$

17. Teorema. *Se* $\frac{\lambda_n}{\mu_n}$ *è la* n^{ma} *ridotta della frazione continua ad elementi positivi ed interi*

$$\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}\cdots$$

ed è:

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_1 a_2\ldots a_n}{\lambda_n+\mu_n}=0.$$

la frazione continua è monovalente ed ha valore irrazionale.

Dimostrazione. Le ridotte d'ordine dispari, come mostrano le X), decrescono sempre e tendono ad un limite, che indicheremo con p; le ridotte d'ordine pari crescono sempre e tendono ad un limite, che non può essere maggiore di p ed indicheremo con q. Supponiamo che esista un numero razionale, che non sia nè maggiore di

p nè minore di q; e tal numero sia la frazione a termini interi $\frac{a}{b}$; questa frazione sarà compresa fra due ridotte consecutive qualunque e sarà per ciò:

$$\left|\frac{\lambda_n}{\mu_n}-\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}\right|>\left|\frac{a}{b}-\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}\right|, \quad \left|\frac{\mu_n}{\lambda_n}-\frac{\mu_{n-1}}{\lambda_{n-1}}\right|>\left|\frac{b}{a}-\frac{\mu_{n-1}}{\lambda_{n-1}}\right|$$

dove si son chiuse le differenze tra sbarre per indicare che si debbono prendere i valori assoluti delle medesime. Da queste diseguaglianze, tenendo conto della prima VIII) ed osservando che il valore assoluto di $a\mu_{n-1}-b\lambda_{n-1}$, essendo intero non nullo, non può essere minore di 1, deducesi:

$$b>\frac{\mu_n}{a_1 a_2 \ldots a_n}, \qquad a>\frac{\lambda_n}{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

per cui è:

$$a+b>\frac{\lambda_n+\mu_n}{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Dovendo questa relazione sussistere per ogni valore di n, ne segue che, se la condizione del teorema si verifica, deve essere $\frac{1}{a+b}=0$ per cui a e b non possono essere finiti, cioè non può esistere una frazione, che non sia nè maggiore di p nè minore di q e ciò è precisamente quanto dire che q è eguale a p e non è razionale, ossia che la frazione continua è monovalente ed ha valore irrazionale.

18. Come *Corollario I* del numero precedente e della terza XI), possiamo dire che:

Se sono tutti positivi ed interi i numeri $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ ed è divergente il prodotto

$$\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{b_3}{a_3}\cdots$$

allora è monovalente ed ha valore irrazionale la frazione continua

$$\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}\cdots$$

19. E come *Corollario II* possiamo dire che:

Se sono tutti positivi ed interi i numeri $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ ed è divergente il prodotto

$$\left(\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_1}{a_2+b_1 b_2}\right)\left(\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_2}{a_3+b_2 b_3}\right)\left(\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_3}{a_4+b_3 b_4}\right)\cdots,$$

allora è monovalente ed ha valore irrazionale la frazione continua

$$\frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \cdots$$

20. Teorema. *Se è monovalente la frazione continua ad elementi positivi*

$$\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{b}_1 +} \frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{b}_2 +} \frac{\mathrm{a}_3}{\mathrm{b}_3 +} \cdots$$

perchè sia $\mathrm{u}_1 : \mathrm{u}_0$ *il valore della medesima, è necessario e sufficiente che siano tutte dello stesso segno le quantità* $\mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3, \mathrm{u}_4, \ldots$ *determinate mediante le equazioni III.*

Dimostrazione. Per la V), indicando sempre con $\frac{\lambda_n}{\mu_n}$ la n^{ma} ridotta, si ha:

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\lambda_{n-1} u_{n+1} + \lambda_n u_n}{\mu_{n-1} u_{n+1} + \mu_n u_n}.$$

Ora una frazione, che abbia per termini le somme degli omonimi termini di due date frazioni, è compresa oppure non è compresa fra le date secondo che i denominatori delle medesime sono di segno uguale o diverso: per ciò, essendo positivi μ_{n-1} e μ_n, il secondo membro dell'ultima eguaglianza è compreso oppure non è compreso fra $\lambda_{n-1} u_{n+1} : \mu_{n-1} u_{n+1}$ e $\lambda_n u_n : \mu_n u_n$, ossia tra $\lambda_{n-1} : \mu_{n-1}$ e $\lambda_n : \mu_n$, secondo che u_n ed u_{n+1} sono di segno uguale o diverso. Concludiamo quindi che, se le u sono tutte dello stesso segno, $\frac{u_1}{u_0}$ è compreso tra $\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}$ e $\frac{\lambda_n}{\mu_n}$, qualunque sia n, e per ciò è precisamente il valore della frazione continua; se invece non sono tutte del medesimo segno ed è per es. u_{r+1} la prima, che abbia segno diverso da quello di u_1, per cui abbiano diverso segno u_r ed u_{r+1}, $\frac{u_1}{u_0}$ non è allora compreso fra $\frac{\lambda_{r-1}}{\mu_{r-1}}$ e $\frac{\lambda_r}{\mu_r}$ e non può quindi essere uguale al valore della frazione continua, il quale è compreso fra queste due ridotte.

21. Una frazione continua, che abbia tutti i numeratori uguali ad 1 e tutti i denominatori positivi ed interi, la diremo *irreducibile*.

Le proprietà delle frazioni continue irreducibili deduconsi immediatamente da quanto precede; noi, per non fermarci su cose troppo note, ci limiteremo a ricordare che:

Le ridotte d'una frazione continua irreducibile sono frazioni ordinarie irreducibili. Ogni frazione continua irreducibile è monovalente ed ha valore irrazionale.

Applicazioni.

Per provar subito l'importanza delle proposizioni date qui, le utilizzeremo per dimostrare in modo nuovo l'irrazionalità delle potenze di e d'esponente razionale e del quadrato di π.

22. Se nelle equazioni III) si fa

$$u_0 = \cos h x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad u_1 = \operatorname{sen} h x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

$$a_1 = x, \quad a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = x^2; \quad b_n = 2n - 1$$

si trova:

$$u_{k+1} = \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{2^k (m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{(2m-1)!} x^{2m-1},$$

onde (V. 6 e 20) si ha:

$$\operatorname{tg} h x = \frac{\operatorname{sen} h x}{\cos h x} = \frac{x}{1+} \frac{x^2}{3+} \cdots \frac{x^2}{2n-1+} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{1+} \frac{x^2}{3+} \frac{x^2}{5+} \frac{x^2}{7+} \cdots$$

per cui, essendo

$$e^{2x} = 1 + \cfrac{2}{-1 + \cfrac{1}{\operatorname{tg} h x}},$$

ne segue essere:

$$e^{2x} = 1 + \frac{2x}{-x+1+} \frac{x^2}{3+} \frac{x^2}{5+} \frac{x^2}{7+} \cdots$$

Ponendo $\frac{x}{2}$ in luogo di x ed approfittando della formula di trasformazione I), si ottiene infine:

$$e^x = 1 + \cfrac{2x}{2 - x + \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{x^2}{10 + \cfrac{x^2}{14 + \ldots}}}}$$

Il prodotto $\frac{6}{x^2} \frac{10}{x^2} \frac{14}{x^2} \ldots$ è divergente per tutti i valori di x, perchè il suo fattor generale $\frac{2 + 4n}{x^2}$ aumenta indefinitamente con n, onde (V. 18) ne segue che e^x è irrazionale per tutti i valori interi di x e tale è quindi anche per tutti i valori frazionarii di x, perchè, se fosse razionale $e^{\frac{m}{n}}$, sarebbe razionale anche $\left(e^{\frac{m}{n}}\right)^n$ ossia e^m.

Sono dunque irrazionali tutte le potenze di e *d'esponente razionale* (*).

23. Siccome una frazione continua irreducibile, che abbia per valore un irrazionale quadratico, è necessariamente periodica e dal precedente sviluppo di e^x deducesi subito

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{10+}\,\frac{1}{14+}\,\frac{1}{18+}\cdots$$

così ne segue immediatamente che $\frac{e-1}{2}$, quindi ancora e, *non può essere irrazionale quadratico, cioè non può essere radice di un'equazione di 2° grado con coefficienti razionali* (**).

24. Se nelle equazioni III) si fa

$$u_0 = \cos x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!},\quad u_1 = \operatorname{sen} x = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

$$a_1 = -x,\quad a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = -x^2,\quad b_n = -(2n-1),$$

si trova

$$u_{k+1} = \sum_{m=k+1}^{\infty} (-1)^{m-k-1} \frac{2^k (m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{(2m-1)!}\, x^{2m-1},$$

onde (V. 6) ne segue essere:

$$\operatorname{tg} x = \frac{-x}{-1+}\,\frac{-x^2}{-3+}\,\frac{-x^2}{-5+}\cdots\frac{-x^2}{-(2n-1)+}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Da questa relazione, mediante le formule di trasformazione I) e II), si deduce subito:

$$1 - x\cot x = \frac{x^2}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{x^2}{4-x^2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{x^2}{6-x^2+}\cdots$$
$$\cdots\frac{x^2}{2(n-1)-x^2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{u_{n+1}}{u_n-u_{n+1}}.$$

(*) Per la *trascendenza* di e e π e per altre questioni celebri nella Storia della Matematica convien leggere il libro, di sole 66 pagine: F. Klein - *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*. Leipzig, 1895.

(**) Per gli irrazionali in genere, gli irrazionali quadratici e cubici ed algebrici in particolare, le frazioni continue numeriche usuali ed anche per la trascendenza di π ed e si può pur leggere utilmente il piccolo libro (151 pagine): P. Bachmann - *Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen*. Leipzig, 1892.

7

Per quanto fu detto al n. 20, essendo

$$u_k - u_{k+1} = \sum_{m=k}^{\infty} (-1)^{m-k}(2m-2k+1) \frac{2^{k-1}(m-1)\ldots(m-k+1)}{(2m-1)!} x^{2m-1},$$

sussiste quindi, per tutti i valori di x da $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$, il seguente sviluppo di $1 - x\cot x$ in frazione continua ad elementi positivi:

$$1 - x\cot x = \cfrac{x^2}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{x^2}{4 - x^2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{x^2}{6 - x^2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{x^2}{8 - x^2 + \ldots}}}}}}}$$

25. Da quanto fu detto nel precedente numero segue pure che, se nelle equazioni III) si pone

$$a_{2n-1} = x^2, \quad a_{2n} = b_{2n} = 1, \quad b_1 = 2, \quad b_{2n+1} = 2(n+1) - x^2$$

$$v_0 = \operatorname{sen} x, \quad v_1 = \operatorname{sen} x - x\cos x = \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m-2} \frac{2(m-1)}{(2m-1)!} x^{2m-1},$$

si deve trovare

$$v_{2k-1} = \sum_{m=k+1}^{\infty} (-1)^{m-k-1} \frac{2^k(m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{(2m-1)!} x^{2m-1},$$

$$v_{2k} = \sum_{m=k+1}^{\infty} (-1)^{m-k-1} (2m-2k-1) \frac{2^k(m-1)\ldots(m-k)}{(2m-1)!} x^{2m-1}.$$

Ciò si verifica facilmente e si perviene così per via più diretta al precedente sviluppo di $1 - x\cot x$.

26. Si riconosce ora subito che π ed anche il suo quadrato sono irrazionali. Infatti, se il quadrato di π fosse razionale, tale sarebbe ancora quello di $\frac{\pi}{2}$; ma, se il quadrato di $\frac{\pi}{2}$ fosse la frazione a termini interi $\frac{r}{s}$, ponendo $x^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{r}{s}$ nello sviluppo precedente di $1 - x\cot x$ e ricorrendo alla formula di trasformazione I), si otterrebbe:

$$1 = \frac{r}{2s+} \frac{s}{1+} \frac{r}{4s-r+} \frac{s}{1+} \frac{r}{6s-r+} \cdots$$

Questa uguaglianza è assurda, perchè (V. 18) il secondo membro ha valore irrazionale, essendo divergente il prodotto

$$\frac{2s}{r} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{4s-r}{r} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{6s-r}{r} \cdot \frac{1}{s} \cdots$$

come si riconosce immediatamente osservando che $\frac{2ns-r}{r} \cdot \frac{1}{s}$, ossia $2n\frac{1}{r} - \frac{1}{s}$, cresce indefinitamente con n. È dunque assurdo l'ammettere, che sia razionale il quadrato di π, per cui si conclude che π^2 *è irrazionale ed è quindi irrazionale anche* π.

27. Il pregio delle rigorose dimostrazioni date in queste applicazioni consiste specialmente in ciò, che la validità degli sviluppi dati ai numeri 22 e 24 (*V.* 25) e la prova dell'irrazionalità delle potenze di e d'esponente razionale e del quadrato di π sono fondate solo sulle proposizioni semplicissime dei numeri 20 e 18.

Genova, settembre 1895.

F. GIUDICE.

TEMI DI MATEMATICA DATI PER L'ESAME DI MATURITÀ
IN GINNASI E SCUOLE REALI SUPERIORI DELL'AUSTRIA-UNGHERIA
alla fine degli anni scolastici 1891-92 e 1892-93.

(*Continuazione*: *V. pag. 27, 55, 97, 148, 184 dell'anno IX, 25, 58 dell'anno X e 20 dell'anno XI*).

RUDOLFSWERT: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Dopo quanti anni sarà estinto un prestito di 4000000 f. al 6 % se la rata semestrale d'ammortamento importa 144500 f.? Qual'è la prima e quale l'ultima rata?

2. Un cono retto viene troncato alla distanza di 2 m. dalla base talchè il volume del tronco è di 36 $m.^3$ Se le due basi stanno fra loro come 5 : 3, quale è l'altezza e quale il volume dell'intiero cono, e quale l'inclinazione del lato sulla base?

3. Sono condotte delle tangenti all'ellisse $4x^2 + 25y^2 = 100$ da quel punto che ha per coordinate i valori intieri e positivi di x ed y che soddisfanno l'equazione $3x + 1\frac{2}{3}y = 17$. Si domandano le equazioni delle tangenti e l'angolo da esse compreso.

ZNAIM: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Una somma di 6400 (k) f deve venir pagata con 12 ($2n$) rate annuali eguali, calcolando l'interesse composto nei primi 6 (n) anni al 4 (p_1.) % e quindi al 5 (p_2.) %. Quanto importa la rata annuale?

2. $11 \cdot 4^{2x+2} + 8326 \cdot 9^{x-1} = 132 \cdot 9^{x+1} - 8 \cdot 4^{2x+5}$.

3. Una sfera vuota di ferro pesa 30 (k) Kg. e s'immerge a metà nell'acqua, qual'è la grossezza del guscio, se il peso specifico del ferro si prende eguale a 7,7 ?

4. Sono condotte delle tangenti alla parabola $y^2 = 4x$ nei punti d'intersezione colla retta $x + y = 3$. Calcolare l'area del triangolo formato dalla retta colle due tangenti.

CZERNOWITZ: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Dividere il numero 18 in tre parti, che formino una progressione aritmetica, e tali che il quadrato della terza parte sia di 9 minore della doppia somma dei quadrati delle due prime parti. Quali sono le tre parti ?

2. Qual'è la superficie d'una sfera inscritta ad un cono equilatero che ha l'altezza $h = 3$?

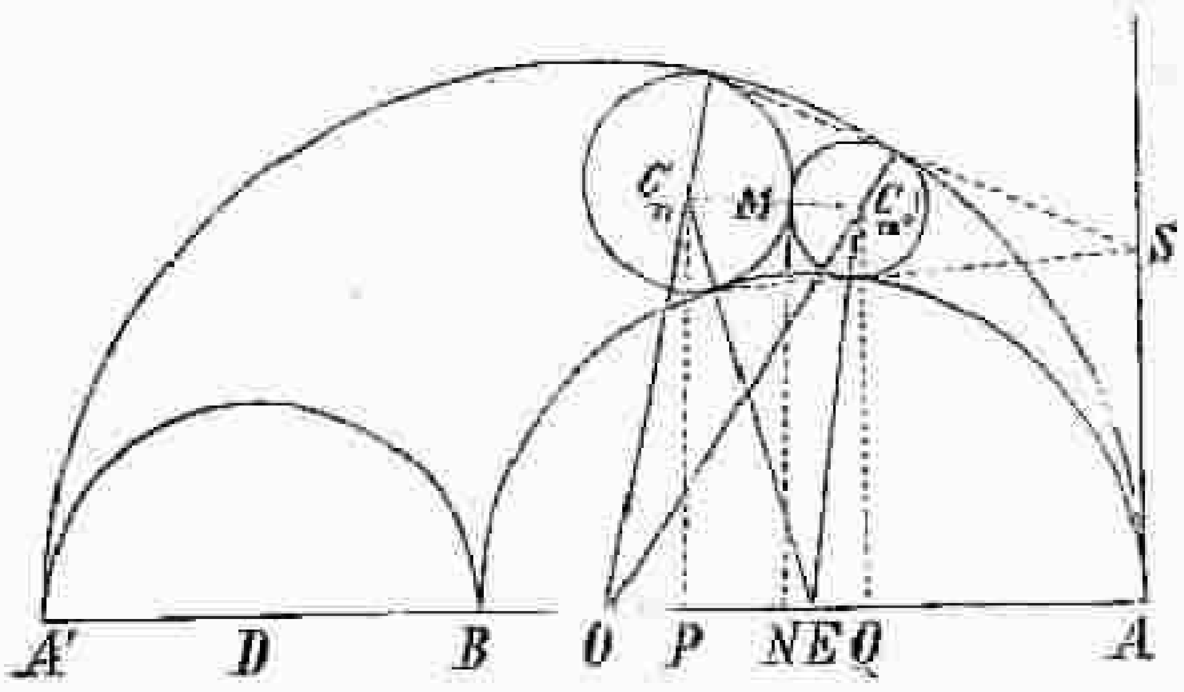
3. Un angolo d'un triangolo è $\alpha = 57^0\, 7'\, 18''$, la sua bisettrice è $b_1 = 10{,}248\, m.$ ed uno dei lati che lo comprendono è $b = 14\, m$. Si domandano gli altri lati ed angoli del triangolo e l'area.

4. La tangente condotta al cerchio $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ dal punto $x = -3, y = 0$ divide il cerchio $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ in due parti disuguali. Si domanda l'area del segmento minore.

(Continua).

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Problema di geometria elementare. — *Si divide un segmento rettilineo* A'A *in due parti* A'B = a, BA = b *e sopra* A'A, A'B, BA *quali diametri si descrivono tre semicirconferenze* σ, α, β, *nell'arbelo o spazio compreso fra queste si costruisce un cerchio* α_1 *tangente a ciascuna, indi nello spazio racchiuso fra i cerchi* σ, α_1, β *si disegna la circonferenza* α_2 *che li tocchi; parimente nello spazio compreso fra le linee* σ, α_2, β *si descrive il cerchio* α_3 *ad essi tangente e così di seguito; esprimere il raggio del cerchio* α_n *in funzione di* a, b, n.



Rappresentino O, D, E i punti medii dei segmenti $A'A$, $A'B$, BA; due circonferenze successive α_n, α_{n+1} abbiano i raggi r_n, r_{n+1}; i loro centri C_n, C_{n+1} ed il contatto M si proiettino ortogonalmente nei punti P, Q, N della retta $A'A$. È facile stabilire le relazioni $C_n C_{n+1} = r_n + r_{n+1}$, $EC_n = \frac{b}{2} + r_n$, $EC_{n+1} = \frac{b}{2} + r_{n+1}$, $OC_n = \frac{a+b}{2} - r_n$, $OC_{n+1} = \frac{a+b}{2} - r_{n+1}$; dai triangoli OEC_n,

OPC_n ricaveremo l'eguaglianze $\overline{EC}_n^2 = \overline{OC}_n^2 + \overline{OE}^2 - 2\,OE.OP$, $\overline{PC}_n^2 = \overline{OC}_n^2 - \overline{OP}_n^2$ dalle quali si traggono $OP = \frac{a+b}{2} - \left(\frac{2b+a}{a}\right) r_n$, $PC_n = \frac{1}{a}\sqrt{2b(a+b)r_n(a-2r_n)}$; in simil modo per i triangoli OEC_{n+1}, OQC_{n+1} otteniamo

$$OQ = \frac{a+b}{2} - \left(\frac{2b+a}{a}\right) r_{n+1}, \quad QC_{n+1} = \frac{1}{a}\sqrt{2b(a+b)r_{n+1}(a-2r_{n+1})};$$

inoltre il trapezio birettangolo $C_n P Q C_{n+1}$ fornisce $\overline{C_n C_{n+1}}^2 = \overline{PQ}^2 + (PC_n - QC_{n+1})^2$, ovvero

$$(r_n + r_{n+1})^2 = 2\,\frac{b}{a^2}\,(a+b)\left[\sqrt{r_n(a-2r_n)} - \sqrt{r_{n+1}(a-2r_{n+1})}\right] +$$

$\left(\frac{2b+a}{a}\right)^2 (r_n - r_{n+1})^2$ che si trasforma nell'equazione razionale

$$(1) \qquad a^2(a+b)^2\left(\frac{1}{r_{n+1}} - \frac{1}{r_n}\right)^2 - 4ab(a+b)\left(\frac{1}{r_{n+1}} - \frac{1}{r_n}\right) + 4(2b+a)^2 - 8\,\frac{ab}{r_n}(a+b) = 0.$$

Risolvendola avremo

$$\frac{1}{r_{n+1}} - \frac{1}{r_n} = \frac{2}{b(a+b)}\left[a \pm \sqrt{\frac{2ab}{r_n}(a+b) - 4b(a+b)}\right].$$

Col porvi $n=0$, $r_0 = \frac{a}{2}$, raggio del cerchio α, risulta $2r_1 = \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$ e per $n=1$ si trova $2r_2 = \frac{ab(a+b)}{4a^2+ab+b^2}$; in generale col supporre

$$(2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 2r_n = \frac{ab(a+b)}{n^2a^2+ab+b^2}$$

dall'equazione (1) dedurremo $2r_{n+1} = \frac{ab(a+b)}{(n\pm 1)^2a^2+ab+b^2}$ e per $n>1$ si dovrà prendere il segno $+$ per il primo coefficiente del denominatore, così la legge è verificata. Ne consegue

$$(3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad PC_n = \frac{ab(a+b)n}{n^2a^2+ab+b^2}$$

la quale proposizione di Pappo (*Mathematicae collectiones*, liber IV) si enuncia *la distanza del centro* C_n *dalla retta* A'A *stà al diametro* $2r_n$ *del cerchio corrispondente* α_n *nel rapporto di* n *all'unità.*

Si dimostrano con semplice ragionamento le relazioni

$$MN = \frac{r_n QC_{n+1} + r_{n+1} PC_n}{r_n + r_{n+1}}, \qquad ON = \frac{r_n OQ + r_{n+1} OP}{r_n + r_{n+1}};$$

che per i valori precedenti si riducono alle

$$MN = \frac{2 r_n r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}} (2n+1), \qquad ON = \frac{a+b}{2} - 2\left(\frac{2b+a}{a}\right) \frac{r_n r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}},$$

ne derivano

$$NA = 2\left(\frac{2b+a}{a}\right) \frac{r_n r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}}, \; \overline{MA}^2 = \left[\left(\frac{2b+a}{a}\right)^2 + (2n+1)^2\right]$$

$$\left(\frac{2 r_n r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}}\right)^2 = 4b\left(\frac{a+b}{a}\right) \frac{r_n r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}}$$

a motivo di

$$\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_{n+1}} = \frac{(2b+a)^2 + a^2(2n+1)^2}{ab(a+b)}$$

si conchiude la proprietà $\frac{\overline{MA}^2}{\overline{NA}} = \frac{2b(a+b)}{a+2b}$, dunque prendendo A per origine di questo segmento sulla retta AA', ed A_0 per suo termine, *il luogo geometrico di* M *è la circonferenza descritta col diametro* AA_0; *dove* A_0 *divide internamente* $A'A$ *nella ragione di* $a : 2b$; *il luogo dei centri* C_n *è l'ellisse avente i fuochi* O *ed* E, *a causa di* $OC_n + EC_n = \frac{a}{2} + b$. La corda dei contatti fra il cerchio α_n e ciascuno dei cerchi β, σ passa costantemente per il centro di omotetia inversa di questi cerchi.

A tutte le proposizioni dimostrate si giunge subito col metodo d'inversione; poichè scegliendo per polo il punto A e per potenza il quadrato $m^2 = b(a+b)$ della tangente condotta dal punto A al cerchio α, i cerchi σ e β passando per il polo si convertono in due rette σ', β' normali ad AA', tirate per B ed A' ed il cerchio α si trasformerà in se stesso. Ora i cerchi α'_n tangenti alle parallele σ', β' ed esternamente fra loro hanno il diametro a, e la distanza del polo A dal loro centro C'_n sarà evidentemente $d'_n = \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + n^2 a^2}$; quindi il diametro del cerchio inverso α_n verrà determinato per $2r_n = \frac{m^2 a}{d'^2_n - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{ab(a+b)}{b^2 + ab + n^2 a^2}$, e detto φ_n l'angolo $A'AC_n$ si troverà pure $\operatorname{tang} \varphi_n = \frac{2na}{a+2b}$.

Il numero $x_1 = \frac{15}{19}$ corrispondente al raggio del cerchio α_1 per i valori particolari $a = 3$, $b = 2$ si legge nel *liber assumptorum*, che vien attribuito ad ARCHIMEDE come si riferisce alla pagina 136 del libro 2° della pregiata opera *Le scienze esatte nell'antica Grecia* del Prof. GINO LORIA.

Avvertiremo infine che nell'ipotesi di $a = \infty$ e b costante dalle formule (2), (3) si deducono $\lim r_n = \frac{b}{2n^2}$, $\lim PC_n = \frac{b}{n}$, le circonferenze σ, α divenendo le perpendicolari innalzate dai punti A, B alla retta AA'.

G. BELLACCHI.

Sopra una disposizione particolare dei triangoli simili. (*Continuazione:* V. p. 103 del vol. X). — 6. Il triangolo coi vertici nei centri dei cerchi α, β, γ, e che indicheremo rispettivamente con H_α, H_β, H_γ, è pure simile ai triangoli ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ ...., e passante per K. Difatti i suoi lati sono rispettivamente perpendicolari alle rette a, b, c, le quali formano appunto fra loro angoli rispettivamente eguali a quelli dei noti triangoli simili ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ .... (n. 3); l'angolo dei raggi KH_β, KH_γ, è evidentemente supplementare all'ang $(\beta, \gamma) =$ ang $(b, c) =$ ang $H_\beta H_\alpha H_\gamma$; ne viene che il quadrangolo $K H_\beta H_\alpha H_\gamma$, avendo gli angoli in K e in H_α opposti supplementari, è inscrittibile in un cerchio; ossia il cerchio circoscritto al triangolo $H_\alpha H_\beta H_\gamma$ passa per K, e perciò gode pur esso la proprietà già notata al n. 5.

7. Chiamo *retta di Pascal* rispetto un triangolo quella che contiene i punti d'incontro dei lati colle tangenti nei vertici opposti, al cerchio ad esso circoscritto.

Ciò posto si considerino le rette di Pascal rispetto i triangoli $I_c I_b A_1$, $I_c I_a B_1'$, $I_a I_b C_1''$ inscritti rispettivamente nei cerchi α, β, γ (Tav. II, fig. 1ª del vol. X) determinate dalle tre coppie di punti d'incontro forniti dai tre sistemi di due coppie di rette:

$$\text{I: } (I_b A_1,\ I_c B_1');\ (I_b C_1'',\ I_a A_1). \qquad \text{II: } (I_c B_1',\ I_a C_1'');\ (I_c A_1,\ I_a B_1')$$
$$\text{III: } (I_b C_1'',\ I_a B_1');\ (I_b A_1,\ I_a C_1'')$$

le cui equazioni riferite all'origine I_a, alla retta i come asse delle ordinate, alla perpendicolare ad essa in I_a come asse delle ascisse, sono:

$$\begin{array}{lll}
\text{I.} & (y = -m_c x + i_b,\ y = -m_a x - i_c; & (y = m_a x + i_b,\ y = m_b x - i_c) \\
\text{II.} & (y = -m_a x - i_c,\ y = -m_b x); & (y = m_b x - i_c,\ y = m_c x) \\
\text{III.} & (y = m_a x + i_b,\ y = m_c x); & (y = -m_c x + i_b,\ y = -m_b x)
\end{array}$$

dove è $I_a I_b = i_b$, $I_a I_c = -i_c$; tang $(90^0 - A) = m_a$, tang $(90^0 - B) = m_b$, tang $(90^0 - C) = m_c$.

I due sistemi $x'y'$, $x''y''$ di coordinate di punti fornito dalla soluzione comune di ciascuna coppia:

$$\text{I.} \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{i_b + i_c}{m_a - m_a} \\ y' &= -m_c \frac{i_b + i_c}{m_c - m_a} + i_b \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} x'' &= -\frac{i_b + i_c}{m_a - m_b} \\ y'' &= -m_a \frac{i_b + i_c}{m_a - m_b} + i_b \end{aligned} \right.$$

$$\text{II.} \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{-i_c}{m_a - m_b} \\ y' &= \frac{m_b i_c}{m_a - m_b} \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} x'' &= \frac{-i_c}{m_c - m_b} \\ y'' &= \frac{-m_c i_c}{m_c - m_b} \end{aligned} \right.$$

$$\text{III.} \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{i_b}{m_c - m_a} \\ y' &= \frac{m_c i_b}{m_c - m_a} \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} x'' &= \frac{i_b}{m_c - m_b} \\ y'' &= \frac{-m_b i_b}{m_c - m_b} \end{aligned} \right.$$

sostituiti successivamente nell' equazione della retta congiungente due punti di coordinate note $x'y'$, $x''y''$:

$$x(y'-y'')-y(x'-x'')-y'x''+x'y''=0,$$

danno le tre rette di Pascal considerate

$$\begin{array}{ll}\text{I.} & (m_b m_c - m_a^2)\,x + (m_b - m_c)\,y - i_c(m_a + m_c) - i_b(m_a + m_b) = 0\\ \text{II.} & (m_b^2 - m_a m_c)\,x + (m_a - m_c)\,y - i_c(m_b + m_c) = 0\\ \text{III.} & (m_c^2 - m_a m_b)\,x + (m_b - m_a)\,y - i_b(m_b + m_c) = 0\end{array}$$

di cui il determinante dei coefficienti è:

$$\begin{vmatrix} -m_a^2 + m_b m_c & m_b - m_c & -i_c(m_a + m_c) - i_b(m_a + m_b)\\ m_b^2 - m_a m_c & m_a - m_c & -i_c(m_b + m_c)\\ m_c^2 - m_a m_b & m_b - m_a & -i_b(m_b + m_c)\end{vmatrix}.$$

Dico che se è I_a punto di mezzo di $I_b I_c$ ed $A = 90^0$, le tre rette di Pascal considerate, s'incontrano in un punto. Difatti essendo allora $m_a = 0$, $i_b = i_c$ ed inoltre

$$m_b m_c = 1;$$

quel determinante diventa

$$-i_b(m_b + m_c)(m_b - m_c)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ m_b & 1 & 1\\ -m_c & 1 & 1\end{vmatrix} = 0$$

che è la condizione necessaria perchè p_α, p_β, p_γ passino per lo stesso punto.

La costruzione da fare per trovarsi nel caso testè considerato è la seguente.

Si faccia centro nel punto di mezzo I_a d'un segmento $I_b I_c$, e con raggio $I_a I_b = I_a I_c$ si descriva un cerchio α. Su questo cerchio si prenda un punto qualunque K, e si costruiscano i cerchi $K I_a I_b \equiv \gamma$, $K I_a I_c \equiv \beta$. Come risulta dalla proprietà del n. 2, le tangenti a γ su I_b e a β in I_c s'incontrano in un punto A_1 di α; così pure le tangenti a γ in I_a e ad α in I_c s'incontrano in un punto B_1' di β, a le tangenti a β in I_a e ad α in I_b s'incontrano in un punto C_1'' di γ. Le rette di Pascal rispetto ai triangoli $I_c I_b A_1$, $I_c I_a B_1'$, $I_a I_b C_1''$ così ottenuti s'incontrano allora nello stesso punto P. Dalla relazione delle coordinate cartesiane di P con ang. $B =$ ang. $ac =$ ang. $\alpha\gamma$ (n. 3) ricavata dalla soluzione comune di due rette di Pascal nelle condizioni del teorema; e dalla relazione di B coll' angolo θ che il raggio vettore ρ di P fa coll' asse delle x, risulta assai facilmente

$$\rho^2 = 1 + 3\cos^2\theta,$$

equazione della curva luogo dei punti come P.

8. Si prendano ora tre punti qualunque I_a, I_b, I_c del piano: supponiamo che in questi punti s'incontrino i lati omologhi a, a'; b, b'; c, c' di due triangoli simili ABC, $A'B'C'$; in altri termini sieno I_a, I_b, I_c i punti d'incontro dei lati omologhi a, a'; b, b'; c, c' di due triangoli simili ABC, $A'B'C'$ comunque posti sul piano. È chiaro che i vertici omologhi A, A' giacciono in un

cerchio α passante per I_b, I_c; B, B' in un cerchio β passante per I_a, I_c; C, C' su un cerchio γ passante per I_a, I_b. Per considerazioni affatto analoghe a quelle dei nn. 1 e 3 i cerchi α, β, γ passano per un unico punto K; i lati omologhi come a, b, c di tutti i triangoli simili ai triangoli dati coi vertici omologhi come A, B, C situati in α, β e γ passano per I_a, I_b, I_c, e tutti questi triangoli sono evanescenti verso il punto K.

Qui spariscono tutte quelle proprietà che dipendevano dall'allineamento dei punti I_a, I_b, I_c, fra cui quella dei cerchi α, β, γ di formare intorno al loro punto comune K angoli eguali a quelli dei triangoli simili.

Ciò posto si imaginino i punti I_a, I_b, I_c situati a distanza infinita. Allora i tre cerchi α, β, γ si riducono a tre rette concorrenti in un punto K. Infatti i triangoli simili coi vertici omologhi rispettivamente su quelle tre rette hanno i lati omologhi incontrantisi all'infinito, ossia paralleli; vale a dire sono omotetici.

Dunque l'omotetia dei triangoli non è che un caso particolare di questa disposizione dei triangoli simili da me studiata.

9. Si può ormai scorgere agevolmente come le precedenti proprietà siano in parte estendibili ai poligoni simili. A tal uopo, dati due poligoni simili, basta considerare le coppie dei triangoli simili cui danno luogo le diagonali condotte da due vertici omologhi. I vertici omologhi si troveranno su altrettanti cerchi tutti passanti per un medesimo punto; i lati omologhi e le diagonali omologhe passeranno rispettivamente nei punti dove quei cerchi s'incontrano a due a due.

EMILIO COMINOTTO.

Ancora sulla simmetria in alcune dimostrazioni della geometria elementare. (V. Anno X p. 163 e anno XI p. 28) — Ringrazio il sig. prof. Riboni di aver rivolta la sua attenzione alla nota suddetta, e ho piacere ch'egli convenga in massima nelle osservazioni in essa contenute. — L'egregio professore mentre trova lodevole la modificazione da me suggerita alla dimostrazione della prop. VI del libro XI di Euclide, non crede possa dirsi altrettanto per gli altri esempi da me citati, e fa in proposito alcune considerazioni. Permetta ora che io risponda alle sue con altre brevi osservazioni.

Non credo di aver esagerato nell'affermare che la ordinaria dimostrazione del teorema: *la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti*, è artificiosa in confronto dell'altra, da me indicata, nella quale si conducono per un punto qualunque le parallele ai lati del triangolo.

Certo, un artificio v'è, e lo stesso prof. Riboni lo conferma, facendo però osservare che, in grazia di esso, « non resta che tracciare la parallela al lato opposto al vertice scelto, e ciò *con notevole semplicità nella costruzione* » Egli entra così nella questione se la mia dimostrazione sia o no preferibile, dal lato didattico, a quella ordinaria; questione che, in realtà, io non avevo affatto affrontato, avendo avuto soltanto intenzione di presentare una dimostrazione che rivestisse il carattere della simmetria. Ora, è certo che la costruzione richiesta dalla mia dimostrazione è più complicata dell'ordinaria, ma non tanto quanto a prima vista può parere, perchè la figura formata dalle tre parallele rimane completamente staccata dal triangolo, e perciò riesce chiara ad ogni alunno, mentre quella della dimostrazione ordinaria, benchè più semplice, può forse riuscire confusa. Ma la semplicità della costruzione non costituisce la principal dote di una dimostrazione; chè, alcune volte, le figure che accompagnano le dimostrazioni più intuitive non sono le più semplici. Resta il ragionamento; ma, se si osserva che, nella ordinaria dimostrazione del suddetto teorema, i tre angoli formati attorno al vertice scelto sono rispettivamente uguali a quelli del triangolo *per ragioni tutte differenti*, mentre gli angoli formati attorno ad un punto qualunque sono uguali a quelli del triangolo *per una stessa ragione*, mi pare non si possa negare che il ragionamento seguito nella dimostrazione simmetrica sia tale da essere più facilmente compreso, e meglio ricordato dagli alunni.

Il prof. Riboni non trova buona la mia dimostrazione simmetrica del teorema: *in ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due*, perchè « sebbene assai spedita, richiede che si sappia costruire la bisettrice di un angolo « od almeno che ne sia provata l'esistenza, premessa non necessaria, e che da « buona parte dei trattatisti è data in seguito » A ciò si può obbiettare che una certa dimostrazine può convenire ad alcuni libri e ad altri no; e se si volessero chiamare buone soltanto quelle dimostrazioni che convengono a tutti, poche se ne conterebbero. La mia semplice dimostrazione può star bene p. es. negli elementi di Euclide, di Sannia e D' Ovidio, di Faifofer,... nei quali l'esistenza della bisettrice è provata fin dal principio; gli altri autori trovino, se vogliono, un'altra dimostrazione, chè non ve ne sarà in generale una sola, neanche se si vuole che essa abbia il pregio della simmetria. Eccone p. es. un' altra pure simmetrica e semplice che potrebbe star benissimo negli elementi del De Paolis. « Sia il triangolo ABC; basta provare che il teorema sussiste per il lato che « supera ciascuno degli altri due. Sia questo il lato BC. Gli angoli adiacenti « a questo lato sono ambedue acuti, e quindi l'altezza AD, relativa al lato BC, « cade dentro il triangolo. Ora si ha: $BD < AB$, $DC < AC$; quindi « $BD + DC < AB + AC$, cioè $BC < AB + AC$. » Del resto, per la stessa ragione per la quale all'egregio prof. Riboni non par buona la mia dimostrazione potrebbe a qualcuno non piacere quella ch'egli suggerisce per il teorema: *in un triangolo la bisettrice di un angolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due*, poichè la proprietà: *due triangoli di uguali altezze stanno tra loro come le basi*, è una premessa davvero non necessaria per stabilire il teorema di cui si tratta, senza contare che qualcuno potrebbe anche essere dispiacente di dover ricorrere al confronto di due superficie per dimostrare una proprietà relativa a segmenti rettilinei.

Una delle dimostrazioni simmetriche da me indicate pel teorema relativo alla distanza di due rette sghembe, si trova già nel Sannia e D'Ovidio.

In conclusione, mi pare, contrariamente a quanto afferma il prof. Riboni, di non aver sacrificato, al pregio della simmetria, le altre doti apprezzabili dal lato didattico.

Il Prof. Riboni termina osservando che la mia cura per la simmetria è tanto più eccessiva, « in quanto che la preferenza data a qualche elemento nella di-

« mostrazione è apparente più che altro, poichè ciascuno degli elementi di cui « si parla può trovarsi nelle stesse condizioni in cui è posto uno di essi »; cosicchè, in sostanza, la preferenza sarebbe apparente per la ragione che può essere preferito uno qualunque degli elementi di cui si tratta. Ciò non mi pare giusto. La preferenza v'è invece *di fatto*; e ciò è tanto vero, che di essa rimane traccia in tutta la dimostrazione, appena uno degli elementi sia posto in condizioni diverse dagli altri, e che, per questo soltanto, la dimostrazione stessa cessa di essere simmetrica.

Fermo, febbraio 1896.

CORRADO CIAMBERLINI.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 231**, 233**, 250, 258**, 259**, 263*, 264*, 265*, 266* e 267*

231.** *Di due fasci proiettivi di raggi* (U), (U'), *giacenti nello stesso piano, sono noti: il centro di proiettività* U'', *due punti* M, N *per cui passano due raggi corrispondenti, gli angoli* θ, θ' *che questi formano con le rette* U''U, U''U', *e la retta* UU'. *Si domanda di costruire i due fasci, e di discutere il problema.* (A. DEL RE).

Risoluzioni analoghe dai Sigg. *V. Columbo* e *G. Gallucci*, studenti nella R. Università di Napoli.

La quistione si riduce a trovare i punti U, U' poichè allora essendo noti il centro di proiettività U'', due raggi corrispondenti UM, $U'N$ e i centri U, U' dei due fasci questi si possono costruire.

Si descriva su MU'' un segmento di circolo capace dell'angolo θ, completando il relativo circolo, e su NU'' un segmento capace dell'angolo θ', completando il circolo. Questi circoli taglieranno in generale la retta $UU' \equiv s$ in quattro punti U, U_1 ed U', U_1'. Allora per centri dei due fasci si potranno scegliere U, U'; U, U_1'; U_1, U'; U_1, U_1', il che darebbe quattro soluzioni. Ma su MU'' ed NU'' si possono descrivere *da una parte e dall'altra* due segmenti capaci degli angoli θ, θ' per modo che esistono in generale due altri punti U e due altri U' e siano U_2, U_3 ed U_2', U_3'. Allora potendosi accoppiare ciascuno dei quattro punti U coi punti U', si hanno in generale 16 soluzioni del problema.

Se U'' è fuori di s ed M, N non cadono in s e si trovano rispetto ad U'' dall'altra parte di s, il problema avrà tutte le soluzioni possibili. Se ciò non avviene qualcuno dei circoli passanti per M, U'' od N, U'' può non incontrare s od essere tangente ad s, riducendosi le soluzioni a 12 o meno di 12 od anche a nessuna.

Se U'' cade in s il numero delle soluzioni può ancora venir diminuito, potendo qualcuno dei circoli ausiliari riuscire tangente ad s, senza tuttavia diventar zero.

Riguardo ai valori di θ si può osservare che se θ è di 90° i punti U_2, U_3 coincidono con U, U_1 e così per $\theta' = 90°$ coincideranno U' con U_2 e U_1' con U_3'. Se poi θ, θ' son zero si ha un solo punto $U \equiv (s, MU'')$ e un sol punto $U' \equiv (s, NU'')$. In ambedue i casi il numero delle soluzioni diminuisce (*).

233**. *Di due fasci proiettivi di raggi* (U), (U′), *giacenti nello stesso piano, sono noti: i centri* U, U′, *il centro di proiettività* U″, *i punti limiti* J, I′ *di due punteggiate che ne sono sezioni, e l'angolo* θ *dei sostegni di queste punteggiate. Si domanda di costruire i due fasci, e le due punteggiate.*

(A. Del Re).

Risoluzione del Sig. *G. Gallucci*, studente nella R. Università di Napoli.

Il problema si riduce a costruire i raggi i, j' dei due fasci (U), (U') che corrispondono ai raggi $U'I' \equiv i'$, $UJ \equiv j$, poichè allora conoscendo i centri dei due fasci, la coppia i, i' o j, j' di raggi corrispondenti e il centro di proiettività U'', si può trovare il corrispondente di ogni altro raggio dell'uno o dell'altro fascio, insieme ai sostegni delle due punteggiate.

Si descriva a tal uopo sopra UU' un segmento di cerchio capace dell'angolo dato θ, completando il cerchio al quale appartiene l'arco, quindi si trovi il punto $M \equiv (j, i')$. Per una nota proprietà il punto $N \equiv (i, j')$ cadrà nella $U''O$. Ma d'altra parte se osserviamo che per dato i è parallela al sostegno u della punteggiata che contiene J e j' è parellela al sostegno u' della punteggiata contenente I', lo stesso punto N si troverà altresì sul cerchio precedentemente descritto e perciò esso coinciderà con l'uno o l'altro dei punti d'intersezione della retta $U''M$ con questo cerchio. Trovato N per completare la soluzione converrà poi tracciare $UN \equiv i$, $U'N \equiv j'$ e descrivere per J, I' le u, u' ordinatamente parallele ai raggi i, j'.

Osservando che su UU' si possono descrivere tanto da una parte che dall'altra archi di cerchio capaci dell'angolo θ, si deduce che il problema ha in generale 4 soluzioni, le quali si riducono a 2 nel caso di $\theta = 90°$.

Se U, U' cadono da bande opposte di $U''M$ nessuna soluzione viene a comparire, ma se U, U' sono dalla stessa parte di $U''M$ può accadere che uno od ambedue i cerchi passanti per U, U' siano tangenti od esterni ad $U''M$ per modo che le soluzioni possono ridursi a 3, 2, una o nessuna.

Se poi $\theta = 0$ i sostegni delle due punteggiate sono paralleli o coincidenti e la costruzione del problema si riduce a condurre da U, U' le parallele ad

---

(*) Potrà essere un utile esercizio pei giovani quello di completare la presente discussione trovando il numero delle soluzioni corrispondenti ai diversi casi particolari possibili, per il che sarà utile introdurre gli angoli α, α' sotto i quali sono veduti i segmenti MU'' ed NU'' dai punti di contatto dei cerchi passanti rispettivamente per M ed U'', N ed U'' e tangenti ad s. [N. d. Red.].

$U''M$ e così si ottengono i, j', conducendo poi da J, I' le parallele alla stessa $U''M$ si hanno i sostegni u, u', che coincideranno fra loro nel caso di JI' parallela ad $U''M$. Il problema ha in questo caso una sola soluzione (*).

250. *Dato il triangolo* ABC $(=\triangle)$ *e il punto interno* M, *si tirino per i vertici le trasversali* AM, BM, CM *ad incontrare i lati opposti in* A', B', C' *e si costruiscano i coniugati armonici* M_a, M_b, M_c *di* M *rispetto ad* A *e* A', B *e* B', C *e* C'. *Posto* BA' : A'C = m, CB' : B'A = n, AC' : C'B = p, *dimostrare che l'area del triangolo* $M_a M_b M_c$ *è data da*

$$4\triangle : \left[\left(m+1-\frac{1}{p}\right)\left(n+1-\frac{1}{m}\right)\left(p+1-\frac{1}{n}\right)\right].$$

(A. Lugli).

Dimostrazione del Sig. Prof. *F. Ferrari* a Chieti.

Le trasversali (AM_a, BM_a, CM_a), (AM_b, BM_b, CM_b), (AM_c, BM_c, CM_c) dividono i lati opposti di ABC rispettivamente nei rapporti $(m, -n, -p)$, $(-m, n, -p)$, $(-m, -n, p)$. La presente quistione è quindi un corollario della seguente più generale, che passo a risolvere:

Dati nel piano di un triangolo ABC *tre punti* P', P'', P''', *esprimere l'area del triangolo* P' P'' P''' *in funzione dei rapporti secondo cui le trasversali che uniscono i vertici di* ABC *a ciascuno dei punti* P', P'', P''' *dividono i lati opposti di* ABC.

Indico con P_a', P_b', P_c' i punti ove AP', BP', CP' incontrano BC, CA, AB, ecc., e pongo

$$BP_a' : P_a'C = m', \quad CP_b' : P_b'A = n', \quad AP_c' : P_c'B = p', \text{ ecc.}$$

donde componendo

$$BP_a' : BC = m' : m'+1, \text{ ecc.}$$

Dal triangolo $AP_a'C$ segato dalla BP_b' si ha pel teorema di Menelao

$$\frac{AP'}{P'P_a'}\,\frac{P_a'B}{BC}\,\frac{CP_b'}{P_b'A} = -1$$

onde per le precedenti relazioni

$$\frac{AP'}{P'P_a'} = \frac{m'+1}{m'n'}, \quad \text{e componendo,} \quad \frac{AP'}{AP_a'} = \frac{m'+1}{m'n'+m'+1}.$$

Analogamente si troverà

$$\frac{AP''}{AP_a''} = \frac{m''+1}{m''n''+m''+1}.$$

Inoltre dalle relazioni

$$\frac{BP_a'}{BC} = \frac{m'}{m'+1}, \quad \frac{BP_a''}{BC} = \frac{m''}{m''+1},$$

(*) Un'altra risposta alla quistione pervenne dal Sig. *V. Columbo*, studente nella R. Università di Napoli.

sottraendo si ha

$$\frac{P_a' P_a''}{B\,C} = \frac{m'' - m'}{(m'+1)(m''+1)}.$$

Perciò

$$\frac{A\,P'\,P''}{A\,B\,C} = \frac{A\,P'\,P''}{A\,P'\,P_a''} \cdot \frac{A\,P'\,P_a''}{A\,P_a'\,P_a''} \cdot \frac{A\,P_a'\,P_a''}{A\,B\,C} =$$

$$\frac{A\,P''}{A\,P_a''} \cdot \frac{A\,P'}{A\,P_a'} \cdot \frac{P_a'\,P_a''}{B\,C} = \frac{m'' - m'}{(m'\,n' + m' + 1)(m''\,n'' + m'' + 1)}$$

Analogamente si troverà

$$\frac{A\,P''\,P'''}{A\,B\,C} = \frac{m''' - m''}{(m''\,n'' + m'' + 1)(m'''\,n''' + m''' + 1)}$$

$$\frac{A\,P'''\,P'}{A\,B\,C} = \frac{m' - m'''}{(m'''\,n''' + m''' + 1)(m'\,n' + m' + 1)}$$

Ora si sa che, tenendo conto del segno, è sempre

$$P'\,P''\,P''' = A\,P'\,P'' + A\,P''\,P''' + A\,P'''\,P'$$

e perciò

$$\frac{P'\,P''\,P'''}{A\,B\,C} = \frac{A\,P'\,P''}{A\,B\,C} + \frac{A\,P''\,P'''}{A\,B\,C} + \frac{A\,P'''\,P'}{A\,B\,C}.$$

Nella quale sostituendo i valori precedenti e riducendo, si ottiene

$$\frac{P'P''P'''}{ABC} = \frac{m'n'(m''' - m'') + m''n''(m' - m''') + m'''n'''(m'' - m')}{(m'n' + m' + 1)(m''n'' + m'' + 1)(m'''n''' + m''' + 1)} \quad [1]$$

In essa al posto di $m'\,n'$ si può anche porre $\frac{1}{p'}$, ecc.

Il numeratore del secondo membro della [1] si può anche scrivere così

$$\begin{vmatrix} m'\,n' & 1 & m' \\ m''\,n'' & 1 & m'' \\ m'''\,n''' & 1 & m''' \end{vmatrix}$$

La [1] non è che la nota formola che dà l'area del triangolo in funzione delle coordinate baricentriche relative dei vertici riferite ad un triangolo fondamentale $A\,B\,C$, poichè $(m'\,n',\ 1,\ m')$, $(m''\,n'',\ 1,\ m'')$, $(m'''\,n''',\ 1,\ m''')$ non sono che le coordinate baricentriche relative di P', P'', P''', la quale formola risulta così stabilita direttamente.

Per risolvere la questione proposta non si ha che a porre nella [1] i rapporti corrispondenti ad M_a, M_b, M_c e tener presente che $m\,n\,p = 1$.

258.** *Due fasci proiettivi di raggi* (S, σ), (S′, σ′) *essendo dati in due piani diversi, ed intorno a due diversi punti, proiettare l'uno di essi* (S′, σ′) *nel fascio* (S_1, σ) *sul piano dell'altro, per modo che, in* σ, *il centro di proiettività di* (S), (S_1) *sia un dato punto* S_2. (A. Del Re).

Soluzione del Sig. Prof. *V. Retali* a Milano.

Sulla retta u_1 comune ai due piani σ e σ' i fasci S e S' segnano due punteggiate proiettive $u_1(P)$ e $u_1(P_1)$; sia C la intersezione di u_1 col raggio

$|SS_2| \equiv c$ del fascio S, e C_1 il punto corrispondente a C nella u_1 (P_1): il raggio $|SC_1| \equiv c_1$ dovrà passare per S_1; se ora denotiamo con B il punto C_1, considerato come appartenente alla u_1 (P), e B_1 è il suo corrispondente nella u_1 (P_1), la retta $|S_2 B_1| \equiv b_1$ passerà pure per S_1; questo punto è dunque la intersezione delle due rette $|S_2 B_1|$ e $|SB|$ (*).

259.** *Si vuole proiettare una* u' *di due punteggiate proiettive, sopra un piano* σ *condotto pel sostegno* u *dell'altra, per modo che la proiezione contenga un assegnato punto* M *di* σ, *ed abbia con* (u) *un dato asse di proiettività* u''.

(A. Del Re).

Soluzione del Sig. Prof. *V. Retali* a Milano.

Il sostegno u_1' della punteggiata proiezione è la retta che unisce M col punto $(u'\,\sigma)$: se ora poniamo $(u\,u_1') \equiv B$ e $(u\,u'') \equiv C$, poichè (u) e (u_1') debbono avere u'' per asse di proiettività, sarà $(u_1'\,u'') \equiv B_1'$ e C_1' coincide con B; se denotiamo con B' e C' i punti che nella (u') corrispondono rispettivamente ai punti B e C della (u), le due rette $|B'B_1'|$ e $|BC'|$ si segano nel centro di proiezione cercato (**).

263*. *Di un trapezio simmetrico calcolare i lati ed il raggio del cerchio circoscritto in funzione dell'angolo acuto* A, *della diagonale* 2d *e dell'area* m².

(G. Bellacchi).

Soluzione del Sig. *G. Manfredini*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Venezia (***).

Sia $ABCD$ il trapezio che si considera di basi AB, CD. Pongasi $AD = x$, $DC = y$, $AB = z$ e si chiami h la sua altezza DE, sarà $AE = h\cot A$ ed $AB = BE + h\cot A$, $DC = BE - h\cot A$. Ora dalle relazioni evidenti $BE\,.\,DE = m^2$, $\overline{BD}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{EB}^2$, sostituendo si ha

$$(y + h\cot A)\,.\,h = m^2, \qquad 4d^2 = h^2 + (y + h\cot A)^2.$$

Da queste, eliminando la quantità $y + h\cot A$, si deduce l'equazione biquadratica

$$h^4 - 4d^2h^2 + m^4 = 0,$$

che risoluta dà

$$h = \sqrt{2d^2 \pm \sqrt{4d^4 - m^4}} = \sqrt{d^2 + \frac{m^2}{2}} \pm \sqrt{d^2 - \frac{m^2}{2}}.$$

(*) Il problema è stato risoluto anche dai Sigg. *V. Columbo*, Dott. *F. Mariantoni* e Professor *E. Nannei*.

(**) Il problema è stato risoluto anche dai Sigg. *V. Columbo*, Dott. *F. Mariantoni* e Professor *E. Nannei*.

(***) Soluzione analoga dal Sig. Prof. *V. Retali* a Milano. Altre soluzioni dai Sigg. *E. Biscaldi*, licenziato dal R. Liceo di Novara e *G. Gallucci*, studente nella R. Università di Napoli.

Le espressioni per i lati x, y, z si possono ora ottenere osservando che

$$x = h : \operatorname{sen} A, \quad y = \frac{m^2}{h} - h \cot A, \quad z = \frac{m^2}{h} + h \cot A.$$

Il raggio del cerchio circoscritto al trapezio è poi evidentemente $= \dfrac{d}{\operatorname{sen} A}$.

264*. *Se* A′, B′, C′ *sono punti dei lati* a, b, c *di un triangolo* ABC *tali che* $BA' : A'C = CB' : B'A = AC' : C'B = m : n$, *posto* $B'C' = a'$, $C'A' = b'$, $A'B' = c'$, *dimostrare la relazione*

$$\Sigma \overline{AA'}^2 + \frac{(m-n)^2 - mn}{(m+n)^2} \Sigma a^2 = 2 \Sigma a'^2.$$

(P. Castelli).

Dimostrazione del Sig. *A. Bozal Obejero*, professore nell' Istituto di Bilbao (Spagna).

Chiamando P, P', P'', le potenze totali dei triangoli ABC, $A'B'C'$ e di quello i cui lati sono AA', BB', CC', è noto che si ha

$$2P' = \frac{2(m^2 - mn + n^2)}{(m+n)^2} P, \quad P'' = \frac{m^2 + mn + n^2}{(m+n)^2} P.$$

Sottraendo queste eguaglianze membro a membro si deduce

$$P'' + \frac{(m-n)^2 - mn}{(m+n)^2} P = 2P',$$

od anche, sostituendo a P'', P e P' le somme che rappresentano

$$\frac{1}{2} \Sigma \overline{AA'}^2 + \frac{1}{2} \frac{(m-n)^2 - mn}{(m+n)^2} \Sigma a^2 = \Sigma a'^2,$$

da cui si ha infine

$$\Sigma \overline{AA'}^2 + \frac{(m-n)^2 - mn}{(m+n)^2} \Sigma a^2 = 2 \Sigma a'^2, \qquad \text{c. d. d. (*)}.$$

265*. *Dimostrare che, per* n *intero e positivo qualunque, l'espressione*

$$3^n [1296 \,.\, 3^{4n-3} + 3(3^{4n-1} - 2^{4n+4}) - 2^{4n}]^n - 2^{4n} \left(\frac{9^{2n} - 4^{2n}}{13} \right)^n$$

è divisibile per 1895. (S. Gatti).

Dimostrazione del Sig. *G. Vitali*, licenziato dal R. Liceo di Ravenna (**).

Consideriamo l'espressione

$$a^n [b^4 a^{4n+1} + a(a^{4n-1} - b^{4n+4}) - b^{4n}]^n - b^{4n} \left(\frac{a^{4n} - b^{4n}}{a^2 + b^2} \right)^n$$

(*) Dimostrazioni sostanzialmente analoghe pervennero dai Sigg. *G. Gallucci*, studente nella R. Università di Napoli e Prof. *V. Retali* a Milano.

(**) Altre dimostrazioni pervennero dai Sigg. *L. Agosta* (R. Ist. tec. Piacenza), *S. Resta* (R. Ist. tec. Bari) e *G. Gallucci*, studente a Napoli.

in cui a, b, n sono interi e positivi. Essa è divisibile per

$$a\,[b^4 a^{4n+1} + a\,(a^{4n-4} - b^{4n+4}) - b^{4n}] - b^4\,\frac{a^{4n} - b^{4n}}{a^2 + b^2}$$

cioè per

$$(a^{4n} - b^{4n})\,(b^4 a^2 + a) - b^4\,\frac{a^{4n} - b^{4n}}{a^2 + b^2}$$

o anche per

$$[(b^4 a^2 + a)\,(a^2 + b^2) - b^4]\,\frac{a^{4n} - b^{4n}}{a^2 + b^2}$$

e più semplicemente per

$$[(b^4 a^2 + a)\,(a^2 + b^2) - b^4]\,(a^2 - b^2).$$

In particolare facendo $a = 3$, $b = 2$ si ha l'espressione

$$3^n\,[1296\,.\,3^{4n-3} + 3\,(3^{4n-4} - 2^{4n+4}) - 2^{4n}]^n - 2^{4n}\left(\frac{9^{2n} - 4^{2n}}{13}\right)^n$$

che è divisibile quindi per

$$[(2^4\,.\,3^2 + 3)\,(3^2 + 2^2) - 2^4]\,(3^2 - 2^2)$$

ossia per 1895 . 5.

266'. *Se di un triangolo* ABC *inscritto in un cerchio il vertice* A *rimane fisso e i vertici* B *e* C *variano così che la somma* $\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2$ *rimanga costante, dimostrare che il luogo del punto medio di* BC *è una retta perpendicolare al diametro passante per* A (*). (S. Gallucci).

Dimostrazione del Sig. *S. Resta*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari.

Chiamando M il punto medio del lato BC, per un noto teorema si ha subito $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,\overline{AM}^2 + 2\,\overline{BM}^2$ e poichè per ipotesi $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 =$ costante, segue che è pure costante la somma $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$, e quindi costante la quantità $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - \overline{OM}^2 - \overline{BM}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{OM}^2$, dove O designa il centro del cerchio circoscritto al $\triangle$. Il punto M gode dunque della proprietà che la differenza dei quadrati delle sue distanze da due punti fissi A e O è costante e perciò il luogo di esso è una retta perpendicolare alla congiungente questi due punti (Baltzer: *Geo.*, § 14, 2.)

Il Sig. Prof. *V. Retali*, osserva, nello stesso ordine d'idee della dimostrazione precedente, che posto $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 4\,k^2$ e indicando con r il raggio del cerchio circoscritto al $\triangle$ ed A' il punto diametralmente opposto ad A, si ha

$$\overline{AM}^2 - \overline{A'M}^2 = 4\,(k^2 - r^2),$$

(*) Il Sig. *Gallucci* A. della quistione avverte la Redazione che la quistione stessa è stata da lui rinvenuta in questi ultimi giorni, espressa quasi nei medesimi termini, nel periodico belga *Mathesis*, contraddistinta col n. 137 e dovuta al Sig. V. Jamet. Esponendo le ricerche le quali lo condussero alla proposizione in parola, il Sig. Gallucci avverte poi che un teorema analogo esiste nella stereometria ed è il seguente: *Se di un tetraedro* ABCD, *inscritto in una sfera, il vertice* A *rimane fisso e i vertici* B, C, D *variano in modo che la somma* $\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{AD}}^2$ *rimanga costante, il luogo del baricentro di* BCD *è un piano perpendicolare al diametro della sfera passante per* A.

cosicchè il luogo di M è la perpendicolare ad AA' nel punto X tale che $AX : A'X = (k^2 + r^2) : (k^2 - r^2)$.

Per $k^2 = - r^2$ il luogo è la tangente in A; per $k^2 = r^2$, la tangente in A'; per $k^2 = 0$, il diametro perpendicolare ad AA', per $k^2 = \infty$, la retta all'infinito.

Dimostrazione del Sig. *G. Taschieri,* alunno del R. Istituto tecnico di Piacenza.

Si proiettino i punti B e C sul diametro AO in B' e C' e si tiri per M, centro di BC, la perpendicolare MH ad AO. Si ha subito $B'H = HC'$ e chiamando r il raggio del cerchio, per un teorema noto: $\overline{AB}^2 = 2r \, . \, AB'$, $\overline{AC}^2 = 2r \, . \, AC'$, donde sommando segue:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2r \, . \, (AB' + AC').$$

Ma per essere H punto medio di $B'C'$, $AB' + AC' = 2AH$, onde

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 4 \, . \, r \, . \, AH.$$

Ora l'ipotesi di $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ costante porta che AH è invariabile, cosicchè il luogo del punto M è appunto la perpendicolare MH al diametro AO (**).

267*. *Se si costruiscono i punti simmetrici* I', I'', I''' *del centro* I *del cerchio inscritto in un triangolo* ABC *rispetto ai lati* BC, CA, AB, *le rette che congiungono questi punti ordinatamente con* A, B, C *concorrono in un punto.*

(S. Catania).

Dimostrazione del Sig. *G. Gallucci*, studente nella R. Università di Napoli.

Siano A', B', C' i punti in cui AI', BI'', CI''' tagliano i lati BC, CA, AB del triangolo e conducansi da A' ed I' le perpendicolari $A'D'$, $A'E'$ ed $I'D$, $I'E$ ad AB, AC. È chiaro che si avrà $D'A' : A'E' = DI' : I'E$, ma $BA' = D'A' : \text{sen}\, B$, $A'C = A'E' : \text{sen}\, C$, onde

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{D'A'}{A'E'} \cdot \frac{\text{sen}\, C}{\text{sen}\, B} = \frac{DI'}{I'E} \cdot \frac{\text{sen}\, C}{\text{sen}\, B}.$$

Rimane ora a trovare il valore del rapporto $DI' : I'E$. Osservando per l'ipotesi che i due angoli $I'BA$, $I'CA$ sono rispettivamente eguali a $B + \frac{1}{2} B$ e $C + \frac{1}{2} C$, si deduce subito $DI' = BI' \, . \, \text{sen}\, \frac{3}{2} B$, $I'E = I'C \, \text{sen}\, \frac{3}{2} C$, onde

$$\frac{DI'}{I'E} = \frac{BI'}{I'C} \cdot \frac{\text{sen}\, \frac{3}{2} B}{\text{sen}\, \frac{3}{2} C} = \frac{BI}{IC} \, \frac{\text{sen}\, \frac{3}{2} B}{\text{sen}\, \frac{3}{2} C} = \frac{\text{sen}\, \frac{1}{2} C \; \text{sen}\, \frac{3}{2} B}{\text{sen}\, \frac{1}{2} B \; \text{sen}\, \frac{3}{2} C},$$

(**) Altre dimostrazioni pervennero dai Sigg. *E. Biscaldi*, *F. Marzani* (R. Liceo Novara) e dal Sig. Prof. *G. Giovannini* a Mondragone.

per cui finalmente

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} \frac{1}{2} C \operatorname{sen} \frac{3}{2} B}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} \frac{1}{2} B \operatorname{sen} \frac{3}{2} C}$$

e analogamente

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \operatorname{sen} \frac{3}{2} C}{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} \frac{1}{2} C \operatorname{sen} \frac{3}{2} A}, \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} \frac{1}{2} B \operatorname{sen} \frac{3}{2} A}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \operatorname{sen} \frac{3}{2} B}.$$

Moltiplicando queste tre relazioni membro a membro segue

$$\frac{BA'}{B'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1,$$

cosicchè pel teorema di CEVA, le tre rette AI', BI'', CI''' concorrono in un punto.

Dimostrazione del Sig. Prof. V. *Retali* a Milano.

I due triangoli ABC e $I'I''I'''$ sono polari reciproci rispetto al cerchio di centro I e raggio eguale a $r\sqrt{2}$, se r è il raggio del cerchio inscritto, essi sono dunque omologici.

Osservazione. Se sopra i raggi I_1, I_2, I_3 che vanno ai punti di contatto, a partire da questi punti e nel medesimo senso si staccano tre segmenti eguali $11'$, $22'$, $33'$, i due triangoli ABC e $1'2'3'$ sono omologici.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

303. Risolvere il sistema d' equazioni

$$\begin{aligned} a(1+x) &= (y+z)^2 \\ b(1+y) &= (z+x)^2 \\ c(1+z) &= (x+y)^2. \end{aligned}$$

304*. Se A, B, C sono i punti simmetrici del centro del circolo circoscritto al triangolo DEF rispetto ai lati EF, FD, DE, le rette AD, BE, CF concorrono in un punto che è il centro del circolo passante pei punti medi dei lati del triangolo DEF.

S. RESTA.

(*) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle Scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle Scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

305*. Dimostrare che in un triangolo rettangolo, di cui C è l'angolo retto, si ha la relazione

$$a\left(1-\cot^2\frac{A}{2}\right)+2b\cot\frac{A}{2}=0.$$

e in qualunque triangolo rettilineo, la relazione

$$ac\,\mathrm{sen}\,(A-B)=(a^2-b^2)\,\mathrm{sen}\,A.$$

G. Giovanetti.

306*. È dato un semicerchio AMB, di diametro AB. Condurre al medesimo una tangente MT, terminata al prolungamento del diametro, in modo da formare con esso un angolo, da determinarsi, tale che facendo ruotare la figura intorno ad AB la superficie generata dal segmento MT sia in un rapporto dato n con quella della sfera generata da AMB, o che siano in un rapporto dato n' la superficie conica generata da MT e quella della zona sottostante al cono. – Discussione.

F. Celestri.

307*. Se a, b, c sono le misure dei lati di un triangolo, ed α, β, γ le misure delle distanze dei suoi vertici da un punto del cerchio circoscritto, si ha

$$(a^2-\beta^2+\gamma^2)(b^2-\gamma^2+\alpha^2)(c^2-\alpha^2+\beta^2)=$$
$$(a^2+\beta^2-\gamma^2)(b^2+\gamma^2-\alpha^2)(c^2+\alpha^2-\beta^2).$$

S. Catania.

308*. Essendo dato nello spazio un numero dispari di punti $O_1, O_2, \ldots O_{2n+1}$, e preso ad arbitrio un punto P, si trovi di questo il simmetrico P_1 rispetto al centro O_1, poi il simmetrico P_2 di P_1 rispetto al centro O_2; e così di seguito finchè si ottenga P_{2n+1} simmetrico di P_{2n} rispetto al centro O_{2n+1}, e si ripeta ancora, partendo dal punto P_{2n+1}, l'operazione prima fatta partendo dal punto P; s'otterrà così in fine il punto P_{4n+2}. Dimostrare che questo punto coincide con P.

G. Biasi.

309**. Dimostrare che la potenza di un triangolo è eguale alla semisomma delle potenze dei triangoli aventi per vertici i centri dei quadrati costruiti esteriormente ed internamente sui lati del triangolo.

A. Bozal Obejero.

310. È noto che il problema analogo a quello di Malfatti nello spazio è più che determinato epperò generalmente impossibile. Trovare le (due) relazioni che devono passare fra i sei spigoli di un tetraedro affinchè esistano quattro sfere ognuna delle quali tocchi le altre tre e tre delle facce del tetraedro.

G. Loria.

311.** Eliminare x ed y dal sistema

$$a^2 y^2 (2rx + dy)^2 = c^2 x^2 (1 + r y^2)$$
$$2a^2 y \, (2rx + dy) = cx \, (dx + cy - 2a)$$
$$c^3 x^3 + 8a^4 y^2 (2rx + dy) = 4a^2 cx \, (rx^2 + cy^2 + 2dxy - 2ay).$$

G. Frattini.

312.** Eliminare x ed y dal sistema

$$(2arxy + ady^2 - cx)^2 = c^2 x^2 \left(1 + ry^2 - \frac{cy}{a}\right)$$
$$2a\,(2arxy + ady^2 - cx) = cx\,(dx + cy - 2a)$$
$$c^3x^3 + 8a^3y\,(2arxy + ady^2 - cx) = 4a^2cx\,(rx^2 + cy^2 + 2dxy - 2ay).$$

G. Frattini.

313.** Se $ABC \equiv abc$ è un triangolo in un piano σ, e sono e, f due rette condotte ordinatamente per A, B in σ, per ogni punto P, di σ, posto

$$P(A, B, C) \equiv p, q, r; \quad (cbep) = u, \quad (cafq) = v, \quad r(e, f) \equiv E, F$$

si ha, θ essendo l'argomento del numero complesso $u + iv$,

$$\theta = \text{arc . tg}\,(CcEF).$$

A. Del Re.

314. Mostrare che, l'equazione cubica in ρ

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \rho - (\beta^2 + \gamma^2) & \alpha\beta + 2\gamma' & \gamma\alpha - 2\beta' \\ \alpha\beta - 2\gamma' & \rho - (\gamma^2 + \alpha^2) & \beta\gamma + 2\alpha' \\ \gamma\alpha + 2\beta' & \beta\gamma - 2\alpha' & \rho - (\alpha^2 + \beta^2) \end{vmatrix} = 0,$$

quando si ponga

$$\omega^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \qquad \omega'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2,$$
$$\omega\,\omega' . \cos\theta = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

si riduce all' altra

$$\rho^3 - 2\,\omega^2\rho^2 + (\omega^4 + 4\,\omega'^2)\,\rho - 4\,\omega^2\,\omega'^2 \operatorname{sen}^2\theta = 0,$$

ed ha una sola radice reale inferiore ad $\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta$.

NB. Io ho incontrato la precedente equazione in alcune ricerche intorno alla distribuzione delle accelerazioni nei moti rigidi dei solidi; e, dato il carattere *invariante*, rispetto ad una trasformazione di coordinate delle quantità ω, ω', θ, ho potuto riconoscere, SENZA CALCOLI, che *sviluppare il determinante* (1) *è come sviluppare il determinante*

$$(2) \; . \; . \; . \; . \; \begin{vmatrix} \rho & 0 & -2\beta_1 \\ 0 & \rho - \omega^2 & 2\alpha_1 \\ 2\beta_1 & -2\alpha_1 & \rho - \omega^2 \end{vmatrix},$$

dove ora sia $\omega'^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2$, $\omega' . \cos\theta = \alpha_1$.

Può qualche lettore del *Periodico* arrivare a mostrare l'identità fra i determinanti (1) e (2) senza confrontarne gli sviluppi?

A. DEL RE.

315.** L'espressione $[(n+1)\,b - na]^2\,a^n - b\,(b^{n+1} + ab^n - a^{n+1})$ è divisibile per $(a-b)^3$; determinare il quoziente; dedurne in particolare la somma $2^{2n}\,(3\,n - 1)^2 + 2^{2(n+1)}$ divisa per 27 dare per resto 5.

G. BELLACCHI.

316*. Un cono circoscritto ad una sfera ha per base il cerchio del contatto, la superficie laterale (o totale) ha il rapporto m con la calotta iscritta (o con l'intera superficie del segmento sferico iscritto); determinare l'angolo al vertice del cono ed il rapporto fra i volumi del cono e del segmento sferico.

G. BELLACCHI.

317*. Se in un cerchio O s'inscrive un esagono $AEBFCD$, tale che sia $AD = AE$, $BE = BF$, $CD = CF$, dimostrare che: 1° le diagonali AF, BD, CE passano per lo stesso punto; 2° l'esagono $AEBFCD$ è doppio del triangolo ABC; 3° la somma dei quadrati dei lati dell'esagono è doppia del quadrato del lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio O aumentato del quadrato del segmento congiungente O coll'ortocentro di ABC.

S. GATTI.

RIVISTE E NOTIZIE BIBLIOGRAFICHE

Prof. V. AICARDI. — *Il triangolo* — E. Loescher. Roma, 1896. – Prezzo Lire 4.

La geometria del triangolo ha ricevuto da circa un ventennio un impulso considerevole per opera di diversi distinti matematici, fra i quali sono particolarmente da annoverare il Lemoine, de Longchamps, Brocard, Neuberg. Le ricerche compiute da questi scienziati e da molti altri, fra cui è ben giusto ricordare il nostro Prof. Cesàro, sulle proprietà del triangolo, disseminate per la maggior parte negli atti della *Association Française pour l'Avancement des Sciences*, nel *Journal de Mathématiques* del Prof. Longchamps, nei *Nouvelles Annales de Mathématiques* e nel periodico *Mathesis*, sono venute in breve a costituire un nuovo ed importante capitolo della geometria elementare, comunemente designato col nome di *Geometria elementare recente*, ed hanno fornito occasione a lavori sistematici di grande interesse sull'argomento fuori della patria nostra (*). E però è venuta molto opportuna la pubblicazione del libro del Prof. Aicardi, quantunque non sia ispirata che in limitata misura alla geometria recente ed assomigli molto nella sua parte teorica ad un lavoro d'ignoto raccoglitore col titolo: *Relations entre les éléments d'un triangle*, apparso da pochi anni in Francia. Ma in realtà qui fra noi credo non abbia nulla di analogo, anche nella parte pratica, salvo forse un libretto di problemi dell'Ing. Nicita sulla *Descrizione del cerchio*.

L'opera, come l'A. avverte nella prefazione, è divisa in due parti ben distinte; nella prima si enunciano e si dimostrano relazioni degli elementi del triangolo fra loro, con altezze, mediane e bisettrici ed anche coi cerchi inscritti, circoscritti, ex-inscritti e d'Eulero; la seconda è una raccolta di 7840 problemi sulla costruzione del triangolo, che sono raggruppati in serie principali, ciascuna delle quali si suddivide in serie secondarie, distribuzione originale e ben fatta per evitare ripetizioni che l'A. spiega con parecchi esempi, sia che si ricerchi un problema, sia che di un dato problema si voglia la soluzione. In generale le dimostrazioni sono ben condotte ed abbastanza sviluppate; alcune peraltro un po' laboriose, come per il Teor. 45 a pag. 51, pel quale se ne può ricavare una assai semplice dalle formule 1', 2', 3', 4' che nel Corol. 5 a pag. 27 danno i valori di r, r', r'', r'''. Bene dedotti i corollari, per quanto in qualche caso tale denominazione non sia matematicamente esatta. Il linguaggio alcune volte lascia a desiderare per chiarezza e per precisione; così ad esempio non è esatto il seguente enunciato (Corol. 1° e 2°, pag. 4): il luogo geometrico dei vertici dei triangoli della stessa base $BC = a$ ed uguale altezza h [superficie S] è *una parallela alla base* condotta alla distanza h [determinata dalla relazione $S = \frac{a}{2} . h$]; nè sono corrette le seguenti espressioni: è costante un *dato* rapporto degli altri due lati (del triangolo) [Teor. 18, pag. 22], – il centro del cerchio ...... *è sulla metà della retta* ..... [Teor. 29, pag. 34]. Nel teorema 52 e seguito viene trattata la Geometria elementare moderna; ed è qui nuovamente da

(*) Citiamo ad es. il capitolo supplementare dell'opera: Casey (J.). *A Sequel to the first six Books of the elements of Euclid*, una nota molto estesa del Prof. Neuberg (J.) [*Sur la géométrie récente du triangle*] in appendice al *Traité de Géométrie* dei Proff. Rouché et Comberousse e le opere separate: Milne and Simmons (T. C.). *Companion to the weekly problem papers* — Emmerich (A.). *Die Brocardschen Gebilde.*

osservare che a questa importante parte della geometria del triangolo l'A. ha dato uno sviluppo insufficiente, limitandosi a poche proprietà delle antiparallele, delle simediane, delle coniugate isogonali e del circolo d'Eulero. Pochi gli errori di stampa; nitide le figure, alcune delle quali però poco precise, specialmente quando trattisi di circonferenze tangenti fra loro e con rette.

In conclusione è un libro che io consiglio ben volentieri ai giovani studiosi, augurandomi che l'egregio A. in una prossima ristampa, tolte le poche e lievi mende cui ho accennato, dia alla 1ª parte quello sviluppo che è necessario, perchè lo studio del triangolo possa dirsi completato, avendo egli ora tralasciato altresì parecchie relazioni metriche importanti.

U. Ceretti.

Elementi di Geometria, a uso delle Scuole Secondarie inferiori, di G. Riboni, corredati da una raccolta di circa seicento esercizi, per cura di D. Gambioli. — Bologna, Ditta Nicola Zanichelli, 1896 — Prezzo: L. 2.

Di quest'operetta io tenni parola in questo periodico (*), allorchè apparve la prima edizione ed ora che è comparsa la seconda, assai migliorata e tale da renderla ancor meglio adattata alle Scuole secondarie inferiori, sono lieto di constatare, a lode degli autori, che era nel vero asserendo che il libro non pareva destinato a finire dimenticato nei polverosi scaffali delle librerie.

A. L.

CORRADO CIAMBERLINI. — *Elementi di geometria* per le scuole tecniche, normali e professionali. - Parte 1ª, planimetria. — Montegiorgio, 1895. — Prezzo: L. 2,50.

L'A. ha ben compreso come deve essere fatto un libro per queste scuole, cosicchè il suo, apparentemente modesto, ma scritto con forma facile e piana, contenente tutto quello che deve essere insegnato nelle scuole, alle quali è destinato, e ottimi e numerosi esercizi, è riuscito fra i migliori e tale da fare desiderare che presto vegga la luce anche la seconda parte.

A. M.

VARIETÀ

AVVISO.

L'Associazione *Mathesis* fra Insegnanti di matematica di Scuole secondarie fa noto che si è costituito il suo Comitato Direttivo.

Il primo anno sociale comincierà col *1° luglio 1896*.

La sede sociale per il primo biennio (1896-97 e 97-98) è *Torino* presso il *Presidente*, Prof. Rodolfo Bettazzi, *Corso S. Martino, 1*.

Per quanto concerne l'amministrazione, l'inscrizione a socio, il pagamento delle quote, le informazioni, le richieste di stampati, ecc., occorre rivolgersi al *Segretario-Tesoriere* Prof. Francesco Giudice, *Corso Ugo Bassi, 40 – Genova*.

Il Comitato farà conoscere dopo la sua prima adunanza ordinaria autunnale il regolamento che avrà adottato per il funzionamento dell'Associazione.

Torino, 3 aprile 1896.

Per il Comitato: Prof. Rodolfo Bettazzi.

(*) Vol. VII, pp. 77-78.

Finita la Redazione il dì 13 aprile 1896.

La cagione del lutto dell'odierna puntata del Periodico di matematica è ormai nota ai lettori: nè io ricorderò loro, dopo il giudizio che ne avranno recato essi stessi, quale e quanta iattura sia la morte di **Aurelio Lugli**, non solo per le sorti del Periodico, ma altresì per la scienza e l'insegnamento.

Incaricato dal Consiglio direttivo dell'Associazione *Mathesis* della cura del Periodico fino al termine dell'annata in corso, mi sono messo all'opera con animo volonteroso, sicuro che alla mia pochezza supplirà la copia di eccellenti scritti che il compianto professore teneva in serbo per la pubblicazione (*). Cedo ora la parola al prof. Elia Millosevich, vicedirettore dell'Osservatorio astronomico del Collegio romano e professore nell'Istituto tecnico di Roma, come a quei che più di ogni altro, fra i numerosi amici del **Lugli**, ebbe con esso comunanza di vita e di uffici. Ma prima mi sia permesso di mandare, anche a nome di *Mathesis* e del suo presidente prof. Bettazzi, un ultimo saluto al caro Estinto; a un cuore che, diviso tra la famiglia, la scienza e l'amicizia, fu illustre tempio di domestiche e civili virtù. Possa un raggio della virtù di lui brillare sulla fronte de'suoi figlioletti divenuti adulti, e sia raggio che sul ciglio della sposa desolata terga le lagrime dell'ora presente.

G. Frattini.

✝

AURELIO LUGLI

Dal defunto Enrico Lugli e dalla vivente Teresa Bertelli nasceva il nostro **Aurelio** a Modena, il 6 dicembre 1853.

Perchè figlio unico, i genitori di lui poterono, ad onta di mezzi economici esigui, dargli una completa istruzione, con grande loro sacrificio e con sussidi esteriori.

Noi lo troviamo da prima studente alla Scuola tecnica, poi al patrio Istituto tecnico, nel quale conseguì il Diploma di Perito meccanico e Costruttore, nell'estate del 1871. Le classificazioni conseguite fino dai primi studi presagivano l'esito splendido col quale avrebbe il **Lugli** compiuto il corso dei medesimi.

(*) Per la precedenza nella stampa dei medesimi furono osservati e si osserveranno gl'impegni già presi dal Lugli.

Dall'Università di Modena, nella quale percorse il primo biennio della Facoltà delle scienze fisico-matematiche, passò, per i suoi meriti, alla Scuola Normale di Pisa; e fu proclamato, fra il plauso di uomini illustri, Dottore in scienze fisico-matematiche il 27 novembre 1876, con pieni voti assoluti e la lode; il Diploma di Magistero della R. Scuola Normale di Pisa porta la firma di Enrico Betti. Nell'anno 1877 gli veniva conferito dalla R. Università di Pisa il posto di perfezionamento in Fisico-matematica; subito dopo, dal Governo, quello di reggente di matematica nel R. Liceo di Catanzaro, e poi di titolare di 1ª classe nella R. Scuola tecnica *P. Metastasio* in Roma.

Nel 1879 creavasi in Roma l'Ufficio centrale di Meteorologia, e il Direttore di quell'Istituto eleggeva **Aurelio Lugli** quale assistente al servizio della prognosi del tempo, nel qual posto egli rimase dal dicembre 1879 fino al giorno della sua morte.

Classificato subito dopo l'eletto alla cattedra di fisica del R. Liceo *T. Mamiani* in Roma, vinceva il concorso al posto di titolare di matematica nel R. Istituto tecnico *Leonardo da Vinci*, e dall'ottobre 1888 insegnò matematica in ambiente numeroso, dove potè mettere a prova le attitudini didattiche eminenti di cui era fornito, e delle quali un illustre matematico, Valentino Cerruti, aveva già fatto fede in ufficiale documento al Governo.

Quando il prof. Davide Besso fondava il periodico di matematica per l'insegnamento secondario, rivolse gli occhi al **Lugli** per averlo come con-direttore, e, dopochè il Besso fu chiamato a più alti uffici, il **Lugli** ne rimase direttore di fatto, e quanto amore egli abbia posto nella direzione di questo periodico e con quanto disinteresse lo abbia retto, e quanto bene abbia recato e al corpo insegnante e agli allievi, non v'è alcuno che, occupandosi di matematica elementare, non lo sappia.

Circondato dalla stima universale per la sua dottrina e per l'equilibrio delle sue qualità morali, maestro severo, ma equanime, rigoroso nell'adempimento de' suoi obblighi, mite nel giudicare gli obblighi altrui, pareva destinato, anche fisicamente considerato, ad una vita lunga e felice. Tre innocenti bambini, natigli in seconde nozze da un'egregia signora, gli rendevano beata la vita domestica, che egli divideva colla vecchia sua madre, verso la quale ebbe culto degno di ammirazione.

Parve agli amici suoi che ai primi di maggio egli dimagrasse; invece era ferito a morte, come ben disse il Frattini in un momento solenne. Ed in verità il 23 maggio cadeva ammalato, e, prima che la scienza accertasse la malattia, egli moriva serenamente il 27 maggio verso mezzanotte.

Le pubblicazioni di **Aurelio Lugli** sono di due specie: alcune riguardano la matematica elementare, altre sono di meteorologia; le une e le altre in armonia coi posti che così degnamente occupava:

Alla prima categoria appartengono:

1. « Soluzione di alcuni problemi generali di geometria » (*Ist. Lombardo*, 1881).

2. « Soluzione d'un problema di geometria elementare » (*Rivista di matematica*, 1884).

3. « Alcuni teoremi generali sul moto d'una figura nello spazio » (Rivista citata, 1885).

4. « Superficie e volume dell'anello poligonale regolare e circolare » (Rivista citata, 1885).

5. « Volume dell'anello ellittico di rivoluzione. — Una questione di trigonometria » (Rivista citata, 1885).

6. « Sulla proiezione stereografica » (*Periodico di matematica*, 1886).

7. « Sulle frazioni decimali periodiche » (Periodico citato, 1887).

8. « Un problema d'aritmetica » (Periodico citato, 1890).

9. « Alcuni teoremi della recente geometria del triangolo » (Periodico citato, 1891).

10. « Alcuni problemi relativi alla divisione d'un poligono convesso in parti proporzionali a più segmenti dati » (Periodico citato, 1891).

11. « Volume del segmento sferico a due basi » (Periodico citato, 1892).

12. « Sopra una formola per la misura dei volumi » (Periodico citato, 1894).

13. « Alcuni teoremi di geometria » (Periodico citato, 1895).

Oltre queste Note noi dovremmo aggiungere un numero stragrande di riviste bibliografiche, di problemi proposti per esercizio, di soluzioni di essi, ecc. ecc.

Alla seconda categoria appartengono le Memorie seguenti:

A) « Sulla variazione media della temperatura in Italia con la latitudine ed altezza ». — Questa Memoria ha reso possibile di ridurre al livello del mare le temperature lette in un luogo qualunque in Italia (isoterme normali). *Annali di Metereologia*, 1882.

B) « Primi risultati sui presagi del tempo, fatti nell' Ufficio centrale di Meteorologia in Roma » (Annali citati, 1882).

C) « Sulla variazione media della tensione del vapore acqueo atmosferico in Italia secondo la latitudine ed altezza » (Annali citati, 1883).

D) « Sull'ipsometria barometrica ». — È un contributo notabile per migliorare la formola che dà l'altezza d'un luogo sul livello del mare con osservazioni barometriche. (Annali citati, 1883).

(Un riassunto di detta Nota trovasi nei transunti della R. Accademia dei Lincei, 1884).

E) « Risultati dei presagi del tempo fatti nell' Ufficio centrale di Meteorologia ». (Annali citati, 1885).

F) « Sul *Lehrbuch der Meteorologie* del dott. Sprung » (*Memorie della Società degli spettroscopisti italiani*, 1886).

G) « Periodi, intensità e traiettorie delle depressioni sull'Italia e paesi limitrofi nel decennio 1880-89 » (*Annali dell' Ufficio centrale di Meteorologia*, vol. X, 1888, pubblicato nel 1891).

Quest' ultima Memoria è un riassunto cartografico di tutto il lavoro fatto dal **Lugli** sopra la prognosi del tempo a proposito delle depressioni. Dodici Carte rappresentano lo stato di fatto del fenomeno per un decennio; da queste egli si riprometteva di poter cavare conclusioni importanti per la predizione delle burrasche nel nostro paese.

R. Osservatorio del Collegio Romano.

E. Millosevich.

FONDAMENTI
PER UNA TEORIA GENERALE DEI GRUPPI

DI RODOLFO BETTAZZI

INTRODUZIONE.

Lo scopo principale del presente lavoro è quello di dare la distinzione fra i gruppi finiti e gli infiniti. La questione, certamente non nuova, è stata studiata, anche recentemente, da altri autori.

Il DEDEKIND nella sua operetta *Was sind und was sollen die Zahlen* (Braunschweig, 1888) dà una definizione rigorosa di ciò che egli intende per gruppi infiniti: e veramente i gruppi che egli indica con tal nome hanno un carattere che anche in pratica si tradurrebbe colla frase « essere infiniti ». Ma dopo, egli dice finito ogni gruppo non infinito; e ciò, sebbene rigoroso, non pare sufficiente a dare un'immagine netta di quello che sia un gruppo finito. E resta inoltre il dubbio se tutti i gruppi che non sono infiniti siano di quelli a cui, presi isolatamente, ci sembrerebbe adatto il nome di finito, quando almeno si voglia con tal nome interpretare l'idea che grossolanamente nella pratica si enuncia col nome « finito ». Opportuno mi sembra quel nome per gli speciali gruppi finiti che il Dedekind stesso studia di poi come parte dei gruppi da lui detti semplicemente infiniti; ma non può dirsi se ogni gruppo finito (cioè non infinito) si possa ridurre ad uno di essi, non sembrandomi rigorosa la dimostrazione del suo Teorema del n. 159 (*), dal quale dipende quello del n. 160, dove egli invece asserisce che vi si possa ridurre.

Il CANTOR non dà una esplicita definizione del gruppo infinito. Nel suo opuscolo *Zur Lehre vom Transfiniten* (Halle-Saale, 1890) egli discute il concetto d'infinito, e sembra (vedi pag. 42) che egli intenda dire infinito il gruppo di potenza maggiore a qualunque gruppo finito. Ma la definizione di gruppo finito egli la dà solo più tardi (pag. 61) e sotto una forma non del tutto chiara e rigorosa, e, comunque, non completa, dimenticando di citare il principio d'induzione. Peraltro i suoi concetti si prestano abbastanza bene per essere completati e resi adatti all'uso: ed appunto da essi io ho preso l'idea per la definizione di gruppo finito che presento in questo lavoro.

Il prof. VERONESE nei suoi *Fondamenti di Geometria* (Padova 1891) fa nell'introduzione uno studio sui gruppi ordinati. Egli considera dei gruppi

(*) Cfr. il § 96 di questo scritto.

da dirsi finiti e dei gruppi da dirsi infiniti, sebbene queste parole egli le usi solo più tardi parlando di grandezze. Limitandosi ai gruppi ordinati, mentre colla sua serie limitata di 1ª specie (Introduzione n. 35) può dare un'idea esatta del gruppo finito, non può spingersi invece fino ad un concetto che tutti abbracci i gruppi infiniti, come fa p. es. il Dedekind in modo preciso ed esplicito. Di più il suo concetto di ordine è dato in modo assoluto fondandolo sul pensare gli enti *prima* o *poi;* e quindi mi pare che implichi necessariamente l'idea di tempo, estranea invece a quella generale di gruppo, o, quanto meno, quella (in generale non necessaria) di successione di pensieri. Inoltre, a mio credere, quel concetto di ordine non è capace di generare altri gruppi infiniti, che quelli che egli dice serie illimitate di 1ª specie (Introduzione n. 39).

Il prof. BIASI tenta egli pure una distinzione fra i gruppi finiti e gli infiniti nei suoi *Elementi di aritmetica e di algebra* (Sassari, 1892). Il professor BURALI-FORTI sul vol. II della *Rivista di Matematica* in una sua recensione di questo libro (ottimo del resto per altri riguardi) mette in mostra alcune imperfezioni che rendono illusoria quella distinzione. Io qui osservo che la definizione data dal prof. Biasi pel gruppo infinito (che precede nel suo libro quella del gruppo finito) assegna quel nome ad un gruppo o sistema tale che « dopo aver pensato più cose del sistema, sia sempre possi- « bile pensarne altre ancora (§ 4) » Ora tale definizione: 1º o presuppone quella di gruppo finito, affine di poter completare la frase dicendo: « dopo aver pensato più cose del sistema *costituenti un gruppo finito* », senza di che la definizione è assurda (potendosi per più cose prendere tutte quelle del gruppo oltre le quali non ve ne sono altre) ed in tal caso dà origine ad un circolo vizioso, giacchè il prof Biasi dice finito ogni gruppo che non è infinito — 2º o suppone tacitamente il concetto di ordinamento, mentre questo nel libro è dato dopo, e, comunque, limita il concetto di gruppo infinito.

Nel presente lavoro io ho creduto bene di dare da sè e prima il concetto di gruppo finito, perchè ci si possa servire di esso (che nel primo insegnamento delle matematiche è il più importante) anche senza ricorrere a quello del gruppo infinito, e l'ho fatto appoggiandomi al concetto di ordine: poi ho definito come gruppo infinito quello che non è finito, o, il che è lo stesso, (come si dimostra) quello che ha maggior potenza di qualunque gruppo finito. I gruppi che io dico finiti sono tali anche nel concetto del Dedekind; il reciproco non può asserirsi se non ammettendo il Teorema 160 del Dedekind, che dipende dal Teorema 159, il quale ultimo, come ho già detto, non pare rigorosamente dimostrato.

I gruppi che dice infiniti il Dedekind (e da me detti sviluppabili) sono infiniti anche nel mio concetto, senza che possa asserirsi il contrario, se non accettando il Teorema 159 del Dedekind del quale si parlava ora.

Colle distinzioni da me adottate c'è il vantaggio di avere per la definizione dei gruppi in questione proprietà, le quali pare che rispecchino con assai fedeltà il concetto che ci si fa ordinariamente e spontaneamente, sebbene grossolanamente, di ciò che è gruppo finito od infinito.

Il presente scritto mostra che è rigoroso l'uso di alcune frasi da me adoperate nella mia *Teoria delle grandezze* (*) e che a prima vista sembrerebbero dipendere necessariamente dal concetto di numero dal quale ivi io intendeva prescindere, o le sostituisce con altre in cui è chiara la mancanza di tale dipendenza. Esso permette anche di enunciare esplicitamente la qualità di finiti in quei gruppi nei quali in detta mia opera la supponevo tacitamente, e ciò senza ricorrere all'idea di numero, l'uso della quale avrebbe costituito un circolo vizioso; volendo io in quella *Teoria delle grandezze* dedurre il concetto di numero appunto da quello delle classi di grandezze (**).

Non tutto quello che ho esposto nel presente lavoro è indispensabile alla rigorosa trattazione della *Teoria delle grandezze* a cui ora accennavo: credo anzi che si possa ridurre a piccola parte quello che è necessario porre a fondamento dell'introduzione esatta del concetto di numero partendo dalle grandezze, così spesso usata nell'insegnamento. Il metter più dello strettamente indispensabile, come il riportare cose già esposte e dimostrate da altri, mi è parso utile per offrire un tutto armonico e completo, che da sè servisse di fondamento ad una teoria generale dei gruppi.

Torino, maggio 1896.

Capitolo I.

I GRUPPI.

1. Ammettiamo note le frasi:

I. *Avere enti* (Si hanno, si abbiano enti, e simili);

II. *Avere un ente* (solo);

III. *Avere un ente ed un ente;*

IV. *Non avere nessun ente;*

senza preoccuparci se si intendono definite o assunte come primitive, purchè nel loro uso si rispettino le leggi seguenti:

I è conseguenza e della II e della III; non possono coesistere II e III, I e IV, II e IV, III e IV.

Definiamo:

V. *Aversi più enti,*

come l'aversi enti che non siano un ente solo: e

VI. *Aversi un gruppo* (***),

l'aversi o un ente o più enti.

(*) Bettazzi - «Teoria delle Grandezze» - (Pisa 1890) - Parte Iª: «Le Grandezze e le classi».

(**) Vedi, in proposito, alcune osservazioni in:

Peano - «Sul concetto di numero» - Nota II - (*Rivista di Matematica* - Vol. I).

Biasi - «Elementi di Aritmetica e di Algebra» - (Sassari 1892) - Prefazione.

Burali Forti - «Sul Trattato di Aritmetica razionale del Dott. G. M. Testi» - (*Rivista di Matematica* - Vol. II).

(***) Uso qui la parola *gruppo* invece dell'altra *classe* che pur da molti è adoprata (V. «Formulaire de Mathématiques» publié par la «Rivista di Matematica» - Turin 1895) e perchè

Il non aversi nessun ente si indica talora anche con la frase:

VII. *Aversi il gruppo nullo.*

Gli enti di un gruppo costituito di più enti si diranno *distinti* fra loro.

Il gruppo costituito di un ente ed un ente si dirà *coppia di enti* e, soltanto se ciò sia conveniente alla speditezza del linguaggio, si dirà anche *gruppo di due enti.*

2. Ammetteremo che un medesimo ente si possa trovare in più gruppi, ed allora diremo che quei gruppi hanno quell'ente *comune*, o una coppia di enti *identici.*

Se tutti gli enti di un gruppo G' sono identici ad enti (alcuni o tutti) di un altro gruppo G, diremo quello *parte* di questo: e lo diremo *parte propria* se, inoltre, in G vi siano altri enti non comuni con G'.

Si dice *parte comune* di più gruppi un gruppo che è parte di ciascuno di essi: e *legame* (*) di essi il gruppo costituito da tutti e soli gli enti ad essi comuni.

3. Se gli enti di un gruppo G sono tutti e soli gli enti dell'uno e dell'altro di più gruppi G_1, G_2 ecc., si dirà G *composto* di G_1, G_2 ecc.

Se G è il gruppo composto di più gruppi G_1, G_2, ... privi di enti comuni, diremo che G *si spezza* nei gruppi G_1, G_2, ... dei quali esso si dirà la *somma*, scrivendo anche $G = G_1 + G_2 + \ldots\ldots$ In particolare se a è un ente non di G, il gruppo composto di G ed a si spezzerà in G ed a, e lo indicheremo con $G + a$.

Se G si spezza nei due gruppi G_1 e G_2, diremo G_2 (o G_1) *differenza* fra G e G_1 (o risp. G_2) scrivendo rispettivamente

$$G_2 = G - G_1, \quad G_1 = G - G_2.$$

In particolare, se a è un ente di G, sarà $G - a$ il gruppo degli enti di G distinti da a.

Capitolo II.

CORRISPONDENZA FRA I GRUPPI.

4. Dati due gruppi G_1 e G_2, si associno gli enti dell' uno e quelli dell'altro, pensando i gruppi formati ciascuno o da coppie di un ente di G_1 ed uno di G_2, o da un solo ente di G_1 o di G_2, in modo che: 1° ogni ente comparisca in uno di tali gruppi ed in uno solo, 2° se vi è qualche ente di G_1 che costituisca da sè solo un gruppo, non ve ne siano tali di G_2 e viceversa.

---

gruppo è il primo nome con cui in lingua italiana vennero indicati i *Menge* del Cantor, che li ideò (Dini - « Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali » - Pisa 1878), e perchè io adopro con altro significato il nome di *classe* nella mia « Teoria delle Grandezze » - (Pisa 1890). In lingua francese la parola corrispondente usata è *ensemble* - Il Dedekind « Was sind und was sollen die Zahlen? - Braunschweig » si serve della parola *System*.
Accenneremo d'ora in là a quest'ultimo lavoro semplicemente colla parola Dedekind.

(*) Il Dedekind usa la parola *Gemeinheit* (§ 1, N. 17).

Gli enti di ogni coppia si diranno allora *corrispondenti*, gli altri *isolati*; il fatto ora definito si dirà una *corrispondenza* fra i gruppi G_1 e G_2.

Una corrispondenza di una coppia di gruppi la diremo *distinta* da un'altra della stessa coppia, quando nell'una comparisca almeno un gruppo parziale (di uno o due enti) che non sia nell'altra.

5. Quando si considera un gruppo ed insieme il medesimo gruppo, ritenendolo una volta distinto dall'altra per il solo fatto che possiamo dare ad esso il pensiero in momenti diversi, si vede potersi parlare anche di *corrispondenza di un gruppo con se stesso.*

Una tale corrispondenza si dice *identità*, quando in essa non vi sono enti isolati, ed ogni coppia è formata da enti identici.

Se nella corrispondenza di un gruppo G con sè stesso accade che i corrispondenti di una parte G' del gruppo sono di nuovo tutti e soli gli enti di G', cioè G' corrisponde a sè stesso, diremo che in questa corrispondenza G' è un *ciclo*. Un ciclo può essere composto anche di un ente solo. I cicli parti proprie del gruppo si diranno *parziali*.

Se nessuna parte di un ciclo è ciclo essa stessa, diremo *semplice* il ciclo.

6. Per indicare una corrispondenza χ fra due gruppi G_1 e G_2 scriveremo:

$$(G_1 , G_2)_\chi$$

e, naturalmente, tale simbolo equivarrà all'altro $(G_2 , G_1)_\chi$.

Per indicare i tre fatti distinti: 1° che nella corrispondenza non vi siano enti isolati, 2° che se ne abbiano in G_1, 3° che se ne abbiano in G_2, scriveremo rispettivamente:

$$(G_1 \backsim G_2)_\chi , \quad (G_1 > G_2)_\chi , \quad (G_1 < G_2)_\chi \ (*)$$

e diremo che, *rispetto ad* χ, è G_1 risp. *equivalente*, *prevalente* o *suvvalente* a G_2. Se $(G_1 \backsim G_2)_\chi$, diremo anche che, rispetto ad χ, G_1 e G_2 sono in *corrispondenza univoca*.

È chiaro che se $(G_1 > G_2)_\chi$, sarà $(G_2 < G_1)_\chi$, e che i tre casi sopra citati si escludono a vicenda nella stessa corrispondenza. Con ciò non si vuole escludere che in corrispondenze distinte possa aversi talora un caso, talora un altro.

7. Alla domanda se dati due gruppi qualunque possa sempre stabilirsi una corrispondenza fra essi, non pare si possa rispondere in generale, finchè almeno si lasci così ampio il concetto di gruppo.

Fra un gruppo G ed una sua parte G' può stabilirsi una corrispondenza, almeno quella che associa gli enti di G' agli identici di G, e lascia isolati gli altri. In tale ultima corrispondenza α sarà $(G' < G)_\chi$; ma non può asserirsi che simile relazione accada in qualunque altra corrispondenza che possa stabilirsi fra G e G'.

(*) Il segno $\backsim$ è usato dal Cantor (p. es. V. «Une contribution à la théorie des ensembles» Acta Math. Bd. 2, pag. 311). Esigenze tipografiche, ci obbligano, per indicare le altre relazioni, a usare, invece che segni speciali, quelli ordinari $>$ e $<$.

8. Dati i gruppi G_1, G_2, G_3 e due corrispondenze α, β risp. fra G_1 e G_2 e fra G_2, G_3, se non sia in esse G_2 insieme suvvalente (od insieme prevalente) a G_1 ed a G_3, avremo una corrispondenza fra G_1 e G_3, associando gli enti che in α ed in β corrispondevano allo stesso ente di G_2, e lasciando isolati gli altri. Diremo una tal corrispondenza fra G_1 e G_3 *composta* delle due α e β, e la indicheremo con $\beta\,\alpha$. Avremo precisamente che

$$\begin{array}{llcll} \text{se} & (G_1 < G_2)\alpha & \text{e} & (G_2 \lesssim G_3)\beta & \text{sarà} \quad (G_1 < G_3)\beta\,\alpha, \\ \text{se} & (G_1 > G_2)\alpha & \text{e} & (G_2 \gtrsim G_3)\beta & \text{sarà} \quad (G_1 > G_3)\beta\,\alpha, \\ \text{se} & (G_1 \sim G_2)\alpha & \text{e} & (G_2 \overset{>}{\underset{<}{\sim}} G_3)\beta & \text{sarà} \quad (G_1 \overset{>}{\underset{<}{\sim}} G_3)\beta\,\alpha. \end{array}$$

Capitolo III.

POTENZA DEI GRUPPI.

9. Se dati due gruppi G_1 e G_2 esiste una corrispondenza α rispetto alla quale siano equivalenti, li diremo *equivalenti* (senz'altro) o *di ugual potenza.* Potremmo usare, seguendo l'esempio di altri, anche la parola *simili.*

Se invece fra G_1 e G_2 si possono stabilire corrispondenze, e in *tutte* le possibili corrispondenze sia *sempre* G_1 suvvalente a G_2, diremo G_1 *di potenza minore* a quella di G_2, e G_2 *di potenza maggiore* a G_1 (*). Scriveremo nel primo caso:

$$G_1 \sim G_2$$

e nel secondo:

$$G_1 < G_2 \quad \text{e} \quad G_2 > G_1.$$

I tre casi:

$$G_1 < G_2, \quad G_1 \sim G_2, \quad G_1 > G_2$$

si escludono a vicenda, senza che necessariamente possa dirsi che presi due grupgi G_1 e G_2, anche se si sa esistere fra essi qualche corrispondenza, debba accadere uno dei tre casi.

Diremo che due gruppi hanno *potenza consecutiva,* se non esiste nessun gruppo di potenza maggiore dell'uno e minore dell'altro.

Discende immediatamente dalle definizioni date, che:

Il gruppo nullo (§ 1) ha potenza minore di tutti gli altri non nulli.

Il gruppo di un ente (§ 1) ha potenza maggiore a quella del gruppo nullo, uguale a quella di qualunque altro gruppo di un ente solo, minore a quella di qualunque gruppo di più enti.

Un gruppo è sempre di ugual potenza a sè stesso (§ 5).

10. Come si vede facilmente per assurdo dal § 8, si ha, se G_1, G_2, G_3 sono gruppi, che:

(*) Cantor l. c. pag. 312. Vedi tracce di tali concetti anche in Bolzano, « Paradoxen der Unendlichen », 1850.

$$\text{da} \quad G_1 \gtrless G_2 \quad \text{e} \quad G_2 \sim G_3, \quad \text{discende} \quad G_1 \gtrless G_3,$$
$$\text{da} \quad G_1 \substack{>\\ \sim\\ <} G_2 \quad \text{e} \quad G_2 \substack{>\\ \sim\\ <} G_3, \quad \text{discende} \quad G_1 \substack{>\\ \sim\\ <} G_3;$$

prendendo ogni volta i segni sulla medesima linea. Tali relazioni possono anche scriversi sotto le altre forme, che facilmente si deducono pure dal § 8:

$$\text{da} \quad G_1 \sim G_2 \quad \text{e} \quad G_2 \substack{>\\ \sim\\ <} G_3 \quad \text{si ha} \quad G_1 \substack{>\\ \sim\\ <} G_3,$$
$$\text{da} \quad G_1 < G_2 \quad \text{e} \quad G_2 \lesssim G_3 \quad \text{si ha} \quad G_1 < G_3,$$
$$\text{da} \quad G_1 > G_2 \quad \text{e} \quad G_2 \gtrsim G_3 \quad \text{si ha} \quad G_1 < G_3.$$

11. Diremo per brevità *paragonabili* due gruppi quando di essi possa dirsi se hanno ugual potenza, o, se non l'hanno, quale di essi l'ha maggiore e quale minore.

Un gruppo è paragonabile con sè stesso: il gruppo nullo ed il gruppo di un ente sono paragonabili con qualunque gruppo (§ 9).

Capitolo IV.

GRUPPI SVILUPPABILI.

12. Diremo *sviluppabile* ogni gruppo che sia equivalente ad una sua parte propria (*).

Teorema. — Esistono gruppi sviluppabili.

Tale è quello citato dal Dedekind (**) (che, a sua volta, lo prese dal Bolzano (***)) di tutti gli enti che possono essere oggetti del nostro pensiero, siano essi materiali o pensieri essi stessi. Associando ad ogni ente s di un tal gruppo G l'idea s' che s può essere oggetto del nostro pensiero (idea che essa pure è ente di quel gruppo), si stabilisce una corrispondenza fra tutti gli enti di quel gruppo ed enti di esso i quali non costituiscono l' intero gruppo G, essendovi in G enti (p. es. il nostro *io*) che sono distinti dalle idee s'. In tale corrispondenza il gruppo si vede essere equivalente ad una sua parte propria.

Si ha pure un gruppo cosiffatto se prendiamo come enti gli istanti del tempo a cominciare da un determinato fino nell'eternità, associando ciascuno di tali istanti p. es. a quello che lo segue dopo un minuto (o un secondo, o un ora ecc.), riuscendo così il gruppo equivalente a quella sua parte propria che si ha da esso sopprimendo gli istanti del primo minuto (o secondo, od ora ecc.).

(*) Tali gruppi sono dal Dedekind (§ 5, n. 64) detti *infiniti;* ma ho preferito dare in seguito tal nome ad un'altra categoria di gruppi a cui appartengono i gruppi sviluppabili, e che mi sembra corrisponda meglio al concetto che ci si fa ordinariamente del gruppo infinito. (V. § 96 e *Introduzione*).

(**) L. c. § 5, N. 66 — da lui detto, come si accennava ora, gruppo infinito.

(***) L. c. § 13.

E si potrebbero dare anche altri esempi.

13. Teorema. — Un gruppo Γ equivalente ad uno sviluppabile è tale esso pure (*).

Se G_1 è un' opportuna parte propria dal gruppo sviluppabile dato G, e α è una conveniente corrispondenza, dovrà essere, secondo l'ipotesi, $(G_1 \sim G)_\alpha$: e se β è la corrispondenza per cui $(\Gamma \sim G)_\beta$, e Γ_1 è il gruppo degli enti di Γ corrispondenti in β a quelli G_1 di G, dalle relazioni

$$(\Gamma_1 \sim G_1)_\beta, \quad (G_1 \sim G)_\alpha, \quad (G \sim \Gamma)_\beta$$

si ricava

$$(\Gamma_1 \sim \Gamma)_{\beta(\alpha\beta)},$$

cioè Γ è un gruppo sviluppabile.

Corollario. — Ogni gruppo equivalente ad uno non sviluppabile, non può essere sviluppabile neppur esso.

14. Teorema. — Se una parte di un gruppo G è sviluppabile, è tale anche il gruppo stesso (**).

Sia G_1 una parte sviluppabile del gruppo G: sarà per una conveniente parte propria G_2 di G_1 e per una conveniente corrispondenza α,

$$(G_1 \sim G_2)_\alpha.$$

Aggiungendo in α a G_1 ed a G_2 gli enti di G che non sono in G_1 e di essi facendo corrispondere gli identici nei due gruppi, si avrà che G_1 e G_2 si cambieranno il primo in G ed il secondo in una sua parte propria, e nella corrispondenza stabilita tali gruppi saranno equivalenti, il che dimostra il teorema.

Corollario 1. — Le parti di un gruppo non sviluppabile non sono sviluppabili.

Cor. 2. — Un gruppo prevalente ad uno sviluppabile G è sviluppabile esso pure, essendo per ipotesi una sua parte equivalente a G, e quindi (§ 13) sviluppabile essa stessa.

15. Teorema. — Se esiste una corrispondenza nella quale una parte di un gruppo (propria o no) è prevalente al gruppo, questo è un gruppo sviluppabile.

Infatti dovrà essere equivalente al gruppo una parte propria della parte citata, che pure è parte propria del gruppo.

Corollario I. — Se in una corrispondenza un gruppo è prevalente a sè stesso, il gruppo è sviluppabile.

Cor. 2. — Ogni parte di un gruppo il quale non sia sviluppabile è tale che, se esistono corrispondenze fra essa ed il gruppo, in ognuna di esse deve essere suvvalente al gruppo. Ma si possono sempre stabilire corrispon-

(*) Dedekind § 5, N. 67.
(**) Dedekind § 5, N. 68.

denze fra un gruppo ed una sua parte, per lo meno quella in cui gli enti della parte si accoppiano agli identici del gruppo; si conclude dunque che ogni parte di un gruppo non sviluppabile è suvvalente all'intero gruppo.

Capitolo V (*).

CATENA DI UN ENTE.

16. Supponiamo che si abbia un criterio qualunque, col quale, dato un gruppo G ed una sua parte, propria o no, G_1, ad ogni ente a di G_1 se ne colleghi un altro (solo) di G, che indicheremo con σa, colla condizione che a due enti distinti ne vadano collegati due pure distinti.

Se sia $b = \sigma a$, scriveremo anche $a = \pi b$. Se dunque α e β sono due enti distinti di G, saranno distinti fra loro (quando esistono) $\sigma\alpha$ e $\sigma\beta$, e così $\pi\alpha$ e $\pi\beta$.

Evidentemente si stabilisce con tale criterio una corrispondenza fra il gruppo G_1 ed una parte G', propria o no, di G, nella quale quello e questa sono equivalenti; ad a di G_1 corrisponde σa nella parte G' di G, ed a b di G' corrisponde πb di G_1. Ogni ente di G_1 ammette l'ente σ, ed ogni ente di G' ammette l'ente π: non è esclusa l'esistenza di enti di G privi di ente σ, o di ente π, o dell'uno e dell'altro.

Si costruisca un gruppo parte di G, tale che contenga un ente a di G, e che se contiene un ente di G contenga anche il suo ente σ (quando questo esista): si indichi tal gruppo scrivendo $(a)_\sigma$, o dicendolo gruppo (a) rispetto alla corrispondenza o criterio σ. Se non possa nascere ambiguità, lo indicheremo semplicemente con (a) (**).

Dei gruppi (a) di G relativi ad una stessa corrispondenza si costruisca il legame Γ (§ 2), che non è il gruppo nullo, contenendo per lo meno a. Esso è tale che se contiene un ente di G contiene anche il suo ente σ (quando questo c'è), ed è quindi esso stesso un gruppo (a).

Qualunque gruppo (a) di G dovendo contenere, per definizione di legame, tal gruppo Γ, sarà assurdo un gruppo (a) di G che sia parte propria di esso legame Γ: il quale quindi può dirsi, in certo modo, il minimo fra i gruppi (a) di G.

Definizione. — Il gruppo in questione si dirà *catena dell'ente* **a** nel gruppo G rispetto al criterio σ (***). E potendosi chiaramente parlar di catena anche invertendo, in quello che si è detto, le lettere σ e π, diremo il

(*) v. Bettazzi. « Sulla catena di un ente in un gruppo » (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XXXI).

(**) Il Dedekind (§ 4) dice che tali gruppi sono catene che contengono a, dopo aver detto *catena* un gruppo equivalente ad una sua parte in una data corrispondenza.

(***) Cfr. Dedekind § 4 N. 44. Il Dedakind abbraccia anche le corrispondenze che egli dice dissimili; ma si restringe alle catene che più oltre dirò illimitate.

criterio σ e il criterio π *opposti*, e *opposte* le due catene di un ente prese rispetto a due criteri opposti.

Una catena si dirà *prodotta* dalla corrispondenza fra l'intero gruppo G, o una sua parte G_1, ed una parte G' di G, della quale si è parlato più sopra in questo paragrafo.

17. Teorema. — Se b appartiene alla catena di a fatta in G rispetto a σ, questa catena contiene come parte la catena di b.

Infatti la catena di a contiene b, per ipotesi, e se un ente di G, anche il suo ente σ. Ogni ente c della catena di b deve appartenerle: altrimenti il gruppo legame delle due catene sarebbe un gruppo che conterrebbe b, se un ente di G anche il suo σ, e non c, cioè non conterrebbe intera la catena di b, contro quello che si è detto della catena di un ente (§ 16).

18. Teorema. — In una catena (*) può esistere un solo ente privo in essa di ente π, ed un solo privo in essa di ente σ.

1. Se Γ è catena di a rispetto al criterio σ, e b è un ente di Γ diverso da a, dovrà in Γ esistere πb: altrimenti, sopprimendo b, che allora in Γ non è σ di nessun ente e non è a, resterebbe un nuovo gruppo (a) contenente a e il σ di ogni suo ente, e che farebbe parte della catena Γ, contro quanto si è visto (§ 16) per la catena. Il solo ente a può dunque (senza che così si mostri ciò necessario) essere privo di ente π, esista o no l'ente πa nel gruppo completo dato.

2. Sia b un ente della catena Γ di a che sia privo di ente σ. Se b è a, sarà Γ costituito dal solo ente a, e il teorema è provato. Se b non è a, si costruisca allora in Γ la catena Γ' di b rispetto al criterio π. Essa conterrà a; ed invero se non contenesse a non conterrebbe σa, giacchè a è l'ente π di σa, e π è il criterio della catena Γ' e quindi il contenere un ente, p. es.: σa, porta che esista il suo ente π, che sarebbe appunto a. In generale, se non contenesse un ente di G non conterrebbe il suo ente σ, e perciò non conterrebbe (§ 16) la intera catena di a, e quindi neppure b, che è di tal catena, e ciò è assurdo. E siccome in ogni catena, per la prima parte del teorema, il solo ente privo di π, se il criterio è σ, (e quindi di σ, se il criterio è π) può essere quello di cui essa è catena, così in Γ' il solo b può essere privo di ente σ e quindi Γ' contiene a, e contiene l'ente σ di ogni ente, che non sia b, e quindi contiene l'intera catena Γ: talchè Γ' coincide con Γ. E siccome in Γ', come si è visto per la prima parte del teorema applicata a Γ' col criterio π, il solo b può essere privo di ente σ, così ciò vale anche per Γ, identico a Γ', ed è provato il teorema.

Definizione. Una catena fatta rispetto al criterio σ si dirà *limitata* od *illimitata*, secondochè esiste in essa o no un ente privo di ente σ; *aperta* o *chiusa*, secondochè esiste in essa o no un ente privo di ente π.

(*) Dicendo *catena* senz'altro, intenderemo d'ora in là la catena di un conveniente ente, rispetto ad un conveniente criterio.

19. Teorema. — Una catena aperta illimitata è un gruppo sviluppabile (§ 12).

Infatti nella corrispondenza σ al gruppo equivale il gruppo stesso privo dell'ente di cui esso è catena.

20. Teorema. — Se la catena Γ di un ente a rispetto ad un criterio σ in un gruppo G è aperta, essa non può con la catena di a opposta ad essa (§ 16) aver comune altri enti che a.

Siano infatti Γ_1, Γ_2 le catene di a rispetto ai criteri σ e π, ammesso che esistano entrambi e non si riducano al solo a. Se p è un ente comune a Γ_1 e Γ_2 ed è diverso da a, esisteranno e saranno comuni anche σp e πp: invero essendo p di Γ_2, e non essendo a, esiste in Γ_2 il suo ente σ (§ 18), e quindi tale ente esiste nel gruppo G, e deve trovarsi anche in Γ_1, che è catena rispetto al criterio σ: in modo simile esiste in Γ_1 il πp, ed è anche in Γ_1: come si era accennato. Il gruppo degli enti comuni dunque contiene a, e dovrebbe contenere il σ di ogni proprio ente, e contenere perciò l'intera catena Γ_1: e dovendo contenere il π di ogni proprio ente, dovrebbe contenere anche l'intero Γ_2. Quindi dovrebbero essere comuni tutti gli enti di Γ_1 e Γ_2, e perciò essere identiche queste due catene. Dovrebbe quindi πa, che è per definizione in Γ_2, essere anche in Γ_1, il che non può essere, essendo Γ_1 aperto per ipotesi. Dunque è assurda l'esistenza di enti comuni a Γ_1 e Γ_2 diversi da a, che è quanto dovevasi dimostrare.

Osservazione. Anche la catena Γ_2 è aperta, non potendo contenere σa, che sarebbe comune con Γ_1.

21. Teorema. — Il gruppo Γ_0 composto della catena aperta di un ente a e della sua opposta (che è pure aperta) (§ 20) non può contenere al più che un solo ente privo di ente σ, ed uno solo privo di ente π.

Infatti gli enti di tal gruppo Γ_0 sono: 1° l'ente a, di cui esistono gli enti di σ e π risp.: nelle catene Γ_1 e Γ_2 fatte rispetto a σ e π; 2° enti di Γ_1 distinti da a, di ciascuno dei quali esiste in Γ_1 l'ente π, ed al più di uno manca l'ente σ; 3° enti di Γ_2 distinti da a, di ciascuno dei quali esiste l'ente σ in Γ_2, ed al più di uno manca l'ente π.

22. Teorema. — Se per ogni ente del gruppo Γ_0 definito nel teorema precedente si costruisce l'analogo gruppo, esso coincide con Γ_0.

Sia Γ_0 il gruppo in questione costruito rispetto ad a, e b ne sia un ente diverso da a: e si indichino con $\Gamma_1^{(b)}$, $\Gamma_2^{(b)}$ le due catene di b prese risp. rispetto a σ e π, con $\Gamma_0^{(b)}$ il loro gruppo composto. Se b p. es. appartiene alla catena Γ_1 di a rispetto a σ, sarà $\Gamma_1^{(b)}$ parte di Γ_1 (§ 17) e quindi di Γ_0. Ma lo stesso deve aversi per $\Gamma_2^{(b)}$. Infatti se un ente c di $\Gamma_2^{(b)}$ è in Γ_0, deve, come si è visto, esservi πc, quando esiste, e perciò Γ_0 contiene b ed il π di ogni ente di $\Gamma_2^{(b)}$ che esso contenga, e quindi anche l'intera catena $\Gamma_2^{(b)}$. Si conclude che Γ_0 contiene b, $\Gamma_1^{(b)}$, $\Gamma_2^{(b)}$, e quindi il gruppo in questione $\Gamma_0^{(b)}$ è parte di Γ_0.

Ora $\Gamma_2^{(b)}$ deve contenere a: giacchè altrimenti, siccome $\Gamma_2^{(b)}$ contiene gli enti π dei propri enti, e quindi manca degli enti σ degli enti mancanti, così mancando di a e del σ di ogni ente mancante, mancherebbe della intera catena Γ_1 di a, e quindi di b, il che non dev'essere. Si conclude che a è un ente del gruppo $\Gamma_0^{(b)}$, quindi, per la parte già dimostrata, sarà Γ_0 parte di $\Gamma_0^{(b)}$. Le due parti combinate insieme dimostrano che Γ_0 e $\Gamma_0^{(b)}$ sono identici, come si doveva provare.

Analoga dimostrazione può farsi se b è di Γ_2.

Corollario. — Se in un gruppo come Γ_0 esiste un ente c privo di ente π, il gruppo è la catena di c rispetto al criterio σ: e se esiste un ente d privo di ente σ, il gruppo è la catena di d rispetto al criterio π.

Osservazione. Fra i gruppi precedentemente studiati, si distinguono dalle catene solo quelli in cui ogni ente possiede l'ente π e l'ente σ.

23. Definizione. — Il gruppo composto della catena aperta illimitata di un ente a e della sua catena opposta (che è pure aperta) supposta illimitata, si dice *bicatena* dell'ente a.

Corollario 1. - Una bicatena di un ente è bicatena rispetto a qualunque suo ente (§. 22).

Osservazione. Potremo, in base al Corollario precedente, indicare le bicatene di un ente col semplice nome di bicatene.

Cor. 2. - In una bicatena ogni ente ammette l'ente σ e l'ente π.

Cor. 3. - Una bicatena è un ciclo (§ 5) della corrispondenza che la produce (§ 16).

Cor. 4. - Una bicatena è un gruppo sviluppabile, avendo parti che sono ciascuna una catena aperta illimitata (§§ 19, 14).

24. Teorema. - Dato un gruppo G, se la catena Γ di un suo ente a presa rispetto ad un criterio σ non consta di un solo ente ed è chiusa (§ 18), è catena chiusa anche rispetto al criterio π, ed in entrambi gli aspetti è illimitata (§ 18).

Infatti nella catena data Γ ogni ente contiene il proprio ente π, ciò accadendo (§ 18) in tutte le catene per tutti i loro enti, eccetto al più per quello di cui sono catene, e nella nostra Γ anche per tale ente, per ipotesi, essendo la catena chiusa.

Si costruisca ora in G la catena Γ' di a rispetto al criterio π, cioè il legame dei gruppi $(a)_\pi$ i quali 1° contengono a, 2° se contengono un ente di G ne contengono anche l'ente π. Essendo Γ_1, come si è ora visto secondo l'ipotesi, uno di tali gruppi $(a)_\pi$, esso dovrà contenere l'intero Γ' (§ 16).

Reciprocamente deve Γ' contenere l'intero Γ. Ed invero Γ' contiene a. Inoltre in Γ' esiste l'ente σ di ogni ente, eccetto al più a, giacchè come in ogni catena presa rispetto al criterio σ esiste l'ente π di ogni ente (eccetto al più quello di cui si è fatta la catena) così nel caso nostro, essendo π il criterio, ed il corrispondente di ciò che prima si indicava con π essendo ora σ, si avrà che di ogni ente, per lo meno distinto da a, esisterà l'ente σ. Ed esiste in Γ' anche σa, altrimenti, mancando σa, mancherebbe il σ di σa (poichè essendovi tale ente vi sarebbe il suo ente π che è σa) ed in generale mancando un ente mancherebbe il suo ente σ: laonde il gruppo degli enti mancanti, aggiungendovi a, conterrebbe a e, se un ente, il suo σ, e quindi l'intera catena Γ, e la catena Γ' non conterrebbe altri enti di Γ che a. Ciò è assurdo, giacchè essa contiene πa, per definizione di catena, e πa è di Γ per ipotesi, e inoltre πa non è a, altrimenti sarebbe a anche σ di sè stesso, e Γ consterebbe del solo ente a contro l'ipotesi. È dunque provato che in Γ esiste a e il σ di ogni ente, e quindi Γ' contiene Γ.

I due gruppi Γ' e Γ essendo ciascuno parte dall'altro, sono identici, il che prova la prima parte del teorema.

Contenendo poi Γ', come si è visto, l'ente σ di ogni suo ente, ed essendo Γ' identico con Γ, lo stesso accadrà per Γ, e quindi Γ sarà catena illimitata pel criterio σ ed analogamente per quello π, il che prova la restante parte del teorema.

Corollario 1. - Ogni catena chiusa non di un solo ente coincide con la propria catena opposta (§ 16).

Cor. 2. - Ogni catena chiusa non di un solo ente è illimitata.

Cor. 3. - Ogni catena limitata è aperta.

25. Teorema - Una catena chiusa è un ciclo (§ 5) della corrispondenza che la produce (§ 16).

Infatti nella corrispondenza σ ogni ente della catena ne ammette uno π, perchè la catena è chiusa, ed uno σ, perchè quindi (§ 24 Cor. 2.) la catena è illimitata, cioè il gruppo corrisponde a sè stesso nella corrispondenza σ.

26. Teorema - Una catena chiusa Γ di un gruppo G, è in quel gruppo catena di uno qualunque dei propri enti, rispetto allo stesso criterio della catena data.

Infatti, se Γ è definita come catena di a rispetto per es. al criterio σ e b è un suo ente, dovrà (§ 17) Γ contenere la catena di b. Ora, nel caso attuale, si ha inoltre che la catena di b dovrà contenere a. Ed invero, se in essa manca un ente mancherà anche l'ente π di esso, giacchè se contenesse questo, conterrebbe anche il suo ente σ che è quello in questione. Se dunque mancasse in essa a, essa sarebbe priva di a e se di un ente anche del suo ente π, e quindi anche dell'intera catena fatta rispetto alla corrispondenza π. Ma tale catena coincide (§ 24) con la catena data di a, dunque la catena di b dovrebbe mancare di tutti gli enti della catena di a, fra i quali è b stesso. Non potendo ciò essere, la catena di b contiene a, e quindi la catena di a.

Le due catene di a e di b si contengono a vicenda, e quindi coincidono c. d. d.

Corollario 1. - Ogni catena chiusa, che non sia di un solo ente, coincide con ciascuna delle due catene opposte di uno qualunque dei suoi enti, prese rispetto allo stesso criterio ed all' opposto.

27. Teorema. - Se in una corrispondenza α priva di cicli un gruppo G è simile ad una sua parte propria, esso si può spezzare in un gruppo di catene aperte ed illimitate di enti di G.

Sia G' la parte propria di G, a cui G equivale in α, e G_0 il gruppo $G - G'$ (§ 3). Definendo come ente σ di uno di G il suo corrispondente di G', ogni ente di G ammette l' ente σ, ed ammettono l' ente π gli enti di G' e non quelli di G_0.

Si costruisca la catena, rispetto al criterio σ, di ciascun ente di G_0. Allora

1° « Due catene Γa, Γb di enti distinti a, b di G_0 non « possono avere enti comuni ».

Infatti b non può essere di Γa, giacchè b non ammette ente π ed in Γa ciò accade soltanto per a (§ 18), e b non è a. Analogamente a non può essere di Γb. Gli enti comuni a Γa e Γb, se esistono, devono dunque essere diversi da a e b. Ora se un ente di Γb che non sia b è anche ente di Γa distinto da a, di esso deve esistere l'ente π tanto in Γa quanto in Γb (§ 16): e quindi se un ente c di Γb non è di Γa, non lo deve essere neppure il suo ente σ, altrimenti l'ente π di questo, che è c, dovrebbe esserlo pure, contro l'ipotesi. Perciò il gruppo degli enti di Γb che *non* sono in Γa è tale che contiene b e se contiene un ente contiene anche il suo ente σ, e quindi contiene ogni ente di Γb, per il concetto di catena. Dunque nessun ente di Γb è in Γa, e quindi Γa e Γb non hanno enti comuni.

2° « Ogni ente di G deve trovarsi in qualche catena « di quelle ora costruite ».

Ed invero gli enti privi di ente π sono quelli di G_0, e con ciascuno di essi si è costruita una catena. Se invece c è un ente che possiede ente π, si supponga, se è possibile, che non appartenga a nessuna delle catene costruite: non dovrà a nessuna di queste catene appartenere nè il suo ente σ (§ 18) nè il suo ente π (§ 16), poichè esso è ente π del primo ed ente σ del secondo. Consideriamo il gruppo di tutti gli enti che non appartengono a nessuna delle catene costruite: per quanto si è detto, ciascun ente di esso ammette in esso l'ente π e l'ente σ, e quindi questo gruppo è tale che i suoi enti corrispondono a enti del gruppo stesso senza enti isolati, ed esso è un ciclo, contro l'ipotesi. Dunque non possono esistere enti non appartenenti a nessuna delle catene costruite.

Si conclude che il gruppo proposto si spezza in più catene, una per ciascuno degli enti di G che non sono nella parte propria G' equivalente a G. Tali catene sono aperte, essendo l'ente, di cui sono catene, privo, per ipotesi, di π: e sono illimitate, poichè di ogni ente esiste l'ente σ. c. d. d.

Corollario 1° - Se p è un ente di G, e in una corrispondenza α priva di cicli parziali si ha $(G \backsim G - p)_\alpha$, sarà G catena dell' ente p rispetto alla corrispondenza α, e sarà una catena aperta illimitata.

Cor. 2° - Se in una corrispondenza un gruppo è equivalente ad una sua parte propria, esso, rispetto a quella corrispondenza, si spezza in un gruppo di catene aperte e di cicli.

28. Teorema. - Se in una corrispondenza α priva di cicli parziali un gruppo G è equivalente a sè stesso, (cioè G è un ciclo semplice) il gruppo è o una catena chiusa, o una bicatena.

Si prenda per ente σ di un ente di G il suo corrispondente pure di G, nella corrispondenza α: e quello sia l'ente π di questo. Si costruisca la catena Γ rispetto al criterio σ di un ente qualunque a di G. Se essa è chiusa, deve essere identica all'intero gruppo G, altrimenti (§ 25) sarebbe un ciclo della corrispondenza α, contro l'ipotesi. In tal caso il teorema è provato. Se invece Γ è aperta, non può essa essere identica al gruppo, giacchè in essa manca almeno l'ente π di a, che invece esiste nel gruppo a causa della supposta corrispondenza e del significato di π. Se in essa manca un ente p di G, mancherà anche il suo ente π, del quale, se non mancasse, dovrebbe esistere in Γ l'ente σ, che è p. Il gruppo Γ' composto di a e degli enti di G che sono in Γ è dunque tale che contiene a e l'ente π di ogni suo ente, quindi esso è un gruppo (a) rispetto al criterio π. E dovrà essere anzi catena di a rispetto a π Infatti, altrimenti, la catena di a rispetto a π dovrebbe esser parte propria di esso, (§ 16) ed il gruppo Γ_0 composto di tale catena e di Γ non esaurirebbe l'intero gruppo; ma in Γ_0 esiste l'ente σ e l'ente π di ogni proprio ente, dunque esso nella corrispondenza α corrisponderebbe a sè stesso e sarebbe un ciclo, contro l'ipotesi.

Dovrà dunque al gruppo dato essere identico il gruppo composto delle due catene citate, cioè la bicatena di un ente qualunque a del gruppo. Così è provato il teorema.

Corollario 1° - Se rispetto ad una corrispondenza priva di cicli parziali, in cui sia simile a sè stesso, un gruppo non è catena chiusa di un suo speciale ente (e quindi (§ 26) di nessun suo ente) il gruppo è sviluppabile (§ 23. Cor. 4°).

Cor. 2. — Se un gruppo non è sviluppabile, ed in una corrispondenza priva di cicli è simile a sè stesso, esso è catena chiusa di ogni suo ente.

Cor. 3. — Poichè tanto la catena chiusa (§ 25) quanto la bicatena (§ 23, Cor. 3.) sono cicli della corrispondenza che le produce, si ha che: Se in una corrispondenza un gruppo è equivalente a sè stesso, esso, rispetto a quella corrispondenza, si spezza in un gruppo di cicli.

29. In una catena Γ aperta illimitata di a rispetto ad un criterio σ, di ogni ente esiste l'ente σ e l'ente π, eccetto per l'ente a che non ha π; fra Γ e $\Gamma - a$ si può quindi stabilire una corrispondenza α, nella quale ad ogni ente di Γ corrisponde il suo σ in $\Gamma - a$, ed in essa si ha $(\Gamma \backsim \Gamma - a)_\alpha$.

In una catena chiusa (quindi illimitata), di ogni ente esistendo gli enti σ e π, si ottiene in modo simile una corrispondenza del gruppo Γ con sè stesso, nella quale Γ è simile a sè stesso. Così dicasi delle bicatene. E nella catena limitata ed aperta si ottiene una corrispondenza in cui Γ è simile a sè stesso, dicendo ad ogni ente corrispondente il suo σ, ed a ente corrispondente (σ) di quello privo di ente σ.

Definizione. — Diremo in ogni caso ciascuna di queste corrispondenze *corrispondenza della catena o della bicatena.*

30. Teorema. — *La corrispondenza di una catena o bicatena di un ente a è priva di cicli parziali.*

Sia Γ la catena di a e sia, se è possibile, Γ_1 un suo ciclo; Γ_1 sarà tale che conterrà gli enti σ e π di ciascun suo ente. Se Γ_1 contenesse a, allora contenendo a e l'ente σ di ogni proprio ente, dovrebbe contenere Γ_1, il che è assurdo dovendo essere Γ_1 parte propria di Γ. Se Γ_1 non contenesse a, la differenza $\Gamma - \Gamma_1$ conterrebbe a e l'ente σ di ogni suo ente (giacchè se un ente è di $\Gamma - \Gamma_1$, cioè non di Γ_1, il proprio π, di cui esso è σ, è ancora di $\Gamma - \Gamma_1$) e quindi conterrebbe Γ, il che è parimente assurdo. Dunque Γ_1 non può esistere, c. d. d.

Corollario. — *Una bicatena ed una catena chiusa sono cicli semplici (§ 5) della corrispondenza che le produce.*

(*Continua*).

RICERCA DEL MASSIMO COMUN DIVISORE

DI DUE O PIÙ NUMERI

MEDIANTE LA DIVISIONE

1. Il noto metodo per la ricerca del massimo comun divisore di due numeri mediante la divisione non è che un caso particolare d'un procedimento generale per trovare il massimo comun divisore di quanti si vogliano numeri.

Scopo della presente nota è appunto l'esposizione di tale procedimento, il quale offre tutti i vantaggi del caso particolare sopra citato riguardo all'uniformità ed alla facilità dell'applicazione.

Siano dati più numeri interi a_0, a_1, a_2, ..., a_n disposti in ordine decrescente e dividasi a_0 per a_1, il resto ottenuto per a_2, il nuovo resto per a_3 e così via; il resto dell'ultima divisione si dirà *residuo finale* dei numeri dati e la scrittura

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = r$$

indicherà che r è il residuo finale dei numeri $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

È evidente che se il resto di una delle divisioni è nullo, saranno nulli anche tutti i rimanenti e quindi anche il residuo finale. Se il resto di una divisione è minore del numero successivo o di più numeri successivi della serie data, si continuerà l'operazione dividendo questo resto per il primo numero che non lo supera. Finalmente se il resto di una divisione è minore dell'ultimo numero della serie data, esso sarà il residuo finale.

Esempio. Il residuo finale dei numeri 12365, 728, 425, 298, 96 è 4, cioè si ha

$$[12365, 728, 425, 298, 96] = 4.$$

L'operazione può disporsi nel seguente modo:

12365	728	16
5085		
717	425	1
292	96	3
4		

Siano $q_1, q_2, \ldots, q_n$ i quozienti delle divisioni eseguite coi numeri $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nel modo ora dichiarato per ottenere il residuo finale r. È chiaro che si avrà:

$$a_0 = a_1 q_1 + a_2 q_2 + \ldots + a_n q_n + r.$$

Questa uguaglianza mostra che se i numeri $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ed r hanno un divisore comune, questo deve dividere anche il residuo finale r e che se i numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ed r hanno un divisore comune, questo deve dividere anche il numero a_0.

Restano quindi dimostrati i due seguenti teoremi:

Teorema I. — *Se un numero divide più numeri, anche il loro residuo finale è divisibile per quel numero.*

Teorema II. — *Se il residuo finale di più numeri e questi numeri, ad eccezione del primo, hanno un fattore comune, questo divide anche il primo numero.*

2. Premesso ciò, dati i numeri $a_0, a_1, \ldots, a_n$, si determinino i numeri $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots,$ definiti dalle seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \ldots, a_n\ ] &= a_{n+1}, \\ [a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}] &= a_{n+2}, \\ [a_2, a_3, \ldots, a_{n+2}] &= a_{n+3}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{aligned}$$

Se qualcuno dei residui finali $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ che così vengono determinati successivamente è nullo, esso verrà abbandonato e si continuerà l'operazione cogli n numeri che lo precedono. Ottenuto nuovamente un residuo finale nullo, si abbandonerà e si continuerà l'operazione cogli $n-1$ numeri precedenti e così via, finchè dopo un numero finito di operazioni ci si ridurrà a due unici numeri, coi quali si procederà finchè si otterrà un residuo nullo.

È chiaro che si deve pervenire ad un tale risultato, giacchè i residui finali non nulli vanno successivamente decrescendo.

Teorema. — *L'ultimo residuo finale non nullo, ottenuto mediante il procedimento precedente, è il massimo comun divisore dei numeri dati.*

Siano infatti a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 cinque numeri interi disposti in ordine decrescente e suppongasi che, applicando il procedimento ora dichiarato, si ottenga il risultato espresso dalle seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4] &= a_5 \\ [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] &= 0 \\ [a_2, a_3, a_4, a_5] &= a_6 \\ [a_3, a_4, a_5, a_6] &= a_7 \\ [a_4, a_5, a_6, a_7] &= 0 \\ [a_5, a_6, a_7] &= 0 \\ [a_6, a_7] &= a_8 \\ [a_7, a_8] &= 0\,. \end{aligned}$$

Procedendo dall'ultima uguaglianza fino alla prima ed applicando replicatamente il teorema II, si riconosce subito che a_s divide tutti i numeri dati.

È poi evidente che i numeri dati non possono essere divisibili tutti per un numero maggiore di a_s, giacchè se ciò fosse, in base al teorema I dovendo essere divisibili per quel numero anche i residui finali, lo dovrebbe essere anche a_s, il che è impossibile.

In modo identico si può dimostrare il teorema per quanti si vogliano numeri.

Da quanto precede si ricava la seguente

Regola. *Per trovare il massimo comun divisore di più numeri, si dispongono dapprima in ordine decrescente e si trova il loro residuo finale; si abbandona il numero maggiore, alla destra del minore si scrive il residuo finale prima calcolato e si trova il residuo finale di questi numeri, e così via. I residui finali che risultano nulli si abbandonano di volta in volta.*

Terminata l'operazione, l'ultimo residuo finale non nullo è il massimo comun divisore dei numeri dati.

Esempio. Vogliasi determinare il massimo comun divisore dei numeri seguenti:

$$36738,\ 11448,\ 5904,\ 342,\ 288.$$

Operando secondo la regola si troverà:

$$\begin{aligned}
[36738,\ 11448,\ 5904,\ 342,\ 288] &= 0,\\
[11448,\ 5904,\ 342,\ 288] &= 72,\\
[5904,\ 342,\ 288,\ 72] &= 18,\\
[342,\ 288,\ 72,\ 18] &= 0,\\
[288,\ 72,\ 18] &= 0,\\
[72,\ 18] &= 0.
\end{aligned}$$

Il massimo comun divisore dei numeri dati è dunque 18.

In pratica si può disporre l'operazione come segue:

36738	11448	3
2394	342	7
0		
11448	5904	1
5544	342	16
2124		
72		
5904	342	17
2484		
90	72	1
18		

342	288	1
54	18	3
0		
288	72	4
0		
72	18	4
0		

Treviso, settembre 1895.

Prof. Luigi Carlini.

TEMI DI MATEMATICA DATI PER L'ESAME DI MATURITÀ
IN GINNASI E SCUOLE REALI SUPERIORI DELL' AUSTRIA-UNGHERIA
alla fine degli anni scolastici 1891-92 e 1892-93.

(*Continuazione e fine: V. pag. 27, 55, 97, 148, 184 dell'anno IX, 25, 58 dell'anno X, 20 e 55 dell'anno XI*).

Horn: *Ginnasio reale sup. provinciale.* — 1.

$$\log \sqrt[3]{12x(3x-1)+5(x-6)} - 2 \log \sqrt[3]{x-1} = \frac{2}{3}.$$

2. In un quadrilatero inscritto la corda $AB = a = 93\,m$, $BC = b = 75\,m$ la diagonale $AC = e = 104\,m$, e l'angolo $CBD = \beta = 47^0\ 18'\ 32''$. Qual è l'altra diagonale? Costruzione.

3. Due persone A e B che abitano alla distanza di 93 miglia l'una dall'altra, partono contemporaneamente e si muovono incontro. Ognuna comincia facendo 5 miglia al giorno, A fa però ogni giorno successivo $\frac{1}{4}$ di miglio di meno, mentre B fa $\frac{1}{3}$ di miglio di più del giorno antecedente. Quando si incontrano? Quante miglia fa ognuna in tutto e quante ciascuna nell'ultimo giorno?

4. Si seghi la parabola $y^2 = 6x$ colla retta $3\,y - 4\,x + 6 = 0$ e nei punti d'intersezione si guidino le tangenti alla parabola. Si domandano le equazioni delle