Indice Articoli Anno 1895

N°	Autore/i	Titolo	Pagine	Anno
1	LUGLI A.	ALCUNI TEOREMI DI GEOMETRIA	1-8	1895
2	RINDI S.	SUL MINIMO COMUNE MULTIPLO A PIU' NUMERI	9-10	1895
3	SCARPIS U.	UN TEOREMA DI ARITMETICA	11-14	1895
4	PANIZZA F.	SULLA FORMA DEL QUOZIENTE NEL TEOREMA DI FERMAT (1/2)	14-16	1895
5	GARBIERI G.	LA LEGGE DELLE INVERSE	16-20	1895
6	BELLACCHI G.	SUL PROBLEMA DI MALFATTI	25-26	1895
7	LANGLEY E.M.	CENTRO DI GRAVITA' DEL TRAPEZIO	27	1895
8	PESCI G.	SULL'ORDINE DI CIFRE DI UN NUMERO DECIMALE	27-28	1895
9	MOLA G.	UNA APPLICAZIONE DEL METODO DELL'EQUIPOLLENZA	45-50	1895
10	GAMBIOLI D.	SULL'INCOMMENSURABILITA' DI DUE GRANDEZZE	51-54	1895
11	PANIZZA F.	SULLA FORMA DEL QUOZIENTE NEL TEOREMA DI FERMAT (2/2)	54-58	1895
12	CIAMBERLINI C.	SULLE PROPRIETA' FONDAMENTALI DELLE OPERAZIONI DELL'ARITMETICA	61-64	1895
13	LAZZERI G.	SULLA TEORIA DELLA EQUIVALENZA GEOMETRICA (1/2)	77-93	1895
14	BERLACCHI G.	SECONDA NOTA SUL TEOREMA DI MALFATTI (1/3)	93-95	1895
15	PORCHIESI A.	DUE TEOREMI DI GEOMETRIA SOLIDA, CHE HANNO QUALCHE ANALOGIA COI TEOREMI DI PAPPO E DI PITAGORA	95-98	1895
16	BOSI L.	DIMOSTRAZIONE DI UN TEOREMA SULLE FRAZIONI CONTINUE	98-99	1895
17	CIAMBERLINI C.	LA RIDUZIONE ALL'ASSURDO NEI NOSTRI LIBRI DI TESTO	99-103	1895
18	COMINOTTO E.	SOPRA UNA DISPOSIZIONE PARTICOLARE DEI TRIANGOLI SIMILI	103-104	1895
19	LAZZERI G.	SULLA TEORIA DELLA EQUIVALENZA GEOMETRICA (2/2)	133-141	1895
20	FERRARI F.	TRASVERSALI NEI POLIGONI	141-146	1895
21	GILLET J.	ALCUNE PROPRIETA' DEL TRIANGOLO E DEL QUADRANGOLO	147-153	1895
22	FRATTINI G.	INTORNO AL POSTULATO DELL' EQUIVALENZA	153-154	1895
23	BERLACCHI G.	SECONDA NOTA SUL TEOREMA DI MALFATTI (2/3)	156-163	1895
24	CIAMBERLINI C.	SULLA SIMMETRIA IN ALCUNE DIMOSTRAZIONI DELLA GEOMETRIA ELEMENTARE	163-166	1895
25	MARIANTONI F.	SUI PIANI CHE TAGLIANO UN TRIEDRO QUALUNQUE SECONDO TRIANGOLI EQUILATERI	167-169	1895
26	PALATINI F.	SULLA DEFINIZIONE DI DIVISIONE	169-171	1895

ALCUNI TEOREMI DI GEOMETRIA

1. TEO. *Se tre trasversali condotte pei vertici di un triangolo passano per lo stesso punto, le loro coniugate isogonali passano egualmente per lo stesso punto* (*).

Siano ABC (Tav. I, fig. 1ª) il triangolo fondamentale ed AA', BB', CC' tre trasversali che si tagliano in M'. Se AA'' è la coniugata isogonale di AA' rispetto all'angolo BAC, dalle due coppie di triangoli BAA', $A''AC$ e BAA'', $A'AC$ cogli angoli in A eguali, si ha

$$\triangle BAA' : \triangle A''AC = (BA \,.\, AA') : (A''A \,.\, AC)$$

e

$$\triangle A'AC : \triangle BAA'' = (A'A \,.\, AC) : (BA \,.\, AA''),$$

da cui dividendo termine a termine, dopo aver osservato che i triangoli di eguale altezza stanno fra loro come le basi, segue

$$\frac{BA'}{A'C} : \frac{A''C}{BA''} = \frac{BA \,.\, AA'}{A'A \,.\, AC} : \frac{A''A \,.\, AC}{BA \,.\, AA''} = \frac{\overline{BA}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Abbiamo dunque

[1] $$\frac{BA'}{A'C} = \frac{A''C}{BA''} \cdot \frac{c^2}{b^2} \text{ e analogamente } \frac{CB'}{B'A} = \frac{B''A}{CB''} \cdot \frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{C''B}{AC''} \cdot \frac{b^2}{a^2}.$$

Moltiplicando membro a membro risulta

[2] $$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = \frac{A''C}{BA''} \cdot \frac{B''A}{CB''} \cdot \frac{C''B}{AC''}.$$

Ora, in seguito all'ipotesi, pel teorema di CEVA, il primo membro della [2] è eguale ad 1, quindi

$$\frac{BA''}{A''C} \cdot \frac{CB''}{B''A} \cdot \frac{AC''}{C''B} = 1,$$

cosicchè anche le tre trasversali AA'', BB'', CC'' passano per il medesimo punto M''.

(*) La dimostrazione che diamo di questo noto teorema [Cfr. ad es. *Periodico*, vol. VI, p. 25], che non abbiamo vista altrove, ci pare notevole per le conseguenze a cui dà luogo.

Cor. 1°. Se sia O il centro del cerchio circoscritto al $\triangle ABC$ ed AA'' la coniugata isogonale della congiungente AA' di O col vertice A, rispetto all'angolo BAC, è noto che AA'' è l'altezza del triangolo relativa a BC. Essendo $BA'' = c \, . \cos B$, $A''C = b \, . \cos C$, dalla prima delle [1] segue

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{b \, . \cos C}{c \, . \cos B} \cdot \frac{c^2}{b^2} = \frac{c \, . \cos C}{b \, . \cos B} = \frac{\operatorname{sen} 2C}{\operatorname{sen} 2B}.$$

2°. Suppongasi che A', B', C' siano i punti medi dei lati del triangolo ABC, allora AA'', BB'', CC'' saranno le coniugate isogonali delle mediane (*simediane*) e si avrà dalle [1]

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{c^2}{b^2}, \qquad \frac{CB''}{B''A} = \frac{a^2}{c^2}, \qquad \frac{AC''}{C''B} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Il punto M' è in questo caso il baricentro del triangolo ed M'', suo coniugato isogonale, il punto di Lemoine.

2. Dalla relazione $\frac{BA'}{A'C} = \frac{A''C}{BA''} \cdot \frac{c^2}{b^2}$ e consimili, scaturisce una costruzione dal punto $M^{(p)}$ di potenziale d'ordine p (*), ossia di quel punto che congiunto coi vertici del triangolo ABC dà origine a trasversali che dividono i lati in parti proporzionali alle potenze p^{esime} dei lati adiacenti.

Pongasi infatti $\frac{A''C}{BA''} = \frac{c}{b}$, cosicchè A'' è il punto isotomico del piede D della bisettrice dell'angolo A (simmetrico di D rispetto a B e C); chiamando $A^{(3)}$ il punto in cui la coniugata isogonale di AA'', rispetto all'angolo BAC, taglia BC, si avrà

$$\frac{BA^{(3)}}{A^{(3)}C} = \frac{A''C}{BA''} \cdot \frac{c^2}{b^2} = \frac{c^3}{b^3}.$$

Se designamo ora con A'' il punto isotomico del piede E della simediana di ABC relativa a BC e con $A^{(4)}$ il piede della trasversale coniugata isogonale di AA'' rispetto all'angolo BAC, poichè allora $\frac{A''C}{BA''} = \frac{c^2}{b^2}$, si avrà

$$\frac{BA^{(4)}}{A^{(4)}C} = \frac{A''C}{BA''} \cdot \frac{c^2}{b^2} = \frac{c^4}{b^4}.$$

(*) Così denominato dal Prof. G. de Longchamps che ne studiò le proprietà nella nota: *Généralités sur la Géométrie du Triangle* (Jour. de Math. Élémen., 2me Série, 10me Année, 1886).

In generale indicando con A'' l'isotomico del punto $A^{(p-2)}$ di BC pel quale $BA^{(p-2)} : A^{(p-2)}C = c^{p-2} : b^{p-2}$, il piede $A^{(p)}$ della trasversale isogonale di AA'' rispetto all'angolo A, dividerà BC così che

$$\frac{BA^{(p)}}{A^{(p)}C} = \frac{A''C}{BA''} \cdot \frac{c^2}{b^2} = \frac{c^{p-2}}{b^{p-2}} \cdot \frac{c^2}{b^2} = \frac{c^p}{b^p}.$$

Il punto $M^{(p)}$ risulta in tal modo determinato.

Le costruzioni da fare per trovare $A^{(p)}$ quindi $M^{(p)}$, sono le seguenti. Se p è dispari si conduca la bisettrice AD (fig. 2ª) dell'angolo BAC e si trovi il punto D_1 tale che $BD_1 = DC$. Si conduca AD_1 e si tracci $\angle A^{(3)}AC = BAD_1$ (è utile per ciò, dopo aver descritto con centro A e raggio arbitrario, p. es. AD, un arco di cerchio che incontra AD_1 in D_2, prendere sul medesimo, in direzione opposta a DD_2, arc. $DD_3 =$ arc. DD_2 e tirare AD_3 che taglia BC in $A^{(3)}$). Si prenda ora $BA_1^{(3)} = A^{(3)}C$, si tiri $AA_1^{(3)}$ che interseca l'arco tracciato in D_4 e si tagli dall'altra banda di D, sul medesimo, arc. $DD_5 =$ arc. DD_4, la retta AD_5 incontrerà BC nel punto $A^{(5)}$ e così di seguito.

Se invece p è pari si divida BC per metà in E (fig. 3ª) e, come precedentemente, si faccia $\angle A^{(2)}AC = BAE$, poi sul lato BC si prenda $BA_1^{(2)} = A^{(2)}C$. Formato $\angle D_4AC = BAA_1^{(2)}$, il punto d'incontro del suo lato AD_4 con BC sarà $A^{(4)}$, e così via.

Trovando in modo analogo su CA il punto $B^{(p)}$ per cui $CB^{(p)} : B^{(p)}A = a^p : c^p$, nell'intersezione delle due rette $AA^{(p)}$, $BB^{(p)}$ si trova il punto $M^{(p)}$.

3. Supponiamo ora che i lati BC, CA, AB del $\triangle ABC$ siano tagliati da un cerchio rispettivamente nei punti A', A''; B' B''; C', C'' (fig. 4ª) e pongasi $BA' = \alpha$, $CB' = \beta$, $AC'_1 = \gamma$. Proponiamoci di determinare, in funzione di α, β, γ e dei lati a, b, c del triangolo fondamentale, le misure dei tre seguenti BA'', CB'' AC''.

Abbiamo a tal uopo le tre equazioni lineari

$$[3] \quad \alpha \,.\, BA'' = \gamma'(c - AC''), \quad \beta : CB'' = \alpha'(a - BA''),$$
$$\gamma \cdot AC'' = \beta'(b - CB''),$$

dove α' β' γ' stanno ad indicare le lunghezze $A'C$, $B'A$, $C'B$.

Da queste si deduce

$$[4]\quad \begin{aligned} BA'' = \alpha_1 &= \frac{\alpha'\beta'\gamma' \,.\, a - \beta\beta'\gamma' \,.\, b + \beta\gamma\gamma' \,.\, c}{\alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma'} = \\ &\frac{(a-\alpha)(b-\beta)(c-\gamma) - \beta(b-\beta)(c-\gamma)\,.\,b + \beta\gamma(c-\gamma)\,.\,c}{\alpha\beta\gamma + (a-\alpha)(b-\beta)(c-\gamma)}, \\ CB'' = \beta_1 &= \frac{\alpha'\beta'\gamma' \,.\, b - \gamma\gamma'\alpha' \,.\, c + \gamma\alpha\alpha' \,.\, a}{\alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma'}, \\ AC'' = \gamma_1 &= \frac{\alpha'\beta'\gamma' \,.\, c - \alpha\alpha'\beta' \,.\, a + \alpha\beta\beta' \,.\, b}{\alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma'}\ (^*). \end{aligned}$$

Cerchiamo ancora in funzione dei tre segmenti α, β, γ e degli elementi del $\triangle ABC$ il raggio ρ del cerchio $A'B'C'$.

Conducansi dal centro O le rette OD, OF perpendicolari ai lati BC, AC; dal triangolo BDF si ha $\overline{FD}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BD}^2 - 2BF\,.\,BD\cos B$ e poichè BO è il diametro del cerchio circoscritto al $\triangle BDF$ risulterà $BO = FD : \text{sen}\, B$, onde osservando che $BA'.BA''$ eguaglia il quadrato della tangente tirata da B al cerchio O, si avrà

$$\rho^2 = \overline{BO}^2 - BA'\,.\,BA'' = \frac{\overline{BF}^2 + \overline{BD}^2 - 2BF\,.\,BD\cos B - BA'\,.\,BA''\,.\,\text{sen}^2 B}{\text{sen}^2 B}$$

Ma $BF = c - \frac{\gamma + \gamma_1}{2}$, $BD = \frac{\alpha + \alpha_1}{2}$, per modo che si trova per l'espressione cercata

$$[5]\ \rho^2 = \frac{(2c-\gamma-\gamma_1)^2 + (\alpha+\alpha_1)^2 - 2(2c-\gamma-\gamma_1)(\alpha+\alpha_1)\cos B - 4\alpha\alpha_1 \text{sen}^2 B}{4\,\text{sen}^2 B},$$

dove α_1, β_1, γ_1 hanno i valori [4].

4. Teo. *Se tre trasversali* AA', BB', CC' *tirate pei vertici di un triangolo* ABC *s'incontrano nello stesso punto* M', *il cerchio passante per* A', B', C' *taglia i lati del triangolo in altri tre punti* A'', B'', C'' *tali che le rette* AA'', BB'', CC'' *passano per il medesimo punto* M'' (fig. 5ª).

Infatti si ha

$$BA'\,.\,BA'' = BC'\,.\,BC'', \quad CB'\,.\,CB'' = CA'\,.\,CA'',$$
$$AC'\,.\,AC'' = AB'\,.\,AB''.$$

(*) Si può osservare che come le [3] sono deducibili l'una dall'altra mediante permutazione circolare, sono deducibili nello stesso modo l'uno dall'altro i valori di BA'', CB'', AC''.

Moltiplicando queste tre eguaglianze membro a membro ed osservando che, in seguito all'ipotesi, dal teorema di Ceva consegue

$$BA' \,.\, CB' \,.\, AC' = A'C \,.\, B'A \,.\, C'B,$$

si deduce

$$BA'' \,.\, CB'' \,.\, AC'' = A''C \,.\, B''A \,.\, C''B$$

cosicchè pel teorema inverso risulta quanto d. d..

Osservazione. — Seguitando a denotare con α, β, γ, α', β', γ' i sei segmenti BA', CB', AC', $A'C$, $B'A$, $C'B$, poichè si ha ora $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$, i valori [4] divengono

$$[6] \quad BA'' = \alpha_1 = \frac{\alpha\gamma \,.\, a - \beta'\gamma' \,.\, b + \gamma\gamma' \,.\, c}{2\alpha\gamma} = \frac{\alpha'\beta' \,.\, a - \beta\beta' . b + \beta\gamma . c}{2\alpha'\beta'}, \text{ ecc..}$$

5. Supponendo che A', B', C' siano i piedi delle altezze del $\triangle ABC$, si ha in tal caso

$$\alpha = c\cos B, \quad \alpha' = b\cos C; \quad \beta = a\cos C, \quad \beta' = c\cos A;$$
$$\gamma = b\cos A, \quad \gamma' = a\cos B.$$

Sostituendo nella [6] si trova

$$BA'' = \frac{abc \,.\, \cos A\cos B - abc \,.\, \cos A\cos B + abc\cos A\cos B}{2bc\cos A\cos B} = \frac{a}{2},$$

$$CB'' = \frac{b}{2}, \quad AC'' = \frac{c}{2}$$

e sostituendo nella [5], ponendo mente che $2c - \gamma - \gamma_1 = 2c - b\cos A - \frac{c}{2} = c - b\cos A + \frac{c}{2} = a\cos B + \frac{c}{2}$:

$$\rho^2 = \frac{\left(a\cos B + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(c\cos B + \frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(a\cos B + \frac{c}{2}\right)\left(c\cos B + \frac{a}{2}\right)\cos B - 2ac\cos B\,\mathrm{sen}^2 B}{4\,\mathrm{sen}^2 B};$$

sviluppando e riducendo si giunge facilmente al valore

$$\rho^2 = \frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos B}{16\,\mathrm{sen}^2 B} = \frac{1}{4}\left(\frac{b}{2\,\mathrm{sen}\,B}\right)^2 = \frac{R^2}{4}.$$

Si ha dunque $\rho = \frac{R}{2}$ con R raggio del cerchio circoscritto al triangolo ABC.

Si chiami ora A_1 il punto in cui l'altezza AA' taglia il cerchio $A'B'C'$, H l'ortocentro del triangolo ABC e si osservi che i quattro punti B, A', H, C' sono conciclici. Segue

$$AA_1 \,.\, AA' = AC'' \,.\, AC', \quad AH \,.\, AA' = AB \,.\, AC',$$

da cui dividendo membro a membro risulta $AA_1 : AH = AC'' : AB$ e poichè $AC'' = c : 2 = AB : 2$, si deduce infine $AA_1 = AH : 2$.

Risultano così nuovamente dimostrate le note proprietà che il cerchio passante per i piedi delle altezze di un triangolo, divide per metà i lati e i segmenti che vanno dai vertici al punto d'incontro delle altezze e che il raggio di un tal cerchio è la metà del raggio del cerchio circoscritto al triangolo.

6. Occupiamoci ora di trovare l'area del triangolo che ha per vertici i punti A', B', C' dei lati di un triangolo, posto, come precedentemente $BA' = \alpha$, $CB' = \beta$, $AC' = \gamma$, $A'C = \alpha'$, $B'A = \beta'$, $C'B = \gamma'$.

Poichè i triangoli $BA'C'$, BAC (fig. 6ª), hanno in comune l'angolo B, si ha

$$\triangle BA'C' : \triangle BAC = \alpha\gamma' : ac = \alpha\gamma'.b : abc,$$

Similmente

$$\triangle CB'A' : \triangle ABC = \beta\alpha'.c : abc,$$
$$\triangle AC'B' : \triangle ABC = \gamma\beta'.a : abc$$

onde

$$\triangle BA'C' : \alpha\gamma' b = \triangle CB'A' : \beta\alpha' c =$$
$$\triangle AC'B' : \gamma\beta' a = \triangle ABC : abc.$$

Di qui si ricava

$$\triangle ABC - \triangle BA'C' - \triangle CB'A' - \triangle AC'B' :$$
$$abc - \alpha\gamma' b - \beta\alpha' c - \gamma\beta' a = \triangle ABC : abc,$$

e indicando con S l'area del $\triangle ABC$, posto mente che il primo termine della proporzione precedente non è altra cosa che l'area del $\triangle A'B'C'$, si ottiene

$$\triangle A'B'C' = \frac{S}{abc}\left\{ abc - \alpha\gamma' b - \beta\alpha' c - \gamma\beta' a \right\} =$$
$$\frac{S}{abc}\left\{ abc - \alpha(c-\gamma)b - \beta(a-\alpha)c - \gamma(b-\beta)a \right\} =$$
$$\frac{S}{abc}\left\{ \alpha\beta\gamma + (a-\alpha)(b-\beta)(c-\gamma) \right\}$$

od anche

$$[7] \qquad \triangle A'B'C' = \frac{S}{abc}\left\{ \alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma' \right\}.$$

Se A', B', C' sono punti dei lati del $\triangle ABC$ tali che le rette AA', BB', CC' passino per lo stesso punto M', il triangolo $A'B'C'$ si chiama triangolo pedale del punto M' e poichè allora $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$, la sua area viene espressa dalla formola semplicissima

$$[8] \qquad \triangle A'B'C' = 2S \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{abc} = 2S\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{abc}.$$

Applicazioni. — 1ª. Supponiamo che le AA', BB', CC' coincidano colle trasversali $AA^{(p)}$, $BB^{(p)}$, $CC^{(p)}$ passanti pel punto di potenziale d'ordine p. Poichè allora

$$BA' = c^p\frac{a}{c^p + b^p}, \quad CB' = a^p\frac{b}{a^p + c^p}, \quad AC' = b^p\frac{c}{b^p + a^p},$$

la formola [8] dà

$$\triangle A^{(p)}B^{(p)}C^{(p)} = 2S\frac{a^p}{c^p + b^p} \cdot \frac{b^p}{a^p + c^p} \cdot \frac{c^p}{b^p + a^p}.$$

In particolare se $p = 1$ ossia le tre trasversali passano pel centro I del cerchio inscritto nel triangolo fondamentale, si trova per l'area del triangolo pedale di I l'espressione

$$2\triangle ABC \cdot \frac{a}{c+b} \cdot \frac{b}{a+c} \cdot \frac{c}{b+a} \text{ (*)}.$$

Il caso di $p = 2$ fornisce l'area del triangolo pedale del punto di LEMOINE.

2ª. I punti A', B', C' siano i piedi delle altezze del $\triangle ABC$, Poichè $BA' = c\cos B$, $CB' = a\cos C$, $AC' = b\cos A$, si trova

$$\triangle A'B'C' = 2S\frac{abc \cdot \cos A\cos B\cos C}{abc} = 2S\cos A\cos B\cos C.$$

3ª Se A', B', C' sono i piedi delle congiungenti il centro O del cerchio circoscritto ad ABC, poichè si ha [n. **1**, cor. 1°] $\frac{BA'}{A'C} = \frac{\text{sen } 2C}{\text{sen } 2B}$, segue $BA' = \alpha = a \cdot \frac{\text{sen } 2C}{\text{sen } 2C + \text{sen } 2B}$, per modo che l'area del triangolo pedale di O risulta espressa da

$$\triangle A'B'C' = 2S\frac{\text{sen } 2A}{\text{sen } 2C + \text{sen } 2B} \cdot \frac{\text{sen } 2B}{\text{sen } 2A + \text{sen } 2C} \cdot \frac{\text{sen } 2C}{\text{sen } 2B + \text{sen } 2A}$$
$$= 2S\frac{\cos A\cos B\cos C}{\cos(B-C)\cos(C-A)\cos(A-B)}.$$

(*) Cfr. *Periodico*. Vol. VII, p. 151.

7. Le formole [7] e [8] si prestano naturalmente alla determinazione dei rapporti delle aree di due triangoli inscritti nello stesso triangolo fondamentale, pedali o no.

Consideriamo dapprima il caso di due triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$ (fig. 6ª) di cui i vertici situati sopra uno stesso lato sono coniugati isotomici rispetto alle estremità di questo lato. Se poniamo, come al solito, $BA' = \alpha$, $CB' = \beta$, $AC' = \gamma$; $BA'' = \alpha_1$, $CB'' = \beta_1$, $AC'' = \gamma_1$, si avrà dalla [7]

$$\triangle A'B'C' = \frac{S}{abc} \left\{ \alpha\beta\gamma + (a-\alpha)(b-\beta)(c-\gamma) \right\}$$

e

$$\triangle A''B''C'' = \frac{S}{abc} \left\{ \alpha_1\beta_1\gamma_1 + (a-\alpha_1)(b-\beta_1)(c-\gamma_1) \right\}$$

e poichè, per l'ipotesi $\alpha_1 = a - \alpha$, $\beta_1 = b - \beta$, $\gamma_1 = c - \gamma$, si vede subito che

$$\triangle A'B'C' = \triangle A''B''C''.$$

In secondo luogo esaminiamo il caso di due triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$ pedali di due punti M', M'' coniugati isogonali. Dalla prima delle [1] segue $\frac{\alpha}{a-\alpha} = \frac{a-\alpha_1}{\alpha_1} \cdot \frac{c^2}{b^2}$ onde $\alpha = \frac{a(a-\alpha_1)c^2}{(a-\alpha_1)c^2 + \alpha_1 b^2}$ con due formole analoghe per β e γ.

Risulta per conseguenza, applicando la [8]:

$$\triangle A'B'C' = \frac{2S}{abc} \cdot \frac{a^3b^3c^3(a-\alpha_1)(b-\beta_1)(c-\gamma_1)}{[(a-\alpha_1)c^2+\alpha_1 b^2][(b-\beta_1)a^2+\beta_1 c^2][(c-\gamma_1)b^2+\gamma_1 a^2]}.$$

Ma d'altra parte

$$\triangle A''B''C'' = \frac{2S}{abc} \cdot \alpha_1\beta_1\gamma_1,$$

onde, osservando che per essere le AA'', BB'', CC'' concorrenti in M'' si ha $\alpha_1\beta_1\gamma_1 = (a-\alpha_1)(b-\beta_1)(c-\gamma_1)$, si ottiene infine

$$\frac{\triangle A''B''C''}{\triangle A'B'C'} = \frac{[ac^2 + \alpha_1(b^2-c^2)][ba^2+\beta_1(c^2-a^2)][cb^2+\gamma_1(a^2-b^2)]}{a^3b^3c^3}.$$

8. Se i punti A', B', C', A'', B'', C'' cadono o tutti o in parte esternamente ai lati del triangolo fondamentale è facile verificare che i teoremi dei n. **1** e **4**, non che i risultati dei n. **6** e **7** sussistono inalterati, cosicchè i medesimi sono da considerarsi come generali.

A. Lugli.

SUL MINIMO MULTIPLO COMUNE A PIÙ NUMERI

È noto il seguente teorema:

« Se P_1 è il prodotto di n numeri dati, P_2 quello dei massimi « comuni divisori dei numeri presi due a due, P_3 quello dei mas- « simi comuni divisori dei numeri presi tre a tre, ... P_{n-1} « quello dei massimi comuni divisori dei numeri presi $n-1$ ad « $n-1$ e P_n il massimo comun divisore degli n numeri, il mi- « nimo multiplo comune di questi sarà, per n dispari

$$M = \frac{P_1 P_3 P_5 \ldots . P_{n-2} P_n}{P_2 P_4 P_6 \ldots . P_{n-1}},$$

« e per n pari

$$M = \frac{P_1 P_3 P_5 \ldots . P_{n-3} P_{n-1}}{P_2 P_4 P_6 \ldots . P_{n-2} P_n}. »$$

Questo teorema, riportato nel libro del Prof. D. FONTEBASSO: *Soluzionario degli esercizi proposti nell'Aritmetica di* BERTRAND; Genova, 1882, pag. 122-124, e tratto, come l'autore dice, dalla *Introduction à la théorie des nombres* di LE BESGUE (pag. 52), è ivi dimostrato considerando i fattori primi costituenti i numeri dati. La dimostrazione seguente, che io presento, s'intende, soltanto ai giovani, mi pare più semplice.

Manteniamo le notazioni adoperate nell'enunciato, e siano A_1, A_2, A_3, ... A_n i numeri dati. Siano poi: $P_n d_i$ i massimi comuni divisori dei numeri presi $n-1$ ad $n-1$ (e precisamente $P_n d_i$ quello dei numeri A_1, A_2, ... A_{i-1}, A_{i+1}, A_n), siano $P_n d_i d_h$ quelli dei numeri presi $n-2$ ad $n-2$, $P_n d_i d_k d_l$ quelli dei numeri presi $n-3$ ad $n-3$, ...; avremo

$$\begin{aligned} A_1 &= P_n d_2 d_3 d_4 \ldots . d_n . q' \\ A_2 &= P_n d_1 d_3 d_4 \ldots . d_n . q'' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n &= P_n d_1 d_2 d_3 \ldots . d_{n-1} . q^{(n)}, \end{aligned}$$

dove i numeri d_i e $q^{(h)}$ sono tutti primi fra loro due a due.

Se poniamo $D = d_1 d_2 \ldots. d_n$ e $Q = q' q'' \ldots. q^{(n)}$, si avrà

$$M = P_n D Q.$$

Ora abbiamo

$$\begin{aligned} P_2 &= P_n^{\binom{n}{n-2}} D^{\binom{n-1}{n-3}} \\ P_3 &= P_n^{\binom{n}{n-3}} D^{\binom{n-1}{n-4}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{n-1} &= P_n^{\binom{n}{1}} D^{\binom{n-1}{0}} \end{aligned}$$

onde, per n dispari

$$\frac{P_1 P_3 P_5 \ldots. P_{n-2} P_n}{P_2 P_4 P_6 \ldots. P_{n-1}} =$$

$$\frac{P_n^{\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-5}+\ldots..+\binom{n}{2}+\binom{n}{0}}}{P_n^{\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-4}+\binom{n}{n-6}+\ldots..+\binom{n}{3}+\binom{n}{1}}} \cdot \frac{D^{\binom{n-1}{n-2}+\binom{n-1}{n-4}+\ldots..+\binom{n-1}{1}}}{D^{\binom{n-1}{n-3}+\binom{n-1}{n-5}+\ldots..+\binom{n-1}{0}}} \cdot Q;$$

ma

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots. + \binom{n}{n-3} - \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n} = 0$$

e

$$\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \ldots. + \binom{n-1}{n-3} - \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1} = 0,$$

per cui

$$\frac{P_1 P_3 P_5 \ldots. P_{n-2} P_n}{P_2 P_4 P_6 \ldots. P_{n-1}} = \frac{P_n^{\binom{n}{n}} Q}{D^{-\binom{n-1}{n-1}}} = P_n D Q = M.$$

Per n pari si trova in modo simile

$$\frac{P_1 P_3 P_5 \ldots. P_{n-3} P_{n-1}}{P_2 P_4 P_6 \ldots. P_{n-2} P_n} =$$

$$\frac{P_n^{\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-3}+\ldots..+\binom{n}{1}}}{P_n^{\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-4}+\ldots..+\binom{n}{0}}} \cdot \frac{D^{\binom{n-1}{n-2}+\binom{n-1}{n-4}+\ldots..+\binom{n-1}{0}}}{D^{\binom{n-1}{n-3}+\binom{n-1}{n-5}+\ldots..+\binom{n-1}{1}}} \cdot Q$$

$$= \frac{D^{\binom{n-1}{n-1}} Q}{P_n^{-\binom{n}{n}}} = P_n D Q = M.$$

Lucca, dicembre 1894.

S. Rindi.

UN TEOREMA D'ARITMETICA

1°. Sia a un intero qualunque e $p_1\, p_2 \ldots p_r$ i numeri primi inferiori ad a e che non lo dividono e dei quali indicheremo il prodotto con π, supponendo che sia $\pi > a$.

Consideriamo il sistema di congruenze simultanee:

$$\begin{aligned} a \,.\, x_{\mu\lambda} + \rho_\lambda &\equiv k_{1\mu} \mod p_1 \\ a \,.\, x_{\mu\lambda} + \rho_\lambda &\equiv k_{2\mu} \mod p_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a \,.\, x_{\mu\lambda} + \rho_\lambda &\equiv k_{r\mu} \mod p_r \end{aligned}$$

dove $k_{1\mu}, k_{2\mu}, \ldots\, k_{r\mu}$ sono interi eguali o disuguali rispettivamente inferiori a $p_1, p_2 \ldots\, p_r$ e che col loro insieme costituiscono un sistema che si fa corrispondere in modo arbitrario, ma che una volta fissato rimane costante, all'indice μ, e ρ_λ è uno qualunque dei numeri $\rho_1, \rho_2, \ldots\, \rho_{\varphi(a)}$ inferiori e primi ad a.

Per ogni intero y pel quale si abbia:

$$y \equiv k_{i\mu} \mod p_i \quad i = 1, 2, \ldots\, r$$

sussiste, com'è noto (*), la relazione:

$$y \equiv k_{1\mu}\left(\frac{\pi}{p_1}\right)^{p_1-1} + \ldots + k_{r\mu}\left(\frac{\pi}{p_r}\right)^{p_r-1} \mod \pi$$

per cui si avrà pure:

$$a \,.\, x_{\mu\lambda} + \rho_\lambda \equiv k_{1\mu}\left(\frac{\pi}{p_1}\right)^{p_1-1} + \ldots + k_{r\mu}\left(\frac{\pi}{p_r}\right)^{p_r-1} \mod \pi$$

e risolvendo:

$$x_{\mu\lambda} \equiv \left(k_{1\mu}\left(\frac{\pi}{p_1}\right)^{p_1-1} + \ldots + k_{r\mu}\left(\frac{\pi}{p_r}\right)^{p_r-1} - \rho_\lambda\right) . a^{\varphi(\pi)-1} \mod \pi$$

(*) Nel § 25 delle *Lezioni sulla teoria dei numeri* del DIRICHLET si dimostra che se x diviso per $a, b, c, \ldots$ primi tra loro due a due, dà rispettivamente per resti $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, si ha

$$x \equiv A a' \alpha + B b' \beta + C c' \gamma + \ldots \pmod{n}$$

essendo $n = a \,.\, b \,.\, c \ldots$, $A = \frac{n}{a}$, $B = \frac{n}{b}$, $C = \frac{n}{c}$, ..., ed $a', b', c', \ldots$, soluzioni di $Ax \equiv 1 \mod a$, $Bx \equiv 1 \mod b$, $Cx \equiv 1 \mod c$, ... Ma pel teorema di FERMAT $a' \equiv A^{\varphi(a)-1} \mod a$, $b' \equiv B^{\varphi(b)-1} \mod b$, $c' \equiv C^{\varphi(c)-1} \mod c$, ... quindi la relazione

$$x \equiv \left(\frac{n}{a}\right)^{\varphi(a)} . \alpha + \left(\frac{n}{b}\right)^{\varphi(b)} . \beta + \left(\frac{n}{c}\right)^{\varphi(c)} . \gamma + \ldots \mod n.$$

L'espressione $k_{1\mu}\left(\frac{\pi}{p_1}\right)^{p_1-1} + \dots + k_{r\mu}\left(\frac{\pi}{p_r}\right)^{p_r-1}$ rappresenta manifestamente un numero primo con π, e se noi attribuiamo ai coefficenti $k_{i\mu}$ tutti i possibili sistemi di valori compatibili con la condizione $k_{i\mu} < p_i$ otteniamo per essa $(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots \dots (p_r - 1) = \varphi(\pi)$ valori congrui mod π ai numeri $R_1, R_2, \dots R_\mu \dots, R_{\varphi(\pi)}$ inferiori e primi a π.

Indicando ora con R il resto di $a^{\varphi(\pi)-1}$ mod π manifestamente primo a π, si ha:

$$x_{\mu\lambda} \equiv R_\mu \cdot R - \rho_\lambda \cdot R \mod \pi.$$

Osservando che i numeri $R_\mu \cdot R$ sono congrui, benchè in altro ordine, ai numeri R_μ ed indicando con r_λ il resto di $\rho_\lambda \cdot R$ si ottiene, ponendo $R_\mu \cdot R \equiv R'_\mu$,

$$x_{\mu\lambda} \equiv R'_\mu - r_\lambda \mod \pi$$

come espressione della soluzione comune alle congruenze del precedente sistema in corrispondenza agli indici μ e λ.

Supponiamo ora che per un certo valore di μ e λ, vale a dire per un determinato sistema $k_{1\mu}, k_{2\mu} \dots k_{r\mu}$ e per un certo ρ_λ, la differenza $R'_\mu - r_\lambda$ se positiva (od il suo complemento se negativa) sia minore di a e diversa da zero: indicandola con σ si avrà:

$$a\sigma + \rho_\lambda \equiv k_{1\mu}\left(\frac{\pi}{p_1}\right)^{p_1-1} + \dots + k_{r\mu}\left(\frac{\pi}{p_r}\right)^{p_r-1} \mod \pi$$

e quindi:

$$a \cdot \sigma + \rho_\lambda \equiv k_{i\mu} \mod p_i.$$

Essendo $k_{i\mu}$ primo a p_i e ρ_λ ad a, $a\sigma + \rho_\lambda$ non è divisibile per alcuno dei numeri primi inferiori ad a, ed essendo inoltre minore di a^2 si conclude che è un numero primo.

Reciprocamente ogni numero primo compreso tra a ed a^2 si può porre sotto la forma $a\sigma + \rho_\lambda$ $\sigma < a$ per cui sarà

$$a \cdot \sigma + \rho_\lambda \equiv k_{i\mu} \mod p_i \quad i = 1, 2, \dots r$$

e quindi:

$$a \cdot \sigma + \rho_\lambda \equiv k_{1\mu}\left(\frac{\pi}{p_1}\right)^{p_1-1} + \dots + k_{r\mu}\left(\frac{\pi}{p_r}\right)^{p_r-1} \mod \pi$$

ed infine $\sigma \equiv R'_\mu - r_\lambda$ mod π cioè $\sigma = R'_\mu - r_\lambda$ oppure $\sigma = R'_\mu - r_\lambda + \pi$. Segue da ciò che per ogni numero primo compreso tra a ed a^2 (estremi esclusi) esiste un sistema di valori per λ e μ pei quali la differenza $R'_\mu - r_\lambda$ se positiva (il suo complemento se negativa) è minore di a.

2.° Sieno ora q, q' due numeri primi maggiori di a e minori di a^2. Avremo $a \,.\, \sigma + \rho_\lambda = q$, $a \,.\, \sigma' + \rho_{\lambda'} = q'$ e per quanto precede:

$$\sigma \equiv \left(k_{1\mu}\left(\frac{\pi}{p_1}\right)^{p_1-1} + \ldots + k_{r\mu}\left(\frac{\pi}{p_r}\right)^{p_r-1} - \rho_\lambda\right) . \, a^{\varphi(\pi)-1} \quad \text{mod } \pi$$

$$\sigma' \equiv \left(k_{1\mu'}\left(\frac{\pi}{p_1}\right)^{p_1-1} + \ldots + k_{r\mu'}\left(\frac{\pi}{p_r}\right)^{p_r-1} - \rho_{\lambda'}\right) . \, a^{\varphi(\pi)-1} \quad \text{mod } \pi.$$

Poniamo ora che sia $\rho_\lambda = \rho_{\lambda'}$: dovrà essere manifestamente μ diverso da μ' poichè altrimenti risulterebbe $\sigma = \sigma'$.

Concludiamo quindi che a due numeri primi compresi tra a ed a^2 corrispondono due sistemi di valori diversi per gli indici μ, λ.

Reciprocamente, sieno λ, μ; λ', μ' due coppie diverse per le quali si abbia:

$$\left.\begin{aligned} x_{\mu\lambda} &\equiv R'_\mu - r_\lambda \\ x_{\mu'\lambda'} &= R'_{\mu'} - r_{\lambda'} \end{aligned}\right\} \text{mod } \pi$$

e supponiamo che, essendo le precedenti differenze se positive (o i complementi se negative) entrambi minori di a, i due numeri primi $a\sigma + \rho_\lambda$, $a \,.\, \sigma' + \rho_{\lambda'}$ risultino eguali.

Tale ipotesi porta di conseguenza

$$\rho_\lambda \equiv \rho_{\lambda'} \text{ mod } a$$

che non è ammissibile altro che nel caso particolare $\rho_\lambda = \rho_{\lambda'}$ avverandosi il quale, dovrebbe pur essere $\sigma = \sigma'$ e quindi sussistere o l'una o l'altra delle due eguaglianze:

$$R'_\mu - r_\lambda = R'_{\mu'} - r_{\lambda'}, \quad R'_\mu - r_\lambda = R'_{\mu'} - r_{\lambda'} \pm \pi$$

la prima qualora le due differenze abbiano lo stesso segno, la seconda qualora abbiano segni opposti.

Ma l'ipotesi $\rho_\lambda = \rho_{\lambda'}$ porta di conseguenza $r_\lambda = r_{\lambda'}$ quindi le due precedenti eguaglianze si riducono alle due assurde:

$$R'_\mu = R'_{\mu'}, \quad R'_\mu = R'_{\mu'} \pm \pi.$$

A due diverse coppie di indici non può quindi corrispondere lo stesso numero primo.

3° Riassumendo quanto si è dimostrato nei due paragrafi precedenti e tenendo presente il significato dei simboli adottati e l'ipotesi $\pi > a$, si può enunciare il seguente

Teorema « Il numero dei numeri primi compresi tra a ed a^2 (estremi esclusi) coincide col numero delle coppie di indici λ, μ per le quali la corrispondente differenza $R'_\mu - r_\lambda$ se positiva (il suo complemento se negativa) risulta minore di a ».

Nota. La dimostrazione si appoggia all'ipotesi $\pi > a$: valendosi però della proposizione di Tchebichef secondo la quale per $n > 7$ esiste sempre un numero primo tra $\frac{n}{2}$ ed $n - 2$, si può provare che tale ipotesi è sempre ammissibile da un certo valore di a in poi.

U. Scarpis.

SULLA FORMA DEL QUOZIENTE
NEL TEOREMA DI *FERMAT*

1. L'astronomo Giovanni Plana nella sua *Mémoire sur la théorie des Nombres* (Accademia delle Scienze di Torino 1860), osservò che gli analisti si erano limitati a dimostrare in modi diversi la divisibilità di $a^p - a$, per il numero primo p e si propose perciò di determinare la forma del quoziente $\frac{a^p - a}{p}$.

La forma ottenuta dal Plana si può con metodo assai più semplice e spedito ricavare dalla seguente identità

$$(x + 1)^p - x^p = \binom{p}{1} x^{p-1} + \binom{p}{2} x^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1} x + 1,$$

facendo in essa successivamente

$$x = 1, 2, 3, \dots (a - 1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [1]$$

e sommando membro a membro le $(a - 1)$ eguaglianze; se con s_i indichiamo la somma delle potenze i^{me} dei numeri della serie [1], avremo, fatte le riduzioni,

$$a^p - a = \binom{p}{1} s_{p-1} + \binom{p}{2} s_{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1} s_1$$

e da questa forma non solo risulta la divisibilità del primo membro per il numero primo p, essendo i coefficienti binominali $\binom{p}{1}$ $\binom{p}{2}$ ecc. divisibili per il numero primo p, ma si ottiene ancora, osservando che $\binom{p}{r} = \binom{p}{p-r}$,

$$\frac{a^p - a}{p} = (s_1 + s_{p-1}) + \frac{p-1}{2}(s_2 + s_{p-2}) + \frac{(p-1)(p-2)}{2 \cdot 3}(s_3 + s_{p-3})$$

$$+ \ldots + \frac{(p-1)(p-2)(p-3)\ldots\left(p - \frac{p-1}{2} + 1\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{p-1}{2}}\left(s_{\frac{p-1}{2}} + s_{\frac{p+1}{2}}\right)$$

e questa è appunto la forma ottenuta dal Plana.

Il calcolo delle s_i è però talmente laborioso quando a e p sono numeri grandi, da suggerire la ricerca di una forma più acconcia al calcolo numerico; questo è appunto lo scopo della presente nota.

2. Sieno dati p gruppi di elementi tutti fra loro differenti $G_1, G_2, G_3, \ldots G_p$ e ciascun gruppo sia composto di a elementi; fra le combinazioni semplici della classe p formate colle totalità degli $a \times p$ elementi, alcune conterranno elementi scelti da un solo gruppo (quando $a > p$), altre elementi scelti da due gruppi, da tre, ecc. e finalmente alcune conterranno elementi scelti da tutti i gruppi; indicheremo il numero di tali combinazioni rispettivamente con $C_1, C_2 \ldots C_r \ldots C_p$.

Scelti r gruppi fra i p dati, è chiaro che il numero delle combinazioni contenenti elementi scelti da ciascuno di tali gruppi, può essere rappresentato da

$$\Sigma \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\binom{a}{i_3}\ldots\binom{a}{i_r}$$

dove

$$\binom{a}{i_r} = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-i_r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots i_r}$$

e la somma va estesa a tutte le soluzioni della equazione

$$i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_r = p$$

in numeri interi positivi, non nulli.

E poichè la scelta di r gruppi dai p dati si può fare in $\binom{p}{r}$ modi differenti, così avremo

$$C_r = \binom{p}{r} \Sigma \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\ldots\binom{a}{i_r}$$

e siccome sommando tutte le C otteniamo il numero totale delle combinazioni semplici degli $a \times p$ elementi della classe p, avremo

$$\binom{a \times p}{p} = \binom{p}{1}\binom{a}{p} + \binom{p}{2}\Sigma\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}$$
$$+ \binom{p}{3}\Sigma\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\binom{a}{i_3} + \dots + \binom{p}{r}\Sigma\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\dots\binom{a}{i_r} + \dots$$
$$\dots + \binom{p}{p}\Sigma\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\binom{a}{i_3}\dots\binom{a}{i_p}$$

dove in ciascuna sommatoria le i devono assumere valori interi positivi non nulli la cui somma deve essere eguale a p.

Ora l'ultimo termine ha evidentemente il valore a^p per cui, se notiamo che

$$\binom{a \times p}{p} = \frac{ap\,(ap-1)\,(ap-2)\dots[ap-(p-1)]}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots (p-1) \,.\, p}$$
$$= a + \text{multiplo di } p, \text{ (quando } p \text{ è primo)}$$

resterà dimostrata la divisibilità di $a^p - a$ per il numero primo p e al tempo stesso si avrà modo di calcolare il quoziente.

Il calcolo del quoziente viene in tal modo a dipendere dalle Σ, e poichè anche queste non sono immediatamente calcolabili, cerchiamo di trasformarle in espressioni più convenienti.

(*Continua*). F. PANIZZA.

LA LEGGE DELLE INVERSE

Nell'insegnare l'aritmetica razionale sarebbe utile far conoscere agli alunni la legge delle inverse press'a poco sotto la forma seguente.

1. Si suppongano dimostrati questi due teoremi:

Se la differenza di due numeri è divisibile per un numero, quei due numeri divisi per quest'ultimo daranno uguali resti.

Se due numeri divisi per un numero danno resti uguali, la differenza dei due primi numeri sarà divisibile per il terzo.

In ciascuno di questi teoremi, come accade di tutti, vengono affermate due proprietà: una di queste è ammessa come data, e costituisce la *ipotesi* del teorema, l'altra si mette in evidenza, si deduce, si ricava col ragionamento, e costituisce la *conclusione* o la *tesi*. Nel caso attuale, si vede inoltre che l'ipotesi dell'un teorema costituisce la conclusione dell'altro: onde così fatti teoremi si dicono *inversi* o *reciproci* (*).

2. Giova subito notare che non è sempre lecito d'invertire una proposizione. Per es., essendo 5 e 3 gli addendi, il totale sarà 8; ma, inversamente, non si potrà affermare che, essendo 8 il totale, gli addendi debbano essere 5 e 8. Così pure, *ammettendo* che un numero divida due numeri, si può *concludere* che divide la loro somma; ma, inversamente, *ammettendo* che un numero divida la somma di due numeri, non è lecito *concludere* che dividerà questi due; ecc.

3. Quando due proprietà sono così collegate che, verificandosi l'una, si verifichi necessariamente anche l'altra, allora se l'una *non* si verifica, necessariamente *non* si può verificare neppure l'altra. Per es., *se due numeri, divisi per un numero, non producono uguali resti, la differenza di quei due primi numeri non potrà essere divisibile per il terzo;* poichè, diversamente, i due numeri, divisi per quel terzo, dovrebbero dare resti contemporaneamente uguali e disuguali; il che è contrario al noto principio di *logica*, detto *principio di contraddizione* « una cosa non può al tempo stesso essere e non essere ». Così pure: *se la differenza fra due numeri non è divisibile per un numero, quei due numeri divisi pel terzo non daranno uguali resti;* poichè, diversamente, la differenza di due numeri dovrebbe contemporaneamente essere e non essere divisibile per un terzo.

4. I due teoremi enunciati all'articolo precedente sono pure inversi l'uno dell'altro, ma, confrontati con quelli riportati all'art. 1, si vede che l'ipotesi e la conclusione in uno di essi sono le proprietà *contraddittorie* o negative rispetto a quelle costituenti l'ipotesi e la conclusione in uno degli altri: laonde il 1° teorema dell'art. 1 e il 2° dell'articolo precedente si dicono *contrarj* o *opposti* l'uno dell'altro, e così pure sono *contrarj* fra loro il 2° dell'art. 1 e il 1° dell'articolo precedente.

5. Qui pure giova avvertire che non tutte le proposizioni possono essere contraddette. Per es., un numero che divide due altri, divide anche la loro somma; ma, contrariamente, ammesso che un numero non divida due altri, non è lecito concludere che non divide la loro somma Per es. 3 non divide 11 e 4, eppure divide la loro somma $11 + 4$.

6. L'art. 3 fa vedere che:

Dimostrati due teoremi inversi, si possono ritenere dimostrati anche i loro contrarj.

Inversamente, è facile persuadersi che:

Dimostrati due teoremi contrarj, si possono ritenere dimostrati anche i loro inversi.

7. Queste due proprietà costituiscono la *legge delle inverse* che domina in ogni parte delle matematiche; e che può esprimersi più concisamente così:

Dimostrato un teorema, si può ritenere dimostrato il contrario del reciproco.

(*) Avverto una volta per tutte che questi miei saggi di matematica elementare, che contengono nella sostanza cose notissime, sono scritti per gli alunni delle scuole secondarie. Di qui la ragione di taluni particolari che per i docenti sarebbero soverchi.

Infatti, si consideri un teorema del tipo generale seguente:

Se riguardo a un dato soggetto S *sussiste una certa proprietà* I, *sussisterà pure simultaneamente una certa proprietà* T *per quel medesimo soggetto.*

Il contrario del suo reciproco sarebbe:

Se riguardo a un dato soggetto S *non sussiste una certa proprietà* T, *non potrà simultaneamente sussistere una certa proprietà* I *per quel medesimo soggetto.*

Ora, ciò dovrà appunto accadere, poichè diversamente, sussistendo la proprietà I, sussisterebbe la proprietà T, pel primo teorema, e quindi questa proprietà T dovrebbe contemporaneamente sussistere e non sussistere.

È facile vedere che, inversamente, le due proprietà dell'articolo precedente sono conseguenze di quest'ultima, poichè, p. e., dimostrati due teoremi inversi, saranno veri i contrarj dei loro inversi.

Inoltre si osservi che il *contrario dell'inverso* è lo stesso che l'*inverso del contrario.*

8. Accade talora (di rado in Aritmetica, più spesso in altre parti della Matematica) che la ipotesi di un teorema si compone di varie proprietà anzichè di una. Per es. nel teorema: se un numero divide il prodotto di due numeri ed è primo con uno di essi, dividerà l'altro; l'ipotesi è costituita da due proprietà o ipotesi parziali.

In tal caso si possono alle volte combinare queste proprietà in guisa da formare altri teoremi, i quali, estendendo opportunamente le definizioni date, si possono chiamare inversi, contrarj, ecc..

9. Quando due proprietà sono collegate per modo che verificandosi l'una, si verifichi *necessariamente* l'altra, allora, anzichè enunciare separatamente i due teoremi inversi che ne derivano, se ne forma uno solo che si enuncia così:

La condizione NECESSARIA *e* SUFFICIENTE *affinchè si verifichi una di quelle due proprietà è che si verifichi l'altra.* E talora anche così: *Una di quelle due proprietà si verifica allora, e allora soltanto, quando si verifica l'altra.*

Per es., si attribuiscano a un numero le due proprietà seguenti:

a) la somma delle sue cifre è divisibile per 9;

b) il numero è divisibile per 9.

Ora è noto che: *basta*, è *sufficiente*, che si verifichi la prima perchè necessariamente si verifichi la seconda; *basta*, è *sufficiente*, che si verifichi la seconda perchè necessariamente si verifichi anche la prima.

Quindi, questi due teoremi reciproci si riuniscono in uno solo così:

La condizione NECESSARIA *e* SUFFICIENTE *affinchè un numero sia divisibile per 9 è che sia tale la somma delle sue cifre.* O anche così: *Un numero è divisibile per 9 allora, e allora soltanto, quando è tale la somma delle sue cifre.*

10. Come si è notato, non sempre una proposizione potrà invertirsi. Infatti può accadere che, mentre l'affermazione di una certa proprietà, *non basta, non è sufficiente*, senza l'aggiunta di una o più altre, per dedurne un'altra; inversamente, l'affermazione di quest'ultima *basti, sia sufficiente*, per ricavarne la prima.

Per es., *non basta, non è sufficiente* che un numero divida il prodotto di due numeri, per poter dire che dividerà anche uno dei fattori; bisogna aggiungere che il numero è primo con l'altro fattore. Invece, *basta, è sufficiente*, che un numero divida uno dei fattori, perchè *necessariamente* divida anche il prodotto (*). Ciò potrà esprimersi brevemente così:

La condizione *necessaria*, ma *non sufficiente*, affinchè un numero divida uno dei due fattori di un prodotto è che divida questo prodotto. Ovvero, la condizione *sufficiente*, ma *non necessaria*, affinchè un numero divida un prodotto di due fattori è che divida uno di questi fattori.

11. Accade talvolta che da differenti proprietà non coesistenti, quando siano trattate separatamente, ne derivi una sola di natura essenzialmente diversa dalle prime. In tal caso si vede che, se verificandosi una qualunque delle prime, si verifica *necessariamente* anche l'altra e *soltanto* questa, inversamente, il verificarsi di questa, *non basta, non è sufficiente*, per poter affermare la sua coesistenza con una delle prime. Ciò significa che:

La condizione *sufficiente*, ma *non necessaria*, affinchè si verifichi *quella proprietà* è che si verifichi *una* delle prime. Ovvero, la condizione *necessaria*, ma *non sufficiente*, affinchè si verifichi *una* delle prime è che si verifichi *quella proprietà*; e questo purchè, come si è detto, quella seconda proprietà si verifichi *soltanto* quando è verificata una delle prime.

Prenderemo un esempio dalla geometria.

Se due angoli sono: opposti al vertice, o retti, o formati da lati paralleli (diretti ecc.), o da lati perpendicolari (disposti ecc.), essi angoli saranno *necessariamente* uguali.

Ma, inversamente, *non basta, non è sufficiente*, sapere che due angoli sono uguali per poter dire che essi saranno, p. e., opposti al vertice, o retti, ecc. Onde si dirà:

La condizione *necessaria*, ma *non sufficiente*, affinchè due angoli siano opposti al vertice, ovvero abbiano i lati paralleli, (diretti ecc.) o i lati perpendicolari (disposti ecc.) o siano retti, è che siano uguali. Ovvero la condizione *sufficiente*, ma *non necessaria*, affinchè due angoli siano uguali, è che siano opposti al vertice, ovvero che abbiano i lati paralleli (diretti ecc.), ovvero che abbiano i lati perpendicolari (disposti ecc.), ovvero che siano retti.

12. Per ultimo, come complemento alla legge delle inverse esporremo il seguente principio:

Se si sono dimostrati n teoremi, relativi a un medesimo soggetto S, e se le ipotesi di questi teoremi sono tutte quelle possibili riguardo a un determinato argomento, cosicchè di queste n ipotesi $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n$ debba sempre necessariamente verificarsene una, e se le tesi $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ di questi teoremi sono incompatibili fra loro, cosicchè, verificandosene una, non possa contemporaneamente avverarsene un'altra, allora si potranno senz'altro ritenere come dimostrati gli n teoremi inversi.

(*) Sarebbe quasi inutile avvertire che in questi teoremi di divisibilità, quando si dice numero s'intende sempre numero intero.

Infatti, il soggetto S deve sempre avere una delle proprietà I; quindi anche quando S abbia per esempio la proprietà T_2, dovrà verificarsi una delle I, e precisamente la I_2, poichè, se invece si verificasse ad esempio la I_3, allora si verificherebbe pure la T_3, e allora sussisterebbero simultaneamente le proprietà T_2 e T_3, il che è impossibile.

Per es., tre ipotesi sono possibili sulla grandezza relativa dei termini di una frazione:

a) il numeratore è minore del denominatore (frazione pura);

b) il numeratore è maggiore del denominatore (frazione spuria);

c) il numeratore è uguale al denominatore (frazione uguale a 1).

Ora, aggiungendo ai due termini della frazione uno stesso numero, si ha che nel primo caso la frazione cresce di valore, nel secondo diminuisce, nel terzo non cambia. Così, relativamente a questo soggetto e in ordine a siffatto argomento e alle proprietà ammissibili, si possono enunciare tre teoremi, e soltanto tre. Allora, per il principio enunciato, sussistono necessariamente i teoremi reciproci, come si può vedere dimostrandoli *per esclusione*. Per esempio, si avrà:

Se aggiungendo uno stesso numero ai due termini di una frazione, questa cresce, la frazione sarà pura.

Poichè se tale non fosse, essa sarebbe maggiore o uguale a 1 e quindi, con l'addizione di uno stesso numero ai suoi due termini, essa diminuirebbe o non cambierebbe di valore. Cioè, aggiungendo uno stesso numero ai due termini di una frazione, essa dovrebbe contemporaneamente aumentare e conservare il suo valore.

13. Chiuderemo questo cenno sulla legge delle inverse, la quale, come si è detto, domina in ogni parte della matematica, con il seguente esempio aritmetico molto istruttivo.

Il denominatore di una frazione ordinaria irreducibile può contenere soltanto i fattori 2 e 5, oppure fattori diversi da questi, oppure tali fattori 2 e 5 insieme con altri; e non può accadere altrimenti. Ammesse tali proprietà, si può dimostrare ordinatamente che la frazione darà luogo a un numero decimale finito, oppure periodico semplice, oppure periodico misto. Ora, in base al principio precedente, sussisteranno i teoremi reciproci; e, inversamente, dimostrati prima questi teoremi reciproci, si potranno prima ritenere dimostrati i primi. Nell'un caso o nell'altro, i nuovi teoremi si dimostrano *per esclusione*; e tutti e sei i teoremi, combinati a due a due, si compendiano nei tre seguenti:

a) La condizione necessaria e sufficiente affinchè una frazione ordinaria irreducibile si converta in un numero decimale finito, è che il suo denominatore contenga i soli fattori 2 e 5.

b) La condizione necessaria e sufficiente affinchè una frazione ordinaria irreducibile si converta in un numero decimale periodico semplice, è che il suo denominatore non contenga alcuno dei fattori 2 e 5.

c) La condizione necessaria e sufficiente affinchè una frazione ordinaria irreducibile si converta in un numero decimale periodico misto, è che il suo denominatore contenga almeno uno dei fattori 2 e 5 insieme ad altri.

Nervi, novembre 1894.

GIOVANNI GARBIERI.

TEMI DI MATEMATICA DATI PER L'ESAME DI MATURITÀ
IN GINNASI E SCUOLE REALI SUPERIORI DELL'AUSTRIA-UNGHERIA
alla fine degli anni scolastici 1891-92 e 1892-93

(*Continuazione: V. pag. 27, 55, 97, 148 e 184 dell'anno IX*).

VIENNA: *i. r. Ginnasio sup. nel XVII Circ.* — 1. Se ai quattro termini di una progressione aritmetica s'aggiungono rispettivamente i numeri 5, 6, 9, 15 si ottiene una progressione geometrica. Quali sono le due progressioni?

2. Quali sono gli angoli di un triangolo nel quale due lati stanno come $2:3$ e gli angoli opposti come $1:2$?

3. L'altezza d'un cono retto è $h = 8$ cm., l'angolo al vertice $2\alpha = 28°48'$; qual è il volume di quel settore sferico del quale il cono dato forma il complemento?

4. Si domanda l'equazione di quel cerchio che passa pel punto $(5,9)$ e tocca la retta $4x + 3y + 3 = 0$ nel punto $(-3,3)$.

VIENNA: *Ginnasio comunale sup. nel XIX Circ.* — 1. Quali numeri hanno la proprietà che tanto la differenza delle loro terze potenze quanto la somma dei loro quadrati aumentata del loro prodotto è uguale a 19?

2. Due amici risparmiano alcunchè del loro denaro per un viaggio da farsi nelle vacanze. Il primo mette da parte da prima 2 fiorini e quindi ogni mese successivo 1 f. di più che nel mese precedente; il secondo comincia un mese più tardi mettendo da parte prima 3 fior. e quindi ogni mese successivo 1,50 f. di più che nel precedente. Per quanti mesi devono risparmiare ambedue onde avere assieme la somma di 96,50 f., e quanto spetta a ciascheduno?

3. Si ha da calcolare la superficie di una piramide ottagonale regolare che ha l'altezza di 12 dm. e la cui massima sezione diagonale misura 60 dm.^{2}. (Risultato esatto in cm.^{2}).

4. L'ellisse $16x^2 + 25y^2 = 400$ viene tagliata da una retta che passa per quel punto dell'asse delle ascisse che ha l'ascissa -4 e fa con questo un angolo di 45°. Qual è l'angolo acuto che racchiudono le tangenti guidate pei due punti d'intersezione?

VIENNA: *i. r. Ginnasio sup. accademico.* — 1. Due corpi partendo dallo stesso punto si muovono in direzioni opposte sulla periferia d'un cerchio. Il primo fa nel primo secondo 3° ed in ogni secondo successivo 1° di più, il secondo fa nel primo secondo $1°\frac{1}{2}$ ed in ogni secondo successivo 6° di più che nel precedente. Quando si incontreranno i due corpi la prima e la seconda volta?

2. La somma dei due lati a e b di un triangolo è di $d = 10$ maggiore del terzo lato c. Gli angoli sono $\alpha = 43°36'10''$, $\beta = 11°15'16''$, $\gamma = 124°58'34''$. Calcolare i lati.

3. Ad una sfera col raggio r è circoscritta una piramide quadratica regolare la cui base ha la diagonale $4r$. Calcolare la superficie ed il volume della piramide e l'angolo d'inclinazione delle faccie laterali colla base.

4. Un ramo dell'iperbole coi semiassi a e b ha comune il vertice e l'asse con una parabola. Gli assintoti dell'iperbole sono tangenti alla parabola. Si determini il parametro della parabola e le coordinate dei punti di contatto.

Trento: *i. r. Ginnasio sup. - Sez. it.* - 1. I. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})+2$; II. $3(\sqrt{x}+\sqrt{y})=\sqrt{y}(3\sqrt{x}+\sqrt{x})-7$.

2. I. $x^2+y^2-2xy\cos\varphi=144$, II. $xy \operatorname{sen}\varphi=36$, III. $x+y=28$.

3. Risolvere un triangolo obliquangolo dati $b-c=125{,}5$, $\beta-\gamma=75^0\,13'\,19''$, $a=201{,}8$.

4. Una retta interseca gli assi alle distanze $x_1=4$, $y_1=5$. Fra questa retta e l'asse delle ordinate si trova un cerchio che tocca le due rette e il cui centro ha l'ascissa $p=1$. Qual'è l'equazione di questo cerchio?

Trento: *i. r. Ginnasio sup. - Sez. tedesca.* — 1. Una società di 25 persone, uomini, donne e ragazzi, consuma in un'osteria 33,6 f.; ogni uomo cioè 1,75 f. ogni donna 1,20 f. ed ogni ragazzo 0,7 f. Quanti erano gli uomini, quante le donne e quanti i ragazzi?

2. Un triangolo rettangolo ABC ($C=90^0$) ruota intorno ad un asse parallela a BC; quanto importano superficie e volume del corpo di rotazione se $c=29$ ed $\alpha=43^0\,36'\,10''$?

3. La parabola $y^2=4x$ viene tagliata dalla retta $y=\frac{2}{5}x+\frac{8}{5}$. Si deve calcolare il segmento parabolico separato dalla retta.

4. (In alternativa col 3). I tre vertici di un triangolo hanno le coordinate $A(x_1=-15,\ y_1=-15)$, $B(x_2=-3,\ y_2=15)$, $C(x_3=15,\ y_3=-3)$, si cerchino le coordinate del centro del cerchio circoscritto.

Rovereto: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Un debito di 758000 f., per il quale si devè pagare il 6 % d'interesse composto, viene estinto in 10 anni col pagamento di 10 rate eguali versate alla fine d'ogni anno. Si domanda il valore della rata.

2. La superficie totale di un cono retto è $\frac{1}{54}$ di quella della sfera, che ha per raggio il semiperimetro della sezione passante per l'asse. Che lato e che volume ha il cono, se la superficie della sfera è $s=3260$ dm^2?

3. La base di un trapezio isoscele è $a=17$ dm. i lati non paralleli valgono ciascuno $c=10{,}7$ dm, l'angolo racchiuso dalle diagonali è $\alpha=100^0\,12'$. Si domanda il valore degli elementi del trapezio.

4. Le equazioni di due cerchi sono $(x-3)^2+y^2=16$, $x^2+(y+1)^2=9$. Che superficie ha il triangolo avente per vertici i due punti d'intersezione e il centro del secondo cerchio?

Trieste: *Ginnasio comunale sup.* — 1. I. $\sqrt{y}-\sqrt{x}=\sqrt{x+y-\sqrt{4xy}+x-y}+9$; II. $\sqrt{x-y}:\sqrt{20-x}=3:2$.

2. Un serbatoio d'acqua può venir riempito mediante i tubi A e B in 35 minuti, e mediante i tubi B e C in 70 minuti. In quanti minuti può esso venire riempiuto mediante ogni singolo tubo?

3. Si calcoli il volume di un tronco piramidale che abbia la base $B=$ all'ottagono regolare inscritto ad un cerchio col raggio $=2$ m, e la base $B_1=$

all'ottagono regolare circoscritto al medesimo cerchio, e l'altezza = alla distanza dei punti $M_1 = (4,6)$ ed $M_2 = (10,14)$.

TRIESTE: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. La somma dei tre primi termini di una progressione geometrica è 52; la differenza del quarto e secondo termine sta alla differenza del secondo e del primo come 12 : 1. Qual' è la progressione?

2. La superficie laterale d' un cono retto è di 1 dm² 88 cm² 49 mm², l'angolo al vertice della sezione assiale è $73^0\,44'\,21{,}4''$. Il cono è inscritto in una sfera. Qual' è il volume del segmento sferico che poggia sulla base del cono?

3. Un cerchio passa pei punti d'intersezione delle tre rette $y = \frac{x}{2} + \frac{17}{2}$, $y = -x + 1$, $y = 3x - 19$ e viene segato dalla retta $y = x + 11$. Qual' è l'area del triangolo determinato dalla corda e dal punto (11,14) del cerchio?

VIENNA: *i. r. Ginnasio sup. zu den Schotten.* — 1. In una proporzione la somma dei termini estremi è = 24, quella dei termini medi = 16 e la somma dei quadrati di tutti i termini è = 580. Qual è la proporzione?

2. Si cerchi l'angolo la cui tangente trigonometrica è 32 volte la differenza fra la quarta parte del seno dell'angolo doppio e la terza parte del seno dell'angolo semplice.

3. Sviluppare completamente $(2 - \sqrt{-1})^6$.

4. Le equazioni di due circoli sono $x^2 + y^2 = \left(\frac{45}{4}\right)^2$ e $\left(x - 12\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2$. Si determini l'area del triangolo che è compreso fra le due tangenti esterne e la corda comune.

VIENNA: *i. r. Ginnasio dell'Acc. Teresiana.* — 1. $\sqrt{\frac{3y - 2x}{y}} + \sqrt{\frac{4y}{3y - 2x}} = 2\sqrt{2}$, $3(x^2 + 1) = (y + 1)(y - x + 1)$.

2. In una progressione geometrica di termini reali la somma dei tre primi termini è = 14, ed il loro prodotto = 64. In una progressione aritmetica invece la somma dei tre primi termini è = 12 ed il loro prodotto = 48. Qual termine della progressione geometrica concorda col 512° termine della progressione aritmetica?

3. Un triangolo col lato $c = 156$ cm. e gli angoli adiacenti $\alpha = 46^\circ 23' 50''$ e $\beta = 61^0 55' 39''$ forma la base di un prisma obliquo che ha gli spigoli laterali $s = 128{,}624$ cm. ed inclinato di $\varphi = 71^\circ 40' 31''$ verso la base. Quale è il volume del prisma?

4. Dal punto (4,0) è guidata una tangente all'iperbole $9x^2 - 25y^2 = 225$, la quale taglia gli assintoti nei punti C_1 e C_2. Si determini il luogo geometrico dei centri di tutti i circoli che passano per questi due punti, e si ricerchi la sua posizione rispetto alla normale dell'iperbole che corrisponde a quella tangente.

VIENNA: *Ginnasio reale sup. comunale Leopoldstadt.* — 1. Un tale pone ad interesse composto del $4\frac{1}{2}$ °/₀ per 12 anni, alla fine di ogni anno, 762,13 f., Per quanti anni potrà egli poi ricevere, pure alla fine d'ogni anno, 2000 f. affinchè capitale e frutti vengano consumati?

2. $\sqrt{10 + 3x} - \sqrt{14 - 2x} = \sqrt{19 - 2x}$.

3. In una piramide triangolare gli spigoli alla base sono $a = 600$, $b = 450$, $c = 210$. I tre spigoli laterali sono eguali a $l = 626$. Qual è la superficie di un parallelepipedo rettangolare equivalente, se i tre spigoli di questo stanno fra loro come $14 : 18 : 25$?

4. Sotto quali angoli taglia la parabola $y^2 = 8x$ quella retta che passa per i punti $(-2,8)$ e $(3,3)$?

Wiener Neustadt: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Qual è il lato più corto e quale il più lungo di un triangolo rettangolo, che ha l'area di 138 m.^{2} se un angolo importa $27^0 53'$?

2. Per tre punti $(2,3)$, $(-2,3)$ e $(0, -2)$ si conduca un circolo, lo si consideri come base di un cilindro equilatero e si calcoli il volume e la superficie del cubo inscritto in questo cilindro.

3. I. $x^2 - 2xy + 3y^2 = 33$, II. $3x^2 + 14xy + 6y^2 = 291$.

4. Tre fratelli dei quali il più vecchio ha ora $n_1 = 18$ anni, il medio $n_2 = 16$ anni ed il più giovane $n_3 = 13$ anni, hanno ricevuto, ognuno all'età di $m = 10$ anni, un regalo $c = 1500$ f., il quale fu impiegato all'interesse composto del $p = 4\,^0/_0$. Devono fondare un' impresa tostochè abbiano insieme $c_1 = 10000$ f. Quanto devono aspettare?

Gorizia: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. I. $x^4 + y^4 = 706$, II. $x - y = 2$.

2. In una fabbrica, dopo l'introduzione di una macchina a vapore, vengono licenziati 45 operai, dei quali 40 ricevevano una mercede settimanale di 9 f. e gli altri una mercede settimanale di 11 f.. La fabbrica impiega il risparmio così ottenuto alla fine d'ogni anno come rata d'ammortizzazione pel pagamento della macchina, la quale si trova così pagata intieramente alla fine del 22° anno. Qual'era il prezzo originario di questa? (5 $^0/_0$ d'interesse).

3. Nei punti d' intersezione del circolo $x^2 + y^2 = 97$ e dell' ellisse $\left(\frac{x}{15}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ si devono guidare tangenti ad ambedue le curve e calcolare gli angoli da esse formati coll'asse delle ascisse.

Zara: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Un tale vuol pagare per 21 anni di seguito al principio d'ogni anno una somma determinata, affinchè scorsi quelli anni egli medesimo od un altro individuo possa per dieci anni di seguito percepire una rendita di 1000 f. pagabili alla fine di ogni anno. Quale sarà la somma da pagarsi annualmente, se si calcola il $3\frac{3}{4}\,^0/_0$ d'interesse composto?

2. Il perimetro di un triangolo è di 20 m., la sua base è di 5 m. minore della somma degli altri due lati, la somma dei quadrati di tutti e tre i lati è di 149 m.^{2}; si calcolino i lati e gli angoli del triangolo ed il volume del corpo generato dalla rotazione del triangolo intorno alla sua base.

3. Date le coordinate di tre punti $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = 3$, $y_2 = 1$; $x_3 = 6$, $y_3 = 4$, si trovi la superficie ed il volume della sfera che ha per cerchio massimo il cerchio che passa per questi tre punti.

BOLZANO: *Ginnasio sup. dei Francescani.* — 1. $\operatorname{sen} x + 1 = 2 \cos x$.

2 Una progressione aritmetica ed una progressione geometrica accordano nel primo e secondo termine; il terzo termine della progressione geometrica è eguale al quarto termine della progressione aritmetica. Qual'è in ambedue le serie la somma dei primi 20 termini?

3 Sopra l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele col cateto a è costruito un quadrante di cerchio ed un semicerchio; si calcoli la superficie ed il volume del corpo che viene descritto se la figura compresa dai due archi ruota intorno alla loro simmetrica.

4. Dal punto A $(-1,3)$ sono guidate due tangenti alla parabola $y^2 = 16x$, si trovi l'area del triangolo compreso dalle due tangenti e dalla corda di contatto. (Costruzione).

MERAN: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Una rendita annuale di 1100 f. che dura ancora 15 anni viene trasformata in un'altra di 900 f., quanto durerà il godimento di quest'ultima se si calcola il $4\frac{1}{2}$ % d'interesse composto?

2. Risolvere un parallelogrammo date le diagonali $e = 2{,}736$, $f = 5{,}492$ e l'area $s = 4{,}3093$.

3 Un settore circolare di $\alpha°$ e di raggio r viene ripiegato a formare la superficie laterale di un cono; qual'è la superficie totale ed il volume del cono?

4. Pel punto $(2, 9)$ passano due tangenti al cerchio $x^2 + y^2 = 36$; quali sono le loro equazioni e che angolo formano?

(*Continua*).

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Nota sul problema del Malfatti: *In un triangolo inscrivere tre cerchi tangenti fra loro.* — Sia I il centro del circolo iscritto nel triangolo ABC, ed M, N, P i punti di contatto coi rispettivi lati BC, CA, AB. Sulle bisettrici degli angoli B, C, A si trovano i centri O_1, O_2, O_3 dei cerchi incogniti; chiamando M_1, M_2, le proiezioni dei centri O_1, O_2, sul lato BC, N_2, N_3 quelle dei centri O_2, O_3, sul lato CA, ponganansi per brevità $M_1M = u$, $MM_2 = v = N_2N$, $NN_3 = t$, $IM = r$, $O_1M_1 = \rho_1$, $O_2M_2 = O_2N_2 = \rho_2$, $O_3N_3 = \rho_3$. Facilmente si traggono le relazioni:

$$\rho_1\rho_2 = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2, \quad \rho_2\rho_3 = \left(\frac{v+t}{2}\right)^2, \quad \rho_3\rho_1 = \left(\frac{t+u}{2}\right)^2:$$

dalle quali si hanno

$$\rho_1 = \frac{(u+v)(u+t)}{2(v+t)}, \quad \rho_2 = \frac{(v+u)(v+t)}{2(u+t)}, \quad \rho_3 = \frac{(t+u)(t+v)}{2(u+v)};$$

per la trigonometria ricavansi

$$\cot\frac{B}{2} = \frac{u}{r-\rho_1}, \quad \cot\frac{C}{2} = \frac{v}{r-\rho_2}, \quad \cot\frac{A}{2} = \frac{t}{r-\rho_3},$$

che sostituite nella nota identità

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$$

conducono all'uguaglianza

$$\frac{uvt}{(r-\rho_1)(r-\rho_2)(r-\rho_3)}=\frac{u}{r-\rho_1}+\frac{v}{r-\rho_2}+\frac{t}{r-\rho_3}.$$

Ridotta a forma intera otteniamo

$$r^2(u+v+t)-r[\rho_1(v+t)+\rho_2(u+t)+\rho_3(v+u)]+ \\ u\rho_2\rho_3+v\rho_1\rho_3+t\rho_1\rho_2-uvt=0,$$

che per i surriferiti valori dei raggi ρ_1, ρ_2, ρ_3 in funzione delle u, v, t si traduce nella relazione

$$4r^2(u+v+t)-2r[(u+v)(v+t)+(v+t)(u+t)+(u+v)(t+u)] \\ +u(t+v)^2+v(t+u)^2+t(u+v)^2-4uvt=0;$$

il qual termine indipendente da r è identico al prodotto $(u+t)(v+t)(u+v)$ perciò si conchiude

$$4r^2(u+v+t)-2r[(u+v)(v+t)+(v+t)(u+t)+(u+v)(u+t)] \\ +(u+v)(u+t)(v+t)=0.$$

Da questa equazione si può ricavare ciascuna delle incognite $v+t$, $u+t$, $v+t$ in funzione di r e dei rispettivi angoli B, C, A: infatti scrivendola $4r^2(v+t)-2r(u+v)(u+t)+(u+v)(u+t)(v+t)=2r[(u+v).(v+t)+(v+t)(u+t)]-4r^2u$ e togliendo $2r(v+t)^2$ dai due membri, si trova

$$[2r-(v+t)][2r(v+t)-(u+v)(u+t)]=4ru(v+t-r):$$

e siccome $\tang\dfrac{B}{2}=\dfrac{r-\rho_1}{u}=\dfrac{2r(v+t)-(u+v)(u+t)}{2u(v+t)}$, la precedente diviene

$$[2r-(v+t)](v+t)=2r\cot\frac{B}{2}\cdot(v+t-r);$$

da cui risulta $v+t=r\left(1+\tang\dfrac{B}{4}\right)=BI+IM-BM$: similmente ottengonsi

$$u+t=r\left(1+\tang\frac{C}{4}\right)=CI+IM-CM,$$

$$u+v=r\left(1+\tang\frac{A}{4}\right)=AI+IN-AN,$$

e quindi

$$\rho_1=r\,\frac{\left(1+\tang\frac{A}{4}\right)\left(1+\tang\frac{C}{4}\right)}{1+\tang\frac{B}{4}}\ ,\ \text{ecc.}.$$

G. Bellacchi.

Centro di gravità del trapezio. — Sia $ABCD$ un trapezio i cui lati paralleli contengono rispettivamente p e q unità di lunghezza. Si bisechino AB, DC in E, F e si tirino BD, EF che si tagliano in H.

Si ha

$$\triangle ABD : \triangle BDC :: AB : DC :: p : q :: 3p : 3q.$$

Il centro di gravità del triangolo ABD si può considerare come quello delle masse $2p$ in E e p in D. Il centro di gravità del triangolo BDC è quello delle masse $2q$ in F e q in B.

Ora

$$EH : HF :: BH : HD :: BE : DF :: p : q$$

e giacchè le masse p in D e q in B equivalgono alla massa $p + q$ in H, equivarranno alle masse p in F e q in E. Il sistema ha quindi per baricentro quello delle masse $2p + q$ in E, $p + 2q$ in F.

Se G è il centro di gravità del trapezio, esso cade dunque su EF così che

$$(2p + q)\,EG = (p + 2q)\,FG.$$

Quando si denotino i baricentri dei triangoli ABD, BDC con L, M e si adotti la notazione di Möbius, l'ultima parte della dimostrazione si riassume brevemente così:

$$\begin{aligned}(3p + 3q)\,G &= 3pL + 3qM = 2pE + pD + 2qF + qB \\ &= 2pE + 2qF + (p + q)\,H = 2pE + 2qF + qE + pF \\ &= (2p + q)\,E + (2q + p)\,F.\end{aligned}$$

E. M. Langley.

Sull'ordine delle cifre di un numero decimale. — Per ordine di una cifra decimale s'intenda il numero d'ordine del posto che essa occupa, contando a partire dalla cifra della unità e attribuendo a questo numero il segno + o il segno —, secondochè si conta verso sinistra o verso destra.

Da questa definizione derivano delle semplificazioni importanti per il calcolo dei numeri decimali; eccone alcuni esempi:

I) Nella moltiplicazione di due numeri decimali, l'ultima cifra del prodotto parziale, che corrisponde alla prima cifra del moltiplicatore, ha per ordine la somma degli ordini dell'ultima cifra del moltiplicando e della prima cifra del moltiplicatore.

Questo criterio è utilissimo per collocare la virgola, quando, nell'eseguire la moltiplicazione fra due numeri decimali approssimati, onde evitare una approssimazione illusoria, non si calcolano tutte le cifre del prodotto (V., p. es., Faifofer, *Elementi di aritmetica*, pag. 253 — Venezia, 1885).

II) Nella divisione di due numeri decimali l'ordine della prima cifra del quoziente è sempre eguale alla differenza fra l'ordine della prima cifra del dividendo e l'ordine della prima cifra del divisore, o a questa stessa differenza diminuita di una unità, secondochè, immaginando che la prima cifra del dividendo e del divisore sia di ordine zero, il dividendo risulta maggiore o minore del divisore.

III) La caratteristica del logaritmo di un numero è uguale al numero d'ordine della prima cifra di questo numero (che è, in sostanza, la regola data dal CAILLET, *Tavole logaritmico-trigonometriche*, pag. II — Vannes, 1890).

Livorno, dicembre 1894.

G. PESCI.

Sulla quistione 207*. — La soluzione da me data della quistione 207* (*) non è che un caso particolare di una soluzione data dal FLAUTI nella sua *Geometria di sito*, che risolve questo problema più generale:

Dato un punto P e due rette AX, A_1X_1 terminate in A ed A_1, tirare per P fra le rette AX e A_1X_1 una trasversale PBB_1 tale che $\frac{BA}{B_1A_1} = \frac{m}{n}$.

Per risolvere un tale problema egli premette il lemma seguente:

Se sulle rette AX e A_1X_1 si prendono due segmenti AB ed A_1B_1 tali che $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{m}{n}$ e si prende ancora $\frac{OB}{OD} = \frac{m}{n}$, O essendo l'intersezione di AX e A_1X_1 e D trovandosi su OA_1, si ha che B_1D è o nulla o costante, al variare di B e B_1. (**)

Oltre questi teoremi del FLAUTI, si riferiscono al medesimo ordine di idee questi altri non meno eleganti:

1° Date le direzioni AX e A_1X_1 se si prende su di esse $AB = A_1B_1$ la congiungente dei punti medii M ed N di AA_1 e BB_1 è parallela alla bisettrice interna od esterna dell'angolo delle due direzioni, secondochè AB ed A_1B_1 sono contate nel medesimo senso o in senso inverso. (***)

Quindi:

2° Rimanendo fisse le rette AX ed A_1X_1 e i punti A ed A_1 se si tirano tante trasversali BB_1 in modo che sia $AB = A_1B_1$ il luogo dei punti medii di BB_1 si compone di due rette perpendicolari fra di loro, parallele alle due bisettrici dell'angolo (AX, A_1X_1).

Infine:

3° Le rette BB_1 inviluppano due parabole tangenti ciascuna alle due direzioni date AX e A_1X_1 e all'una delle due rette, luoghi dei punti medii di BB_1. Infatti la retta BB_1 taglia AX, A_1X_1, la retta all'infinito e una di queste rette-luogo in quattro punti di una forma armonica.

G. SCORZA.

(*) Vedere a pag. 33.
(**) Vedi FLAUTI: *Geometria di sito*, pag. 261 e seguenti.
(***) Vedi *Journal de Mathématiques élémentaires* publié par H. VUIBERT. Anno XVIII, pag 29.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
171*, 202**, 205*, 206*, 207*, 208*, 210*, 213** e 215**.

171*. *La retta* B′C′ *tirata per i piedi delle altezze* BB′, CC′ *del triangolo* ABC *incontri in* A″ *il lato* BC *e si conduca* AA‴ *perpendicolare ad* AA″. *Dimostrare che le rette* AA‴, BB‴, CC‴ *si tagliano in un punto.*

(Ved. F. Prime).

Dimostrazione del Sig. *E. Lugaro*, licenziato dal R. Liceo Garibaldi di Palermo.

Sia A_1 (Tav. I, fig. 7ª) il punto d'incontro di BB'' con CC''. Per il teorema di Menelao applicato al $\triangle\ ACC''$, i cui lati sono tagliati dalla trasversale BB'', si ha

[1] . . . . $AB \,.\, C''A_1 \,.\, CB'' = BC'' \,.\, A_1C \,.\, B''A.$

Siccome $A'A$ è bisettrice dell'angolo $B'A'C'$, la $A'C$, ad essa perpendicolare, sarà bisettrice dell'angolo adiacente $B''A'B'$; quindi

$$CB' : CB'' = AB' : AB'';$$

moltiplicando membro a membro con la [1] si ottiene

$$AB \,.\, C''A_1 \,.\, CB' = BC'' \,.\, A_1C \,.\, B'A$$

e per il teorema di Ceva, applicato allo stesso triangolo, considerando come trasversali le AA_1, CB, $C''B'$, si ha che queste tre rette passano per uno stesso punto A', ossia il punto A_1 si trova sulla AA'. In modo analogo si dimostra che B_1, C_1 sono rispettivamente sulle BB', CC'.

Si faccia $\angle\ CA_1D = HA_1B$, $\angle\ CB_1E = HB_1A$, $\angle\ BC_1F = HC_1A$, allora le A_1D, B_1E, C_1F, essendo coniugate isogonali delle HA_1, HB_1, HC_1 nel $\triangle\ A_1B_1C_1$, rispetto agli angoli CA_1B, CB_1A, BC_1A,, concorrono in un punto O (*). Si congiunga questo punto con A, B e C.

Siano a, b i piedi delle perpendicolari condotte da O ad AA'', BB''. Il quadrilatero ObC_1a, avendo gli angoli opposti supplementari, è inscrittibile: sono dunque eguali gli angoli bC_1O, baO; ma è $bC_1O = HC_1a$, è dunque $baO = HC_1a$. E siccome questi angoli hanno una coppia di lati perpendicolari (C_1a, Oa), anche i lati C_1H, ab dell'altra coppia sono perpendicolari; ma AB è anch'essa perpendicolare a C_1H, quindi AB è parallela alla ab. Similmente si dimostra che BC, CA sono parallele a bc, ca. Ora due triangoli che hanno i lati paralleli sono simili: se non sono eguali hanno un centro di similitudine, che è il punto d'incontro delle rette che ne congiungono i vertici omologhi; se sono eguali le tre rette sono parallele. Nel nostro caso però le AA''

(*) V. *Alcuni teoremi di geometria*, p. 1, n. 1.

BB'', CC'' non sono concorrenti nè parallele, quindi A, B, C devono coincidere con a, b, c. Le AO, BO, CO coincidono perciò con le AA''', BB''', CC''' che si tagliano in un punto O. c. d. d..

Osservazioni — 1ª. Sappiamo che le sei proiezioni di due punti isogonali sui lati d'un triangolo sono conciclìche e che il centro del cerchio è il punto medio della distanza dei due punti. Quindi il centro del cerchio ABC è il punto medio della HO.

2ª. Essendo i punti B, C, B', C' conciclici, si ha

$$A''B \, . \, A''C = A''C' \, . \, A''B'.$$

Il primo membro rappresenta la potenza del punto A'' rispetto al cerchio ABC, il secondo membro la potenza di A'' rispetto al cerchio $A'B'C'$, cioè al cerchio dei nove punti (punti ortici, punti medi dei lati e punti medi delle distanze dei vertici dall'ortocentro). Similmente per B'' e C''. Quindi i punti A'', B'', C'', essendo ciascuno di uguale potenza rispetto a questi due cerchi, si trovano in una retta (asse radicale) perpendicolare a quella dei centri, cioè ad HO, perchè il centro del cerchio dei nove punti è il punto medio della distanza di H dal centro del cerchio ABC.

202.** *Dimostrare le seguenti soluzioni dei problemi:*

« *Date in un piano due rette* u, u′ *ed un punto* U′, *tracciare, con la sola riga, la retta che unisce* U′ *al punto* uu′, *senza far uso di quest'ultimo punto* ».

Si tirino le rette arbitrarie l, l′, p *delle quali le prime due passino per* U′, *e si ponga* p (u, l) ≡ N, L; ul ≡ M; u′l′ ≡ M′. *Preso poi un punto arbitrario* S *di* MM′, *si ponga* SN . u′ ≡ N′, SL . l′ ≡ L′. *La retta* N′L′ *taglierà* p *in un punto* U″ *della richiesta retta; sicchè questa sarà la* U′U″.

« *Dati in un piano due punti* U, U′ *ed una retta* u′, *trovare con la sola riga, il punto comune ad* u′ *ed alla retta* UU′, *senza far uso di quest'ultima retta* ».

Si segnino i punti arbitrari L, L′, P *dei quali i primi due giacciano sopra* u′, *e si ponga* P (U, L) ≡ n, l; UL ≡ m; U′L′ ≡ m′. *Presa poi una retta arbitraria* s *di* mm′ *si ponga* sn . U′ ≡ n′, sl . L′ ≡ l′. *Il punto* n′l′ *sarà proiettato da* P *con una retta* u″ *del punto richiesto; sicchè questo sarà* u′u″.

Far rilevare che le due precedenti soluzioni, mentre non richiedono maggior numero di costruzioni di quelle già conosciute, possono ciascuna servire a risolvere tanto il problema a sinistra che quello a dritta. (A. Del Re).

Risposta del Sig. V. *Columbo*, studente nella R. Università di Napoli (*).

Prendiamo a dimostrare la costruzione relativa al problema di sinistra.

I due triangoli LMN, $L'M'N'$ (Tav. I, fig. 8ª) sono tali che le rette LL', MM', NN', congiungenti i vertici corrispondenti, passano per lo stesso punto

(*) Un'altra soluzione venne inviata dal Sig. *G. Scorza*, studente a Pisa.

S: ne segue che i lati corrispondenti si tagliano in punti che sono in linea retta. Ma questa retta è determinata dai due punti $U' \equiv LM \,.\, L'M'$, $U'' \equiv LN \,.\, L'N'$ cosicchè la retta $U'U''$ passa per il punto d'intersezione delle $MN \equiv u$, $M'N' \equiv u'$.

Questa costruzione richiede il tracciamento di otto rette come le altre conosciute. Inoltre essa si adatta anche alla risoluzione del problema a dritta.

Invero (fig. 9ª), preso un punto P ad arbitrio, si trova la retta congiungente P col punto $u' \,.\, UU'$ senza far uso della UU', col mezzo della costruzione precedente, come segue:

Si tracci la retta $l \equiv P \,.\, U$ e scelto un punto A ad arbitrio di u' si conduca $l' \equiv P \,.\, A$ e per U' una retta arbitraria p. Sia $V \equiv p \,.\, l$. Si prenda sulla UA un punto S e pongasi $B \equiv u' \,.\, SU'$, $C \equiv l' \,.\, SV$. La retta BC incontri p in un punto P': la PP' conterrà il punto $u' \,.\, UU'$, il quale sarà perciò l'intersezione di PP' con u'.

Correlativamente per il problema a destra.

205*. *I tre punti simmetrici di un punto* M, *preso sul circolo circoscritto ad un triangolo* ABC, *rispetto ai lati di questo, sono in una retta, e tutte le rette che si possono ottenere in tal modo, al variare di* M *sul circolo, passano per uno stesso punto, l'ortocentro del triangolo.*

(G. Biasi).

Dimostrazione del Sig. *G. Scorza*, studente a Pisa.

Dal punto M (Tav. I, fig. 10ª) si abbassino sui lati BC, CA, AB del triangolo ABC le perpendicolari MD, ME ed MF: allora pel teorema di Simson (*) i punti D, E ed F sono sopra una medesima retta. Inoltre siano: H l'ortocentro del triangolo ABC e K, N, G i punti ove la retta AH incontra le rette DE e BC e il circolo circoscritto, e si tirino le rette MC, MG, DG, DH.

I punti D, E, M, C si trovano sopra una medesima circonferenza di diametro MC poichè gli angoli MEC ed MDC sono retti, dunque $\angle MCE = \angle MDE$. Ma l'angolo MDE è uguale all'angolo DKN per essere la MD parallela alla KN e l'angolo MCA è uguale all'angolo MGA perchè insistono sul medesimo arco di cerchio, dunque sarà altresì $\angle DKN = \angle MGA$. Per conseguenza se P è il punto d'incontro delle rette DK ed MG saranno isosceli i triangoli PKG e PDM e quindi uguali gli altri due MPK e PGD. Da ciò segue che MK è uguale a DG: ma, come si sa, DG è uguale a DH, dunque MK è uguale a DH, la figura $MDHK$ è un parallelogrammo e la MH è segata per metà dalla DK. Ora poichè D, E, F sono sopra una medesima retta saranno sopra una stessa retta parallela alla DE anche i punti M', M'', M''' simmetrici di M per rispetto a BC, CA, AB; e finalmente poichè MH è segata per metà dalla DE la retta $M'M''$ passerà per H. Il teorema è dunque dimostrato (**).

(*) Vedi p. es. Baltzer, *Planimetria*, pag. 47.

(**) Una dimostrazione poco dissimile dalla presente venne inviata dal Sig. *F. Celestri*, alunno del R. Istituto tecnico di Modica.

Dimostrazioni del Sig. *E. Lugaro*, licenziato dal R. Liceo Garibaldi di Palermo e *M. Morale* licenziato dal R. Istituto tecnico di Catania (*).

Siano D, E, F (Tav. I, fig. 11ª) i tre punti simmetrici del punto M, rispetto ai lati AB, BC, AC; G, K, L i punti medi delle MD, ME, MF.

Al variare di M sul circolo, il punto D genera una circonferenza simmetrica alla data rispetto all'asse AB; perciò questa circonferenza così generata è eguale alla ABC e la interseca nei punti A, B. Similmente i luoghi dei punti E, F sono due circonferenze simmetriche alla data, l'una rispetto all'asse BC, l'altra rispetto all'asse AC. Questi tre cerchi hanno, per un noto teorema, un punto in comune H, che, essendo i tre cerchi tra loro eguali, è, per un altro teorema anch'esso noto, l'ortocentro del triangolo (**).

Tirisi AH, CH, EB, BD, MB, EH, DH. Si ha $\angle AHC = 180^0 - ABC$, perchè $\angle AHC$ ed $\angle ABC$ hanno i lati perpendicolari che non cadono due a due da una stessa banda o da bande opposte di BH. Inoltre

$$\angle AHD + CHE = \angle ABD + CBE = \angle ABM + MBC = \angle ABC;$$

quindi

$$\angle DHA + AHC + CHE = 180^0,$$

epperò D ed E giacciono in una stessa retta, passante per H.

Nello stesso modo si prova che $\angle FHA + AHC + CHE = 180^0$, cosicchè nella retta HE si trova anche il punto F. I punti D, E, F sono quindi in una retta passante per l'ortocentro del triangolo; e in una retta, parallela a questa, si trovano altresì i punti G, K, L.

206'. *Dati i tre punti simmetrici del centro del circolo circoscritto ad un triangolo, rispetto ai lati di questo, si costruisca il triangolo, studiando le relazioni fra il triangolo domandato e quello che ha per vertici i punti dati.*

(G. Biasi).

Soluzioni analoghe dai Sigg. *B. Armano*, licenziato dal R. Liceo di Alessandria; *F. Celestri*, alunno del R. Liceo di Modica; *L. Gragnani*, studente a Piombino; *C. Montanari*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Livorno e *S. Resta*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari.

Siano A, B, C (Tav. I, fig. 12ª) i punti simmetrici del centro O del circolo circoscritto ad un $\triangle\ DEF$ rispetto ai lati EF, FD, DE; M, N i punti medi dei segmenti AO, BO quindi anche degli altri EF, FD. Si ha $AB = 2MN$, $DE = 2NM$ quindi $AB = DE$; e così $BC = EF$, $CA = FD$: inoltre $AB \parallel MN$, $DE \parallel NM$, perciò $AB \parallel DE$; similmente $BC \parallel EF$, $CA \parallel FD$. I due triangoli ABC, DEF sono dunque direttamente eguali ed hanno inoltre i lati paralleli (*1ª proprietà*).

La CO perpendicolare a DE è altresì perpendicolare alla sua parallela AB e per ragione consimile AO è perpendicolare a BC e BO a CA. D'altra parte se Q è il centro de circolo circoscritto al $\triangle\ ABC$, siccome si ha $FA = FO = FB$

(*) Altre dimostrazioni del teorema furono inviate dal Sig. *B. Armano*, licenziato dal R. Liceo di Alessandria e *G. Gallucci*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Napoli.

(**) Ciò si può derivare anche come facile conseguenza della soluzione della q. 206ª [*N. d. Red.*].

e $QA = QB$, sarà FQ perpendicolare ad AB e quindi anche a DE. Analogamente le altre due altezze del $\triangle\ DEF$ passeranno per Q. Onde si può dire che l'ortocentro dell'un triangolo coincide col centro del cerchio circoscritto all'altro. (*2ª proprietà*).

Dall'essere poi $AF = FO = AQ$, perchè triangoli uguali hanno eguali i raggi dei cerchi a loro circoscritti, se ne ricava che AB è asse del segmento FQ e che per conseguenza i punti D, E, F sono simmetrici di Q rispetto ai lati del $\triangle\ ABC$. Dunque l'un triangolo si può ottenere dall'altro come questo è ricavato dal primo. (*3ª proprietà*).

La 2ª proprietà insegna, dati i tre punti A, B, C a trovare il centro del cerchio circoscritto al $\triangle\ DEF$. Si conoscono così le AO, BO, CO e quindi anche i loro assi che sono i lati del triangolo cercato.

Il Sig. *E. Lugaro*, che inviò pure una soluzione del problema, osserva poi che il punto d'incontro P delle mediane del $\triangle\ DEF$ trovandosi, com'è noto, sulla OQ in posizione tale per la quale si ha $PQ = 2\,OP$ e il baricentro G di ABC in posizione tale per cui è $OG = 2\,GQ$, i punti P, G dividono la OQ in tre parti uguali (*).

207*. a) *Essendo date, nel piano, due direzioni* AX, $\mathrm{A_1X_1}$ *uscenti dai punti* A, $\mathrm{A_1}$, *e un punto* P *esterno ad esse, trovare nelle direzioni medesime i punti* B, $\mathrm{B_1}$ *in linea retta con P e tali che sia* $\mathrm{AB} = \mathrm{A_1B_1}$.

b) *Applicare questo problema alla soluzione dei seguenti:*

1° *Diminuire i lati di un rettangolo di uno stesso segmento, in modo da ottenere un nuovo rettangolo equivalente ad una parte del primo, determinata da una retta parallela ad un lato.*

2° *Costruire un arco di circolo tale che la somma della sua tangente e della sua cotangente sia eguale a 4 (o ad altro numero dato).* [Esami di licenza degli Istituti tecnici, 1890-91].

3° *Costruire due archi, essendo date la loro somma e la somma delle loro tangenti.* [Esami di licenza degli Istituti tecnici, 1892-93].

(G. Biasi).

Risposta del Sig. *G. Scorza*, studente a Pisa (**).

a) Supponiamo il problema risoluto e sia BB_1 (Tav. I, fig. 13ª) una retta passante per P e tale che $AB = A_1B_1$.

Allora se, indicando con O il punto d'incontro di AB e A_1B_1, si prende su OA_1 un segmento OD uguale ad OB si avrà che DB_1, differenza di OB_1 ed OB (si è supposto $OA_1 > OA$ e quindi $OB_1 > OB$), è costante perchè uguale ad $(OA_1 + A_1B_1) - (OA + AB)$ (***) cioè ad $OA_1 - OA$, essendo uguali AB ed A_1B_1.

(*) Altre soluzioni pervennero dai Sigg. *M. Morale*, studente a Catania e *G. Scorza*, studente a Pisa.

(**) Un'altra risposta, meno sintetica, venne inviata dal Sig. *M. Morale*, studente a Catania.

(***) Qui si suppone che il punto P sia posto dalla parte opposta di O per rispetto ad AA_1: in caso contrario si avrebbe

$$DB_1 = (OA_1 - A_1B_1) - (OA - AB) = OA_1 - OA.$$

Inoltre se E ed F sono i punti di incontro di OA_1 colle parallele tirate da P a BD e OA si avrà da triangoli simili che risultano da tale costruzione:

$$B_1F : B_1O :: PF : BO :: EF : OD,$$

ossia permutando

$$B_1F : EF :: B_1O : OD$$

e dividendo

$$B_1E : EF :: B_1D : OD.$$

Dunque questa proporzione di cui due termini sono incogniti, ossia B_1E ed OD, fornisce il loro rettangolo $EF \, . \, B_1D$ espresso mediante i segmenti conosciuti EF e B_1D. Ma d'altra parte è conosciuta anche la differenza

$$OD - B_1E = OE - DB_1 = GE$$

avendo preso su OB_1, $OG = DB_1$; pertanto dei due segmenti OD, B_1E si conosce la differenza ed il rettangolo: essi perciò sono pienamente determinati (*) e il problema rimane risoluto.

Perchè il problema è di secondo grado le soluzioni possibili in generale sono due.

b) Ed ora sia dato un rettangolo $ABCD$ segato (fig. 14ª) da una retta qualunque EF parallela ad AB. Evidentemente se si tira per D una retta qualunque che incontri EF in G e BC in H e se per G ed H si tirano delle parallele ad AD e AB che incontrino AB e DC in L ed M e AD in N, si viene a formare un rettangolo $NDMP$ (P essendo l'intersezione di HN ed ML) equivalente al rettangolo $EFCD$. Il problema consiste adunque nel tirare per D tra FE e BC una trasversale DH in modo che risulti $LB = BH$ cioè $BH = GF$: e questo problema è già stato risoluto.

2° Sia AB un quadrante di un circolo di raggio 1 (fig. 15ª) e siano AP e BT le tangenti al circolo in A e B. Se sopra BT si prende BN uguale a 4 o a un dato numero qualsiasi a è evidente che il problema si riduce a tirare pel centro O del circolo fra le rette AP e BN una tal trasversale OPQ che risulti $AP = QN$. Il punto M ove la OP incontra il cerchio, dà l'arco AM richiesto.

3° Sia α il valore, in gradi, della somma data degli archi e sia a la somma delle tangenti. Allora preso un quadrante AB di un circolo di raggio 1 si incominci dal prendere un arco AM di α gradi (fig. 16ª) e dal tirare in A e in M la tangente al circolo AB. Allora se sulla tangente ad AB in M si prende un segmento MA_1 uguale ad a il problema si riduce a tirare pel centro O del cerchio AB una tal trasversale OPQ che risulti $PA = QA_1$; problema che ormai sappiamo risolvere.

(*) Vedi per es. Combebrousse: *Cours de Mathématique*, Vol. II, pag. 108.

208*. *Dati più numeri* a_1, a_2, ... a_n *non tutti multipli di un numero* m, *dimostrare, indipendentemente dalla teoria dei numeri primi, che il minor numero* b *pel quale i prodotti* $a_1 b$, $a_2 b$, ... $a_n b$ *sono divisibili per* m, *è un divisore di* m. (G. Ceccaroni).

Dimostrazione del Sig. *M. Morale*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Catania.

I prodotti $a_1 m$, $a_2 m$, ... $a_n m$ sono multipli di m, ma se sia d il massimo comun divisore dei numeri a_1, a_2, ... a_n, m sono multipli di m anche i prodotti $a_1 \frac{m}{d}$, $a_2 \frac{m}{d}$, ... $a_n \frac{m}{d}$, anzi saranno questi i più piccoli equimultipli di a_1, a_2, ... a_n divisibili per m.

Infatti se d_1 è il m. c. d. di a_1 ed m, ogni numero multiplo di a_1 ed m sarà un multiplo di $\frac{a_1 m}{d_1}$; parimenti ogni multiplo di a_2 ed m sarà un multiplo di $\frac{a_2 m}{d_2}$, dove d_2 è il m. c. d. di a_2 ed m, ecc., ed infine qualunque multiplo di a_n ed m sarà multiplo di $\frac{a_n m}{d_n}$, con d_n m. c. d. fra a_n ed m. Occorre dunque che il moltiplicatore b dei numeri a_1, a_2, ... a_n, sia il minimo multiplo comune di $\frac{m}{d_1}$, $\frac{m}{d_2}$, ... $\frac{m}{d_n}$. Ora questo m. m. c. è precisamente $\frac{m}{d'}$ essendo d' il m. c. d. di d_1, d_2, ... d_n. Osservando poi che le due serie di numeri d_1, d_2, ... d_n e a_1, a_2, ... a_n, m hanno gli stessi divisori comuni si conclude $d' = d$, perciò finalmente $b = \frac{m}{d}$, c. d. d..

210*. *Considerando un segmento sferico a due basi come somma o differenza di due segmenti aventi per base comune un cerchio massimo della sfera — i cui volumi sono dunque da esprimersi con* $\frac{\pi h_1}{3}(2R^2 + r_1^2)$ *e* $\frac{\pi h_2}{3}(2R^2 + r_2^2)$ — *trovare la nota formola pel volume del segmento sferico a due basi qualunque.* (A. Lugli).

Soluzione del Sig. *E. Lugaro*, licenziato dal R. Liceo Garibaldi di Palermo (*).

Il volume V del segmento sferico, appartenente alla sfera di raggio R, avente per basi i cerchi di raggio r_1 ed r_2 e per altezza $h = h_1 \pm h_2$, è:

$$V = \frac{\pi h_1}{3}(2R^2 + r_1^2) \pm \frac{\pi h_2}{3}(2R^2 + r_2^2) = \frac{\pi}{3}\left[2R^2(h_1 \pm h_2) + h_1 r_1^2 \pm h_2 r_2^2\right].$$

Ora $R^2 = h_1^2 + r_1^2 = h_2^2 + r_2^2$, onde si ha:

$$V = \frac{\pi}{3}\left[(h_1^2 + h_2^2)(h_1 \pm h_2) + (r_1^2 + r_2^2)(h_1 \pm h_2) + h_1 r_1^2 \pm h_2 r_2^2\right] =$$

$$\frac{\pi}{3}\left[h_1(h_1^2 + r_1^2) \pm h_2(h_2^2 + r_2^2) + h_1 h_2^2 \pm h_2 h_1^2 + (r_1^2 + r_2^2)(h_1 \pm h_2)\right].$$

(*) Un'altra soluzione venne inviata dal Sig. *F. Celestri*, alunno del R. Ist. tec. di Modica.

Ma, a motivo di $h_1^2 + r_1^2 = h_2^2 + r_2^2$, si deduce $h_1(h_1^2 + r_1^2) \pm h_2(h_2^2 + r_2^2) = \frac{1}{2}(h_1 \pm h)(h_1^2 + h_2^2) + \frac{1}{2}(h_1 \pm h_2)(r_1^2 + r_2^2)$, quindi

$$V = \frac{\pi}{3}\left[\frac{1}{2}(h_1 \pm h_2)(h_1^2 + h_2^2) + h_1 h_2^2 \pm h_2 h_1^2 + \frac{3}{2}(r_1^2 + r_2^2)(h_1 \pm h)\right] =$$

$$\frac{\pi}{3}\left[\frac{1}{2}(h_1 \pm h_2)^3 + \frac{3}{2}(r_1^2 + r_2^2)(h_1 \pm h_2)\right] = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi h}{2}(r_1^2 + r_2^2).$$

213.** *Se, sui lati* a, b, c *di un triangolo* ABC $\equiv$ abc, *si considerano le involuzioni che hanno per punti coniugati i vertici del triangolo situati su essi lati, e per punti centrali i punti medii di questi, i coniugati dei punti nei quali* a, b, c *sono ordinatamente tagliati da una retta arbitraria del piano, sono proiettati dai vertici opposti secondo tre rette concorrenti* (*).

(A. Del Re).

Dimostrazione dell'A. della quistione (**).

Sia r la trasversale; posto $r(a, b, c) \equiv L, M, N$, si dicano L', M', N' i coniugati di L, M, N nelle tre involuzioni di cui si parla nel teorema, ed L_1, M_1, N_1 i coniugati isotomici di L', M', N'; L_1, M_1, N_1 saranno gli armonici di r, ordinatamente, rispetto a BC, CA, AB. Perciò mentre AL_1, BM_1, CN_1 concorrono nell'armonico R di r rispetto ad abc (***), AL', BM', CN' concorreranno nel coniugato isotomico R_1 di R (****).

Osservazione. A riconoscere il carattere proiettivo della proposizione proposta, giova osservare (il che fornisce un'altra dimostrazione della proposizione stessa) che immaginando il sistema polare avente per centro il baricentro di abc e questo triangolo per suo triangolo coniugato, in esso saranno AL', BM', CN', ordinatamente, le polari di L, M, N; AL', BM', CN' concorrono perciò nel polo R_1 di r, rispetto a detto sistema.

215.** *Dimostrare elementarmente, che, se* $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ *sono sei numeri reali, tali che almeno una delle quantità* $\beta^2 - \alpha\gamma$, $\beta'^2 - \alpha'\gamma'$ *sia negativa, si avrà*

$$(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma - 2\beta\beta')^2 - 4(\beta^2 - \alpha\gamma)(\beta'^2 - \alpha'\gamma') > 0.$$

La proposizione è evidente quando una soltanto di dette quantità è negativa.

(A. Del Re).

(*) Si desidera che la dimostrazione di questa proposizione sia fatta senza ricorrere ai sistemi polari, coi quali si può fare immediatamente.

(**) Dimostrazioni più complesse pervennero dai Sigg. Prof. *V. Carpaneto* e Dott. *F. Mariantoni*.

(***) Si ha infatti $\frac{BL}{LC} = -\frac{BL_1}{L_1C}$, $\frac{CM}{MA} = -\frac{CM_1}{M_1A}$, $\frac{AN}{NB} = -\frac{AN_1}{N_1B}$ e, moltiplicando membro a membro, $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -\frac{BL_1}{L_1C} \cdot \frac{CM_1}{M_1A} \cdot \frac{AN_1}{N_1B}$. Ma poichè i tre punti L, M, N sono in linea retta, pel teorema di Menelao, il primo membro di quest'eguaglianza è uguale a -1, per cui segue $\frac{BL_1}{L_1C} \cdot \frac{CM_1}{M_1A} \cdot \frac{AN_1}{N_1B} = 1$, e allora pel teorema reciproco a quello di Ceva, le tre rette AL_1, BM_1, CN_1 passano per lo stesso punto [*N. d. Red.*]

(****) Cfr. Periodico: *Alcuni teoremi della recente teoria del triangolo*. Anno IV, pag. 21, n. 7 [*N. d. Red.*].

Dimostrazione del Sig. Prof. *R. Badia* a Perugia.

Pongasi

$$[1] \quad \frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{\alpha' x^2 + 2\beta' x + \gamma'} = y$$

e si ammetta che le quantità $\beta^2 - \alpha\gamma$, $\beta'^2 - \alpha'\gamma'$ siano negative. Nessuno dei termini della frazione può allora diventar zero, sicchè per ogni valore arbitrario che si dia ad x, deve esistere necessariamente un valore corrispondente di y determinato e diverso da zero.

Ora risolvendo la [1] rispetto ad x, si ha

$$x = \frac{\beta' y - \beta \pm \sqrt{(\beta'^2 - \alpha'\gamma')y^2 + (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma - 2\beta\beta')y + \beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha - \alpha' y}$$

ed è evidente che, essendo per ipotesi negativo il coefficiente di y^2 e reali i sei numeri α, β, γ, α', β', γ', x è reale per i soli valori di y compresi tra le radici dell'equazione

$$(\beta'^2 - \alpha'\gamma')y^2 + (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma - 2\beta\beta')y + \beta^2 - \alpha\gamma = 0\,,$$

radici che debbono essere reali, per conseguenza deve verificarsi la diseguaglianza che bisognava dimostrare.

Dimostrazione del Sig. Prof. *V. Carpaneto* ad Acqui.

Posto $\beta^2 - \alpha\gamma = -\delta^2$ e $\beta'^2 - \alpha'\gamma' = -\delta'^2$ si ricava $\alpha = \dfrac{\beta^2 + \delta^2}{\gamma}$ e $\alpha' = \dfrac{\beta'^2 + \delta'^2}{\gamma'}$. Sostituendo nel primo membro della relazione a dimostrare, si ha

$$\begin{aligned}
&(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma - 2\beta\beta')^2 - 4(\beta^2 - \alpha\gamma)(\beta'^2 - \alpha'\gamma') = \\
&\left[(\beta^2 + \delta^2)\frac{\gamma'}{\gamma} + (\beta'^2 + \delta'^2)\frac{\gamma}{\gamma'} - 2\beta\beta'\right]^2 - 4\delta^2\delta'^2 = \\
&\left[(\beta^2 + \delta^2)\frac{\gamma'}{\gamma} + (\beta'^2 + \delta'^2)\frac{\gamma}{\gamma'} - 2\beta\beta' - 2\delta\delta'\right] \times \\
&\left[(\beta^2 + \delta^2)\frac{\gamma'}{\gamma} + (\beta'^2 + \delta'^2)\frac{\gamma}{\gamma'} - 2\beta\beta' + 2\delta\delta'\right] = \\
&\frac{1}{\gamma^2\gamma'^2}(\beta^2\gamma'^2 + \beta'^2\gamma^2 - 2\beta\beta'\gamma\gamma' + \delta^2\gamma'^2 + \delta'^2\gamma^2 - 2\delta\delta'\gamma\gamma') \times \\
&(\beta^2\gamma'^2 + \beta'^2\gamma^2 - 2\beta\beta'\gamma\gamma' + \delta^2\gamma'^2 + \delta'^2\gamma^2 + 2\delta\delta'\gamma\gamma') = \\
&\left(\frac{1}{\gamma\gamma'}\right)^2\left[(\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 + (\delta\gamma' - \delta'\gamma)^2\right]\left[(\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 + (\delta\gamma' + \delta'\gamma)^2\right] > 0 \text{ c. d. d..}
\end{aligned}$$

QUISTIONI PROPOSTE (*)

238. Dimostrare che la somma

$$\frac{n}{n+1} - 2^k \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} + 3^k \frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \ldots \pm n^k \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}$$

è eguale ad $\frac{1}{2}$ per $k=0$, ed è eguale a zero qualunque sia l'intero positivo pari $k \leqq 2n-2$.

D. Besso.

239.** Mostrare che, data l'equazione, a coefficienti reali,

$$\alpha xy + \beta x + \gamma y + \delta = 0,$$

e, posto $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$, le coppie di valori di x, y che la soddisfanno, e che, nello stesso tempo, differiscono di una quantità reale assegnata h, sono sempre reali se è $-\alpha^2\Delta \leqq 0$; e se è $-\alpha^2\Delta > 0$, saranno reali soltanto quando h non è compreso fra i due valori $\frac{\gamma - \beta \pm \sqrt{-\Delta}}{\alpha}$.

Osservare poi che, nel caso di $\alpha = 0$, e di $\beta = -\gamma$, il problema di determinare dei valori di x, y con la condizione voluta è impossibile, o indeterminato.

A. Del Re.

240*. Dato l'angolo di sezione α di due circonferenze e quello 2θ delle loro tangenti comuni, determinare il rapporto m dei loro raggi; viceversa conoscendo m ed uno degli angoli α, 2θ si cerchi l'altro.

G. Bellacchi.

241.** Date due rette OX, OY e un punto P, intorno a cui ruota una secante variabile APB, dimostrare che il luogo del centro del circolo circoscritto al triangolo OAB è un'iperbole i cui assintoti sono perpendicolari ad OX, OY.

G. Scorza.

242.** Data un'iperbole equilatera di centro O, il luogo del centro del circolo circoscritto al triangolo formato dalla tangente all'iperbole in un punto fisso P e da due qualunque diametri coniugati, è una retta perpendicolare alla OP nel centro O dell'iperbole.

G. Scorza.

(*) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

243*. Se nel triangolo ABC si tira la bisettrice AD dell'angolo CAB, dal suo piede D la perpendicolare DE al lato AC e dal punto E le EG, EF perpendicolari ad AD, AB, dimostrare che si ha

$$\overline{DE}\,.\,\overline{EF} = 2\,\overline{EG}^2.$$

V. Columbo.

244*. Il quadrato della semisomma dei cateti di un triangolo rettangolo è equivalente al triangolo che ha per vertici i centri dei quadrati costruiti sui lati del triangolo rettangolo, esternamente ad esso.

G. Candido.

245. L'inviluppo delle circonferenze aventi il centro sulla parabola e passanti pel suo vertice è una *cissoide* di Diocle.

U. Ceretti.

246*. Dimostrare che i termini della serie

$$16 \qquad 1156 \qquad 111556 \ldots\ldots,$$

ottenuti ciascuno dal precedente intercalandovi il numero 15, sono quadrati perfetti.

G. Montanari.

247*. Un triangolo ABC è inscritto in un cerchio ed è tirato il diametro AD.

1° Le proiezioni di AB, AC su di un diametro perpendicolare ad AD sono rispettivamente eguali a due lati del triangolo *ortico* di ABC.

2° Se BC è parallela ad AD, la differenza dei quadrati dei due lati AB, AC del triangolo è maggiore di quella relativa ad ogni altro triangolo inscritto, col vertice in A e con base eguale a BC.

3° Se l'altezza su BC è eguale alla proiezione di BC sopra AD, i due lati AB, AC sono l'uno il segmento aureo dell'altro.

G. Gallucci.

248*. Se x, y, z,... a, b, c,... sono numeri positivi e non si ha $x = y = z = \ldots$, dimostrare che

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \ldots > \frac{(ax + by + cz + \ldots)^2}{a + b + c + \ldots}.$$

A. Lugli.

249*. Dimostrare che l'area del triangolo, avente per vertici i centri dei cerchi ex-inscritti ad un triangolo qualsiasi, è eguale al prodotto del perimetro di questo triangolo pel raggio del cerchio ad esso circoscritto.

A. Lugli.

250. Dato il triangolo $ABC\ (=\triangle)$ e il punto interno M, si tirino per i vertici le trasversali AM, BM, CM ad incontrare i lati opposti in A', B', C' e si costruiscano i coniugati armonici M_a, M_b, M_c (*) di M rispetto ad A e A', B e B', C e C'. Posto $BA' : A'C = m$, $CB' : B'A = n$, $AC' : C'B = p$, dimostrare che l'area del triangolo $M_a M_b M_c$ è data da

$$4\triangle : \left[\left(m+1-\frac{1}{p}\right)\left(n+1-\frac{1}{m}\right)\left(p+1-\frac{1}{n}\right)\right].$$

A. Lugli.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Revue semestrielle des publications mathémathiques, rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam, par P. H. Schoute. — Prezzo dell'abbonamento annuale: 8 $^1/_2$ fr. — Per abbonarsi, inviare vaglia postale all'indirizzo: Dr. G. Schouten Amsterdam, Prinsengracht, 264.

Il rapido accrescersi dei giornali di matematica e degli atti delle Accademie scientifiche ha fatto sentire agli studiosi l'imperiosa necessità di porsi al corrente della produzione scientifica, o almeno di quella parte della scienza che maggiormente si coltiva, senza un eccessivo impiego di tempo, ed il bisogno di avere una guida sicura per poter confrontare e conoscere quanto su di un dato argomento trovasi raccolto nei numerosi giornali e nei rendiconti delle numerose Accademie.

Il lavoro del *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques,* di già abbastanza avanzato, e per la parte italiana già incominciato a pubblicare a cura del Circolo matematico di Palermo, servirà abbastanza bene alle ricerche delle pubblicazioni del secolo; e, per quanto non esente da inconvenienti, ad opera compiuta risulterà un lavoro importantissimo che non mancherà di rendere reali servigi a tutti gli studiosi.

Ma è altresì chiaro che esso non potrà dare informazioni su quanto si pubblica in un anno, nè un semplice titolo può far comprendere l'importanza della memoria, nè far conoscere i risultati ai quali l'autore è pervenuto. Allo studioso occorre adunque, ed è della massima importanza, un lavoro di rapida ed esatta sintesi. E l'importanza di un simile lavoro di spoglio è tanto chiara ed è stata sì ben compresa, che senza accennare alle brevi recensioni che alcuni giornali fanno dei lavori loro inviati, come il *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* de G. Teixeira, e, in gran parte per la storia delle matemati-

(*) *Punti armonicamente associati ad* M *rispetto al triangolo* ABC, che supponiamo cadano esternamente ad esso entro gli angoli *CAB*, *ABC*, *BCA*.

che, l'*Archiv für die Mathematik von Grunert*, il *Bullétin des sciences mathématiques* redigé par Darboux, ha dal 1870 all'incirca cominciato un esame dettagliato dei lavori pubblicati nei principali giornali scientifici d'Europa e di America, e negli atti delle principali Accademie. Questi sunti, fatti sempre molto fedelmente e con molta cura, non compendiano che una piccola parte della produzione scientifica, e disgraziatamente vengono pubblicati con gravissimo ritardo.

Certamente migliore è l'opera fatta dai *Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie*, del prof. E. Wiedemann; ma non contiene che i sunti dei lavori che hanno per oggetto la meccanica o la fisica matematica.

Più completo, infine, e meglio rispondente allo scopo, è lo *Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematick*, ben noto agli studiosi, ma non ci sembra troppo commendevole la divisione per materie, e anche in questo le recensioni compariscono con ritardo.

La nuova pubblicazione di alcuni benemeriti professori olandesi è un lavoro unico nel genere e ci sembra la migliore di tutte sia per l'esattezza delle recensioni, sia per la celerità con cui esse sono pubblicate, sia perchè esamina quasi tutti i giornali del mondo e gli atti e i rendiconti di tutte le Accademie. Senza dubbio è la rivista più completa e più utile che finora si possegga, e che sarà accolta con entusiasmo da tutti gli studiosi

La rivista conta già due anni di vita e consta di due volumetti l'anno, ognuno di quasi cento pagine; sicchè leggendo poco più che duecento pagine si può avere un'idea abbastanza completa della produzione scientifica dell'anno. Sono esaminati gli articoli di più di 130 fra giornali e pubblicazioni accademiche, ed ogni volume ha un indice delle materie in cui è seguita la classificazione stabilita nel *Congrès International de Bibliographie des Sciences-Mathématiques* e pubblicata nell'*Index du Répertoire bibliographique* dal Gauthier-Villars.

Le recensioni sono fatte in inglese, tedesco e francese; non è seguita la divisione per materie, ma si esaminano i singoli giornali, e questo è un vero pregio; ma anche a coloro che desiderassero informarsi delle memorie che più hanno relazione coi loro studi, la *Revue* serve egualmente bene. Noi pur vorremmo che questa nuova pubblicazione, indispensabile a coloro che si occupano di scienza, servisse anche a diffondere la cultura matematica e non facesse trascurare del tutto quanto è lungi dalle materie favorite.

Nel congresso tenuto ultimamente a Caen dall'*Association française pour l'avancement des sciences*, le sezioni hanno applaudito «à la publication, si intéressante, due à un groupe de mathématiciens hollandais et entre autres de Mr. P. H. Schoute, et qui est intitulée *Revue Semestrielle des Publications mathématiques*».

E tutti coloro che lavorano e amano lo sviluppo della coltura e della scienza, di buon grado si uniranno alle conclusioni degli scienziati francesi.

Roma, 25 dicembre 1894.

R. Marcolongo.

G SCOTO. — *La misurazione delle grandezze grafiche - Nozioni pratiche di Geometria con appendice sulle sezioni coniche.* Livorno, R. Giusti, 1895 — Prezzo L. 2.

Raffaello Giusti di Livorno, che da alcuni anni si è fatto editore di buone opere scolastiche, ha pubblicato recentemente questo libro notevole, designato alle scuole secondarie inferiori e ai Corsi preparatori alle Scuole Normali.

Dissi che è un libro notevole; e lo è infatti, sopratutto per la novità dell'intento che l'egregio A. si è prefisso, e cioè di scrivere un libro che sia rispetto alla scienza delle figure, quel che sono i trattati di aritmatica pratica rispetto alla scienza dei numeri. Sull'utilità di un libro cosifatto l'A. si diffonde nella prefazione, mostrando che nè i cosidetti trattati di geometria intuitiva, nè quelli di geometria razionale, possono valere di buona guida in un primo studio della geometria; i primi perchè generano spesso idee non rigorose che devono mutarsi poi quando più innanzi si farà lo studio della geometria razionale; i secondi perchè troppo difficili e sproporzionati alle tenere menti dei giovanetti.

Per tutto ciò l'A. si è proposto di scrivere un libro che valga a far nascere o a perfezionare nella mente dagli allievi i concetti fondamentali della forma e della estensione, e contenga inoltre le principali proprietà delle figure più semplici e che più spesso si presentano nella vita pratica. Ma queste proprietà non vi sono già dimostrate, ma solamente enunciate: se l'allievo impadronitosi di un fatto, si mostrerà nella scuola desideroso di conoscerne la prova, l'insegnante appagherà a voce questo suo desiderio nella maniera che stimerà più opportuna. Molte figure intercalate nel testo, e delle quali non è data in esso spiegazione di sorta, potranno servire all'insegnante in tali dimostrazioni, e anche stimolare o aiutare gli allievi più intelligenti a trovarle da sè medesimi.

Questi intendimenti dell'A. riguardo a un primo insegnamento della geometria, mi sembrano così giusti che mi permetto di raccomandarli alla attenzione degli educatori.

Per dare un'idea del contenuto dell'opera, farò un rapido cenno dei punti più importanti.

L'A. prende le mosse dal concetto di corpo e da esso deduce quello di superficie, di linea e di punto. E osserva che le superficie o le linee così concepite hanno necessariamente estensione finita, e che, soltanto per comodità di studio, si è condotti a immaginare poi superficie e linee di estensione infinita, come il piano e la retta.

Notevole è il modo col quale parla della somma degli angoli di un poligono; modo che dispensa dal dover stabilire il concetto di angolo superiore a un piano; ciò che reca sempre difficoltà ai principianti.

Il capitolo dei problemi grafici è forse più abbondante di materia di quel che avrebbe richiesto un libro di semplice avviamento allo studio della geometria. Ma l'A. ha dato a questa parte un largo sviluppo perchè il professore di disegno della scuola tecnica o normale possa servirsene nell'insegnamento del disegno geometrico; e con ciò ottiene due vantaggi: risparmia agli alunni la spesa di un testo speciale per questo disegno; impedisce quella dannosa diversità di linguaggio tra i professori di disegno e di matematica che ha luogo non di rado nelle nostre scuole.

Trattando della misura delle grandezze, l'A. stabilisce il concetto di *valore* definendolo come quel numero che indica quali operazioni debbano farsi sulla grandezza unitaria affinchè risulti la grandezza misurata. In questo capitolo, ricco di molti pregi, è posta molto bene in luce la corrispondenza tra i valori degli archi e quelli degli angoli al centro che li comprendono.

Nella stereometria, premesse le solite nozioni generali, l'A. distingue lo studio delle superficie da quello dei solidi. Nel primo tratta delle superficie poliedriche e rotonde, definendole con precisione e dando le regole per calcolarne l'area; nello studio dei solidi si occupa dei poliedri e dei corpi rotondi, limitandosi anche qui a dare delle buone definizioni, che sono in perfetto accordo con quelle date prima per le superficie, e a indicare le regole per il calcolo dei volumi. Queste regole e quelle relative alle aree si trovano molto opportunamente raccolte in tavole, per comodità dello studioso.

Da ultimo l'A. persuaso che la conoscenza delle coniche sia utile o necessaria in molti casi pratici e nello studio, anche elementare, della geografia e dell'astronomia, ha aggiunto una appendice su queste linee così importanti, la cui esistenza avea già enunciato parlando delle superficie cilindriche e coniche. Egli studia le tre curve in tre paragrafi distinti; per ciascuna dà la definizione, qualche proprietà, la costruzione per punti e con moto continuo, risolve il problema « data la conica costruire i principali elementi » e da ultimo insegna la costruzione delle tangenti. Oltre a ciò, parte nel testo e parte in note a piè di pagina, indica regole facili per il calcolo, o esatto o approssimato, di lunghezze o di aree ellittiche, paraboliche e iperboliche; nè tralascia l'importante formola di Simpson. In questa appendice è specialmente da lodarsi la cura che l'A. ha posto onde l'allievo acquisti una precisa idea della forma delle tre curve.

Termina il libro una pregevole raccolta di numerosi problemi in massima parte originali.

Tolta qualche lievissima menda, che l'A. toglierà certo in una nuova edizione, le idee contenute nell' opera non mancano mai d' esattezza, e vi sono espresse con linguaggio proprio e preciso; e queste doti renderanno l'opera pregevole agli occhi di molti. Potrebbero tuttavia non mancare coloro che, rispetto all'indole del libro, trovassero eccessiva la quantità di materia in esso trattata e la forma un po' troppo duramente scientifica e mancante di quella sciolta ed efficace semplicità che tanto si ammira nelle opere elementari inglesi, e che purtroppo non è molto frequente presso di noi. Io non voglio scusare a ogni costo l'egregio A. da queste possibili critiche, ma non so tenermi dall'esporre un'idea nata in me dall'attento esame di tutto il lavoro; ed è che l'A. intenda di trarre da questa sua prima pubblicazione un altro libro più completo per le *scuole secondarie superiori*, aggiungendo *senz'altro* le dimostrazioni che mancano in quello ora pubblicato, dopo avervi soppresso alcune cose d' indole pratica, che non troverebbero luogo conveniente in un corso razionale.

L'edizione è nitida, e le figure sono numerose e ben chiare: doti che hanno sempre le edizioni del solerte Giusti.

A conti fatti è un libro pregevole e gli auguro buona fortuna perchè la merita.

Ravenna, Dicembre 1894. G. Nonni.

G. Z. REGGIO. — 1° *I poliedri convessi* - 2° *Principii di Geometria descrittiva* con una tavola e 60 problemi con soluzione — Appendice alla 2ª edizione dei Complementi di Geometria ad uso degli Istituti Tecnici, delle Scuole ed Accademie Militari e Navali, di Belle Arti ecc. ecc.. — Treviso, Tipografia Luigi Zoppelli, 1894. — Prezzo: L. 1.

Il presente volumetto (38 pagine), oltre ad una breve nota sulle principali relazioni che legano fra loro gli elementi di un poliedro convesso, applicate poi alla determinazione dei possibili poliedri regolari convessi, contiene (e questa è la sua parte sostanziale) lo svolgimento, fatto con molta chiarezza e bell'ordine, e in generale anche con precisione di forma, di quei principii di Geometria descrittiva (col metodo della projezione di Monge) che sono strettamente necessarî e sufficienti per fornire all'allievo un corredo di cognizioni atte a fargli comprendere lo spirito di tale scienza e ad invogliarlo alla lettura di opere più estese.

I sessanta esercizi (ciascuno seguito da una conveniente traccia per la relativa soluzione) che chiudono il lavoro sono ben graduati, e, se svolti man mano che le cognizioni acquistate lo permettono, servono all'allievo di complemento a quanto ha imparato nel testo (specialmente per ciò che riguarda le più semplici linee curve e superficie poliedriche e rigate, delle quali nel libro si parla molto succintamente) e ad un tempo di ottima guida per imparar ad applicare da solo e con sicurezza i metodi studiati.

In conclusione si può affermare che il volumetto in discorso è un buon libro per le Scuole cui è dedicato, ottimo poi per gl'Istituti Tecnici, dei quali esaurisce il prescritto programma. F. Palatini.

Annuaire pour l'an 1895 publié par le Bureau des Longitudes. *Avec des Notices scientifiques.* In-18 de IV-826 pages, avec 2 Cartes magnétiques. Paris, Gauthier-Villars et fils. — Prix: fr. 1,50; franco fr. 1,85.

Come ogni anno a quest'epoca è comparso l'*Annuaire du Bureau des Longitudes.* L'annuario per il 1895 racchiude in grande copia delle indicazioni pratiche riunite in questo piccolo volume per comodo degli studiosi. Vi si trovano anche articoli dovuti agli scienziati più illustri sulle Monete, la Statistica, la Geografia, la Mineralogia, ecc., infine le notizie seguenti: *Le onde atmosferiche lunari*; per Bouquet de la Grye. — *Sul Congresso geodesico d'Inspruck*; per F. Tisserand. — *L'osservatorio del Monte Bianco*; per J. Janssen. — *La Fotometria Fotografica*; per J. Janssen. — *Relazione sulle proposte d'unificazione dei giorni astronomico e civile*; per H. Poincaré.

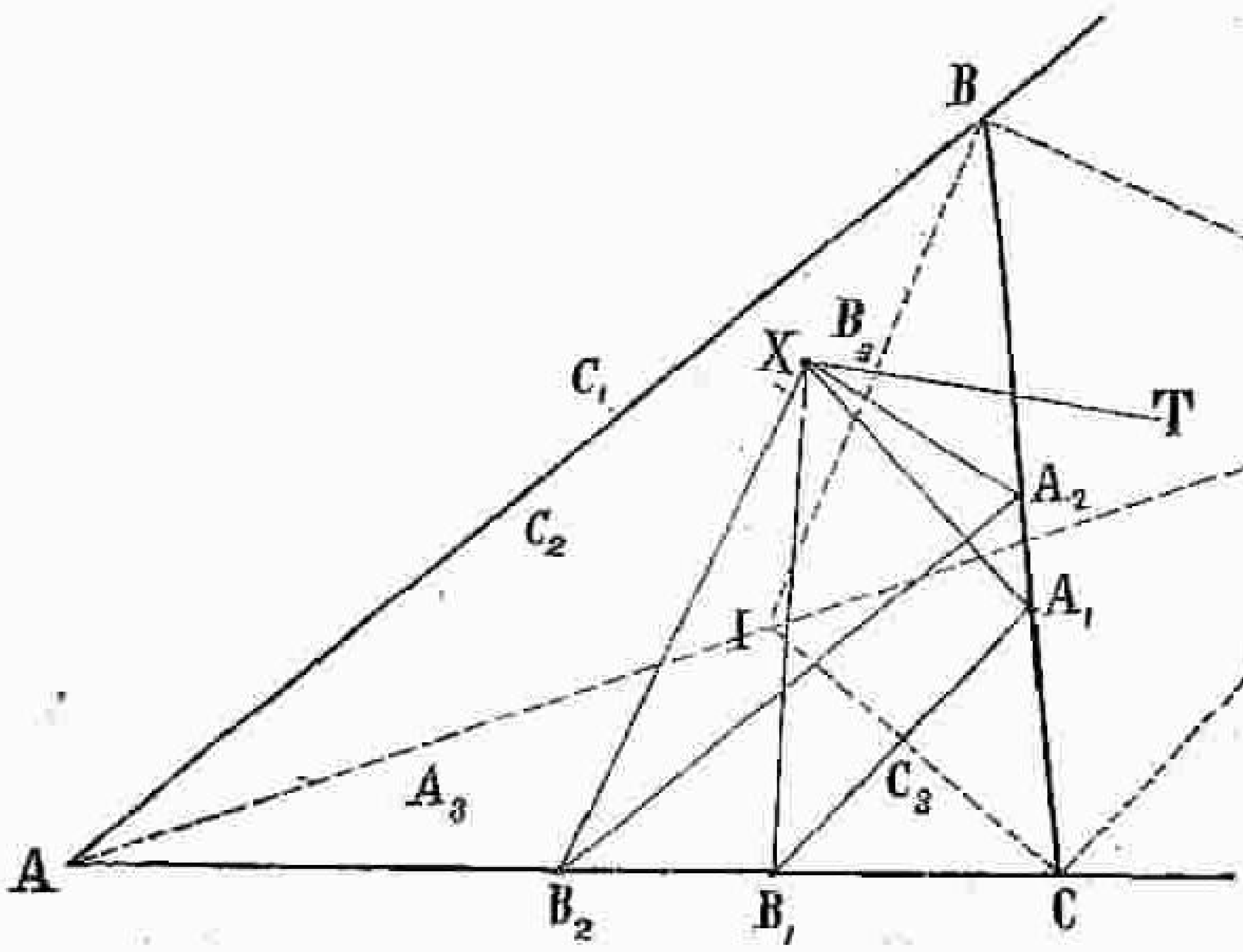
Finita la Redazione il dì 15 gennaio 1895.

UNA APPLICAZIONE DEL METODO DELLE EQUIPOLLENZE

Tra i punti notevoli di un triangolo è per certo da annoverarsi il punto di contatto del circolo di Feuerbach con ciascuno dei circoli ex-iscritti ed iscritto.

Scopo di questa nota è di dimostrare, col metodo delle equipollenze, il contatto di questi circoli, e dare poi le coordinate baricentriche dei quattro punti di contatto.

Nel triangolo ABC sia I il centro del circolo che tocca in A_1, B_1, C_1 i lati BC, CA, AB. I punti medii di questi siano rispet-



tivamente A_2, B_2, C_2 e quelli dei segmenti IA, IB, IC siano A_3, B_3, C_3. Ciascuno dei triangoli IAB, IBC, ICA ha un circolo dei 9 punti che passa per i punti situati sopra i corrispondenti lati; due di questi circoli hanno di comune il punto A_3, due il punto B_3 e due il punto C_3.

1. Condizione necessaria e sufficiente perchè un quadrilatero sia iscrittibile è che il rapporto anarmonico dei suoi quattro vertici sia un numero reale (*). Ora indichiamo con X il secondo punto comune

(*) BELLAVITIS — *Esposizione del metodo delle equipollenze*, n. 30.

ai due circoli $A_3C_2B_3$, $B_3A_2C_3$, e significando con q un qualsiasi numero reale, si avrà

$$\frac{A_3C_2}{B_3C_2}:\frac{A_3X}{B_3X}=q\,, \qquad \frac{B_3A_2}{C_3A_2}:\frac{B_3X}{C_3X}=q\,.$$

Moltiplichiamo il primo per il secondo rapporto, e poichè $A_3C_2 = C_3A_2$, e si può sostituire C_3B_2 a B_3C_2, e A_3B_2 a B_3A_2, si ottiene

$$\frac{A_3B_2}{C_3B_2}:\frac{A_3X}{C_3X}=q\,;$$

dunque il punto X si trova sulla circonferenza $A_3B_2C_3$.

I medesimi punti considerati nei due circoli $A_3C_2B_3X$ e $B_3A_2C_3X$ dànno ancora i due rapporti

$$\frac{B_3A_3}{C_2A_3}:\frac{B_3X}{C_2X}=q\,, \qquad \frac{A_2C_3}{B_3C_3}:\frac{A_2X}{B_3X}=q\,,$$

il prodotto dei quali, se osserviamo che $C_2A_3 = A_2C_3$, e che A_2B_3 si può sostituire a B_2A_3, e C_2B_2 a B_3C_3, è

$$\frac{A_2B_2}{C_2B_2}:\frac{A_2X}{C_2X}=q\,,$$

il qual rapporto anarmonico mostra che il punto X appartiene alla circonferenza $A_2B_2C_2$.

Poichè i punti A_3, B_2, B_1, X si trovano sulla circonferenza dei nove punti del triangolo IAC, ed i punti A_3, C_2, C_1, X su quella del triangolo IBA, abbiamo $\frac{A_3X}{C_1X}=q\frac{A_3C_2}{C_1C_2}$, $\frac{A_3X}{B_1X}=q\frac{A_3B_2}{B_1B_2}$ donde

$$\frac{B_1X}{C_1X}=q\frac{A_3C_2\,.\,B_1B_2}{C_1C_2\,.\,A_3B_2}\,.$$

Ma, dai quadrilateri iscrittibili IA_1BC_1 e IB_1CA_1, si ottiene

$$\frac{B_1A_1}{IA_1}=q\frac{B_1C}{IC}\,, \quad \frac{C_1A_1}{IA_1}=q\frac{C_1B}{IB} \quad \text{donde} \quad \frac{B_1A_1}{C_1A_1}=q\frac{B_1C\,.\,IB}{IC\,.\,C_1B}$$

e però

$$\frac{B_1A_1}{C_1A_1}:\frac{B_1X}{C_1X}=q\frac{B_1C\,.\,IB\,.\,C_1C_2\,.\,A_3B_2}{B_1B_2\,.\,A_3C_2\,.\,C_1B\,.\,IC}\,.$$

Ora è $IC=2A_3B_2$, $IB=2A_3C_2$ ed è poi $\frac{C_1C_2}{C_1B}=q$, $\frac{B_1C}{B_1B_2}=q$, perchè ciascuno di questi rapporti è rapporto di segmenti coincidenti. Dunque

$$\frac{B_1A_1}{C_1A_1}:\frac{B_1X}{C_1X}=q\,,$$

e però il punto X appartiene al circolo $A_1B_1C_1$ tangente ai tre lati del triangolo.

2. Se in questo punto X toccansi i due circoli $A_2B_2C_2$ e $A_1B_1C_1$, tra gli angoli delle due corde XA_2 e XA_1 e la tangente comune XT deve aversi, tenendo conto del verso della rotazione degli angoli, la relazione: $\angle\, TXA_2 - TXA_1 = A_1XA_2$ e poichè $TXA_2 = XB_2A_2$ e $TXA_1 = XB_1A_1$, dovrà aversi ancora $A_1XA_2 = XB_2A_2 - XB_1A_1$ o

$$A_1XA_2 + A_2B_2X + XB_1A_1 = 0\,.$$

Consideriamo l'equipollenza identica

$$\frac{XA_2}{XA_1}\cdot\frac{B_2X}{B_2A_2}\cdot\frac{B_1A_1}{B_1X} = \frac{XA_2}{B_2A_2}\cdot\frac{B_1A_1}{XA_1}\cdot\frac{B_2X}{B_1X}\,.\quad\ldots\quad(a)$$

Dai circoli $A_2B_2C_2X$, $A_1B_1C_1X$, $A_3B_1B_2X$ abbiamo

$$\frac{XA_2}{B_2A_2} = q\,\frac{XC_2}{B_2C_2}\,,\qquad \frac{B_1A_1}{XA_1} = q\,\frac{B_1C_1}{XC_1}\,,\qquad \frac{B_2X}{B_1X} = q\,\frac{B_2A_3}{B_1A_3}\,.$$

Moltiplichiamo queste equipollenze tra di loro; e poichè dal circolo $A_3C_1C_2X$ si ha $\dfrac{XC_2}{XC_1} = q\,\dfrac{A_3C_2}{A_3C_1}$ il valore del secondo membro della (a) è

$$q\,\frac{A_3C_2\,.\,B_1C_1\,.\,A_3B_2}{B_2C_2\,.\,A_3C_1\,.\,A_3B_1}\,.$$

Ora, se il circolo $A_1B_1C_1$ ha per centro I, sia I' il centro dell'altro circolo tangente ai lati del triangolo, che è separato dal primo dal lato BC, luogo di A_1 e A_2. Poichè A_3C_2 è perpendicolare ad $I'B$, e B_1C_1 ad II', e B_2C_2 è parallela a BC, e l'angolo $(A_3C_1,\,A_3B_1)$ è bisecato da II', si avranno le seguenti equipollenze

$$A_3C_2 = q\,i\,I'B,\quad B_1C_1 = q\,i\,I'I,\quad B_2A_3 = q\,CI,\quad B_2C_2 = q\,CB,$$
$$A_3C_1\,.\,A_3B_1 = q\,\overline{I'I}^2.$$

Sostituendo questi valori nell'antecedente risultato si avrà che esso diventa

$$q\,\frac{I'B\,.\,CI}{I'I\,.\,CB}$$

il quale è uguale ad un numero reale, perchè i quattro punti I', B, C, I sono situati sulla circonferenza che ha per diametro II'. Dunque possiamo scrivere

$$\frac{XA_2}{XA_1}\cdot\frac{B_2X}{B_2A_2}\cdot\frac{B_1A_1}{B_1X} = q\,.$$

Nella quale equipollenza, essendo il secondo membro un numero reale, l'inclinazione del primo membro ha un valore nullo, e cioè

$$\text{incl.}\,\frac{XA_2}{XA_1} + \text{incl.}\,\frac{B_2X}{B_2A_2} + \text{incl.}\,\frac{B_1A_1}{B_1X} = 0$$

o, ciò che è lo stesso

$$\angle A_1XA_2 + A_2B_2X + XB_1A_1 = 0\,.$$

E così rimane dimostrato il contatto del circolo di Feuerbach con ciascuno dei quattro circoli, l'iscritto e gli ex-iscritti.

3. Se due punti P e Q riferiti ai vertici del triangolo ABC hanno per equipollenza rispettivamente

$$\begin{aligned} \alpha\,.\,AP + \beta\,.\,BP + \gamma\,.\,CP &= 0, \\ \alpha_1\,.\,AQ + \beta_1\,.\,BQ + \gamma_1\,.\,CP &= 0, \end{aligned} \qquad (b)$$

l'equipollenza di un punto X che divide la distanza dei punti P e Q nella ragione $m : m_1$, posto $s = \alpha + \beta + \gamma$, $s_1 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$, è

$$\begin{aligned} (\alpha s_1 m + \alpha_1 s m_1)\,AX + (\beta s_1 m + \beta_1 s m_1)\,BX +{} \\ (\gamma s_1 m + \gamma_1 s m_1)\,CX = 0\,; \end{aligned} \qquad (c)$$

la quale si riduce a

$$(\alpha + \alpha_1)\,AX + (\beta + \beta_1)\,BX + (\gamma + \gamma_1)\,CX = 0 \qquad (d)$$

quando $s : s_1 = m : m_1$.

Invero, in luogo di $AP, \ldots$ scriviamo $AX + XP, \ldots$; allora le due equipollenze (b) si trasformano in

$$\begin{aligned} s\,XP + (\alpha\,AX + \beta\,BX + \gamma\,CX) &= 0\,, \\ s_1XQ + (\alpha_1 AX + \beta_1 BX + \gamma_1 CX) &= 0\,. \end{aligned}$$

Indichiamo con R il valore del trinomio secondo termine della prima equipollenza, e con R_1 il valore del trinomio della seconda; e se è dato $m\,XP + m_1XQ = 0$ si ha il determinante

$$\begin{vmatrix} s & 0 & R \\ 0 & s_1 & R_1 \\ m & m_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

o $m s_1 R + m_1 s R_1 = 0$, o, sviluppato, l'equipollenza (c).

4. Applichiamo questo teorema alla ricerca delle coordinate baricentriche dei punti di contatto del circolo di Feuerbach con i quattro circoli iscritti nel trilatero ABC.

Il centro I del circolo iscritto nel triangolo ha per equipollenza

$$\operatorname{sen} A \,.\, AI + \operatorname{sen} B \,.\, BI + \operatorname{sen} C \,.\, CI = 0,$$

e quello G del circolo dei 9 punti

$$\operatorname{sen} A \cos(B-C) AG + \operatorname{sen} B \cos(C-A) BG + \operatorname{sen} C \cos(A-B) CG = 0$$

ed inoltre si ha dalla trigonometria

$$IX - 8 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2} \, GX = 0 ,$$

essendo IX e GX i rispettivi raggi dei due circoli. Si trova poi

$$s = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} , \qquad s_1 = 4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$$

onde $\frac{s_1}{s} = 8 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}$, e poichè è $m = 1$, $m_1 = - 8 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}$, si ha

$$s : s_1 = m : m_1 .$$

Dunque l'equipollenza del punto X di contatto del circolo iscritto col circolo dei nove punti del triangolo ABC, è

$$[\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} A \cos(B-C)] AX + [\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} B \cos(C-A)] BX + [\operatorname{sen} C - \operatorname{sen}(A-B)] CX = 0.$$

Per il punto X' di contatto del circolo ex-iscritto tangente al lato BC, poichè l'equipollenza del suo centro I' è

$$- \operatorname{sen} A \,.\, AI' + \operatorname{sen} B \,.\, BI' + \operatorname{sen} C \,.\, CI' = 0$$

e la trigonometria dà

$$I'X' + 8 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \, GX' = 0 ,$$

si ha, identicamente ragionando, (*)

$$[- \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} A \cos(B-C)] AX' + [\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} B \cos(A-C)] BX' + [\operatorname{sen} C + \operatorname{sen} C \cos(A-B)] CX' = 0.$$

Analoghe equipollenze si avrebbero per gli altri punti di contatto X″ e X'''. Esse si possono semplificare. E troveremo per i quattro punti le equipollenze seguenti:

(*) Sostituendo alle funzioni goniometriche i lati a, b, c del triangolo ABC, si ha pel punto X

$$(b-c)^2 (p-a) AX + (c-a)^2 (p-b) BX + (a-b)^2 (p-c) CX = 0,$$

e pel punto X'

$$-(b-c)^2 p AX + (a+c)^2 (p-c) BX + (a+b)^2 (p-b) CX = 0.$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen}^2 \frac{B-C}{2} AX + \operatorname{sen} B \operatorname{sen}^2 \frac{C-A}{2} BX + \operatorname{sen} C \operatorname{sen}^2 \frac{A-B}{2} CX = 0,$$

$$-\operatorname{sen} A \operatorname{sen}^2 \frac{B-C}{2} AX' + \operatorname{sen} B \cos^2 \frac{C-A}{2} BX' + \operatorname{sen} C \cos^2 \frac{A-B}{2} CX' = 0,$$

$$\operatorname{sen} A \cos^2 \frac{B-C}{2} AX'' - \operatorname{sen} B \operatorname{sen}^2 \frac{C-A}{2} BX'' + \operatorname{sen} C \cos^2 \frac{A-B}{2} CX'' = 0,$$

$$\operatorname{sen} A \cos^2 \frac{B-C}{2} AX''' + \operatorname{sen} B \cos^2 \frac{C-A}{2} BX''' - \operatorname{sen} C \operatorname{sen}^2 \frac{A-B}{2} CX''' = 0.$$

5. Sommiamo i coefficienti della prima rispettivamente con i coefficienti di ciascuna delle altre tre equipollenze; avremo, per la (*d*), le equipollenze di particolari punti Y', Y'', Y''' allineati ciascuno rispettivamente con X e X', con X e X'' e con X e X'''. Dai coefficienti delle due prime equipollenze abbiamo

$$\operatorname{sen} B \,.\, BY' + \operatorname{sen} C \,.\, CY' = 0 \,.$$

Ma questa è pure l'equipollenza di un punto situato sulla BC, e propriamente il punto d'incontro della bisettrice dell'angolo A con esso lato, ovvero il centro d'omotetia interna dei due circoli, l'iscritto e l'ex-iscritto tangenti al lato BC.

Sottraghiamo invece i coefficienti di una delle tre ultime equipollenze da quelli di un'altra delle medesime, p. es. i coefficienti dell'equipollenza del punto X'' da quelli del punto X'''; si avrà l'equipollenza di un punto Z' allineato con X'' e X'''; essa è

$$-\operatorname{sen} B \,.\, BZ' + \operatorname{sen} C \,.\, CZ' = 0$$

che fa vedere che il punto Z' è sulla BC, ed è il coniugato armonico del punto Y', innanzi trovato, per rispetto ai punti B e C.

Identici risultati avremmo trattando identicamente le altre equipollenze. Dunque i lati del triangolo iscritto nel circolo di Feuerbach, e che ha i vertici nei punti di contatto di questo con i tre circoli ex-iscritti, incontrano i lati del triangolo fondamentale in tre punti per diritto, dove i medesimi sono tagliati dai coniugati armonici, rispetto ai lati delle tre bisettrici. Si sa poi che questa retta, che contiene questi tre punti, è l'asse di omotetia esterna dei tre circoli ex-iscritti.

Campobasso, dicembre 1894.

G. Mola.

SULL'INCOMMENSURABILITÀ DI DUE GRANDEZZE

1. Teorema. *Se* a *e* b *sono due grandezze omogenee, delle quali* $b > a$ *e sia*

$$[1]\quad \frac{b}{a}=q_0+\frac{r_0}{a},\ \frac{b}{r_0}=q_1+\frac{r_1}{r_0},\ \frac{b}{r_1}=q_2+\frac{r_2}{r_1},\ \ldots\ \frac{b}{r_{n-1}}=q_n+\frac{r_n}{r_{n-1}},\ \ldots$$

senza che si giunga ad ottenere $r_n = 0$, si avrà

$$\frac{a}{b}=\sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{|q_n};$$

significando col simbolo $|q_n$ *il prodotto* $q_0 q_1 q_2 \ldots q_n$.

Dimostrazione. Dalle [1] si ricava

$$[2]\quad b=aq_0+r_0,\quad b=r_0q_1+r_1,\quad b=r_1q_2+r_2,\ \ldots$$
$$\ldots\ b=r_{n-2}q_{n-1}+r_{n-1},\quad b=r_{n-1}q_n+r_n,\ \ldots$$

quindi

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q_0}-\frac{r_0}{bq_0},\quad \frac{r_0}{b}=\frac{1}{q_1}-\frac{r_1}{bq_1},\quad \frac{r_1}{b}=\frac{1}{q_2}-\frac{r_2}{bq_2},\ \ldots$$
$$\ldots\ \frac{r_{n-2}}{b}=\frac{1}{q_{n-1}}-\frac{r_{n-1}}{bq_{n-1}},\quad \frac{r_{n-1}}{b}=\frac{1}{q_n}-\frac{r_n}{bq_n},\ \ldots$$

Si dividano queste eguaglianze, incominciando dalla seconda, ordinatamente per

$$q_0,\ q_0q_1,\ \ldots\ q_0q_1q_2\ldots q_{n-2},\ q_0q_1q_2\ldots q_{n-1},\ \ldots$$

poi si addizionino le nuove eguaglianze ottenute coll'avvertenza di cambiare i segni a quelle di posto pari. Avremo

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_0q_1}+\frac{1}{q_0q_1q_2}-\ldots\pm\frac{1}{q_0q_1\cdots q_{n-1}}\mp\frac{1}{q_0q_1\cdots q_n}\ldots \text{ c. d. d.}$$

Corollario 1°. Supponendo nelle [1] $r_0 < a$, $r_1 < r_0$, $r_2 < r_1$ .... cosicchè $r_0, r_1, r_2, \ldots$ possono riguardarsi come i resti delle divisioni indicate dai primi membri, poichè questi resti vanno continuamente diminuendo, i quozienti $q_0, q_1, q_2, \ldots$ vanno di continuo aumentando.

Corollario 2°. Le due grandezze a e b sono incommensurabili.

Supponiamo infatti che a e b abbiano una comune misura c. Dalle [2] si vede che i resti $r_0, r_1, r_2, \ldots$ sarebbero tutti multipli di c; di guisa che si avrebbe $r_0 = \alpha_0 . c$, $r_1 = \alpha_1 . c$, $r_2 = \alpha_2 . c, \ldots$ con $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots.$ numeri interi, e poichè $\alpha_0 c > \alpha_1 c > \alpha_2 c > \ldots$ risulterebbe $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots.$

Ma una serie di numeri interi decrescenti deve contenere il termine zero, dunque uno dei resti dovrebbe essere zero; ciò che contraddice all'ipotesi.

2. La serie

$$[3] \quad S_n = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_0 q_1} + \frac{1}{q_0 q_1 q_2} - \ldots . (-1)^n \frac{1}{q_0 q_1 q_2 \ldots . q_n}$$

è convergente. Pongasi infatti

$$S'_n = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \frac{1}{q_0 q_1 q_2} + \ldots . + \frac{1}{q_0 q_1 q_2 \ldots . q_n},$$

sarà

$$S'_n > S_n.$$

Ora avendosi $q_1 < q_2 < \ldots.$ segue $\frac{1}{q_1} > \frac{1}{q_2} > \ldots.$ quindi

$$S'_n = \frac{1}{q_0}\left[1 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \ldots . + \frac{1}{q_1 q_2 \ldots . q_n}\right] < \frac{1}{q_0}\left[1 + \frac{1}{q_1} + \left(\frac{1}{q_1}\right)^2 + \ldots . + \left(\frac{1}{q_1}\right)^n\right]$$

e poichè l'ultima espressione entro parentesi ha per somma

$$\frac{1-\left(\frac{1}{q_1}\right)^n}{1-\frac{1}{q_1}}, \text{ si deduce infine } S'_n < \frac{1}{q_0} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{q_1}\right)^n}{1-\frac{1}{q_1}}$$

e perciò

$$\lim_{n=\infty} S'_n < \frac{q_1}{q_0 q_1 - q_0} \text{ e conseguentemente } \lim_{n=\infty} S_n < \frac{q_1}{q_0 q_1 - q_0}.$$

La serie [3] è dunque convergente.

3. Nella [3] suppongasi che n vada all'infinito e poniamo S_∞ sotto forma di frazione continua illimitata. Dico che si ha identicamente

$$[4] \; S_\infty = \frac{1}{q_0} \dot{+} \frac{q_0}{q_1 - 1} \dot{+} \frac{q_1}{q_2 - 1} \dot{+} \ldots . \dot{+} \frac{q_s}{q_{s+1} - 1} \dot{+} \ldots .$$

Intanto

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{q_0}, \; \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_0 q_1} = \frac{1}{q_0 + \frac{q_0}{q_1 - 1}}, \; \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_0 q_1} + \frac{1}{q_0 q_1 q_2} = \frac{1}{q_0 + \frac{q_0}{q_1 - 1 + \frac{q_1}{q_2 - 1}}}.$$

Ora ammettiamo che il teorema valga quando nella serie [3] vi sono $n+1$ termini, mostrerò che esso vale anche quando ve ne sono $n+2$. Infatti si muti q_n in $q_n + \frac{q_n}{q_{n+1}-1}$, allora l'$(n+1)^{\text{esimo}}$ termine $\frac{1}{q_0 q_1 q_2 \dots q_n}$ si cambia in

$$\frac{1}{q_0 q_1 \dots q_{n-1}\left(q_n + \frac{q_n}{q_{n+1}-1}\right)} = \frac{q_{n+1}-1}{q_0 q_1 \dots q_n q_{n+1}}$$
$$= \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n} - \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_{n+1}};$$

sicchè un altro termine si è nel fatto aggiunto alla serie. Facendo lo stesso mutamento di q_n in $q_n + \frac{q_n}{q_{n+1}-1}$ nella frazione continua con $n+1$ componenti, se ne ottiene un'altra con $n+2$ componenti formata colla stessa legge. Quindi se il teorema vale quando la serie ha $n+1$ termini esso vale quando ha un termine di più; e siccome per tre termini il teorema è stato verificato, esso sussiste in generale. Inoltre essendo la serie convergente, esso è valido anche per n infinito.

4. Dimostriamo ora che, a motivo di $q_{s+1} - 1 \geqq q_s$, il valore della frazione continua [4], come apparisce naturale, è un numero irrazionale.

Infatti suppongasi, se è possibile, che questo valore sia il numero razionale $\frac{m}{n}$, con m ed n interi. Sarà allora $\frac{m}{n} = \frac{1}{q_0 + \rho_1}$ dove ρ_1 denota la frazione continua illimitata che incomincia colla componente $\frac{q_0}{q_1 - 1}$. Segue $\rho_1 = \frac{n - m q_0}{m} = \frac{n_1}{m}$ con $n_1 > 0$, poichè $\rho_1 > 0$ siccome le q sono maggiori di 1.

Similmente si faccia $\frac{m}{n} = \cfrac{1}{q_0 + \cfrac{q_0}{q_1 - 1 + \rho_2}}$ dove ρ_2 indica la frazione continua illimitata che principia colla componente $\frac{q_1}{q_2 - 1}$. Si ha allora $\rho_2 = \frac{m q_0 q_1 - n(q_1 - 1)}{n - m q_0} = \frac{n_2}{m_1}$ con $n_2 > 0$, e così di seguito.

Ora $\frac{m}{n}, \frac{n_1}{m}, \frac{n_2}{n_1}, \dots$ sono tutte frazioni pure. Lo è $\frac{m}{n}$, perchè dall'essere $b > a$ si trae $\frac{a}{b} < 1$, cosicchè il valore della frazione continua, che rappresenta lo sviluppo di $\frac{a}{b}$, è < 1. Il valore di $\frac{n_1}{m}$ è minore della frazione $\frac{q_0}{q_1 - 1}$, la quale è pura od eguale all'unità, essendo $q_1 - 1 \geqq q_0$; perciò $\frac{n_1}{m} < 1$. Analogamente $\frac{n_2}{n_1}$ è minore di $\frac{q_1}{q_2 - 1}$, che è o frazione pura od eguale all'unità a motivo di $q_2 - 1 \geqq q_1$, quindi $\frac{n_2}{n_1} < 1$ e così via.

Si ha dunque $m < n$, $n_1 < m$, $n_2 < n_1$, ..., cioè $n, m, n_1, n_2, \ldots$ sarebbe una serie di numeri interi, positivi e decrescenti e non pertanto infiniti di numero. Ciò è assurdo, per conseguenza il valore della frazione continua illimitata [4] è un numero irrazionale.

Inoltre la frazione continua medesima non potendo essere periodica, poichè le q vanno sempre aumentando, il suo valore non è la radice quadrata di un numero razionale.

5. Dalle eguaglianze [2] si vede che se a e b sono due numeri, e quindi si giunge ad un resto $r_n = 0$, il resto precedente r_{n-1} è o il massimo comun divisore di a e b o un suo multiplo. Ora se dividiamo a per r_{n-1}, quindi b per i successivi resti, si giungerà ad un resto zero; sia r'_s il penultimo resto, od è esso il m. c. d. di a ed r_{n-1} o ne è un multiplo. Per verificare ciò basta cercare se r'_s divide a; se questo non avviene si divida allora r_{n-1} per r'_s, e così via per i successivi resti. Poichè questi resti vanno diminuendo, si giungerà necessariamente ad un resto che è il m. c. d. dei due numeri a e b.

D. Gambioli.

SULLA FORMA DEL QUOZIENTE
NEL TEOREMA DI *FERMAT*

(Continuazione e fine: V. pag. 16).

3. Abbiamo

$$\Sigma \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2} = \binom{a}{1}\binom{a}{p-1} + \binom{a}{2}\binom{a}{p-2} + \cdots + \binom{a}{p-1}\binom{a}{1}$$
$$= \binom{2a}{p} - 2\binom{a}{p}$$

come risulta dalla formola combinatoria

$$\binom{r+s}{p} = \binom{r}{p} + \binom{r}{p-1}\binom{s}{1} + \ldots + \binom{r}{1}\binom{s}{p-1} + \binom{s}{p}$$

facendo $r = s = a$.

Analogamente la $\sum \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\binom{a}{i_3}$ colla condizione

$$i_1 + i_2 + i_3 = p$$

dove le i devono essere interi positivi non nulli, rappresentando il numero di combinazioni semplici della classe p formate colla scelta di tre elementi da ognuno di tre gruppi prescelti, fra i p dati, equivale al numero delle combinazioni della classe p formate coi $3a$ elementi che entrano nei 3 gruppi scelti, diminuito del numero delle combinazioni della classe p formate con elementi appartenenti a due soli o ad uno solo dei gruppi considerati, e però avremo

$$\begin{aligned}\sum \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\binom{a}{i_3} &= \binom{3a}{p} - 3\left\{\binom{2a}{p} - 2\binom{a}{p}\right\} - 3\binom{a}{p} \\ &= \binom{3a}{p} - 3\binom{2a}{p} + 3\binom{a}{p} = \sum_{i=0}^{i=2}(-1)^i\binom{3}{i}\binom{(3-i)a}{p}.\end{aligned}$$

Analogamente avremo

$$\begin{aligned}\sum \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\binom{a}{i_3}\binom{a}{i_4} &= \binom{4a}{p} - 4\left\{\binom{3a}{p} - 3\binom{2a}{p} + 3\binom{a}{p}\right\} \\ &\quad - 6\left\{\binom{2a}{p} - 2\binom{a}{p}\right\} - 4\binom{a}{p} \\ &= \binom{4a}{p} - 4\binom{3a}{p} + 6\binom{2a}{p} - 4\binom{a}{p} = \sum_{i=0}^{i=3}(-1)^i\binom{4}{i}\binom{(4-i)a}{p}.\end{aligned}$$

Ammettiamo che questa legge sia valida fino ad un intero n e che si abbia quindi

$$\sum \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\binom{a}{i_3}\ldots\binom{a}{i_n} = \sum_{i=0}^{i=n-1}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{(n-i)a}{p}$$

dico che essa sarà valida anche per $n+1$ e che si avrà quindi

$$\sum \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\ldots\binom{a}{i_n}\binom{a}{i_{n+1}} = \sum_{i=0}^{i=n}(-1)^i\binom{n+1}{i}\binom{(n+1-i)a}{p}.$$

Infatti seguendo il metodo tenuto per il caso di $n = 2$ ed $n = 3$, $n = 4$, avremo

$$\Sigma \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\cdots\binom{a}{i_n}\binom{a}{i_{n+1}} = \binom{(n+1)a}{p} -$$

$$\binom{n+1}{1}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{(n-i)a}{p} - \binom{n+1}{2}\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i\binom{n-1}{i}\binom{(n-1-i)a}{p}$$

$$-\binom{n+1}{3}\sum_{i=0}^{n-3}(-1)^i\binom{n-2}{i}\binom{(n-2-i)a}{p} - \cdots - \binom{n+1}{n}\sum_{i=0}^{0}(-1)^i\binom{1}{i}\binom{(1-i)a}{p}.$$

Separiamo da ciascuna sommatoria del secondo membro il termine generale $\binom{(n+1-i)a}{p} = \binom{(n-(i-1))a}{p}$; avremo allora come somma dei coefficienti di questo termine l'espressione

$$(-1)^{i-1}\binom{n+1}{1}\binom{n}{i-1} - (-1)^{i-2}\binom{n+1}{2}\binom{n-1}{i-2}$$
$$-(-1)^{i-3}\binom{n+1}{3}\binom{n-2}{i-3}\cdots - (-1)^1\binom{n+1}{i-1}\binom{n-i+2}{1}$$
$$-(-1)^0\binom{n+1}{i}\binom{n-i+1}{0} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad [\alpha]$$

Se trascuriamo l'ultimo termine di questa somma vediamo che i rimanenti, alternativamente positivi e negativi, hanno per numeratore comune il prodotto

$$(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n+2-i)$$

che potremo raccogliere; i denominatori sono rispettivamente $\underline{|1}\ \underline{|i-1}$, $\underline{|2}\,.\,\underline{|i-2}$, $\underline{|3}\,.\,\underline{|i-3}$, ..., $\underline{|i-1}$, $\underline{|1}$. Ma si sa che $\underline{|i}$ è sempre divisibile per il prodotto $\underline{|r}\,.\,\underline{|i-r}$ per $r < i$ e che si ha

$$\frac{\underline{|i}}{\underline{|r}\ \underline{|i-r}} = \binom{i}{r}.$$

Da questa eguaglianza facendo $r = 1, 2, 3 \ldots (i-1)$ si riconosce che si possono ridurre le precedenti frazioni ad avere per denominatore comune $\underline{|i}$ ed avremo allora come somma dei numeratori (non tenendo conto del fattore già raccolto)

$$(-1)^{i-1}\binom{i}{1} - (-1)^{i-2}\binom{i}{2} - (-1)^{i-3}\binom{i}{3}\cdots - (-1)^1\binom{i}{i-1} \quad [\beta]$$

Ora dalla nota formola

$$0 = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3}\cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$$

si ricava per n pari

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3}\cdots + \binom{n}{n-1} = 2$$

e per n dispari

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}\ldots\ldots-\binom{n}{n-1}=0$$

quindi per i pari la somma dei termini della [β] è uguale a 2 e però tenendo conto dell'ultimo termine non considerato nella [α] questa espressione si riduce a

$$2\,\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n+2-i)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,i}-(-1)^0\binom{n+1}{i}\binom{n-i+1}{0}$$
$$=\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n+2-i)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,i}=\binom{n+1}{i}$$

e però il coefficiente del termine generale $\binom{(n+1-i)\,a}{p}$ troviamo che è uguale, quando i è pari, a quello che si avrebbe dallo sviluppo che si voleva dimostrare.

Quando i è dispari lo sviluppo [β] sarà eguale a zero e però la [α] si ridurrà al suo ultimo termine cioè a

$$-\binom{n+1}{i}$$

che coincide appunto col coefficiente del termine generale nello sviluppo che si voleva dimostrare quando i è dispari.

Lo sviluppo delle $\sum$ essendo dimostrato per $n=2$, $n=3$, $n=4$ sarà quindi valido qualunque sia n.

4. Se facciamo $n=p$ e notiamo che $\sum\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\ldots\binom{a}{i_p}$ rappresentando il numero delle combinazioni contenenti elementi di ciascuno dei p gruppi dati è uguale ad a^p avremo

$$a^p=\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p}{i}\binom{(p-i)\,a}{p}$$

separando il termine corrispondente ad $i=0$ e procedendo sul termine $\binom{a\,p}{p}$ come già si è operato nel numero 2, si riconosce la divisibilità di a^p-a per il numero primo p e si ha modo di determinarne il quoziente.

In particolare si potrà scrivere

$$a^p-a=\binom{a\,p}{p}-a+\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i\binom{p}{i}\binom{(p-i)\,a}{p}$$

e poichè

$$\frac{\binom{p}{i}}{p} = \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-i+1)}{1.2.3\dots i} = \frac{1}{i}\binom{p-1}{i-1},$$

si avrà

$$\frac{a^p - a}{p} = \frac{\binom{a\,p}{p} - a}{p} + \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i \frac{1}{i}\binom{p-1}{i-1}\binom{(p-i)\,a}{p}.$$

Francesco Panizza.

TEMI DI MATEMATICA DATI PER L'ESAME DI MATURITÀ

IN GINNASI E SCUOLE REALI SUPERIORI DELL'AUSTRIA-UNGHERIA

alla fine degli anni scolastici 1891-92 e 1892-93

(*Continuazione*: V. *pag. 27, 55, 97, 148, 184 dell'anno IX e 25 dell'anno X*).

Graz: I. *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Due fiamme A e B sono distanti l'una dall'altra $a = 40\,m$; A ha alla distanza 1 l'intensità luminosa 1 e B alla stessa distanza l'intensità luminosa 2. Si deve determinare sulla retta a il punto che viene illuminato egualmente dalle due fiamme.

2. Costruire e calcolare quel triangolo nel quale r è il raggio del cerchio circoscritto, h l'altezza da C e l'angolo $CAB = \alpha$ ($r = 92{,}5\ cm$, $h = 140\ cm$, $\alpha = 53^0\,7'\,48''$).

3. Una tangente condotta all'ellisse $4\,x^2 + 9\,y^2 = 36$ taglia gli assi positivi delle coordinate ad egual distanza dall'origine; qual'è l'equazione della tangente e dove giace il punto di contatto?

Graz: II. *i. r. Ginnasio sup.* — 1. La subnormale d'una tangente alla parabola è 8, l'ascissa del punto di contatto 9; che angolo forma la normale col raggio vettore del punto di contatto?

2. Un arco di cerchio colla saetta $p = 5$ ruota intorno a questa, se l'angolo al centro che corrisponde all'arco è $\alpha = 32^0\,18'\,28''$, qual'è la superficie ed il volume del segmento sferico che risulta?

3. Dei tre angoli d'un triangolo, che contano un numero intiero di gradi, il primo è divisibile per 11, il secondo per 17 ed il terzo è di 4^0 maggiore del doppio del primo; quanti gradi conta ognuno?

4. Un tale paga per 12 anni al principio di ogni anno un premio di 250 f., onde cominciando colla fine del 18^0 anno e poi per altri 14 anni alla fine di ogni anno, percepisce una rendita. Quale sarà questa rendita calcolando il 4,5 % d'interesse?

Salisburgo: *Ginnasio sup. Borromeo.* — 1. Data l'equazione $8x^3 + 16x^2 - 8ax - a^3 = 0$, determinare a in modo che tutti i valori di x diventino razionali.

2. Il rettangolo $ABCD$ ha il lato $AB = 3\,cm$, il lato $BC = 2\,cm$. Si descriva un cerchio che tocchi DC in D ed un altro che tocchi BC in B. Ambedue i cerchi si devono pure toccare scambievolmente e la loro centrale essere parallela alla diagonale AC del rettangolo. Quanto importano i raggi dei due circoli?

3. Il diametro della base di un cono obliquo è $d = 16$, l'asse $a = 15$ e questo forma colla base l'angolo $\alpha = 79^\circ\,20'$. Si calcolino i lati e gli angoli di quella sezione assiale la di cui area è il medio geometrico fra le aree delle sezioni assiali massima e minima del cono.

4. L'ipotenusa di un triangolo rettangolo ABC il cui vertice opposto A ha le coordinate $x_1 = 9$, $y_1 = 5$, giace nella corda di contatto corrispondente a quel punto rispetto al cerchio $x^2 + y^2 = 64$, e la retta $7x - 5y = 0$ dimezza quest'ipotenusa. Devesi determinare la cordale del dato cerchio e del cerchio circoscritto al triangolo.

KREMSMÜNSTER: *i. r. Ginnasio sup. dei Benedettini.* — Si scriva la proporzione nella quale la somma dei termini estremi è 24, quella dei medi è 16 e la somma dei quadrati di tutti i termini è 580.

2. In un cerchio di raggio $r = 1$ un angolo alla periferia è $\alpha = 18^\circ$ e la somma delle due corde che lo formano è $s = 3$. Quanto importa ognuna delle corde e quanto la parte del cerchio fra esse compresa?

3. Si determini il volume di un segmento sferico nel quale la superficie curva sta alla superficie piana come $1 : n$, se il raggio della sfera è $r = 7{,}5$ ed $n = 0{,}6$.

4. Nei punti d'intersezione della retta $x + y = 3$ colla parabola $y^2 = 4x$, sono condotte tangenti alla parabola; si determini l'area del triangolo compreso dalla data retta e dalle due tangenti.

INNSBRUCK: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Un orefice adopera argento del titolo di 900, 840 e 600 millesimi per ottenere 54 kg. di argento del titolo di 750 millesimi; come può esser fatto il miscuglio volendone adoperare un numero intiero di kg. di ogni qualità?

2. Sul circolo $x^2 + y^2 = 25$ si sono presi due punti colle ascisse $x_1 = -4$ e $x_2 = 3$ e con ordinate positive; si determini l'angolo formato dalla segante che passa per i due punti colla tangente condotta al cerchio per il secondo punto.

3. Un triangolo ABC coi lati $a = 221$ cm., $b = 149$ cm. e $c = 222$ cm. ruota intorno ad un asse parallelo al lato BC che ha una distanza da questo lato eguale all'altezza sul medesimo; si deve determinare la superficie ed il volume del corpo di rotazione.

4. In un quadrilatro inscritto $ABCD$ è il lato $AB = a = 14$ dm, $CD = c = 13$ dm., l'angolo $DAB = \alpha = 106^\circ\,15'\,37''$ ed il raggio del cerchio circoscritto $r = 8{,}125$ dm; si calcolino gli altri elementi del quadrilatero.

VILLACO: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. La frazione $\frac{7}{470}$ si deve rappresentare come differenza di due frazioni proprie positive, delle quali il minuendo abbia il denominatore 10 ed il sottraendo il denominatore 47. Soluzione mediante le frazioni continue.

2. Qual'è il volume di un tronco di cono retto la cui superficie laterale $M = 200,25$ cm.^{2} e il cui lato $s = 8,2$ cm., se questo forma colla base maggiore l'angolo $\alpha = 70^\circ\ 21'\ 35''$?

3. Calcolare l'area del rettangolo formato dai raggi vettori che si tagliano ad angolo retto nell'ellisse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Bressanone: *Ginnasio sup. privato.* — 1. In una progressione aritmetica ed in una progressione geometrica con termini positivi e che hanno il primo termine 1, l'ottavo termine della prima è eguale al quarto della seconda, e la somma dei primi quattro termini della geometrica supera di 21 l'ottavo termine dell'altra. Quali sono le due progressioni?

2. Un esagono regolare col lato $a = 1$ ruota intorno ad un asse che passa per un vertice ed è parallelo alla simmetrale dei lati; si calcoli la superficie ed il volume del corpo di rotazione.

3. Si calcolino le coordinate del punto di intersezione delle altezze e l'equazione del circolo circoscritto ad un triangolo che ha i vertici $(-3, -2)$, $(6, -5)$ e $(5, 2)$.

Reichenberg: *i. r. Scuola media (Ginn. sup. e Sc. reale inf.)* — 1. Un padre lascia ai suoi 5 figli una sostanza di 20000 corone, che frutta il 4 % d'interesse composto a maturazione semestrale; alla fine d'ogni semestre i figli ricevono assieme 600 corone. Quando riceve ognuno dei figli dopo 10 anni?

2. Quanto importa la parte di superficie terrestre visibile da un punto alto $h = 620$ m (raggio terrestre $r = 6377,5$ km).

3. Cercare l'equazione del cerchio che passa per i tre punti $(2, 3)$, $(-2, 3)$ $(0, -2)$.

Brünn: *i. r. I. Ginnasio sup. ted.* — 1. Il numero $1\frac{23}{30}$ si deve scomporre in tre frazioni coi denominatori 2, 3, 5 così che il triplo numeratore della prima frazione aumentato del doppio numeratore della seconda sia eguale al doppio numeratore della terza aumentato di 1.

2. Un tale dopo 6 anni ha il diritto di percepire per la prima volta una rendita annuale anticipata che dura per 18 anni; ma egli vende tosto questo diritto per 12000 f.; quanto importa questa rendita se l'interesse viene calcolato al $5\frac{1}{2}$ % e capitalizzato semestralmente?

3. Un trapezio inscritto ad un cerchio di raggio r coi lati paralleli $2r$ e $\frac{2r}{3}$ ruota attorno al lato $2r$; qual'è il volume e la superficie del corpo di rotazione? $(r = 5,23$ dm$)$.

4. Quali sono le equazioni di quelle tangenti all'ellisse $9x^2 + 16y^2 = 144$, le quali sono parallele alla retta $y = 0,4x + 6$? Qual'è l'equazione del rispettivo diametro, quale la sua lunghezza e quale l'angolo che esso forma col diametro coniugato?

(Continua).

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Sulle proprietà fondamentali delle operazioni dell'aritmetica. — Ho riunito insieme, in questa breve nota, alcune delle proprietà relative alle operazioni fondamentali dell'aritmetica, e specialmente quelle che si riferiscono ad operazioni successive e dello stesso ordine eseguite su di un numero dato, tra le quali, com'è notissimo, si riscontrano tante analogie.

1. Ciascuna delle operazioni, che si possono eseguire sopra un dato numero a, è completamente determinata quando, oltre ad essere indicata la specie dell'operazione, sia dato un altro numero b che, secondo i casi, sarà quello che si deve aggiungere ad a, o togliere da a, o il numero per il quale il numero a deve essere moltiplicato o diviso, o l'esponente della potenza a cui deve essere elevato il numero a, o infine l'indice della radice che deve essere estratta dallo stesso numero.

Indico, per brevità, una qualunque di queste operazioni col simbolo M_b, dove la lettera M, presa isolatamente, sta a dinotare la specie dell'operazione, mentre la lettera b ha il significato suddetto; e col simbolo

$$a M_b$$

il risultato dell'operazione M_b eseguita sul numero a. In generale, indico con

$$a M_b N_c P_d \ldots$$

il risultato che si ottiene eseguendo sul numero a dapprima l'operazione M_b, poi sul risultato l'operazione N_c, sul nuovo risultato l'operazione P_d e così via.

Infine indico con M^{-1} l'operazione inversa della M, ossia tale che si abbia

$$(1) \ldots \ldots \quad a M_b^{-1} M_b = a$$

qualunque siano i numeri a e b; e ammetto che assieme alla (1) si abbia anche

$$(2) \ldots \ldots \quad a M_b M_b^{-1} = a.$$

Ciò posto, ecco alcune proprietà riferibili in pari tempo a diverse specie di operazioni.

2. I. *Posto che, qualunque siano i numeri* a, b, c, *si abbia:*

$$(3) \ldots \ldots \quad a M_b M_c = a M_c M_b:$$

si dovrà anche avere:

$$(4) \ldots \ldots \quad a M_b M_c^{-1} = a M_c^{-1} M_b.$$

Invero, a motivo della (2) si ha:

$$a M_c^{-1} M_b = a M_c^{-1} M_b M_c M_c^{-1},$$

e in seguito all'ipotesi fatta (3):

$$a M_c^{-1} M_b = a M_c^{-1} M_c M_b M_c^{-1},$$

d'onde, a motivo della (1):

$$a\,M_c^{-1}M_b = a\,M_bM_c^{-1}\,.$$

Osservazione. — Poichè l'ipotesi (3) si realizza in ognuna delle operazioni dirette: addizione, moltiplicazione e inalzamento a potenza, ne segue che la (4) vale per ciascuna di esse e la sua inversa. Quindi particolarizzando la specie dell'operazione M e impiegando gli usuali segni, si può, da ciò che precede, ricavare la dimostrazione della permutabilità di due operazioni, una diretta e l'altra inversa, eseguite successivamente su di un dato numero, posto che la permutabilità sia già stata stabilita per le operazioni dirette. Se p. es. le operazioni M sono inalzamenti a potenza si ha il teorema:

$$\sqrt[c]{a^b} = \sqrt[c]{a}^{\,b}$$

ed ecco la dimostrazione precedente, facendo uso degli ordinari segni dell'operazione di cui si tratta:

$$\sqrt[c]{a}^{\,b} = \sqrt[c]{\left(\sqrt[c]{a}^{\,b}\right)^c} = \sqrt[c]{\left(\sqrt[c]{a}^{\,c}\right)^b} = \sqrt[c]{a^b}\,.$$

3. II. *Ammessa la* (3), *si deve anche avere:*

(5) . . . . $aM_b^{-1}M_c^{-1} = aM_c^{-1}M_b^{-1}\,.$

Invero, a motivo della (2), si ha:

$$a\,M_b^{-1}M_c^{-1} = a\,M_b^{-1}M_c^{-1}M_bM_b^{-1}\,,$$

e per la (4) che, come abbiamo osservato, è conseguenza della (3):

$$a\,M_b^{-1}M_c^{-1} = a\,M_b^{-1}M_bM_c^{-1}M_b^{-1}\,,$$

d'onde, a motivo della (1):

$$a\,M_b^{-1}M_c^{-1} = a\,M_c^{-1}M_b^{-1}\,.$$

Osservazione. — Atteso l'osservazione fatta precedentemente sull'ipotesi (3), possiamo dire che la proprietà (5) vale anch'essa per tutte le operazioni inverse. Supposto ad es. che le operazioni M siano innalzamenti a potenza, si ha il teorema:

$$\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{a}}$$

colla dimostrazione seguente:

$$\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}}^{\,b}} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}^{\,b}}} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{a}}\,.$$

4. III. *Ammessa la* (3) *e posto che qualunque siano i numeri* a, b, c *si abbia:*

(6) . . . . $aM_bM_c = aM_{\varphi(b,c)}\,;$

si deve anche avere:

$$(7) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad a M_b^{-1} M_c^{-1} = a M_{\varphi(b,c)}^{-1} .$$

Invero, a motivo della (2) si ha:

$$a M_b^{-1} M_c^{-1} = a M_b^{-1} M_c^{-1} M_{\varphi(b,c)} M_{\varphi(b,c)}^{-1} ,$$

e per le ipotesi fatte (6) e (3):

$$a M_b^{-1} M_c^{-1} = a M_b^{-1} M_c^{-1} M_c M_b M_{\varphi(b,c)}^{-1} ,$$

infine per la (1):

$$a M_b^{-1} M_c^{-1} = a M_{\varphi(b,c)}^{-1} .$$

Osservazione. — Se $\varphi(b,c) = b + c$, l'ipotesi (6) si realizza nell'addizione; se $\varphi(b,c) = bc$ la stessa ipotesi si realizza nella moltiplicazione e nell'innalzamento a potenza. Quindi nella precedente sono comprese le dimostrazioni delle formule:

$$a - b - c = a - (b + c); \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}; \quad \sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[bc]{a} .$$

Se p. es. le operazioni M sono innalzamenti a potenza, bisognerà fare $\varphi(b,c) = bc$, e la dimostrazione precedente diventa:

$$\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[bc]{\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}}^{\,bc}} = \sqrt[bc]{\left(\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}}\right)^{c\,b}} = \sqrt[bc]{a} .$$

5. IV. *Ammesse le* (3) *e* (6), *si deve anche avere:*

$$a M_b M_c^{-1} = a M_{\varphi(b,d)} M_{\varphi(c,d)}^{-1} ,$$

qualunque siano i numeri a, b, c, d.

Invero, a motivo della (2) si ha:

$$a M_b M_c^{-1} = a M_b M_c^{-1} M_d M_d^{-1} ,$$

e per la (4):

$$a M_b M_c^{-1} = a M_b M_d M_c^{-1} M_d^{-1} ,$$

e infine per le (6) e (7):

$$a M_b M_c^{-1} = a M_{\varphi(b,d)} M_{\varphi(c,d)}^{-1} .$$

Osservazione. — Se $\varphi(b,c) = b + c$, si può ricavare dalla precedente la dimostrazione della proprietà:

$$a + b - c = a + (b + d) - (c + d);$$

se $\varphi(b,c) = bc$ si possono invece avere le dimostrazioni delle proprietà seguenti:

$$\frac{ab}{c} = \frac{abd}{cd}; \qquad \sqrt[c]{a^b} = \sqrt[cd]{a^{bd}} .$$

Se p. es. le operazioni M sono innalzamenti a potenza, si ha la dimostrazione:

$$\sqrt[c]{a^b} = \sqrt[d]{\sqrt[c]{a^b}^{\,d}} = \sqrt[d]{\sqrt[c]{(a^b)^d}} = \sqrt[cd]{a^{bd}}\,.$$

6. V. *Se, qualunque siano i numeri* a, b, c, *si ha:*

(8) . . . . $\varphi(a, b)\,M_c = \varphi(a\,M_c,\, b\,M_c)$,

si deve avere anche:

$$\varphi(a, b)\,M_c^{-1} = \varphi\left(a\,M_c^{-1},\, b\,M_c^{-1}\right).$$

Invero, a motivo della (2), si ha:

$$\varphi\left(a M_c^{-1}, b M_c^{-1}\right) = \varphi\left(a M_c^{-1}, b M_c^{-1}\right) M_c M_c^{-1},$$

e per l' ipotesi fatta (8):

$$\varphi\left(a M_c^{-1}, b M_c^{-1}\right) = \varphi\left(a M_c^{-1} M_c, b M_c^{-1} M_c\right) M_c^{-1},$$

e infine a motivo della (1):

$$\varphi\left(a M_c^{-1}, b M_c^{-1}\right) = \varphi\left(a, b\right) M_c^{-1}.$$

Osservazione. — Se $\varphi(a, b) = a \pm b$ l' ipotesi (8) si realizza se l' operazione M è moltiplicazione; quindi allora si ha anche:

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}.$$

Se $\varphi(a, b) = a\,b$, oppure $\varphi(a, b) = \frac{a}{b}$, la stessa ipotesi (8) si realizza se M è un innalzamento a potenza; quindi allora si ha anche:

$$\sqrt[c]{a\,b} = \sqrt[c]{a}\,.\,\sqrt[c]{b}\;;\qquad \sqrt[c]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}}.$$

Fermo, gennaio 1895.

C. Ciamberlini.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
217*, 218*, 219, 220*, 221*, 223*, 224* e 225*

217*. *Nella serie* $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n, \ldots\ldots$ *è costante il rapporto* h *di ciascun termine alla potenza di grado* μ *del termine precedente. Esprimere* x_n *per mezzo di* x_1, n, h, μ. (A. Tagiuri).

Soluzioni completamente analoghe dai Sigg. *E. Marchi*, studente a Livorno; *G. Scorza*, studente a Pisa; *M. Carmina*, alunno del R. Istituto tecnico di Girgenti; *V. Columbo*, studente a Napoli; *E. Lugaro*, studente a Palermo; *A. Parsi*, studente a Genova (*).

(*) Soluzioni vennero anche inviate da *B. Armano*, studente a Torino, *F. Celestri* (R. Ist. tec. Modica), *G. Giovannetti*, studente a Pavia, *C. Montanari*, studente a Pisa; *M. Morale* e *B. Zurria*, studenti a Catania.

Dalle relazioni successive

$$x_2 = hx_1^{\mu}, \quad x_3 = hx_2^{\mu}, \quad x_4 = hx_3^{\mu}, \quad \ldots ,$$

si ricavano, sostituendo, le altre

$$x_3 = h^{\mu+1} . x_1^{\mu^2}, \quad x_4 = h^{\mu^2+\mu+1} x_1^{\mu^3}, \quad \ldots$$

Ora, si ha in generale

$$x_n = h^{\mu^{n-2}+\mu^{n-1}+\ldots+\mu+1} x_1^{\mu^{n-1}}.$$

Infatti quest'uguaglianza si verifica per $n = 1, 2, 3, 4$ e supponendola soddisfatta per $n-1$ lo è anchè per n, poichè

$$x_n = hx_{n-1}^{\mu} = h\left(h^{\mu^{n-3}+\mu^{n-4}+\ldots+\mu+1} . x_1^{\mu^{n-2}}\right)^{\mu} = h^{\mu^{n-2}+\mu^{n-3}+\ldots+\mu^2+\mu+1} . x_1^{\mu^{n-1}},$$

quindi essa è sempre vera.

Ma si ha $\mu^{n-2}+\mu^{n-1}+\ldots+\mu^2+\mu+1 = \dfrac{\mu^{n-1}-1}{\mu-1}$ dunque, più semplicemente

$$x_n = h^{\frac{\mu^{n-1}-1}{\mu-1}} . x_1^{\mu^{n-1}}.$$

218*. *Determinare il termine generale della serie*

1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ... (A. Tagiuri).

Soluzione del Sig. *F. Celestri*, alunno del R. Istituto tecnico di Modica (*).

È evidente che il termine n^{esimo} della serie, per n impari è $\dfrac{n+1}{2}$ e per n pari $\dfrac{n}{2}$. Se adunque lo si indica con N potremo scrivere nel primo caso $N = \dfrac{2n+1+1}{4}$ e nel secondo $N = \dfrac{2n+1+(-1)}{4}$. La quistione è in tal modo ridotta a far sì che l'ultimo termine del numeratore di queste due espressioni sia positivo quando n è dispari e negativo quando n è pari, ciò che si ottiene prendendo

$$N = \frac{2n+1 \; -(-1)^n}{4}.$$

Se in luogo della serie data si considerasse la serie

[1] $\qquad a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_4, a_4, \ldots$

dove primieramente $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ sono numeri in progressione aritmetica di ragione d, il termine di posto $2n$, come pure quello che lo precede,

(*) Altre soluzioni pervennero dai Sigg. *M. Carmina* (R. Ist. tec. Girgenti), *V. Colombo* (studente a Napoli), *M. Morale* (stud. Catania), *A. Parsi* (stud. Genova).

avrebbe per espressione $a_1 + (n-1)d$, quindi il termine n^{esimo} sarebbe, per n impari $a_1 + \left(\frac{n+1}{2} - 1\right) d$ e per n pari $a_1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right) d$ ossia in generale, servendoci dell'artificio usato sopra:

$$a_1 + \left\{\frac{2n+1-(-1)^n}{4} - 1\right\} d = a_1 + \frac{2n-3-(-1)^n}{4} \cdot d.$$

Qualora poi nella [1], a_1, a_2, a_3, a_4, ... fossero i termini di una progressione geometrica avente q per quoziente, siccome $a_n = a_1 q^{n-1}$ per n impari il termine n^{esimo} della serie sarebbe $a_1 q^{\frac{n+1}{2}-1}$ e per n pari $a_1 q^{\frac{n}{2}-1}$, quindi avremmo per termine generale

$$a_1 q^{\frac{2n-3-(-1)^n}{4}}.$$

219. *Nella serie* $y_1\ y_2\ \ldots\ y_n\ \ldots$ *si ha per* $n > 1$

$$y_n = h y_{n-1} + l n + k.$$

Dato il valore a_r *di* y_r *determinare* y_n *in funzione di* n, h, l, k, a_r.

(A. Targiuri).

Soluzioni analoghe dei Sigg. Prof. V. *Carpaneto* ad Acqui, *V. Columbo*, studente nella R. Università di Napoli, *A. Parsi*, studente nella R. Scuola Navale Superiore di Genova e *G. Scorza*, studente nella R. Università di Pisa.

Dalle relazioni

$$y_n = hy_{n-1} + ln + k, \quad y_{n-1} = hy_{n-2} + l(n-1) + k$$
$$\ldots\ldots\ldots \quad y_{n-(s-1)} = hy_{n-s} + l[n-(s-1)] + k;$$

moltiplicando successivamente per 1, h, h^2, ... h^{s-1} e addizionando si ricava

$$y_n = h^s y_{n-s} + (ln+k)(h^{s-1} + h^{s-2} \ldots + h + 1)$$
$$-\, l[(s-1)h^{s-1} + (s-2)h^{s-2} + \ldots + 2h^2 + h].$$

Ma si ha: $h^{s-1} + h^{s-2} + \ldots + h + 1 = \frac{h^s - 1}{h-1}$ e

$$(s-1)h^{s-1} + (s-2)h^{s-2} + \ldots + 2h^2 + h = \frac{h}{h-1}\left(sh^{s-1} - \frac{h^s-1}{h-1}\right)$$

e sostituendo

$$y_n = h^s y_{n-s} + (ln+k)\frac{h^s-1}{h-1} - \frac{lh}{h-1}\left(sh^{s-1} - \frac{h^s-1}{h-1}\right);$$

questa formola, che facilmente si dimostra esatta col metodo di conclusione da n ad $n+1$, si può scrivere nel seguente modo

$$y_n = h^s y_{n-s} + \frac{l}{h-1}[(n-s)h^s - n] + \left(k + \frac{lh}{h-1}\right)\frac{h^s-1}{h-1}.$$

Ponendo $n - s = r$, donde $s = n - r$, si ottiene

$$y_n = h^{n-r} y_r + \frac{l}{h-1}(rh^{n-r} - n) + \left(k + \frac{lh}{h-1}\right)\frac{h^{n-r}-1}{h-1}.$$

Tale formola vale anche per $r > n$. Se ne ricava infatti

$$y_r = h^{r-n} y_n + \frac{l}{h-1}(nh^{r-n} - r) + \left(k + \frac{lh}{h-1}\right)\frac{h^{r-n}-1}{h-1};$$

e ponendo n per r ed r per n si ricade appunto nella precedente.

220*. *Data in un cerchio una corda* AC, *e, dato un punto* K *situato in essa, condurre per* K *un' altra corda* BD *in modo che il quadrilatero* ABCD *risulti circoscrittibile.* (S. Catania).

Soluzioni del Sig. *G. Scorza*, studente a Pisa.

1.° Supponiamo il problema risoluto e poniamo $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = m$, $DB = n$. Allora poichè il quadrilatero $ABCD$ è inscrittibile, gli angoli ABC e ADC sono supplementari: quindi $BK : KD = \triangle ABC : \triangle ADC = ab : cd$. Inoltre si sa pel teorema di Stewart che se un punto K divide la base di un triangolo OBD nel rapporto $u : v$, si ha

$$\overline{OK}^2 = \frac{v}{u+v}\cdot\overline{OB}^2 + \frac{u}{u+v}\cdot\overline{OD}^2 - \frac{uv}{(u+v)^2}\cdot\overline{BD}^2$$

e nel nostro caso $u : v = ab : cd$, $OB = OD = R$, indicando con R il raggio del circolo circoscritto e designando O il centro di questo circolo, $BD = n$, dunque

$$\overline{OK}^2 = R^2 - \frac{abcdn^2}{(ab+cd)^2}.$$

Ora indicando con S l'area del quadrilatero $ABCD$ egli è $S = \triangle ABC + \triangle ADC = \frac{abm}{4R} + \frac{cdm}{4R} = \frac{m}{4R}(ab+cd)$ e d'altra parte $S^2 = abcd$ perchè il quadrilatero $ABCD$ è inscrittibile e circoscrittibile al tempo stesso: dunque sostituendo:

$$\overline{OK}^2 = R^2 - \frac{m^2 n^2}{16R^2}.$$

Da questa uguaglianza si ricava

$$nm = 4R\sqrt{(R+OK)(R-OK)},\quad n = \frac{4R}{m}\sqrt{(R+OK)(R-OK)}$$

la qual formola dà il valore di n che risolve il problema (*).

Conducendo il diametro MN passante per K e per K la semicorda KP perdendicolare ad MN, si vede facilmente che $KP = \sqrt{(R+OK)(R-OK)}$, onde la diagonale n non è altro che la quarta proporzionale dopo m, il doppio

(*) Questa soluzione è inspirata ad alcuni risultati a cui perviene il Sig. Foucart nel *Journal de Math. élém.* publié par H. Vuibert (Anno XVIII, p. 146).

del diametro MN ed il segmento KP. La costruzione del quadrilatero $ABCD$ è ridotta poi ad inscrivere in un cerchio una corda di data lunghezza passante per un punto dato, problema di molto facile soluzione.

2.ª Considerando ancora il problema come risoluto, sia I il centro del cerchio inscritto nel quadrilatero $ABCD$. Se tiriamo IA, IC sarà $\angle AIC + ICD + CDA + DAI = 360°$. Ma la somma degli angoli ICD, DAI è uguale a un retto poichè sono metà di angoli supplementari, dunque si ha $\angle AIC = 270° - CDA$. Ora l'angolo CDA è noto perchè inscritto nell'arco ADC, dunque abbiamo intanto, che il punto I deve trovarsi sopra un arco di cerchio capace dell'angolo $270° - CAD$ descritto sulla corda AC. D'altra parte si sa che se un quadrilatero è inscrittibile e circoscrittibile nel medesimo tempo, i centri del circolo inscritto e circoscritto stanno sopra una medesima retta insieme col punto d'incontro delle diagonali, dunque il punto I è determinato dalla intersezione della retta OK (O essendo il centro del circolo dato) coll'arco di cerchio AIC.

Trovato il punto I, la costruzione del quadrilatero $ABCD$ è ovvia, poichè si riduce a tirare per K una trasversale BD in modo che IC bisechi l'angolo DCB e si sa che tutte le trasversali BD, tali che l'angolo DCB risulti bisecato da IC, sono parallele.

Osservazione. Del teorema citato sui quadrilateri inscrittibili e circoscrittibili al tempo stesso, ci si può facilmente rendere ragione nel modo che segue:

Siano P e Q i punti ove si incontrano le coppie di rette AB e CD, AD e BC rispettivamente, allora la retta PQ sarà la polare del punto K tanto rispetto al circolo O quanto rispetto al circolo I. Ma la polare di un punto rispetto a un cerchio è perpendicolare al diametro passante per esso, dunque PQ è perpendicolare tanto ad OK quanto a KI, e perciò O, I e K giacciono, come volevasi dimostrare, in linea retta.

221*. *In un triangolo* ABC *determinato per gli elementi* a, B, C *iscrivere due circonferenze eguali, tangenti a due lati ed esternamente tra loro; si riduca atta al calcolo logaritmico la formola del raggio. Se* O, O′ *siano i centri dei due cerchi qual condizione deve sussistere fra gli angoli* B, C *affinchè il triangolo* AOO′ *risulti rettangolo in* O′? (G. Bellacchi).

Risoluzione del Sig. *E. Marchi* già studente nel R. Istituto tecnico di Livorno (*).

Siano D, E i punti di contatto delle due circonferenze O, O' col lato $BC = a$. Si ha $a = BD + 2r + EC$ e poichè $BD = r \cot \frac{B}{2}$, $EC = r \cot \frac{C}{2}$, risulta $a = r\left(2 + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}\right)$, donde

$$r = \frac{a}{2 + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}}.$$

(*) Altra soluzione venne inviata dal Sig. *M. Morale*, studente a Catania e risoluzioni eguali nei risultati dai Sigg. *A. Parsi*, studente a Genova e *G. Scorza*, studente a Pisa.

Per ridurre questa formola atta al calcolo logaritmico si osservi che

$$\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}},$$

onde posto $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}=2\tan^2\varphi$ segue

$$r=\frac{a}{2(1+\tan^2\varphi)}=\frac{a}{2}\cos^2\varphi.$$

Se il $\triangle\, AO'O$ risulta rettangolo in O', allora $AO'E$ sarà l'altezza del $\triangle\, ABC$ relativa al lato BC e si avrà $AE=BE\operatorname{tang}B=(BD+2r)\operatorname{tang}B$ $=r\left(2+\cot\frac{B}{2}\right)\tan B$ ed $AE=EC\,.\,\tan C=r\cot\frac{C}{2}\tan C$, onde ugua-gliando

$$\left(2+\cot\frac{B}{2}\right)\tan B=\cot\frac{C}{2}\tan C,$$

che esprime la condizione richiesta.

Questa relazione si può peraltro mettere sotto una forma più elegante osservando che

$$\left(2+\cot\frac{B}{2}\right)\tan B=\frac{2\operatorname{sen}\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}\cdot\frac{2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos B}=$$

$$2\,\frac{\operatorname{sen}B+\cos^2\frac{B}{2}}{\cos B}=\frac{2\operatorname{sen}B+1+\cos B}{\cos B},$$

$$\cot\frac{C}{2}\tan C=\frac{2\cot\frac{C}{2}\tan\frac{C}{2}}{1-\tan^2\frac{C}{2}}=\frac{2\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{C}{2}}=\frac{1+\cos C}{\cos C}$$

donde segue, dopo fatte le riduzioni

$$\cos B-\cos C=2\operatorname{sen}B\cos C.$$

223*. *Dimostrare che l'espressione*

$$3^{4m+1}+10\,.\,3^{2m}-13,$$

per m intero e positivo qualunque, è divisibile per 64. (V. Columbo)

Dimostrazione del Sig. *C. Montanari*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Livorno.

Si ha

$$3^{4m+1} + 10 \,.\, 3^{2m} - 13 = 3\,(3^{4m} - 1) + 10\,(3^{2m} - 1) =$$
$$(3^{2m} - 1) \left\{ 3\,(3^{2m} + 1) + 10 \right\} = (3^{2m} - 1) \left\{ 3\,(3^{2m} - 1) + 2\,(3^2 - 1) \right\}.$$

Ora i due fattori dell'ultimo prodotto, qualunque sia m, sono divisibili per $3^2 - 1$, quindi l'espressione considerata è divisibile per $(3^2 - 1)^2 = 64$, c. d. d. (*).

Dimostrazione del Sig. *G. Scorza*, studente a Pisa.

Verificato il teorema per $m = 1, 2, \ldots\ldots$ supponiamolo vero per $m = n$; esso sarà dimostrato in generale quando si provi che, fatta tale ipotesi, esso si verifica ugualmente per $m = n + 1$.

Per $m = n + 1$ la nostra espressione prende la forma

$$A = 3^{4n+5} + 10 \,.\, 3^{2n+2} - 13$$

da cui, sottraendo

$$B = 3^{4n+1} + 10 \,.\, 3^{2n} - 13,$$

si ha

$$(A - B) = 3^{4n+1}\,(3^4 - 1) + 10 \,.\, 3^{2n}\,(3^2 - 1) = 80 \left\{ 3^{4n+1} + 3^{2n} \right\} =$$
$$80 \,.\, 3^{2n}\,(3^{2n+1} + 1).$$

Ora basta osservare che una potenza dispari di 3 è uguale a un multiplo di 4 meno l'unità per accorgersi che $A - B$ è divisibile per 64: ma anche B per ipotesi è divisibile per 64, dunque il teorema resta dimostrato anche per A. c. d. d..

Dimostrazione del Sig. *G. Candido*, studente a Pisa.

Consideriamo l'espressione

$$m^{4p+1} + [(m+n)^2 - 2mn^{2p}]\, m^{2p} - [(m+n)^2 - mn^{2p}]\, n^{2p}$$

in cui m, n, p sono numeri interi e positivi. Ponendola sotto la forma

$$(m^p + n^p)\,(m^p - n^p)\,[m\,(m^p + n^p)\,(m^p - n^p) + (m+n)^2]$$

si scorge con facilità che 1° se m ed n sono pari essa è divisibile per $2\,(m+n)^2 \times (m-n)$, 2° se $\dfrac{m+n}{m-n}$ è un numero intero essa è divisibile per $(m^2 - n^2)^2$.

In particolare fatto $m = 3$, $n = 1$ si ha l'espressione

$$3^{4p+1} + 10 \,.\, 3^{2p} - 13$$

e siccome siamo nel caso di $\dfrac{m+n}{m-n} =$ intero, essa è divisibile per $(3^2 - 1)^2 = 64$ (**).

(*) Dimostrazioni completamente analoghe dai Sigg. *M. Carmina* (alunno del R. Ist. tec. Girgenti), *E. Lugaro* (licenziato dal R. Liceo Garibaldi Palermo), *E. Marchi* (lic. R. Ist. tec. Livorno), *M. Morale* (lic. R. Ist. naut. Catania), *A. Parsi*, studente a Genova, *M. Piattelli* (lic. R. Liceo Bari), *S. Resta* (alunno R. Ist. tec. Bari).

(**) Altre generalizzazioni della quistione pervennero dai Sigg. *F. Celestri* (alunno del R. Ist. tec. Modica), *V. Columbo* (stud. Napoli) ed *E. Lugaro*.

224*. *Siano* O, O′ *i centri di due cerchi dati che si segano ortogonalmente nei punti* H, K; *si tiri per* H *una retta qualunque che tagli i cerchi* O, O′ *di nuovo in* A, B *rispettivamente. Le rette* AO, BO′ *si taglino in* M. *1° Qual è il luogo del punto* M? *2° Dimostrare che le rette* KA, KH, KB, KM *formano un fascio armonico.* (F. Celestri).

Risposte analoghe dai Sigg. *E. Lugaro*, licenziato dal R. Liceo Garibaldi di Palermo e *S. Resta*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari (*).

1° Essendo gli angoli AHO, $O'HB$ complementari, si vede facilmente che HOA e $BO'H$ sono supplementari (quindi BKA retto): hanno i lati OH, $O'H$ perpendicolari, quindi AM è perpendicolare a BM. Il luogo del punto M è dunque il cerchio di diametro OO'.

2° Sia C il punto d'incontro di AK con BM. Si ha $\angle KCB = 90° - CBK = \frac{KO'B}{2}$, e quindi C si trova nel cerchio O'.

In oltre, essendo A, M, K, B conciclici: $\angle AKM = ABM = HKC$. Cosicchè le due rette KM, KH e le bisettrici dei loro angoli, KA, KB, formano un fascio armonico, c. d. d..

225*. *Dimostrare che le due progressioni geometriche*

$$\div 1 : 2 : 4 : \ldots \qquad \div 1 : 3 : 9 \ldots$$

godono della proprietà che combinando i loro termini, o tutti o in parte, per addizione o per addizione e sottrazione dal 1° (a_1) *fino all'* n$^{\text{esimo}}$ (a_n), *si hanno per risultati i numeri da* 1 *fino ad* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. (A. Lugli).

Dimostrazione del Sig. *M. Morale*, studente a Catania.

Considerando la prima progressione la cui ragione è 2, si ha

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{2a_n - a_1}{2-1} = 2a_n - 1.$$

Ogni numero $N < 2a_n - 1$, che non sia termine della progressione, si potrà mettere sotto la forma $a_k + \alpha$ con a_k termine della progressione ed $\alpha < a_k$. Similmente α potrà porsi sotto la forma $a_{k_1} + \alpha_1$ con $\alpha_1 < a_{k_1}$ e così via. Egli è chiaro chè si giungerà in ultimo a trovare $\alpha_n = a_{k_n}$ poichè $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$ e la progressione comincia con 1. Si avrà così

$$N = a_k + a_{k_1} + \ldots + a_{k_n}.$$

Considerando poi la seconda progressione la cui ragione è 3, si ha

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{3a_n - a_1}{3-1} = a_n + \frac{a_n - 1}{2} = a_n + m$$

dove m è un numero intero minore di $\frac{a_n}{2}$. Ora ogni numero $N < a_n + m$, che non sia termine della progressione dà luogo alla limitazione $a_k < N < a_{k+1}$, e poichè $a_{k+1} - a_k = 2a_k$ risulta che una delle differenze $N - a_k$ od $a_{k+1} - N$

(*) Altra risposta pervenne dal Sig. *C. Montanari* studente a Pisa.

è minore e l'altra maggiore di a_k od ambedue sono eguali ad a_k. In questo ultimo caso sarà $N = a_{k+1} - a_k$ e nell'altro caso si potrà scrivere $N = a_k + \alpha$ o $N = a_{k+1} - \alpha$, con $\alpha < a_k$. Ponendo appresso $a_{k_1} < \alpha < 3a_{k_1}$, si troverà o $\alpha = a_{k_1+1} - a_{k_1}$ oppure $\alpha = a_{k_1} + \alpha_1$ od $\alpha = a_{k_1+1} - \alpha_1$ con $\alpha_1 < a_{k_1}$ e così di seguito; e poichè le α diminuiscono continuamente e la progressione ha per primo termine 1, si arriverà infine ad avere $\alpha_n = a_{k_n+1} - a_{k_n}$, oppure $\alpha_n = a_{k_n}$, per modo che sarà

$$N = a_k \pm a_{k_1} \pm a_{k_2} \pm \dots \pm a_{k_n} \qquad \text{c. d. d..}$$

QUISTIONI PROPOSTE (*)

251**. Se r è un intero arbitrario non negativo, e n un intero pure arbitrario ma superiore a r, si avrà

$$\binom{n}{0}\binom{n}{r} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{r} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{r} - \dots + (-1)^{n-r}\binom{n}{n-r}\binom{r}{r} = 0.$$

G. NONNI.

252. Si dimostri, senza ricorrere alla teoria delle differenze, che se la relazione

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} x_1 + \binom{n}{2} x_2 + \dots + \binom{n}{n} x_n = \underline{|n}$$

è soddisfatta qualunque sia l'intero positivo n, si avrà

$$x_n = \underline{|n}\left(1 - \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\underline{|n}}\right).$$

G. NONNI.

253. Valendosi del risultato della quistione precedente si determini il numero delle permutazioni degli elementi $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ nelle quali nessun elemento occupa il posto rappresentato dal proprio indice.

G. NONNI.

254. Si hanno due urne, in ognuna delle quali sono contenuti i numeri 1, 2, 3, ..., n. Si estraggono contemporaneamente due numeri, uno da un'urna e uno dall'altra; poi, senza rimettere nelle urne i numeri sortiti, si estraggono di nuovo due numeri, uno da un'urna e uno dall'altra; e così si continua finchè tutti i numeri siano stati estratti. Determinare la probabilità che non sortano mai

(*) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

in una stessa estrazione due numeri eguali; e dimostrare che tale probabilità vale $\frac{1}{e}$ a meno di $\frac{1}{n\,\underline{|n}}$.

G. Nonni.

255**. Dimostrare che per due triangoli sferici polari sussiste la seguente proprietà: I tre circoli massimi passanti per le coppie di vertici corrispondenti (cioè tali che uno sia polo del lato opposto dell'altro) s'incontrano negli estremi di uno stesso diametro; mentre le tre coppie di lati corrispondenti s'incontrano in punti di uno stesso circolo massimo, il cui piano risulta perpendicolare al suddetto diametro.

M. Chini.

256**. Mostrare che, risolvendo le equazioni

$$\xi' = \xi - \frac{2u}{u^2+v^2+w^2}(u\xi + v\eta + w\zeta + 1)$$
$$\eta' = \eta - \frac{2v}{u^2+v^2+w^2}(u\xi + v\eta + w\zeta + 1)$$
$$\zeta' = \zeta - \frac{2w}{u^2+v^2+w^2}(u\xi + v\eta + w\zeta + 1),$$

rispetto alle u, v, w, si ha

$$u = -\frac{a}{a\xi + b\eta + c\zeta - 1} = \frac{2(\xi' - \xi)}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)}$$
$$v = -\frac{b}{a\xi + b\eta + c\zeta - 1} = \frac{2(\eta' - \eta)}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)}$$
$$w = -\frac{c}{a\xi + b\eta + c\zeta - 1} = \frac{2(\zeta' - \zeta)}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)},$$

ove si è messo, per brevità,

$$a = 2(\xi - \xi')\delta^{-2},\quad b = 2(\eta - \eta')\delta^{-2},\quad c = 2(\zeta - \zeta')\delta^{-2}$$
$$\delta^2 = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2.$$

A. Del Re.

257**. Il processo di eliminazione delle quantità λ, λ' fra le equazioni

$$a - \lambda b = 0,\quad a' - \lambda' b' = 0$$
$$\alpha\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0,$$

ove $a = a_1 x + a_2$, $b = b_1 x + b_2$, $a' = a'_1 x' + a'_2$, $b' = b'_1 x' + b'_2$ ed a_i, a'_i, b_i, b'_i $(i = 1, 2)$, α, β, γ, δ sono delle costanti date, vale il processo di composizione successiva di tre proiettività. Dedurne, senza ulteriori calcoli, che il determinante della equazione bilineare

$$\alpha a a' + \beta a b' + \gamma a' b + \delta b b' = 0$$

è dato dal prodotto

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 \\ b'_1 & b'_2 \end{vmatrix}.$$

A. Del Re.

258.** Due fasci proiettivi di raggi (S, σ), (S', σ') essendo dati in due piani diversi, ed intorno a due diversi punti, proiettare l'uno di essi (S', σ') nel fascio (S_1, σ) sul piano dell'altro, per modo che, in σ, il centro di proiettività di (S), (S_1) sia un dato punto S_2.

A. Del Re.

259.** Si vuole proiettare una u' di due punteggiate proiettive, sopra un piano σ condotto pel sostegno u dell'altra, per modo che la proiezione contenga un assegnato punto M di σ, ed abbia con (u) un dato asse di proiettività u''.

A. Del Re.

260.** Costruire due punteggiate proiettive (u), (u') conoscendo due punti corrispondenti A, A', l'asse di proiettività u'', la proiezione I'', su u'', del punto limite di (u'), fatta da A, e l'angolo θ di u, u'.

Per θ diverso da 0^0 e da 90^0 questo problema ha due soluzioni. Mostrare che le due posizioni (u_1), (u'_1) di (u') che corrispondono ad esse, sono prospettive col centro di prospettiva in A.

A. Del Re.

261*. Eliminare a e δ dalle tre equazioni

$$s_1 = \frac{a}{\tan(\delta + \varphi_1)}, \quad s_2 = \frac{a}{\tan(\delta + \varphi_2)}, \quad s_3 = \frac{a}{\tan(\delta + \varphi_3)}.$$

G. Pesci.

262*. Trovare col solo compasso il raggio del cerchio inscritto in un dato triangolo rettangolo.

G. Candido.

263*. Di un trapezio simmetrico calcolare i lati ed il raggio del cerchio circoscritto in funzione dell'angolo acuto A, della diagonale $2d$ e dell'area m^2.

G. Bellacchi.

264*. Se A', B', C' sono punti dei lati a, b, c di un triangolo ABC tali che $BA' : A'C = CB' : B'A = AC' : C'B = m : n$, posto $B'C' = a'$, $C'A' = b'$, $A'B' = c'$, dimostrare la relazione

$$\Sigma\, \overline{AA'}^2 + \frac{(m-n)^2 - mn}{(m+n)^2} \Sigma a^2 = 2 \Sigma a'^2.$$

P. Castelli.

265*. Dimostrare che, per n intero e positivo qualunque, la espressione

$$3^n [1296 \,.\, 3^{4n-3} + 3(3^{4n-1} - 2^{4n+4}) - 2^{4n}]^n - 2^{4n} \left(\frac{9^{2n} - 4^{2n}}{13}\right)^n$$

è divisibile per 1895.

S. Gatti.

266*. Se di un triangolo ABC inscritto in un cerchio il vertice A rimane fisso e i vertici B e C variano così che la somma $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ rimanga costante, dimostrare che il luogo del punto medio di BC è una retta perpendicolare al diametro passante per A.

G. Gallucci.

267*. Se si costruiscono i punti simmetrici I', I'', I''' del centro I del cerchio inscritto in un triangolo ABC rispetto ai lati BC, CA, AB, le rette che congiungono questi punti ordinatamente con A, B, C concorrono in un punto.

S. Catania.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

E. NANNEI. — *Elementi di Geometria.* — Vol. 1°: *Planimetria* (1892) - Prezzo: L. 3. — Vol. 2°: *Stereometria* (1894) - Prezzo: L. 3 - Milano, dott. F. Vallardi.

Questo libro, di cui la prima parte fu pubblicata fino dal 1892, e la seconda è uscita pochi mesi or sono, presenta subito, a chi lo legge, due notevoli qualità didattiche: l'ordine e la chiarezza.

Lo scopo dell'A. si fa evidente sin dalle prime pagine; egli ha voluto fare un libro rigoroso e possibilmente facile; un libro che riunendo in sè i pregi dei migliori trattati che vennero alla luce in quest' ultimo quarto di secolo, fosse alla portata anche degli alunni mediocri delle nostre scuole secondarie, i quali ne costituiscono la maggioranza.

E fare un libro che schiettamente si adatti alle scuole, come ben dice l'illustre prof. Cremona nella prefazione de' suoi magistrali *Elementi di Geometria proiettiva*, è cosa difficilissima e che richiede molto e molto tempo; è una impresa piena di dubbi e di sacrifizi per la quale occorre di continuo venire a lite coll'abbiccì della scienza; fare, disfare e rifare il lavoro tre, quattro e più volte. — Assai arduo era dunque il compito assuntosi dal prof. Nannei, ed a me pare che egli meriti sincere lodi sia per averlo coraggiosamente impreso e sia più ancora per il modo come l'ha condotto a termine.

Seguace per indole d' ogni reale progresso, egli ha con diligenza tenuto dietro a tutto ciò che di meglio si venne pubblicando riguardo a geometria elementare sia in trattati e sia in giornali di matematica, e tutto, bene assimilando, ha poi fuso egregiamente in questi suoi *Elementi di Geometria.*

Ed infatti egli ha innestato in essi qualche proprietà sul tronco di prisma, sulla superficie e sul volume del toro, togliendo la prima parte, da alcune note del prof. Besso, apparse nel *Periodico di matematica*, e l'altra parte dal bellissimo trattato di geometria dei prof. Lazzari e Bassani; e v'inserì, risolti, parecchi importanti problemi di applicazione dell' algebra alla geometria, fra i quali è degno di nota quello originale dell'*Algebra* del geniale prof. Bellacchi.

Nè mancò di dare un giusto cenno circa la *Geometria del triangolo*, trattando delle *coniugate isogonali, coniugate isotomiche, antiparallele, simediane* e del *punto di Lemoine.*

Il metodo tenuto dal Nannei nello svolgere le teorie geometriche è il seguente. Premessi i postulati fondamentali, viene a considerare le grandezze geometriche, le quali divide in tre generi, studiando poi separatamente le proprietà per ciascuno di essi sia nella planimetria che nella stereometria, rendendo così possibile, a chi il volesse, di svolgere contemporaneamente le due parti. — Denomina *equispigola* o *equilatera* la piramide che altri chiamano *regolare*, perchè, come giustamente osserva, è strano l'appellar regolare un poliedro che non è compreso fra i cinque che si dimostra essere i soli regolari.

Alcune dimostrazioni sono del tutto sue, e fra queste vanno in particolar modo segnalate per la loro semplicità ed eleganza quella del teorema *in ogni triedro una faccia è minore della somma delle altre due* e l'altra relativa al *volume del segmento di sfera a due basi.*

Altre proposiziani e dimostrazioni fanno a volta a volta ricordare i più pregevoli trattati di geometria, quali: il Sannia e D'Ovidio, il Faifofer, il De Paolis, il Lazzeri e Bassani, il Gremigni, nonchè la *Teoria delle Grandezze* del prof. Bettazzi, e qualche nota di quest'ultimo apparsa nel *Periodico di matematica*, ai quali lavori, oltrecchè alle *lezioni* date dal prof. De Amicis nel R. Istituto tecnico di Bari, il Nannei si è inspirato, e dei quali si è saputo efficacemente giovare, facendolo tuttavia in modo da comporne un insieme armonicamente omogeneo, steso con grande naturalezza e con linguaggio sobrio e piano di maniera che questi *Elementi* potranno nelle mani dei giovani, divenire un ottima guida per avviarli al pieno possesso dei principî geometrici, che costituiscono senza dubbio i più belli e più rigorosi esempi di logica.

Quanto alla chiarezza credo che non si potrebbe desiderare di meglio; anzi, a voler cercare il pelo nell' uovo, mi sembra che in qualche punto l'A. abbia voluto sacrificarle un po' di quel rigore, che di solito egli non abbandona mai.

Così la definizione delle grandezze di terzo genere mi pare che andrebbe ritoccata; e andrebbe pure, a mio avviso, ritoccato il capitolo della misura, dove un deplorevole errore d'impaginazione genera un po' di confusione, e dove ancora manca una definizione generale di misura.

Inoltre non è abbastanza ben precisato l'inverso del teorema di *Menelao* che egli enuncia in questi termini:

« Se sopra ognuna delle rette dei lati d' un triangolo si sceglie un punto, « tale che il prodotto delle lunghezze di tre segmenti non consecutivi, deter- « minati da tali punti e dai vertici, sia eguale al prodotto degli altri tre, i « punti scelti sono su una medesima retta ».

Evidentemente, così espressa, questa proposizione non regge, giacchè altrimenti condurrebbe ad affermare, fra le altre cose non vere, che i punti medii dei tre lati d'un triangolo giacciono sopra una stessa retta.

Ma questi son nei che si eviteranno facilmente in una seconda edizione, la quale non dovrebbe tardare a lungo perchè gli *Elementi di geometria* del Nannei meritano davvero di essere raccomandati ai professori di matematica affinchè li adottino come libro di testo nei loro corsi.

E in una novella edizione potranno altresì migliorare le figure della *Planimetria* e riuscire nitide quanto sono ora quelle della *Stereometria*; e se l'A. vorrà aggiungervi ancora un capitolo che tratti della *moltiplicazione delle curve* e delle *figure inverse*, i suoi *Elementi di geometria*, potranno fornire, a chi li studierà, un altro ottimo e moderno strumento per la risoluzione dei problemi di costruzioni geometriche, quello cioè conosciuto sotto il nome di *metodo per inversione.*

Novara, 27 gennaio 1895.

Stefano Gatti
Professore nel R. Liceo di Novara.

Finita la Redazione il dì 20 marzo 1895.

SULLA TEORIA DELLA EQUIVALENZA GEOMETRICA (*)

Nota del Prof. G. LAZZERI

È noto che la teoria dell'equivalenza geometrica, completamente trascurata fino a pochi anni fa, è stata ridotta rigorosa specialmente da De Zolt, De Paolis ed altri, ammettendo come postulato l'una o l'altra delle proposizioni seguenti: « Se una grandezza è comunque divisa in parti, trascurandone alcune non è possibile disporre le altre in modo da formare la stessa grandezza ». « Se due grandezze A, B sono divise in parti in modo che in A si trovino parti rispettivamente eguali a quelle di B insieme ad altre, non è possibile trovare un'altra scomposizione di A e B per la quale in A si trovino parti rispettivamente eguali a tutte quelle di B e nessuna di più, oppure in B si trovino parti rispettivamente eguali a quelle di A insieme ad altre ».

Dal 1886 in poi sono stati fatti vari infelici tentativi per dimostrare il postulato suddetto, senza raggiungere lo scopo. Recentemente però i signori SCHUR (**) e RAUSENBERGER (***) hanno dato delle dimostrazioni, le quali, sebbene sieno giuste nel concetto fondamentale, e mettano fuor di dubbio che la teoria dell'equivalenza si deve poter rendere indipendente dal postulato che è stato ammesso sin qui, lasciano però ancora abbastanza a desiderare e presentano delle lacune.

Spero quindi che possa riuscire non completamente priva d'interesse questa nota, nella quale valendomi di quanto è stato fatto fin qui, mi son proposto di tracciare una teoria della equivalenza per le tre classi di grandezze costituite dai poligoni piani, dai poligoni sferici di una stessa sfera, e dai prismi, indipendentemente

(*) Questo lavoro era già in corso di stampa, quando è venuta in luce una nota sullo stesso argomento del Prof. VERONESE (Atti del R. Istituto Veneto).

(**) *Sull'area delle figure piane limitate da linee rette.* — Periodico, anno VIII, 1893. — Vedi anche BIASI: *Sull'equivalenza dei poligoni.* — Periodico, anno IX, 1894, pag. 21 e 85.

(***) *Das Grundproblem der Flächen-und Rauminhaltslehre.* — Mat. Annalen, Bd. XLIII, 1893.

da qualsiasi postulato speciale per la teoria stessa, dal concetto di aree negative adoperato dal RAUSENBERGER, e da qualsiasi nozione aritmetica o algebrica.

Ho cercato di evitare per quanto era possibile anche la teoria della similitudine, ma non ho potuto fare a meno di ricorrere ad essa per la dimostrazione del § 6.

Pei maggiori sviluppi, che qui ometto per amore di brevità, rimando il lettore ai miei *Elementi di geometria*, che richiamerò sempre con la scrittura (*G*).

I. — NOZIONI GENERALI RELATIVE ALL'EQUIVALENZA.

1. Le prime classi di grandezze, che si presentano nello studio della geometria, e delle quali si può considerare come tipo la classe dei segmenti, godono delle seguenti proprietà caratteristiche:

1° Riunendo due o più grandezze della medesima classe, si ottiene una nuova grandezza, appartenente alla stessa classe, che si chiama la loro somma.

2° La somma di più grandezze di una classe gode della proprietà commutativa, cioè tutte le somme, che si possono ottenere riunendo in diversi modi le medesime grandezze, sono eguali.

3° Date due grandezze della stessa classe, una deve essere necessariamente maggiore, eguale o minore dell'altra, cioè la prima deve essere eguale alla somma della seconda e di un'altra grandezza, oppure la prima deve essere eguale alla seconda, oppure la seconda deve essere eguale alla somma della prima e di un'altra grandezza; e questi tre casi si escludono a vicenda.

Tutte le altre proprietà di queste classi di grandezze sono conseguenza di queste tre proprietà caratteristiche.

Esempi di classi di grandezze che si trovano in queste condizioni sono quella dei segmenti, quella degli angoli, quella dei diedri (*G.* Lib. I - Cap. II), quella delle striscie, quella degli strati, quella degli archi appartenenti ad un circolo od a circoli eguali, quella dei settori appartenenti ad uno stesso cerchio od a cerchi eguali, quella degli angoli sferici appartenenti ad una stessa superficie sferica od a superficie sferiche eguali, quella degli spicchi sferici appartenenti a sfere eguali (*G.* § 32), quella dei parallelogrammi di una serie (*G.* § 110), quella dei prismi di una serie (*G.* § 151). Chiamo ***classi di grandezze di 1ª specie*** tutte queste classi, caratterizzate dalle tre proprietà sopra citate (*G.* § 275).

Per altre classi di grandezze come per esempio per quella dei poligoni piani, e per quella dei poligoni sferici appartenenti ad una data superficie sferica, è evidente che sussiste la prima delle tre proprietà caratteristiche citate sopra, non esiste la seconda, e non si può asserire *a priori* se sussiste la terza. Queste sono le classi di grandezze che mi propongo di studiare. Le considerazioni seguenti si possono applicare a tutte quelle grandezze, per le quali si può ammettere la seguente proprietà:

« Se una grandezza è scomposta in parti in due modi diversi, si può produrre una terza scomposizione della data grandezza in parti, le quali sono le parti risultanti dalla prima divisione suddivise mediante la seconda divisione, oppure le parti risultanti dalla seconda divisione suddivise per mezzo della prima divisione ».

2. Definizione. — *Due grandezze si dicono* equivalenti, *se sono eguali, oppure se si possono scomporre in parti rispettivamente eguali.*

Indicherò l'equivalenza di due grandezze A, B colla scrittura

$$A \doteq B$$

che si legge « A è equivalente a B », mentre indicherò l'eguaglianza (congruenza) colla scrittura

$$A \equiv B$$

che si legge « A è eguale a B. »

Stabilita questa definizione, è facile dimostrare i teoremi seguenti (*G.* §§ 271, 272, 278):

1° *Due grandezze equivalenti ad una terza sono equivalenti fra loro.*

2° *Tutte le infinite somme delle medesime grandezze sono equivalenti.*

3° *Se una grandezza è somma di più altre grandezze, anche ogni grandezza ad essa equivalente è somma delle medesime.*

4° *Se una grandezza è somma di più altre, è anche somma di grandezze ad esse rispettivamente equivalenti.*

5° *Sono equivalenti due grandezze somme di grandezze rispettivamente equivalenti.*

6° *Una grandezza, somma di più altre, è anche somma della somma di alcune di esse e delle rimanenti.*

7° *Tutti i multipli di una medesima grandezza, secondo uno stesso numero, sono equivalenti.*

8° *Se una grandezza è multipla di un'altra secondo un dato numero, ogni grandezza equivalente alla prima è anche multipla dell'altra secondo lo stesso numero.*

9° *Se una grandezza* A *è multipla di una grandezza* B *secondo un dato numero, è pure multipla secondo lo stesso numero di ogni grandezza equivalente a* B.

10° *Se due grandezze sono equivalenti, sono pure equivalenti due loro equimultipli.*

Ecc.

II. — Equivalenza dei poligoni piani.

3. Teorema. *Due triangoli che hanno un lato eguale ed eguale l'altezza corrispondente, sono equivalenti.*

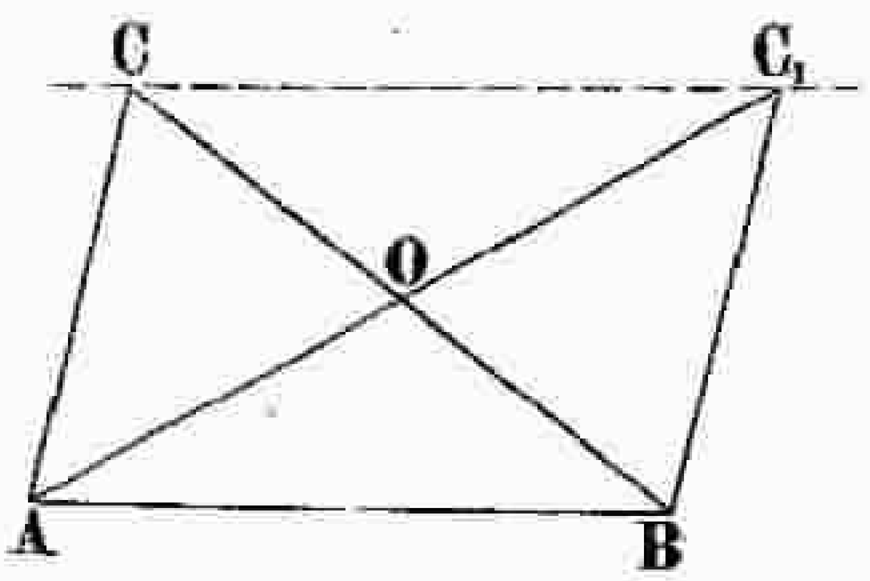


Fig. 1ª.

Si dispongano i due triangoli in modo che abbiano un lato AB in comune, e che i due vertici rimanenti C, C_1 sieno situati dalla medesima parte della retta AB, e per conseguenza la retta CC_1 risulti parallela alla AB. Si possono allora considerare tre casi, secondo che il segmento CC_1 è eguale, minore o maggiore di AB.

1° Se $CC_1 \equiv AB$ (fig. 1ª), la figura ABC_1C è un parallelogrammo, e i lati AC_1, BC si tagliano nel loro punto di mezzo O. È facile allora vedere che i due triangoli AOC, C_1OB sono eguali, e che perciò sono equivalenti i due triangoli ABC, ABC_1, che si ottengono sommando il triangolo AOB coi due triangoli suddetti rispettivamente.

2° Se $CC_1 < AB$ (fig. 2ª), si conduca la retta parallela alle rette AB, CC_1 ed equidistante da esse, la quale incontrerà i lati AC, BC, AC_1, BC_1 nei loro punti di mezzo M, N, M_1, N_1. Si conduca poi per C la parallela CP alla C_1B; essa taglia il lato AB e perciò è interna all'angolo ACB. Similmente la retta C_1Q, parallela alla AC, è interna all'angolo AC_1B. È allora facile vedere che si ha

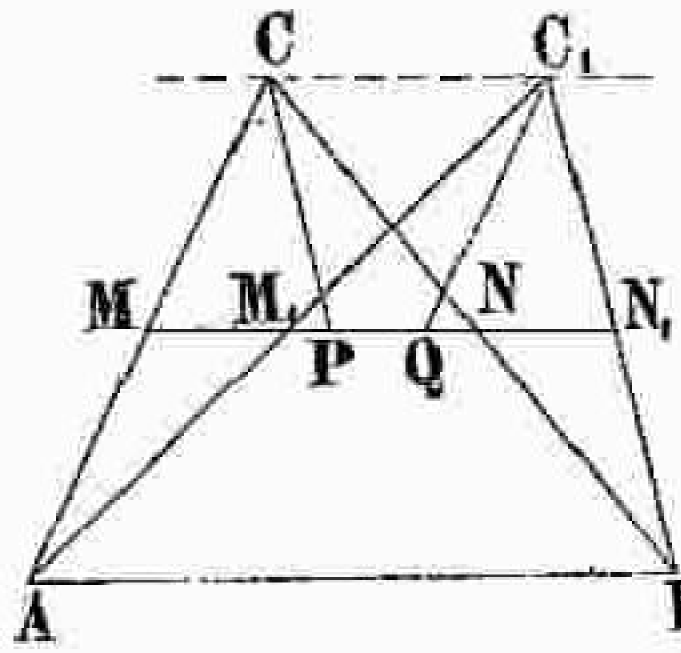


Fig. 2ª.

$$CMP \equiv C_1QN_1, \qquad CPN \equiv BN_1N,$$
$$AMM_1 \equiv C_1QM_1, \qquad AM_1NB \equiv AM_1NB,$$

e quindi, sommando tutte queste eguaglianze,

$$ABC = ABC_1 \quad (*).$$

3° Se $CC_1 > AB$, riportiamo sul segmento CC_1, a partire da C, il segmento AB tante volte quante è possibile, in modo che sia $CD_1 \equiv D_1D_2 \equiv \ldots \equiv D_{n-1}D_n \equiv AB$, essendo D_nC_1 eguale o minore di AB. Per le dimostrazioni precedenti sarà $ABC = ABD_1 = ABD_2 = \ldots = ABD_{n-1} = ABC_1$ e quindi $ABC = ABC_1$.

Corollario. — *Due parallelogrammi che hanno uguali due coppie di lati opposti ed eguali le altezze corrispondenti, sono equivalenti.*

Infatti essi sono doppi di due triangoli equivalenti.

4. Teorema. — *Ogni triangolo è equivalente al rettangolo di uno dei suoi lati e della metà dell'altezza corrispondente.*

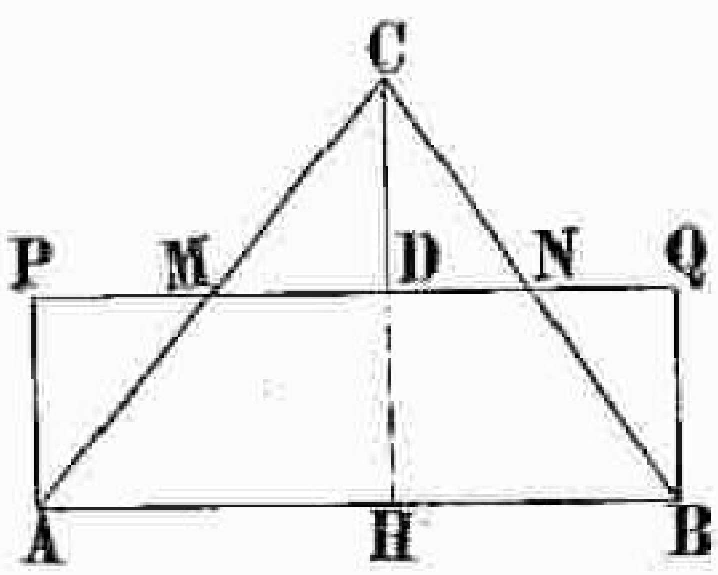


Fig. 3ª.

Sia ABC (fig. 3ª) il dato triangolo e supponiamo dapprima che la perpendicolare condotta dal vertice C alla retta

(*) V. Rethy — *Endlich-gleiche Flächen*. M. Ann. Bd. XXXVIII. S. 409.

AB incontri questa retta in un punto H non esterno al segmento AB. Per il punto di mezzo D della CH si conduca la parallela PQ alla AB, e per i punti A, B le rette AP, BQ perpendicolari alla AB. È facile vedere che i triangoli MDC, NDC sono rispettivamente eguali ai triangoli MPA, NQB, e perciò il triangolo ABC è equivalente al rettangolo $ABQP$.

Se il punto H è esterno al segmento AB, si costruisca un triangolo, equivalente a quello dato, che abbia la stessa base AB e la stessa altezza del dato triangolo, ma in modo che il piede dell'altezza sia interno al segmento AB, e poi su questo nuovo triangolo si eseguisca la costruzione sopra indicata. Il rettangolo che si ottiene sarà equivalente anche al dato triangolo.

Corollario. — *Ogni triangolo è equivalente al rettangolo del suo perimetro e della metà del raggio del circolo inscritto in esso.*

5. Teorema. — *Se due rettangoli* ABCD, A'BC'D' *hanno un angolo* B *comune e le rette* AC', A'C *sono parallele, essi sono equivalenti* (fig. 4ª).

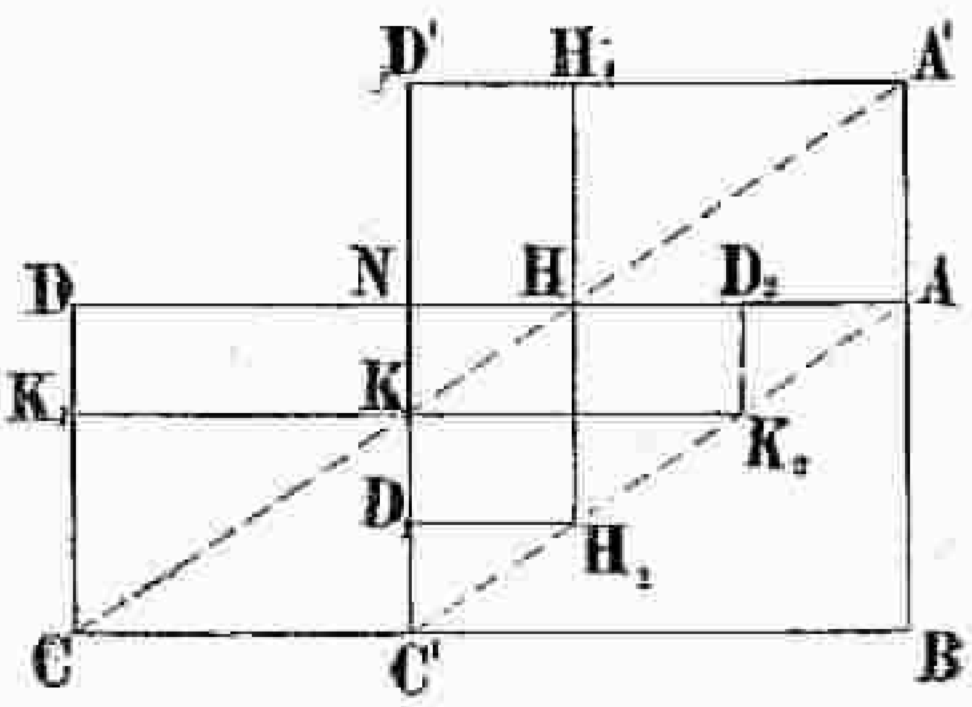


Fig. 4ª.

Per il punto H, intersezione delle rette AD, $A'C$, si conduca la retta H_1H_2 parallela alla AB, e per il punto K, intersezione delle rette $C'D'$, $A'C$, si conduca la retta K_1K_2 parallela alla CB, poi per H_2 si tracci la H_2D_1 parallela a BC e per K_2 la K_2D_2 parallela ad AB.

È facile vedere che si ha

$$KC' \equiv HH_2 \equiv A'A \equiv H_1H$$
$$HA \equiv KK_2 \equiv CC' \equiv K_1K,$$

e per conseguenza

$$DNKK_1 \equiv ND_2K_2K \qquad C'D_1H_2 \equiv K_2D_2A$$
$$NHH_2D_1 \equiv D'H_1HN \qquad H_2HA \equiv C'KK_2$$
$$K_1KC'C \equiv H_1A'AH \qquad ABC' \equiv ABC'.$$

Sommando tutte queste eguaglianze, si ha

$$ABCD = A'BC'D'.$$

Corollario. — *Un dato rettangolo si può sempre trasformare in un rettangolo di una data serie ad esso equivalente.*

Sia $ABDC$ (fig. 5ª) un dato rettangolo; sulla semiretta AC si prenda un segmento AM eguale all'altezza comune a tutti i rettangoli della data serie; dal punto C si tracci la retta CN, parallela alla retta MB. Il rettangolo $AMPN$ che ha per lati AM, AN, è un rettangolo della serie data equivalente al rettangolo $ABDC$.

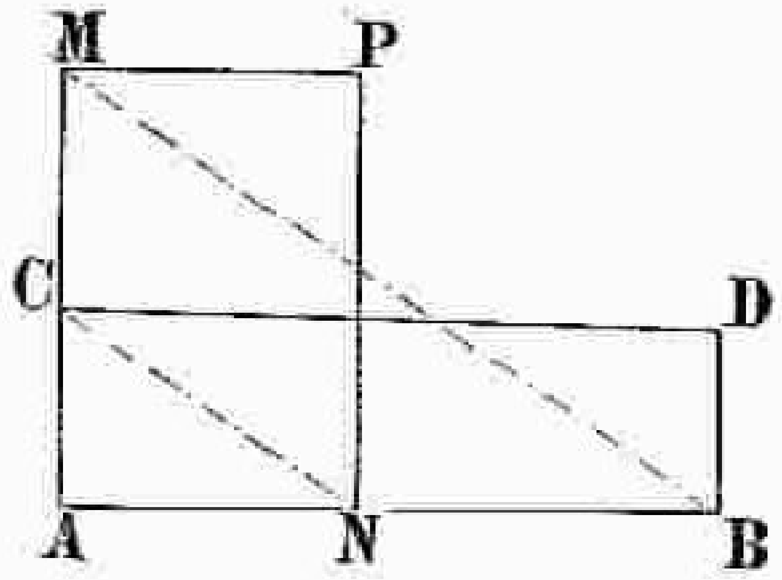


Fig. 5ª.

6. Teorema. — *Se due rette* r, r′ *in un piano sono tagliate da due rette parallele nei punti* A, B *e* A′, B *rispettivamente, e si tracciano le rette che congiungono un punto* C *preso sulla* r *coi punti* A′, B′, *le rette ad esse parallele condotte per i punti* B, A *rispettivamente, si tagliano in un punto della* r′.

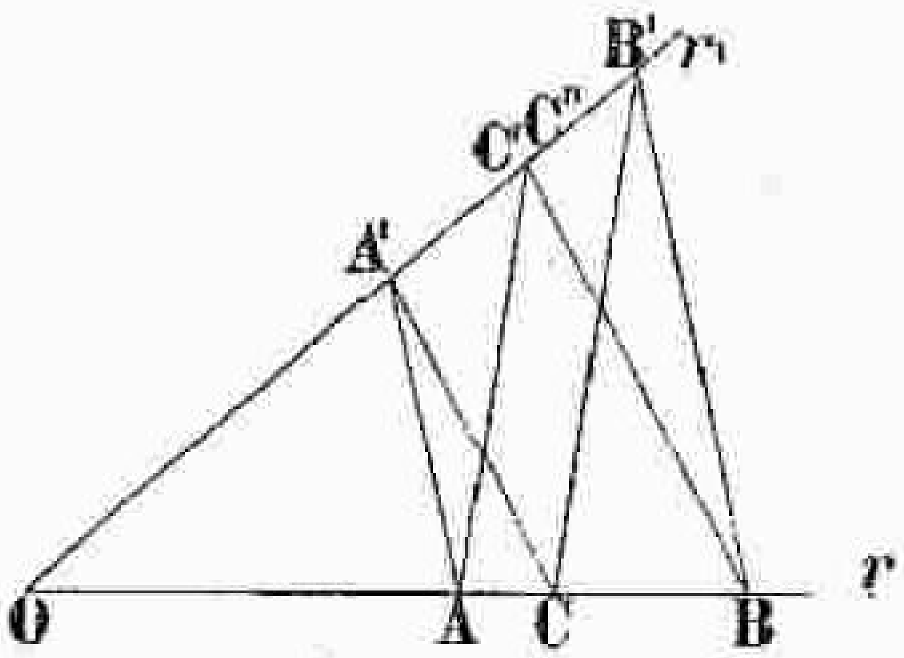


Fig. 6ª.

Sieno C', C'' (fig. 6ª) i punti di incontro della r' colla retta parallela a $B'C$ condotta per A e colla retta parallela ad $A'C$ condotta per B.

Per il teorema di Talete si hanno le proporzioni

$$OC : OA :: OB' : OC'$$
$$OC : OB :: OA' : OC''$$
$$OA : OB :: OA' : OB'.$$

Dalle ultime due proporzioni si ricava l'altra

$$OC : OA :: OB' : OC''.$$

Confrontando questa proporzione colla prima, si trova $OC' \equiv OC''$; e ciò prova che i punti $C'\,C''$ coincidono.

7. Teorema. — *Se due rettangoli* ABCD, A′BC′D′ (fig. 4ª) *hanno un angolo* B *in comune, e le rette* AC′, A′C *sono parallele, i rettangoli di una data serie ad essi equivalenti, ottenuti colla costruzione del* § 5 (Cor.), *sono eguali.*

Infatti se riguardiamo i segmenti BC, BC' come basi e i segmenti BA, BA' come altezze dei due rettangoli, per eseguire su questi la costruzione indicata nel Cor. del § 5 dovremo sulla semiretta BA prendere un segmento BM ugnale all'altezza comune ai rettangoli dalla serie considerata, tracciare le rette MC, MC' e per A ed A' condurre le parallale a MC e MC' rispettivamente. Per il teorema precedente queste parallele s' incontrano in un punto della retta BC, e quindi i due rettangoli della serie equivalenti ai due rettangoli dati sono eguali.

Corollario. — *Il rettangolo di una data serie equivalente ad un dato rettangolo ottenuto colla costruzione del* § 5 (Cor.) *è sempre lo stesso, qualunque sia il lato del rettangolo che si prende per base.*

Supponendo nella fig. 4ª $BA \equiv BC'$, $BA' \equiv BC$, i due triangoli BAC', $BA'C$ risultano isosceli, e le rette AC', $A'C$ risultano parallele. Possiamo allora ripetere la dimostrazione precedente.

Definizione. — *Chiameremo rettangolo di una data serie associato ad un dato rettangolo; quello ad esso equivalente ottenuto mediante la costruzione indicata nel corollario del* § 5.

In virtù del corollario precedente il rettangolo di una serie associato ad uno dato è sempre lo stesso, qualunque sia il lato che si prende per base.

8. Teorema. — *Se un rettangoto è somma di altri due, il rettangolo di una data serie ad esso associato è la somma dei rettangoli della stessa serie associati alle sue parti.*

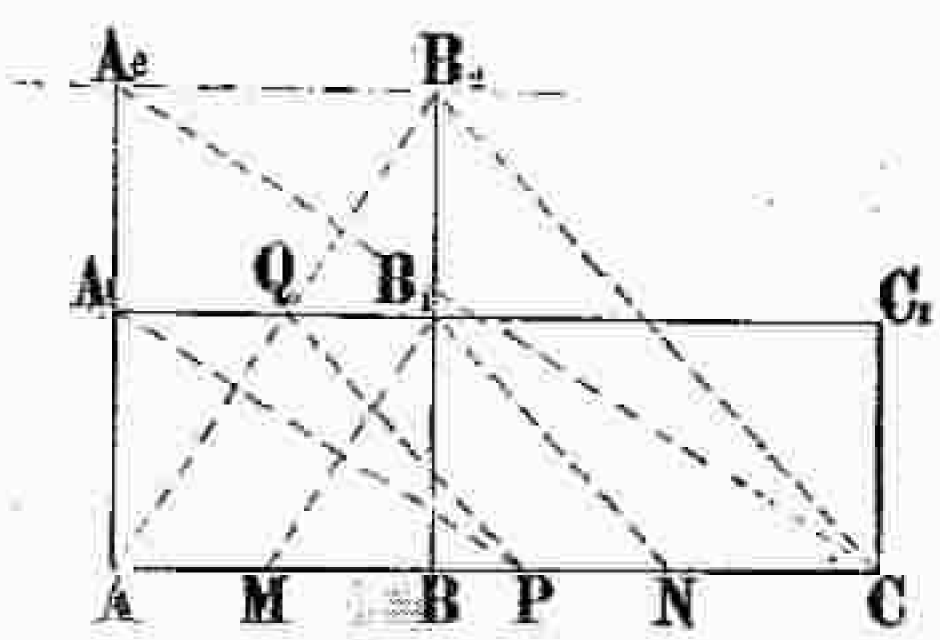


Fig. 7ª.

Sia $R \equiv ACC_1A_1$ (fig. 7ª) un rettangolo somma di due rettangoli $R_1 \equiv ABB_1A_1$, $R_2 = BCC_1B_1$, e facciamo le costruzioni note per ottenere i rettangoli R', R'_1, R'_2 di una serie associati ad R, R_1, R_2; cioè, esssendo $AA_2 \equiv BB_2$ l'altezza comune a tutti i rettangoli della serie, si traccino per B_1 le rette B_1M, B_1N, parallele alle rette B_2A, B_2C, e per A_1 la retta A_1P parallela alla A_2C. I segmenti AP, MB,

BN, saranno le basi dei rettangoli R', R_1', R_2', ed è facile vedere che $AP \equiv MB + BN$, di guisa che è $R' \equiv R_1' + R_2'$.

Infatti, essendo Q il punto d'incontro delle rette AB_2, A_1C_1, i due triangoli A_1QP, A_2B_2C sono omotetici, perchè hanno due coppie di lati A_1Q, A_2B_2 e A_1P, A_2C paralleli, e le tre rette A_1A_2, QB_2, PC, che congiungono le coppie di vertici corrispondenti, concorrono nel punto A. Ne segue che anche i lati QP, B_2C sono paralleli, e per conseguenza anche QP è parallelo ed eguale a B_1N, e i due triangoli AQP, MB_1N sono eguali, di guisa che si ha

$$AP \equiv MN \equiv MB + BN.$$

9. Teorema. — *Un triangolo qualunque può trasformarsi in un rettangolo di una data serie ad esso equivalente.*

Si costruisca il rettangolo che ha due lati opposti eguali ad un lato del dato triangolo, gli altri due eguali alla metà dell'altezza corrispondente, quindi per mezzo della costruzione indicata nel corollario del § 5 si trovi il rettangolo della data serie ad esso equivalente. Questo sarà equivalente anche al dato triangolo.

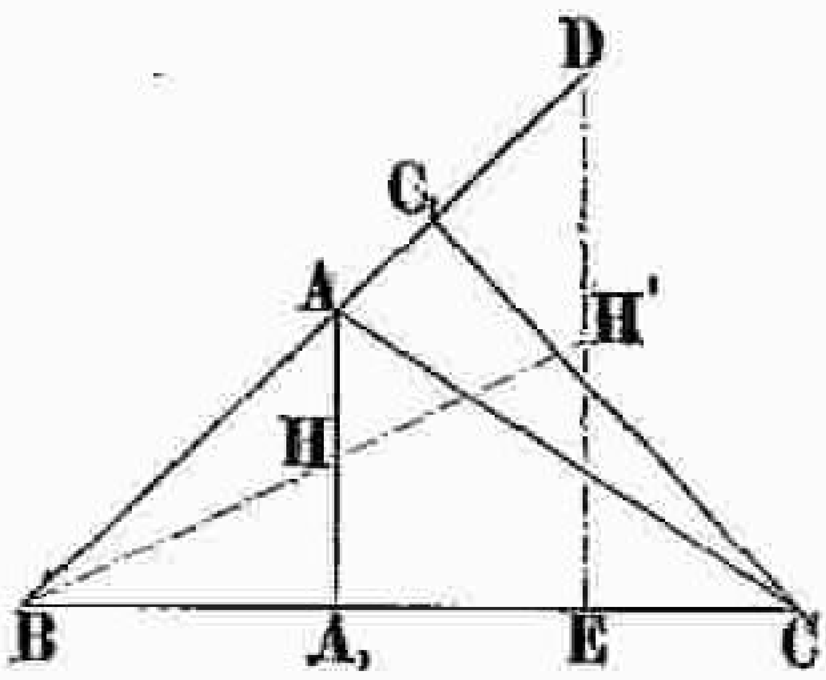


Fig. 8ª.

Se si ripete la stessa costruzione, prendendo successivamente per basi i tre lati del triangolo, è chiaro che otterremo tre rettangoli della serie equivalenti a quel triangolo; ma si può dimostrare che questi sono eguali.

Consideriamo per esempio come basi successivamente i lati BC, AB (fig. 8ª) e sieno AA_1, CC_1 le altezze corrispondenti. — Se sulla semiretta BA si prende $BD \equiv BC$, e sulla semiretta BC si prenda $BE \equiv BC_1$, il triangolo BDE risulta eguale al triangolo BCC_1 ed equiangolo al triangolo BAA_1, e perciò la retta DE risulta parallela alla AA_1, e la retta, che passa per B e per il punto di mezzo H del segmento AA_1, divide per metà il segmento DE (G. § 144).

Costruito un triangolo $OLM \equiv DBH'$ (fig. 9ª), si prendano sopra i suoi lati OL, OM i segmenti $OL' \equiv AB$, $OM' \equiv AH$. Il triangolo $OL'M'$ risulta eguale al triangolo ABH ed equiangolo al triangolo OLM, e perciò le rette LM, $L'M'$ sono parallele.

In un piano, condotto per OL, distinto dal piano del triangolo OLM, si conduca una semiretta perpendicolare ad OL, e sopra di essa si prendano due seguenti $OM_1 \equiv OM$, $OM_1' \equiv OM'$. I due triangoli OMM_1, $OM'M_1'$ essendo isosceli ed avendo un angolo comune, le rette MM_1, $M'M_1'$ risultano parallele; perciò i piani LMM_1 $L'M'M_1'$, individuati dalle due coppie di rette parallele LM, $L'M'$ e MM_1, $M'M_1'$, sono paralleli, e tagliano il piano LOM secondo due rette LM_1, $L'M_1'$ parallele.

Ora i rettangoli, che hanno per basi i lati BC, AB e per altezze le metà delle altezze corrispondenti del triangolo, sono precisamente quello che ha per lati OL e OM_1', e quello che ha per lati OL' e OM_1. Se trasformiamo questi due rettangoli in altri di una data serie ad essi equivalenti per mezzo della costruzione del corollario del § 5, otterremo due rettangoli eguali a causa del teorema del § 7, poichè le rette LM_1, $L'M_1'$ sono parallele.

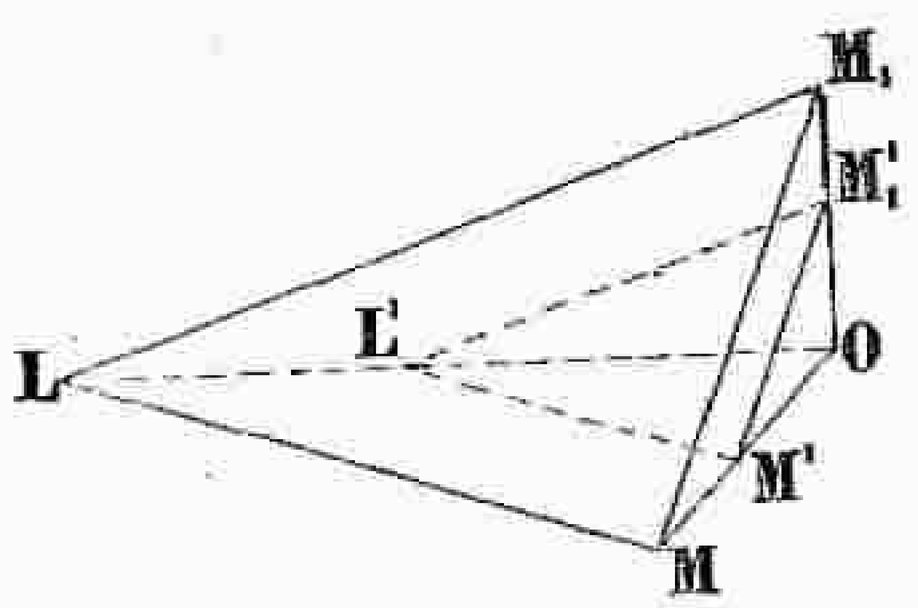


Fig. 9ª.

Per mezzo delle costruzioni indicate si possono dunque ottenere tre rettangoli di una data serie equivalenti ad un dato triangolo. Siccome però questi tre rettangoli sono eguali, possiamo dire che, qualunque sia il lato del triangolo che si considera come base, si ottiene sempre lo stesso rettangolo della serie equivalente al dato triangolo, purchè si facciano le costruzioni indicate. Si osservi però che non è esclusa *per ora* la possibilità di trovare per mezzo di altre costruzioni altri rettangoli della medesima serie, equivalenti al dato triangolo ma non eguali a quello ottenuto colle costruzioni sopra indicate.

Definizione. — *Chiameremo* rettangolo *di una data serie associato ad un triangolo quello ottenuto colle costruzioni dei* § *9, 5.*

Colla scrittura $(ABC)_h$ indicheremo il rettangolo che ha una data altezza h e che è associato ad un triangolo ABC.

Corollario. — *I rettangoli di una data serie associati a due triangoli che hanno un lato e l'altezza corrispondente rispettivamente eguali, sono eguali.*

10. Teorema. — *Se un triangolo è scomposto in due o tre triangoli in un modo qualsiasi, il rettangolo di una data serie ad esso associato è eguale alla somma dei rettangoli della stessa serie associati alle sue parti.*

1° Sia $T \equiv ABC$ un triangolo scomposto in due parti $T_1 \equiv ABD$, $T_2 \equiv BDC$ per mezzo di una retta che passa per il vertice B, di guisa che i tre triangoli T, T_1, T_2 abbiano la stessa altezza k, e la base AC di T sia la somma delle basi AD, DC di T_1 e T_2. Chiamando R', R_1', R_2' i rettangoli che hanno per basi AC, AD, DC e per altezza la metà di k, e che sono equivalenti ai triangoli T, T_1, T_2 rispettivamente, risulta R' eguale alla somma di R_1' e R_2', e per conseguenza (§ 8) si ha

$$(ABC)_h \equiv (ABD)_h + (BDC)_h$$

2° Il triangolo ABC sia scomposto in tre parti triangolari. Ciò può avvenire in due modi. Presi due punti D, E su due lati, per es. AB, AC, il triangolo ABC resta scomposto in un triangolo ADE e in un quadrangolo $DBCE$, che da una sua diagonale, per es. BE, è scomposto in due triangoli DBE, BCE. Per il caso precedente si ha:

$$(ABC)_h \equiv (ABE)_h + (BCE)_h,$$
$$(ABE)_h \equiv (ADE)_h + (DEB)_h,$$

e quindi

$$(ABC)_h \equiv (ADE)_h + (DEB)_h + (BCE)_h.$$

Oppure, essendo O un punto interno al triangolo ABC, questo è scomposto nei tre triangoli OBC, OCA, OAB. Se D è il punto d'incontro delle rette AO, BC, si ha:

$$(ABC)_h \equiv (ABD)_h + (ADC)_h$$
$$(ABD)_h \equiv (OAB)_h + (OBD)_h$$
$$(ADC)_h \equiv (ODC)_h + (OCA)_h$$

e quindi

$$(ABC)_h \equiv (OAB)_h + (OBD)_h + (ODC)_h + (OCA)_h,$$

e siccome

$$(OBD)_h + (ODC)_h \equiv (OBC)_h,$$

si ha pure

$$(ABC)_h = (OBC)_h + (OCA)_h + (OAB)_h.$$

11. Teorema. — *Le somme dei rettangoli di una serie associati ai triangoli, nei quali un quadrangolo convesso è scomposto da una qualunque delle sue diagonali, sono eguali.*

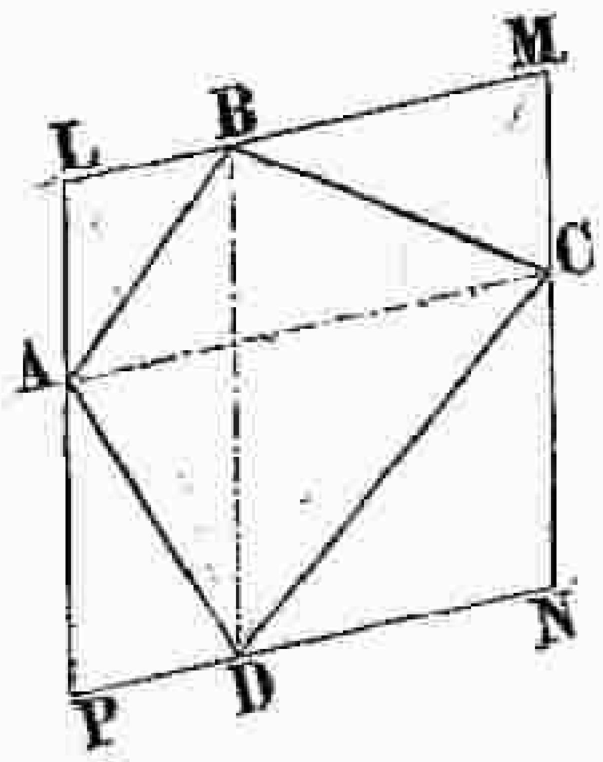


Fig. 10ª.

Sia $ABCD$ (fig. 10ª), un quadrangolo convesso qualunque, e $LMPN$ il parallelogrammo, che ha i suoi lati paralleli alle diagonali AC, BD ed è circoscritto al quadrangolo. Si ha evidentemente:

$$(ABD)_h \equiv (LBD)_h$$
$$(BCD)_h \equiv (BMD)_h,$$

e quindi

$$(ABD)_h + (BCD)_h \equiv (LBD)_h + (BMD)_h \equiv (LMD)_h \equiv (LMN)_h.$$

Nello stesso modo si dimostra che

$$(ABC)_h + (ACD)_h \equiv (LMN)_h;$$

e per conseguenza si ha:

$$(ABD)_h + (BCD)_h \equiv (ABC)_h + (ACD)_h.$$

12. Teorema. — *Se un triangolo è scomposto in triangoli in un modo qualsiasi, il rettangolo di una data serie ad esso associato è eguale alla somma dei rettangoli della stessa serie associati alle sue parti.*

Nel § 10 abbiamo già dimostrato il teorema per il caso in cui il triangolo sia scomposto in due o tre triangoli. Facciamo ora vedere che, supponendo il teorema vero per una scomposizione in un numero di triangoli minore di n, è vero anche per una scomposizione in n parti.

La più generale scomposizione che può ottenersi è quella che si ottiene prendendo vari punti interni e sul contorno e congiungendoli in modo da formare una rete di triangoli che hanno per somma il triangolo dato.

Consideriamo i p triangoli che concorrono in uno di questi punti O; essi formeranno un poligono di p lati, nel quale è noto che devono esistere almeno tre angoli convessi. Fra i tre triangoli che hanno per lati i lati che formano uno dei suddetti angoli ne esistono due almeno ciascuno dei quali è tutto esterno all'altro, e per conseguenza il punto O è esterno ad uno almeno dei suddetti triangoli; per es. LMN. Siccome MO è interno all'angolo convesso LMN ne risulta che il quadrangolo $LMNO$ è convesso e perciò si ha:

$$(LOM)_h + (OMN)_h \equiv (OLN)_h + (LMN)_h .$$

Ripetendo sui $p - 1$ triangoli che ancora restano attorno al punto O lo stesso ragionamento, e così di seguito, si giunge a far vedere che la somma dei rettangoli associati ai p triangoli considerati è eguale a quella dei rettangoli associati ad altri $p - 3$ o $p - 2$ triangoli non concorrenti in O (secondo che O è interno o sul contorno del triangolo) e a 3 o 2 triangoli concorrenti in O. Ma è già noto che la somma dei rettangoli associati a questi 3 o 2 triangoli è eguale al rettangolo associato alla loro somma, e quindi la somma dei rettangoli associati a tutti gli n triangoli, nei quali è scomposto il triangolo ABC, è eguale a quella dei rettangoli associati ad altri $(n - 1)$ o $(n - 2)$ triangoli, nei quali anche può essere scomposto ABC, e questa somma per ipotesi è eguale al rettangolo associato ad ABC.

13. Teorema. — *Se un poligono è scomposto in triangoli, la somma dei rettangoli di una data serie associati a questi triangoli è sempre lo stesso rettangolo della serie, qualunque sia la scomposizione del poligono in triangoli.*

Dato un poligono P, imaginiamolo scomposto in m triangoli $T_1, T_2 \ldots . T_m$, e poi imaginiamolo scomposto in un altro modo in n triangoli $T_1', T_2' \ldots . T_n'$. Le linee, che determinano ciascuna scomposizione, suddividono le parti provenienti dall'altra in poligoni, e tutti questi si possono scomporre in triangoli T_i'', di guisa che P risulterà eguale alla somma di p triangoli $T_1'', T_2'' \ldots . T_p''$. Chiamiamo R_i, R_i', R_i'' i rettangoli di una data serie associati ai triangoli T_i, T_i', T_i''. Poichè un triangolo T_i è scomposto in un certo numero di triangoli T_h'', il rettangolo R_i è la somma dei corrispondenti rettangoli R_h'', e perciò

$$\sum_1^m R_i \equiv \sum_1^p R_h''.$$

Per la stessa ragione si ha

$$\sum_1^n R_k' \equiv \sum_1^p R_h''.$$

Siccome una somma di rettangoli di una serie non cambia, variando l'ordine delle parti, risulta

$$\sum_1^m R_i \equiv \sum_1^n R_k''.$$

Definizione. — *Chiameremo rettangolo di una data serie associato ad un dato poligono il rettangolo, ad esso equivalente, somma di tutti i rettangoli della stessa serie, associati ai triangoli in cui si può scomporre il poligono.*

Si osservi che, in virtù del precedente teorema, il rettangolo di una data serie associato ad un poligono è sempre lo stesso, comunque si eseguisca la scomposizione del poligono in triangoli; ma non è *per ora* esclusa la possibilità di trovare con altre costruzioni rettangoli della stessa serie equivalenti al poligono dato, ma non eguali a quello associato ad esso.

14. Teorema. — *Se un poligono è scomposto in più poligoni, il rettangolo di una data serie, associato ad esso, è eguale alla somma dei rettangoli della stessa serie associati alle sue parti.*

Un poligono P sia scomposto in n poligoni $P_1, P_2 \ldots. P_n$, di guisa che sia

$$P = P_1 + P_2 + \ldots. + P_n.$$

Scomponiamo tutti i poligoni P_i in triangoli. Il rettangolo di una data serie associato ad un poligono P_i è la somma dei rettangoli della serie associati ai triangoli in cui esso è scomposto, e quello associato a P è la somma di tutti i rettangoli della serie associati a tutti i triangoli, nei quali sono scomposti i poligoni P_i; perciò chiamando R, R_i i rettangoli della serie associati a P e a P_i si ha

$$R \equiv R_1 + R_2 + \ldots. + R_n.$$

Corollari. — 1° *Se due poligoni sono equivalenti, i rettangoli di una data serie, ad essi associati, sono eguali.*

Se due poligoni P, P' sono equivalenti, essi sono somme dei medesimi poligoni $A_1, A_2 \dots A_n$. Indicando con $R_1, R_2 \dots R_n$ i rettangoli di una data serie associati a questi poligoni, i rettangoli della medesima serie associati a P e P', sono ambedue somme dei rettangoli $R_1, R_2 \dots R_n$ e perciò sono eguali, costituendo i rettangoli di una data serie una classe di grandezze di prima specie.

2° *Se un poligono* P *contiene tutti i poligoni in cui è scomposto un altro poligono* P′ *insieme ad altri, il rettangolo di una data serie associato a* P *è maggiore di quello associato a* P′.

Se infatti P' è somma dei poligoni $A_1, A_2, \dots A_m$ e P è somma dei poligoni $A_1, A_2, \dots A_m, A_{m+1} \dots A_{m+n}$, e con $R, R', R_1, R_2 \dots R_m, R_{m+1}, \dots R_{m+n}$ indichiamo i rettangoli di una serie associati a $P, P', A_1, A_2 \dots A_m, A_{m+1} \dots A_{m+n}$ rispettivamente, si ha

$$R \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_m + R_{m+1} + \dots + R_{m+n}$$
$$R' \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_m,$$

e perciò

$$R > R'.$$

3° *Se due poligoni si possono scomporre in poligoni rispettivamente eguali, non è possibile trovare un'altra scomposizione per la quale uno di essi contenga tutte le parti dell'altro insieme ad altre parti, e viceversa.*

Sieno P, P' due poligoni, e supponiamo che per una data scomposizione P sia equivalente a P', e per un'altra scomposizione P contenga tutte le parti di P' insieme ad altre. Essendo R, R' i rettangoli di una data serie associati a P e P', dovrebbe essere contemporaneamente $R \equiv R'$ e $R > R'$; il che è assurdo.

4° *Se un poligono si scompone in parti, non è possibile riunire alcune di queste parti in modo da formare di nuovo il poligono dato.*

5° *Se si costruisce in un modo qualsiasi un rettangolo di una data serie equivalente ad un dato poligono, esso è eguale al rettangolo della data serie associato a quel poligono.*

15. Teorema. — *Dati due poligoni* P *e* P′, *è possibile scomporli in un numero* finito *di parti, in modo che le parti di* P *sieno rispettivamente eguali a quelle di* P′, *oppure in modo che* P *contenga tutte le parti di* P′ *insieme ad altre, oppure in modo che* P′ *contenga le parti di* P *insieme ad altre. Quando si verifica uno di questi casi, non è possibile che esista una scomposizione, per la quale si verifichi uno degli altri due.*

Costruiamo in un modo qualunque i rettangoli di una data serie R, R' associati ai poligoni P, P'. Si dovrà dare uno dei seguenti casi:

$$R \equiv R',\ R > R',\ R < R'.$$

Se R è eguale a R', eseguendo contemporaneamente la scomposizione per la quale il rettangolo R si divide in un numero finito di parti rispettivamente eguali a quelle del poligono P, e quella per la quale lo stesso rettangolo R si divide in un numero finito di parti rispettivamente eguali a quelle del poligono P', otterremo una terza scomposizione di R in parti che sono le parti provenienti da ciascuna delle due scomposizioni suddette, suddivise mediante l'altra scomposizione. Riportando queste suddivisioni sulle parti del poligono P e su quelle del poligono P', questi restano scomposti in parti rispettivamente eguali, e perciò sono equivalenti.

Collo stesso ragionamento si dimostra che, se è $R > R'$, i due poligoni P, P' si possono scomporre in parti, in modo che in P si trovino tutte le parti di P' insieme ad altre; e se è $R < R'$, i due poligoni P, P' si possono scomporre in parti, in modo che in P' si trovino tutte le parti di P insieme ad altre.

Definizione 1ª — *Se due poligoni* P, P′ *si possono scomporre in parti, in modo che in* P *si trovino parti eguali a tutte quelle di* P′ *insieme ad altre, si dice che* P *è maggiore di* P′ (P > P′), *oppure* P′ *è minore di* P (P′ < P).

Il teorema precedente, in seguito a questa definizione, si può enunciare così: *Dati due poligoni* P, P′, *si deve dare uno ed un solo dei seguenti casi* P > P′, P = P′, P < P′.

2ª — *Se un poligono* A *è somma di due altri* B, C, *si dice che ciascuno di questi è la differenza fra* A *e il rimanente poligono* (C = A — B).

Corollario. — *Dati due poligoni non equivalenti, esiste sempre la loro differenza. Tutte le differenze che si possono ottenere sono equivalenti.*

In seguito a quanto ho esposto è facile dimostrare tutti i teoremi relativi alle differenze ed ai summultipli di poligoni (*G.* § 274, 276, 277, 278), fra i quali i più notevoli sono i seguenti:

Sono equivalenti i poligoni differenze di poligoni rispettivamente equivalenti.

Sono equivalenti i poligoni equisummultipli di poligoni equivalenti.

(*Continua*).

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

2ª Nota sul Problema del Malfatti, pag. 25 del *Periodico*. — Consideriamo i cerchi iscritti nei triangoli IBC, ICA, IAB; denotino I_1, I_2, I_3 i loro centri ed r_1, r_2, r_3 i rispettivi raggi; a motivo dell'eguaglianza

$$a = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) = r_1\left(\cot\frac{B}{4} + \cot\frac{C}{4}\right)$$

si deduce $r_1 = \dfrac{r}{2}\left(1 - \operatorname{tang}\dfrac{B}{4}\operatorname{tang}\dfrac{C}{4}\right)$ e similmente risultano

$$r_2 = \frac{r}{2}\left(1 - \operatorname{tang}\frac{C}{4}\operatorname{tang}\frac{A}{4}\right), \qquad r_3 = \frac{r}{2}\left(1 - \operatorname{tang}\frac{B}{4}\operatorname{tang}\frac{A}{4}\right).$$

Significando A_1, B_1, C_1 i punti di contatto delle circonferenze I_1, I_2, I_3 coi lati BC, CA, AB si hanno $BA_1 = r_1\cot\dfrac{B}{4}$, $BC_1 = r_3\cot\dfrac{B}{4}$, e perciò la distanza dei punti di contatto dei cerchi I_1, I_3 sulla bisettrice BI è data per la differenza $(r_1 - r_3)\cot\dfrac{B}{4} = \dfrac{r}{2}\left(\operatorname{tang}\dfrac{A}{4} - \operatorname{tang}\dfrac{C}{4}\right)$, così i cerchi I_1, I_3 non si toccano se gli angoli A, C siano diseguali. Dal punto A_1 tiriamo la tangente A_1C_0 al cerchio I_3, in modo che questo cada nell'interno del triangolo A_1BC_0 e proponiamoci di valutare l'angolo $\omega = BA_1C_0$ in funzione degli angoli A, B, C. Essendo $\angle A_1C_0B = \pi - (\omega + B)$ si troverà $C_1C_0 = r_3\operatorname{tang}\dfrac{(\omega + B)}{2}$ e quindi per il triangolo A_1BC_0 si avranno le ragioni eguali

$$\frac{r_3\cot\dfrac{B}{4} + r_3\operatorname{tang}\dfrac{(\omega + B)}{2}}{\operatorname{sen}\omega} = \frac{r_1\cot\dfrac{B}{4}}{\operatorname{sen}(\omega + B)} = \frac{A_1C_0}{\operatorname{sen}B}.$$

È facile ricavare dalle prime la relazione

$$r_3\operatorname{sen}\frac{\omega + B}{2}\cos\left(\frac{\omega}{2} + \frac{B}{4}\right) = \frac{r_1}{2}\cos\frac{B}{4}\operatorname{sen}\omega,$$

che si trasforma nella quadrica

$$4\,r_3\,\mathrm{tang}^2\frac{B}{4}\,.\,x^2 - 2(r_1+r_3)\,\mathrm{tang}\frac{B}{4}\left(1+\mathrm{tang}^2\frac{B}{4}\right)x + r_1\left(1-\mathrm{tang}^4\frac{B}{4}\right)=0$$

ove si faccia $x = \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{\omega}{2}$. Sostituendo poi i valori dei raggi r_1, r_3 in funzione di r e degli angoli A, B, C; ponendo per brevità $\alpha = \mathrm{tang}\frac{A}{4}$, $\beta = \mathrm{tang}\frac{B}{4}$, $\gamma = \mathrm{tang}\frac{C}{4}$ la quadrica si scrive

$$4\,\beta^2(1-\alpha\beta)x^2 - 2\,\beta(1+\beta^2)(2-\alpha\beta-\beta\gamma)x + (1-\beta\gamma)(1-\beta^4)=0.$$

Ora i numeri α, β, γ soddisfano alla condizione $\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma = 1-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma$ che equivale alle due identità

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)=2(1+\alpha\beta\gamma),\ \ 2(1-\alpha\beta)(1-\beta\gamma)=(1+\alpha)(1+\gamma)(1+\beta^2);$$

da cui ricavando il binomio $1+\beta^2$ e sostituendolo nella quadrica, questa diviene

$$2\beta^2(1+\alpha)(1+\gamma)x^2 - 2\beta(1-\beta\gamma)(2-\alpha\beta-\beta\gamma)x + (1-\beta\gamma)^2(1-\beta^2)=0$$

che determina

$$x = \frac{1-\beta\gamma}{2\beta(1+\alpha)(1+\gamma)}\left[2-\alpha\beta-\beta\gamma \pm \sqrt{(2-\alpha\beta-\beta\gamma)^2 - 2(1+\alpha)(1+\gamma)(1-\beta^2)}\right].$$

Applicando la prima delle identità surriferite, il polinomio sotto radicale si converte nell'espressione $\beta^2(\alpha+\gamma)^2 - 4\beta(\alpha+\gamma)+4-4(1-\beta)(1+\alpha\beta\gamma)$ riducentesi a $\beta^2(\alpha+\gamma+2)^2$, onde le due radici sono funzioni razionali di α, β, γ, cioè $x' = \frac{(1+\beta)(1-\beta\gamma)}{\beta(1+\alpha)(1+\gamma)}$, $x'' = \frac{1}{2\beta}(1-\beta\gamma)(1-\beta)$.

La prima soluzione dimostra che il raggio del cerchio iscritto nel triangolo BA_1C_0 ha per valore $\rho' = \dfrac{BA_1}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{\omega}{2}} = \dfrac{r}{2\beta x'}(1-\beta\gamma) = \dfrac{r}{2}\dfrac{(1+\alpha)(1+\gamma)}{1+\beta}$

e determina quello dei cerchi del MALFATTI che è iscritto nell'angolo B.

L'altra soluzione sarebbe $\rho'' = \dfrac{r}{1-\beta}$ e fornirebbe sul lato BA il segmento $BC_2 = \rho''\cot\frac{B}{2} = \dfrac{r}{2\beta}(1+\beta) > BC_1$. Abbiamo dunque provata l'elegante costruzione di STEINER. *Iscrivere i cerchi* I_1, I_2, I_3 *nei triangoli* IBC, ICA, IAB; *dai punti di lor contatto* A_1, B_1, C_1 *coi rispettivi lati* BC, CA, AB *condurre le tangenti* A_1C_0, B_1A_0, C_1B_0 *ai medesimi cerchi, in modo che ciascuno di questi giaccia dalla stessa parte degli angoli corrispondenti* B, C, A *riguardo alle dette tangenti, e le circonferenze iscritte nei triangoli* BA_1C_0, CB_1A_0, AC_1B_0 *coincidere con quelle del* MALFATTI.

Dati tre cerchi tangenti fra loro due a due descritti con i raggi ρ_1, ρ_2, ρ_3, circoscrittovi il triangolo ABC si potrà determinare analiticamente il cerchio iscritto in ABC, poichè dalle relazioni surriferite $\rho_1 = \dfrac{r}{2}\dfrac{(1+\alpha)(1+\gamma)}{1+\beta}$,

$\rho_2 = \frac{r}{2}\,\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{1+\gamma}$, $\rho_3 = \frac{r}{2}\,\frac{(1+\beta)(1+\gamma)}{1+\alpha}$ si deducono $1+\alpha = \frac{2}{r}\sqrt{\rho_1\rho_2}$, $1+\beta = \frac{2}{r}\sqrt{\rho_2\rho_3}$, $1+\gamma = \frac{2}{r}\sqrt{\rho_3\rho_1}$ che sostituiti nell'identità $(1+\alpha)(1+\beta)\times(1+\gamma) = 2(1+\alpha\beta\gamma)$ danno luogo alla quadrica

$$\left(\sqrt{\frac{1}{\rho_1}}+\sqrt{\frac{1}{\rho_2}}+\sqrt{\frac{1}{\rho_3}}\right) r^2 - 2(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}+\sqrt{\rho_3})r + 2\sqrt{\rho_1\rho_2\rho_3} = 0\,.$$

Osservazione. Si proietti ortogonalmente il triangolo ABC sopra un piano inclinato ad esso secondo un angolo qualunque α e passante per il lato BC; siano A', I' le proiezioni del vertice A e del centro I del cerchio iscritto, $A'A_0$, $I'M$ quelle di $AA_0 = h$, altezza della base BC, e di $IM = r$, si deducono $A_0A' = c\,\mathrm{sen}\,B\cos\alpha$, $AA' = c\,\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,\alpha$, $I'M = r\cos\alpha$, $II' = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$, $BA_0 = c\cos B$, $A_0C = b\cos C$, chiamando B', C', A' le rispettive proiezioni degli angoli B, C, A si troveranno

$$\mathrm{tg}\,B' = \frac{A_0A'}{BA_0} = \mathrm{tg}\,B\cos\alpha\,,\quad \mathrm{tg}\,C' = \mathrm{tg}\,C\cos\alpha\,,\quad \mathrm{tg}\,A' = \frac{(\mathrm{tg}\,B+\mathrm{tg}\,C)\cos\alpha}{\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C\cos^2\alpha - 1}\,,$$

$$(1)\qquad A'B = \frac{BA_0}{\cos B'} = c\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 B\,\mathrm{sen}^2\alpha}\,,\qquad CA' = b\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 C\,\mathrm{sen}^2\alpha}\,;$$

le inclinazioni dei lati AB, AC, sul piano $A'BC$ saranno $\mathrm{tang}\,A'BA = \frac{\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 B\,\mathrm{sen}^2\alpha}}$, $\mathrm{tang}\,A'CA = \frac{\mathrm{sen}\,C\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 C\,\mathrm{sen}^2\alpha}}$. Se in luogo di b, c sostituiamo $\frac{r}{\mathrm{sen}\frac{C}{2}}$, $\frac{r}{\mathrm{sen}\frac{B}{2}}$ ed in luogo di B, C le loro metà, le formule (1) diverranno $BI' = r\sqrt{\cos^2\alpha + \cot^2\frac{B}{2}}$, $CI' = r\sqrt{\cos^2\alpha+\cot^2\frac{C}{2}}$ e si avranno pure

$$A'I' = \frac{r}{\mathrm{sen}\frac{A}{2}}\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\alpha\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)},$$

$$\mathrm{tang}\,CBI' = \mathrm{tang}\frac{B}{2}\cos\alpha \qquad \text{e} \qquad \mathrm{tang}\,BCI' = \mathrm{tang}\frac{C}{2}\cos\alpha\,.$$

I cerchi del MALFATTI descritti nel triangolo ABC si proiettano secondo ellissi aventi gli assi maggiori $2\rho_1$, $2\rho_2$, $2\rho_3$ paralleli a BC ed i minori eguali a $2\rho_1\cos\alpha$, $2\rho_2\cos\alpha$, $2\rho_3\cos\alpha$.

(*Continua*).

(G. BELLACCHI).

Due teoremi di geometria solida che hanno qualche analogia coi teoremi di Pappo e di Pitagora. — 1° *La somma di tre prismi costruiti su tre faccie di un tetraedro e da parti opposte rispetto a questo è equivalente al prisma, che ha per base la faccia restante del tetraedro e per costola laterale il segmento eguale a parallelo a quello, che unisce il vertice comune alle dette tre faccie col punto in cui s'incontrano i piani delle basi dei tre prismi, che sono opposte a queste.*

Sulle tre faccie AVB, BVC, CVA del tetraedro $VABC$, e da parti opposte rispetto a questo, si costruiscano tre prismi arbitrari P_{ab}, P_{bc}, P_{ca}; quindi si unisca il vertice V col punto d' incontro O dei piani di quelle basi dei tre prismi, che non sono faccie del tetraedro. Si vuol dimostrare che la somma dei tre prismi P_{ab}, P_{bc}, P_{ca} è equivalente al prisma che ha per base il triangolo ABC e per costola laterale un segmento eguale e parallelo a VO.

Sia BAC, DEF quest'ultimo prisma e sieno M ed N i punti nei quali il segmento OV prolungato sega i triangoli ABC, DEF. Si congiungano poscia il punto M coi punti B, C, A ed il punto N coi punti E, F, D.

Il prisma NEF, MBC è equivalente al prisma che ha per base VBC e per costola laterale VO, avendo con questo la stessa sezione normale e costole laterali eguali. Ma il secondo di questi prismi è equivalente a P_{bc} avendo comuni con questo la base VBC e l'altezza; dunque il prisma NEF, MBC è equivalente a P_{bc}.

E poichè in modo analogo si dimostra che i due prismi NED, MBA ed NDF, MAC sono rispettivamente equivalenti a P_{ab}, P_{ac}, si conclude che la somma di P_{ab}, P_{bc}, P_{ca} è equivalente al prisma ABC, DEF.

2° Il teorema di PITAGORA può essere considerato un caso particolare di questo:

« Se sui lati di un triangolo rettangolo, presi come basi, si costruiscono tre parallelogrammi colle altezze proporzionali alle basi, quello costruito sull' ipotenusa è equivalente alla somma degli altri due ».

Posto sotto questa forma, il teorema di PITAGORA ne ammette uno analogo nello spazio. Chiamato infatti *rettangolo* un tetraedro, che abbia un angolo triedro trirettangolo, e ricordato che se F_1, F_2, F_3 sieno le aree delle faccie adiacenti a questo ed F quella della faccia opposta, si ha pel teorema di EULERO la relazione *aritmetica*:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F^2;$$

ponendo

$$\frac{h_1}{F_1} = \frac{h_2}{F_2} = \frac{h_3}{F_3} = \frac{h}{F},$$

si avrà anche:

$$F_1 h_1 + F_2 h_2 + F_3 h_3 = Fh$$

relazione interpretabile *geometricamente* nel modo seguente:

Costruiti sulle quattro faccie di un tetraedro rettangolo quattro prismi (o 4 *tetraedri*) *colle altezze proporzionali alle basi, quello costruito sulla faccia opposta all'angolo trirettangolo è equivalente alla somma degli altri tre.*

La dimostrazione puramente geometrica di questo teorema si può dare facilmente mediante i lemmi seguenti:

LEMMA I. — *Due prismi* (o *piramidi*), *aventi le basi inversamente proporzionali alle altezze, sono equivalenti.*

Se P, P' sono due prismi colle loro basi B, B' inversamente proporzionali alle loro altezze h, h', dico $P \equiv P'$.

Immaginato infatti un altro prisma P'' di base B e di altezza h', si ha come è noto:

$$P : P'' :: h : h' :: B' : B$$

e

$$P' : P'' :: B' : B,$$

dunque

$$P : P'' :: P' : P''$$

e però

$$P \equiv P'.$$

Lemma II. — *Se due prismi (o piramidi) hanno le basi proporzionali alle altezze, uno di essi sta all' altro, come la base del primo sta ad una figura terza continuamente proporzionale dopo essa base e la base dell' altro prisma (o piramide).*

Siano P, P' due prismi colle loro basi B, B' direttamente proporzionali alle loro altezze h, h'; e sia B'' un poligono terzo continuamente proporzionale dopo B, B', sicchè abbiano luogo le due proporzioni

(1) . . . . $B : B' :: h : h'$
(2) . . . . $B : B' :: B' : B''$.

Dico che

(3) . . . . $P : P' :: B : B''$.

Indicato infatti con P'' un prisma di base B'' e di altezza h, esso (Lemma I) e equivalente a P', quindi

$$P : P' :: P : P'' :: B : B''$$

il che dimostra la proporzione (3).

Lemma III. — *In un tetraedro rettangolo, una qualunque delle faccie adiacenti all'angolo trirettangolo è media proporzionale tra la faccia opposta a quest'angolo e la sua proiezione su questa.*

Dimostrazione del secondo teorema.

Se $VABC$ sia il tetraedro in discorso coll'angolo di vertice V trirettangolo, e se VO sia la perpendicolare calata da V sulla faccia ABC, indicato con D il punto nel quale CO sega AB, è noto che non solo CD, ma anche la retta VD è perpendicolare alla AB, sicchè CD, VD, OD sono le altezze dei triangoli ACB, AVB, AOB, rispetto al lato comune AB. E poichè quelle altezze sono in proporzione continua, lo stesso avverrà di questi ultimi triangoli.

Siano ora P_{ab}, P_{bc}, P_{ca}, P i prismi costruiti sulle quattro faccie VAB, VBC, VCA, ABC del nostro tetraedro rettangolo (ipotesi e costruzioni del lemma precedente) colle altezze proporzionali alle basi.

In virtù dei lemmi II e III si avranno le proporzioni:

$$P_{ab} : P :: \text{triangolo } AOB : \text{triangolo } ABC$$
$$P_{bc} : P :: \text{triangolo } BOC : \text{triangolo } ABC$$
$$P_{ca} : P :: \text{triangolo } AOC : \text{triangolo } ABC$$

quindi:

$$P_{ab} + P_{bc} + P_{ca} : P :: \text{trian. } AOB + \text{trian. } BOC + \text{trian. } COA : \text{trian. } ABC;$$

e poichè la 3ª grandezza di questa proporzione è equivalente alla 4ª, sarà la 1ª equivalente alla 2ª, cioè:

$$P_{ab} + P_{bc} + P_{ca} \equiv P$$

Il che dimostra il teorema.

Osservazione. Il secondo di questi teoremi, come si può con calcoli facili verificare, è un caso particolare del primo.

A. Porchiesi.

Dimostrazione di un teorema sulle frazioni continue. — Applicando i teoremi relativi ai limiti nelle operazioni, si dimostra facilmente che

il valore di una frazione continua, anche illimitata, non cambia, se a tutta quella parte della sua espressione che ha principio da un denominatore parziale qualunque si sostituisce il valore della parte medesima (*).

Considerando l'irrazionale come numero di separazione di due serie convergenti e volendo fare a meno della teoria dei limiti, si può procedere in questo modo.

Si osservi innanzi tutto che *se* a, b, c, d, m, n *sono numeri positivi ed è* $m > n$, *la frazione* $\frac{am+b}{cm+d}$ *sarà uguale, maggiore, o minore di* $\frac{an+b}{cn+d}$, *secondo che* $\frac{a}{c}$ *è uguale, maggiore, o minore di* $\frac{b}{d}$.

Ciò si prova subito, notando che

$$\frac{am+b}{cm+d} - \frac{an+b}{cn+d} = \frac{(m-n)(ad-bc)}{(cm+d)(cn+d)} = \frac{(m-n)\,cd}{(cm+d)(cn+d)} \left\{ \frac{a}{c} - \frac{b}{d} \right\}.$$

Si consideri poi la frazione continua illimitata

$$(\alpha) \qquad a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cdots}}}}}$$

nella quale tutti i denominatori parziali, a cominciare dal secondo, siano maggiori di uno stesso numero positivo, e sia A il valore di essa (**), B quello della frazione pure illimitata

$$a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cdots}$$

e si indichi con $\frac{P_m}{Q_m}$ la ridotta *emmesima* (m qualunque) della (α).

Avremo

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{B}}} = \frac{P_n \cdot B + P_{n-1}}{Q_n \cdot B + Q_{n-1}}.$$

(*) V. Arzelà, *Complementi di algebra elementare*, n. 28.
(**) Per la dimostrazione della esistenza di questo valore si vegga Arzelà, libro citato.

Se supponiamo n pari, allora

$$\frac{P_n}{Q_n} > \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}};$$

e però, essendo $B > a_{n+1}$, avremo

$$\frac{P_n . B + P_{n-1}}{Q_n . B + Q_{n-1}} > \frac{P_n . a_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n . a_{n+1} + Q_{n-1}}, \text{ ossia } \frac{P_n . B + P_{n-1}}{Q_n . B + Q_{n-1}} > \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

Essendo poi $B < a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}$, avremo

$$\frac{P_n . B + P_{n-1}}{Q_n . B + Q_{n-1}} < \frac{P_n \left(a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}\right) + P_{n-1}}{Q_n \left(a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}\right) + Q_{n-1}}, \text{ ossia } \frac{P_n . B + P_{n-1}}{Q_n . B + Q_{n-1}} < \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}},$$

e così di seguito.

L'espressione $\frac{P_n . B + P_{n-1}}{Q_n . B + Q_{n-1}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{B}}}$ è dunque maggiore di tutte le ridotte della (α) di ordine impari $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}, \frac{P_{n+3}}{Q_{n+3}}, \ldots$ e minore di tutte quelle di ordine pari $\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}, \frac{P_{n+4}}{Q_{n+4}}, \ldots$ e però essa ha valore uguale a quello della (α).

La dimostrazione si farebbe allo stesso modo, se n fosse dispari.

Teramo, febbraio 1895.

Dott. LUIGI BOSI.

La riduzione all'assurdo nei nostri libri di testo. — I. Nel mentre è opinione comune che la *riduzione all'assurdo* deve essere ordinariamente evitata (*), trovo che nei libri di testo, anche nei più pregevoli, che circolano nelle nostre scuole, essa è applicata alle dimostrazioni di non poche proprietà (**). A me sembra che per alcune di queste si può seguire una dimostrazione diretta abbastanza semplice; o che, per lo meno, pur impiegando il metodo indiretto, si può procedere in guisa che la riduzione all'assurdo apparisca, in certo modo, il meno possibile. Il lettore giudicherà dalle osservazioni seguenti relative ad alcune di quelle proprietà per le quali la riduzione all'assurdo sembrerebbe non potersi evitare. Se egli pensa che il metodo indiretto costringe spesso l'insegnante a fare dei disegni che ripugnano, e che, adoperandolo soverchiamente,

---

(*) V. per es. *Elem. di geom.* di R. DE PAOLIS (Loescher, 1884) pag. 4, e *Elem. di geom.* di A. SANNIA e E. D'OVIDIO (6ª ediz., Pellerano 1886) pag. 3.

(**) Si trova p. es. la riduzione all'assurdo in DE PAOLIS o. c. §§ 41, 42, 43, 45, 46, 47, 67, 68, 69, 70, 77, 100, 105, 107, 135,....; in SANNIA e D'OVIDIO o. c. §§ 17 (Cor. 1º), 32, 33, 34, 46, 49, 51,....; in FAIFOFER (*Elem. di geom.* ad uso dei Licei - Tip. Emil. 1894), §§ 72, 103, 109, 111, 116, 117, 121, 127, 129, 130, 132, 140, 142, 147, 164, 176, 177,....

In SANNIA e D'OVIDIO figura un minor numero di dimostrazioni indirette, perchè viene esposta fin dal principio la *legge delle inverse*.

può facilmente accadere che gli alunni finiscano anch'essi coll'abusarne, si persuaderà che le mie considerazioni non sono inutili per l'insegnamento.

2. La riduzione all'assurdo figura specialmente nei primi capitoli della geometria elementare, allorchè vi si stabiliscono le proprietà relative alla perpendicolarità e al parallelismo. Così, per cominciare dalle più semplici, in geometria piana, dopo aver mostrato che per un punto non si può condurre che una perpendicolare ad una retta, e dopo aver ammesso il postulato della parallela, si deduce con la riduzione all'assurdo (*):

a) *due rette perpendicolari ad una stessa retta, non s'incontrano*;

b) *se due rette son parallele, ogni retta che ne incontra una incontra l'altra*;

c) *due rette parallele ad una terza sono parallele tra loro.*

Dimostrando queste proprietà nel modo seguente, la riduzione all'assurdo o non c'è più, o apparisce meno.

a) « Le due rette AB, CD sieno perp. alla EF. Poichè per ogni punto M « della AB non si può condurre che la AB perp. alla EF, l'altra retta CD « non può passare per M. Dunque la CD non può passare per nessun punto « della AB ».

Oppure:

« Poichè per ogni punto M non si può condurre che una perp. alla EF, « le due rette AB, CD non possono passare *ambedue* pel punto M. Dunque nes- « sun punto può esser comune alle due rette AB e CD ».

b) « Le due rette AB, CD sieno parallele e la EF incontri la AB nel « punto H. Poichè pel punto H non si può condurre che la AB parallela alla « CD, ogni altra retta passante per H, e quindi anche la EF, incontra la « CD ».

c) « Le due rette AB, CD sieno parallele alla terza EF. Poichè per ogni « punto M della AB non si può condurre che la AB parallela alla EF, la CD « non può passare per M. Dunque la CD non può passare per nessun punto « della AB ».

Oppure:

« Poichè per ogni punto M non si può condurre che una parallela alla « EF, le due rette AB, CD non possono passare *ambedue* pel punto M. Dunque « nessun punto può essere comune alle due rette AB, CD ».

Le proprietà corrispondenti della geometria solida: *due piani perp. ad una stessa retta son paralleli; se due piani son paralleli, ogni piano che seca l'uno seca l'altro; due piani paralleli ad un terzo sono paralleli tra loro*, possono anch'esse esser dimostrate in modo analogo al precedente.

3. La teoria delle parallele, qual'è sviluppata nei libri di testo d'oggigiorno si riassume nelle due proposizioni:

I. *Se due rette fanno con una terza angoli corrispondenti uguali esse son parallele*;

(*) V. De Paolis o. c. § 45 — Sannia e D'Ovidio o. c. p. 30, 63, 64 — Faifofer o. c. §§ 111, 221, 222.

II. *Se due rette son parallele, esse fanno con una terza, che le incontra, angoli corrispondenti uguali;*
e a tutte e due è applicata la riduzione all'assurdo.

La dimostrazione della I. si basa o sul postulato della retta (*) o sulla proprietà dell'angolo esterno di un triangolo (**). Seguendo il secondo metodo, si può procedere in modo che la riduzione all'assurdo non apparisca. Basta perciò osservare che per ogni punto fuori di una retta non si può condurre più d'una retta che con una direzione assegnata della retta data formi angolo uguale ad uno dato; e quindi, con procedimento analogo al precedente (2, α), mostrare che due rette, che con una terza fanno angoli corrispondenti uguali, non possono incontrarsi.

La dimostrazione della II. dipende immediatamente dalla I. e dal postulato della parallela. Si potrebbe scansare la dimostrazione indiretta, dicendo p. es. come segue:

« Sieno AB, CD due parallele e la EF le incontri in H, K. Per H si conduca la MN, così che le due MN, CD formino con EF angoli corrispondenti uguali. Allora MN è parallela a CD, e perciò deve coincidere con AB. Epperò le due rette AB, CD formano con EF angoli corrispondenti uguali » (***).

4. Altre proprietà, in cui la riduzione all' assurdo viene spesso applicata, sono le seguenti di geometria solida: per un punto qualunque non si può condurre che un piano (una retta) perpendicolare ad una retta data (piano dato). Per dimostrare queste proprietà in modo diretto, gioverà, tenendo presente la definizione di perpendicolarità d'una retta e di un piano, osservare che se una retta non è perpendicolare ad *una* retta di un piano, essa non è perpendicolare al piano.

Il teorema: *le perpendicolari ad una retta in un medesimo punto giacciono in un piano,* si può dimostrare, scansando la figura mal fatta, nel modo seguente:

« Sieno BC, BD, BE tre perpendicolari alla AB nello stesso punto B. Poichè la AB è perpendicolare a BC, BD, essa è perpendicolare a tutte le rette del piano CBD, e perciò anche alla comune intersezione dei due piani ABE, CBD. Ma nel piano ABE, per il punto B, non si può condurre che la BE perpendicolare alla AB; perciò la BE dev'essere l'intersezione dei piani ABE, CBD e giace quindi nel piano CBD ».

5. Tralascio di passare in rassegna altre proprietà geometriche per fermarmi alle due proprietà delle classi *convergenti* di grandezze, di non ammettere due limiti diversi e di non avere contemporaneamente la maggiore un elemento minimo e la minore un elemento massimo, proprietà anche queste che si trovano per solito dimostrate indirettamente. (****).

(*) V. De Paolis o. c. § 41 — Sannia e D'Ovidio o. c. § 49.
(**) V. Faifofer o. c. § 214.
(***) V. Amiot: *Geom. elem.* Le Monnier, 1895, p. 18.
(****) V. De Paolis, o. c., § 385 — Sannia e D'Ovidio, o. c., § 212 — Faifofer, o. c., § 444-445 — Testi, *Corso di mat.*, vol. II, *Algebra* (Giusti, 1892), § 223 — Visalli e Mandes, *Algebra* (Giusti, 1898), § 93.

La prima di esse si potrebbe dimostrare così:

« Sieno M, N due classi convergenti, e λ un loro limite; sia $\lambda' > \lambda$ e si « ponga $\lambda' = \lambda + \delta$. Poichè le due classi M, N sono convergenti, esistono due « loro elementi m_1, n_1 tali che $m_1 - n_1 < \delta$. Allora $n_1 + \delta > m_1$; ma $\lambda > n_1$, « perciò $\lambda + \delta > n_1 + \delta$ e quindi $\lambda' > m_1$; tanto basta perchè λ' non sia « compresa fra le due classi M, N ».

Dimostrazione analoga se fosse $\lambda' < \lambda$.

La seconda può essere dimostrata come segue:

« Sieno M, N due classi convergenti, e la maggiore M abbia un elemento « minimo m_x; dico che preso un elemento qualunque n della classe N, se ne « può trovare in essa uno maggiore. Infatti, si ponga $m_x - n = \delta$, e sieno « m_1, n_1 due elementi delle classi M, N tali che $m_1 - n_1 < \delta$; allora sarà anche « $m_x - n_1 < \delta$, epperò dovrà essere $n_1 > n$ ».

Dimostrazione analoga se la classe minore avesse un elemento massimo.

6. Benchè più rari, gli esempi di dimostrazioni indirette non mancano neppure in aritmetica. Così il teorema: *ogni numero ha un divisore primo*, si trova ordinariamente dimostrato coll'assurdo (*). Si può evitare il metodo indiretto nel modo che segue:

« Se il numero dato non è primo, esso è divisibile per qualche numero « diverso da sè stesso; questo divisore o è primo, o no. Se non è primo « avrà un divisore diverso da sè stesso . . . .; e siccome la serie dei divisori è « decrescente, essa deve finire o prima o poi con un numero primo ».

Non differente da questo è il metodo di dimostrazione che più tardi si segue per stabilire che un numero non primo si può scomporre in fattori primi (**).

Qualche volta si trovano dimostrati indirettamente i teoremi relativi al *M. C. D* e al *M. C. M* di due sistemi di numeri; però, come ognuno sa, si possono fare le dimostrazioni dirette provando che i due sistemi di numeri hanno gli stessi divisori o gli stessi multipli comuni; e il secondo metodo è da preferirsi al primo.

Una proprietà, fondamentale nell'aritmetica dei numeri primi, è (***): *se un numero primo non divide nessuno dei fattori di un prodotto, esso non divide neanche il prodotto*, di cui si può fare la seguente dimostrazione diretta:

« Il numero primo p non divida nessuno dei due numeri a e b. Si divida « il maggiore dei due numeri a e p pel minore e sia c il resto; si divida p « per c e sia d il resto; poi p per d e sia e il resto . . . . . Poichè la serie dei « resti c, d, e . . . . . è decrescente e p è primo, si dovrà arrivare al resto 1. Sup« poniamo, ad esempio, che ciò avvenga quando si divide p per e. Per un noto « teorema della divisione, possiamo poi dire che dividendo il maggiore dei due « numeri ab, pb pel minore, si ha per resto cb; che dividendo pb per cb si ha « per resto db . . . , e da ultimo che dividendo pb per eb, si ha per resto b.

(*) V. Faifofer, *Elem. d'aritm.* (Tip. Emiliana, 1893), § 161 — Testi, o. c., vol. I (Giusti, 1891), § 208.

(**) V. Faifofer, *Aritm.* (1893) § 173 — Testi, o. c., vol. I, § 223.

(***) V. Faifofer, *Aritm.* (1893), § 167-168. Il lemma del § 167 è dimostrato con la riduzione all'assurdo.

« Ora, poichè p divide il dividendo pb ma non il resto b, esso non divide il « divisore eb, e non dividendo eb non dividerà db, . . . , e infine il numero p « non dividerà neppure ab ».

È poi facile estendere il teorema al prodotto di quanti si vogliano fattori.

Fermo, marzo 1895. CORRADO CIAMBERLINI.

Sopra una disposizione particolare dei triangoli simili. — 1. Sieno ABC, $A'B'C'$ (Tav. II, fig. 1ª) due triangoli simili i cui lati omologhi s'incontrano rispettivamente nei punti I_a, I_b, I_c d'una retta i. Chiameremo α e β i cerchi passanti per I_c, A', A, I_b e per I_a, I_c, B, B'. Evidentemente i punti C e C' si troveranno nel medesimo cerchio γ passante per I_a e I_b. È chiaro che qualunque altro triangolo simile ai due dati coi lati omologhi passanti rispettivamente pei medesimi punti I_a, I_b, I_c, ha i vertici omologhi situati nei tre cerchi α, β e γ rispettivamente.

Se diciamo punti corrispondenti i vertici omologhi di due di questi triangoli, ogni punto d'un cerchio troverà il suo corrispondente in ciascuno degli altri due: per es. ad ogni punto B'' di β corrisponde un punto A'' di α ed un punto C'' di γ. Dato B'', per trovare i suoi corrispondenti A'' e C'', basta condurre la $B''I_c$ che incontrerà α in A'', e la $B''I_a$ che incontrerà il cerchio γ in C'': la $A''C''$ dovrà passare per I_b in virtù della costruzione; così α è il luogo dei vertici A, A', A'' . . . . , β dei vertici B, B' B'' . . . . , γ dei vertici C, C', C'' . . . .

2. Supponiamo ora che B_1 coincida con I_c; la B_1I_c sarà allora tangente a β in I_c e incontrerà α in A_1 corrispondente a B_1; la B_1I_a incontrerà γ nel corrispondente punto C_1 coincidente con I_b; dunque A_1C_1 riescirà tangente a γ in I_b. Analogamente, se B_1'' cade in I_a, il corrispondente C_1'' è l'intersezione con γ della tangente a β in I_a, la $B_1''I_c$ interseca α nel corrispondente punto A_1'' coincidente con I_b; $C_1''I_b$ è dunque tangente ad α in I_b. Così pure se A_1' coincide con I_c, il corrispondente B_1' in β è l'incontro con β della tangente ad α in I_c; la $A_1'I_b$ incontra γ nel corrispondente punto C_1' coincidente con I_a; la $B_1'C_1'$ è dunque tangente a γ in I_a.

3. I cerchi α, β e γ passano per uno stesso punto K.

Infatti, supposto che non avessero un sol punto comune K, sia K comune soltanto ad α e β e consideriamolo come appartenente a β. Il suo corrispondente in α è il punto d'incontro di α con KI_c che è ancora K. In K dunque deve coincidere anche il suo corrispondente in γ; ossia KI_b taglia il cerchio γ in un punto che deve coincidere con K. Questo punto adunque rappresenta un triangolo infinitamente piccolo simile ai triangoli ABC, $A'B'C'$, ... , i cui lati omologhi ai lati di questi passano rispettivamente per I_a, I_b e I_c. Ne viene che le direzioni di questi lati sono le KI_a, KI_b, KI_c che indicheremo con a, b e c, e che i tre cerchi formano intorno al loro punto comune K angoli rispettivamente uguali a quelli dei triangoli simili suddetti, dei cui vertici ne sono il luogo. Si ha cioè (BALTZER: *Plan.* § 4, 7)

$$\text{ang}(\alpha, \beta) = \text{ang}(a, b) \quad \text{ang}(\beta, \gamma) = \text{ang}(b, c) \quad \text{ang}(\gamma, \alpha) = \text{ang}(c, a).$$

4 I cerchi circoscritti a tutti quei triangoli simili passano tutti per K.

Infatti consideriamo il cerchio β' circoscritto al triangolo $A\,B\,C$ e sostituiamolo a β; il triangolo $A'_1 B'_1 C'_1$ verrà allora sostituito dal triangolo ABC; il cerchio γ dal cerchio γ' passante per K e tangente in C a BC; la retta i dal lato AC incontrato da γ' in I_b': il lato AC si confonde con una retta i' analoga alla i, ed i cui punti I_c', I_a' (coincidenti in A e C) e I_b' sono analoghi a I_c, I_a, I_b della i. Finalmente il cerchio α verrà sostituito dal cerchio α' passante per A, K e I_b'. Ciò posto, il cerchio β' si trova, rispetto ai cerchi α', γ' ed alla retta i', nelle identiche condizioni di β rispetto ai cerchi α, γ ed alla retta i; e per conseguenza deve passare pel punto comune ad α' e γ' ossia per K. Si ha pure:

$$\text{ang}\,(\alpha', \beta') = \text{ang}\,(a', b') \quad \text{ang}\,(\beta', \gamma') = \text{ang}\,(b', c') \quad \text{ang}\,(\gamma', \alpha') = \text{ang}\,(a', c'),$$

angoli rispettivamente eguali a quelli dei triangoli simili noti.

Le congiungenti i vertici A_1', B_1', C_1' del triangolo $A'_1 B'_1 C'_1$ ai vertici omologhi d'uno qualunque di quei triangoli simili per es. ABC, s'incontrano in un punto di β come risulta dalla semplice ispezione della figura: lo chiameremo centro di similitudine rispetto al triangolo $A_1' B_1' C_1'$. Il cerchio β è dunque il luogo dei centri di similitudine rispetto il triangolo $A_1' B_1' C_1'$ in esso inscritto. Analogamente ciascuno degli altri due cerchi α e γ è il luogo dei centri di similitudine rispetto ai triangoli $A_1 B_1 C_1$, $A_1'' B_1'' C_1''$ in essi rispettivamente inscritti.

Dalle considerazioni analoghe sui cerchi α', β' e γ', risulta assai facilmente che un cerchio circoscritto ad uno qualunque di quei triangoli per es. ad ABC, è il luogo dei centri S di similitudine rispetto ad esso.

5. Inversamente: Tutti i cerchi passanti pel punto comune K di tre cerchi α, β e γ di cui le altre intersezioni I_a, I_b, I_c sieno allineate, incontrano questi cerchi in punti $A, A', A'' \ldots$; $B, B', B'' \ldots$; $C, C', C'' \ldots$, che sono rispettivamente i vertici di tanti triangoli simili, i cui lati omologhi passano rispettivamente per le intersezioni allineate I_a, I_b, I_c, di quei tre cerchi. Le congiungenti i vertici d'uno qualunque di quei triangoli $A\,B\,C$ ad un punto S del cerchio ad esso circoscritto, incontrano i tre cerchi dati rispettivamente nei punti A', B', C', vertici d'un triangolo simile ad ABC coi lati omologhi passanti per I_a, I_b e I_c.

E. Cominotto.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 142*, 144, 222*, 226*, 227*, 230*, 234**, 235*, 236*, 238, 239** e 240*

142*. *Nel piano d'un cerchio di diametro* AB *sia dato un punto* M, *e coi diametri* MA, MB *si descrivano due cerchi* K *ed* L, *e concentricamente al cerchio* AB *si descriva un altro cerchio* H. *Dimostrare che i cerchi* K *ed* L *tagliano il cerchio* H *in quattro punti, vertici d'un quadrangolo completo di cui un punto diagonale è* M *e un altro cade nella retta* AB.

(S. Catania).

Dimostrazione del Sig. *G. Gallucci*, studente a Napoli.

Siano F e D, C e G (Tav II, fig. 2ª) i punti in cui il cerchio H taglia K ed L, dico che le due terne M, C, D; M, F, G sono formate da punti in linea retta.

Infatti condotta MC e supposto che essa incontri H in D' e tirata pure la CB, che taglia H in E, l'$\angle MCB$ è retto, sarà quindi retto anche l'$\angle$ adiacente ECD', cosicchè $D'E$ è un diametro del cerchio H. I $\triangle AD'H$, BEH avendo allora eguali due lati e l'angolo compreso, danno $\angle HAD' = HBE$ e AD' parallela a BE, dopo ciò si può concludere che $\angle AD'C = AD'M = BCD' = 90^0$. Così il punto D' oltrechè nel cerchio H si trova pure su K e perciò coincide con D.

Risulta dopo ciò che M è un punto diagonale del quadrangolo $CDGF$. Se poi Q è il punto in cui si tagliano di nuovo i due cerchi K ed L; MQ, DF e CG saranno i tre assi radicali dei cerchi K, L, H, considerati due a due, e così CG, DF si taglieranno in un punto della MQ, secondo punto diagonale del quadrangolo $CDGF$. Il terzo punto diagonale è il polo della MQ rispetto al cerchio H, che si trova sul diametro di H perpendicolare ad MQ, ossia su AB. E con ciò il teorema è completamente dimostrato.

144. *Eliminare* x, y, z *dalle quattro equazioni*

$$\begin{aligned} yz(1-2x) &= \alpha^2(1-x)^2, \\ zx(1-2y) &= \beta^2(1-y)^2, \\ xy(1-2z) &= \gamma^2(1-z)^2, \\ x+y+z &= 1. \end{aligned}$$

(D. Besso).

Soluzione del Sig. Prof. *E. Fauquembergue* a Parthenay (Francia).

Per ottenere delle equazioni simmetriche in x, y, z formeremo le quantità $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$, $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, che indicheremo rispettivamente con A, B, C; designeremo ancora con P la somma $xy+yz+zx$ e con Q il prodotto xyz (*).

Le prime tre equazioni danno

$$\alpha^2 = yz\left[1-\frac{x^2}{(1-x)^2}\right], \quad \beta^2 = zx\left[1-\frac{y^2}{(1-y)^2}\right],$$
$$\gamma^2 = xy\left[1-\frac{z^2}{(1-z)^2}\right].$$

(*) Nel corso dei calcoli s'incontrano le espressioni Σx^2, Σx^3, Σx^4. Si ottiene rapidamente il loro valore in funzione di P e Q, considerandole come somme di potenze simili dell'equazione $V^3 - V^2 + PV - Q = 0$.

(E. F.).

Se ne deduce, tenendo conto della quarta equazione,

$$A = P - Q\left[\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{y}{(1-y)^2} + \frac{z}{(1-z)^2}\right],$$

o

$$A = P - Q.\frac{PQ - 3P + 5Q + 1}{(P-Q)^2} = \frac{P^3 - 2P^2Q + 3PQ - 5Q^2 - Q}{(P-Q)^2}. \quad [1]$$

Dalle relazioni

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{Q}\left[x + \frac{x^3}{1-2x}\right], \quad \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{Q}\left[y + \frac{y^3}{1-2y}\right],$$
$$\frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{Q}\left[z + \frac{z^3}{1-2z}\right],$$

si ricava

$$B = \frac{1}{Q}\left[1 + \frac{x^3}{1-2x} + \frac{y^3}{1-2y} + \frac{z^3}{1-2z}\right]$$

o

$$B = \frac{4P^2 - 8PQ - P + Q}{Q(4P - 8Q - 1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [2]$$

Le equazioni proposte danno ancora

$$C = \frac{x^2y^2z^2(1-2x)(1-2y)(1-2z)}{(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2} = \frac{Q^2(4P - 8Q - 1)}{(P-Q)^2}. \quad [3]$$

La questione si riduce ora ad eliminare P e Q fra le equazioni [1], [2] e [3]. A questo scopo poniamo

$$P = QR \quad \text{e} \quad 4P - 8Q - 1 = S, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [4]$$

da cui

$$P = \frac{R(S+1)}{4(R-2)}, \quad Q = \frac{S+1}{4(R-2)};$$

le equazioni [3] e [2] divengono immediatamente

$$S = C(R-1)^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [5]$$
$$RS + 1 = BS, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [6]$$

da cui, eliminando R,

$$S^3 - (B-1)^2CS^2 + 2(B-1)CS - C = 0. \quad . \; . \; . \; . \quad [7]$$

Per abbassare il grado dell' equazione [1] ed ottenere un'altra equazione in S, mettiamola dapprima sotto la forma

$$P^2(4P - 8Q) + 3Q(4P - 8Q) + 4Q^2 - 4Q = 4A(P-Q)^2,$$

o, tenendo conto di [4], e dividendo i due membri per Q,

$$QR^2(S+1) + 3(S+1) + 4Q - 4 = 4AQ(R-1)^2,$$
$$R^2(S+1)^2 + 12(RS+1) - 4R - 20S = 4A(S+1)(R-1)^2.$$

Dopo aver sviluppato e rimpiazzato RS con $BS - 1$, $(R-1)^2$ con $\frac{S}{C}$ e R con $B - \frac{1}{S}$, si trova l'equazione

$$DS^3 + ES^2 - 6BCS + 4C = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [8]$$

nella quale

$$D = B^2 C - 4A, \quad \text{e} \quad E = 2(B^2 + 5B - 10) C - 4A + 1.$$

Siamo così condotti ad un problema ben noto ossia: eliminare S fra le due equazioni di terzo grado [7] e [8]. L'eliminazione dei due ultimi termini e quella dei primi due si fanno molto semplicemente e conducono a queste equazioni di secondo grado;

$$(D+4)S^2 + [E - 4C(B-1)^2]S + 2(B-4)C = 0, \quad . \quad . \quad [9]$$

$$[(B-1)^2 CD + E]S^2 - 2[3B + (B-1)D]S + (D+4)C = 0. \quad . \quad . \quad [10]$$

Ora, si sa che la risultante delle due equazioni

$$aS^2 + bS + c = 0,$$
$$a'S^2 + b'S + c' = 0,$$

è

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [11]$$

Possiamo dunque considerare il problema come risoluto.

Osservazione. Nel sistema d'equazioni proposto dal Prof. Besso, α, β e γ sono le bisettrici interne degli angoli d'un triangolo avente per lati x, y, z ed il cui perimetro $2p$ è uguale a 1. Dunque il risultato dell'eliminazione di x, y, z esprime la relazione che esiste fra le lunghezze delle bisettrici degli angoli d'un triangolo il cui perimetro è costante.

222*. *Determinare un triangolo sferico rettangolo data la somma* a *(o la differenza) dei cateti e l'altezza* h *relativa all'ipotenusa* (*).

(G. Bellacchi).

Soluzione del Sig. *C. Montanari*, studente a Pisa.

Indicando con x, y, z rispettivamente i lati dell'angolo retto A e l'ipotenusa BC del triangolo sferico che si considera, si hanno le equazioni

$$x \pm y = a, \quad \cos z = \cos x \cos y, \quad \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} z \,.\, \operatorname{sen} h.$$

Dalla prima si ricava

$$\cos(x \pm y) = \cos a = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,$$

e valendosi delle altre due

$$[1] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \cos a = \cos z \mp \operatorname{sen} z \,.\, \operatorname{sen} h.$$

Per avere z mediante una formola calcolabile per logaritmi, pongasi $\operatorname{sen} h = \tan \varphi$.

Segue $\cos a = \dfrac{\cos z \cos \varphi \mp \operatorname{sen} z \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} = \dfrac{\cos(z \pm \varphi)}{\cos \varphi}$, donde

$$[2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \cos(z \pm \varphi) = \cos a \cos \varphi.$$

Trovata z, se a esprime la somma dei cateti, si calcolerà $x - y$ mediante la formola

$$[3] \quad . \quad . \quad . \quad \cos(x - y) = \cos z + \operatorname{sen} z \,.\, \operatorname{sen} h = \frac{\cos(z - \varphi)}{\cos \varphi},$$

(*) Questa quistione è l'estensione alla sfera di uno dei problemi proposti nella sessione estiva d'esami di licenza dall'Istituto tecnico nella *Sezione Fisico-matematica*. (Cfr. colla quistione 179ª del *Periodico*, anno VIII, p. 63, e anno IX, p. 112).

e se invece è nota la differenza $x - y$ dei cateti si calcolerà la loro somma con la formola

$$\cos(x + y) = \frac{\cos(z + \varphi)}{\cos\varphi}$$

e così in ogni caso conoscendo la somma e la differenza di x ed y si troveranno immediatamente i cateti.

Per avere gli angoli B e C serviranno le formole

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} z}, \qquad \operatorname{sen} C = \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} z}$$

le quali determinano univocamente B e C poichè in ogni triangolo rettangolo ciascun angolo obliquo è della stessa specie del lato opposto.

A decidere quanti siano i valori di z forniti dalla [2], giova esprimere z in funzione degli elementi dati. Si osservi perciò che dalla relazione [1] segue $\frac{\cos a}{\cos z} = 1 \mp \tan z \operatorname{sen} h$, od anche $\pm \cos a \sqrt{1 + \tan^2 z} = 1 \mp \operatorname{sen} h \tan z$, da cui quadrando e riducendo si ricava l'equazione quadratica in $\tan z$

[4] . . . $(\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 h) \tan^2 z \mp 2 \operatorname{sen} h \tan z + \operatorname{sen}^2 a = 0$.

Da questa si ha

$$\tan z = \frac{\pm \operatorname{sen} h \pm \cos a \sqrt{\operatorname{sen}^2 h + \operatorname{sen}^2 a}}{\operatorname{sen}^2 h - \cos^2 a},$$

dove per ciascuno dei segni che precedono il 1° termine del numeratore va preso il doppio segno per la radice.

Il problema ammette così due soluzioni poichè i valori di $\tan z$ sono reali e dev'essere $z < 180^0$, sia cognita la somma o la differenza dei cateti.

Per $h = 90^0 \pm a$ una radice della [4] diviene infinita e l'altra vien data da $\tan z = \pm \frac{\operatorname{sen}^2 a}{2 \cos a}$.

I valori analitici di $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{tang} y$ si otterranno risolvendo il sistema

$$x \pm y = a, \ \operatorname{tang} x \,.\, \operatorname{tang} y = \operatorname{tang} z \,.\, \operatorname{sen} h.$$

Il problema è impossibile per $h = 90^\circ$ ed $x + y = a$, poichè le equazioni [2] e [3] divengono $\cos z - \operatorname{sen} z = \cos a$, $\cos z + \operatorname{sen} z = \cos(x - y)$ e ne consegue $\cos^2 a + \cos^2(x - y) = 2$ non ammissibile per a ed $x - y$ diversi da 180°. La relazione $\operatorname{sen} h = \operatorname{tang} \varphi$ mostra esser $\varphi < 45^\circ$ e dalla stessa [3] risulta $\cos(z - \varphi) \leq \cos\varphi$, cioè $z \geq 2\varphi$; nel caso di $h < 90^\circ$ si osserva la somma dei cateti x, y superare $2h$, onde $\cos a < \cos 2h = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 h$, ovvero la condizione $\operatorname{sen}\frac{a}{2} > \operatorname{sen} h > \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$. Il triangolo rettangolo è isoscele per $z = 2\varphi$ e con la [2] si trova $\cos a = \frac{1 - 3 \operatorname{sen}^2 h}{1 + \operatorname{sen}^2 h}$, altri semplici casi si avrebbero per $a = \frac{\pi}{2}$, π ecc..

Le formule [2] e [3] conducono alla costruzione grafica considerando $z + \varphi$ e $z - \varphi$ quali ipotenuse di due triangoli rettangoli sferici l'uno avente per cateti a, φ e l'altro φ ed $x - y$, così dal primo triangolo si ottiene z e dal secondo l'arco $x - y$.

226*. *Determinare un triangolo rettangolo nel quale la somma dei lati dell'angolo retto sia* m, *e quella dell'ipotenusa e dell'altezza relativa all'ipotenusa sia* n; *e indicare le condizioni perchè il problema sia possibile* (*).

Soluzione del Sig. *E. Lugaro*, studente a Palermo.

La quistione si riduce a risolvere il sistema d'equazioni

$$x+y=m, \quad x^2+y^2=z^2, \quad z+\frac{xy}{z}=n.$$

Elevando a quadrato la prima e tenendo conto delle altre due si ha

$$z^2-2zn+m^2=0 \qquad \text{da cui} \qquad z=n\pm\sqrt{n^2-m^2}.$$

Il valore positivo del radicale non conviene al problema, perchè si avrebbe $z>n$; deve essere $n>m$.

Per trovare x e y si ha ora il sistema

$$x+y=m, \qquad xy=m^2+n\sqrt{n^2-m^2}-n^2,$$

cosicchè

$$x=\frac{m+\sqrt{4n^2-3m^2-4n\sqrt{n^2-m^2}}}{2},$$

$$y=\frac{m-\sqrt{4n^2-3m^2-4n\sqrt{n^2-m^2}}}{2}.$$

Questi valori sono reali se

$$4n^2-3m^2-4n\sqrt{n^2-m^2}\geqq 0 \qquad \text{o} \qquad 4n^2-3m^2\geqq 4n\sqrt{n^2-m^2},$$

cioè $n^2\leqq\frac{9}{8}m^2$ o più semplicemente $n\leqq\frac{3}{2\sqrt{2}}m$. Quindi dev'essere

$$m<n\leqq\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Una costruzione del problema, derivante dalla precedente costruzione algebrica, è la seguente: Si faccia il triangolo rettangolo ABC che abbia per ipotenusa $AB=n$, e un cateto $BC=m$; dev'essere perciò $n>m$; sarà $AC=\sqrt{n^2-m^2}$. Si prenda su AB, nella direzione AB, il segmento $AD=AC$ e si costruisca il semicerchio di diametro BD; si conduca una retta EF che lo tagli in E, F ad una distanza da AB uguale ad AD.

I triangoli EDB, FDB, eguali, soddisfano alla quistione, perchè sono rettangoli e hanno, come è facile a verificarsi, la somma dei cateti eguale a m e quella dell'ipotenusa e dell'altezza relativa eguale ad n.

Perchè il problema abbia soluzione è necessario e sufficiente che

$$\frac{DB}{2}=\frac{n-\sqrt{n^2-m^2}}{2}\geqq\sqrt{n^2-m^2} \qquad \text{cioè} \qquad n\leqq\frac{3}{2\sqrt{2}}m.$$

(*) Le quistioni 226* e 227* sono i temi di matematica dati nel luglio 1894 per la licenza dagli Istituti tecnici nella sezione *fisico-matematica*.

Quindi dev'essere
$$m < n \leqq \frac{3}{2\sqrt{2}} m ,$$
che è la condizione trovata prima (*).

227*. *In un triangolo sferico* ABC, *rettangolo in* B, *il coseno dell'angolo in* A *è il quadrato del coseno del lato opposto* a. *Dimostrare che la somma degli altri due lati* b *e* c *è* $\frac{\pi}{2}$, *o* $\frac{3\pi}{2}$ *secondochè essi sono minori o maggiori di* $\frac{\pi}{2}$; *e nel primo di questi casi dimostrare anche che, onde il triangolo possa esistere, il lato* c *dev'essere inferiore a* $\frac{\pi}{4}$, *e determinare tutti gli elementi del triangolo per mezzo di* c (**).

Risposta del Sig. *E. Marchi*, studente a Pisa (***).

Dalla relazione $\cos a \operatorname{sen} C = \cos A$, a motivo dell'ipotesi: $\cos A = \cos^2 a$, si deduce $\cos a = \operatorname{sen} C$ e quindi anche $\operatorname{sen} a = \cos C$.

Giacchè $\cos(b+c) = \cos b \cos c - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c$, tenendo presente che pel nostro triangolo rettangolo valgono le formole
$$\cos b = \cot A \cot C, \quad \cos c = \frac{\cos C}{\operatorname{sen} A}; \quad \operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A}; \quad \operatorname{sen} c = \frac{\tan a}{\tan A},$$
avremo adunque
$$\cos(b+c) = \frac{\cos A \cos^2 C}{\operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen} C} - \frac{\cos A \operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen}^2 A \cos a} = \frac{\cos A \cos^2 C}{\operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen} C} - \frac{\cos A \cos^2 C}{\operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen} C} = 0.$$

Di qui segue
$$b + c = \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad b + c = \frac{3\pi}{2}$$
secondochè b e c sono minori o maggiori di $\frac{\pi}{2}$. L'ipotesi di $b < \frac{\pi}{2}$ e $c > \frac{\pi}{2}$, o viceversa, non è ammissibile, perchè in un triangolo sferico rettangolo i tre lati sono o tutti minori di $\frac{\pi}{2}$ od uno solo è minore di $\frac{\pi}{2}$, ma qualunque sia C la relazione $\operatorname{sen} C = \cos a$ insegna che è $a < \frac{\pi}{2}$, e così b e c sono insieme acuti od ottusi.

Nel caso di $b + c = \frac{\pi}{2}$, avendosi $b > c$, perchè C è acuto come lo è c, consegue $c < \frac{\pi}{4}$. Inoltre si ha immediatamente
$$\cos b = \operatorname{sen} c, \quad \cos a = \frac{\cos b}{\cos c} = \tan c, \quad \cos A = \cos^2 a = \tan c,$$
$$\operatorname{sen} C = \cos a = \tan c.$$

(*) Soluzioni meno complete di questo problema furono inviate dai Sigg. *B. Armano*, studente a Torino; *E. Jacometti* (R. Istituto tecnico Bari); *E. Marchi* e *C. Montanari*, studenti a Pisa; *A. Panebiano* (R. Istituto tecnico Catania); *F. Levera* e *L. Romano* (R. Istituto tecnico Roma); *A. Parsi*, studente a Genova.

(**) V. la 1ª nota alla q. 226*.

(***) Una risposta poco dissimile pervenne dal Sig. *C. Montanari*, studente a Pisa.

230*. *Dimostrare che si ha*

$$1^2+4^2+5^2+8^2+9^2+\ldots+(4\,n)^2+(4\,n+1)^2$$
$$=\frac{(n+1)(32\,n^2+28\,n+3)}{3}.$$

(G. Candido).

Dimostrazioni completamente analoghe dai Sigg. *B. Armano*, studente a Torino; *E. Marchi* e *C. Montanari*, studenti a Pisa; *E. Jacometti*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari; *F. Levera* e *L. Romano*, alunni del R. Istituto tecnico di Roma.

Applicando le note formole

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},\quad 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

si ha

$$4^2+8^2+\ldots+(4n)^2=4^2\left\{1^2+2^2+\ldots+n^2\right\}=\frac{8\,n\,(n+1)(2n+1)}{3},$$
$$5^2+9^2\ldots+(4n+1)^2=(4.1+1)^2+(4.2+1)^2+\ldots+(4.n+1)^2=$$
$$4^2\left\{1^2+2^2+\ldots+n^2\right\}+8\left\{1+2+\ldots+n\right\}+n=\frac{n(n+1)\left\{16n+20\right\}+3n}{3},$$

donde

$$1^2+4^2+5^2+8^2+9^2+\ldots+(4\,n)^2+(4\,n+1)^2=$$
$$1+\frac{n\,(n+1)\left\{32n+28\right\}+3\,n}{3}=\frac{(n+1)\left\{32n^2+28\,n+3\right\}}{3}.$$

Dimostrazione dei Sigg. *A Parsi*, studente a Genova; *E. Marchi*, studente a Pisa.

Poichè si ha $(4\,n)^2+(4n+1)^2=32\,n^2+8n+1$, anzichè sommare la serie data, si potranno addizionare i valori che si ottengono colla sostituzione degli interi da 0 ad n alla lettera n dell'espressione precedente. Rammentando le formule relative alle somme dei primi n numeri naturali e dei quadrati di questi numeri, si avrà allora

$$\frac{32n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}+\frac{8n\,(n+1)}{2}+n+1=\frac{(n+1)\left\{32\,n^2+28\,n+3\right\}}{3}.$$

Dimostrazione del Sig. *G. Scorza*, studente a Pisa.

Indicando con

$$\sum_{s=0}^{s=n-1}(a+sr)^2$$

la somma dei quadrati dei primi n termini d'una progressione aritmetica di cui a è il primo termine ed r la ragione, avremo

$$\sum_{s=0}^{s=n-1}(a+sr)^2=na^2+2\,ar\sum_{s=0}^{s=n-1}s+r^2\sum_{s=0}^{s=n-1}s^2$$

ossia, per essere

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} s = \frac{n(n-1)}{2} \text{ e } \sum_{s=0}^{s=n-1} s^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{2},$$

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} (a+sr)^2 = na \left\{ a + r(n-1) \right\} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{2} r^2.$$

Ed ora si osservi che la somma dell'enunciato si scinde nelle due

$$1^2 + 5^2 + 9^2 + \ldots + (4n+1)^2$$
$$4^2 + 8^2 + 12^2 + \ldots + (4n)^2$$

la prima di $n+1$ termini, la seconda di n, e che a queste due può applicarsi la formula trovata.

Applicandola si ha

$$1^2 + 5^2 + 9^2 + \ldots + (4n+1)^2 = (n+1)(1+4n) +$$
$$\frac{8}{3}(n+1)n(2n+1) = \frac{16n^3 + 36n^2 + 23n + 3}{3}$$

$$4^2 + 8^2 + 12^2 + \ldots + (4n)^2 = 16n^2 + \frac{8}{3} n(n-1)(2n-1) = \frac{16n^3 + 24n^2 + 8n}{3}$$

e quindi

$$1^2 + 4^2 + 5^2 + 8^2 + 9^2 + \ldots + (4n)^2 + (4n+1)^2 =$$
$$\frac{32n^3 + 60n^2 + 31n + 3}{3} = \frac{(n+1)(32n^2 + 28n + 3)}{3} \text{ (*)}.$$

234**. *Se, intorno ad uno e dei raggi uniti* e, f *di due fasci proiettivi sovrapposti, si fa muovere l'uno di essi tenendo fermo l'altro, i due fasci saranno, in ogni posizione di quello, prospettivi. Dimostrare che l'asse di prospettiva descrive un cono sezionato secondo circoli dai piani perpendicolari ad* e, *se non è* f *perpendicolare ad* e; *e se è* f *perpendicolare ad* e, *detto asse descrive un fascio.* (A. Del Re).

Dimostrazione del Sig. V. *Columbo*, studente nella R Università di Napoli.

La proiettività nei due fasci è individuata dalle terne (efa), (efa'). Facendo quindi muovere il secondo fascio intorno ad e e indicando con f_1' e a'_1 la nuova posizione di f e a', il fascio efa risulterà proiettivo ad $ef_1'a'_1$, anzi i due fasci avendo unito l'elemento e sono prospettivi e l'asse di prospettiva sarà l'intersezione dei due piani (ff_1'), (aa'_1).

Ciò posto se f è perpendicolare ad e, il piano (ff_1') è quello perpendicolare ad e nel centre O, cioè è fisso: e siccome l'asse di prospettiva dei due fasci passa per O e giace nel piano (ff_1'), descriverà in esso un fascio di centro O.

Se f non è perpendicolare ad e, si conduca per un punto O_1 del raggio e la perpendicolare a questo raggio che incontri f, a, a' rispettivamente in F, A, A' (Tav. II, fig. 3ª). Allorchè il fascio efa' ruota intorno ad e, i punti F ed A' descriveranno due cerchi concentrici in un piano perpendicolare ad e passante

(*) Altre generalizzazioni pervennero dal Sig. V. *Columbo*, studente a Napoli e dall'A. stesso stesso della quistione.

per O_1; e in qualunque posizione del fascio mobile le intersezioni F_1', A'_1 di f_1' ed a'_1 con questo piano saranno allineate con O_1.

Ora i due piani (ff_1'), (aa'_1) coincidono con (fF_1'), (aA'_1); volendo quindi trovare la sezione della superficie conica descritta dall'asse di prospettiva dei due fasci col piano passante per O_1 basterà trovare il luogo descritto nel piano dei due cerchi dal punto in cui s'intersecano AA'_1, FF_1'. Tale luogo, com'è noto (*), è un cerchio, laonde resta dimostrato che l'asse di prospettiva dei due fasci, nel caso che non sia f perpendicolare ad e, descrive un cono di secondo grado, sezionato secondo circoli dai piani perpendicolari ad e.

235*. *In un quadrilatero* ABCD *inscritto in un cerchio di raggio* R, *il lato* AD *è un diametro del cerchio e gli altri lati* AB, BC, CD *formano una progressione aritmetica e hanno per somma* 3a. *Si determinino questi lati e le diagonali* AC *e* BD, *e si discutano i risultati trovando le condizioni di possibilità del problema* (**).

Risoluzioni completamente analoghe dai Sigg. *C. Allioni*, alunno del R. Liceo d'Ivrea e *G. Vitali*, alunno dell'Istituto tecnico di Ravenna.

Poichè i lati AB, BC, CD del quadrilatero formano una progressione aritmetica, la cui ragione s'indicherà con x, ed hanno per somma $3a$, sarà $BC = \frac{AB + CD}{2} = \frac{a - x + a + x}{2} = a$. Per i teoremi di PITAGORA e TOLOMEO segue poi

$$BD = \sqrt{4R^2 - (a - x)^2}, \qquad AC = \sqrt{4R^2 - (a + x)^2},$$
$$\sqrt{4R^2 - (a - x)^2}\,\sqrt{4R^2 - (a + x)^2} = 2Ra + (a - x)(a + x).$$

Quadrando e riducendo si ottiene l'equazione

$$4R^3 - 2R(a^2 + x^2) = Ra^2 + a(a^2 - x^2),$$

ossia

$$x^2(2R - a) = 4R^3 - 3Ra^2 - a^3,$$

da cui si ha

$$x = \sqrt{\frac{4R^3 - 3Ra^2 - a^3}{2R - a}} = (2R + a)\sqrt{\frac{R - a}{2R - a}}.$$

Risulta di qui come prima condizione di possibilità del problema, avendosi

---

(*) Eccone una dimostrazione analitica. — Ponendo

$$O_1A = a \qquad O_1A' = O_1A'_1 = b \qquad O_1F = O_1F_1 = c$$

e chiamando φ l'angolo di cui ha ruotato il raggio O_1F, le equazioni delle rette AA'_1 e FF'_1 saranno rispettivamente:

$\frac{y}{x + a} = \frac{-b \operatorname{sen} \varphi}{b \cos \varphi + a}$; $\frac{y}{x + c} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{-\cos \varphi + 1}$, da cui si ricava $\cos \varphi = \frac{x(a + b) + a(b + c)}{b(a - c)}$, $\operatorname{sen} \varphi = y\,\frac{a + b}{b(c - a)}$. Quadrando, sommando e riducendo si ha l'equazione del luogo:

$$(x^2 + y^2)(a + b) + 2ax(b + c) + c^2(a - b) + 2abc = 0.$$

(**) Questa quistione e la seguente 236* sono i temi di matematica dati nella sessione d'ottobre 1894 per la licenza dagli istituti tecnici nella Sezione *fisico-matematica*.

$2R > a$, che deve essere $R \geqq a$, altrimenti x sarebbe immaginaria. Supponendo questa condizione soddisfatta, segue

$$AB = a - (2R + a)\sqrt{\frac{R-a}{2R-a}}, \qquad CD = a + (2R - a)\sqrt{\frac{R-a}{2R-a}};$$

$$BD = \sqrt{\left\{\frac{4R^2(R-a) + a^2(R+2a)}{2R-a} + 2a(2R+a)\sqrt{\frac{R-a}{2R-a}}\right\}},$$

$$AC = \sqrt{\left\{\frac{4R^2(R-a) + a^2(R+2a)}{2R-a} - 2a(2R+a)\sqrt{\frac{R-a}{2R-a}}\right\}}.$$

Perchè anche AB sia reale e diverso da zero, occorre che si abbia

$$a > \sqrt{\frac{4R^3 - 3Ra^2 - a^3}{2R-a}},$$

da cui quadrando e riducendo risulta $5a^2 > 4R^2$ ed infine $a > \frac{2R}{\sqrt{5}}$.

Riassumendo perchè il problema sia possibile è necessario e basta che sia

$$R \geqq a > \frac{2R}{\sqrt{5}}.$$

Nel caso di $R = a$, il quadrilatero si riduce ad un mezzo esagono (*).

236*. *Si ha un trapezio nel quale i due lati paralleli sono* a *e* b *con* a < b, *e l'altezza è* h *Si trovi a quale distanza* x *dal lato* b *dovrà condursi una retta* y *parallela a questo lato per far sì che il trapezio resti diviso in due trapezi tali che quello di cui i lati paralleli sono* b *e* y *stia all'altro in un rapporto dato* q; *e si dia anche la lunghezza della retta* y *e si discutano i risultati* (**).

Risoluzioni analoghe dai Sigg. *F. Celestri*, alunno del R. Istituto tecnico di Modica e *C. Allioni*, alunno del R. Liceo d'Ivrea.

Le aree del trapezio dato e di quelli in cui esso dev'essere diviso sono rispettivamente $\frac{a+b}{2}.h$, $\frac{b+y}{2}.x$, $\frac{a+y}{2}(h-x)$. Si ha quindi il sistema d'equazioni

$$(b+y)x + (a+y)h - (a+y)x = (a+b)h$$
$$(b+y)x = q(a+y)(h-x).$$

Dalla prima si ricava $x = \frac{(b-y)h}{b-a}$ e dalla seconda $x = \frac{q(a+y)h}{b+y+qa+qy}$.

Eguagliando i secondi membri e riducendo, risulta

$$y^2(q+1) = qa^2 + b^2, \quad \text{donde} \quad y = \sqrt{\frac{qa^2+b^2}{q+1}},$$

(*) Soluzioni di questa quistione vennero inviate anche dai Sigg. *F. Levera* e *L. Romano* alunni del R. Istituto tecnico di Roma e dal Sig. *E. Marchi* studente a Pisa.

(**) V. la 1ª nota alla quistione 235*.

poichè il segno — pel radicale non è accettabile; e sostituendo nell'una o nell'altra delle due formole che danno il valore di x

$$x = \left[h\left(b - \sqrt{\frac{q\,a^2 + b^2}{q+1}}\right)\right] : (b - a).$$

Per dato è $b > a$, quindi $q\,a^2 + b^2 < q\,b^2 + b^2 = (q+1)\,b^2$. Segue da ciò che $\sqrt{\dfrac{q\,a^2 + b^2}{q+1}} < \sqrt{\dfrac{(q+1)\,b^2}{q+1}} = b$, onde senz'aggiungere altre condizioni, a quella data dall'enunciato, il valore di x risulta positivo ed il problema è sempre possibile.

238. *Dimostrare che la somma*

$$\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1} - 2^{\mathrm{k}}\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)}{(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)} + 3^{\mathrm{k}}\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)}{(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)(\mathrm{n}+3)} - \ldots \pm \mathrm{n}^{\mathrm{k}}\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)\ldots 2.1}{(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)\ldots 2\mathrm{n}}$$

è uguale a $\frac{1}{2}$ *per* $\mathrm{k} = 0$, *ed è uguale a zero qualunque sia l'intero positivo pari* $\mathrm{k} \leqq 2\mathrm{n} - 2$.

(D. Besso).

Dimostrazione del Sig. Prof. *G. Nonni* a Ravenna.

1° Se $S_{n,k}$ indica la somma data, e u_r l'$r.^o$ termine di $S_{n,o}$, si ha

$$u_r = (-1)^{r-1}\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)},\; u_{r-1} = (-1)^{r-2}\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)};$$

e quindi

$$\frac{u_r}{u_{r-1}} = -\frac{n-r+1}{n+r},$$

$$n(u_r + u_{r-1}) + r\,u_r - (r-1)\,u_{r-1} = 0.$$

Ponendo in questa relazione $r = 2, 3, \ldots, n$, e sommando le eguaglianze che risultano, si trova

$$n(S_{n,o} - u_1 + S_{n,o} - u_n) + n\,u_n - u_1 = 0\,;$$

da cui

$$S_{n,o} = \frac{n+1}{2n}\,u_1 = \frac{n+1}{2n}\,\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}.$$

2° Si supponga ora $n > 1$, e si rappresentino con t_r e v_r, rispettivamente, i termini $r.^i$ di $S_{n,k}$ e di $S_{n-1,k}$: si avrà

$$t_r = (-1)^{r-1}r^k\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)},\; v_r = (-1)^{r-1}r^k\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{n(n+1)\ldots(n+r-1)},$$

$$\frac{t_r}{v_r} = \frac{n^2}{n^2 - r^2},\; n^2 t_r - r^2 t_r = n^2 v_r.$$

Ponendo in questa eguaglianza $r = 1, 2, \ldots, n-1$, e sommando, risulta

$$1^2 t_1 + 2^2 t_2 + \ldots + (n-1)^2 t_{n-1} = n^2(S_{n,k} - t_n - S_{n-1,k})\,;$$

ossia

$$S_{n,k+2} = n^2(S_{n,k} - S_{n-1,k}) : \quad \ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

relazione che ha luogo per ogni valore intero positivo o nullo di k, purchè n sia maggiore di 1.

Se $k = 0$, la [1] diviene

$$S_{n,2} = n^2(S_{n,0} - S_{n-1,0});$$

ma, per la prima parte dell'enunciato, si ha $S_{n,0} = S_{n-1,0} = \frac{1}{2}$; dunque

$$S_{n,2} = 0 \text{ quando } n > 1.$$

Se $k = 2$, la [1] diviene

$$S_{n,2.2} = n^2(S_{n,2} - S_{n-1,2});$$

ma, per ciò che precede, quando $n - 1 > 1$ si ha $S_{n,2} = S_{n-1,2} = 0$; dunque

$$S_{n,2.2} = 0 \text{ quando } n > 2.$$

Così continuando si trova $S_{n,2.3} = 0$ per $n > 3$, $S_{n,2.4} = 0$ per $n > 4$ ecc. In generale, supponendo $S_{n,2p} = 0$ per $n > p$, dalla [1] si deduce subito che deve essere $S_{n,2(p+1)} = 0$ per $n > p + 1$; dunque la somma $S_{n,k}$ è sempre nulla quando k è un intero positivo pari e n supera la metà di k; vale a dire quando

$$k = 2, 4, 6, \ldots, 2n - 2.$$

In modo analogo si possono trovare delle espressioni di $S_{n,k}$ anche se k è un intero positivo dispari; ma tali espressioni non sono indipendenti da n, come nei casi precedentemente trattati. Si ha per esempio

$$S_{n,1} = \frac{n}{2(2n-1)} \quad \text{e} \quad S_{n,3} = \frac{-n^2}{2(2n-1)(2n-3)}.$$

Lasciamo al lettore la ricerca di queste formole.

239.** *Mostrare che, data l'equazione, a coefficienti reali,*

$$\alpha x y + \beta x + \gamma y + \delta = 0,$$

e, posto $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$, le coppie di valori di x, y *che la soddisfano, e che, nello stesso tempo, differiscono di una quantità reale assegnata* h, *sono sempre reali se è $\alpha^2\Delta \leq 0$; e se è $\alpha^2\Delta > 0$, saranno reali soltanto quando* h *non è compreso fra i valori* $\dfrac{\gamma - \beta \pm \sqrt{-\Delta}}{\alpha}$.

Osservare poi che, nel caso di $\alpha = 0$, e di $\beta = -\gamma$, il problema di determinare dei valori di x, y *con la condizione voluta è impossibile, o indeterminato.* (A. Del Re).

Dimostrazione del Sig. Prof. V. *Retali* a Milano.

Eliminando y fra le due equazioni

$$\alpha x y + \beta x + \gamma y + \delta = 0, \quad x - y + h = 0$$

si ha l'equazione quadratica in x

$$\alpha x^2 + (\alpha h + \beta + \gamma) x + (\gamma h + \delta) = 0$$

le cui radici sono reali se il discriminante

$$D = \alpha^2 h^2 + 2\alpha(\beta - \gamma) h + [(\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta]$$

è positivo o nullo. Se le radici di $D=0$, risoluta rispetto ad h, sono imaginarie coniugate, oppure reali ed eguali, cioè se, nell' ipotesi di α diverso da zero, $\alpha\delta-\beta\gamma \leqq 0$, D è sempre positivo; se le radici di $D=0$ sono reali (α diverso da zero) $\alpha\delta-\beta\gamma$ è positivo, e D sarà positivo solo quando si attribuiscano ad h valori non compresi nell' intervallo delle radici, cioè non compresi fra i valori $\dfrac{\gamma-\beta\pm 2\sqrt{\Delta}}{\alpha}$. Se poi $\alpha=0$ il dato sistema diviene di 1° grado, ossia

$$\beta x+\gamma y+\delta=0, \quad x-y+h=0$$

e se ne deduce

$$x=-\frac{h\gamma+\delta}{\beta+\gamma}, \quad y=\frac{h\beta-\delta}{\beta+\gamma}.$$

Se poi si ha anche $\beta=-\gamma$ le due equazioni precedenti si riducono ad ad una sola se $\delta=\beta h$, e sono incompatibili se $\delta \gtrless \beta h$.

Osservazione. In generale, per due projettività conlocali a elementi omogenei

$$\alpha xy+\beta x+\gamma y+\delta=0, \quad \alpha_1 xy+\beta_1 x+\gamma_1 \delta+\delta_1=0,$$

le coppie comuni di elementi corrispondenti sono reali se

$$D=[(\alpha\delta_1)-(\beta\gamma_1)]^2-4(\alpha\beta_1)(\gamma\delta_1) \geqq 0,$$

dove $(\alpha\beta_1)=\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$, ecc..

Il Sig. *G. Scorza*, che inviò una soluzione del tutto analoga alla precedente, osserva poi che la quistione proposta è l'enunciato analitico del problema seguente di Geometria proiettiva:

« Date sopra una retta due punteggiate proiettive, trovare due punti su questa retta che si corrispondano nelle due punteggiate e nel tempo stesso distino di un dato segmento » (*).

240*. *Dato l'angolo di sezione* α *di due circonferenze e quello* 2θ *delle loro tangenti comuni, determinare il rapporto* m *dei loro raggi; viceversa conoscendo* m *ed uno degli angoli* α, 2θ *si cerchi l'altro.*

(G. Bellacchi).

Risoluzioni dei Sigg. *E. Marchi*, studente a Pisa e *G. Somalvico*, alunno del R. Istituto tecnico di Como (**).

Siano O, O' (Tav. II, fig. 4ª) le due circonferenze di raggi R, R'; AA' una loro tangente comune, nei punti A, A', che incontra la linea dei centri OO' in S, finalmente M il punto di loro intersezione situato dalla stessa parte di AA' rispetto alla congiungente i centri. L'angolo OMO' sarà il supplemento di α e se si conduce pel centro O' della circonferenza minore una parallela ad AA' ad incontrare OA in N, risulterà $\angle OO'N=\theta$ e si avrà $ON=OO'\operatorname{sen}\theta$. Ma d'altra parte dal triangolo OMO' si ha

$$\overline{OO'}^2=R^2+R'^2-2RR'.\cos OMO'=R^2+R'^2+2RR'\cos\alpha,$$

(*) Un'altra risposta alla quistione pervenne dal Sig. *L. de Sanctis*, alunno del R. Istituto tecnico di Teramo.

(**) Una risoluzione venne pure inviata dal Sig. *G. Gallucci*, studente a Napoli.

onde

$$\overline{ON}^2 = (R - R')^2 = (R^2 + R'^2 + 2RR' \cos\alpha) \quad \text{sen}^2\theta =$$
$$(R^2 + R'^2)\,\text{sen}^2\theta + 2RR' \,.\, \cos\alpha \,\text{sen}^2\theta.$$

Di qui si deduce facilmente

$$(R^2 + R'^2)\cos\theta = 2RR'(1 + \cos\alpha\,\text{sen}^2\theta)$$

e, dividendo per RR':

$$\frac{R}{R'} + \frac{R'}{R} = \frac{2(1 + \cos\alpha\,\text{sen}^2\theta)}{\cos^2\theta},$$

da cui, introducendo il rapporto m fra i due raggi, segue

$$m + \frac{1}{m} = \frac{2(1 + \cos\alpha \,.\, \text{sen}^2\theta)}{\cos^2\theta}.$$

Considerando in quest'equazione successivamente come incognite m, θ ed α, si ricavano le tre relazioni

$$m = \frac{1 + \cos\alpha\,\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} \pm \sqrt{\frac{(1 + \cos\alpha\,\text{sen}^2\theta)^2}{\cos^4\theta} - 1},$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{m - 1}{\sqrt{m^2 + 2m\cos\alpha + 1}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right)\cot^2\theta - \text{cosec}^2\theta.$$

Per $\alpha = 0$, ossia nel caso che le due circonferenze siano tangenti esternamente, dalla 2ª di queste formole si trae $\text{sen}\,\theta = \frac{m-1}{m+1}$, donde $m = \frac{1 + \text{sen}\,\theta}{1 - \text{sen}\,\theta}$, cosicchè supponendo contemporaneamente $\theta = 0$ o $\theta = 90°$ risulta $m = 1$ od $m = \infty$. Per $\alpha = 180°$, ossia se il contatto è interno, segue $\text{sen}\,\theta = \frac{m-1}{m-1} = 1$ quind $\theta = 90°$ ed m indeterminato.

L'ipotesi di $\theta = 0$ dà $m = 1$. In questo caso adunque le circonferenze sono eguali.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

268. Qualunque sia l'intero positivo n, si ha

$$1 - \frac{1}{3}\,\frac{n(n+1)}{1^2} + \frac{1}{5}\,\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(1 \,.\, 2)^2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\,\frac{1 \,.\, 2 \ldots 2n}{(1 \,.\, 2 \ldots n)^2} = \frac{1}{2n+1}.$$

D. Besso.

(*) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

269. Qualunque sia l'intero positivo m, si ha

$$\frac{1}{m+n+1}=\frac{1}{n+1}-\frac{m}{(n+1)(n+2)}+\frac{m(m-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+(-1)^m\frac{m(m-1)\ldots.2\,.\,1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m+1)}.$$

G. Musso.

270**. In un' urna si trovano un egual numero di palle rosse e nere. Ne vengono estratte successivamente n rimettendo volta per volta la palla estratta nell'urna. Dimostrare che la probabilità che le n palle estratte presentino una determinata disposizione di colori è data da

$$\frac{1}{2+P_n\,\Sigma\,\dfrac{1}{P_\alpha P_\beta}},$$

in cui $\alpha+\beta=n$ e $P_n=1\,.\,2\,\ldots.\,n$. F. Verde.

271*. Il trinomio

$$a^{n+1}-(n+1)\,ab^n+n\,b^{n+1}$$

è divisibile per $(a-b)^2$; dare l'espressione del quoziente.

Dedurne poi che le espressioni $2^{2n}+15n-1$ e $2^{4n}-15n-1$, per n intero e positivo, sono multiple rispettivamente di 9 e 25.

G. Bellacchi.

272**. Le coniche passanti per un punto e bitangenti sopra una retta fissa alle coniche di un fascio, formano un altro fascio; gli otto punti-base dei due fasci sono in una conica.

V. Retali.

273*. Un cerchio di centro O è segato da un altro cerchio M in due punti opposti A e B: dimostrare che ogni cerchio avente per diametro una corda di M passante per O, sega il primo cerchio nei due termini di un diametro perpendicolare alla corda.

V. Retali.

274*. Due cerchi O e M posti in un medesimo piano si segano ortogonalmente nei punti A e B, e da un punto P preso comunque sopra O si conducono le rette PA, PB a segare ulteriormente l'altro cerchio M in A' e B'. Dimostrare che $A'B'$ è un diametro di M perpendicolare al diametro PP' di O. V. Retali.

275*. Fra i triangoli i cui lati formano una progressione aritmetica di data ragione, quali sono rettangoli, quali acutangoli, quali ottusangoli? L. Bosi.

276*. Fra i triangoli le cui mediane formano una progressione aritmetica di data ragione, quali sono rettangoli, quali acutangoli, quali ottusangoli?

L. Bosi.

277**. Posto

$$u_1 = \frac{7}{2}(c-b)+a,\ u_2 = \frac{7}{2}(u_1-c)+b,\ u_3 = \frac{7}{2}(u_2-u_1)+c,\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ u_n = \frac{7}{2}(u_{n-1}-u_{n-2})+u_{n-3},\ \ldots\ldots$$

esprimere u_n in funzione di a, b, c, n.

A. Tagiuri.

278**. Si considerino tutti i triangoli inscritti in una conica aventi un vertice comune e il lato opposto parallelo alla tangente in quel punto. Trovare il luogo del centro del circolo circoscritto a ciascuno di questi triangoli.

G. Scorza.

279**. Si considerino tutte le coniche aventi a comune un fuoco F e la direttrice f corrispondente, F ed f essendo dati.

1° Per ogni punto M del piano passa una ed una sola di queste coniche. Dire in quale regione deve trovarsi il punto M perchè la conica corrispondente sia un' ellisse, una parabola od un' iperbole.

2° Trovare il luogo dei vertici posti sugli assi non focali.

G. Scorza.

280*. Se il triangolo ABC è inscritto in un cerchio di raggio R ed A', B', C' sono i punti in cui le bisettrici interne degli angoli A, B, C incontrano questo cerchio, posto $\triangle A'B'C' = S'$, esagono $AC'BA'CB' = S$ e indicando con $2p$ ed α, β, γ il perimetro e gli angoli del triangolo ABC, dimostrare che

$$1^0 \quad S' = \frac{Rp}{2}, \qquad 2^0 \quad S = 2S',$$

$$3^0 \quad AA' + BB' + CC' = 2R\left[4\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\cos\frac{\beta-\gamma}{4}\cos\frac{\gamma-\alpha}{4} - 1\right].$$

G. Candido.

281*. Due cerchi di centri O, O' si tagliano in A e B. Preso un punto P sul primo e condotte le secanti PA, PB a tagliare il secondo nuovamente in A', B', dimostrare che al muoversi di P sull'arco esterno del cerchio O, rimane costante il rapporto della potenza di P, rispetto ad O', all'area del quadrilatero $ABB'A'$.

G. Gallucci.

282*. Date due circonferenze concentriche di centro O ed un punto S, si tiri SO ad incontrare la circonferenza esterna in A e si congiunga un punto qualunque C di questa circonferenza con A. Condotta CO, che sega la circonferenza interna in B, poi SB, che incontra CA in M, trovare il luogo descritto dal punto M al variare di C sul cerchio.

A. Lugli.

283*. Un pallone sferico è veduto da due punti A e B posti l'uno al sud dell'altro rispetto al pallone, ed alla distanza a, sotto gli angoli 2α e $2\alpha'$. Conoscendo l'angolo d'elevazione β del centro del pallone nel punto A, determinare l'altezza di questo centro e il raggio del pallone.

A. Lugli.

284**. Di un quadrilatero $ABCD$ sono noti i lati $AB=a$, $BC=b$ e gli angoli A, B, C. Dimostrare che l'area del quadrilatero è espressa da

$$\left\{ab\left[\operatorname{sen} B \operatorname{sen}(A+B+C)-\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C-\operatorname{sen}(B+C)\operatorname{sen}(A+B)\right]+\right.$$
$$\left.a^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen}(B+C)+b^2 \operatorname{sen} C \operatorname{sen}(A+B)\right\}:2\operatorname{sen}(A+B+C).$$

A. Lugli.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

GINO LORIA. — *Le Scienze esatte nell'antica Grecia* Libro II. Il periodo aureo della geometria greca (pp. 236 in 4°, con 2 tav.). — Dalle Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena. Vol. XI. Serie II.

Con quei criteri medesimi che mi servirono di guida nel dar notizia del I libro del nuovo lavoro storico intrapreso dal Prof. G. Loria (*), mi accingo ora a far parola del II libro di recente apparso. Lasciando in disparte l'attrattiva dell'argomento, tante e così utili sono le cognizioni che anche i docenti delle scuole secondarie possono ricavare dalla lettura di quest'opera e in particolare del libro a cui si allude, mettendole in parte a profitto dell'insegnamento, che mi par doveroso darne pubblico avvertimento. E per citare il giudizio di persona assai autorevole, mi piace riportare quanto scrive il Professore G. Eneström nella sua *Bibliotheca mathematica* a proposito di questa storia delle *Scienze esatte nell'antica Grecia* (**): « . . . Bien que l' ouvrage de

(*) Cfr. *Periodico*. Vol. IX, 1894, p. 70.
(**) Nouvelle Série. 9, n. 2, 1895.

M. Loria ne contienne guère des pensées parfaitement nouvelles ni des faits inconnus jusqu'à présent (*), il est néanmoins d'un profond intérêt à cause de l'impartialité de l'auteur et grâce à ses lectures très étendues, qui lui ont permis d'y donner une foule de renseignements qu'on ne saurait trouver réunis dans aucun autre livre sur le même sujet. Nous osons dire qu'il y a peu de recherches originales sur la géométrie grecque dont M. Loria n'ait pas pris connaissance, et les rares indications inexactes ou incomplètes qu'on pourrait découvrir dans son ouvrage, semblent être sans aucune importance. . . . »

Ecco in qual modo l'A. incomincia la sua laboriosa trattazione — « Il secondo periodo della storia della geometria greca differisce sostanzialmente da quello che diede materia al I libro dell'opera presente, sia per la natura e l'entità dei documenti che ad esso si riferiscono, sia per la fisonomia intellettuale e le abitudini scientifiche dei personaggi che ad esso appartengono, sia finalmente per la dimora che ebbero coloro ai quali la nostra scienza è debitrice dei più rilevanti progressi che in allora compì » — ed ecco come fa risaltare il carattere assunto dagli studi matematici in questo periodo — « Mentre gli scienziati anteriori ad Euclide non erano di regola specialisti, ma risolvevano questioni di geometria come prendevano parte ad una disputa filosofica o facevano osservazioni di fenomeni naturali, da quelli di cui stiamo per occuparci (eccezion fatta per Eratostene e forse per lui solo) trae origine la numerosa serie di coloro che avvertirono essere la matematica capace e degna di assorbire da sola l'attività intellettuale di un'intera esistenza. Essi furono i fondatori della letteratura matematica dei Greci e debbono essere venerati siccome i nostri progenitori scientifici: onde il conoscerne le opere ha, non solo un valore storico, ma eziandio, in un certo senso, un valore pratico ».

Al Proemio seguono sei capitoli nei quali dopo uno schizzo brevissimo sulla vita di ciascun geometra, vengono esaminate le opere compiute da Euclide e dai pretesi suoi continuatori, da Archimede, da Eratostene, da Apollonio e dai geometri minori del periodo greco-alessandrino quali Nicomede, Diocle, Perseo, Zenodoro.

Viene in ultimo un'appendice nella quale dopo un cenno sull'importanza dell'opera dello Zeuthen, *L'Algebra geometrica degli antichi*, sono messe in luce le principali opere di restituzione o divinazione di scritti perduti degli antichi geometri del periodo greco-alessandrino, cioè la divinazione della Divisione delle figure di Euclide (da L. F. Ofterdinger e altri), quella dei Porismi (Fermat,

(*) Mi par giusto nondimeno osservare, in disaccordo a quest'asserzione, *non fosse altro*, che le indagini dell'A. sui poliedri archimedei hanno l'impronta di una spiccata originalità. Infatti il Prof. Loria non si limita a dar conto delle notizie su questi poliedri date da Pappo nel V libro della *Collezione matematica*, ma entra in una fine discussione nella quale giunge a concludere 1° che è assai probabile che ad Archimede fosse nota quella celebre relazione fra il numero dei vertici, delle facce e degli spigoli di un poliedro convesso, conosciuta sotto il nome d'Eulero, 2° che Archimede, com'era consuetudine degli antichi geometri, non può aver fatto a meno di assegnare la costruzione di tali poliedri, il che si deduce anche dal fatto che in realtà la costruzione di essi riferita da un antico anonimo scoliasta, è da presumere sia stata appresa dall'opera *Sui poliedri* che ad Archimede si attribuisce, 3° che ragionevolmente si deve ammettere in Archimede la conoscenza della legge di derivazione dei poliedri medesimi l'uno dall'altro, legge corrispondente a quel modo di derivazione dei cristalli insegnato ai geometri da Luca Paciolo nel 1509.

Simson e Chasles) (*), le divinazioni tentate da Maurolico e Viviani dei libri V e VI e la restituzione di Halley del libro VIII delle CONICHE di Apollonio, la divinazione dei due libri di Apollonio SULLE INSERZIONI (M. Ghetaldi, Huygens, Horsley) e infine la restituzione dei LUOGHI PIANI pure di Apollonio (Fermat, Schooten, Simson).

L'A. non si limita a dare semplice notizia delle diverse produzioni scientifiche dovute agli antichi geometri di cui ci è giunta memoria, ma, per quelle a noi pervenute, ne esamina minutamente il contenuto. E siccome egli traduce molte delle proposizioni ivi enunciate in linguaggio moderno, le raggruppa a seconda delle analogie che presentano e mostra, quand'è il caso, com'esse possano venir considerate quali scaturigini di teoriche assai più recenti, ciò che sta a dimostrare lo studio profondo da lui fatto sulle opere originali, così il lavoro del prof. Loria riuscirà senza dubbio assai utile a coloro che volessero fare sulle medesime delle indagini anche semplicemente superficiali. Così a mo' di esempio troviamo un esteso riassunto del contenuto dei libri VII, VIII e IX (aritmetica razionale) e del libro X (quantità irrazionali risultanti dalla risoluzione di equazioni biquadratiche) degli *Elementi*, contenuto che oggidì è probabilmente a molti sconosciuto.

Gli sviluppi teoretici sulle cose esposte sono numerosi, citeremo i seguenti che hanno maggiore attinenza al medio insegnamento. Una discussione sui *numeri perfetti* (a proposito della costruzione di questi numeri esposta nella propos. 36ª del libro IX degli *Elementi*), una illustrazione analitica molto estesa, informata alle notazioni dell'algebra moderna, delle proposizioni del X libro e la dimostrazione di due proposizioni del libro XII, all'intento di porre in luce il procedimento logico seguito dagli antichi in quelle quistioni in cui si presenta l'idea d'infinito - la deduzione rapida e completa delle espressioni dei lati, delle superficie, dei volumi e del raggio del circolo circoscritto ad ogni faccia dei poliedri regolari convessi in funzione del diametro della sfera circoscritta, e la dimostrazione di un teorema corrispondente alla 94ª prop. dei *Dati*, altra opera d'Euclide.

Relativamente alle opere d'Archimede troviamo esposta la determinazione dell'area del segmento parabolico — la deduzione della superficie e del volume della sfera non che dell'area del settore di spirale — un'ampia discussione del procedimento che ha servito alla valutazione approssimata del rapporto della circonferenza al diametro — la costruzione dei 13 poliedri archimedei e la derivazione dell'uno dall'altro — e la dimostrazione del teorema, riferentesi alla costruzione di una tangente alla spirale, che segue: « Se si conduce la tangente nell'estremo della prima spira della curva e dal punto origine della spirale si conduce la perpendicolare alla posizione iniziale della retta mobile, questa segherà la tangente in un punto la cui distanza dall'origine della spirale è eguale alla periferia del primo circolo ».

(*) Un lavoro sui porismi d'Euclide che non trovo citato dal prof. Loria, eppure merita considerazione e non sarebbe da passare sotto silenzio, è il seguente: *Settantacinque porismi tratti quasi tutti dall'opera del Chasles intitolata « Les trois Livres des porismes d'Euclide etc. » e dimostrati la maggior parte con metodo che, dietro certe considerazioni, sembra probabile essere stato usato da Euclide*. Memoria del prof. D. Marianini (Soc. ital. delle Scienze, tomo II, serie 2ª, 1866).

Finalmente sono sviluppate le risoluzioni del problema di costruire due medie in proporzione continua fra due date rette, che conduce alla duplicazione del cubo, quali furono esposte da Eratostene (praticamente effettuabile coll'aiuto di uno strumento da Pappo chiamato *mesolabio*) — da Nicomede (col mezzo della *concoide*) — da Diocle (col mezzo della *cissoide*). — Nè manca la risoluzione, probabilmente dovuta a Nicomede, del problema della trisezione dell'angolo servendosi della *concoide*.

A compimento di questa notizia e come sintesi del contenuto del libro in discorso, crediamo opportuno di riportare la seguente parte dell'epilogo. « Il pensiero geometrico, risvegliato negli Ellèni da Talete all'albeggiare della civiltà, trapassa da Mileto nella Magna Grecia, ove si occulta e feconda nei conciliaboli dei Pitagorici, risorge alla libera luce in Atene con la scuola di Platone, si propaga al di fuori per opera di Eudosso e de'suoi discepoli, si associa e corrobora con lo sviluppo della filosofia, e giunge finalmente alla sua massima grandezza con gli scienziati che vissero all'ombra del trono dei Faraoni o con coloro che da questi scienziati ricevettero l'istruzione od almeno lo stimolo all'investigazione delle verità matematiche.

Al modo istesso che la filosofia greca nel suo periodo di più abbagliante splendore trovò in Socrate, Platone ed Aristotele i suoi più eminenti rappresentanti, così nel periodo aureo della geometria greca spiccano giganteggiando Euclide, Archimede ed Apollonio. Per opera del primo di questi geometri il mondo civile arriva in possesso di una raccolta sapientemente ordinata delle proprietà più essenziali dell'estensione figurata, raccolta che per lungo volgere di secoli fu giudicata come un codice d'insuperabile valore e che tuttora impone l'ammirazione ed il rispetto anche a coloro che non ne accettano ciecamente le disposizioni ed i precetti. Il secondo — capo-stipite dei geometri italiani, organizzatore della geometria metrica superiore, precursore di Leibniz e Newton — si palesa di così meravigliosa fecondità nell'immaginare degli espedienti per risolvere, evitando qualunque applicazione del concetto d'infinito, una pleiade di questioni che oggi si riguardano come di stretta pertinenza del calcolo infinitesimale, che lo studio di essi riempie oggi ancora di stupore e induce melanconicamente a domandarsi se l'invenzione dei metodi generali che tanto affaticò gli scienziati moderni non abbia per avventura inaridito la fonte naturale degli espedienti ingegnosi. Meno spontanea sorge forse l'ammirazione in chi oggidì mediti sulle opere di Apollonio, perchè noi siamo così immedesimati negli odierni procedimenti d'indagine, solleciti e generali, che ci riesce malagevole il misurare quale ingente somma di lavoro esigesse il giungere al vero senza invocarne l'aiuto; e con fatica riusciamo a schermirci da un senso di sorpresa che indugia gli entusiasmi; ma ove si pervenga a ciò si è indotti a giustificare pienamente coloro che giudicano Apollonio la più grande mente geometrica che il mondo abbia prodotto prima di Steiner.

Gli sforzi coordinati di questi tre celebri matematici e dei loro immediati discepoli assicurarono delle basi incrollabili a tutto l'edificio geometrico, prepararono il terreno al calcolo infinitesimale, aumentarono a dismisura la sfera di influenza della geometria col condurre sotto il suo dominio delle nuove e interessantissime forme geometriche; essi guidarono a svariate soluzioni dei famosi problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo ed insegnarono a contemplare la questione della quadratura del circolo dall'unico punto di vista che — date le cognizioni algebriche dell'epoca — allora ne permettesse una soluzione; e gettarono i fondamenti tanto dello studio geometrico dei massimi e minimi, quanto della dottrina degli isoperimetri. Da ultimo gli scienziati prelodati, col somministrare i più importanti elementi della collezione conosciuta sotto il nome di *luogo analitico*, cercarono di spianare la via agli investigatori avvenire e di fare in modo che lo spirito d'indagine geometrica non si spegnesse con essi. Ciò non ostante, scomparsi questi illustri campioni, per un complesso di ragioni intrinseche ed estrinseche che ci sforzeremo di mettere in chiaro più innanzi, la geometria greca decade poi definitivamente scompare. »

A. Lugli.

ALFREDO CAPELLI. — *Lezioni di Algebra complementare.* — Napoli, 1895. Edit. Pellerano. — Prezzo: L. 8.

Gli studiosi delle scienze matematiche devono senza dubbio compiacersi del risveglio scientifico che si va accentuando in questi ultimi anni nelle nostre Università dal punto di vista della produzione didattica e per opera di una schiera di giovani intelligenti che all'amore per la scienza ed alla dottrina accoppiano il desiderio di istruire la gioventù.

Ultimo fra i lavori di questo genere, in ordine cronologico, è quello del Prof. Capelli che qui ci proponiamo di esaminare nelle sue linee generali come opera scolastica.

È noto che il Capelli ha collaborato col Prof. G. Garbieri nella pubblicazione del primo volume di *Analisi Algebrica* edito a Padova nell'85 e rimasto incompleto, per motivi che non ci è facile di indagare; ora lo stesso autore pubblicando le sue *Lezioni di Algebra complementare* si è proposto, seguendo evidentemente lo schema del lavoro precedente, di renderlo completo e di ridurlo al tempo stesso alle giuste proporzioni di un libro scolastico. Diciamo che l'autore ha seguito il piano stesso dell'opera, nella quale aveva antecedentemente collaborato, perchè alcuni capitoli, come quelli sugli irrazionali, sulle successioni di numeri, sulle operazioni coi numeri complessi, sull'analisi combinatoria, sulle sostituzioni, sulla divisibilità delle funzioni intere, sono quasi fedelmente riportati, ma in una scala ridotta, nel nuovo testo. E diciamo anche che le intenzioni dell'autore erano quelle di offrire alla gioventù un buon testo su tale materia, poichè tale è la convinzione che nasce in chi esamina attentamente i dieci capitoli in cui è divisa l'opera. Ognuno di questi capitoli è suddiviso in paragrafi, ciascuno dei quali breve e conciso, porta il suo titolo; la mente del lettore ha quindi campo di riposare dopo lo studio di poche pagine e di riordinare con facilità e con profitto le idee apprese.

Un'altra ragione per cui crediamo che l'opera del Capelli sia veramente scolastica, sta nella ricca serie di note aggiunte quasi ad ogni paragrafo; gli esercizi proposti in queste Note sono accessibili all'intelligenza degli studenti e quando potrebbero presentare qualche difficoltà, essa è subito appianata dall'autore stesso con brevi ma chiare considerazioni. Le applicazioni sono varie ed alcune interessanti riguardano problemi di geometria o di meccanica, e servono quindi di utile complemento alle teorie svolte.

In tutta quanta l'opera è degna di lode la chiarezza, la sobrietà ed in alcuni punti anche l'originalità delle teorie introdotte; nuoce però all'effetto generale la poca cura colla quale fu stampata e l'*errata-corrige* alla fine del volume non registra che una piccola parte degli errori disseminati nel testo. Un tale difetto scomparirà nelle successive edizioni, che di cuore auguriamo all'autore.

Esaminiamo ora rapidamente i diversi capitoli e notiamo le nostre impressioni e le nostre divergenze dall'autore.

Stabilita assai opportunamente nella introduzione la classificazione delle funzioni in algebriche e trascendenti, vi si traccia il piano dell'opera e si accenna ai problemi fondamentali che in essa si dovranno risolvere sulle funzioni algebriche.

Nel primo capitolo sugli irrazionali, ci pare che converrebbe far cenno del postulato « esiste un solo irrazionale definito da due classi convergenti ». Nel parag. 3 (*limite di una successione*) assai di spesso si tralascia tanto nella dicitura quanto nella segnatura la parola e il segno del *valore assoluto della differenza*. Chiara ed originale è la dimostrazione dell'esistenza del limite a cui tende una successione di numeri crescenti continuamente ma non indefinitamente, dedotta dal criterio generale di convergenza di una successione di numeri.

Nei parag. 6 e 7 sulle serie reali e a termini positivi si usa qualche volta (vedi pag. 51) della proprietà associativa di una somma infinita senza averne dimostrata la possibilità.

Nel capitolo 2° (Analisi combinatoria) è notevole il paragrafo sulle sostituzioni, nel quale con chiarezza e semplicità sono esposti i fondamenti di tale teoria, i teoremi cardinali sull'ordine di una sostituzione, sull'ordine di un gruppo di sostituzioni e di un sottogruppo. Nei parag. 4 e 6 si dimostrano gli sviluppi di Taylor per le funzioni intere di una o più variabili mediante le potenze del binomio; è notevole in questi sviluppi l'introduzione del calcolo simbolico assai acconcio a rendere uniforme il procedimento e compendiosa la scrittura.

Nel capitolo 3° sono esposti assai sobriamente, ma con chiarezza esemplare, gli elementi della teoria dei determinanti e la loro applicazione alla risoluzione di un sistema di equazioni lineari. Forse la teoria dei determinanti meritava in qualche punto uno sviluppo maggiore; ci pare ad esempio che la conoscenza dello sviluppo di un determinante, secondo i minori di una sua matrice, avrebbe resa più facile l'intelligenza del teorema sul prodotto di due determinanti. L'autore non ha creduto di dimostrare questo teorema nel capitolo 3° ma lo ha rimandato al parag. 2, capit. 7° dove espone la teoria delle trasformazioni lineari di un sistema di variabili. A noi sarebbe parso più opportuno averlo incorporato nel capitolo generale sui determinanti, molto più se consideriamo che di un tale sviluppo l'autore fa uso anticipato nel parag. 7, cap. 5°, dove esprime il discriminante di una equazione algebrica sotto forma di determinante. Lo sviluppo del determinante di Wandermond, che serve all'autore per dimostrare che una funzione intera di grado n ad una variabile non può annullarsi per più di n valori distinti di essa, ci pare alquanto prolisso.

Nel cap. 4° (operazioni sui numeri complessi) i primi parag. hanno forse uno sviluppo eccessivo trattandosi di considerazioni assai semplici; nel parag. 5 di questo capit. (serie a termini complessi) l'autore, volendo giustificare la definizione di e^x per x complesso come limite della serie convergente $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots$ dimostra la relazione fondamentale $e^x e^y = e^{x+y}$ mediante il prodotto di due serie convergenti senza aver prima fatto parola su tale delicato argomento; solo in una nota alla fine del parag. ne dà un cenno troppo sommario ed incompleto. Ingegnosa ed elegante è invece la deduzione delle formole di Eulero dalla relazione

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{ib}{n}\right)^n = e^{\Phi}$$

ricercando il limite del primo membro.

Nel parag. 7 si considerano le serie che procedono secondo le potenze intere di una variabile complessa e si stabiliscono chiaramente le proprietà della loro convergenza incondizionata ed uniforme per ogni valore interno al cerchio di convergenza; alcune di queste dimostrazioni sono state ulteriormente semplificate con una pagina inviata più tardi in aggiunta.

Nel capit. 5° (radici di una equazione di grado n) ci sembrano superflui i teoremi sulle derivate della somma e del prodotto; nel parag. 2 si ammette come postulato l'esistenza di un valore della variabile che rende minimo il modulo della funzione intera $f(x)$ e con ciò si dimostra, come Cauchy, l'esistenza di una radice della $f(x) = 0$. Ma poi nel parag. 3 del capitolo stesso, il postulato precedentemente ammesso, è rigorosamente dimostrato. Ora benchè l'autore dichiari che il parag. 3 può essere ommesso da chi legge la prima volta la sua opera, pure dichiariamo francamente che la dimostrazione di un postulato, che si è creduto poco prima di ammettere, non ci pare corretto; ci sembra che se nel parag. sui limiti (capit. 1°) si fosse aggiunta qualche nozione sui *limiti inferiori e superiori* di una variabile, e se nel 1° parag. del capit. 5° si fosse pure aggiunta qualche proprietà delle funzioni continue, la dimostrazione dell'esistenza di una radice di $f(x) = 0$ si poteva esporre rigorosamente senza ammettere nessun postulato.

Il parag. 8 del capit. 5° è assai notevole ed importante; in esso si mostra, mediante la teoria delle funzioni simmetriche delle radici, come una espressione *radico-razionale* (ottenuta operando su quantità date mediante le quattro operazioni e l'estrazione di radice ad indice intero e positivo) si possa identicamente trasformare in un'altra, nella quale nessun radicale si trovi mai sottoposto ad alcun segno di divisione; si fa poi l'applicazione all'eliminazione dei radicali da una equazione $X = 0$ dove X è una espressione radicale. Il parag. 9 del capitolo non ci pare bene in armonia coi precedenti parag. ed anche in esso l'uso del prodotto di serie convergenti non è sufficientemente giustificato.

Il capit. 6° (teoria della divisibilità delle funzioni intere e dell'eliminazione) è modellato al pari dei primi quattro sui capitoli omologhi dell'opera citata (Capelli e Garbieri). Forse sarebbe stato più opportuno premettere il concetto di *campo di razionalità* a tutte le considerazioni svolte in questo capitolo allo scopo di far meglio risaltare l'importanza dell'algoritmo del *M. C. D.* delle funzioni intere e il concetto di funzioni prime fra loro.

Nel parag. 6 di questo capit. (risultante di due equazioni) è notevole la dimostrazione che il determinante dei coefficienti ottenuto col metodo dialitico di Sylvester, eguagliato a zero, esprime la condizione sufficiente perchè le due equazioni abbiano una radice in comune; tale dimostrazione è fondata su una relazione identica alla quale soddisfano i primi membri delle equazioni date e la loro risultante. Interessanti sono le note a questo parag. nelle quali si espongono altri metodi per la ricerca della risultante di due equazioni (metodo delle funzioni simmetriche e metodo di Eulero).

Nel parag. 7 (risoluzione di un sistema di due equazioni con due incognite) è assai elegante il metodo con cui si determina il grado della risultante ed interessanti le applicazioni geometriche alle intersezioni di due coniche e di due cerchi.

Il parag. 8 sull'eliminazione ci sembra fra i più rimarchevoli; il grado della risultante fra tre equazioni con tre incognite a coefficienti indeterminati, è trovato con un metodo ingegnoso e generale che consiste nel considerare dapprima il caso speciale in cui ciascuno dei primi membri delle tre equazioni sia un prodotto di funzioni lineari a tre incognite a coefficienti liberi. Le note aggiunte a questo parag. sono assai pregevoli; in esse si espongono alcuni metodi per determinare la risultante di più equazioni omogenee con altrettante incognite fondate sul Jacobiano dei primi membri e sulle funzioni simmetriche delle radici.

Nel cap. 7° (trasformazione delle equazioni e risoluzione delle equazioni dei primi quattro gradi) è stabilito nel primo paragrafo assai opportunamente e chiaramente la condizione a cui devono soddisfare i coefficienti di una trasformazione lineare di variabili, affinchè i due sistemi di variabili si corrispondano sempre univocamente senza escludere i valori infiniti di alcune di esse.

Assai interessanti le note al secondo paragrafo, dove si applicano le trasformazioni lineari alla proiettività fra due spazi omogenei ed alla omologia, nonchè allo studio delle proprietà principali delle sostituzioni ortogonali.

Belle le applicazioni al paragrafo 7 (risoluzione generale delle equazioni del 4° grado); vi si studiano i rapporti anarmonici a cui danno luogo le quattro radici dell'equazione del 4° grado, le condizioni affinchè tali rapporti diventino equianarmonici od armonici, ed infine si determina una equazione del 6° grado a cui devono soddisfare i sei rapporti anarmonici formati colle quattro radici dell'equazione del 4° grado; da questa equazione si deduce poi l'invariante assoluto della biquadratica.

Nel paragrafo 8 assai chiaramente si deducono, mediante trasformazione razionale delle radici, tanto la risultante di due equazioni espresse mediante le funzioni simmetriche delle radici, quanto le condizioni affinchè due equazioni abbiano radici in comune.

Nei paragrafi 9 e 10 assai opportunamente si espone il metodo escogitato da Lagrange per risolvere le equazioni del 3° e del 4° grado, e la trasformazione di Jerard col mezzo della quale è possibile, colla risoluzione di un'equazione del 3° o del 4° grado, far scomparire da un'equazione il secondo, terzo e quarto termine, oppure il secondo, terzo e quinto.

Nella nota al paragr. 10 si dimostra che una forma quadratica ad h variabili con coefficienti reali, si può sempre decomporre in una somma algebrica di quadrati e in modo assai semplice ed elegante vi si dimostra la legge di inerzia, secondo la quale, qualunque sia la decomposizione della forma data in forme indipendenti, è sempre costante il numero delle forme positive e quello delle negative.

Il capit. 8° (principii della teoria degli irrazionali algebrici) è senza dubbio il più originale dell'opera. Per la prima volta in un lavoro destinato alle scuole compare in modo elementare una tale teoria. Stabiliti i teoremi fondamentali sulle equazioni irriducibili in un dato campo, e determinata la condizione affinchè la $X^p - A = 0$ (con p numero primo) sia riducibile nel campo cui appartiene A, si giunge nel parag. 3 a questa importante conclusione che «se X è un'espressione radicale relativa ad un certo campo C costante e variabile e $F(X) = 0$ è l'equazione algebrica alla quale essa soddisfa, si può sempre, senza introdurre nuovi radicali, dare ad X una forma ridotta tale, che tutti i radicali in essa contenuti appartengano al campo di razionalità $(\Omega, X_1\, X_2 \ldots X_n)$, essendo le X_i radici di $F(X) = 0$, ed Ω una radice primitiva dell'unità il cui indice è il prodotto dei numeri primi distinti che si presentano come indici dei radicali».

Di questa forma ridotta l'autore fa una bella applicazione nel paragr. 4 alla dimostrazione della presenza dei radicali quadratici e cubici nelle formole di risoluzione delle equazioni generali il cui grado sia superiore a 2; e nel parag. 6 alla dimostrazione dell'impossibilità della risoluzione per radicali delle equazioni generali di grado superiore al quarto. Nel parag. 5 l'autore applica brillantemente la teoria esposta alla dimostrazione dell'impossibilità di trisecare un angolo qualunque coll'uso della riga e del compasso; ci piace che un argomento così classico figuri finalmente in un testo di analisi algebrica e vi figuri così degnamente per la semplicità e per la chiarezza.

Nei cap. 9° e 10° si studiano le proprietà generali delle equazioni a coefficienti reali. Di notevole troviamo i paragrafi 3 e 4 del cap. 10°, dove si espongono i principii del calcolo delle differenze finite; in essi si mostra assai opportunamente l'analogia di questo calcolo con quello ordinario riguardo agli sviluppi di potenze e alle regole di derivazione, e si fanno applicazioni alla determinazione approssimata delle radici di una equazione.

Non abbiamo inteso con questa rapida rassegna di fornire allo studioso indicazioni complete su tutti gli argomenti trattati nell'opera del Capelli, sapendosi già a priori entro quali limiti deve contenersi un corso di algebra complementare. Le osservazioni che ci siamo permessi di fare, sono in gran parte di natura formale e quindi non scemano il pregio dell'opera. Lo ripetiamo e con vero compiacimento: l'opera da noi esaminata ci sembra, fra le analoghe pubblicate in questi ultimi anni, una di quelle che raccolgono i maggiori pregi come lavoro destinato alle scuole superiori; il volume del CAPELLI, chiaro, sobrio, ordinato, è da annoverarsi fra quelli fortunati e tanto rari in Italia, che si leggono senza difficoltà, con vero piacere e con molto profitto.

Venezia, 10 aprile 1895.

F. PANIZZA.

G. VERONESE. — *Dimostrazione della proposizione fondamentale dell'equivalenza delle figure* (Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti. Tomo VI - serie VII - 1894-95).

Il chiarissimo Prof. VERONESE, confermando quanto aveva già dichiarato nei suoi *Fondamenti di Geometria*, che cioè la geometria euclidea può essere dedotta tutta dai postulati da lui ammessi, tra i quali non ne figura uno speciale per l'equivalenza, ha ultimamente dimostrato, nella nota suddetta, che *una figura finita non è equivalente ad una sua parte*, proposizione intorno a cui si è tanto discusso in questi ultimi tempi. L'A., ammettendola per i soli segmenti rettilinei, la estende alle altre *grandezze principali* (settori angolari, poligoni rettilinei, poliedri a faccie piane), e a tutte le figure in modo « geometrico ed elementare ».

L'importante lavoro, relativamente breve, è diviso in quattro parti, precedute da un po' d'introduzione. In questa l'A. accenna ai recenti tentativi del RÉTHY, dello SCHUR, del RAUSENBERGER e d'altri per togliere dalla geometria il postulato dell'equivalenza, e, dopo aver richiamato gli *Elementi di geometria* del DE PAOLIS, in cui, benchè venga ammesso il postulato, sono dimostrate parecchie proposizioni indipendentemente da esso, egli afferma che fu appunto partendo dalla costruzione di un triangolo equivalente ad un altro essendo data l'altezza ed un angolo adiacente alla base eguale ad un angolo dato, e da quella di un tetraedro equivalente ad un altro che abbia la stessa altezza e base equivalente, che gli riuscì di ottenere una dimostrazione completa della proposizione. La breve introduzione termina con alcune definizioni (parte di un segmento, parte poligonale di un poligono, parte poliedrica di un poliedro), e con quella fondamentale di figure equivalenti. Per figure equivalenti l'A. intende *quelle che possono essere divise in parti rispettivamente una ad una uguali* (*non escluso che il loro numero sia anche infinito*) *o sono determinate da somme di parti rispettivamente uguali.*

Nella prima parte l'A., dopo aver fatto osservare che si può indifferentemente ammettere che un segmento non sia equivalente o non sia uguale ad una sua parte, perchè ciascuna delle due proprietà è conseguenza dell'altra, estende la proposizione agli angoli. Ecco come:

« Sieno (ab), (ac) due settori angolari eguali nello stesso verso di un me« desimo fascio di raggi di centro O, e si considerino due punti B, C tali che « $OB \equiv OC$. La retta BC incontra la retta a in un punto A esterno al seg« mento BC, essendo ad es. b interno al settore (ac). I triangoli AOB, AOC « dovrebbero essere uguali per avere due lati e il settore angolare compreso « uguale, e perciò sarebbe $AB \equiv AC$, il che è assurdo ».

La retta BC può non incontrare la retta a; quindi, se non erro, la dimostrazione dovrebbe essere completata.

Nella seconda parte del lavoro, viene dimostrata la proprietà per i poligoni rettilinei. Il Prof. Veronese aveva dichiarato nei *Fondamenti* (*) che la retta può essere assunta come elemento fondamentale di costruzione delle figure, e di *riferimento delle grandezze geometriche*. Seguendo questa ultima idea, egli stabilisce appunto una corrispondenza tra i poligoni e i segmenti rettilinei in guisa da ottenere che, qualunque sia la divisione di un poligono in parti poligonali, la somma dei segmenti corrispondenti alle parti sia sempre uguale al segmento corrispondente al poligono. Il più difficile era di fissare una tale corrispondenza; ed ecco come il chiaro A. riesce all'intento. Applicata ad un triangolo qualunque l'ordinaria costruzione per trasformarlo in altro equivalente di data altezza e avente con esso un angolo in comune, assume come corrispondente al triangolo dato la base del nuovo rispetto all'altezza data, e dimostra che, se il triangolo dato è diviso in parti da rette passanti per uno qualunque dei vertici, la somma dei segmenti che, colla stessa costruzione, corrispondono alle parti è uguale al segmento corrispondente all'intiero triangolo. Preso poi un poligono qualunque e fissata in esso una decomposizione in triangoli, egli assume come corrispondente al poligono il segmento somma di quelli che corrispondono ai triangoli in cui esso è stato diviso, e perviene a dimostrare che, qualunque sia la decomposizione di un poligono in parti poligonali, la somma dei segmenti ad esse corrispondenti, secondo la suddetta costruzione, è sempre il segmento corrispondente al poligono. Da questo risultato, coll'aiuto del postulato ammesso pei segmenti, passa facilmente, colla riduzione all'assurdo, alla proposizione: *un poligono rettilineo non è equivalente ad una sua parte poligonale.*

Per stabilire, nel principio, la corrispondenza tra i triangoli e i segmenti, vien premessa la proprietà: due triangoli della medesima base e della stessa altezza sono equivalenti, per la cui dimostrazione, senza far uso del postulato, si può ad es., come l'A. stesso indica, seguire il De Paolis (*Elem. di geom.*, § 356, 357). Inoltre l'A. si basa su qualche proprietà della teoria delle proporzioni; ma in alcune note del suo lavoro, egli accenna un altro metodo che permette di evitare questa teoria.

Analogo al precedente è il procedimento seguito dall'A., nella terza parte del lavoro, per estendere la proprietà ai poliedri a facce piane. Applicando ad un tetraedro la costruzione per trasformarlo in altro equivalente di data altezza e avente col dato un triedro in comune, egli ne deduce che ad un tetraedro si può far corrispondere un segmento per modo che se il tetraedro è diviso in parti con piani passanti per uno qualunque dei suoi spigoli, la somma dei segmenti corrispondenti alle parti è uguale a quello corrispondente all'intero tetraedro. Preso poi un poliedro qualunque e fissata in esso una scomposizione in tetraedri, assume come corrispondente al poliedro la somma dei segmenti corrispondenti ai tetraedri in cui esso è stato diviso, e prova che qualunque sia la divisione del poliedro in parti poliedriche, la somma dei segmenti che a queste corrispon-

(*) *Fond. di geom.* del Prof. G. Veronese. — Introd. pag. XXXVII.

dono è uguale al segmento corrispondente al poliedro. Da questo risultato, come pel poligono, deduce che *un poliedro a facce piane non è equivalente ad una sua parte poliedrica*.

Per giungere a questi risultati, l'A. premette la proposizione: due tetraedri se hanno basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti, per la cui dimostrazione, indipendentemente dal postulato, si può ancora seguire il De Paolis (*Elem. di geom.*, §§ 369, 370, 371, 396). L'A. fa necessariamente osservare in proposito quanto segue: «Un tetraedro possiamo ritenerlo determinato in modo unico dalla serie di prismi triangolari interni iscritti in esso e colle facce triangolari parallele alla base, e quindi due tetraedri, secondo la data definizione, sono equivalenti se sono divisibili in prismi rispettivamente equivalenti, il che avviene appunto, come d'ordinario si dimostra, quando essi hanno la stessa base e la stessa altezza, senza far uso però del concetto di limite».

Stabilita così la proposizione fondamentale per le grandezze principali, l'A., nella quarta parte del lavoro, perviene a dimostrarla per tutte le figure limiti di grandezze principali, o di altre figure che alla loro volta sieno limiti di grandezze principali, e perciò per ogni linea, superficie o solido intuitivo finito.

Il Prof. Veronese viene indubbiamente col suo lavoro a portare una gran luce sopra un delicatissimo argomento. La sua dimostrazione elementare della proposizione fondamentale dell'equivalenza sarà introdotta senz'altro nell'insegnamento secondario. Forse, avuto anche riguardo alle figure piuttosto complicate che ne risultano, qualche insegnante troverà un po' lunga e delicata la parte della dimostrazione in cui viene fissata la corrispondenza fra un triangolo (tetraedro) e un segmento, per modo che la somma dei segmenti corrispondenti alle parti triangolari (tetraedriche) sia uguale al segmento che corrisponde al triangolo (tetraedro). Ma per questa parte si potrebbe tentare una semplificazione: vedere, cioè, se per fissare una qualsiasi corrispondenza fra i triangoli (tetraedri) e i segmenti in guisa da giungere ai risultati cui perviene il Professor Veronese, si possa fare a meno di qualunque nozione di equivalenza. Se, per esempio, s'inscrivesse un segmento *costante* α tra i lati di ciascuno degli angoli di un triangolo (o di ciascuno degli angoli delle facce di un tetraedro) parallelamente al lato opposto, e si assumessero come corrispondenti alle parti in cui il triangolo (tetraedro) rimane diviso da rette (piani) passanti per uno qualunque dei suoi vertici (spigoli), i segmenti determinati da quelle rette (piani) sul segmento inscritto; e preso un poligono (poliedro) e fissata in esso una composizione in triangoli (tetraedri), si assumesse come corrispondente al poligono (poliedro) la somma di tanti segmenti uguali ad α quanti sono i triangoli (tetraedri) in cui esso è stato diviso, non si potrebbe poi per tutto il resto, se io non erro, seguire la via tanto bene tracciata dal Prof. Veronese? Non basta che la corrispondenza sia tale che la somma dei segmenti corrispondenti alle parti sia uguale al segmento corrispondente all'intera figura?

Fermo, maggio 1895.

Corrado Ciamberlini.

Finita la Redazione il dì 10 giugno 1895.

SULLA TEORIA DELLA EQUIVALENZA GEOMETRICA

Nota del Prof. G. LAZZERI

(*Continuazione e fine: V. pag. 93*).

III. — Equivalenza dei poligoni sferici

16. Teorema. — *Se un poligono piano o sferico è scomposto in più poligoni, il numero di questi, aumentato del numero dei vertici comuni o non comuni a più poligoni parziali, supera di uno il numero dei lati di questi poligoni.*

Indichiamo con p il numero delle parti in cui è scomposto un dato poligono, con v ed l il numero dei vertici e dei lati comuni o non comuni a queste parti; si deve dimostrare l'egualianza

$$v + p - l = 1.$$

Infatti, se dal poligono dato sopprimiamo una delle sue parti che abbia con esso in comune n lati consecutivi, e perciò anche $n - 1$ vertici, e indi chiamo con p', v', l' i numeri di poligoni, vertici e lati rimanenti, si ha

$$p' = p - 1, \qquad v' = v - (n - 1), \qquad l' = l - n,$$

e quindi

$$v' + p' - l' = v + p - l.$$

La differenza $v + p - l$ dunque non cambia, sopprimendo successivamente una ad una le parti del poligono dato. Quando è rimasto un solo poligono parziale di n lati, si ha $v = n$, $l = n$ $p = 1$, e perciò si ha sempre

$$v + p - l = 1.$$

Se ne deduce

$$v - 1 = l - p.$$

17. Teorema. — *Se un poligono sferico è scomposto in più poligoni sferici, il suo eccesso sferico è eguale alla somma degli eccessi sferici delle sue parti.*

Indichiamo con $m_1, m_2, \ldots, m_p$ i numeri dei lati dei p poligoni, in cui è scomposto un poligono sferico dato, con $S_1, S_2, \ldots, S_p$ le somme degli angoli sferici di questi poligoni, con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ i loro eccessi sferici, con π un angolo sferico piatto. Si ha

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &\equiv S_1 - (m_1 - 2)\pi \\ \varepsilon_2 &\equiv S_2 - (m_2 - 2)\pi \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_p &\equiv S_p - (m_p - 2)\pi,\end{aligned}$$

e sommando queste uguaglianze

$$\sum_1^p \varepsilon_i \equiv \sum_1^p S_i - \sum_1^p m_i \pi + 2p\pi.$$

Indichiamo ora con l_1 il numero dei lati che fanno parte del contorno dell'intero poligono, con l_2 quella dei lati interni al medesimo. Siccome ciascuno di questi ultimi lati è comune a due poligoni parziali, mentre ciascuno dei primi appartiene ad un solo di questi poligoni, si ha

$$\sum_1^p m_i = l_1 + 2l_2.$$

e per conseguenza l'eguaglianza precedente diviene

$$\begin{aligned}\sum_1^p \varepsilon_i &\equiv \sum_1^p S_i - l_1\pi - 2l_2\pi + 2p\pi \\ &\equiv \sum_1^p S_i + l_1\pi - 2(l - p)\pi,\end{aligned}$$

essendo $l = l_1 + l_2$. Per il teorema precedente si ha pure

$$\sum_1^p \varepsilon_i \equiv \sum_1^p S_i + l_1\pi - 2(v - 1)\pi.$$

Se ora sopprimiamo tutti gli l_2 lati interni all'intero poligono, per ogni vertice soppresso interno al poligono, $\sum_1^p S_i$ e $2(v-1)\pi$ diminuiscono ciascuno di 2π e $l_1\pi$ non cambia, mentre per ogni vertice soppresso, situato sul contorno ma non appartenente all'intero poligono, $\sum_1^p S_i$ e $l_1\pi$ diminuiscono ciascuno di π e $2(v-1)\pi$

di 2π, e quindi in ogni caso il secondo membro dell' eguaglianza precedente non cambia. Ma, così operando, $\sum_1^p S_i$ si riduce alla somma S degli angoli dell'intero poligono, v e l_1 divengono il numero n dei suoi vertici o dei suoi lati, onde si ottiene

$$\begin{aligned}\sum_1^p \varepsilon_i &\equiv S + n\pi - 2(n-1)\pi \\ &\equiv S - (n-2)\pi \equiv \varepsilon,\end{aligned}$$

indicando con ε l'eccesso sferico dell'intero poligono.

Corollari. — 1° *Se due poligoni sferici sono equivalenti, i loro eccessi sferici sono eguali.*

Due poligoni sferici equivalenti si possono scomporre in parti rispettivamente eguali; e perciò i loro eccessi sferici sono eguali, perchè ambedue non sono altro che la somma degli eccessi sferici delle medesime parti; e questa somma è sempre lo stesso angolo sferico, qualunque sia l'ordine col quale sono riuniti gli eccessi sferici delle singole parti, perchè gli angoli sferici appartenenti ad una data superficie sferica costituiscono una classe di grandezze di prima specie (*G.* § 275).

2° *Se due poligoni sferici* P, P′ *sono scomposti in parti, in modo che* P *contenga parti eguali a tutte quelle di* P′ *insieme ad altre, l'eccesso sferico di* P *è maggiore di quello di* P′.

3° *Se due poligoni sferici si possono scomporre in parti rispettivamente eguali, non è possibile trovare un'altra scomposizione, per la quale uno di essi contenga tutte le parti dell'altro, insieme ad altre parti; e viceversa.*

Sieno P, P' due poligoni sferici, e supponiamo che esista una scomposizione, per la quale P sia equivalente a P', ed un'altra scomposizione, per la quale P contenga tutte le parti di P' insieme ad altre. Allora l' eccesso sferico di P dovrebbe essere contemporaneamente eguale e maggiore di quello di P'; e ciò è assurdo.

18. Teorema. — *Dato un triangolo sferico* ABC, *ed il suo opposto* A′B′C′ (fig. 11ª), *e condotti i circoli minori* c_1, c_2, *che passano l'uno per i punti* A, B, C′, *l'altro per i punti* A′, B′, C, *ed il circolo massimo* c *situato in un piano parallelo a quelli dei circoli* c_1, c_2, *ed equidistante da essi, l'eccesso sferico del triangolo*

ABC *è eguale all'angolo sferico, che ha per vertici* A, A', *per un lato il semicircolo massimo* ABA', *e che stacca sul circolo* c *un arco doppio di quello* MN *staccato sullo stesso circolo dall'angolo sferico* ACB.

Se facciamo rotare la sfera attorno al diametro perpendicolare ai piani dei circoli c_1, c_2, c, finchè il punto B, scorrendo sul circolo c_1, prenda la posizione A, il punto A prende una posizione A_1 sul circolo c_1, e C e A' prendono delle posizioni C_1 e A'_1 sul circolo c_2, in modo che gli archi BA, AA_1, CC_1, $A'A'_1$, appartenenti ai circoli c_1 o c_2, sono eguali; il semicircolo massimo ABA' prende la posizione $A_1AA'_1$ in modo che l'arco EE_1 del circolo massimo c compreso fra questi due semicircoli massimi (cioè l'arco percorso dal punto E) sia eguale all'arco NN_1 dello stesso circolo c, compreso fra gli archi di circolo massimo BC, AC_1 (cioè all' arco percorso dal punto N).

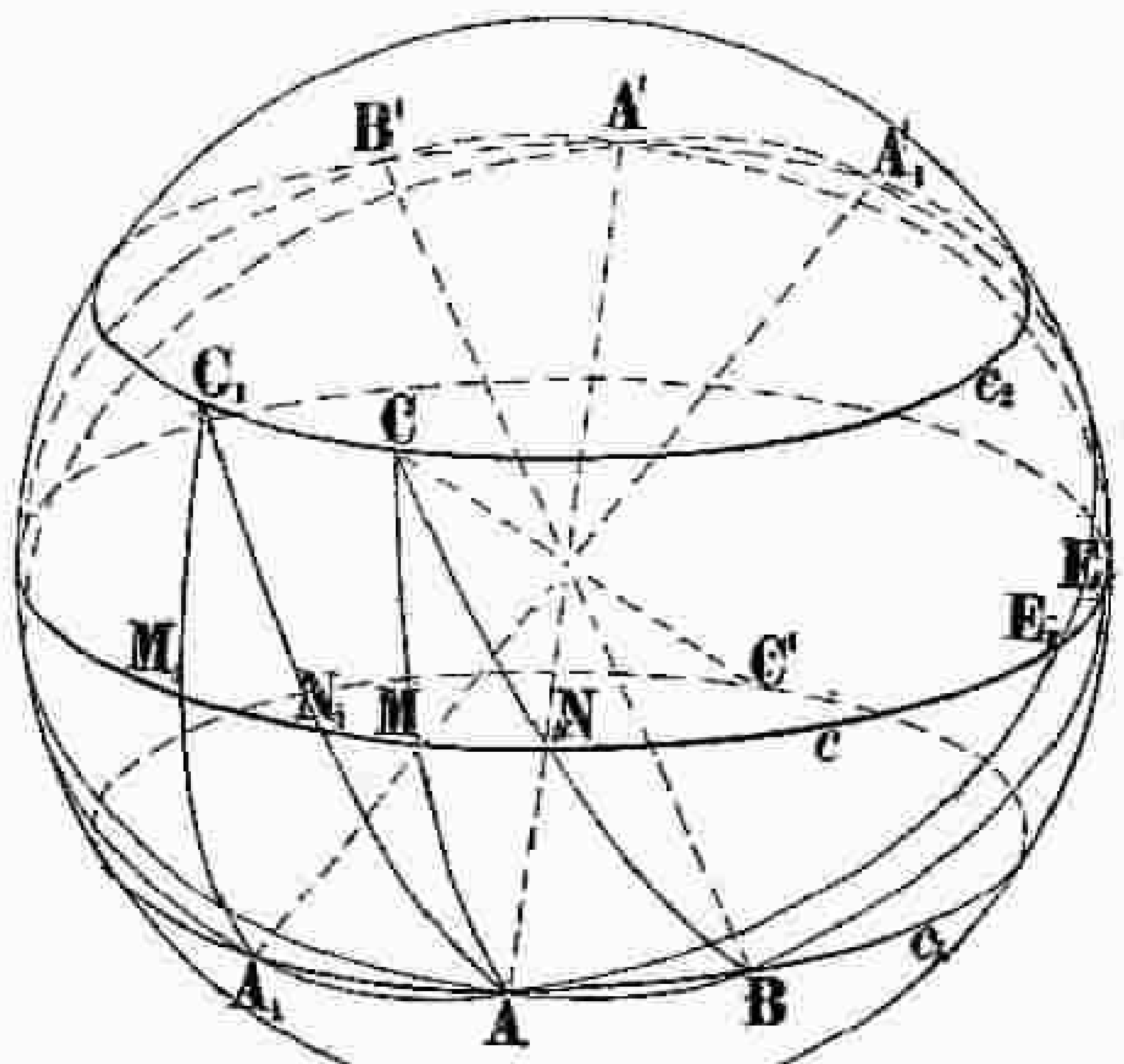


Fig. 11ª.

Conducendo anche l'arco di circolo massimo CC_1, si vede facilmente che il triangolo ABC si può sovrapporre al triangolo CC_1A, e per conseguenza l'arco MN si può sovrapporre all'arco MN_1. Ne segue che EE_1 eguale ad NN_1 è il doppio dell'arco MN. Inoltre si ha

$$\text{ang. } BCA \equiv CAC_1, \quad \text{ang. } ABC \equiv A_1AC_1,$$

e perciò l'angolo sferico, che ha per lati i semicircoli massimi AEA', AE_1A', è eguale alla somma degli angoli sferici del triangolo ABC, diminuita di un angolo sferico piatto, cioè è eguale all'eccesso sferico di questo angolo.

19. Teorema. — *Se* c_1, c_2 *sono due circoli minori eguali di una sfera, situati in piani paralleli ed equidistanti da quello di un circolo massimo* c, *tutti i triangoli sferici, che hanno due vertici comuni sul circolo* c_1 *ed il terzo vertice in un punto qualunque del circolo* c_2, *sono equivalenti.*

Siano ABC, ABC_1 due triangoli sferici, che abbiano due vertici A, B comuni sul circolo c_1 e i vertici C, C_1 rimanenti sul circolo c_2. Possono darsi tre casi, secondo che l'arco del circolo c_2 limitato dai due punti C, C_1 è minore, eguale o maggiore dell'arco del circolo c_1 limitato dai punti A, B.

1° Sia (fig. 12ª) l'arco $CC_1 < AB$, e siano M, N, M_1, N_1 i punti d'incontro del circolo c coi lati AC, BC, AC_1, BC_1 dei due triangoli, ossia i punti di mezzo di questi archi. Facciamo rotare la sfera attorno al diametro perpendicolare al piano del circolo c, finchè il punto C prenda la posizione C_1; allora l'arco CM prende la posizione C_1P interna all'angolo ACB. Facciamo poi rotare la sfera attorno allo stesso diametro, finchè il punto C_1 prenda la posizione C; allora l'arco C_1N_1 prende la posizione CQ interna all'angolo ACB. Coll'uno o coll'altro di questi movimenti, i due triangoli CMQ, C_1PN_1 si portano a coincidere, e perciò sono eguali.

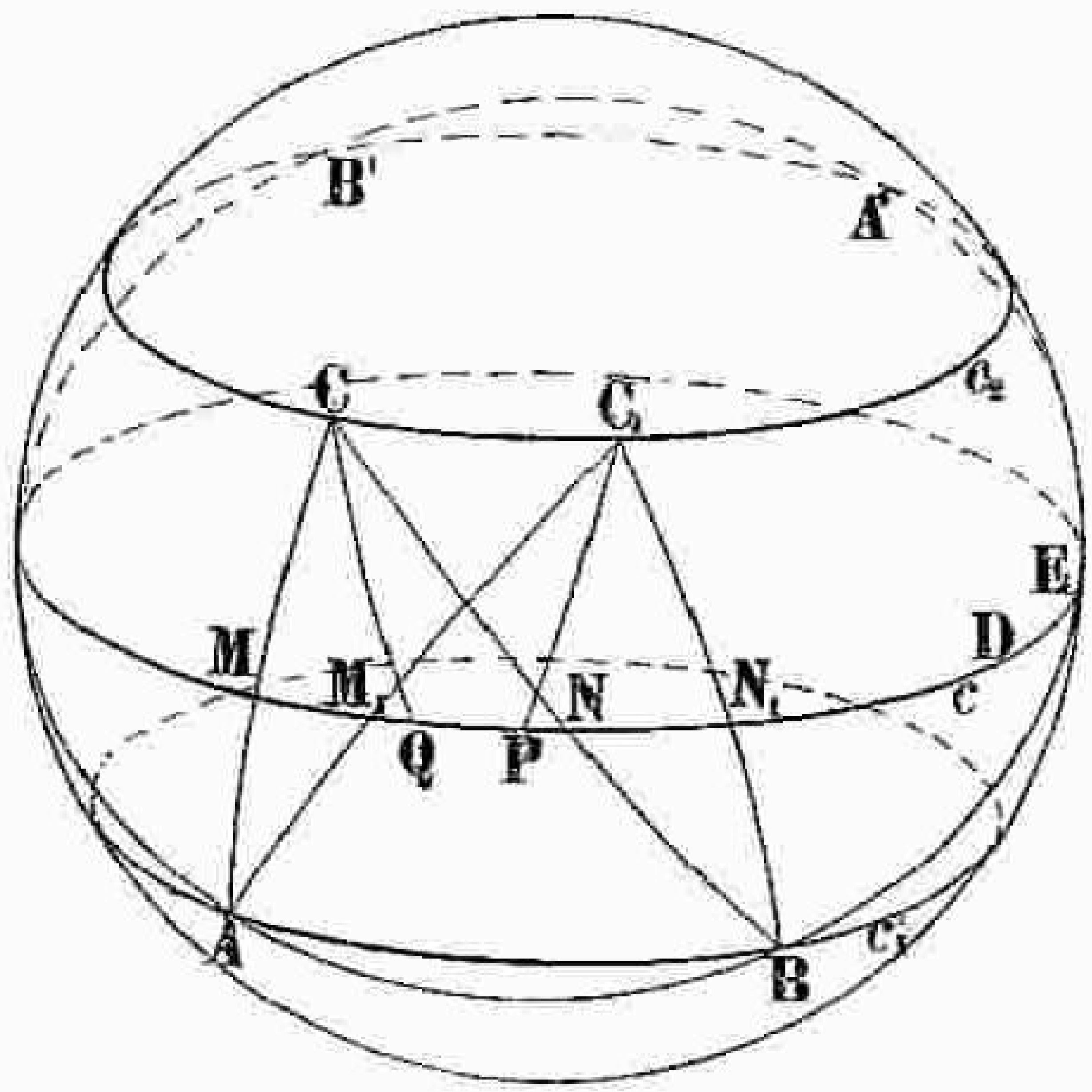


Fig. 12ª.

È facile allora vedere che si ha

$$CQ \equiv C_1N_1 \equiv N_1B, \quad CN \equiv NB, \quad QN \equiv NN_1,$$
$$C_1P \equiv CM \equiv MA, \quad C^1M_1 \equiv M_1A, \quad M_1P \equiv MM_1,$$

e per conseguenza

$$MN \equiv M_1N_1.$$

Ne segue

$$CQN \equiv BN_1N$$
$$AMM_1 \equiv C_1PM_1.$$

Inoltre si ha

$$CMQ \equiv C_1PN_1$$
$$AM_1NB \equiv AM_1NB.$$

Sommando queste quattro eguaglianze, si trova

$$ABC \doteq ABC_1.$$

2° Se l'arco $CC_1 \equiv AB$, è facile vedere che i due lati BC, AC_1 si tagliano per metà in un punto N del circolo c e che i due triangoli ANC, C_1NB sono eguali. Ne segue che i due triangoli ABC, ABC_1, che si ottengono sommando il triangolo ANB con quei due triangoli rispettivamente, sono equivalenti.

3° Se l'arco $CC_1 > AB$, si riporti sull'arco CC_1 l'arco AB tante volte quante è possibile. Se $D_1, D_2, \ldots D_n$ sono gli estremi di questi archi, in modo che sia

$$AB \equiv CD_1 \equiv D_1D_2 \equiv \ldots \equiv D_{n-1}D_n \overline{\overline{<}} D_nC_1,$$

per i due casi precedenti si ha

$$ABC \doteq ABD_1 \doteq ABD_2 \doteq \ldots \doteq ABD_n \doteq ABC_1,$$

e quindi

$$ABC \doteq ABC_1.$$

Si osservi che gli archi MN, M_1N_1 del circolo c interni agli angoli ACB, AC_1B sono eguali in tutti i tre casi; viceversa è facile vedere che, se sul circolo c si prende un arco $M_1N_1 \equiv MN$ (supponendo dato il triangolo ABC), i due archi AM_1, BN_1 s'incontrano in un punto C_1 del circolo c_2, e il triangolo ABC_1 è equivalente al triangolo ABC.

Supponendo che il triangolo ABC resti fisso, e che il vertice C_1 dell'altro triangolo ABC_1 prenda la posizione del punto A' opposto ad A, questo triangolo si riduce all'angolo sferico che ha per vertici i punti A, A', che ha per lato il semicircolo ABA', e che stacca sul circolo c un arco eguale ad MN, ossia esso si riduce alla metà dello eccesso sferico del triangolo ABC (V. § 16). Dunque il triangolo ABC è equivalente alla metà del suo eccesso sferico.

Corollari. — 1° *Ogni triangolo sferico è equivalente alla metà del suo eccesso sferico.*

2° *Ogni poligono sferico è equivalente alla metà del suo eccesso sferico.*

20. Teorema. — *Dati due poligoni sferici* P *e* P′, *è sempre possibile scomporli in un numero* finito *di parti; in modo che le parti di* P *sieno rispettivamente eguali a quelle di* P′, *oppure in modo che* P *contenga le parti di* P′ *insieme ad altre, oppure in modo che* P′ *contenga le parti di* P *insieme ad altre. Quando si verifica uno di questi casi, non è possibile che esista una scomposizione per la quale si verifichi uno degli altri due.*

Costruiti gli eccessi sferici ε, ε' dei due poligoni P, P', si dovrà dare uno ed uno solo dei seguenti casi: $\varepsilon \equiv \varepsilon'$, $\varepsilon > \varepsilon'$, $\varepsilon < \varepsilon'$, poichè gli angoli sferici sono grandezze di prima specie.

Se $\varepsilon \equiv \varepsilon'$, eseguendo contemporaneamente la scomposizione, per la quale l'angolo sferico ε si divide in un numero *finito* di parti rispettivamente eguali a quelle del poligono P, e quella per la quale la stessa ε si divide in un numero *finito* di parti eguali a quelle del poligono P', otterremo una terza scomposizione di ε in parti, che sono le parti provenienti da ciascuna delle due scomposizioni suddette, suddivise mediante l'altra scomposizione. Riportando queste suddivisioni sulle parti del poligono P e su quelle del poligono P', questi restano scomposti in parti rispettivamente eguali, e perciò sono equivalenti.

Collo stesso ragionamento si dimostra che, se è $\varepsilon > \varepsilon'$, i due poligoni P, P' si possono scomporre in parti (in numero *finito*), in modo che in P si trovino tutte le parti di P' insieme ad altre; e se è $\varepsilon < \varepsilon'$, i due poligoni P, P' si possono scomporre in parti (in numero *finito*) in modo che in P' si trovino tutte le parti di P insieme ad altre.

La seconda parte del teorema è conseguenza immediata dei corollari 1° e 2° del § 4.

Definizioni. — 1° *Se due poligoni sferici* P, P′ *si possono scomporre in parti, in modo che in* P *si trovino tutte le parti di* P′ *in-*

sieme ad altre, si dice che P *è maggiore di* P′ (P > P′) *oppure che* P′ *è minore di* P (P′ < P).

Il teorema precedente, in seguito a questa, definizione si può enunciare così: *Dati due poligoni sferici* P, P′ *si deve dare uno ed uno solo dei seguenti casi:* P > P′, P = P′, P < P′.

2° *Se un poligono sferico è somma di altri due* B, C, *si dice che ciascuna di queste parti è differenza fra* A *e l'altra parte* (C = A — B, B = A — C)

Corollario. — *Dati due poligoni non equivalenti, esiste sempre la loro differenza. Tutte le differenze che si possono formare sono equivalenti.*

In seguito a quanto ho esposto è facile dimostrare tutti i teoremi relativi alle differenze e ai multipli di poligoni sferici (*G.* §§ 274, 276, 277, 278), fra i quali i più notevoli sono i seguenti:

Sono equivalenti i poligoni sferici differenze di poligoni rispettivamente equivalenti.

Sono equivalenti i poligoni sferici equisummultipli di poligoni equivalenti.

IV. — Equivalenza dei poliedri.

21. Considerando la classe di grandezze costituita da tutti i prismi, è facile dimostrare anche per essa la proprietà ammessa fin qui come postulato.

È noto che si può rigorosamente dimostrare che un prisma è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, che ha per altezza l'altezza del prisma e per base un rettangolo equivalente alla base del medesimo (*G.* §§ 313, 314, 315, 316). — Ciò posto, si può anche dimostrare che è possibile costruire un parallelepipedo rettangolo di una data serie (che cioè ha due spigoli consecutivi rispettivamente eguali a due segmenti dati a, b), equivalente ad un prisma qualunque P (*G.* § 317). Infatti essendo B e h la base e l'altezza del prisma P, si costruisca un rettangolo equivalente al poligono B, e che abbia due lati opposti eguali al segmento a; gli altri due lati risulteranno eguali ad un segmento *unico e determinato* m (§ 14 cor. 5°), qualunque sia il modo con cui si è ottenuto il rettangolo. Il prisma P è dunque equivalente al parallelepipedo rettangolo dei segmenti a, m, h. Riguardando in questo come altezza a, si può costruire un rettangolo equivalente a quello di m ed h, e che abbia due lati opposti eguali al segmento b; gli altri due lati risulteranno eguali ad un segmento c *unico e determinato*, qualunque sia il metodo seguito per ottenere quest'ultimo rettangolo; ed il dato prisma risulta equivalente al parallelepipedo rettangolo dei segmenti a, b, c, dei quali i primi due sono dati ad arbitrio.

Colle costruzioni precedenti ad ogni prisma viene *associato* un parallelepipedo rettangolo di una data serie determinato ed unico, benchè non resti *a priori* esclusa la possibilità di trovare con altre costruzioni altri parallelepipedi rettangoli della stessa serie equivalenti al medesimo prisma, ma non eguali al parallelepipedo associato. — Questa possibilità poi resta esclusa ripetendo i ragionamenti fatti nei §§ 12 e 13 per i poligoni, e si può completare la teoria dell'equivalenza dei prismi come per i poligoni piani e sferici.

Adottando dunque una definizione da me stabilita nei miei Elementi di geometria (§ 275), potremo dire che la classe di grandezze formata da tutti i poligoni piani, quella formata da tutti i poligoni sferici di una data superficie sferica, e quella formata da tutti i prismi sono di *2ª specie.*

TRASVERSALI NEI POLIGONI

Nei *Nouvelles Annales de Mathématiques* (*) furono dimostrati alcuni teoremi che riguardano le tangenti (piani tangenti) condotte dai vertici (lati) di un poligono piano (gobbo) ad una curva (superficie) algebrica di classe m. Per il valore particolare $m = 1$, cioè

(*) Tomo XI e tomo XIV, 3ª serie.

per il caso che la curva o la superficie si riducano ad un punto, le dimostrazioni di quei teoremi si possono fare senza uscire dai limiti della geometria elementare.

Teorema 1. — *Se dai vertici di un poligono piano si conducono le rette che passano per uno stesso punto del suo piano (o parallele alla stessa direzione), il prodotto dei rapporti in cui queste rette segano gli altri lati del poligono è* $+1$.

1° Sia $A_1 A_2 \ldots A_n$ un poligono piano; O un punto del suo piano; $p_1, p_2, \ldots p_n$ i prodotti dei rapporti (**) secondo cui $A_1 O$, $A_2 O, \ldots A_n O$ segano gli altri lati del poligono. Sia inoltre M il punto ove $A_1 O$ sega la diagonale $A_n A_2$ che unisce i vertici adiacenti ad A_1; dal poligono $A_2 A_3 \ldots A_n$, segato dalla $A_1 O$, si ha

$$p_1 \cdot \frac{A_n M}{M A_2} = (-1)^{n-1}.$$

Per un noto teorema si ha in valore assoluto e segno

$$\frac{\text{triang. } O A_1 A_n}{\text{triang. } O A_1 A_2} = \frac{M A_n}{M A_2}, \text{ o anche } \frac{A_n A_1 O}{O A_1 A_2} = \frac{A_n M}{M A_2},$$

onde la precedente diviene

$$p_1 = (-1)^{n-1} \frac{O A_1 A_2}{A_n A_1 O}.$$

Analogamente si trova

$$p_2 = (-1)^{n-1} \frac{O A_2 A_3}{A_1 A_2 O}, \quad p_3 = (-1)^{n-1} \frac{O A_3 A_4}{A_2 A_3 O}, \ldots \ldots,$$
$$p_n = (-1)^{n-1} \frac{O A_n A_1}{A_{n-1} A_n O}.$$

Moltiplicando si ottiene quindi

$$p_1 p_2 p_3 \ldots\ldots p_n = (-1)^{n(n-1)} = +1.$$

2° Nello stesso poligono sieno $A_1 O_1$, $A_2 O_2, \ldots A_n O_n$ rette del suo piano parallele fra loro, sia ancora p_1 il prodotto dei rapporti in cui $A_1 O_1$ sega i lati del poligono non adiacenti ad A_1, ecc.,

(**) Per rapporto in cui un punto M, posto su di un lato $A_s A_{s+1}$ di un poligono $A_1 A_2 \ldots\ldots A_n$ o sul suo prolungamento, divide il lato stesso, intendo il rapporto positivo o negativo $\frac{A_s M}{M A_{s+1}}$.

M il punto ove $A_1 O_1$ sega $A_n A_2$, e inoltre sieno $d_1, d_2 \ldots . d_n$ le distanze fra $A_1 O_1$ ed $A_2 O_2$, fra $A_2 O_2$ ed $A_3 O_3, \ldots .$ fra $A_n O_n$ ed $A_1 O_1$.

Si avrà ancora $p_1 \frac{A_n M}{M A_2} = (-1)^{n-1}$; ma essendo $\frac{A_n M}{M A_2} = \frac{d_n}{d_1}$, ne deriva

$$p_1 = (-1)^{n-1} \frac{d_1}{d_n}$$

ed analogamente

$$p_2 = (-1)^{n-1} \frac{d_2}{d_1},\ p_3 = (-1)^{n-1} \frac{d_3}{d_2} \ldots \ldots\ p_n = (-1)^{n-1} \frac{d_n}{d_{n-1}}.$$

Moltiplicando si ha

$$p_1\, p_2\, p_3 \ldots \ldots p_n = (-1)^{n(n-1)} = +1.$$

Il teorema inverso è il seguente: *se* n *rette che passano rispettivamente per i vertici di un* n*-gono piano dividono gli altri lati in rapporti, il cui prodotto è* $+1$, *ed* $n - 1$ *di queste rette passano per uno stesso punto (o sono fra loro parallele) del suo piano, la* n^{ma} *retta passerà per lo stesso punto (o sarà parallela alle altre).* Per la dimostrazione vedi *Nouv. Ann.*, Tome XIV.

Per $n = 3$, i due teoremi danno il teorema di Ceva e l'inverso, alquanto generalizzati.

Teorema 2. — *Se da un vertice* (A_1) *di un poligono piano* $A_1 A_2 \ldots . A_n$ *si conduce una retta che passi per un punto* O (*o parallela ad una data direzione*) *del suo piano, fino ad incontrare due lati qualunque* ($A_s A_{s+1}$, $A_{n-s+1} A_{n-s+2}$) *del poligono, equidistanti da quel vertice; indi dal vertice successivo* (A_2) *si conduce la retta che passi per lo stesso punto (o parallela alla stessa direzione) fino ad incontrare i due lati successivi* ($A_{s+1} A_{s+2}$, $A_{n-s+2} A_{n-s+3}$); *e altrettanto si fa per ogni altro vertice, il prodotto di tutti i rapporti, in cui queste rette segano quei lati, è* $+1$:

1° Indicando con α_s, β_{n-s+1} rispettivamente i punti ove $A_1 O$ incontra i lati $A_s A_{s+1}$, $A_{n-s+1} A_{n-s+2}$, con α_{s+1}, β_{n-s+2} i punti ove $A_2 O$ incontra i due lati successivi $A_{s+1} A_{s+2}$, $A_{n-s+2} A_{n-s+3}$, ecc., si avrà:

$$\left.\begin{array}{rcl}
\dfrac{A_s\,\alpha_s}{\alpha_s\,A_{s+1}} & = & \dfrac{A_s\,O\,A_1}{A_1\,O\,A_{s+1}} \\
\dfrac{A_{s+1}\,\alpha_{s+1}}{\alpha_{s+1}\,A_{s+2}} & = & \dfrac{A_{s+1}\,O\,A_2}{A_2\,O\,A_{s+2}} \\
\cdots & & \cdots \\
\cdots & & \cdots \\
\dfrac{A_n\,\alpha_n}{\alpha_n\,A_1} & = & \dfrac{A_n\,O\,A_{n-s+1}}{A_{n-s+1}\,O\,A_1} \\
\dfrac{A_1\,\alpha_1}{\alpha_1\,A_2} & = & \dfrac{A_1\,O\,A_{n-s+2}}{A_{n-s+2}\,O\,A_2} \\
\cdots & & \cdots \\
\cdots & & \cdots \\
\dfrac{A_{s-1}\,\alpha_{s-1}}{\alpha_{s-1}\,A_s} & = & \dfrac{A_{s-1}\,O\,A_n}{A_n\,O\,A_s}
\end{array}\right\}[1]
\qquad
\left.\begin{array}{rcl}
\dfrac{A_{n-s+1}\,\beta_{n-s+1}}{\beta_{n-s+1}\,A_{n-s+2}} & = & \dfrac{A_{n-s+1}\,O\,A_1}{A_1\,O\,A_{n-s+2}} \\
\dfrac{A_{n-s+2}\,\beta_{n-s+2}}{\beta_{n-s+2}\,A_{n-s+3}} & = & \dfrac{A_{n-s+2}\,O\,A_2}{A_2\,O\,A_{n-s+3}} \\
\cdots & & \cdots \\
\cdots & & \cdots \\
\dfrac{A_n\,\beta_n}{\beta_n\,A_1} & = & \dfrac{A_n\,O\,A_s}{A_s\,O\,A_1} \\
\dfrac{A_1\,\beta_1}{\beta_1\,A_2} & = & \dfrac{A_1\,O\,A_{s+1}}{A_{s+1}\,O\,A_2} \\
\cdots & & \cdots \\
\cdots & & \cdots \\
\dfrac{A_{n-s}\,\beta_{n-s}}{\beta_{n-s}\,A_{n-s+1}} & = & \dfrac{A_{n-s}\,O\,A_n}{A_n\,O\,A_{n-s+1}}
\end{array}\right\}[2]$$

I numeratori dei secondi membri delle [1] sono eguali ai denominatori dei secondi membri delle [2], e i denominatori ai numeratori; onde moltiplicando le [1], [2] membro a membro, e chiamando P il prodotto dei rapporti, di cui è parola nell'enunciato del teorema, si ha:

$$P = +1.$$

2° Sieno $A_1\,O_1$, $A_2\,O_2$, $\ldots$ $A_n\,O_n$ rette fra loro parallele del piano del poligono; α_s, β_{n-s+1} i punti ove $A_1\,O_1$ sega i lati $A_s\,A_{s+1}$, $A_{n-s+1}\,A_{n-s+2}$; α_{s+1}, β_{n-s+2} i punti ove $A_2\,O_2$ sega i lati $A_{s+1}\,A_{s+2}$ $A_{n-s+2}\,A_{n-s+3}$, ecc.; e si indichi inoltre con $d_{m,r}$ la distanza fra $A_m\,O_m$ ed $A_r\,O_r$.

Si avrà

$$\left.\begin{array}{rcl}
\dfrac{A_s\,\alpha_s}{\alpha_s\,A_{s+1}} & = & \dfrac{d_{s,1}}{d_{1,s+1}} \\
\dfrac{A_{s+1}\,\alpha_{s+1}}{\alpha_{s+1}\,A_{s+2}} & = & \dfrac{d_{s+1,2}}{d_{2,s+2}} \\
\cdots & & \cdots \\
\cdots & & \cdots \\
\dfrac{A_n\,\alpha_n}{\alpha_n\,A_1} & = & \dfrac{d_{n,n-s+1}}{d_{n-s+1,1}} \\
\dfrac{A_1\,\alpha_1}{\alpha_1\,A_2} & = & \dfrac{d_{1,n-s+2}}{d_{n-s+2,2}} \\
\cdots & & \cdots \\
\cdots & & \cdots \\
\dfrac{A_{s-1}\,\alpha_{s-1}}{\alpha_{s-1}\,A_s} & = & \dfrac{d_{s-1,n}}{d_{n,s}}
\end{array}\right\}[3]
\qquad
\left.\begin{array}{rcl}
\dfrac{A_{n-s+1}\,\beta_{n-s+1}}{\beta_{n-s+1}\,A_{n-s+2}} & = & \dfrac{d_{n-s+1,1}}{d_{1,n-s+2}} \\
\dfrac{A_{n-s+2}\,\beta_{n-s+2}}{\beta_{n-s+2}\,A_{n-s+3}} & = & \dfrac{d_{n-s+2,2}}{d_{2,n-s+3}} \\
\cdots & & \cdots \\
\cdots & & \cdots \\
\dfrac{A_n\,\beta_n}{\beta_n\,A_1} & = & \dfrac{d_{n,s}}{d_{s,1}} \\
\dfrac{A_1\,\beta_1}{\beta_1\,A_2} & = & \dfrac{d_{1,s+1}}{d_{s+1,2}} \\
\cdots & & \cdots \\
\cdots & & \cdots \\
\dfrac{A_{n-s}\,\beta_{n-s}}{\beta_{n-s}\,A_{n-s+1}} & = & \dfrac{d_{n-s,n}}{d_{n,n-s+1}}
\end{array}\right\}[4]$$

Onde, come prima, moltiplicando tra loro le [3], [4] si ha

$$P = + 1.$$

Teorema 3. — *Se dai vertici di un poligono piano di numero dispari di lati si conducono le rette che passano per uno stesso punto (o parallele alla stessa direzione) del suo piano, il prodotto dei rapporti in cui queste rette segano i lati rispettivamente opposti ai vertici da cui sono condotte, è* $+1$.

Se il poligono ha $2m - 1$ lati, il lato opposto al vertice A_1 è $A_m A_{m+1}$; onde i rapporti, di cui è detto nel teorema, si avranno dalle [1] (o dalle [3]) ponendo in esse $n = 2m - 1$, $s = m$. Dopo questa sostituzione il numeratore del secondo membro della prima [1] (o della prima [3]) diventa eguale al denominatore del secondo membro della m^{ma} [1] (o della m^{ma} [3]), il numeratore del secondo membro della seconda al denominatore del secondo membro della $(m + 1)^{ma}$, ecc.; onde moltiplicando fra loro le [1] (o le [3]) così trasformate si ha la dimostrazione del teorema.

Il teorema inverso, analogo all'inverso del teorema 1., si dimostra tosto per assurdo.

Combinando i due teoremi 2. e 3. si ottiene una nuova dimostrazione del teorema 1.

Teorema 4. — *Se dai lati di un poligono gobbo si conducono i piani che passano per uno stesso punto (o paralleli ad una stessa retta), il prodotto dei rapporti in cui questi piani segano gli altri lati del poligono (non adiacenti a quello da cui partono) è* $+1$.

1° Sia $A_1 A_2 \dots A_n$ il poligono, O il punto dello spazio, p_1 il prodotto dei rapporti in cui il piano $O A_1 A_2$ sega i lati del poligono non adiacenti ad $A_1 A_2$, ed M il punto ove $O A_1 A_2$ sega la diagonale $A_n A_3$. Dal poligono di $n - 2$ lati $A_3 A_4 \dots A_n$ si ha

$$p_1 \frac{A_n M}{M A_3} = (-1)^{n-2}.$$

D'altronde dai tetraedri $O A_1 A_2 A_n$, $O A_1 A_2 A_3$, la cui base comune $O A_1 A_2$ sega $A_n A_3$ nel punto M, si ha, per un noto teorema, in valore assoluto e segno

$$\frac{O A_1 A_2 A_n}{O A_1 A_2 A_3} = \frac{A_n M}{A_3 M} = - \frac{A_n M}{M A_3};$$

onde per la precedente

$$p_1 = (-1)^{n-3} \cdot \frac{O\,A_1\,A_2\,A_3}{O\,A_1\,A_2\,A_n}.$$

Analogamente, dicendo p_2 il prodotto dei rapporti in cui il piano $O\,A_2\,A_3$ sega gli altri lati ecc., si avrà

$$p_2 = (-1)^{n-3} \cdot \frac{O\,A_2\,A_3\,A_4}{O\,A_2\,A_3\,A_1},\ p_3 = (-1)^{n-3} \cdot \frac{O\,A_3\,A_4\,A_5}{O\,A_3\,A_4\,A_2},\ \ldots\ldots\ldots$$

$$p_n = (-1)^{n-3} \cdot \frac{O\,A_n\,A_1\,A_2}{O\,A_n\,A_1\,A_{n-1}}.$$

I numeratori sono eguali in valore assoluto e segno ai denominatori; onde moltiplicando si ha

$$p_1\,p_2\,p_3 \ldots\ldots p_n = (-1)^{n(n-3)} = +1.$$

2° Per dimostrare la seconda parte si osservi che la dimostrazione del caso precedente è applicabile anche ad un poligono $A_1\,A_2 \ldots\ldots A_n$ piano, posto O fuori del suo piano; nel quale caso, poichè i rapporti in cui il piano $O\,A_1\,A_2$ sega i lati del poligono non adiacenti ad $A_1\,A_2$ non sono altro che i rapporti in cui il lato $A_1\,A_2$ sega gli altri lati del poligono non adiacenti ad $A_1\,A_2$, ecc., il teorema diventa il seguente: *il prodotto dei rapporti in cui i lati di un poligono piano segano gli altri lati non adiacenti è* $+1$. Allora se sono $O_1\,A_1\,A_2$, $O_2\,A_2\,A_3 \ldots\ldots O_n\,A_n\,A_1$ piani paralleli ad una stessa retta $P\,Q$ passanti pei lati del poligono gobbo $A_1\,A_2 \ldots A_n$, si proietti la figura su un piano qualunque α parallelamente a $P\,Q$. La proiezione di $A_1\,A_2 \ldots\ldots A_n$ sarà il poligono piano $A'_1\,A'_2 \ldots A'_n$ formato colle intersezioni di α coi piani $O_1A_1A_2$, $O_2A_2A_3$, ... $O_nA_nA_1$, e i rapporti in cui i piani $O_1A_1A_2$, $O_2A_2A_3 \ldots\ldots O_nA_nA_1$ segano i lati di $A_1\,A_2 \ldots\ldots A_n$ saranno eguali ai rapporti in cui i lati $A'_1\,A'_2$, $A'_2\,A'_3$, ... $A'_n\,A'_1$ del poligono $A'_1\,A'_2 \ldots\ldots A'_n$ segano ciascuno gli altri lati non adiacenti del poligono, e poichè il prodotto di questi ultimi rapporti è $+1$, altrettanto accadrà del prodotto degli altri.

Il teorema inverso, analogo all'inverso del teorema 1., si dimostra come questo.

Febbraio 1895.

F. Ferrari.

ALCUNE PROPRIETÀ DEL TRIANGOLO E DEL QUADRANGOLO

PER IL DOTT. JOSEPH GILLET

Professore alla Scuola Normale di Stato a Verviers (Belgio).

Ci proponiamo in questo piccolo lavoro di mostrare il partito che si potrebbe ricavare dalla simmetria rispetto ad un punto, in geometria piana, e prenderemo per esempio il quadrilatero inscrittibile. In un lemma preliminare, richiameremo i principî della simmetria rispetto ad un punto, e daremo incidentalmente delle soluzioni delle quistioni proposte sotto i numeri 1041 e 1042 in *De Vriend der Wiskunde*, 1894, p. 189.

1. Lemma. *In due figure simmetriche rispetto ad un punto (centro)*:

1° *Due rette omologhe sono parallele.*

2° *Una retta passante pel centro di simmetria è omologa a se stessa.*

3° *Un segmento di retta ha per omologo un eguale segmento.*

4° *Due circonferenze omologhe sono eguali, i loro centri sono punti omologhi, e il loro asse radicale passa pel centro di simmetria.*

5° *Allorchè una circonferenza passa pel centro di simmetria, essa è tangente in questo punto alla sua omologa.*

6° *Ogni circonferenza che ha per centro il centro di simmetria è omologa a se stessa.*

7° *Il centro di simmetria gode delle stesse proprietà nelle due figure.*

2. Consideriamo il triangolo ABC (fig. 1) inscritto nel centro O di raggio R; sia H il suo ortocentro (punto di concorso delle al-

tezze), e prendiamo la figura simmetrica rispetto al punto ω, centro di OH.

Il triangolo $A'B'C'$, simmetrico di ABC, sarà inscritto nella circonferenza di raggio R, descritta con centro H, ed avrà O per ortocentro. Di più, il circolo d'Eulero (cerchio dei nove punti) del triangolo ABC, avente per centro ω, sarà omologo a se stesso in $A'B'C'$; esso è dunque ancora il circolo d'Eulero di questo secondo triangolo. Infine, osservando che $HC = OC'$ per es., si conclude che C' è il simmetrico di O rispetto al lato AB; la circonferenza $C'AB$ ha dunque per raggio R, e quindi passa per H. Dunque,

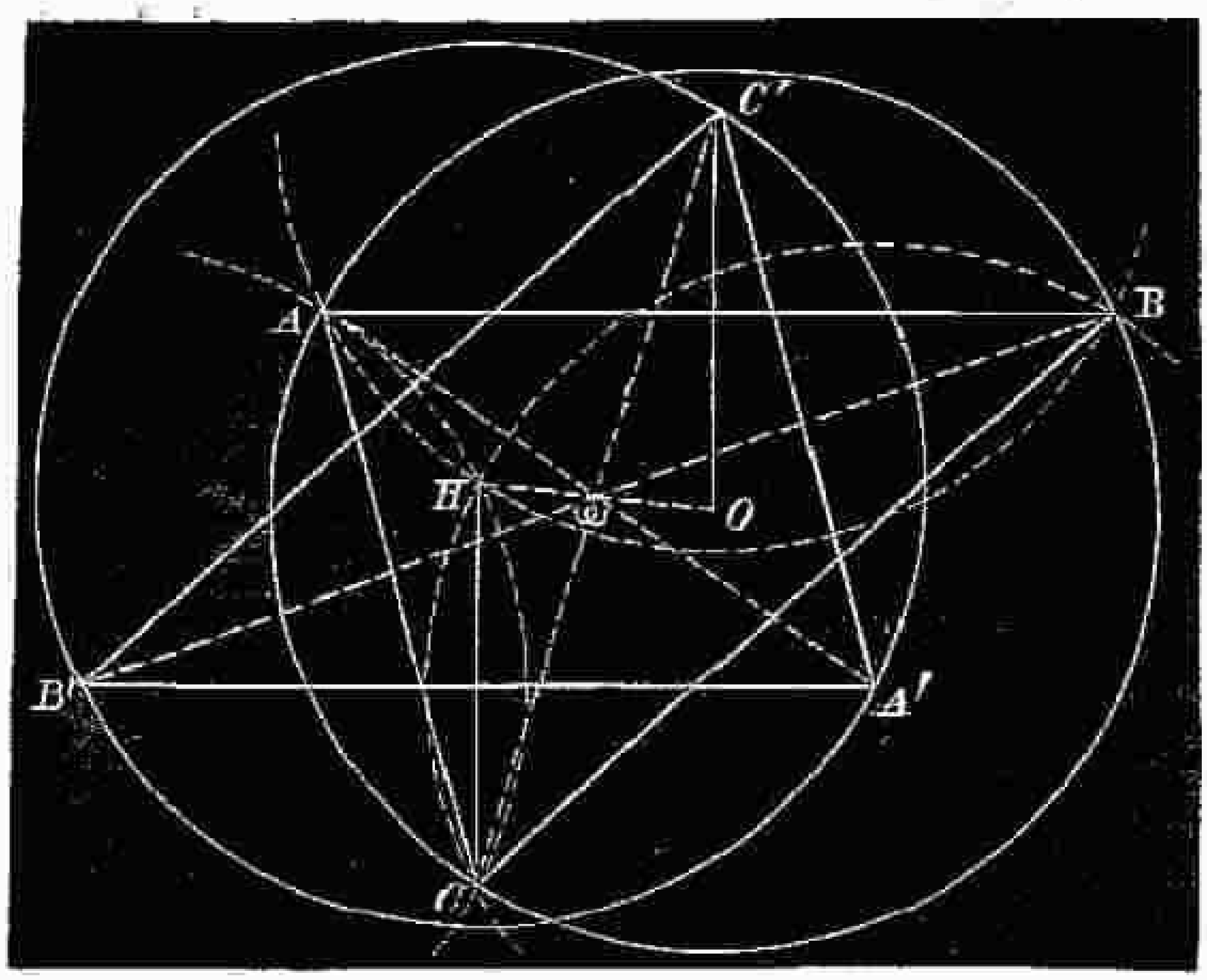


Fig. 1.

se intorno a ciascun lato d'un triangolo si fa ruotare la circonferenza circoscritta, in modo da ribaltarla ogni volta nel piano:

1° *I tre ribaltamenti* A', B', C' *del centro* O *formano un triangolo simmetrico ad* ABC.

2° *Il centro del cerchio circoscritto ad uno dei triangoli* ABC, A'B'C' *è l'ortocentro dell'altro.*

3° *Le circonferenze ribaltate di centri* A', B', C' *passano per* H, *ortocentro di* ABC.

4° *I triangoli* ABC, A'B'C' *hanno il medesimo cerchio di* Eulero.

5° *Le rette* AA′, BB′, CC′ *si tagliano nel medesimo punto, centro di quest'ultimo cerchio.*

3. Abbiasi ora (fig. 2) il quadrangolo $A_1 A_2 A_3 A_4$ inscritto nel cerchio A, di raggio R; e siano $(A_1 A_2, A_3 A_4)$, $(A_2 A_3, A_4 A_1)$, $(A_1 A_3, A_2 A_4)$ *le tre coppie di lati opposti.* Chiamiamo $O_1, O_2, O_3, \ldots O_6$ i simmetrici del centro A rispetto ai sei lati $A_1 A_2, A_2 A_3, \ldots A_2 A_4$; si vede subito in seguito al § 2 che:

1° *le figure* $(O_1 O_2 O_3 O_4)$, $(O_4 O_5 O_3 O_6)$, $(O_2 O_5 O_4 O_6)$ *i cui*

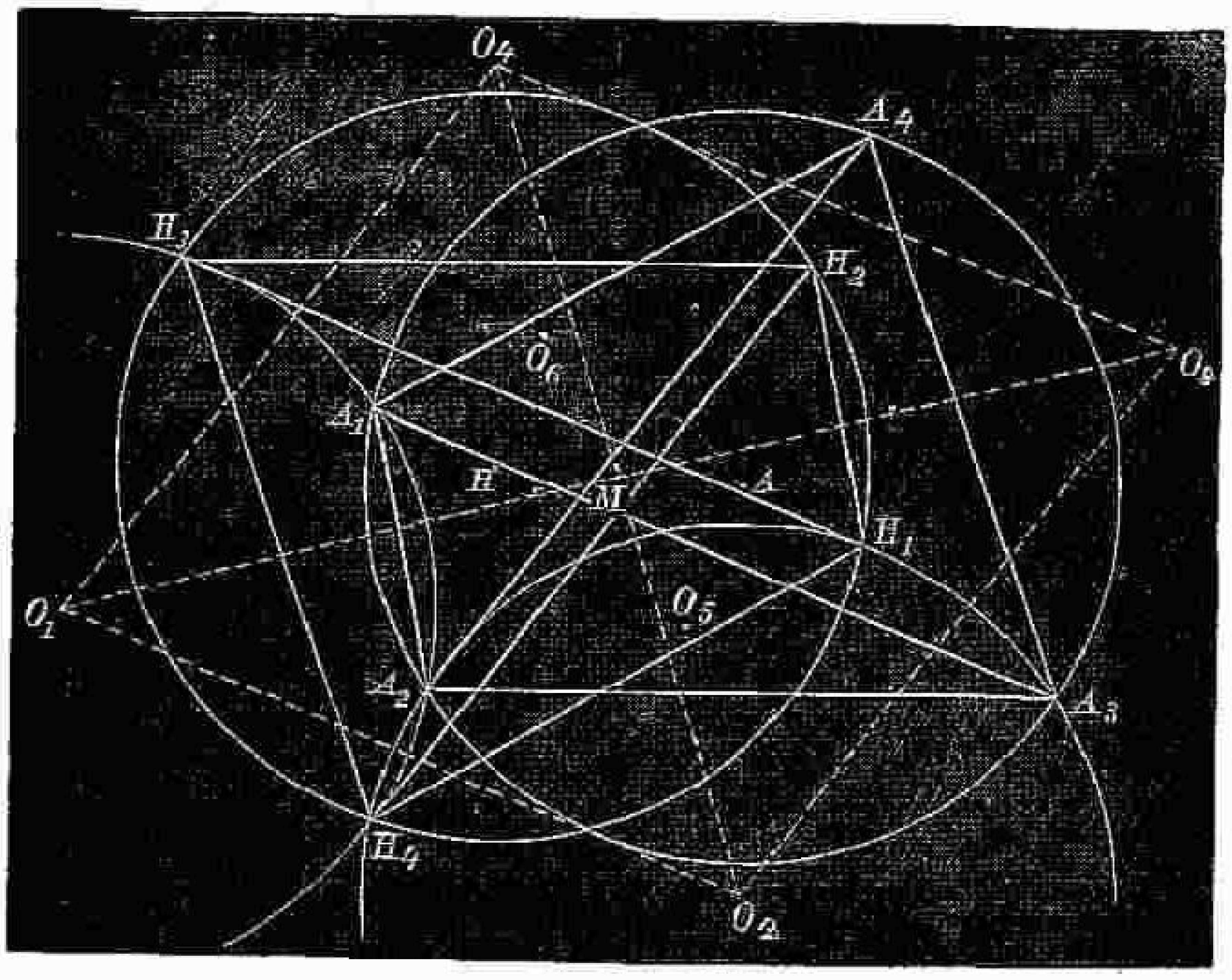


Fig. 2.

vertici sono i simmetrici di A *rispetto a due coppie di lati opposti, sono parallelogrammi;*

2° *questi tre parallelogrammi hanno il medesimo centro* M.

4. Prendiamo M per centro di simmetria (fig. 2), e siano H, H_1, H_2, H_3, H_4 i punti omologhi di A, A_1, A_2, A_3, A_4. Il quadrangolo $A_1 A_2 A_3 A_4$ essendo inscritto nel cerchio A, il quadrangolo $H_1 H_2 H_3 H_4$ sarà inscritto nel cerchio eguale il cui centro H è l'omologo A.

I punti simmetrici di H e di A rispetto a due lati omologhi, come $A_1 A_2$ e $H_1 H_2$ debbono essere punti simmetrici rispetto ad M; ciò che prova che

3° *i punti simmetrici di* H *rispetto ai lati del quadrangolo* $H_1 H_2 H_3 H_4$ *sono, in altro ordine, i simmetrici di* A *rispetto ai lati del quadrangolo* $A_1 A_2 A_3 A_4$.

5. Consideriamo, p. es., il punto O_1 (fig. 2) simmetrico di A rispetto ad $A_1 A_2$ e simmetrico di H rispetto ad $H_3 H_4$; la circonferenza descritta da O_1 come centro col raggio R passerà per i punti A_1, A_2, H_4, H_3. Inoltre, la circonferenza descritta da O_2 come centro con lo stesso raggio passa per i punti A_2, A_3, H_4, H_1. Il punto H_4 è dunque l'ortocentro del triangolo $A_1 A_2 A_3$ (§ **2**, 3°) e il punto A_2 è l'ortocentro del triangolo $H_4 H_1 H_3$; da cui si conclude che:

4° *il quadrangolo* $H_1 H_2 H_3 H_4$ *ha per vertici gli ortocentri dei quattro triangoli parziali di* $A_1 A_2 A_3 A_4$ (*); *ed inversamente, i vertici del quadrangolo* $A_1 A_2 A_3 A_4$ *sono gli ortocentri dei triangoli parziali di* $H_1 H_2 H_3 H_4$.

Due quadrangoli come $A_1 A_2 A_3 A_4$, $H_1 H_2 H_3 H_4$, nei quali i vertici dell'uno sono gli ortocentri dell'altro, potrebbero essere denominati *quadrangoli ortocentrici fra loro.*

6. Prendiamo un punto P qualunque sulla circonferenza A (fig. 3), e sia Q il suo omologo sulla circonferenza H; le proiezioni (ortogonali) di P e di Q sopra due rette omologhe, saranno punti omologhi delle due figure, ossia punti simmetrici rispetto ad M. Segue da ciò che le *rette di* Simson di P e Q rispetto a due triangoli omologhi $A_2 A_3 A_4$, $H_2 H_3 H_4$ sono rette omologhe e per conseguenza parallele fra loro (§ **1**. 1°). In particolare, se P cade in A_1, Q cadrà in H_1 e le due rette di Simson dovendo ambedue passare per il punto medio M di $A_1 H_1$ (teorema noto), coincidono necessariamente. Dunque,

5° *due vertici omologhi come* A_1, H_1 *hanno la medesima retta di* Simson S_1 *rispetto ai triangoli parziali* $A_2 A_3 A_4$, $H_2 H_3 H_4$ *omologhi nelle due figure.*

6° *Le quattro rette di* Simson A_1 $(A_2 A_3 A_4)$, A_2 $(A_3 A_4 A_1)$, A_3 $(A_4 A_1 A_2)$, A_4 $(A_1 A_2 A_3)$ *d'un quadrilatero iscritto* $A_1 A_2 A_3 A_4$ *concorrono nello stesso punto* M.

7. Se per il punto M_1 centro di $A_1 A_2$ (fig. 3), si abbassa una

(*) Noi chiamiamo *triangoli parziali d'un quadrangolo* i quattro triangoli che si ottengono combinando i suoi vertici tre a tre.

perpendicolare sopra $A_3 A_4$, questa perpendicolare sarà parallela ad $A_1 H_2$ e a $A_2 H_4$: essa passa dunque pel punto M centro del parallogramma $A_1 H_2 A_2 H_4$. Similmente le rette condotte pei punti M_2, $M_3, \ldots, M_6$ centri degli altri lati del quadrangolo $A_1 A_2 A_3 A_4$, perpendicolarmente ai lati opposti, passano pure per M.

Inoltre, M essendo il punto d' intersezione delle perpendicolari MM_1, MM_3, p. es., è l' ortocentro del triangolo formato dai punti medî M_1, M_3 e dal punto d' intersezione I_1 dei lati opposti $A_1 A_2$, $A_3 A_4$. Dunque,

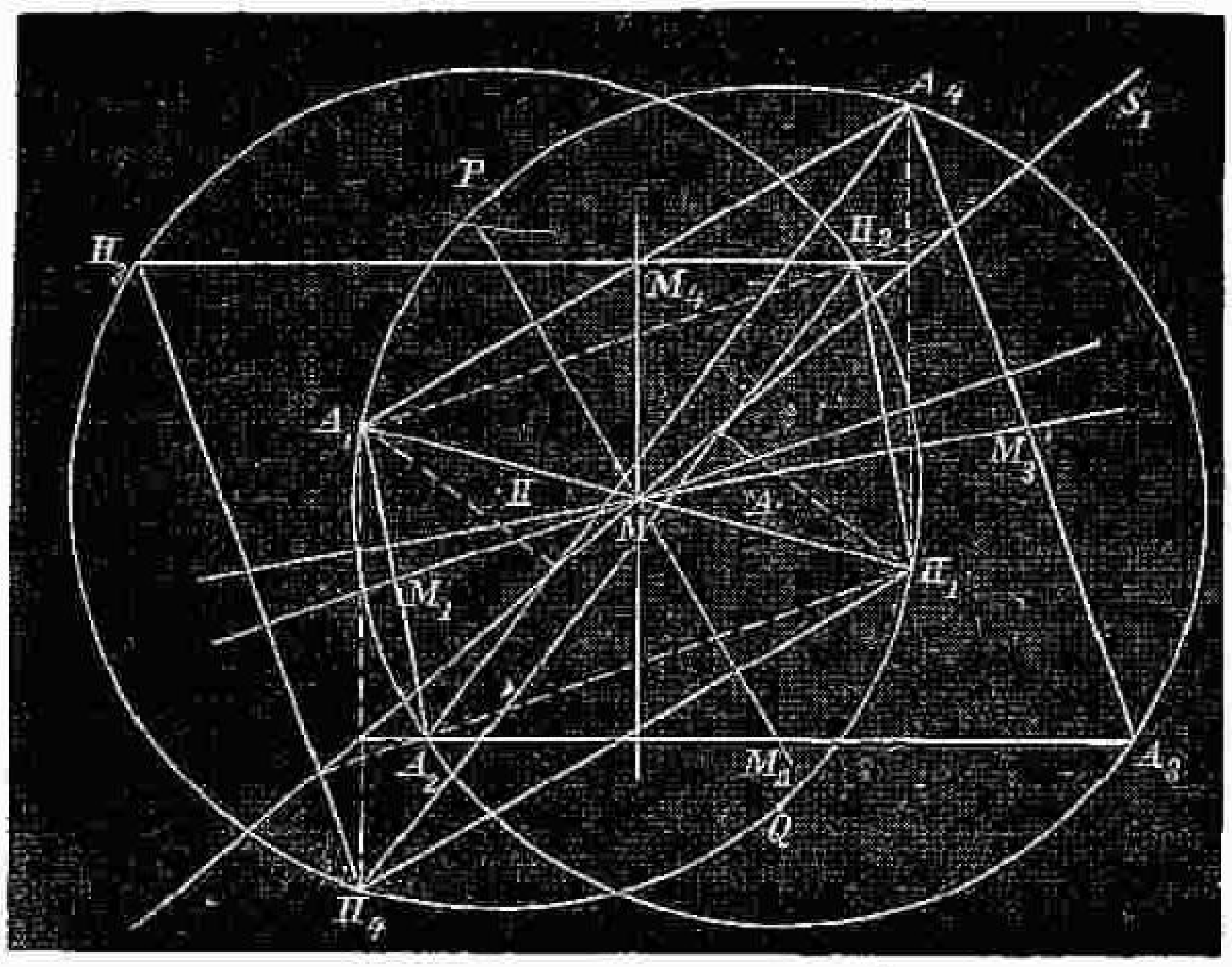


Fig. 3.

7° *se dai punti medi* $M_1 M_2, \ldots M_6$ *dei lati d' un quadrangolo* $A_1 A_2 A_3 A_4$, *si abbassano delle perpendicolari sui lati opposti, le sei rette così ottenute si tagliano in un medesimo punto* M.

8° *Questo punto* M *è l'ortocentro comune ai tre triangoli che hanno per vertici i punti medî di due lati opposti e il punto d' intersezione di questi due lati.*

9° *Il punto* M *essendo l'omologo di se stesso nelle due figure, si trova nelle stesse condizioni tanto in* $H_1 H_2 H_3 H_4$ *come in* $A_1 A_2 A_3 A_4$.

8. È noto che in ogni triangolo il raggio del cerchio d'Eulero è eguale alla metà del raggio del cerchio circoscritto, donde segue che:

10° *i cerchi d'*Eulero *degli otto triangoli parziali di due quadrilateri ortocentrici inscrittibili sono eguali fra loro.*

Sia C_4, punto medio di AH_4 (fig. 4), il centro del circolo d'Eulero del triangolo $A_1 A_2 A_3$; il suo simmetrico D_4 sarà il centro del cerchio d'Eulero del triangolo $H_1 H_2 H_3$, e si avrà

$$C_4 D_4 = A A_4 = R, \text{ da cui } C_4 M = \frac{1}{2} R .$$

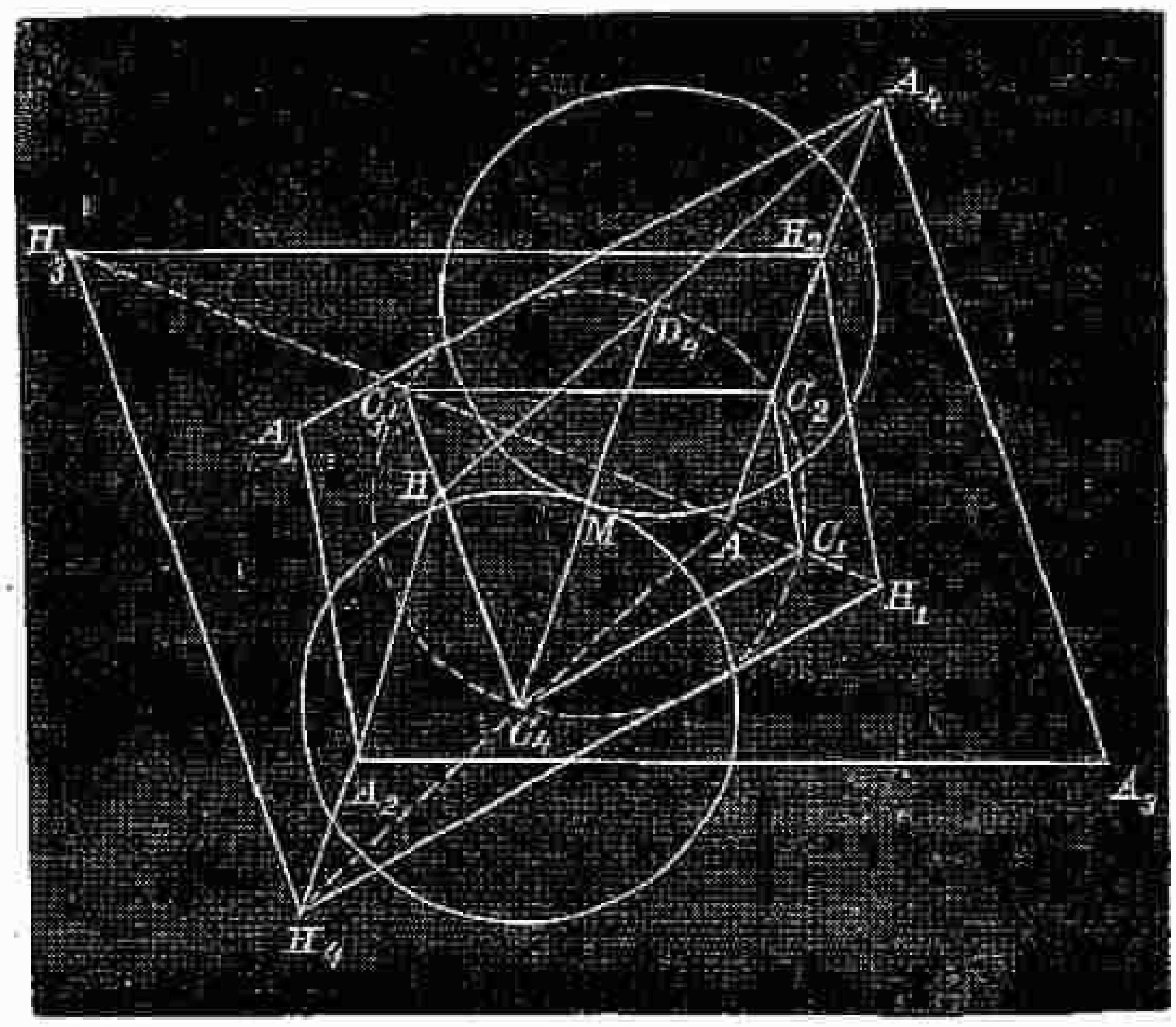


Fig. 4.

Il cerchio C_4 passa dunque per M, e siccome accade lo stesso per tutti i cerchi C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, D_4, si vede che:

11° *in ogni quadrilatero inscritto* $A_1 A_2 A_3 A_4$ *i cerchi d'*Eulero *dei quattro triangoli parziali sono eguali fra loro e passano tutti per lo stesso punto* M.

12° *I centri di questi cerchi appartengono ad una circonferenza eguale, di centro* M. *In altre parole, il quadrangolo* $C_1 C_2 C_3 C_4$ *è inscrittibile e i suoi lati paralleli a quelli di* $H_1 H_2 H_3 H_4$ *ne valgono rispettivamente la metà.*

13° *Se si considerano i quadrangoli ortocentrici inscritti*

$A_1 A_2 A_3 A_4$, $H_1 H_2 H_3 H_4$, *i cerchi d'* EULERO *degli otto triangoli parziali sono eguali fra loro e passano tutti per* M, *in cui sono tangenti due a due* (§ I. 5°)*; gli otto centri appartengono ad una circonferenza eguale avente* M *per centro.*

Osservazione — Qualcuna delle proprietà enunciate sopra sussistono per un quadrilatero qualunque, ma lo stesso metodo di dimostrazione non ci pare applicabile.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Intorno al postulato dell' equivalenza. — Se ne è tanto discusso fin dalla pubblicazione degli Elementi di Geometria dell'illustre De Paolis, che mi sento anch' io invogliato a dire la mia, senza pretensioni e solo per amore della scuola. Sarebbe tempo che tra noi, insegnanti delle scuole medie, corresse qualche intesa circa il modo di trattare questo ed altri argomenti, poichè vediamo i testi scolastici imbottirsi sempre più, a cagione di lunghe e sottili dispute, che, facendo il processo alla verità chiara, assiomatica, come se tra gli uffici della scienza ci fosse quello di mettere giudizio al Giudizio, aduggiano e spauriscono gli scolari. Che se tra costoro anche quelli che più inclinerebbero alla matematica non di rado ne fanno divorzio, ciò avviene perchè, sfiduciati del magistero della natura, proprio quando la fede in esso sarebbe più necessaria, non osano inoltrarsi in un sentiero tutto triboli e sorprese, quale si fece parer loro lo studio delle matematiche.

Venendo all'argomento, io non nego che per stabilire una rigorosa teoria dell'equivalenza sul fondamento della definizione di Duhamel sia mestieri ammettere che una parte di un poligono non può essere equivalente al tutto: solo mi sembra che questa verità non sia dimostrabile, ma sia invece un *necessario* complemento della ordinaria definizione di poligono. Che se il De Paolis le diè il nome di postulato, deve averlo fatto sull'esempio della retta e del piano, i cui postulati non sono che complementi delle loro definizioni.

Per chiarire la mia idea, debbo anzitutto ricordare qual è il naturale carattere che distingue il finito dall' indefinito matematico. Esso può enunciarsi come segue: La ripetuta sottrazione di una parte, che pel finito ha sempre un termine, può, per l' indefinito, non averne alcuno. D'onde il criterio per distinguere la grandezza indefinita dalla grandezza finita. Una grandezza è indefinita se può sottrarsene indefinitamente qualche sua parte; è finita, se la ripetuta sottrazione di qualunque sua parte ha sempre un termine.

Se non che quest'ultimo criterio può facilmente trasformarsi nel seguente: *Se un tutto finito si decompone in parti, non si può, trascurandone una, ri-*

comporre con le altre il tutto medesimo; mentre invece un tutto indefinito si può sempre decomporre in parti in modo che, trascurandone una, sia possibile ricomporre il tutto con le altre. Se infatti si potesse trascurare una parte di un tutto finito, così da ricomporre con le altre il tutto stesso, si potrebbe ancora, ricomposto il tutto, trascurare di nuovo quella parte, e così via, infinite volte, e la sottrazione di una parte non avendo termine, il tutto sarebbe indefinito, contro l'ipotesi. È poi ovvio che si può trascurare qualche parte di un tutto indefinito convenientemente diviso. Così, se per un punto di un lato di un angolo si conduce la parallela all'altro lato, gli angoli corrispondenti sono eguali fra loro, la parte al tutto.

Il postulato di De Paolis (se un poligono si divide in parti, non si può, trascurandone una, ricomporre il poligono con le altre) si applica pertanto, oltrechè al poligono, a tutte le grandezze finite, e serve a distinguerle dalle indefinite.

Premesso ciò, se per poligono deve intendersi, come generalmente s' intende, una porzione di piano chiusa da più segmenti ciascuno dei quali ha un termine comune col precedente e l'ultimo col primo, è chiaro che la figura di più segmenti così disposti, divide il piano in due porzioni, entrambe chiuse dalla figura stessa, (*) ma l'una finita e l'altra indefinita, a ciascuna delle quali, per la posta definizione, si converrebbe egualmente il nome di poligono. Ma poichè tutti chiamano così la porzione *finita*, bisogna ammettere che la proprietà espressa da questo aggettivo faccia parte della definizione di poligono e sia perciò indimostrabile. Dunque il postulato di De Paolis, che, come sopra si è detto, non è se non la traduzione della proprietà di finito attribuita al poligono, è indimostrabile; se pure per dimostrarlo non si faccia uso, almeno tacitamente, di altro postulato equivalente, valido soltanto per le aree finite.

G. Frattini.

A proposito della Nota del prof. Lazzeri sulla teoria dell'equivalenza geometrica (Fasc. III-IV). — Voglio proporre una leggera modificazione all'ingegnosissima dimostrazione del teorema fondamentale n. 12 dell'indicata Nota; questa modificazione, mentre a parer mio toglie ogni dubbio sulla validità del teorema stesso, nulla poi toglie alla trama del pensiero dell'A..

Nel teorema n. 12 si tratta di provare che, *se un triangolo* T *è decomposto comunque in parti triangolari, la somma dei rettangoli di una serie associati alle parti è uguale al rettangolo della serie stessa associato a* T. *Nel caso particolare che le parti siano due o tre il teorema stesso è già stato dimostrato* dall'A. nel n. 10; inoltre nel n. 11 l' A. ha provato che: *le somme dei rettangoli di una serie associati ai triangoli, nei quali un quadrangolo convesso è diviso dalle sue diagonali, sono eguali.*

Il dubbio nasce dall'ipotesi fatta dell'A. che, se O è uno dei nodi della rete

---

(*) Infatti un punto che si movesse sul piano, per passare dall'interno all'esterno dell'una o dell'altra delle dette due porzioni di esso, dovrebbe attraversarne il comune contorno.

di triangoli in cui è diviso T, due triangoli consecutivi intorno ad O abbiano sempre in comune, oltre ad O, un secondo vertice; mentre l'ipotesi più generale è invece che un vertice dell'un triangolo cada sopra un lato dell'altro. Ora è bensì vero che, staccando da ciascuno dei triangoli che stanno attorno ad O al più una o due parti triangolari, si può (senza introdurre nuovi nodi nè aumentare il numero dei triangoli che stanno attorno ad O) sostituire alla rete primitiva una nuova che soddisfi alla ipotesi dell'A., e ciò senza alterare la somma dei rettangoli della data serie associati alle parti, perchè a ciascuno dei triangoli che sono attorno ad O se ne sono sostituiti tre al più; ma resta poi con ciò possibilmente aumentato il numero delle parti in cui era diviso T; sicchè il procedimento di riduzione dell'A., diretto a dimostrare che le parti possono essere ridotte da n ad $n-3$ od $n-2$, non è più soddisfacente. Esso si può tuttavia con successo applicare a dimostrare che si possono fare sparire i nodi della data rete, e allora potrebbe essere esposto nel seguente modo.

Sia O un nodo intorno al quale stiano p triangoli; sarà lecito supporre, per ciò che si è osservato sopra, che due triangoli consecutivi abbiano sempre in comune un vertice fuori di O e non formino un triangolo.

Sia poi in primo luogo O interno a T; allora, secondochè O sarà vertice di tutti i p triangoli o di tutti meno uno, si avrà intorno ad O un poligono (non intrecciato) di p o $p+1$ lati. Tale poligono avrà in ogni caso almeno tre angoli convessi; siano tali gli angoli $L\,M\,N$, $L'\,M'\,N'$, $L''\,M''\,N''$ (che potrebbero anche essere consecutivi); se $p>3$, dei tre angoli $L\,O\,N$, $L'\,O\,N'$, $L''\,O\,N''$ due certamente (per es. $L\,O\,N$, $L'\,O\,N'$) non avranno parti comuni; perchè, se due qualunque avessero sempre una parte comune, le tre parti comuni riempirebbero l'intero giro intorno ad O e sarebbe quindi $p=3$. Segue da ciò che sarà

$$L\,O\,N + L'\,O\,N' \leqq 2 \text{ piatti},$$

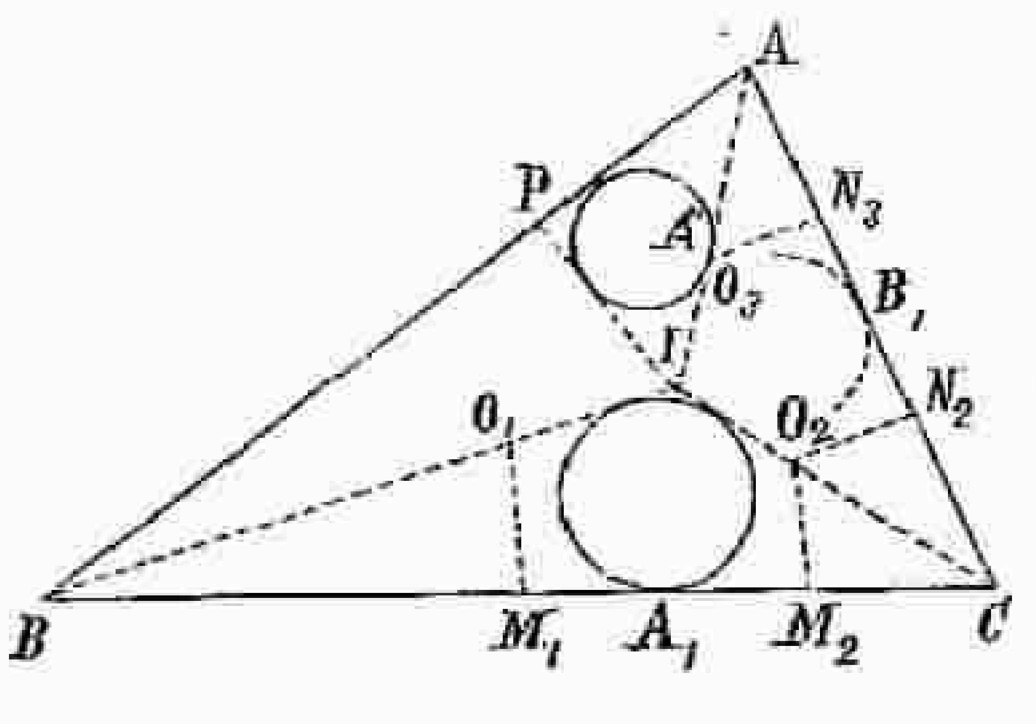
per modo che, potendo (per le ipotesi fatte) uno al più dei due angoli $L\,O\,N$, $L'\,O\,N'$ essere piatto, uno almeno dei due angoli stessi (per es. $L\,O\,N$) sarà convesso. Allora il quadrangolo $O\,L\,M\,N$ è convesso, avendo tutti i suoi angoli convessi; e quindi ai due triangoli $O\,L\,M$, $O\,M\,N$ in cui esso è diviso dalla sua diagonale $O\,M$ si possono (n. 11) sostituire gli altri due $L\,M\,N$, $O\,L\,N$. Dopo ciò i triangoli che sono attorno ad O sono $p-1$. Si può dunque degradare via via il numero dei triangoli che stanno attorno ad O fino a portarlo a due formanti un quadrilatero o a tre formanti un triangolo. Nel primo caso O non è più nodo, e nel secondo O cessa di essere un nodo sostituendo ai tre triangoli il triangolo da essi formato; perciò il procedimento indicato conduce all'ultimo a fare sparire il nodo O senza introdurre nuovi nodi.

Sia in secondo luogo O sopra un lato l di T, ma non in un vertice di T. Qui si dovrà ritenere $p>2$, perchè due soli triangoli attorno ad O formerebbero nel caso attuale un triangolo, che, per le ipotesi fatte, dovrebbe loro essere sostituito. Allora dei tre o più angoli convessi appartenenti al poligono di $p+1$ lati formato dai p triangoli uno almeno (poniamo $L\,M\,N$) avrà il suo vertice M fuori di l, e l'angolo $L\,O\,N$ non sarà piatto (altrimenti L ed N starebbero su l e quindi il poligono attorno ad O si ridurrebbe al solo triangolo LMN, cioè sarebbe $p = 2$); d'altronde esso è tutto da quella parte di l ove sta T, dunque LON è convesso. Allora $OLMN$ è un quadrangolo convesso e pel n. 11 i suoi due triangoli OLM, OMN possono essere sostituiti coi due OLN, LMN; in tal modo i triangoli intorno ad O diventano $p - 1$. Si può dunque diminuire il numero dei triangoli che stanno attorno ad O fino a ridurlo ad uno e così far sparire il nodo O senza introdurre nuovi nodi.

Quando si siano fatti sparire tutti i nodi che non cadono nei vertici di T, saranno scomparsi anche quelli che cadevano nei vertici di T (perchè non esiste una rete triangolare con nodi soltanto nei vertici di T) e la rete si sarà ridotta al solo triangolo T; e siccome nelle successive modificazioni della rete primitiva si è sempre proceduto in modo da non alterare mai la somma dei rettangoli della data serie associati alle sue parti, così detta somma eguaglia appunto il rettangolo della stessa serie associato a T.

G. Sforza.

2ª Nota sul Problema del Malfatti. (*Continuazione* v. pag. 93). — Il Prof. Adams in una sua memoria pubblicata a Winterthur (anni 1846-48) indicò questa semplice soluzione: *Iscritti i cerchi nei triangoli* IBC, ICA, IAP *tangenti alle rette* BC, CA, IA *nei rispettivi punti* A_1, B_1, A'', *riportare il segmento* IA'' *dalle parti opposte dell'origine* A_1 *sul lato* BC *e dai termini* M_1, M_2 *condurre le perpendicolari a questo lato fino a segare in* O_1, O_2 *le rette* BI, CI; *i punti* O_1, O_2 *sono i centri ed* O_1M_1, O_2M_2 *i raggi dei due cerchi del Malfatti; abbassando* O_2N_2 *normale ad* AC, *e prendendo il segmento* $B_1N_3 = N_2B_1$, *la parallela tirata da* N_3 *ad* N_2O_2 *determina sulla* IA *il centro* O_3 *ed il raggio* O_3N_3 *del 3º cerchio del Malfatti.*



Poichè detto P il punto di contatto del cerchio r con il lato AB, s'iscriva un circolo nel triangolo IAP e dicasi A'' dove tocca la retta IA; a motivo di $AP = r \cot \frac{A}{2}$, il raggio di quel cerchio sarà $\frac{AP}{1 + \cot \frac{A}{4}} = \frac{r}{2}\left(1 - \operatorname{tang}\frac{A}{4}\right)$ e quindi $IA'' = \frac{r}{2}\left(1 - \operatorname{tang}\frac{A}{4}\right) . \cot\left(45^\circ - \frac{A}{4}\right) = \frac{r}{2}(1 + \alpha)$ con $\alpha = \operatorname{tang}\frac{A}{4}$. Inoltre per le note formole dei raggi r_1, r_2 discendono le espressioni

$$BA_1 = \frac{r}{2}\left(1 - \operatorname{tang}\frac{B}{4}\operatorname{tang}\frac{C}{4}\right)\cot\frac{B}{4} = \frac{r}{2\beta}(1 - \beta\gamma), \quad A_1C = \frac{r}{2\gamma}(1 - \beta\gamma),$$

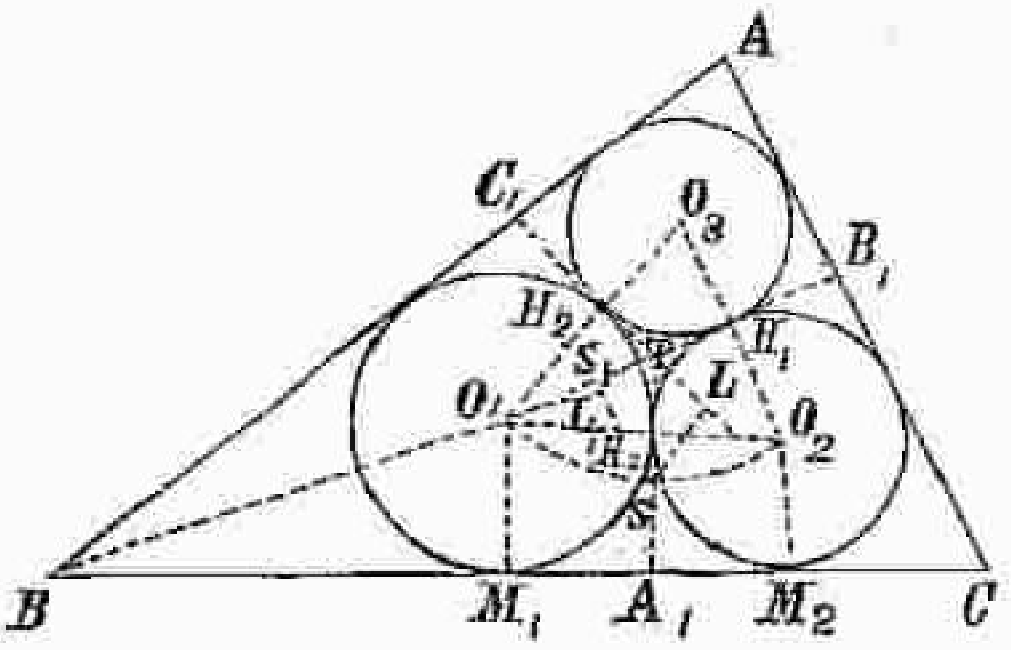
dalle quali sottraendo il segmento IA'' si ricaveranno i valori

$$BM_1 = \frac{r}{2\beta}(1-\beta\gamma-\beta\alpha-\beta) = \frac{r}{4\beta}(1+\alpha)(1+\gamma)(1-\beta),$$
$$M_2C = \frac{r}{2\gamma}(1-\beta\gamma-\alpha\gamma-\gamma) = \frac{r}{4\gamma}(1+\alpha)(1+\beta)(1-\gamma);$$

a motivo della nota identità $1-\alpha-\beta-\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma+\alpha\beta\gamma=0$. Ne conseguono i raggi $\rho_1 = O_1M_1 = BM_1 \cot\frac{B}{2} = \frac{r}{2}\cdot\frac{(1+\alpha)(1+\gamma)}{1+\beta}$, $\rho_2 = O_2M_2 = M_2C.\cot\frac{C}{2} = \frac{r}{2}\cdot\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{1+\gamma}$ ed i cerchi si toccano esternamente perchè $\sqrt{2\rho_1 \,.\, 2\rho_2} = r(1+\alpha) = M_1M_2$, ecc.. A causa di $BA_1 : A_1C = \gamma : \beta$, $CB_1 : B_1A = \alpha : \gamma$, $AC_1 : C_1B = \beta : \gamma$ le congiungenti AA_1, BB_1, CC_1 passano per lo stesso punto.

Un'analisi geometrica della costruzione di Steiner era stata esposta nel 1833 dal Prof. Zornow a Koenisberg, ed inserita nel tomo X del Giornale di Crelle.

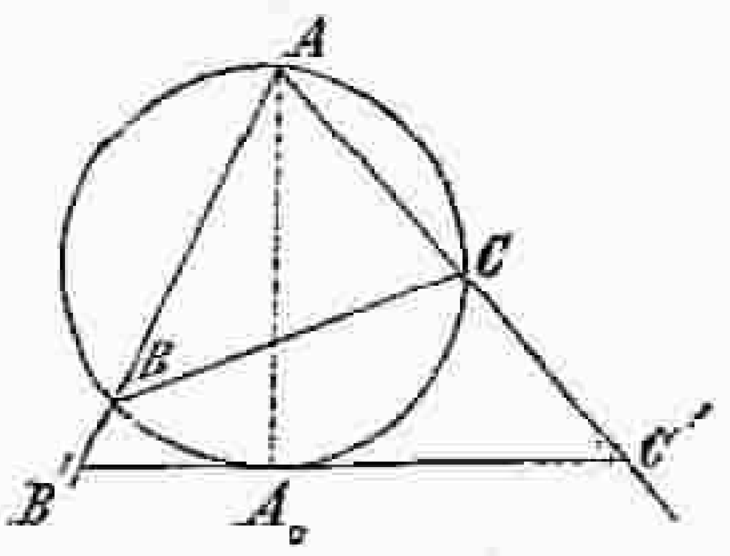
Le tangenti interne comuni ai cerchi del Malfatti concorrono in un punto T di egual potenza rispetto ad essi, e centro del cerchio iscritto nel triangolo $O_1O_2O_3$ avente per vertici i loro centri, e per lati $O_2O_3 = \rho_2+\rho_3$, $O_3O_1 = \rho_3+\rho_1$, $O_1O_2 = \rho_1+\rho_2$. Notando con H_1, H_2, H_3 i rispettivi punti di contatto dei cerchi su questi lati, si trovano $H_1T^2 = H_2T^2 = H_3T^2 = \frac{\rho_1\rho_2\rho_3}{\rho_1+\rho_2+\rho_3}$, l'intersezione A_1 della tangente TH_3 con BC è il mezzo del segmento M_1M_2, e perciò $M_1A_1^2 = A_1H_3^2 = A_1M_2^2 = \rho_1\rho_2$.



Se a partire dai punti H_2, H_1 sulle tangenti H_2T, H_1T prendiamo le parti H_2L, H_1L_1 eguali ad M_1A_1 le perpendicolari innalzate ad esse dai termini L, L_1 si segheranno in un punto S esterno alla A_1T ed equidistante dalle tangenti e dal lato BC; onde le O_1S, O_2S bisecheranno gli angoli $M_1O_1O_3$, $M_2O_2O_3$ ed a motivo di $LT = TL_1$ le ST, TO_3 giaceranno sulla medesima retta. In virtù dei triangoli simili O_3H_2T, TLS potremo determinare il raggio $x = SL = SL_1 = A_1S$ del cerchio iscritto nel triangolo formato dalle rette C_1T, B_1T, BC; infatti dalla proporzione $SL : O_3H_2 = TL : H_2T$ si deduce $SL + O_3H_2 = O_3H_2\left(\frac{H_2L}{H_2T}\right)$, da cui viene $x^2 = \rho_3(\rho_1+\rho_2-2x)$. Ora dal trapezio birettangolo $O_1M_1A_1S$ si ricava $O_1S^2 = \rho_1\rho_2+(\rho_1-x)^2$, dove sostituendo il precedente valore di x^2 si trae $O_1S^2 = (\rho_1+\rho_3)(\rho_1+\rho_2-2x) = \frac{\rho_1+\rho_3}{\rho_3}x^2$. Abbassando la perpendicolare SS_1 alla retta BO_1 bisettrice dell'angolo B, si ottengono facilmente le eguaglianze angolari $BO_1M_1 + M_1O_1S + SO_1S_1 = 180^0 = BO_1M_1 + M_1O_1S + C_1O_1H_2$ e quindi ne consegue $C_1O_1H_2 = P_1O_1C_1 = SO_1S_1$, e la similitudine dei triangoli SO_1S_1, $C_1O_1P_1$ dà la proporzione $SS_1 : SO_1 = P_1C_1 : C_1O_1$, che per essere $P_1 C_1^2 = \rho_1 \rho_3$, $C_1 O_1^2 = \rho_1 (\rho_1 + \rho_3)$ ed il valore surriferito di $O_1 S$ dimostra $SS_1 = SL$; dunque il cerchio descritto col centro S e raggio SL tocca pure le rette BO_1, CO_2, e così è provata la costruzione di Steiner.

A motivo di $A_1 T = A_1 H_3 + H_3 T = \sqrt{\rho_1 \rho_2}\left(1 + \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}}\right)$ e della distanza $\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ del punto H_3 da BC, il punto T dista da questo lato del segmento $\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\left(1 + \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1+\rho_2+\rho_3}}\right)$. Plücker osservò come le tangenti $A_1 T$, $B_1 T$, $C_1 T$ formino coi lati del triangolo tre quadrilateri $A_1 C B_1 T$, $B_1 A C_1 T$, $C_1 B A_1 T$ circoscritti ai cerchi del Malfatti, e perciò dian luogo alle relazioni $A_1 T - TB_1 = CA_1 - B_1 C$, $TB_1 - C_1 T = B_1 A - AC_1$, $C_1 T - TA_1 = C_1 B - A_1 B$, onde il punto T è comune a tre iperbole aventi i loro fuochi nei punti A_1, B_1, C_1 presi due a due, e gli assi trasversi pari alle differenze fra i segmenti dei lati compresi fra ciascun vertice e i detti fuochi.

Col metodo d' inversione si estende il problema del Malfatti al triangolo formato da archi circolari; un semplice caso è il supporre due lati BA, AC rettilinei ed il terzo l'arco CA_0B del cerchio ABC. Tirando il diametro $AA_0 = 2R$ e la tangente in A_0 opposto ad A, siano B', C' i punti d'intersezione di $B'C'$ coi lati AB, AC; a causa di $AB \cdot AB' = AC \cdot AC' = 4R^2$ si deduce essere $B'C'$ la linea inversa dell'arco BA_0C ed A l'origine d'inversione.



Notando con a, b, c i lati del triangolo ABC, con a', b', c' quelli di $AB'C'$ troviamo $c' = \frac{4R^2}{c} = \frac{2R}{\text{sen}\, C}$, $b' = \frac{2R}{\text{sen}\, B}$, $a' = \frac{b'c' \,\text{sen}\, A}{2R} = \frac{2R \,\text{sen}\, A}{\text{sen}\, B \,\text{sen}\, C}$ opposti ai rispettivi angoli $C' = 180^0 - (A + C) = B$, $B' = 180^0 - (A + B) = C$, $A' = A$; il raggio del cerchio iscritto nel triangolo $AB'C'$ essere $r' = \frac{R \,\text{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

ed il centro I' giacere sulla bisettrice dell'angolo A alla distanza $AI' = \frac{r'}{\text{sen}\frac{A}{2}}$.

Si conchiude il cerchio inverso avere il raggio $\rho = \frac{4R^2 r'}{AI'^2 - r'^2} = \frac{4R^2}{r'}\text{tang}^2\frac{A}{2} = \frac{4R}{\cos^2\frac{A}{2}}\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, ed il suo centro I distare dall'origine del segmento

$AI = \frac{4R^2}{AI'} = 4R\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$. I cerchi del Malfatti iscritti in $AB'C'$ hanno i raggi

$$\rho' = \frac{r'}{2}\cdot\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{1+\gamma}, \quad \rho'' = \frac{r'}{2}\cdot\frac{(1+\alpha)(1+\gamma)}{1+\beta}, \quad \rho''' = \frac{r'}{2}\cdot\frac{(1+\beta)(1+\gamma)}{1+\alpha}$$

$\left(\text{dove per brevità si è posto } \alpha = \operatorname{tang}\frac{A}{4},\ \beta = \operatorname{tang}\frac{B}{4},\ \gamma = \operatorname{tang}\frac{C}{4}\right)$, e le distanze dei loro centri O', O'', O''' dal vertice A sono

$$A\,O' = \sqrt{\rho'^2 + \left(c' - \rho' \cot\frac{B'}{2}\right)^2},\quad A\,O'' = \sqrt{\rho''^2 + \left(b' - \rho'' \cot\frac{C'}{2}\right)^2},$$

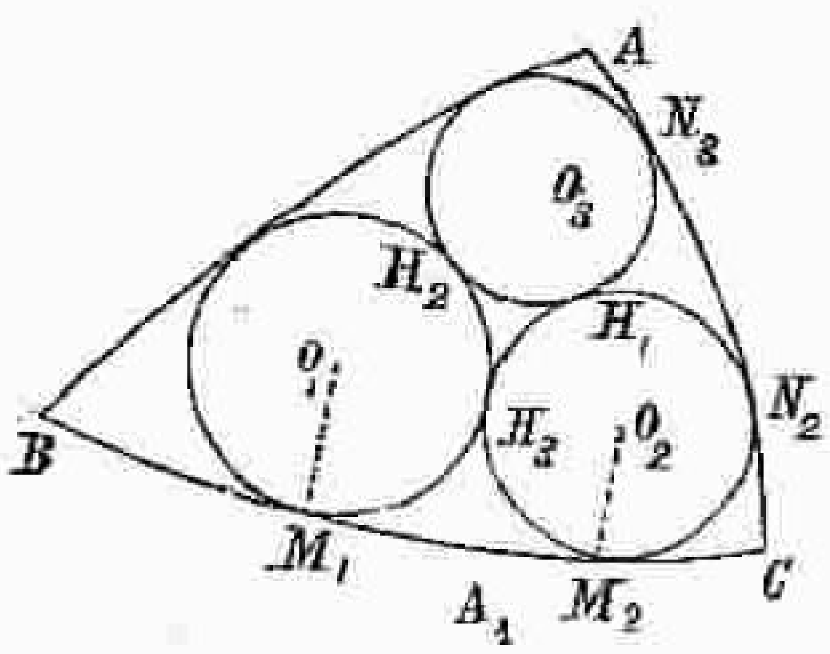
$A\,O''' = \dfrac{\rho'''}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}$. Il raggio del cerchio inverso a ρ' si calcolerà mediante la formula $\rho_1 = \dfrac{4\,R^2\rho'}{A\,O'^2 - \rho'^2} = \dfrac{4\,R^2\rho'}{\left(c' - \rho' \cot\frac{B'}{2}\right)^2}$ ed essendo $c' = \dfrac{2\,R}{\operatorname{sen} C}$, $B' = C$ con facili riduzioni otterremo i raggi dei tre circoli del Malfatti iscritti nel triangolo mistilineo $A\,B\,A_0\,C$

$$\rho_1 = 2\,\rho\,.\cos^2\frac{A}{2}\operatorname{sen}^2\frac{C}{2}\cdot\frac{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}{\left[2(1+\gamma)\cos\frac{B}{2} - \operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}(1+\alpha)(1+\beta)\right]^2}$$

$$\rho_2 = 2\,\rho\,.\cos^2\frac{A}{2}\operatorname{sen}^2\frac{B}{2}\cdot\frac{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}{\left[2(1+\beta)\cos\frac{C}{2} - \operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}(1+\alpha)(1+\gamma)\right]^2}$$

$$\rho_3 = \frac{2\,\rho\,(1+\alpha)}{(1+\beta)(1+\gamma)}.$$

In un triangolo sferico $A\,B\,C$ rappresentino O_1, O_2, O_3 i centri dei circoli del Malfatti iscritti negli angoli rispettivi B, C, A coi raggi arc. $O_1M_1 = \rho_1$, $O_2M_2 = \rho_2$, $O_3N_3 = \rho_3$. Siano arc. $B\,M_1 = \omega_1$, $M_2C = CN_2 = \omega_2$, $N_3A = \omega_3$, le tangenti sferiche comprese fra i vertici B, C, A ed i punti di contatto M_1, M_2, N_3 con i lati BC, CA: se nel punto H_3 comune ai primi due cerchi ρ_1, ρ_2 si tiri la tangente sferica H_3A_1 fino a segare in A_1 il lato $B\,C$, a motivo di arc. $M_1A_1 = A_1H_3 = A_1M_2 = \dfrac{a - \omega_1 - \omega_2}{2}$ il triangolo rettangolo $O_1A_1O_2$ fornisce la relazione $\cos(\rho_1 + \rho_2) = \cos\rho_1\,.\cos\rho_2\cos^2\left(\dfrac{a - \omega_1 - \omega_2}{2}\right)$, che si riduce alla forma



$$(1)\qquad \operatorname{tang}\rho_1\operatorname{tang}\rho_2 = \operatorname{sen}^2\left(\frac{a - \omega_1 - \omega_2}{2}\right),$$

ed in simil modo provansi le altre due $\operatorname{tang}\rho_2\operatorname{tang}\rho_3 = \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{b - \omega_2 - \omega_3}{2}\right)$, $\operatorname{tang}\rho_3\operatorname{tang}\rho_1 = \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{c - \omega_3 - \omega_1}{2}\right)$. Si può dedurre un sistema sufficiente a calcolare le ω_1, ω_2, ω_3 in funzione dei lati a, b, c; poichè i triangoli rettangoli BO_1M_1, CO_2M_2 somministrano l'eguaglianze

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tang}\rho_1 = \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{tang}\frac{B}{2}, \qquad \operatorname{tang}\rho_2 = \operatorname{sen}\omega_2 \operatorname{tang}\frac{C}{2};$$

onde per la formula (1) e la nota relazione $\operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2} = \frac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}p}$ si ottiene $1 - \cos(a - \omega_1 - \omega_2) = \frac{2\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}p}\operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega_2$, la quale a motivo di $2\operatorname{sen}\omega_1\operatorname{sen}\omega_2 = \cos(\omega_1 - \omega_2) - \cos(\omega_1 + \omega_2)$ si traduce nella

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{sen}a\cos(\omega_1 + \omega_2 - p) + \operatorname{sen}(p-a)\cos(\omega_1 - \omega_2) = \operatorname{sen}p,$$

ed insieme coesistono le analoghe

$$\operatorname{sen}b\cos(\omega_2 + \omega_3 - p) + \operatorname{sen}(p-b)\cos(\omega_2 - \omega_3) = \operatorname{sen}p,$$
$$\operatorname{sen}c\cos(\omega_3 + \omega_1 - p) + \operatorname{sen}(p-c)\cos(\omega_3 - \omega_1) = \operatorname{sen}p.$$

Introducendo le ignote ausiliarie $\frac{p}{2} - \omega_1 = x$, $\frac{p}{2} - \omega_2 = y$, $\frac{p}{2} - \omega_3 = z$ si ottiene il sistema di Schellbach

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned}
&\frac{\cos\left(\frac{p}{2} - a\right)}{\cos\frac{p}{2}}\cos x\cos y + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{p}{2} - a\right)}{\operatorname{sen}\frac{p}{2}}\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y = 1\\
&\frac{\cos\left(\frac{p}{2} - b\right)}{\cos\frac{p}{2}}\cos y\cos z + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{p}{2} - b\right)}{\operatorname{sen}\frac{p}{2}}\operatorname{sen}y\operatorname{sen}z = 1\\
&\frac{\cos\left(\frac{p}{2} - c\right)}{\cos\frac{p}{2}}\cos z\cos x + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{p}{2} - c\right)}{\operatorname{sen}\frac{p}{2}}\operatorname{sen}z\operatorname{sen}x = 1.
\end{aligned}$$

Per brevità notiamo coi simboli a_0, a_1 i numeratori dei coefficienti nella prima equazione, con b_0, b_1, c_0, c_1 gli omonimi nella seconda e terza, con d_0, d_1 i loro denominatori $\cos\frac{p}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{p}{2}$; seguendo il Prof. Mertens (*) ricaveremo $\operatorname{sen}z$ e $\cos z$ dalle due ultime del sistema (4), ed aggiungendone i quadrati otterremo

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned}
d_0^2(c_1\operatorname{sen}x - b_1\operatorname{sen}y)^2 + d_1^2(b_0\cos y - c_0\cos x)^2 =\\
(b_0c_1\operatorname{sen}x\cos y - b_1c_0\cos x\operatorname{sen}y)^2;
\end{aligned}$$

quest'equazione e la prima delle (4) compongono il sistema sufficiente a determinare gli archi x, y. Sviluppando la (5) si trova

(*) Giornale di CRELLE, tomo 76°, pag. 92.

$$(d_0^2\,c_1^2 - d_1^2\,c_0^2 - b_0^2\,c_1^2)\,\mathrm{sen}^2 x + (d_0^2\,b_1^2 - b_0^2\,d_1^2 - c_0^2\,b_1^2)\,\mathrm{sen}^2 y +$$
$$(b_0^2\,c_1^2 + b_1^2\,c_0^2)\,\mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{sen}^2 y - 2\,d_0^2\,b_1\,c_1\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y - 2\,d_1^2\,b_0\,c_0\cos x\cos y +$$
$$2\,b_0\,b_1\,c_0\,c_1\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y\cos x\cos y + d_1^2\,(b_0^2 + c_0^2) = 0;$$

ora a motivo di $1 = a_0^2 + a_1^2 = b_0^2 + b_1^2 = c_0^2 + c_1^2 = d_0^2 + d_1^2$ è facile verificare le relazioni

$$d_0^2\,c_1^2 - d_1^2\,c_0^2 - b_0^2\,c_1^2 = d_0^2\,b_1^2 - b_0^2\,d_1^2 - c_0^2\,b_1^2 = b_1^2\,c_1^2 - d_1^2,$$
$$d_0^2\,c_1^2 - d_1^2\,c_0^2 + b_1^2\,c_0^2 = d_0^2 - b_0^2\,c_0^2,\quad d_0^2\,c_1^2 + d_1^2\,b_0^2 - b_0^2\,c_1^2 = d_0^2\,b_1^2\,c_1^2 + d_1^2\,b_0^2\,c_0^2$$
$$\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}^2 y = 1 + \mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{sen}^2 y - \cos^2 x\cos^2 y;$$

ed in virtù di queste vedere l'antecedente (5) identica all'eguaglianza

$$d_1^2\,(\cos x\cos y - b_0\,c_0)^2 + d_0^2\,(\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y - b_1\,c_1)^2 =$$
$$(b_1\,c_1\cos x\cos y - b_0\,c_0\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y)^2.$$

Ponendo

(6) . . . . . . $\cos x\cos y = b_0 c_0 + u,\quad \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y = b_1 c_1 + v,$

(7) . . . . $\dfrac{a_0\,b_0\,c_0}{d_0} + \dfrac{a_1\,b_1\,c_1}{d_1} = h,$

il sistema surriferito delle x, y si trasforma in

(8) $\quad d_1^2\,u^2 + d_0^2\,v^2 = (b_1\,c_1\,u - b_0\,c_0\,v)^2,\quad a_0\,d_1\,u + a_1\,d_0\,v = d_0\,d_1\,(1-h).$

La prima è quadratica ed omogenea rispetto alle u, v, ed ha per discriminante

$$\delta = d_0^2\,b_1^2\,c_1^2 + d_1^2\,b_0^2\,c_0^2 - d_0^2\,d_1^2 = (d_0^2 - b_0^2)\,(d_0^2 - c_0^2) = (d_1^2 - b_1^2)\,(d_1^2 - c_1^2);$$

a causa di $a_0^2 + a_1^2 = 1$, valore di δ si può scrivere

$$(d_0^2\,b_1^2\,c_1^2 + d_1^2\,b_0^2\,c_0^2)\,(a_0^2 + a_1^2) - d_0^2\,d_1^2,$$

oppure

$$\delta = (a_0\,b_0\,c_0\,d_1 + a_1\,b_1\,c_1\,d_0)^2 + (a_0\,b_0\,c_0\,d_1 - a_1\,b_1\,c_1\,d_0)^2 - d_0^2\,d_1^2$$

e siccome per la (7) il primo quadrato eguaglia $d_0^2\,d_1^2\,h^2$, si conchiuderà

$$a_0\,d_0\,b_1\,c_1 - a_1\,d_1\,b_0\,c_0 = \pm\sqrt{\delta + d_0^2\,d_1^2\,(1-h^2)}.$$

Prendendo l'incognita ausiliaria $b_1\,c_1\,u - b_0\,c_0\,v = t$, ed unendovi l'equazione lineare del sistema (8), si deducono

$$u = b_0\,c_0\left(\frac{1}{h} - 1\right) + \frac{a_1\,t}{d_1\,h},\quad v = b_1\,c_1\left(\frac{1}{h} - 1\right) - \frac{a_0\,t}{d_0\,h};$$

per i quali valori la quadrica (8) diviene

$$(1+h)\,t^2 - 2\,t\,(d_0\,a_0\,b_1\,c_1 - d_1\,a_1\,b_0\,c_0) + (1-h)\,(d_1^2\,b_0^2\,c_0^2 + d_0^2\,b_1^2\,c_1^2) = 0;$$

osservando il suo discriminante equivalere a

$$\delta + d_1^2 d_0^2 (1 - h^2) - (1 - h^2)(\delta + d_0^2 d_1^2) = h^2 \delta,$$

avremo le radici $t = \dfrac{d_0 a_0 b_1 c_1 - d_1 a_1 b_0 c_0 \pm h \sqrt{\delta}}{1 + h}$; onde con semplici riduzioni fatte mediante la (7), le formule (6) si esprimono

$$(9) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} (1 + h) \cos x \cos y &= a_0 d_0 + b_0 c_0 \pm \frac{a_1}{d_1} \sqrt{\delta}, \\ (1 + h) \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y &= a_1 d_1 + b_1 c_1 \mp \frac{a_0}{d_0} \sqrt{\delta}; \end{aligned}$$

che aggiunte e sottratte membro a membro conducono ai valori di $\cos(x - y)$ e di $\cos(x + y)$.

Premettiamo le note relazioni

$$(10) \quad \delta = \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}, \quad a_0 d_0 + a_1 d_1 = \cos a, \quad a_0 d_0 - a_1 d_1 = \cos(p - a),$$
$$b_0 c_0 + b_1 c_1 = \cos(b - c), \quad b_0 c_0 - b_1 c_1 = \cos(p - a),$$
$$a_0 d_1 + a_1 d_0 = \operatorname{sen}(p - a), \quad a_0 d_1 - a_1 d_0 = \operatorname{sen} a.$$

Moltiplicando a due a due l' eguaglianze $a_0 d_1 = \dfrac{\operatorname{sen}(p - a) + \operatorname{sen} a}{2}$,

$$a_1 d_0 = \frac{\operatorname{sen}(p - a) - \operatorname{sen} a}{2}, \qquad b_0 c_0 = \frac{\cos(b - c) + \cos(p - a)}{2},$$
$$b_1 c_1 = \frac{\cos(b - c) - \cos(p - a)}{2}$$

si troverà

$$a_0 d_1 \cdot b_0 c_0 + a_1 d_0 \cdot b_1 c_1 = \frac{1}{2}[\operatorname{sen} a \cos(p - a) + \operatorname{sen}(p - a) \cdot \cos(b - c)] =$$
$$\frac{1}{4}[\operatorname{sen}(2a - p) + \operatorname{sen}(2b - p) + \operatorname{sen}(2c - p) + \operatorname{sen} p] = \frac{1}{2} \operatorname{sen} p +$$

$\operatorname{sen}(p - a) \operatorname{sen}(p - b) \operatorname{sen}(p - c)$; avendo applicata l' identità goniometrica $\operatorname{sen}(m + n - l) + \operatorname{sen}(n + l - m) + \operatorname{sen}(m + l - n) = \operatorname{sen}(l + m + n) + 4 \operatorname{sen} l \operatorname{sen} m \operatorname{sen} n$ e sostituitovi $l = p - a$, $m = p - b$, $n = p - c$.

Ne segue la relazione

$$\frac{a_0 b_0 c_0}{d_0} + \frac{a_1 b_1 c_1}{d_1} = 1 + \frac{2 \operatorname{sen}(p - a) \operatorname{sen}(p - b) \operatorname{sen}(p - c)}{\operatorname{sen} p}$$

ovvero (11) . . . . . $h = 1 + 2 \operatorname{tang}^2 r$;

dove r significa il raggio sferico del cerchio iscritto nel triangolo ABC.

Così dalle formule (9) si traggono

$$(12) \quad \cos(x + y) = \cos^2 r \cos(p - a) \pm \cos^2 r \frac{\operatorname{sen}(p - a)}{\operatorname{sen} p} \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \frac{A}{2} =$$
$$\cos^2 r \cos(p - a) \pm \frac{\operatorname{sen}^2 r}{\operatorname{sen} \frac{A}{2}}$$

e $$\cos(x-y)=\cos^2 r\cos(p-b)\cos(p-c)\mp\frac{\operatorname{sen}^2 r}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{C}{2}}.$$

Mediante la prima di queste eguaglianze il Prof. Mertens estese la costruzione del Malfatti al triangolo sferico, perchè detti α, β, γ gli archi IA, IB, IC di cerchio massimo congiungenti i vertici A, B, C col polo I del cerchio iscritto si hanno per l'arco α le proprietà $\cos\alpha=\cos r\cos(p-a)$, $\operatorname{sen} r=\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\frac{A}{2}$; onde a causa di $x+y=p-\omega_1-\omega_2$ la surriferita equazione (12) diverrà $\cos(p-\omega_1-\omega_2)=\cos\alpha\cos r\pm\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} r$ e si dovrà prendere il segno inferiore, deducendosi dalla figura $p-\omega_1-\omega_2>p-a>\alpha-r$; dunque sarà $p-\omega_1-\omega_2=\alpha+r$, e similmente $p-\omega_2-\omega_3=\beta+r$, $p-\omega_3-\omega_1=\gamma+r$; dalle quali otteniamo $\omega_1=\dfrac{p+\beta-r-(\alpha+\gamma)}{2}$, $\omega_2=\dfrac{p+\gamma-r-(\alpha+\beta)}{2}$, $\omega_3=\dfrac{p+\alpha-r-(\beta+\gamma)}{2}$.

(*Continua*).

G. Bellacchi.

Sulla simmetria in alcune dimostrazioni della geometria elementare. — 1. Accade spesso in geometria che una stessa proprietà sia relativa a più enti geometrici, i quali entrano nello stesso modo a far parte dell'enunciato della proprietà stessa. Per cosiffatta proprietà si potrebbe, a priori, pretendere che la dimostrazione fosse, in certo modo, equamente distribuita rispetto a quegli enti, cioè tale che in essa gli enti stessi fossero ugualmente considerati. Invece, non di rado avviene che la dimostrazione dia la preferenza a qualcuno di essi; e ciò è artificioso.

2. Per primo esempio, considero il teorema: *la somma degli angoli di ogni triangolo è uguale a due retti,* nel quale appunto succede che i tre angoli di cui si tratta entrano in modo simmetrico nell'enunciato. Questo teorema si dimostra ordinariamente come segue:

« Sia ABC il dato triangolo, e si prolunghi uno dei lati, per es., BC, in D. Poi pel punto C si conduca la semiretta CE ugualmente diretta alla BA, ecc. ».

In questo modo si viene a costruire attorno al punto C la somma degli angoli del triangolo. Ma, nel ragionamento che si fa, gli angoli del triangolo non sono considerati ugualmente; accade cioè che i tre angoli formati attorno al punto C sono uguali a quelli del triangolo per ragioni tutte differenti: l'angolo BCA è uno degli angoli del triangolo; l'angolo ACE è uguale a CAB perchè *alterni interni* rispetto a parallele; e l'angolo ECD è uguale ad ABC perchè *corrispondenti* rispetto alle stesse parallele.

3. Proviamoci a dimostrare il teorema in modo che i tre angoli abbiano la stessa parte nel ragionamento.

Per un punto qualunque D del lato BC si conducano le semirette DE, DF ugualmente dirette alle AB, AC. Allora si viene a costruire attorno al punto D la somma degli angoli del dato triangolo. Ma, poichè si è data la pre ferenza al lato BC, neppure in questo modo la dimostrazione è imparziale. E ciò è tanto vero che per dimostrare che i tre angoli formati attorno al punto D sono rispettivamente uguali a quelli del triangolo, occorre basarsi su principî diversi; dire cioè: $EDB = ABC$, $CDF = BCA$ perchè alterni interni rispetto a parallele; $FDE = CAB$ perchè aventi i lati ugualmente diretti. Non si ottiene dunque una dimostrazione imparziale prendendo il punto D sopra uno dei lati del triangolo.

Prendiamo allora il punto D comunque nel piano ABC, e conduciamo per esso la retta EF parallela alla BC, e le due semirette DH, DK ugualmente dirette alle BA, CA. Otteniamo così attorno al punto D la somma degli angoli del triangolo; ma, neppure in questo modo, la dimostrazione sarà del tutto imparziale. Invero si dovrà dire: $HDF = ABC$, $EDK = BCA$ perchè hanno i lati ugualmente diretti; $KDH = CAB$ perchè hanno i lati diretti in senso contrario.

Per avere una dimostrazione completamente imparziale siamo così condotti, quasi naturalmente, a fare il ragionamento seguente. Per un punto qualunque D del piano ABC si conducano tre rette rispettivamente parallele ai lati del dato triangolo. Si formano così, attorno al punto D sei angoli, di cui tre non consecutivi sono eguali a quelli del triangolo perchè hanno con questi i lati ugualmente diretti, e gli altri tre sono pure essi uguali ai lati del triangolo perchè opposti al vertice dei primi tre. Attorno al punto D c'è quindi il doppio della somma degli angoli del triangolo; ma la somma degli angoli attorno ad un punto è 4 retti, perciò quella degli angoli del triangolo è 2 retti.

4. Se l'ordinaria dimostrazione di questo teorema si pone ora in confronto con l'ultima, si vedrà subito quanto nella prima vi sia d'artificioso. In essa, la costruzione necessaria viene, in certo modo, a rincantucciarsi in un punto particolare del piano, mentre può farsi in un punto qualsivoglia che, se si vuole, può anche essere fuori del piano (*).

Sfogliando qualunque trattato di geometria elementare, il lettore può trovare una quantità di teoremi le cui dimostrazioni, come quella del precedente, non sono equamente distribuite rispetto agli enti che vi entrano ugualmente. Gliene indico alcuni.

5. La dimostrazione del teorema: *ciascun lato di un triangolo è minore della somma degli altri due*, come si trova in Euclide, e in quasi tutti i libri di testo, non è simmetrica. È invece simmetrica la seguente.

Nel triangolo ABC debbasi dimostrare ad es. che $BC < CA + AB$. Conducasi la bisettrice dell'angolo A che incontri in D il lato BC. Essendo $\angle BDA > \angle CAD$ è anche $\angle BDA > \angle DAB$, quindi $BD < AB$. Nello stesso modo si prova che $DC < CA$, quindi $BD + DC < CA + AB$, ossia $BC < CA + AB$.

6. Prop. VI del libro XI d'Euclide: *se due linee rette sono perpendicolari ad un medesimo piano, saranno parallele tra loro.* La dimostrazione d'Euclide,

(*) Nella geometria del Dr Paolis potrebbe essere posta questa dimostrazione, senza che fosse necessario premettere altro.

che, nella sostanza, si trova riprodotta tale e quale nella maggior parte dei nostri libri di testo, dà la preferenza ad una delle due rette date, mentre queste sono contenute egualmente nell'enunciato.

Ecco ora una dimostrazione simmetrica del teorema.

Si premette: « se dal piede di una perpendicolare ad un piano si conduce « la perpendicolare ad una retta qualunque del piano, quest'ultima retta è per- « pendicolare al piano delle prime due. »

Ciò posto, sieno AB, CD due perpendicolari al piano α nei punti B e D. In *un punto qualunque* E della retta BD si conduca nel piano α la EF perpendicolare a BD. Pel teorema premesso, i due piani ABE, CDE sono perpendicolari alla EF nello stesso punto E, quindi coincidono; epperò le due rette AB, CD giacciono in uno stesso piano. — Esse poi non s'incontrano perchè entrambi perpendicolari a AD (*).

7. Teorema relativo alla *minima distanza* di due rette sghembe. Nella ordinaria dimostrazione di questo teorema, si conduce per una delle due rette date il piano parallelo all'altra. Basta questa costruzione, perchè la dimostrazione non sia equamente distribuita rispetto alle due rette date.

Per fare una dimostrazione imparziale, si potrebbe condurre per *ciascuna* di esse il piano parallelo all'altra; poi proiettare ciascuna retta sul piano passante per l'altra. L'intersezione dei due piani proiettanti è la perpendicolare comune alle due rette.

Oppure, si potrebbe condurre per un punto qualunque il piano parallelo alle due rette sghembe, e proiettarle poi ambedue su questo piano L'intersezione dei due piani proiettanti è ancora la perpendicolare comune alle due rette.

8. *In ogni triangolo, la bisettrice di un angolo interno divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.* L'ordinaria dimostrazione di questo teorema non è simmetrica.

Eccone una simmetrica.

Nel triangolo ABC, sia AD la bisettrice dell'angolo A. Sieno E, F le proiezioni dei vertici B, C sulla perpendicolare ad AD condotta per A. Pel teorema di Talete:

$$BD : DC = AE : AF;$$

per la simiglianza dei triangoli ABE, ACF:

$$AE : AF = AB : AC;$$

quindi

$$BD : DC = AB : AC.$$

Si potrebbero proiettare i vertici B e C sulla stessa AD e si otterrebbe una dimostrazione poco differente dalla precedente.

(*) Questa dimostrazione fu da me comunicata tempo fa al chiar.mo Prof. A. Faifofer che la introdusse, in luogo di quella d'Euclide, nella sua geometria pei Licei (A. Faifofer: *Geometria ad uso dei Licei.* — Venezia, Tip. Emiliana, 1894).

La proprietà relativa alla bisettrice esterna può essere dimostrata in modo analogo.

9. Avrei potuto indicare altre proprietà, ma bastano le precedenti per richiamare l'attenzione del lettore sopra un argomento il cui studio può, senza dubbio, riuscire molto utile per l'insegnamento.

Fermo, marzo 1895.

CORRADO CIAMBERLINI.

A proposito della quistione 244'. — La quistione 244' è un caso molto particolare del problema seguente: *Determinare l'area del poligono avente per vertici i centri dei poligoni regolari della stessa specie, costruiti sui lati di un poligono qualunque inscritto in un cerchio, esternamente a questo poligono* — che passo a risolvere.

Sia $A_1 A_2 \ldots A_n$ il poligono fondamentale, R il raggio del cerchio O ad esso circoscritto ed R_k il raggio del cerchio O_k circoscritto al poligono costruito sul lato $A_{k-1} A_k$.

Per il punto O si conducano due perpendicolari che sceglieremo per assi coordinati e sia A_0 il punto in cui l'asse OX incontra il cerchio circoscritto al poligono $A_1 A_2 \ldots . A_n$. Posto $\angle A_0 O A_1 = \theta_1$, $\angle A_0 O A_2 = \theta_2 \ldots .$ $A_0 O A_n = \theta_n$, osservando che gli angoli θ e il numero m dei lati di ciascun poligono esterno a quello primitivo determinano il problema, si hanno intanto le eguaglianze

$$OP = R \cos \frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2}, \quad A_k P = R \operatorname{sen} \frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2},$$

$$R_k = \frac{R \operatorname{sen} \dfrac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{m}}, \quad O_k P = \frac{R \operatorname{sen} \dfrac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2} \cos \dfrac{\pi}{m}}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{m}},$$

dove P indica il punto medio del lato $A_{k-1} A_k$.

Se ora si indicano con x_k, y_k le coordinate del punto O_k, dalle relazioni precedenti si trae senza difficoltà

$$x_k = \frac{R \operatorname{sen} \left(\dfrac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2} + \dfrac{\pi}{m} \right) \cos \dfrac{\theta_k + \theta_{k-1}}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{m}},$$

$$y_k = \frac{R \operatorname{sen} \left(\dfrac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2} + \dfrac{\pi}{m} \right) \operatorname{sen} \dfrac{\theta_k + \theta_{k-1}}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{m}}.$$

Ma l'area S del poligono avente per vertici i punti $O_1 [x_1, y_1]$, $O_2 [x_2, y_2]$, ... $O_n [x_n, y_n]$, com'è noto, è data da

$$S = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_k (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k);$$

pperò sostituendo si ricava dopo alcune riduzioni

$$S = \frac{R^2}{2} \operatorname{sen}^{-2} \frac{\pi}{m} \sum_1^n{}_k \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2} + \frac{\pi}{m}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{2} + \frac{\pi}{m}\right) \operatorname{sen} \frac{\theta_{k+1} - \theta_{k-1}}{2} \quad [1]$$

he è la formola cercata.

Osservazione 1ª. Il procedimento seguito è applicabile, salvo una minore emplicità di risultato, alla risoluzione del problema analogo che risulta dal sup-orre che i poligoni regolari costruiti sui lati del poligono fondamentale non iano tutti della stessa specie.

Osservazione 2ª. È notevole il caso in cui il poligono fondamentale è re-olare e si ha in pari tempo $m = n$. Allora la [1] diviene

$$S = 2\,n\,R^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \cos^2 \frac{\pi}{n},$$

poichè l'area S del poligono fondamentale è

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\,n\,R^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n},$$

isulta infine

$$S = 4\,\mathbf{S} \cos^2 \frac{\pi}{n}.$$

G. Candido.

Sui piani che tagliano un triedro qualunque secondo triangoli quilateri. — Alla quistione seguente: *Dato un triedro qualunque determi-are, se è possibile, mediante la geometria elementare la direzione dei piani he taglierebbero il triedro secondo triangoli equilateri*, posta nell'*Intermédiarie les Mathématiciens* (t. I, n° 263, p. 147), è data nel periodico stesso una breve isposta (t. I, p. 223) nella quale viensi a concludere che il problema non am-nette in generale soluzione nella geometria della riga e del compasso.

Mi propongo in questa piccola nota di esaminare i casi particolari più notevoli ei quali il problema ha soluzione elementare, partendo appunto dalla soluzione enerale.

1. Su ciascuna delle costole del triedro $V(ABC)$ sia fissato il senso positivo d il senso negativo come se si trattasse di tre assi coordinati coll'origine in V; A, B, C siano tre punti comunque presi sulle tre costole ed l, m, n siano, rispet-ivamente, le loro distanze, positive o negative, dal vertice V.

Le tre facce del triedro siano:

$$BVC = \alpha,\ CVA = \beta,\ AVB = \gamma$$

i tratta di determinare il numero e la posizione dei piani che uscendo da n punto di una costola tagliano il triedro secondo triangoli equilateri. Visto he due piani paralleli tagliano un triedro secondo triangoli simili e che, evi-lentemente, il problema presenta le stesse fasi qualunque sia la costola su cui i sceglie il punto donde debbono uscire i piani suddetti, è lecito assumere per semplicità $l = 1$ e di considerare i piani che tagliano il triedro nel modo già detto passanti per A.

2. Sia ABC un triangolo equilatero e k sia la lunghezza del suo lato: considerando allora successivamente i triangoli AVB, BVC, CVA, per un noto teorema di trigonometria, si deducono le seguenti equazioni:

$$1 + m^2 - 2m \cos\gamma = k^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad [1]$$
$$1 + n^2 - 2n \cos\beta = k^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad [2]$$
$$m^2 + n^2 - 2mn \cos\alpha = k^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad [3]$$

Da queste eliminando k si ottengono due equazioni tra i parametri m ed n individuanti i piani dei quali si va in cerca e dopo ciò il problema può considerarsi risoluto.

Per fare l'accennata eliminazione, nella [3] sostituiamo successivamente i valori di k^2 dati dalla [2] e dalla [4]; consegue il sistema:

$$m^2 - 2\,mn \cos\alpha + 2\,n \cos\beta - 1 = 0 \quad . \ . \ . \ . \quad [1']$$
$$n^2 - 2\,mn \cos\alpha + 2m \cos\gamma - 1 = 0 \quad . \ . \ . \ . \quad [2']$$

Dalla [1'] ricavando il valore di n si ha:

$$n = \frac{m^2 - 1}{2\,(m \cos\alpha - \cos\beta)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad [3]$$

Sostituendo questo valore nella [2'] e facendo tutte le riduzioni si arriva alla seguente equazione di 4° grado:

$$(1 - 4\cos^2\alpha)\, m^4 + 4\cos\alpha\,(\cos\beta + 2\cos\alpha\cos\gamma)\, m^3 - 2(1 + 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\, m^2 + 4\cos\beta\,(\cos\alpha + 2\cos\beta\cos\gamma)\, m + 1 - 4\cos^2\beta = 0 \quad . \ . \ . \quad [4]$$

3. È notevole una certa analogia che questa equazione ha colle equazioni reciproche, giacchè i coefficienti delle potenze di m equidistanti dagli estremi si mutano l'uno nell'altro col semplice scambio delle lettere α e β. La [4] diventa un'equazione reciproca se si suppone $\alpha = \beta$ od anche $\alpha = \beta = \gamma$, quindi *mentre il problema proposto è in generale del 4° grado, si riduce al 2° grado se il triedro ha due facce uguali o tutte e tre le facce uguali.*

Il grado della [4] potrà abbassarsi al secondo anche in altri casi, come p. e. quando siano nulli i coefficienti di m^3 e di m contemporaneamente: perchè questo accada basta che si abbia

$$\cos\alpha = 0, \ \cos\beta = 0, \ \text{cioè} \ \alpha = \beta = 90^\circ$$

ossia *basta che si tratti di un triedro birettangolo*; oppure basta anche che sia:

$$\cos\beta + 2\cos\alpha\cos\gamma = 0, \ \cos\alpha + 2\cos\beta\cos\gamma = 0$$

il che in generale ha luogo ancora per $\alpha = \beta = 90^\circ$, ma *può aver luogo e in infiniti modi, per valori di α e β diversi da 90°* quando sia:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\cos\gamma \\ 2\cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

cioè: $\cos\gamma = \pm \frac{1}{2}$ e perciò $\gamma = 60^\circ$ o $\gamma = 120^\circ$. Allora dovrà aversi:

per $\gamma = 60^\circ$, $\cos\alpha + \cos\beta = 0$ ossia $\alpha + \beta = 180^\circ$

per $\gamma = 120^\circ$, $\cos\alpha - \cos\beta = 0$ ossia $\alpha = \beta$.

Infine osserveremo che il coefficiente di m^4 si annulla per $\alpha = 60^\circ$ o per $\alpha = 120^\circ$ e che il termine noto della [4] si annulla pur esso per $\beta = 60^\circ$ o per $\beta = 120^\circ$; sicchè in ognuno di questi casi l'equazione si abbassa al 3° grado, ossia ha una radice infinita nel primo caso ed una nulla nel secondo. Che se poi i due casi si verificassero simultaneamente l'equazione si ridurrebbe al 2° grado e si avrebbe una soluzione infinita ed una nulla.

4. I casi in cui il problema è indeterminato corrispondono ai sistemi di valori di α, β e γ pei quali i coefficienti della [4] sono simultaneamente nulli, e perciò dovrà aversi:

$$\cos\alpha = \pm \frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \pm \frac{1}{2}, \quad \cos\gamma = \pm \frac{1}{2}.$$

Ma avendo riguardo al coefficiente del termine medio che è $1 + 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ si vede subito che i sistemi di valori possibili per α, β e γ debbono esser tali che dei tre coseni due siano positivi ed uno negativo ovvero siano tutti e tre negativi. Ora nel secondo caso si avrebbe $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 120^\circ$ e perciò $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ il che è da escludersi, e nel primo caso si avrebbero due facce del triedro di 60° ed una di 120° il che pure è da escludersi non corrispondendo, come il caso precedente, che al sistema di tre rette concorrenti di un piano. Pertanto giova osservare a questo punto che le [1'] e [2'] e perciò la [4] sono anche atte a risolvere il seguente problema: *Date tre rette concorrenti in un punto e giacenti in un piano e fissato su una di esse un punto determinare i triangoli equilateri con un vertice in questo punto e gli altri due sulle altre due rette.*

Anche questo problema ha evidentemente quattro soluzioni in generale ed i due casi testè accennati sono appunto quelli in cui esso è indeterminato, come può dedursi assai facilmente anche con processo geometrico. Ebbene in tal caso si è condotti al seguente teorema: *Presi, a partire dal vertice, due segmenti qualunque sui lati di un angolo di 120° e un segmento uguale alla loro somma algebrica sulla bisettrice di questo angolo, gli estremi di questi tre segmenti sono sempre i vertici d'un triangolo equilatero.*

F. Mariantoni

Sulla definizione di divisione. — Rammento la ben nota definizione « moltiplicare un numero (moltiplicando) per un altro (moltiplicatore) vuol dire formare col moltiplicando un numero (prodotto), operando nello stesso modo che si è operato con l'unità, per formare il moltiplicatore ». Ora essendo la divisione l'operazione inversa della moltiplicazione, si potrà studiarla partendo dalla seguente

DEFINIZIONE: *Dividere un numero (dividendo) per un altro (divisore) vuol dire formare con l'unità un numero (quoziente), operando nello stesso modo che si è operato col divisore per ottenere il dividendo* (*).

L'importanza di questa definizione consiste in ciò che essa ci fornisce direttamente le regole della divisione. Dalla posta definizione risulta che il dividendo è formato col divisore nello stesso modo che con l'unità è formato il quoziente. Di qui si ricava il

TEOREMA I. — *Il dividendo di una divisione è sempre uguale al prodotto del divisore per il quoziente.*

Sia dato p. e. da dividere 13 per 5. Il 13 si ottiene da 5 facendo la somma di $5 + 5$ e di una *parte* del 5 formata scomponendo questo nelle sue unità (che per definizione sono tutte identiche fra loro), e prendendo 3 di queste. Per poter fare altrettanto con l'unità conviene assumere la seguente

CONVENZIONE. — *L'unità può considerarsi come l'insieme di un qualsiasi numero di parti fra loro eguali*, parti che si chiameranno sedicesimi se sono in numero di 16, ed ognuna di esse si indicherà col simbolo $\frac{1}{16}$, e quindi 7 di esse col simbolo $\frac{7}{16}$ ecc., ecc.. E qui possono sottintendersi le definizioni e le proprietà fondamentali delle frazioni.

Ciò posto il cercato quoziente sarà $1 + 1 + \frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5}$, ed essendo $1 = 5$ quinti, ed avendosi per ipotesi $5 + 5 + 3 = 13$, sarà 5 quinti + 5 quinti + 3 quinti $= \frac{13}{5}$, cioè $13 : 5 = \frac{13}{5}$; si ha poi immediatamente $4 : 7 = \frac{4}{7}$. Viceversa $\frac{13}{5} = 13 : 5$, $\frac{4}{7} = 4 : 7$. Quindi il

TEOREMA II. — *Il quoziente di due numeri interi si può porre uguale ad una frazione avente per numeratore il dividendo e per denominatore il divisore; e viceversa ogni frazione può considerarsi come il quoziente del numeratore per il denominatore.*

Tralasciando qui di parlare di quoziente incompleto, vediamo invece come si possano ricavare le regole della divisione con frazioni. Sia da dividere un numero qualunque m per una frazione $\frac{a}{b}$ (a, b interi), dove supporremo $b = 1$

(*) Si può obbiettare che questa definizione così esposta contenga un certo grado d'indeterminatezza. Questa indeterminatezza, che la proposta definizione ha in comune con quella sopra citata per la moltiplicazione, consiste in ciò che non è tracciata la via per la quale devesi intendere prodotto il dividendo mediante il divisore, come nella detta definizione di moltiplicazione non è tracciata la via per la quale si deve intendere prodotto il moltiplicatore mediante l'unità (ed evidentemente partendo dall'unità in più modi, ed anche ben diversi l'uno dall'altro, può formarsi un dato numero). Questa indeterminatezza si può togliere in ambedue i casi, ed anzi potrei far vedere che, tolta quella per la moltiplicazione, rimane facilmente tolta anche l'altra, ma siccome appunto per questo le osservazioni a ciò opportune riguardano prima la moltiplicazione che la divisione, e di più sono tali da condurre a considerazioni d'indole più estesa di quella inerente a questa brevissima nota, che non ha altra pretesa tranne che di porre in evidenza un punto di vista sotto il quale si può considerare la divisione in armonia con un punto di vista sotto il quale in moltissimi trattati viene considerata la moltiplicazione, così credo opportuno di rimandare tali osservazioni ad altra occasione, tanto più che l'indeterminatezza in discorso è soltanto di forma anzichè di sostanza.

QUISTIONI PROPOSTE (**)

285*. Se l'angolo in A del triangolo ABC è di 60° i centri del cerchio circoscritto, del cerchio inscritto, del cerchio ex-inscritto tangente al lato BC, l'ortocentro H e i punti simmetrici di A rispetto a BC, BH e CH, si trovano nel medesimo cerchio passante per B e C.

G. Vitali.

286*. Risolvere il sistema d'equazioni

$$(x+y)(xy+1)=axy$$
$$(x^3+y^3)(x^3y^3+1)=bx^3y^3.$$

F. Ceccherini.

287*. Se a partire dal vertice A di un triangolo ABC si portano sui lati AB, AC i segmenti $AB_2^A = AC_2^A = BC$ e sui prolungamenti degli stessi lati i segmenti $AB_1^A = AC_1^A = BC$, e si opera nello stesso modo per gli altri vertici, dimostrare che i sei punti di ciascuno dei seguenti gruppi: $A_1^B A_1^C B_1^A B_1^C C_1^A C_1^B$, $A_1^B A_1^C B_2^A B_2^C C_2^A C_2^B$, $A_2^B A_2^C B_1^A B_1^C C_2^A C_2^B$, $A_2^B A_2^C B_2^A B_2^C C_1^A C_1^B$ sono in uno stesso cerchio concentrico rispettivamente al cerchio inscritto e a ciascuno dei cerchi ex-inscritti al triangolo ABC.

G. Russo.

288**. Un lato a di un triangolo è medio armonico fra gli altri due b e c; determinare gli angoli B e C in funzione di A ed il limite di quest'angolo.

G. Bellacchi.

289**. Dimostrare che il rapporto della potenza d'un triangolo (*) alla sua area, è uguale al rapporto fra il quadruplo del raggio del circolo d'Eulero e un cateto d'un triangolo rettangolo avente per ipotenusa il raggio del primo circolo di Lemoine e per altro cateto il raggio del circolo di Brocard del triangolo.

A. Bozal Obejero.

(**) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

(*) Si chiama potenza di un triangolo la quantità $\frac{1}{2}\cdot(a^2+b^2+c^2)$.

290. Un triangolo si deforma conservando un angolo fisso in grandezza e posizione e costante la sua potenza (semisomma dei quadrati dei lati). Trovare l'inviluppo del lato mobile.

JUAN J. DURÁN LORIGA.

291.** Se per un punto M del piano di un triangolo si tracciano delle parallele ai lati e si costruiscono i coniugati armonici di M rispetto ai segmenti intercetti dai lati su queste parallele, i tre punti così determinati stanno in linea retta.

Le rette ottenute colla costruzione precedente per un punto ed i suoi isobarici, o per i tre punti semireciproci di un punto dato, formano un triangolo che è triplamente omologico a quello fondamentale.

JUAN J. DURÁN LORIGA.

292*. Mostrare che le radici dell'equazione quadratica

$$(1-\lambda)\,x^2-\left\{a+a'-\lambda\,(b+b')\right\}x+aa'-\lambda\,bb'=0,$$

ove a, b, a', b', λ sono numeri reali, sono sempre reali e distinte se è $\lambda\,(a-b)\,(a'-b')\geqq 0$, e se è $\lambda\,(a-b)\,(a'-b')<0$, dette radici possono essere reali e distinte, reali ed eguali o immaginarie coniugate.

A. DEL RE.

293.** Se gli spigoli di un triedro trirettangolo, di vertice O, sono tagliati da un piano arbitrario π nei punti A, B, C, e sono M, M' due punti qualunque simmetrici rispetto a π, si ha la relazione

$$\frac{4\,\overline{MM'}^2}{(\overline{OM}^2-\overline{OM'}^2)^2}=\frac{1}{\overline{OA}^2}+\frac{1}{\overline{OB}^2}+\frac{1}{\overline{OC}^2}\ (*).$$

A. DEL RE.

294. Se a, b, c, d denotano le distanze, di un punto arbitrario dello spazio, dai vertici di un tetraedro regolare di lato l, si ha la relazione

$$3\,(l^4+\sum a^4)=2\,(l^2\,.\sum a^2+\sum a^2 b^2).$$

V. RETALI.

(*) Questa relazione si può dedurre facilmente dalla seconda terna di formule della quistione 256* (A. DEL RE).

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

F. KLEIN. — *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von* F. TÄGERT. — Leipzig, Taubner 1895, p. V + 66 con 10 fig. nel testo e 2 tav. lit. - 8° (*).

Spesso e non senza ragione viene lamentato il *baratro* che esiste fra la matematica scolastica e la matematica superiore. Ed infatti non si può negare che il futuro insegnante di matematica da studente ascolta assai poco di quello che potrà direttamente sfruttare nel proprio insegnamento e che per converso gli insegnanti universitari scrivono quasi sempre i loro libri pei loro eguali e non sembrano sforzarsi in alcun modo di offrir qualche cosa anche a coloro che non appartengono più alle scuole superiori. Tali inconvenienti sono inevitabili sintantochè le nostre università tedesche (**) rimarranno quello che furono sino ad ora, sintantochè esse non saranno semplici seminari nel senso più alto della parola, ove i futuri docenti non apprendono altro che quello di cui abbisognano nel proprio ufficio. Ma si può tuttavia ottenere che questi inconvenienti siano meno sensibili, e contribuire a ciò è un dovere dal cui adempimento non possono sottrarsi gli insegnanti universitari. Perciò essi devono curare che siano regolarmente tenute delle conferenze inferiori, ove vengano trattati da un punto di vista elevato alcuni temi particolari di matematiche elementari, specialmente i principii della geometria. Essi devono d'altronde anche rendere possibile agli insegnanti di matematica delle scuole secondarie, di avere notizia almeno dei risultati scientifici capaci di gettar nuova luce sulla matematica elementare e sulle questioni che essa presenta.

Da questo punto di vista la presente operetta dev'essere salutata con gioia. Essa deve la vita ad alcune lezioni tenute dapprima dinanzi agli intervenuti ad un corso festivo di lezioni fatto all'università di Gottinga e poi in forma ampliata durante il semestre estivo 1894. Il sig. Tägert, insegnante di grado superiore ad Ems, ha redatte con gran cura tali lezioni per la stampa.

Queste lezioni hanno per tema una serie di questioni le quali si offrono spontaneamente nella geometria elementare, la soluzione delle quali però non può essere ottenuta coi mezzi della geometria elementare stessa. Perciò mentre nell'insegnamento scolastico è forza limitarsi ad accennare a tali questioni, senza esaminarle, si può però oggi esigere da qualsiasi insegnante di matematica che

(*) Crediamo opportuno riferire tradotto il seguente giudizio che un egregio scienziato espresse nella *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* intorno alla più recente opera di F. Klein, per attrarre su di essa l'attenzione dei lettori del nostro *Periodico*. Ci è così offerta una occasione opportuna per annunziare che ben presto la casa editrice Rosenberg e Sellier di Torino ne pubblicherà una traduzione italiana dovuta al nostro collaboratore prof. F. Giudice; a tale traduzione sarà premessa una prefazione del prof. G. Loria.

(**) Altrettanto si può ripetere per le università italiane.

egli abbia delle idee chiare intorno al loro significato ed alla loro soluzione. Ciò gli è reso possibile dalle lezioni di Klein, giacchè queste non presuppongono che i primissimi fondamenti dell'analisi infinitesimale.

I tre problemi: *duplicare un cubo* (problema di Delo), *trisecare un angolo qualunque*, e *trovare la quadratura del circolo* formano in certo qual modo la cornice delle lezioni di Klein. Mentre si trattano e si esaminano d'un tratto delle intere classi di problemi congeneri, si arriva a concludere che questi problemi di antica celebrità non si possono risolvere colla riga ed il compasso.

I due primi fra quei tre problemi conducono tosto alla questione più generale della ricerca delle espressioni algebriche costruibili colla riga e col compasso, e quindi alla questione di determinare le equazioni algebriche risolubili con radici quadrate.

Sciolta quest'ultima questione, si conclude agevolmente l'irresolubilità *regula et circieri* del problema di Delo e della trisezione dell'angolo. A questo tengon dietro le ricerche sulla divisione della circonferenza, in particolare è esposta diffusamente la costruzione del poligono regolare di 17 lati. Finalmente è fatto un rapido cenno delle costruzioni eseguite mediante curve di ordine superiore.

Tale è il contenuto della prima sezione. Nella seconda vien dimostrato, seguendo G. Cantor, l'esistenza di numeri trascendenti; richiamiamo l'attenzione del lettore su queste considerazioni semplici e belle. Dopo uno sguardo storico sulla evoluzione che subì il problema della quadratura del circolo, vien poi dimostrata la trascendenza dei numeri e e π, il che da Hilbert, Hurwitz e Gordan venne reso straordinariamente semplice. Così resta in pari tempo dimostrata l'impossibilità della quadratura del cerchio. In un'*Appendice* è poi brevemente descritto l'apparato inventato da Abdank-Abakanowicz per eseguire delle quadrature meccanicamente.

Come si vede, la materia di queste lezioni di Klein è estremamente attraente ed istruttiva, e poichè esse, come si è già detto, non presuppongono che i primissimi fondamenti dell'analisi infinitesimale, così possono venire caldamente raccomandate a tutti gli insegnanti di matematica. In pari tempo si può desiderare che le legga qualunque studente di matematica.

F. Engel.

GIUSEPPE PESCI, Professore nella R. Acc. Navale. — *Trattato elementare di trigonometria piana e sferica* con 2027 esercizi. — Appendice (Parte 1ª: Generalità sui calcoli numerici e sull'uso delle tavole logaritmico-trigonometriche. — Parte 2ª: Uso delle tavole logaritmico-trigonometriche del Caillet). — Libro di testo per la R. Accad. Navale. — Livorno, Raffaello Giusti, 1895 (*).

Questo libro, sebbene modesto negli intenti, è indubbiamente il frutto di accuratissimi studi ed ha un'impronta personale marcatissima sia per l'indirizzo saviamente eclettico, sia pei notevoli contributi originali. Il fine precipuo, che

(*) *Trattato di trigonometria elementare*: L. 4. — *Appendice al Trattato*: L. 1.

è quello di condurre gli allievi al pratico uso della trigonometria, vi è inseguito con ansia amorosa attraverso alle accurate distinzioni e ai graduati esercizi. Nulla vi è trascurato di ciò che la generalità e il rigore scientifico richiedono, ma ciò che non è assolutamente necessario per la risoluzione numerica dei triangoli è stampato in carattere più piccolo in modo da mostrare subito ciò che per la sola pratica si può lasciare.

Nel cap. I dei *Preliminari ed introduzione* troviamo la misura degli archi e degli angoli; nel II sono dimostrate con esattezza le formule $AB + BC + CA = 0$ pei segmenti di una stessa retta e l'altra $(AB) + (BC) + (CA) = 2k\pi$ per gli archi di uno stesso circolo; formule utilissime in seguito, per esempio nella dimostrazione del teorema d'addizione, nelle applicazioni della trigonometria sferica, ecc.

Il cap. III (*Coordinate di un punto*) è un'innovazione coraggiosa nella trattazione odierna della trigonometria in Italia, ed è giustificatissima, perchè, senza presentare difficoltà di nessun genere, permette di dare una definizione assai semplice delle funzioni trigonometriche. La considerazione delle coordinate di un punto sulla sfera, aggiunta dall'A., sarà poi utile nelle importanti applicazioni nautiche della trigonometria sferica.

Nel capitolo IV si indica lo scopo della trigonometria.

Dopo ciò si passa alla Parte I (*Teoria delle funzioni trigonometriche*). Nel cap. I, si definiscono le funzioni trigonometriche col metodo già usato dal Cagnoli, vale a dire: fissato in modo opportuno un sistema di assi Cartesiani ortogonali e indicate con x, y le coordinate dell'estremo dell'arco α e con ρ il raggio del cerchio, i rapporti $\frac{y}{\rho}$, $\frac{x}{\rho}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{\rho}{y}$, $\frac{\rho}{x}$, $\frac{x}{y}$ si chiamano rispettivamente seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente di α (i casi nei quali x od y sono nulli vengono poi trattati a parte con considerazioni al limite). L'A. dà poi anche (in carattere minuto) la definizione geometrica ordinaria delle linee trigonometriche.

Nel cap. II troviamo la nozione di archi *associati*, cioè di archi i cui estremi cadono nei vertici di un rettangolo inscritto nel cerchio fondamentale e coi lati paralleli agli assi. Questa nozione semplifica sensibilmente la ricerca (sempre laboriosa) delle espressioni generali degli archi aventi una stessa funzione trigonometrica.

Nel cap. III si fa la riduzione al 1° quadrante, si considerano gli archi supplementari e complementari e si finisce colla opportunissima riduzione al primo semiquadrante.

Nel cap. IV sono esposte le relazioni fra le funzioni trigonometriche di uno stesso arco, le quali, grazie alla definizione analitica, possono essere direttamente stabilite fra i valori algebrici (e non soltanto assoluti) delle funzioni stesse.

Il cap. V (tutto in carattere minuto) è dedicato a considerazioni generali, illustrate da esempi, sulle identità, le equazioni trigonometriche, e le eguaglianze trigonometciche subordinate.

Nel cap. VI si dànno le formule relative all'addizione degli archi, deducendole da quella che dà lo sviluppo di cos $(\alpha + \beta)$. La dimostrazione di questa formula è sostanzialmente quella di Cauchy, ma l'A. ha saputo porla sotto una forma che è molto semplice e che vale qualunque siano gli archi α e β, evitando così i lunghi procedimenti di generalizzazione che si devono ordinariamente seguire. Nel § 67, scritto in carattere minuto, ammessa la formula $\cos(\alpha + \beta + \ldots) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta + \ldots) = (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) \ldots$ (la quale del resto si può dimostrare elementarmente cogli sviluppi di $\cos(\alpha + \beta)$ e $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$) l'A. dà gli sviluppi per una somma di quanti si vogliano archi.

Nel cap. VII si dànno e si discutono le formule per la moltiplicazione degli archi per 2 e per 3 e, in carattere minuto, si dà colla formula (ammessa) di Moivre la moltiplicazione per n.

Nel cap. VIII si dànno e si discutono le formule per la bisezione degli archi, accennando in carattere minuto alla divisione per m (forse gli accenni a questo e ad altri analoghi risultati generali potevano senza danno essere tralasciati).

Nel cap. IX sono esposte le trasformazioni in prodotti delle somme e differenze di seni e coseni e i metodi principali per rendere una formula calcolabile coi logaritmi.

Troviamo poi nel cap. X le prime approssimazioni per i valori di seno e coseno per mezzo dell'arco (le quali permettono di accennare alla costruzione di una tavola dei valori naturali delle funzioni trigonometriche); e nel cap. XI un cenno sulle funzioni trigonometriche inverse.

Parte II. *Trigonometria piana.* Comincia con una *Premessa* che riguarda la generalità sulla risoluzione dei triangoli; l'A. giustamente insiste sulla necessità del controllo geometrico prima di ammettere la soluzione data dall'analisi (§ III).

I cap. I e II trattano delle relazioni fra gli elementi di un triangolo rettangolo e della sua risoluzione nei vari casi.

Il cap. III espone le relazioni fondamentali fra gli elementi di un triangolo qualunque in modo da richiamare l'analogia colla trigonometria sferica. Così qui troviamo il teorema dei seni, il teorema delle projezioni ($a = b \cos \gamma + c \cos \beta$, che richiama la relazione fra 5 elementi in trigonometria sferica espressa dalla formola $\operatorname{sen} a \cos c = \operatorname{sen} b \cos \gamma + \operatorname{sen} c \cos \beta \cos a$), il teorema di Carnot ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, analogo del teorema d'Eulero $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \alpha$), il teorema delle cotangenti (espresso da sei formole del tipo $\operatorname{ctn} \alpha = \dfrac{b - a \cos \gamma}{a \operatorname{sen} \gamma}$, le quali corrispondono a quelle del tipo $\operatorname{ctn} a \operatorname{sen} b = \cos b \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{ctn} \alpha$), le espressioni di $\operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha$, $\cos \frac{1}{2} \alpha$, ecc. per mezzo dei lati, le formule di Delambre e di Nepero (che sono le corrispondenti delle omonime); e questa cura dell'analogia sembra anche a me (V. la prefazione dell'A.) didatticamente utilissima.

Nel cap. IV si dà la risoluzione di un triangolo qualunque; le formule di soluzione sono sempre discusse analiticamente e poi i risultati così ottenuti sono confermati e interpretati geometricamente.

Nei cap. V, VI, VII vengono date varie espressioni dell'area, del raggio, del cerchio circoscritto, ecc.; e finalmente sono fatte alcune applicazioni della trigonometria piana a problemi di topografia e di nautica.

Se l'A. non si è intrattenuto sopra esempi di risoluzione di triangoli quando i dati non sono tutti lati od angoli, ha però proposti numerosi esercizi di questo genere (V. per es. gli esercizi dal 1046 al 1059, dal 1320 al 1337, ecc.). È notevole la cura colla quale sono disposti i calcoli negli esempi numerici; questa disposizione sarà poi commentata dall'A. nell'Appendice.

Parte III. *Trigonometria sferica* Nella *Premessa I* l'A. espone e dimostra le fondamentali proprietà geometriche dei triangoli sferici. Egli, dopo aver accennato ai triangoli sferici in generale, si limita, conformemente all'uso, ai triangoli sferici i cui lati ed angoli sono minori di 180^0, e credo che questo sacrificio della generalità eviti in seguito confusioni sulla validità di certe formule; per es. le formule di Gauss (Delambre) sono valide soltanto nell'ipotesi restrittiva (Cfr. Baltzer).

La *Premessa II* è analoga alla *Premessa* della trigonometria piana.

Nel cap. I si dimostrano geometricamente le 10 relazioni fra tre elementi di un triangolo sferico rettangolo; e per rammentarle l'A. dà la nota regola di Nepero. È notevole poi il § 186 ove vien brevemente esposto il metodo per dedurre le formule dei triangoli rettangoli piani da quelle degli sferici.

Il cap. II tratta della risoluzione di un triangolo sferico rettangolo nei vari casi, facendo seguire ad ogni caso un'accurata discussione.

Nel cap. III si deducono dapprima dalle formule pei triangoli rettangoli le formule di Eulero per un triangolo qualunque; metodo vantaggioso perchè evita le successive generalizzazioni che occorrono colla diretta dimostrazione (Cfr. Serret). Dal teorema di Eulero si derivano poi nel solito modo quello dei seni, quello delle proiezioni e quello delle cotangenti; ma è interessante vedere che questi tre teoremi vengono anche dimostrati geometricamente. I correlativi sono dapprima derivati direttamente dalle formule dimostrate ed in seguito poi stabiliti anche colla considerazione del triangolo polare. Nel § 219 si dànno le note espressioni di sen $\frac{1}{2}\alpha$, cos $\frac{1}{2}\alpha$, tang $\frac{1}{2}\alpha$ per mezzo dei lati, e le correlative. Nel § 221 si trovano le formule di Delambre, dalle quali si ricavano quelle di Nepero, che sono pure dimostrate in un secondo modo. In fine nel § 223 vengon date le belle formule di Cagnoli. A tutte le formule meno semplici è poi opportunamente aggiunto un sussidio mnemonico (*).

Il cap. IV, dedicato alla risoluzione di un triangolo sferico qualunque, è notevole per la varietà dei metodi, il rigore delle discussioni e la copia di esempi

(*) A questo proposito, senza pretendere di dare un valido sussidio mnemonico, faccio notare che, dando ad $F_m x$ il significato di cos x per m intero pari e di sen x per m intero impari, le quattro formule di Delambre si potrebbero compendiare nell'unica

$$\frac{F_p \frac{1}{2}(\alpha + (-1)^q \beta)}{F_{p+1} \frac{1}{2}\gamma} = \frac{F_q \frac{1}{2}(a + (-1)^p b)}{F_q \frac{1}{2} c},$$

essendo p e q interi arbitrari.

numerici. Uno dei due casi ambigui (a, b, α) è illustrato da una discussione interessante per la sua perfetta analogia con quella relativa al caso corrispondente nel piano.

I cap. V e VI dànno le varie espressioni dell'eccesso sferico, del raggio del cerchio circoscritto, ecc.; ed è notevole il modo semplicissimo col quale le formule relative al circolo circoscritto sono dedotte immediatamente da quelle relative al circolo inscritto.

Finalmente troviamo il notevolissimo cap. VII. Nella prima parte di questo capitolo si studiano con molta cura e generalità le principali quistioni relative alla navigazione per circolo massimo; questa parte può offrire argomento a facili e interessati esercizi anche per chi non segue gli studi nautici. Nella seconda parte poi si dànno le relazioni fra le coordinate orarie e le azimutali di un astro, e con queste si chiude il Trattato.

In fine al Trattato si trova indicata per ogni capitolo una serie numerosa e ben ordinata di esercizi. E in questa sono notevoli le abbondanti raccolte di identità fra gli elementi di un triangolo piano o sferico e di esercizi numerici (con i risultati) per la risoluzione dei triangoli stessi. Gli esercizi aggiunti al cap. VIII della Parte III hanno in gran parte carattere originale e sono applicazioni interessanti della trigonometria sferica alla nautica e alla geografia.

Appendice. — Un punto negletto nelle scuole e nei Trattati è in generale l'uso razionale delle tavole logaritmico-trigonometriche, e il calcolo con numeri approssimati; quest'Appendice è quindi assai opportuna.

Nei primi due capitoli della Parte I si parla dei numeri approssimati e si dànno le regole per le quattro operazioni elementari abbreviate; per ognuna poi di queste operazioni si cercano dei limiti per gli errori che le regole stabilite possono introdurre; ed è stato possibile all'A. fare questa ricerca in generale avendo prima (§ 7, I) esteso, molto opportunamente, il concetto di ordine di una cifra decimale (*).

Nel III cap. si spiega in generale e si applica ad esercizi speciali il principio delle parti proporzionali.

Nel cap. IV (in carattere minuto) vengono discusse le varie specie di errori che si incontrano nella interpolazione semplice, e cioè:

1° l'errore g che proviene dall'ammettere il principio delle parti proporzionali; i limiti di questo errore sono ammessi come un dato della matematica superiore (**);

2° l'errore l che proviene dalla circostanza che i numeri sui quali si opera sono essi stessi approssimati;

3° l'errore m che nasce dalla mancanza in alcune tavole delle cifre decimali dei prodotti parziali dati dalle tavolette ausiliarie;

4° l'errore n che proviene dal fare i calcoli in modo abbreviato.

Credo che la ricerca di un limite per l sia condotta in modo più semplice

(*) Cfr. Fasc. I, anno X di questo Periodico.
(**) L'A. ha mostrato come abbia ottenuti questi limiti in una Memoria inserita nella *Rivista Marittima* dello scorso luglio.

del consueto e che i criteri pratici per abbreviare le operazioni che si devono fare per la interpolazione non siano stati dati fin qui da nessuno, mentre è certo che, almeno nella ricerca inversa, sono indispensabili. I limiti trovati per gli errori sono poi modificati dall'A. (§§ 26-29) per adattarli alle tavole del Caillet, nelle quali le tavolette delle parti proporzionali sono calcolate sulle medie di dieci o quindici differenze tabulari consecutive.

I capitoli V e VI dànno le regole per l'uso dei cologaritmi e per le disposizioni da darsi ai calcoli e sono di grande interesse per la scuola. La Parte II tratta diffusamente dell'uso delle tavole del Caillet, ma ciò che ivi è scritto in carattere minuto e che riguarda gli errori prodotti dalla interpolazione nelle varie tavole esaminate si adatta a qualunque tavola.

Questa rivista del lavoro del prof. Pesci spero induca in molti il desiderio di leggerlo e di accoglierlo nei nostri Istituti tecnici.

G. Sforza.

IGINIA MASSARINI, dott. in matematica. — *Teoria delle congruenze di* P. L. Tchebicheff, traduzione italiana con aggiunte e note. — Roma, Ermanno Loescher e C., 1895. — Prezzo L. 6.

La teoria delle congruenze dello Tchebicheff, *opera classica, mirabile per la scelta delle materie di cui tratta, scritta magistralmente* (sono parole del Battaglini) ebbe fra noi una degna traduzione per opera della signorina Massarini.

Chiara ed accurata la versione, opportune le note ad illustrazione dell'originale che, in alcuni posti, e specialmente nell'appendice 3ª (numero dei numeri primi minori di un dato limite), è compendioso più che la difficoltà dell'argomento non consentirebbe. Il lavoro della Massarini riuscirà perciò utile e gradito agli studiosi, come l'autrice si ripromette: ma perchè ai benefici di esso potessero partecipare anche gli studenti delle scuole mezzane, occorrerebbe che un elegante volumetto ne raccogliesse la parte più elementare ed attraente. A ciò l'autrice ha già pensato, e ne dà indizio nella prefazione al suo libro: resta che ci mantenga la grata promessa.

G. Frattini.

Bulletin de mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. B. Niewenglowski, docteur ès sciences, etc.. Rédacteur en chef: L. Gérard, docteur ès sciences, etc.. Société d'éditions scientifiques, 4, rue Antoine Dubois, Paris. — Abonnements: un an, 6 fr.

Siamo lieti di annunziare ai nostri lettori l'apparizione di questo nuovo periodico, che per il nome del direttore, ben noto nel campo scientifico come direttore anche del *Bulletin de mathématiques spéciales* ed autore di pregiate opere sulle matematiche superiori, e del redattore, professore al liceo Ampère di Lione, promette uno speciale interesse.

Esso si occupa anche degli elementi delle scienze fisiche.

VARIETÀ

In seguito al voto degli aderenti alla proposta di un'Associazione fra gli insegnanti di matematica nelle scuole secondarie, risultarono eletti a membri del Comitato provvisorio per la compilazione dello Statuto i Proff. Bettazzi R. — Brambilla A. — De Amicis E. De Zolt A. — Frattini G. — Gazzaniga P. — Giudice F. — Lugli A. — Panizza F. — Retali V. — Sforza G.

Questo Comitato si è adunato in Roma nei giorni 16, 17 e 18 settembre ed ha redatto lo Statuto che segue, il quale è stato diramato a tutti i professori delle scuole mezzane, con annessa scheda di sottoscrizione a titolo di adesione definitiva.

STATUTO DELL' ASSOCIAZIONE *MATHESIS*

Art. I.

Fra gli insegnanti di matematica nelle scuole secondarie italiane è costituita un' Associazione denominata - **Mathesis** - *Associazione per studi fra gli insegnanti di Matematica delle scuole medie*, il cui oggetto è il miglioramento della scuola ed il perfezionamento degli insegnanti, sotto il punto di vista scientifico e didattico.

Art. II.

A raggiungere il proprio scopo l'Associazione:

a) tiene riunioni plenarie e parziali;

b) promuove e favorisce ricerche scientifiche e discussioni didattiche;

c) pubblica sinossi di corsi di matematiche elementari o di speciali teorie, in relazione ai diversi gradi d' insegnamento;

d) cura la formazione di una biblioteca matematica circolante ad uso dei soci.

Art. III.

Saranno di diritto ammessi come soci, dietro semplice loro domanda, i professori di matematica appartenenti al personale insegnante o direttivo delle scuole medie, governative o pareggiate; quelli delle altre scuole secondarie dovranno ottenere l'approvazione del Comitato direttivo (Art. IV).

Saranno *soci fondatori* coloro che si inscriveranno entro un mese dalla pubblicazione del presente Statuto.

Art. IV.

L'Associazione è retta da un Comitato direttivo composto di 12 soci ed eletto a maggioranza di votanti. Il Comitato elegge nel proprio seno un Presidente ed un Vice presidente, ed elegge pure, fra i soci, un Segretario-economo.

Art. V.

L'anno sociale comincia col 1° luglio. Il Comitato è eletto nel mese di giugno, entra in carica colla prima adunanza (Art. VIII) e rimane in funzione due anni.

Art. VI.

Al Comitato direttivo è affidato l'indirizzo scientifico e didattico dell'Associazione, la redazione di un bollettino e la ripartizione dei fondi sociali.

Art. VII.

La città ove risiede il Presidente del Comitato direttivo è, pel biennio (Art. V), sede dell'Associazione.

Art. VIII.

Nelle vacanze autunnali, in sedi da destinarsi anno per anno, si terrà dal Comitato direttivo un'adunanza. In questa adunanza verrà presentato dal Presidente del Comitato il bilancio dell'anno cessato, e verrà deliberata la ripartizione delle spese pel nuovo anno sociale secondo l'entrata.

Il Presidente in carica, sotto la propria responsabilità, curerà che queste spese non siano oltrepassate nè devolte ad altro scopo.

Nella stessa adunanza verrà stabilito il lavoro dell'anno.

Quando tale adunanza ha luogo nell'anno della elezione, i membri del Comitato cessante potranno intervenirvi, ma non avranno voto deliberativo.

ART. IX.

L'Associazione pubblica un bollettino, nel quale si daranno gli atti della Società, si discuteranno questioni relative al miglioramento dei programmi e alla scelta dei libri di testo, si forniranno notizie su tutto ciò che può interessare l'insegnamento delle matematiche nelle scuole medie e si darà l'elenco dei libri della biblioteca dell'Associazione (Art. II).

ART. X.

I soci sono tenuti al pagamento di una quota annuale di lire **sei** (da trasmettere entro il mese di giugno di ciascun anno al Segretario-economo) e di una tassa d'ingresso di lire **quattro**.

I soci fondatori (Art. III) sono esenti dalla tassa d'ingresso.

I soci di nuova inscrizione verseranno la stessa somma qualunque sia, entro l'anno, l'epoca del loro ingresso nella società.

ART. XI.

Le dimissioni presentate in qualsiasi epoca da un socio non lo esonerano dal pagamento del contributo relativo all'anno in corso. I nomi dei contravventori alla presente disposizione, od a quella dell'articolo precedente, saranno pubblicati nel Bollettino dell'Associazione sotto la rubrica « *Soci morosi* »; però il Comitato direttivo ne darà preavviso agl' interessati.

ART. XII.

Il modo di funzionare del Comitato direttivo sarà fissato da apposito *Regolamento* redatto dal Comitato stesso.

Roma, 15 ottobre 1895.

Ora annunziamo con viva compiacenza che le sottoscrizioni avendo raggiunto il centinaio (*), l' Associazione MATHESIS rimane definitivamente costituita e i soci saranno invitati fra breve ad eleggere il comitato direttivo (*Statuto*, art. IV). Il primo anno sociale terminerà col 30 giugno 1896 (Art. V).

Quei colleghi a cui non fosse pervenuta la scheda d'associazione, e intendono far parte della Società, potranno farne richiesta alla redazione del *Periodico*. Essi verranno egualmente iscritti come *soci fondatori*.

(*) Il numero minimo stabilito per la costituzione della Società era stato fissato in 70.

Chiusura della Redazione il dì 16 novembre 1895.