Indice Articoli Anno 1893

N°	Autore/i	Titolo	Pagine	Anno
1	BESSO D.	SOPRA UN OPUSCOLO DI MICHELANGELO RICCI	1-16	1893
2	BETTAZZI R.	SULLA DEFINIZIONE DI LINEA RETTA (1/2)	16-25	1893
3	BELLACCHI G.	A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLA MATEMATICA (4/7)	25-28	1893
4	TAGIURI A.	SOPRA ALCUNE EQUAZIONI INDETERMINATE DI I GRADO (1/2)	29-30	1893
5	BETTAZZI R.	SULLA DEFINIZIONE DI LINEA RETTA (2/2)	49-56	1893
6	GIUDICE F.	UNA FORMULA DI TRASFORMAZIONE PER ARC.TG	56-57	1893
7	BELLACCHI G.	A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLA MATEMATICA (5/7)	57-62	1893
8	FERRARI F.	DISTANZE DI PUNTI NOTEVOLI DEL TRIANGOLO	65-69	1893
9	LORIA G.	DELLA VARIA FORTUNA DI EUCLIDE IN RELAZIONE CON I PROBLEMI DELL'INSEGNAMENTO GEOMETRICO ELEMENTARE	81-113	1893
10	BELLACCHI G.	A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLA MATEMATICA (6/7)	113-116	1893
11	TAGIURI A.	SOPRA ALCUNE EQUAZIONI INDETERMINATE DI I GRADO (2/2)	116-119	1893
12	LEMOINE E.	REGOLE D'ANALOGIA NEL TRIANGOLO O TRASFORMAZIONE CONTINUA, E TRASFORMAZIONE ANALITICA CORRISPONDENTE	120	1893
13	BELLACCHI G.	A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLA MATEMATICA (7/7)	137-144	1893
14	GIUDICE F.	SUI NUMERI DATI MEDIANTE INSIEMI DI NUMERI RAZIONALI (1/2)	144-150	1893
15	FELLINI D.	LA RISOLUZIONE COMPLETA DI UN PROBLEMA (1/2)	150-153	1893
16	SCHUR F.	SULL'AREA DELLE FIGURE PIANE LIMITATE DA LINEE RETTE	153-155	1893
17	PATERNO' F.P.	SUL CAMBIAMENTO SIMULTANEO DEI PIANI DI PROIEZIONE	169-172	1893
18	GIUDICE F.	SUI NUMERI DATI MEDIANTE INSIEMI DI NUMERI RAZIONALI (2/2)	172-180	1893
19	FELLINI D.	LA RISOLUZIONE COMPLETA DI UN PROBLEMA (2/2)	180-185	1893

SOPRA UN OPUSCOLO

DI MICHELANGELO RICCI

MICHELANGELO RICCI, nato a Roma nel 1619 e morto nella stessa città nel 1682, fu allievo del TORRICELLI che l'ebbe in grande stima, e in gran pregio fu tenuto da altri illustri suoi contemporanei (*).

Egli è autore d'un opuscolo intitolato: *Exercitatio geometrica de maximis & minimis,* stampato a Roma nel 1666, del quale scrisse STEFANO DEGLI ANGELI: « Il Sig. Ricci, quando non stampasse altro, vivrà sempre nella memoria degli uomini per questa sola operetta (**) ». E il MONTUCLA: « La Societé royale de Londres le jugea assez interessant pour en procurer une seconde édition qui est à la suite de la Logarithmotechnie de MERCATOR (***) ».

Questi giudizi sull'opuscolo del Ricci mi sembrano giustificati. Per questa ragione, e perchè il CANTOR nella recente sua opera (****) appena ne menziona il titolo, spero che non riescirà discaro ai lettori del *Periodico,* che già non ne avessero cognizione, di leggerne un estratto, al quale faranno seguito alcune notizie di lavori anteriori che con quello del Ricci hanno qualche attinenza.

(*) FABBRONI. Vitae italorum doctrina excellentium qui saeculis XVII e XVIII floruerunt. Pisiis 1778, vol. II. — B. BONCOMPAGNI. Intorno ad alcune lettere di Evangelista Torricelli, del P. Marino Mersenne e di Francois de Verdus (nel tomo VIII del suo *Bullettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e fisiche*). — Correspondance de René-Francois de Sluse, publié par M. C. LE PAIGE nel tomo XVII del *Bullettino* di Boncompagni. — Documenti inediti per la storia dei manoscritti Galileiani nella Biblioteca nazionale di Firenze, pubblicati ed illustrati da ANTONIO FAVARO (nel tomo XVIII del citato *Bullettino*).

Sono molto interessanti due lettere del Torricelli al Ricci, relative alla famosa esperienza sulla pressione atmosferica, le quali si leggono nella prefazione alle *Lezioni accademiche* del Torricelli.

(**) FABBRONI. Opera citata.

Nella *Biblioteca matematica* del RICCARDI non è menzionata alcun'altra opera matematica del Ricci.

(***) *Logarithmotechnia:* sive Methodus construendi Logarithmos nova, accurata e facilis; cui nunc accedit Vera Quadratura Hyperbolae & Inventio Summae Logarithmorum Auctore NICOLAO MERCATORE. Huic etiam jungitur: MICHAELIS ANGELI RICCII, *Exercitatio geometrica de maximis & minimis* — Lundini MDCLXVIII.

(****) Il secondo volume delle *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* von MORITZ CANTOR — Leipzig 1892.

I.

Lemma 1. Posto $x + y = a$ e $z + t = b$, se il rapporto $\frac{x}{y}$ è eguale al rapporto $\frac{z}{t}$, dev'essere anche $\frac{x^m y^n}{a^{m+n}} = \frac{z^m t^n}{b^{m+n}}$. (*).

Lemma 2. Nell'ipotesi della proposizione precedente, se il prodotto $x^m y^n$ è il massimo fra tutti i prodotti simili formati con due parti di a, dev'essere anche $z^m t^n$ il massimo fra quelli formati con due parti di b.

Lemma 3. Se un dato segmento sia diviso in due parti disuguali nel rapporto di due numeri interi, e si faccia il rapporto della parte minore alla differenza delle due parti, o questi due termini sono eguali, oppure, facendo ancora il rapporto del minore di essi alla loro differenza, e, quanto occorre, continuando questo processo, si perverrà infine a due termini eguali.

Lemma 4. Il rapporto $\frac{a^m b^n}{a^m c^n}$ è eguale al rapporto $\frac{b^n}{c^n}$.

Lemma 5. Se ha luogo la diseguaglianza $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dev'essere anche $ad < bc$.

Teorema I. *Il prodotto di potenze di eguale esponente di due parti d'un dato segmento è massimo quando queste sono fra loro eguali, cioè nel rapporto degli esponenti.*

Se il segmento AB è diviso comunque in D e per metà in C, i quattro segmenti AD, AC, CB, BD costituiscono una proporzione aritmetica i cui termini medi sono fra loro eguali; perciò sarà $\frac{AD}{AC} < \frac{CB}{BD}$, ed anche $\frac{AD^3}{AC^3} < \frac{CB^3}{BD^3}$, dalla quale risulta:

$$AD^3 \,.\, BD^3 < AC^3 \,.\, CB^3.$$

Teorema II. *Siano in una retta i segmenti* AC, CB *e sia il rapporto* $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}$ *eguale a quello di due interi, p. e.* $\frac{3}{5}$, *e si prenda*

(*) Qui, e in appresso, le lettere che stanno al posto dei segmenti di cui fa uso l'a. significano sempre numeri positivi, e gli esponenti s'intendono sempre numeri interi e positivi. Ma avverto che non vi si trovano notazioni come AB^m: gli esponenti sono numeri particolari e le potenze indicate p. e. con $AB3$. Nè i prodotti, nè i rapporti sono indicati con speciali simboli, nè si trova in tutto l'opuscolo il segno di eguaglianza, nè un segno di diseguaglianza; vi si trova bensì, ma soltanto nella prima applicazione del teorema III, di cui si dirà più innanzi, un segno d'eguaglianza che mi è riescito nuovo: l'equazione $BA^3 - A^4 = Z^4$ è così rappresentata: B in $A3 - A4 \parallel Z4$.

sul prolungamento di BA *il segmento* $AF = CB - AC$, *così che sia* $\frac{AF}{AC} = \frac{2}{3}$: *se il prodotto* $FA^2 . AC^3$ *è il massimo fra tutti i prodotti simili formati con due parti di* FC, *sarà anche* $AC^3 . CB^5$ *il massimo fra tutti i prodotti simili formati con due parti di* AB.

Sia D un punto qualunque della AB, e si scelga il punto E sulla FB così che abbia luogo la proporzione $\frac{FE}{ED} = \frac{FA}{AC}$: per l'ipotesi fatta, e in forza del lemma 2, sarà $FE^2 . ED^3$ il massimo fra tutti i prodotti simili formati con due parti della FD, epperciò $FE^2 . ED^3 > FA^2 . AD^3$. Ma pel lemma 1 è $\frac{FE^2 . ED^3}{FD^5} = \frac{FA^2 . AC^3}{FC^5}$, quindi sarà $\frac{FA^2 . AD^3}{FD^5} < \frac{FA^2 . AC^3}{FC^5}$, e permutando, e in forza del lemma 4,

$$\frac{AD^3}{AC^3} < \frac{FD^5}{FC^5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

Ora i segmenti DB, CB, FC, FD sono in proporzione aritmetica; perciò, e perchè FC è eguale a CB, sarà $\frac{FD}{FC} < \frac{BC}{BD}$, sia il punto D fra A e C, oppure fra C e B, e in conseguenza dalla [1] risulterà a fortiori

$$\frac{AD^3}{AC^3} < \frac{BC^5}{BD^5} \quad \text{ossia} \quad AD^3 . BD^5 < AC^3 . BC^5,$$

che è quanto si voleva dimostrare (*).

Teorema III. *Se un dato segmento si divide in due parti proporzionali a due interi dati, il prodotto delle loro potenze, che hanno*

(*) In forma moderna: Si supponga che il prodotto delle potenze n^{ma} ed $(m-n)^{ma}$ di due parti di un numero sia massimo quando quelle due parti sono proporzionali ai numeri n, $m-n$, cioè si supponga che, qualunque sia il numero positivo ξ minore di g e diverso da $\frac{n}{m} g$, sia:

$$\left(\frac{n}{m} g\right)^n \left(\frac{m-n}{m} g\right)^{m-n} > \xi^n (g-\xi)^{m-n}.$$

Allora posto

$$g = ma - x, \qquad \xi = na - x,$$

sarà

$$\frac{n^n (m-n)^{m-n}}{m^m} (ma-x)^m > (m-n)^{m-n} (na-x)^n a^{m-n}.$$

Ma dalla

$$m^2 a^2 > (ma-x)(ma+x)$$

risulta

$$m^{2m} a^{2m} > (ma-x)^m (ma+x)^m;$$

epperciò sarà a fortiori

$$m^m n^n a^{m+n} > (ma+x)^m (na-x)^n,$$

cioè il prodotto delle potenze m^a ed n^a delle due parti di un numero sarà massimo quando quelle due parti saranno proporzionali agli esponenti m ed n.

per esponenti quei due numeri, è massimo fra tutti i prodotti che in simil modo si possono formare con due parti del dato segmento.

Questo risulta dal teorema precedente associato al lemma 3 ed al teorema I.

Quale prima applicazione del teorema dimostrato, Ricci risolve un problema che, nel nostro linguaggio, si può enunciare nel seguente modo:

A quale condizione deve soddisfare il numero c *affinchè l'equazione* $x^{2n} - b\,x^{2n-1} + c^{2n} = 0$ *abbia radici reali?*

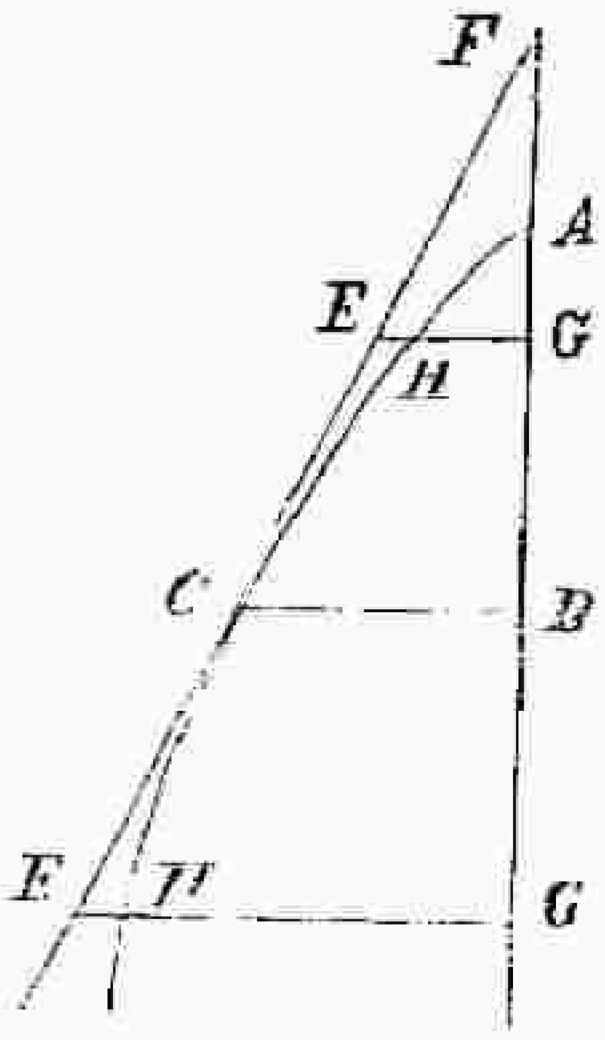
Posta l'equazione nella forma

$$x^{2n-1}(b - x) = c^{2n}$$

e osservato che, se essa ammette radici reali, queste, nell' ipotesi di b positivo, devono essere positive e minori di b, risulta subito da quel teorema

$$c^{2n} \leqq \frac{(2n-1)^{2n-1}}{(2n)^{2n}}\, b^{2n} \quad (^*).$$

Ricci applica poi il teorema alla costruzione della tangente in un punto dato della curva nella quale i cubi delle ordinate sono proporzionali ai quadrati delle ascisse.



Sia $A\,D$ l'ascissa del punto C della curva e sia $A\,F$, dalla banda delle ascisse negative, eguale alla metà di $A\,D$: sarà la $F\,C$ tangente nel punto C. Preso un punto qualunque E sulla $F\,C$ dall'una o dall'altra banda di C, l'ascissa del quale sia $A\,G$, sarà il rapporto $\frac{FA}{AG}$ diverso dal rapporto $\frac{FA}{AD}$ che è $\frac{1}{2}$, perciò sarà il rapporto $\frac{FA\,.\,AD^2}{FD^3}$ maggiore del rap-

(*) Più generalmente: Sia l'equazione $x^n - p x^m + q = 0$ con p e q positivi ed $n > m$, e sia n pari ed m dispari. Posta nella forma $q = x^m (p - x^{n-m})$ è manifesto che le radici reali, quando esistano, devono essere positive e minori di p. Fatto poi $x^{n-m} = v$ si ha:

$$q^{n-m} = v^m (p - v)^{n-m} \leqq \frac{m^m (n-m)^{n-m}}{n^n}\, p^n,$$

cioè la nota condizione

$$m^m (n-m)^{n-m}\, p^n - n^n\, q^{n-m} \geqq 0.$$

porto $\frac{FA \,.\, AG^2}{FG^3}$. Ora da questa diseguaglianza risulta $\frac{AD^2}{AG^2} > \frac{FD^3}{FG^3}$ od anche $\frac{AD^2}{AG^2} > \frac{CD^3}{EG^3}$; ma se s'indica con H il punto della curva che ha l'ascissa AG si ha $\frac{CD^3}{HG^3} = \frac{AD^2}{AG^2}$, e in conseguenza sarà

$$\frac{CD^3}{HG^3} > \frac{CD^3}{EG^3} \quad \text{cioè} \quad EG > HG\,.$$

Osserva poi il Ricci che questo metodo di costruire la tangente può essere applicato alle infinite parabole. E infatti per la curva $y^m = cx^n$ $(m > n)$ posto $FA = \frac{m-n}{n} AD$ sarà

$$\frac{FA^{m-n}AD^n}{FD^m} > \frac{FA^{m-n}AG^n}{FG^m}$$

da cui

$$\frac{AD^n}{AG^n} > \frac{FD^m}{FG^m} \quad \text{ossia} \quad \frac{CD^m}{HG^m} > \frac{CD^m}{EG^m}$$

epperciò $$EG > HG \qquad (^*).$$

Infine dà il Ricci un metodo per costruire la tangente in un punto dato della $$y^{m+n} = cx^m(x-a)^n \qquad (^{**})$$
e sceglie per esempio la curva

$$y^5 = cx^3(x-a)^2$$

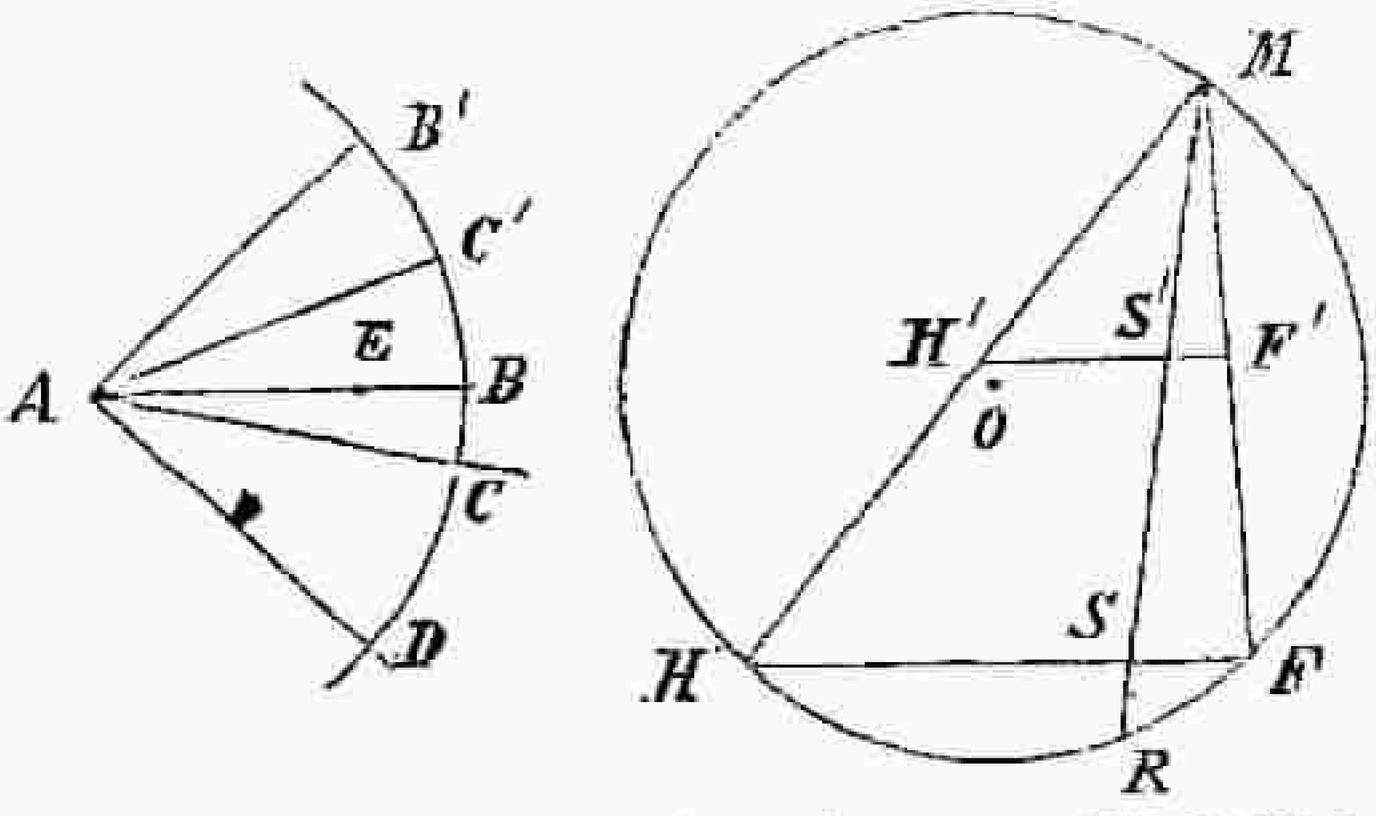
della quale considera soltanto la parte corrispondente alle ascisse positive maggiori di a (***).

(*) Facilmente si verifica che, nell'ipotesi fatta di $m > n$, la curva $y^m = cx^n$ presenta sempre la concavità all'asse.

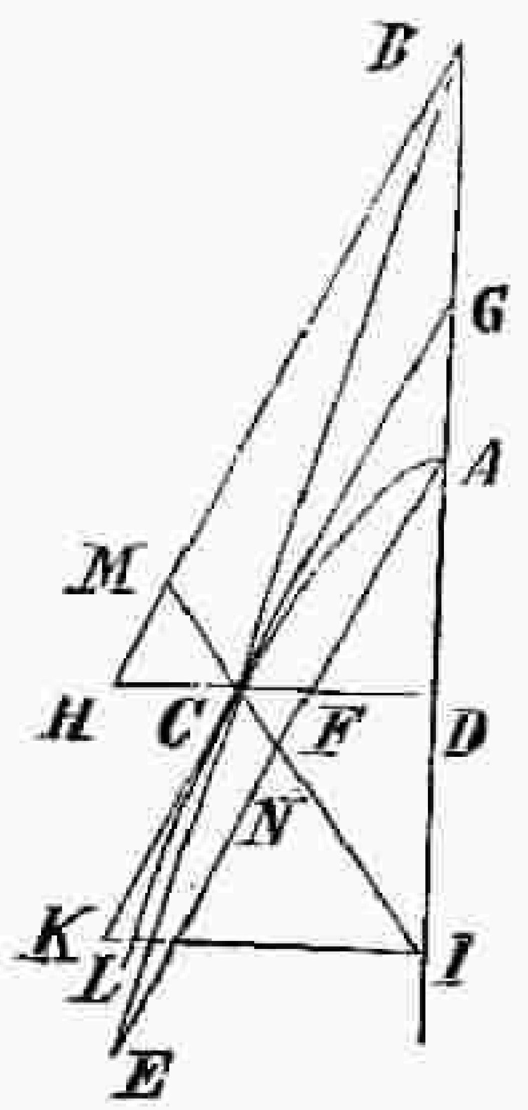
(**) Anche questa presenta sempre la concavità all'asse.

(***) A questa costruzione è premessa una soluzione del problema:

Fra i due lati d'un angolo dato collocare un segmento che abbia un estremo in un punto dato d'uno di essi e l'altro estremo nell'altro lato, e sia diviso in parti proporzionali a segmenti dati da una retta data interna all'angolo e passante pel suo vertice. Sia BAD l'angolo dato, AC la retta data, E il punto dato nel lato AB. Sopra un segmento arbitrario HF si descriva un segmento di circolo HMF capace dell'angolo dato, e sia O il suo centro. Fatto l'angolo $B'AD$ doppio di BAD e $B'AC'$ doppio di BAC, si descriva con centro A e raggio OF l'arco $B'C'BCD$: sarà l'arco $B'BD$ eguale all'arco HRF, e, fatto l'arco FR eguale all'arco BC', e quindi l'arco RH eguale all'arco CD, gli angoli HMR, RMF saranno rispettivamente eguali agli angoli DAC, CAB. Ora, se il segmento HF si divida in S così che il rapporto SF ad HS sia eguale a quello dei segmenti dati, e poi si conduca la RS fino al punto M in cui essa incontra la circonferenza, e infine si prenda sulla MF la $MF' = AE$, e da F' si conduca la $F'H'$ parallela alla HF, la figura $MH'F'$ così costruita sarà eguale a quella richiesta.



Siano B l'origine, BAI l'asse, C ed L due punti quali si vogliano della curva le cui ascisse BD e BI siano maggiori di BA: sarà il rapporto $\frac{LI^5}{CD^5}$ eguale al rapporto $\frac{BI^3 . AI^2}{BD^3 . AD^2}$. Per costruire la tangente nel punto C si conduca la BC e dal punto A la AFE,



la quale incontri in E il prolungamento della BC ed in F la CD, in modo che sia $\frac{FA}{FE} = \frac{2}{3}$: la CG parallela ad AE è la tangente richiesta. Preso sulla CG un punto qualunque K, dall'una o dall'altra banda di C, la cui ascissa sia BI, sia L il punto corrispondente della curva; siano poi N ed M i punti d'incontro della IC colla AE e colla BH parallela a CG, e sia H il punto d'incontro della BH colla CD. Ora nel segmento AE sono i punti F e N dal primo dei quali esso è diviso in parti proporzionali ai numeri 2 e 3, epperciò sarà il prodotto $AF^2 . FE^3 > NA^2 . NE^3$ e quindi $\frac{FE^3}{NE^3} > \frac{NA^2}{AF^2}$; ma il rapporto $\frac{FE}{NE}$ è uguale ad $\frac{HB}{MB}$, e in consegnenza sarà $\frac{HB^3}{MB^3} > \frac{NA^2}{AF^2}$, ossia

$$\frac{HB^3 . AF^2}{CG^5} > \frac{MB^3 . NA^2}{CG^5} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [1]$$

Inoltre dalle proporzioni

$$\frac{HB}{CG} = \frac{BD}{GD} \quad , \quad \frac{AF}{CG} = \frac{AD}{DG}$$

si ricava

$$\frac{HB^3 . AF^2}{CG^5} = \frac{BD^3 . AD^2}{DG^5} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [2]$$

e similmente dalle proporzioni

$$\frac{MB}{CG} = \frac{BI}{GI} \quad , \quad \frac{NA}{CG} = \frac{AI}{IG}$$

risulta

$$\frac{MB^3 . NA^2}{CG^5} = \frac{BI^3 . AI^2}{GI^5} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [3]$$

Ora, in forza della [2] e della [3] la [1] diviene

$$\frac{BD^3 . AD^2}{DG^5} > \frac{BI^3 . AI^2}{GI^5},$$

ma, per la definizione della curva è

$$\frac{BD^3 \,.\, AD^2}{DC^5} = \frac{BI^3 \,.\, AI^2}{LI^5},$$

e in conseguenza sarà

$$\frac{DC^5}{DG^5} > \frac{LI^5}{GI^5} \quad \text{ossia} \quad \frac{DC}{DG} > \frac{LI}{GI}.$$

Se infine si osserva che il rapporto $\frac{DC}{DG}$ è eguale a $\frac{KI}{IG}$, è chiaro che dall'ultima diseguaglianza risulta

$$KI > LI.$$

II.

Il metodo così detto di induzione matematica, o di conclusione da n ad $n+1$, è stato adoperato da Giacomo Bernouilli, ma prima ancora da Pascal, come ha avvertito il Cantor (*). Nel *Traité du triangle arithmetique*, che fu trovato stampato dopo la morte dell'Autore, avvenuta nel 1662, ma che si deve ritenere composto, almeno in parte, fin dal 1654, come risulta dalla corrispondenza di Pascal con Fermat (**), sono studiate delle proprietà dei numeri, dipendenti da due indici, definiti dalle

$$(n, r) = (n, r-1) + (n-1, r), \quad (n, 1) = 1, \quad (1, r) = 1.$$

Sotto il titolo *Conséquence XII* vi enuncia la proprietà espressa dall'eguaglianza

$$\frac{(n-r,\ r+1)}{(n-r+1,\ r)} = \frac{n-r}{r},$$

e nel seguente modo la dimostra:

« Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donne-
« rais une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes.

« Le premier, qui est evident de soi même, que cette proportion
« se rencontre dans la seconde base (***).

(*) Nel già citato secondo volume delle sue *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, p. 684.

(**) Bossut. Discorso sopra la vita e le opere di Pascal. Questo discorso è inserito nel 4° volume del *Saggio della storia generale delle Matematiche* di Carlo Bossut, prima edizione italiana con riflessioni ed aggiunte di Gregorio Fontana. — Milano, 1803.

(***) L'Autore chiama *base* ogni serie di termini pei quali la somma degli indici ha uno stesso valore; così la base $(n+1)^{ma}$ è costituita dai termini $(n, 1)$, $(n-1, 2)$, $(n-2, 3)$.... .. $(2, n-1)$, $(1, n)$; i quali sono i coefficienti binomiali corrispondenti all'esponente n.

« Le deuxième, que si cette proportion se trouve dans une base « quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.

« D'où il se voit qu'elle est necessairement dans toutes les « bases: car elle est dans la seconde base par le premier lemme; « donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la « quatrième, et à l'infini.

« Il faut donc seulement démontrer le second lemme en cette « sorte. Si cette proportion se rencontre en une base quelconque, « comme en la quatrième, c'est à dire si

$$\frac{(4,1)}{(3,2)} = \frac{1}{3}, \quad \frac{(3,2)}{(2,3)} = \frac{2}{2}, \quad \frac{(2,3)}{(1,4)} = \frac{3}{1} \qquad (^*)$$

« je dis que la même proportion se trouvera dans la base suivante, « et que, par exemple

$$\frac{(4,2)}{(3,3)} = \frac{2}{3}.$$

« Car $\frac{(4,1)}{(3,2)} = \frac{1}{3}$ par l'hypothèse. Donc

$$\frac{(4,1)+(3,2)}{(3,2)} = \frac{1+3}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{(4,2)}{(3,2)} = \frac{1+3}{3}.$$

« De même $\frac{(3,2)}{(2,3)} = \frac{2}{2}$ par l'hypothèse. Donc

$$\frac{(3,2)+(2,3)}{(3,2)} = \frac{2+2}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{(3,3)}{(3,2)} = \frac{2+2}{2}.$$

« Mais $\frac{(3,2)}{(4,2)} = \frac{3}{1+3}$ comme il est montré.

« Donc par la proportion troublé

$$\frac{(3,3)}{(4,2)} = \frac{3}{2}$$

« ce qu'il fallait démontrer.

« On le trouvera de même dans tout le reste, puisque cette « preuve n'est fondé que sur ce que cette proportion se trouve « dans la base précédente, et que chaque cellule est égale à sa « precedente plus à sa superieure ce qui est vrai partout ».

Se il Ricci nel 1666 abbia avuto cognizione di quell'opera di

(*) Per maggiore chiarezza adopero la notazione (n, r) in luogo delle lettere adoperate da Pascal per indicare le *cellule* della sua figura.

Pascal, è quistione che non saprei risolvere; ma certo è che posteriori a quell' epoca sono i lavori di Giacomo Bernouilli che allora aveva 12 anni.

È poi degno di nota che, nella dimostrazione del teorema sul massimo del prodotto $x^m (a - x)^n$, il Ricci adopera un metodo che si può considerare quale una generalizzazione di quello di conclusione da n ad $n + 1$. Infatti per dimostrare quella proprietà relativa ai numeri m ed $n < m$, egli la dimostra pei numeri 1 e 1, e dimostra che, se essa vale pei numeri n ed $m - n$ deve pure sussistere pei numeri m ed n.

III.

Il teorema sul massimo rettangolo, fra quelli che hanno per lati due segmenti di somma costante, è un immediato corollario della proposizione V del secondo libro d'Euclide (*).

Archimede, nel suo *Trattato della sfera e del cilindro*, dimostra la seguente proposizione, che è la X del secondo libro:

Fra tutti i segmenti sferici ad una base terminati da zone di egual superficie, quello di massimo volume è l'emisfero.

La sua dimostrazione, tradotta in linguaggio moderno, si può così esporre:

Siano R il raggio d'una sfera, x l'altezza d'un suo segmento ad una base, $2\pi c^2$ la superficie della zona. Dalla $Rx = c^2$ risulta che, per $x > c$, è $c > R$ e $x - R > c - R$, e che, per $x < c$, e quindi $R > c$, è $R - x > R - c$. Perciò in ciascuno dei due casi è

$$(R - c)^2 < (R - x)^2 \quad \text{ossia} \quad c(2R - c) > x(2R - x),$$

(*) Il teorema correlativo sul minimo della somma $x + y$ quando è costante il prodotto xy, si può considerare quale corollario della proposizione 35 del libro III, poichè, fra tutte le corde che passano per uno stesso punto, la più distante dal centro è quella che in quel punto è dimezzata.

I massimi e minimi di Apollonio si possono riferire a questi due teoremi. Così, p. es., la ricerca del minimo della somma $a'^2 + \left(\frac{b'^2}{a'}\right)^2$, in cui a' e b' significano due semidiametri coniugati d'un'elisse, posto $a'^2 = X$, $b'^2 = Y$, $X + Y = A$, equivale alla ricerca del minimo di

$$\frac{A^2}{X} + 2X$$

la quale diseguaglianza, quando si sostituisca ad R il suo valore in funzione di x, si trasforma nella

$$x(3c^2 - x^2) < 2c^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1]$$

e questa esprime appunto il teorema enunciato.

Ora osservo che dalla [1] posto $x^2 = z$, $3c^2 = a$, risulta

$$z(a-z)^2 < \frac{4}{27}a^3,$$

cioè appunto il teorema sul massimo del prodotto d'una parte d'un segmento dato pel quadrato dell'altra parte.

Ma questo teorema è stato esplicitamente enunciato e dimostrato dal Cardano nella sua opera: *De proportionibus numerorum, motuum, ponderum, ecc.*, pubblicata a Basilea nel 1570, la quale si trova pure nella raccolta delle sue opere stampata a Lione nel 1663.

Le proposizioni e le dimostrazioni del Cardano sono qui compendiosamente raccolte.

Lemma I:

$$\frac{a+b}{a} > \frac{a+2b}{a+b}.$$

Lemma II:

$$(1) \quad \frac{c+b}{c} < \frac{(2c+b)^2}{(2c)^2}, \qquad (2) \quad \frac{c+b}{c} > \frac{(2c+2b)^2}{(2c+b)^2}.$$

Infatti è

$$\frac{c+b}{c} = \frac{2c+2b}{2c} = \frac{2c+2b}{2c+b} \cdot \frac{2c+b}{2c},$$

e, in forza del lemma I,

$$\frac{(2c+b)^2}{(2c)^2} > \frac{c+b}{c} > \frac{(2c+2b)^2}{(2c+b)^2}.$$

Lemma III:

$$(1) \quad \frac{d}{d-b} > \frac{(2d+b)^2}{(2d)^2}, \qquad (2) \quad \frac{d+b}{d} < \frac{(2d)^2}{(2d-b)^2}.$$

Dal secondo lemma, posto $c+b=d$, risulta

$$\frac{d}{d-b} > \frac{(2d)^2}{(2d-b)^2}, \text{ ma pel lemma I è } \frac{2d}{2d-b} > \frac{2d+b}{2d},$$

e in conseguenza sarà

$$\frac{d}{d-b} > \frac{(2d+b)^2}{(2d)^2}.$$

E similmente prova la seconda parte.

Se il segmento A B *dividasi in* C *talmente che sia* $CB = \frac{1}{3} AB$, *e quindi* $AC = \frac{2}{3} AB$, *il parallelepipedo che ha per base il quadrato di* A C *e per altezza* C B *sarà il massimo fra quelli che hanno per base il quadrato d'una parte di* A B *e per altezza l'altra parte.*

Questa proposizione discende immediatamente dal lemma terzo.

Nello stesso luogo Cardano trova il massimo di $\sqrt{x}\,(a - x)$, ma il risultato al quale arriva, pure mediante il lemma terzo, si può considerare un corollario della precedente proposizione (*).

Allo stesso teorema, ma più intimamente al massimo testè menzionato, si collega un altro problema dal Cardano risolto al Capitolo XXXIX dell'opera *De Regula Aliza*, cioè:

Dividere un numero in due parti tali che la differenza fra i due prodotti che si ottengono moltiplicando ciascuna di esse pel quadrato dell'altra sia massima.

Cardano prende ad esempio il numero 12 e sceglie per incognita la semidifferenza delle due parti. Se il numero dato s'indica con $2a$ e quindi s'indicano con $a + x$ e $a - x$ le due parti, la formola data da Cardano diviene

$$x = \frac{a}{3}\sqrt{3},$$

ed a questo valore corrisponde appunto il massimo della funzione

$$(a + x)^2 (a - x) - (a - x)^2 (a + x).$$

Lo stesso problema, ma in altra forma enunciato, è stato risolto dal Tartaglia.

Ecco quanto si legge alla pag. 88 della sua opera: *La quinta parte del general trattato di numeri e misure* - Venezia, 1560.

(*) In questa interpretazione dell'oscuro linguaggio di Cardano, reso ancora più difficile da errori di stampa, mi sono giovato dell'opera del Cossali: *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra.* — Parma, 1799.

« Il decimosettimo quesito di trent'uno a me proposti da Hyero-
« nimo Cardano, medico milanese, nella nostra publica disputa.

« Fatime di otto due tai parti, che il produtto dell'una nell'altra « multiplicato nella loro differentia faccia più che possibel sia.

« A questo suo decimosettimo quesito a quel tempo gli risposi che « la maggior parte fu 4 più $R\ 5\frac{1}{3}$, e la menore fu 4 meno $R\ 5\frac{1}{3}$, « il prodotto è $10\frac{2}{3}$, qual multiplicato nella differentia che è $R\ 21\frac{1}{3}$ « fa $R\ 2427\frac{7}{27}$, e questa è di frutti della nostra pianta, con li quali « pensavano di farmi guerra, ma gli fallì il pensiero.

« La regola da trovar le sopradette parti è questa, divideremo il « detto ottavo in due parti eguali e ne venirà 4, quadreremo quel 4, « fa 16, e a questo 16 gli aggiongeremo la sua terza parte, che sarà « $5\frac{1}{3}$, farà $21\frac{1}{3}$, e la R de $21\frac{1}{3}$ sarà la differentia delle adi- « mandate parti, quala partendola per mità ne venirà $R\ 5\frac{1}{3}$, qual « gionto alla mità di 8 cioè a 4 farà 4 più $R\ 21\frac{1}{3}$ per la parte « maggiore, e tratto de 4 restarà 4 men $R\ 5\frac{1}{3}$ per la parte me- « nore. La causa di questa operatione si narrarà nella nostra noua « Algebra, per esser dependente da quella » (*).

Da ciò è manifesto che anche Tartaglia ha presa per incognita la differenza delle due parti, e che perciò ha considerata la funzione

$$(a - x)(a + x)x = x(a^2 - x^2).$$

Ora è degno di nota che questa funzione è quella stessa alla quale si riferisce il teorema di Archimede sopra esposto: la formola trovata da Tartaglia $2x = \sqrt{\frac{4}{3}a^2}$, che corrisponde a quella data da Cardano, può senz'altro desumersi da quel teorema quando si ponga $a^2 = 3c^2$.

Il teorema sul massimo del prodotto d'una parte d'un segmento pel quadrato dell'altra parte, è stato dimostrato anche dal CAVALIERI

(*) Il Cantor, nell'opera citata, espone questa soluzione del Tartaglia (pag. 487), ma non fa alcuna menzione dei *massimi* di Cardano.

È noto che la *nuova Algebra*, annunziata dal Tartaglia anche in altra occasione, non è mai comparsa.

nelle sue *Exercitationes geometricae* (Prop. XXVIII dell'esercitazione sesta) e nel seguente modo:

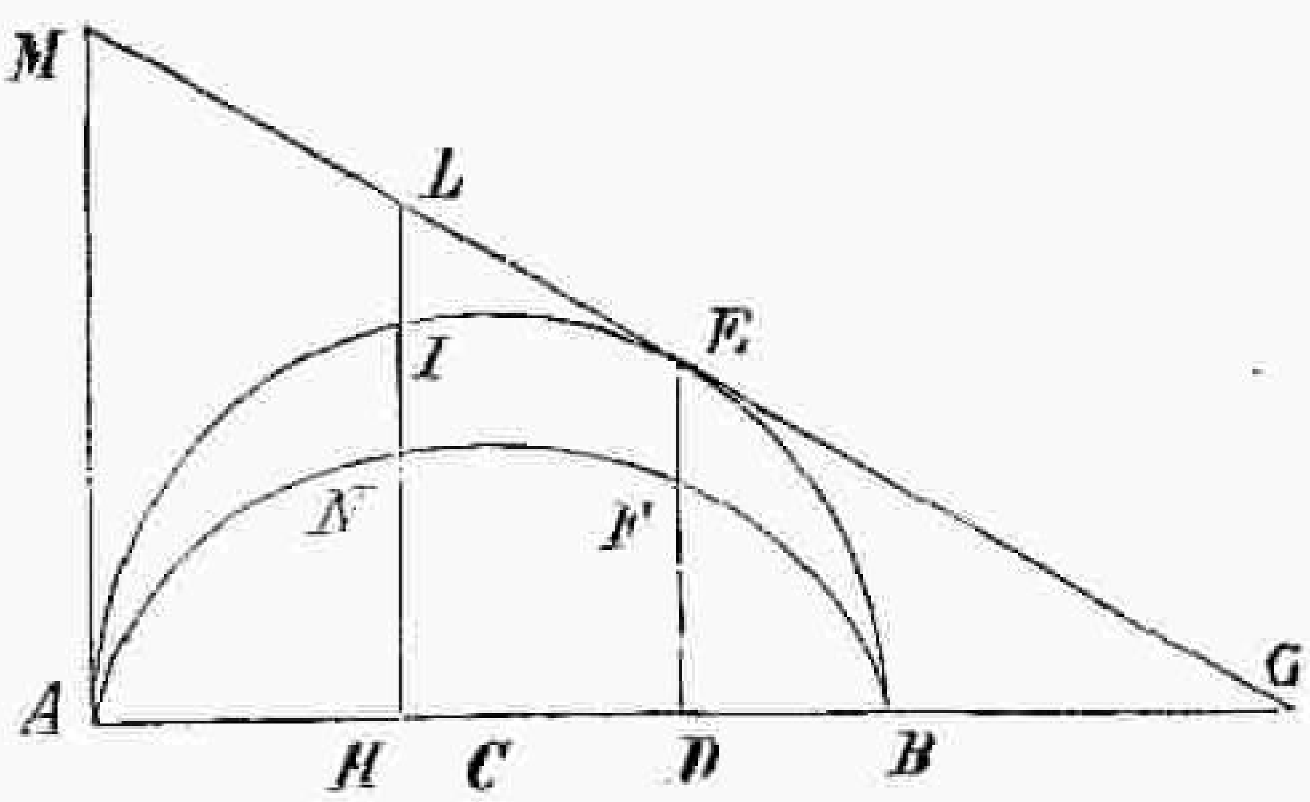
Sia il segmento dato $BE = 3BF$, H un punto qualunque fra F ed E, ed I un punto qualunque fra B ed F. Se si considera la sfera di diametro FE ed in essa il segmento d'altezza HE, il rapporto del volume di questo al volume della sfera è $\frac{BH.HE^2}{BF.FE^2}$, epperciò è $BH.HE^2 < BF.FE^2$. Inoltre, il parallelepipedo che ha l'altezza $BI < BF$ e per base il quadrato di IE si può considerare come equivalente ad altro parallelepipedo di altezza $BH > BF$, epperciò sarà anche $BI.IE^2 < BF.FE^2$.

IV.

Dirò ora di alcuni scritti che più strettamente si collegano a quello del Ricci.

Torricelli ha risolto alcuni problemi che si riferiscono al massimo del prodotto $x^2(a-x)$, e del prodotto $x^3(a-x)$, come risulta dal seguente estratto di una sua lettera diretta al P. Mersenne (*).

Sia AB il diametro d'un circolo o l'asse maggiore di un'elisse e ne sia C il centro. Si domanda il massimo rettangolo fra quelli che hanno per base un segmento del diametro con un estremo in A e per altezza l'ordinata corrispondente all'altro estremo. Dico che se D è il punto di mezzo del raggio CB, il rettangolo richiesto ha per base il segmento AD. Fatto BG, sul prolungamento del diametro, eguale al raggio, si conduca la GE la quale incontri in M la tangente in A. La GM è tangente in E, epperciò, preso in essa un punto qualunque L e condotta la LH, la quale incontri in I la



(*) Questa fa parte della già citata raccolta di lettere di Torricelli, Mersenne e Du Verdus, pubblicata dall'illustre D. Baldassare Boncompagni, nel tomo VIII del suo *Bullettino*.

semicirconferenza, sarà $LH > IH$. Ora, perchè AD è eguale a DG, risulta dalla prop. 27 del sesto libro degli *Elementi*, quali sono esposti dal CLAVIO, che il rettangolo ADE è maggiore del rettangolo AHL (*), e a fortiori del rettangolo AHI.

Considerando poi la semielisse si ha:

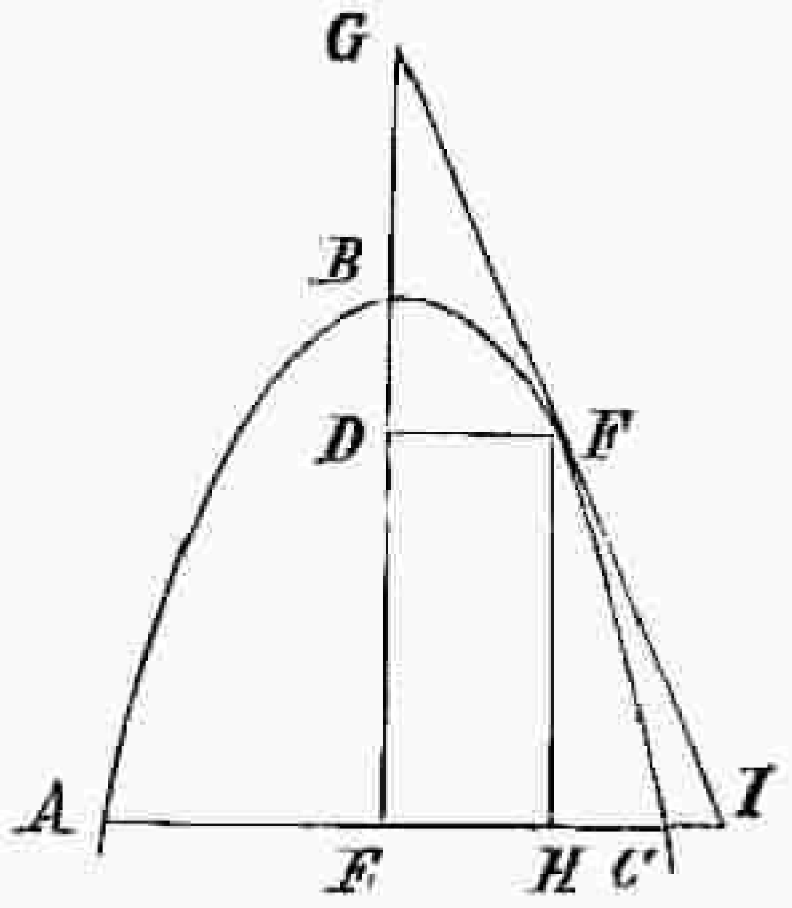
$$\frac{AH \,.\, HN}{AD \,.\, DF} = \frac{AH \,.\, HI}{AD \,.\, DE},$$

epperciò

$$AH \,.\, HN < AD \,.\, DF.$$

Egli trova, in modo analogo, il massimo rettangolo inscritto in un segmento di parabola, compreso fra la curva ed una perpendicolare all'asse.

Siano B il vertice, BE l'asse, AEI perpendicolare all'asse. Fatto $BD = \frac{1}{3} BE$, sia GFI la tangente nel punto F che ha l'ascissa BD, e siano G ed I i punti in cui essa incontra l'asse e la AC: sarà $GD = DE$, e dal teorema di Clavio risulterà che $DEFH$ è il rettangolo massimo fra quelli inscritti nel triangolo GEI con due lati contigui sulle EG, EI, e quindi anche il massimo fra quelli inscritti nel segmento di parabola BEC.



È da notare che, in queste soluzioni, Torricelli si è giovato della costruzione della tangente per la determinazione del massimo.

Il teorema sul massimo del prodotto $x^m (a - x)^n$ è stato enunciato e dimostrato in molti casi particolari, in alcuni dei quali uno degli esponenti è l'unità, e in altri ambedue gli esponenti sono diversi da uno, da PIETRO PAOLO CARAVAGGIO (**) nella sua opera: *Geometria applicationum deficientium figura data specie*, pubblicata a Milano nel 1659. Le sue dimostrazioni sono fondate sui seguenti due teoremi:

(*) Questa proposizione trovasi pure negli Elementi d'Euclide pubblicati per cura di BETTI e BRIOSCHI.

(**) Nato a Milano nel 1617, m. nel 1688. Altre sue opere di matematica sono indicate nella *Biblioteca matematica* del RICCARDI.

1.° Se i due termini d'un rapporto sono aumentati d'una stessa quantità, esso viene aumentato o diminuito secondo che è minore o maggiore di uno.

2.° Se i numeri a_1, a_2, a_3, ... sono in progressione geometrica, ha luogo, per $h < k \leqq \frac{m}{2}$, la diseguaglianza

$$a_h + a_{m-h} > a_k + a_{m-k}.$$

Ecco p. e. com'egli dimostra il teorema sul massimo del prodotto $x^4 (5a - x)$. Sia

$$\frac{x}{4a} = \frac{4a}{f} = \frac{f}{g} = \frac{g}{h},$$

e quindi

$$\frac{x^4}{(4a)^4} = \frac{x}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1]$$

Dalle diseguaglianze

$$x + f > 8a, \quad x + g > 4a + f, \quad x + h > 4a + g$$

si ricava successivamente

$$f > 8a - x, \quad g > 4a + f - x > 12a - 2x,$$
$$h > 4a + g - x > 16a - 3x;$$

epperciò sarà

$$\frac{x}{h} < \frac{x}{16a - 3x}.$$

Se i due termini dell'ultimo rapporto vengono aumentati di $4a - x$, o diminuiti di $x - 4a$, secondo che è x minore o maggiore di $4a$, risulterà a fortiori

$$\frac{x}{h} < \frac{a}{5a - x},$$

e, in forza della [1],

$$\frac{x^4}{(4a)^4} < \frac{a}{5a - x}, \quad \text{ossia} \quad x^4 (5a - x) < (4a)^4 . a .$$

Dello stesso anno 1659 è l'opera di STEFANO DEGLI ANGELI: *Miscellaneum hyperbolicum & parabolicum, in quo praecipue agitur de centris gravitatis Hyperbola, partium ejusdem*, ecc. ecc..

Alla pag. 178, premesso l'enunciato del teorema sul massimo del prodotto $z^{m-1} (a - z)$, il quale teorema, dice espressamente l'autore, è dovuto al Caravaggio, si trova la notevole proposizione:

Se in qualsivoglia delle infinite parabole ($y^m = cx$) *sia scelto un punto qualunque dal quale sia applicata al diametro l'ordinata, e il diametro sia prolungato esternamente alla curva così che la parte esterna sia all'ascissa come il numero della parabola diminuito di uno* ($m - 1$) *all'unità, la retta congiungente quel punto del prolungamento del diametro al punto della curva è in questo punto tangente.*

La dimostrazione è simile a quella che ha poi data il Ricci del teorema più generale sulla sottangente alla $y^m = c x^n$ (*).

D. BESSO.

SULLA DEFINIZIONE DELLA LINEA RETTA

Mi è nata l'idea del presente scritto dalla lettura di un opuscolo del sig. Bonnel, (**) nel quale l'autore con lodevole pensiero (per quanto pur troppo non sempre con sufficiente rigore) studia la questione dei fondamenti della geometria e particolarmente delle sue figure primitive più semplici. Di tale opuscolo dette già una recensione nella *Rivista di Matematica* dell'anno passato il mio egregio amico prof. G. M. Testi; ma siccome la parte essenziale di esso è la definizione di linea retta che il signor Bonnel crede opportuno ricondurre alla forma del Legendre, quale « più corto cammino fra due punti » e ciò appoggiandosi a dimostrazioni non del tutto soddisfacenti, così ho stimato utile discutere se quella sia veramente la migliore definizione e fare insieme un esame del concetto di linea retta con una critica dei varî modi con cui si suole ordinariamente presentare; simili questioni essendo accennate appena nella recensione citata. Su tale argomento dissi già qualcosa nella mia nota « I postulati e gli enti geometrici » (***); ma intendo ora trattarlo più diffusamente.

(*) Il Cantor accenna a questo teorema di Stefano degli Angeli (pag. 821), ma nulla dice sulla dimostrazione.

La dipendenza fra il problema delle tangenti e quello dei massimi e minimi si rende manifesta osservando che, in un intervallo in cui la curva sia sempre concava o sempre convessa rispetto all'asse delle ascisse, la differenza fra l'ordinata di un punto della tangente e l'ordinata corrispondente della curva ha un minimo od un massimo nel punto di contatto.

(**) J. F. BONNEL. *Essai de géométrie rationelle.* — Lyon, 1891.

(***) *Periodico di Matematica,* Anno I.

1. Il concetto di retta è fondamentale in geometria: eppure non solo non si è ancora trovato un modo al di sopra di tutte le esigenze per definirlo, ma neppure si è d'accordo sul come e sul quando si debba introdurlo.

V'è chi preferisce di non definire affatto la retta, considerandola come un concetto a priori, presente in modo chiaro allo spirito di ciascuno. Non intendo entrare in un campo che non è il mio, quello filosofico; ma soltanto osservo come, per il mio modo di vedere, non sia corretto il ritenere che in geometria esistano idee a priori, e come chi pensi il contrario confonda forse l'intuizione colla pura teoria geometrica. Si rifletta (e su questo punto non insisto troppo, rimandando a quanto ho già detto nella mia nota citata ed alla prefazione della recente opera del Prof. Veronese sui fondamenti della geometria) (*) che gli enti della geometria sono ideali, e somigliano quelli della realtà solo per nostro giustificato arbitrio e solo in quanto si usano per essi nomi e frasi del genere di quelli dell'uso comune. La loro esistenza non è dunque reale ma puramente ideale ed arbitraria, dipendendo dalla nostra volontà che ha inteso imitare per agevolezza di studio alcuni degli oggetti che ci stanno attorno; talchè questa esistenza e alcune delle proprietà di tali enti si enunciano con frasi che esprimono verità convenzionali, non necessarie. Da alcuni di questi enti, ammessi per immediato arbitrio, ne discendono altri dei quali l'esistenza è allora necessaria (per quanto solo di fronte a quella dei primi) e viene provata con un teorema. Gli enti geometrici adunque, sebbene plasmati sul tipo di quelli della realtà, hanno proprietà espresse o con postulati assolutamente arbitrari, o con teoremi relativamente necessari: ed è forza concludere che non è il caso di parlare per essi di concetti a priori.

Questo mi sembra intanto sufficiente a stabilire che il concetto di retta deve essere definito e sviluppato.

2. Apparisce anche chiaro quanto sia poco corretto il dire, come si fa in qualche trattato, che la retta per la sua semplicità non si può definire (**), tanto più se, come accade spesso, a quella frase

(*) Giuseppe Veronese. *Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, esposti in forma elementare.* — Padova, 1891.
(**) V. mia nota citata.

se ne aggiungono altre per dilucidare quel concetto che si ritiene indefinibile, poichè con tale aggiunta o si abbozza una definizione che allora varrebbe meglio compiere ed enunciare esplicitamente, o si vuole solo spiegare l'origine del concetto, nel qual caso occorre un postulato che dica esistente una linea colle proprietà geometriche corrispondenti a quelle dilucidazioni.

V'è chi vagheggiò l'introduzione della retta, come di altri enti geometrici, senza ricorrere ai postulati; ma questa è cosa impossibile, a meno che altri postulati enunciati o sottintesi non siano già stati introdotti, poichè la presenza di tali sorta di verità è sempre necessaria in geometria, se almeno si vuole questa, come deve essere, una scienza di enti ideali e non un accozzo di cognizioni pratiche, buono al più per studi elementari professionali.

3. Da quanto fin qui ho esposto si vede come si presentino due soli modi rigorosi per potere in geometria parlare di linea retta: o introdurla direttamente con alcune sue proprietà (da cui tutte le altre discendano come teoremi) il che si farà con postulati, o definirla per mezzo di relazioni cogli enti già noti, dimostrando che una linea con tali proprietà esiste: due vie nettamente distinte, in entrambi le quali per altro occorre sempre la proposizione: « *Esiste una linea* (da dirsi *retta*) *che goda le tali..... proprietà* » da enunciarsi come postulato nel primo modo, come teorema nel secondo. Coll'una e coll'altra via dovranno essere opportunamente scelte le proprietà da adottarsi per accompagnare la frase « *esiste una linea* » nella proposizione precedente: essendo chiaro come non tutte le proprietà di cui si vuole dotata la retta debbano in essa citarsi, poichè da alcune sole discendono poi necessariamente le altre.

4. L'unica questione da decidere è ormai quella se la retta debba ammettersi con postulati o definirsi: e, in ogni modo, quali sue proprietà debbano perciò scegliersi.

La scelta di tali proprietà dev'essere fatta in modo da introdurre in geometria un ente che assomigli strettamente a quelli che nell'uso comune s'indicano col nome di oggetti sottilissimi e diritti: all'infuori di ciò la scelta è evidentemente arbitraria (almeno da un punto di vista generale), bastando che le proprietà adottate non siano contradittorie fra loro nè con quelle già ammesse, e che siano indipendenti l'una dall'altra.

Su di esse non influisce dunque che lo scopo che ci si propone col definire la retta; il quale può essere o scientifico o didattico. Esige il primo maggiore perfezione di metodo, il secondo maggiore facilità di concezione e di esposizione: per cui con simili esigenze, talora assai diverse, è chiaro che le proprietà da scegliersi possono essere molto differenti nei due casi. Se si tratta di uno scopo puramente scientifico, sarà migliore la definizione che si appoggierà a proprietà più primitive e ci mostrerà l'ente in sè, in quanto obbedisce a condizioni necessarie e sufficienti per individuarlo. Se lo scopo è principalmente didattico, la definizione dovrà scegliere le proprietà che risvegliano meglio l'idea degli oggetti della realtà, che meglio *fanno imagine,* per servirmi di una espressione del Monge; ed anche qui il grado di coltura e d'intelligenza delle persone a cui è rivolto l'insegnamento potrà influire sulla scelta di una proprietà o di un'altra.

5. Le proprietà che, rese ideali, devono appartenere alla retta, quelle cioè che ci caratterizzano i così detti oggetti diritti e sottilissimi nei loro più importanti aspetti, sono da un lato le proprietà comuni anche ad altri enti da studiarsi pure in geometria, come quella della continuità e l'altra del rapporto finito fra due qualunque delle loro parti (postulato d'Archimede), dall'altro lato quelle speciali per essi, che sono principalmente la uniformità di simili oggetti, la costanza di direzione di un punto che si muove sopra di essi, la sufficienza dell'immobilità di due loro punti per fissarne la posizione, il fatto che essi sono gli oggetti più brevi fra tutti quelli che terminano ai loro stessi estremi, il fatto che essi costituiscono la linea di riposo di un corpo a cui appartengono e che ruoti attorno a due dei loro punti, ecc.. Qualunque definizione si adotti, essa dovrà dunque esser tale da poter condurre a proprietà simili a quelle della realtà ora enunciate.

6. Prima di passare alla discussione dei vari concetti di retta, è bene avvertire come l'introduzione di un tale ente divida i geometri in due schiere, secondo che essi ritengono opportuno di definire solo il segmento finito, limitato fra due punti, oppure la retta indefinita; os-

servando i primi che l'intuizione fornisce modelli soltanto di tratti limitati, giudicando gli altri facile ed opportuna l'astrazione che svegli l'idea di un ente unico, indefinito, di cui tutti quelli limitati siano parti.

Non intendo qui occuparmi di tale questione, che per mio conto deciderei in favore della retta indefinita, concetto più vasto e più potente dell'altro. D'altronde, poichè il passaggio dal primo modo al secondo si fa senza difficoltà, ed inoltre (*) « la proprietà della retta di « essere indefinita non è conseguenza logica del suo modo di generazione » e si può quindi senza contraddizioni fare una geometria tanto colla retta finita quanto colla retta indefinita, credo opportuno non stabilire distinzioni categoriche fra l'un modo e l'altro nell'esame che sto per fare: nel quale quindi discuterò promiscuamente le definizioni che conducono all'uno od all'altro concetto.

7. Circa alle proprietà della continuità della retta o postulato di Dedekind (cioè che date sulla retta due serie convergenti di punti esiste sempre sulla retta stessa un loro punto limite) e del rapporto finito fra le sue parti o postulato d'Archimede (cioè che dati due segmenti qualunque a e b fra i multipli di a ve ne sono anche di quelli maggiori di b) i geometri sono tutti d'accordo nell'ammetterle esplicitamente sotto quella forma od altre equivalenti; in generale quelle proprietà sono ammesse dopo le altre, anzi si sogliono introdurre dopo che dalle altre si sono dedotte tutte le conclusioni che si possono trarre. Il perchè di tal ritardo si capirà quando si pensi che quelle due proprietà hanno influenza più che altro sui teoremi metrici, i quali sogliono darsi sull'ultimo dei trattati in omaggio ai programmi che regolano l'insegnamento della geometria specialmente nelle scuole classiche.

Nei libri di geometria non esclusivamente destinati all'insegnamento secondario si vedono per altro quelle proprietà ammesse talora insieme alle altre (**).

Comunque sia non è per esse che si stabilisce la differenza più importante fra i vari modi di trattazione della retta, e, d'altra parte,

---

(*) Rausenberger. *Die elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene.* — Leipzig, 1887, § 2.

(**) Vedi p. es. Veronese, l. c.

non si fonda su di esse la descrizione primordiale di tale ente, quella con cui si vuol far capire allo studioso a quali tipi reali debba somigliare la retta: talchè porterò la discussione esclusivamente sulle altre proprietà, le quali da sè sole, come già ho detto, conducono allo svolgimento di molte parti della geometria.

8. La definizione teoricamente più semplice e giustamente preferita da chi non vuol parlar di moto in geometria, è quella che « la « retta è individuata da due punti qualunque » cioè che « per due « punti passa una retta e una sola » : da cui discende immediatamente che qualunque porzione di retta si adagia esattamente sulla retta stessa a partire da qualunque suo punto.

In sostanza quest'ultima proprietà costituisce la definizione d'Euclide, secondo il quale « la linea retta è quella situata ugualmente ri- « spetto a tutti i suoi punti » quando si *chieda* poi nei postulati che « si conceda di tirare da un punto a qualsivoglia altro una retta » e si dia poi l'assioma « due rette non possono racchiudere spazio (*) » colle quali aggiunte in conclusione si ammette che per due punti si possa condurre sempre una retta ed una sola.

La prima parte della definizione di Euclide pecca di oscurità, per cui è stata interpretata in vari sensi; per altro, pensando ai due postulati richiesti, si scorge come forse quella non è che una dilucidazione preliminare affinchè si capisca il perchè di quegli assiomi nei quali veramente sta la definizione della retta, e per i quali mi pare giusto il dare ad essa il nome di definizione euclidea. Il Duhamel (**) stesso vede nelle parole d'Euclide il concetto che si sta discutendo e crede potere in modo più chiaro dare la stessa definizione, chiamando retta « una linea indefinita tale che per due punti non se ne può far « passare che una sola », dimenticando per altro una parte della definizione, cioè che per due punti ne passa sempre una.

Anche modernamente molti autori eccellenti per rigore hanno accolto questa definizione, accompagnandola col postulato che ammette l'esistenza di una linea con quelle proprietà. Citerò alcuni fra quelli a cui si deve lo studio più accurato e sottile sui postulati

(*) *Gli elementi* di Euclide, per cura di E. Betti e F. Brioschi — Firenze, 1887.
(**) Duhamel. *Des méthodes dans les sciences de raisonnement* — Paris, 1866, 2me partie, § 9.

della geometria. Il Pasch (*) ed il Peano, (**) preferendo entrambi di definire il segmento finito piuttosto che la retta indefinita, danno, sotto forma più o meno diversa, i due postulati: 1° esiste un segmento cogli estremi in due punti distinti; 2° per due punti presi come estremi passa un segmento solo. Ed il Veronese (***) (mi servo soltanto di ciò che egli dice della retta nel senso più ristretto sufficiente all'ordinario insegnamento, mentre la sua retta generale non ha un punto solo ma bensì un campo all'infinito) dà così l'assioma della retta: « Due punti distinti qualunque determinano un sistema iden-« tico nella posizione delle sue parti e continuo che li contiene e « si chiama retta » dove l'idea di continuo è qui introdotta subito, e la frase « identico nella posizione delle sue parti » sta a supplire alle proprietà della retta che ordinariamente si deducono dal moto, quali che un segmento AB è uguale al segmento BA, che ogni figura (e quindi anche il segmento) si può far rotare attorno ad un punto, e che ogni raggio di retta fatto rotare attorno al suo estremo si può condurre a passare per un punto qualunque dello spazio.

Mi sembra che la definizione in questione dal punto di vista teorico non lasci niente a desiderare, per quanto debba poi essere completata per poter concludere che se di una retta son fermi due punti saranno fermi tutti: giacchè dal solo fatto che per A e B passa una retta sola non dipende logicamente che stando fermi A e B non possano gli altri punti della retta muoversi scorrendo sulla retta stessa, proprietà questa ultima che può aggiungersi con un successivo postulato e che, comunque, non influisce sull'esistenza e sull'unicità della retta introdotta colla definizione di cui sto parlando. È evidente che questa definizione accenna alla condizione necessaria e sufficiente per individuare fra tutte una linea l. Ora simile metodo che per la definizione non ricorre ad enti estranei ma definisce la retta in sè, come ente che accompagna in qualità di risultato il dato costituito da soli enti elementari, i punti, è metodo indipendente da legami colla realtà, e s'intende quindi che sarà il più potente, il più atto ad uno studio della geometria puramente astratta.

(*) Pasch. *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882, § 1, Grundsatz I

(**) Peano. *I principii di geometria logicamente esposti.* — Torino, 1889, assiomi IV e V.

(***) L. c. pag. 216. Nota IV, ass. II.

Ma se così può dirsi dal punto di vista geometrico, non è al certo altrettanto per quello didattico. Di tal questione già dissi nella mia Nota citata, nè starò qui a ripeter molto; accennerò solo che il presentare una proprietà *negativa* della retta, quella di non passarne che una per due punti, mi sembra, almeno finchè le si mantiene quella forma, poco atto a far nascere l'idea della retta in modo da mostrarla simile a quella che se ne ha nella pratica, per quanto Duhamel (l. c) accenni il contrario. Sotto questa forma la definizione non fa immagine, e quindi credo che non sia da preferirsi in un insegnamento non molto elevato.

9. Dopo la precedente definizione vengono quelle che s'inspirano più da vicino alle proprietà sensorie più salienti dei corpi rettiformi, alle proprietà che servono a descriverci la retta avuto riguardo ai modi materiali di generazione dei ricordati corpi.

Prima fra queste per valore è la definizione che, prendendo alla intuizione il fatto che quando in un corpo stanno fermi due punti stanno fermi anche tutti quelli di un tratto diritto che traversa l'intero corpo, si dà così: « Esiste una linea (che si dirà retta) di cui « tutti i punti stanno fermi quando ne stanno fermi due ». Tale definizione, a dire il vero, deve essere completata coll'accennare che oltre quei punti nessun altro dello spazio sta fermo. Generalmente si suol definire la retta nel modo anzidetto, aggiungendo poi un nuovo postulato il quale corrisponde alla osservazione accennata: meglio sarebbe unirli tutte e due in un solo, così concepito: « Quando in una rota- « zione stanno fermi due punti, stanno fermi tutti i punti di una « linea passante per essi (retta) ed essi soli ».

Tale definizione, addottata anche dal Leibniz (*), si onora di nomi illustri. Così p. es. lo Staudt (**) dice: « Una linea che, tenuti fermi « due dei suoi punti non può cambiare di posizione, si dice retta », ed aggiunge come proprietà che « fra due punti è possibile condurre una « retta ed una sola ad essi terminata ».

E l'Höuel (***), nel suo tentativo di riordinamento del 1° libro di

(*) CLIFFORD. *Il senso comune nelle scienze esatte.* — Milano, 1886, Cap. II, § 5.

(**) STAUDT. *Geometria di posizione*, trad. dal dott. PIERI. — Torino, 1889, § 1.

(***) HÖUEL. *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire.* — Paris, 1883, pag. 43.

Euclide, definisce la retta solo dopo avere invocato l'intuizione del moto attorno a due punti, e propone l'assioma: « Esiste una linea, « detta retta, la cui posizione nello spazio è completamente fissata « dalle posizioni di due qualunque dei suoi punti ».

È facile riconoscere come tale definizione non sia in sostanza che una forma diversa della precedente, trasformata col fare uso del concetto del moto e resa perciò più intuitiva: potrebbe quindi muoverle una seria obiezione chi volesse bandita dalla geometria l'idea di moto. Ma è certo che, sebbene tale idea sia teoricamente non necessaria in geometria, è peraltro di potente aiuto nell'insegnamento e, quando la s'introduca in modo esatto (*) rende accessibili certe idee sotto altra forma oscure e difficili.

Alla definizione stessa si è obiettato (**) da altri che essa nulla dice sulla forma della retta; ma io non conosco ancora una definizione della retta in cui si dica di questa tutto ciò che la riguarda, a causa e del momento in cui conviene introdurla per cui non si può appoggiarla che a pochi concetti già definiti, e della necessità di dire di essa tante proprietà *quante bastino* ad individuarla, se si vuole che la definizione abbia carattere teorico, e non si cambi in una descrizione.

Strana è la critica che le fa il Bonnel (***), l'autore dell'opuscolo che ha inspirato il presente scritto, il quale dice: « Quella definizione si « riconduce agevolmente a questa: una linea è retta, se essa non ruota « quando si fa rotare. Sotto questa forma un poco brutale merita « appena di essere discussa ». Osservo che se è vero che la forma *citata* è addirittura brutale, è inesatto che la definizione si riduca a quella forma, giacchè il dire che la linea non può rotare quando ne stanno fermi due punti, esclude che si possa far rotare, e quindi non accade che non roti *quando si fa rotare!* L'altra obiezione dello stesso autore, che cioè partendo, come si fa con questa definizione, da un movimento concreto il prodotto dell'operazione sarà concreto e si otterrà così un oggetto sottilissimo che potremo far

(*) V. la nota finale alla mia memoria: *La retta ed il concetto di lunghezza.* — *Annali di Matematica*, 1893.

(**) Cassani. *Memorie sui fondamenti della geometria.* - *Giornale di Matematiche*, Volumi XI, XV, XX.

(***) L. c. pag. 16.

girare sui due capi, ma che quando si tratta di estrarre si cade nell'inconveniente accennato nell'altra obiezione, mi pare priva di importanza anche ammettendo quell'inconveniente: giacchè le linee geometriche provengono appunto dalla astrazione dei corpi sottilissimi e le proprietà di una di esse possono appunto essere generate dall'astrazione su tali corpi sottili.

Io giudico che, nonostante le obiezioni che le si muovono, questa definizione, assai rispondente alla intuizione, sia la migliore di tutte quelle a me note, didatticamente parlando.

(Continua). R. BETTAZZI.

A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

(Continuazione, V. pag. 81, 113, 169 del vol. VII).

III.

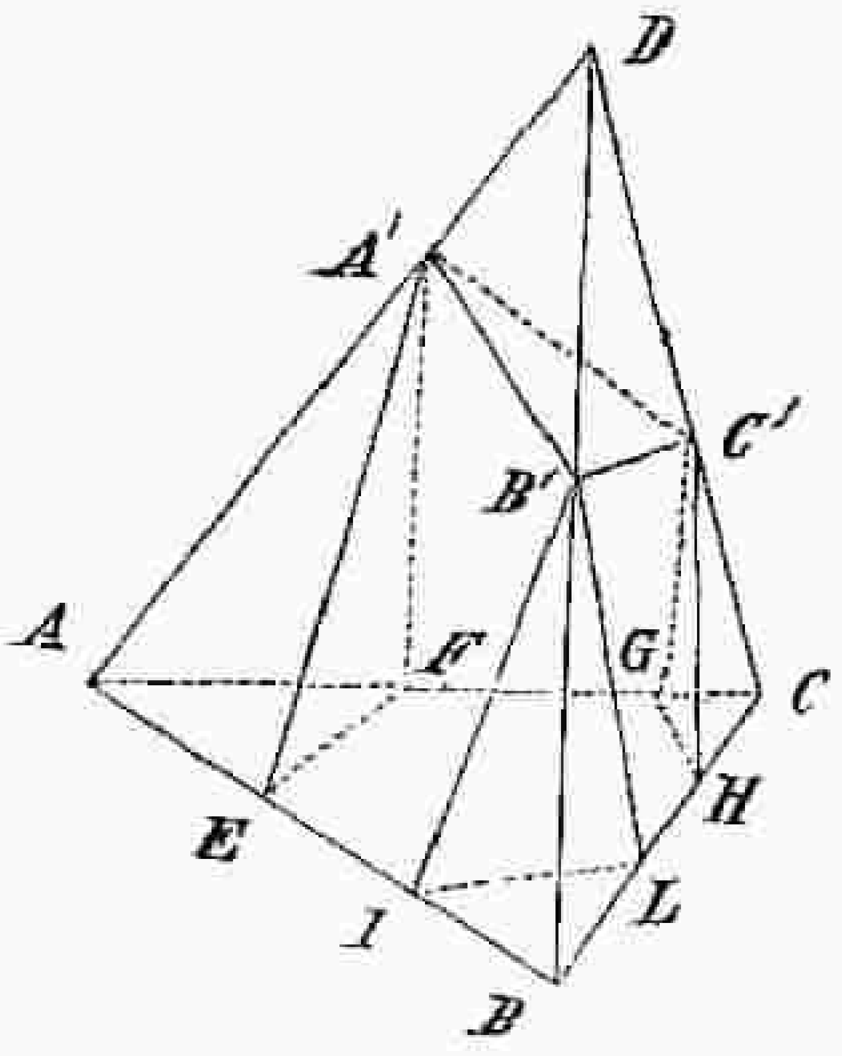
Il filosofo Platone, accogliendo le idee pitagoriche sopra le forme simmetriche e primitive delle molecole materiali, con raziocinio geometrico nei dialoghi del Timeo, definì i cinque poliedri regolari convessi.

Euclide, giovandosi degli studi fatti da Tehètéte e da Aristeo seniore, al XIII libro de' suoi elementi insegnò le regole per iscriverli in una sferica superficie. Apollonio di Perga, Ipsicle, Aristeo, ... cercarono le mutue relazioni fra le varie parti dei solidi regolari e con l'iscrivere l'uno nell'altro s'avvidero come i centri delle faccie siano i vertici del poliedro correlativo, ovvero ai piani α, β, γ, ... ed agli spigoli $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, ... del primo corrispondano respettivamente i vertici A, B, C, ... e gli spigoli AB, BC, CA, ... del secondo. Archimede immaginò tredici figure contenute da poligoni regolari di nome diverso ed i numeri f, v, s delle lor faccie, vertici e spigoli ci furono tramandati per le collezioni matematiche di Pappo alessandrino (*). E siccome questo novero mercè l'analisi indeterminata si riconobbe esatto e completo, il Professor Gunther congetturò che il Siculo genio avesse intuita la

(*) Vedi pagine 42-43 del *Periodo aureo della Geometria greca*, saggio storico del Prof. Loria, e la nitida esposizione del Prof. F. Panizza alla pagina 109 del III volume di questo Giornale.

proposizione fondamentale $f + v - s = 2$; discoperta nell' evo moderno da Cartesio e dall' Euler. Attesochè il troncamento di un angolo m-edro convesso eseguito con un piano che non passi per alcun vertice del solido, accresca questo di m spigoli, di $m - 1$ vertici e di una sola faccia, consegue l'invariabilità della differenza $f + v - s$; viceversa la piramide costruita sopra una faccia n-latera del poliedro presa per base e col vertice opposto non situato sulla superficie, aumenta di $n - 1$, 1, n i respettivi numeri f, v, s; e quindi la differenza suddetta non viene ad alterarsi. Inoltre ch'essa sia eguale a due si manifesta per il tetraedro, ed in generale per il prisma e la piramide a basi n-latere, essendo nel primo $n + 2$, $2n$, $3n$ e nella seconda $n + 1$, $n + 1$, $2n$ i respettivi numeri f, v, s.

Nel tetraedro $ABCD = t$, il piano condotto per tre punti A', B', C' degli spigoli AD, BD, CD separa il pentaedro $ABCA'B'C'$

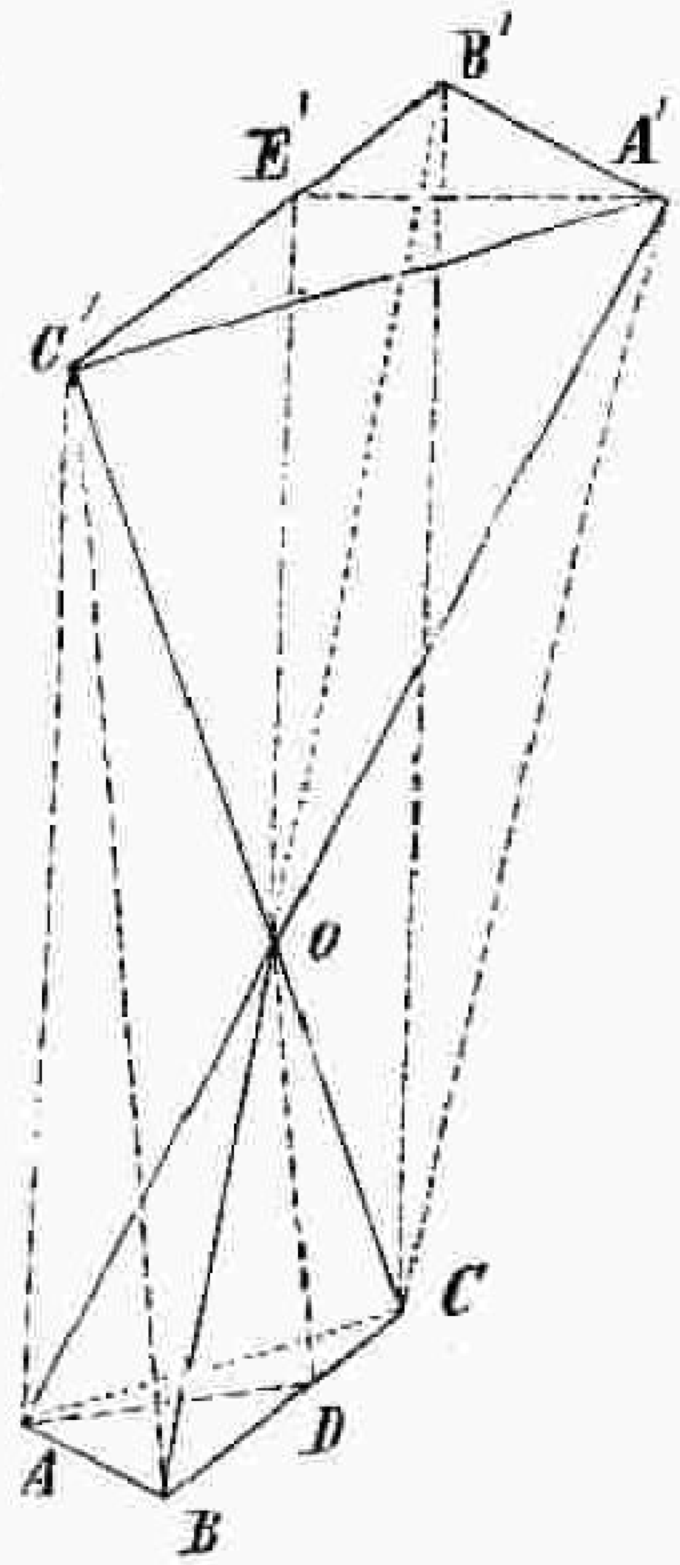


la cui ragione a t è $1 - ghi$; significando con g, h, i le respettive ragioni $A'D : AD$, $B'D : BD$, $C'D : CD$. E chiamando E, F due punti degli spigoli AB, AC ed $AE : AB = l$, $AF : AC = m$, il piano $A'FE$ separa dal solido $ABCA'B'C'$ l'esaedro $EBCFA'B'C'$ avente con t la ragione $1 - ghi - (1 - g)lm$. In simil guisa i piani $C'GH$, $B'IL$ troncano dall'esaedro le piramidi $C'GHC$, $B'IBL$ e l'ottaedro risultante $EFGHLIA'B'C'$ ha quattro faccie triangolari, tre quadrilatere ed una esagonale; posto $CG : CA = n$, $CH : CB = p$, $BL : BC = q$, $BI : BA = r$ si trova esser $1 - ghi - (1 - g)lm - (1 - h)qr - (1 - i)np$ la ragione di quest'ottaedro a t. Se i punti G, L, I coincidano respettivamente con F, H, E si avranno $n = 1 - m$, $q = 1 - p$, $r = 1 - l$ e le faccie saranno tutte triangolari. Nel caso speciale di $g = i = h$, $m = l = p = 1 - h$ la suddetta ragione si riduce a $2h(1 - h)$ e per $h = \frac{1}{2}$ l'ottaedro diviene la metà di t, le sue faccie opposte sono simmetriche rispetto al comun baricentro e fanno angoli diedri supplementari a quelli di t.

Un pentaedro può anche avere le forme di un prisma trilatero e del suo tronco, della piramide quadrangolare o del segmento di questa determinato da un piano passante per un lato della base.

Alla pagina 177 della *practica geometria* di Leonardo pisano, divulgata l'anno 1867 dal Principe Boncompagni, si legge la prima valutazione del tronco di piramide triangolare a basi parallele per l'enunciato: il volume $ABCA'B'C' = v$ decomporsi nella somma delle tre piramidi $ABCA'$, $BA'B'C$, $A'B'C'C$ continuamente proporzionali; poichè avendosi le proporzioni $ABCA' : BA'B'C = AB : A'B'$, $BA'B'C : A'B'C'C = BC : B'C'$ ei conchiude l'eguaglianza delle prime ragioni a motivo dei triangoli simili $ABC = b$, $A'B'C' = b'$; indi costruita una piramide con la stessa altezza h del tronco e la base media proporzionale fra b, b' e simile ad esse dimostra equivalere al tetraedro $BA'B'C$. Simboleggiando con (b, h) il prisma descritto coll'altezza h e la base b, il teorema di Leonardo si esprime con la relazione

$$v = \left(b, \frac{h}{3}\right) + \left(b', \frac{h}{3}\right) + \left(\sqrt{bb'}, \frac{h}{3}\right) = \left(b + b' + \sqrt{bb'}, \frac{h}{3}\right).$$

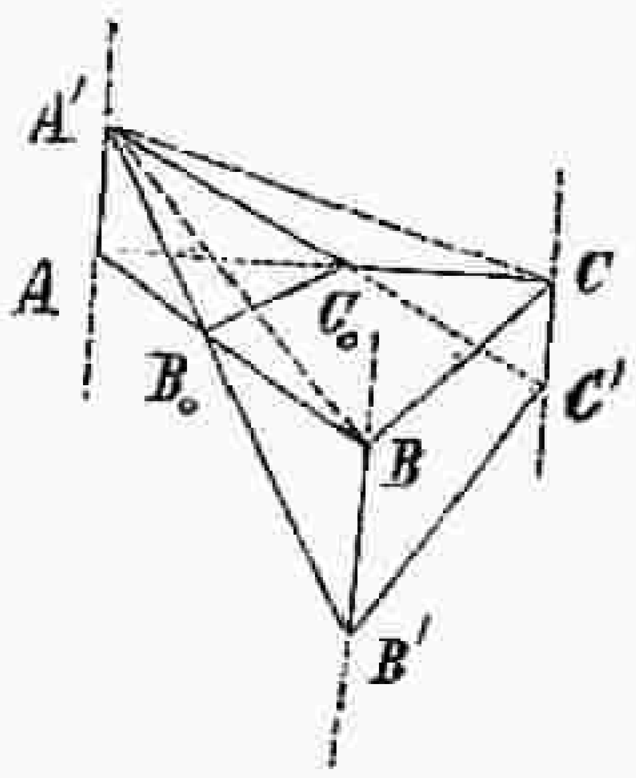


Due tetraedri omotetici inversi $OABC$, $OA'B'C'$ formano un solido compreso da cinque piani, che si chiama tronco di piramide triangolare a basi parallele e di seconda specie; evidentemente sussiste l'identità $OABC + OA'B'C' = C'ABC + CA'B'C' - (OABC' + OA'B'C)$. Notando con b, b' i triangoli ABC, $A'B'C'$, con h la distanza dei loro piani, con k la ragione $OA' : OA = \sqrt{b'} : \sqrt{b}$, si ricavano $C'ABC = \frac{1}{3}(b, h)$, $CA'B'C' = \frac{1}{3}(b', h)$. Tirando le rette OD, OE' respettivamente parallele a BC', CB' fino ad incontrare i lati BC, $B'C'$ risulteranno $OABC' = DABC' = \frac{1}{3}(ABD, h)$, $OA'B'C = E'A'B'C = \frac{1}{3}(A'B'E', h)$; ed in virtù delle proporzioni $ABD : ABC = BD : BC = C'O : C'O + OC$, $A'B'E' : A'B'C' = B'E' : B'C' = OC : C'O + OC$ e $b' : b = k^2 : 1$, si deducono $ABD = kb : (1+k)$, $A'B'E' = bk^2 : (1+k)$; quindi si avrà $ABD + A'B'E' = kb = \sqrt{bb'}$; dunque il tronco di seconda specie equivale a

$$\left(b, \frac{h}{3}\right) + \left(b', \frac{h}{3}\right) - \left(\sqrt{bb'}, \frac{h}{3}\right) = \left(b + b' - \sqrt{bb'}, \frac{h}{3}\right).$$

Le due proposizioni si estendono ai tronchi di piramidi a basi parallele ed n - latere, decomponendo una base θ del tronco nei triangoli $t_1, t_2, t_3, \ldots$ e l'altra θ' negli omotetici $t'_1, t'_2, t'_3, \ldots$; per le ragioni $t_1 : t'_1 = t_2 : t'_2 = t_3 : t'_3 = \ldots \theta : \theta' = 1 : k^2$ si trae $\sqrt{t_1 t'_1} + \sqrt{t_2 t'_2} + \sqrt{t_3 t'_3} + \ldots = (t_1 + t_2 + t_3 + \ldots) k = \sqrt{\theta\theta'}$.

Un tronco di prisma è della seconda specie, quando la base ABC sia segata internamente dalla faccia opposta $A'B'C'$; indicata con $B_0 C_0$ la retta d'intersezione si trovano le identità $A'AB_0C_0 + B_0C_0CBB'C' = A'AB_0C_0 + A'BCC'B' - A'B_0C_0CB = 2A'AB_0C_0 + A'BCC'B' - A'ABC$, e siccome la piramide $A'BCC'B'$ è la somma dei tetraedri $A'BCC'$, $A'BC'B'$ o dei loro equivalenti $ABCC'$, $ABCB'$, il volume v del tronco si esprime con la somma $ABCC' + ABCB' - ABCA' + 2A'AB_0C_0$;



i tre primi tetraedri hanno comune la base ABC ed i vertici nei punti A', B', C'; per il rimanente si ha la proporzione $A'AB_0C_0 : A'ABC = AB_0C_0 : ABC = (AB_0 : AB)(AC_0 : AC)$ e queste ultime ragioni sono respettivamente eguali ad $AA' : (AA' + BB')$, $AA' : (AA' + CC')$ in virtù dei triangoli simili AB_0A', B_0BB' e degli altri due $A'AC_0$, C_0CC'; dunque significando con b la base ABC e con h, h', h'' le distanze dei vertici A', B', C' da questa b, risulta

$$v = \left(b, \frac{h'}{3}\right) + \left(b, \frac{h''}{3}\right) - \left(b, \frac{h}{3}\right) + 2\frac{h^2}{(h+h')(h+h'')}\left(b, \frac{h}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(b, h' + h'' + h\frac{(h-h')(h-h'') - 2h'h''}{(h+h')(h+h'')}\right).$$

(Continua).

G. Bellacchi.

SOPRA ALCUNE EQUAZIONI INDETERMINATE DI PRIMO GRADO

Mi propongo qui di determinare il numero delle soluzioni di alcune equazioni indeterminate di primo grado applicando talune formole che ho dato nella mia nota: *Sulla partizione dei numeri* (*). Adoperiamo quindi le stesse notazioni ivi adottate, e prendiamone a considerare le formole (4), (6), (10) (la prima delle quali ora scriveremo con notazione più semplice)

$$s_{m,p} = \sum_{k=0}^{k=\left(\frac{m}{p}\right)} s_{m-kp,\,p-1} \quad \ldots . (A) \qquad s'_{m,p} = s_{m-p,\,p} \quad \ldots . (B)$$

$$s''_{m,p} = s_{m-\frac{p(p+1)}{2},\,p} \quad \ldots . (C)$$

dove $s_{m,p}$, $s'_{m,p}$, $s''_{m,p}$ rappresentano rispettivamente il numero delle soluzioni dell'equazione

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots . + y_p = m \qquad (^{**})$$

in numeri positivi o nulli, in numeri positivi e diversi da zero, in numeri positivi diversi da zero e tra loro.

1. Supposto $p = 2$ dalla (A) si ha subito

$$s_{m,2} = \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{2}\right)} s_{m-2k,\,1} = \left(\frac{m}{2}\right) + 1$$

ciò che è evidente. Distinguendo dapprima il caso di m pari da quello di m dispari, è facile vedere che si ha in ogni caso

$$s_{m,2} = \frac{2m + 3 + (-1)^m}{4}.$$

2. Sostituendo questo valore di $s_{m,2}$ nella (A) dopo avervi posto $p = 3$, si ha:

$$s_{m,3} = \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{3}\right)} s_{m-3k,\,2} = \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{3}\right)} \frac{2(m-3k)+3}{4} + \frac{1}{4}\sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{3}\right)} (-1)^{m-k}.$$

(*) V. pag. 93 dell'anno VII.

(**) Si considerano come distinte quelle soluzioni che differiscono per due valori *almeno* delle y. - V. la mia nota citata

La quantità $\sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{3}\right)}(-1)^{m-k}$ è zero quando $\left(\frac{m}{3}\right)$ è dispari ed è uguale a $(-1)^m$ quando $\left(\frac{m}{3}\right)$ è pari, onde, come è facile verificare, si ha in tutti i casi

$$\sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{3}\right)}(-1)^{m-k}=\frac{(-1)^m+(-1)^{m+\left(\frac{m}{3}\right)}}{2}$$

da cui

$$s_{m,3}=\left\{\frac{2m-3\left(\frac{m}{3}\right)+3}{4}\right\}\left\{\left(\frac{m}{3}\right)+1\right\}+\frac{(-1)^m+(-1)^{m+\left(\frac{m}{3}\right)}}{8}\,. \quad (1)$$

Se si indica con r_m il resto della divisione di m per 3 si trova anche

$$s_{m,3}=\frac{(m+3)^2-r_m^2}{12}+\frac{(-1)^m+(-1)^{r_m}}{8} \quad \ldots\ldots (1)'$$

Ponendo $p=3$ nella (B) $(m\geqq 3)$, e nella (C) $(m\geqq 6)$, si ha subito dalle precedenti e con facili calcoli

$$s'_{m,3}=\frac{2m-3\left(\frac{m}{3}\right)}{4}\cdot\left(\frac{m}{3}\right)+\frac{(-1)^{m-1}+(-1)^{m+\left(\frac{m}{3}\right)}}{8} \quad .\,.\,(2)$$

$$s''_{m,3}=\left\{\frac{2m-3\left(\frac{m}{3}\right)-3}{4}\right\}\left\{\left(\frac{m}{3}\right)-1\right\}+\frac{(-1)^m+(-1)^{m+\left(\frac{m}{3}\right)}}{8} \quad (3)$$

ed altre due analoghe alla (1)′ tralasciamo per brevità.

(*Continua*). ALBERTO TAGIURI.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

A complemento di un articolo del Prof. Riboni (*Lettera al Redattore*) — Egregio Sig. Professore: Lessi soltanto ora la nota del Sig. Riboni inserita nel *Periodico*, 1891, p. 186-9. A complemento della stessa mi permetto comunicarle i seguenti risultati.

Si ha in generale:

$$K_p^n=\binom{n+1}{2p}+a_{p,1}\binom{n+2}{2p}+a_{p,2}\binom{n+3}{2p}+\ldots\ldots+a_{p,p-1}\binom{n+p}{2p};$$

dove le a sono legate dalla relazione:

$$a_{p,\lambda-1} = \lambda a_{p-1,\lambda-1} + (2p-\lambda)\, a_{p-1,\lambda-2}\,.$$

Mediante questa relazione e col sussidio del calcolo delle differenze finite, si trovano successivamente le a; e cioè si ha:

$$a_{p,\lambda-1} = \lambda^p \sum \left\{ \frac{1}{\lambda^{p+1}} (2p+2-\lambda)\, a_{p,\lambda-2} \right\},$$

dove $\sum$ è il simbolo dell'integrazione finita rispetto a p. Si trova p. es.:

$$a_{p,1} = \frac{2}{1} \,.\, 2^p - (2p+2),$$

$$a_{p,2} = \frac{9}{2} \,.\, 3^p - (4p+6) \,.\, 2^p + \left(2p^2 + 3p + \frac{3}{2}\right).$$

$$a_{p,3} = \frac{64}{6} \,.\, 4^p - (9p+18) \,.\, 3^p + (4p^2 + 10p + 8) \,.\, 2^p$$
$$- \left(\frac{4}{3} p^3 + 2p^2 + \frac{8}{3} p + \frac{4}{6}\right),$$

$$a_{p,4} = \frac{625}{24} \,.\, 5^p - \left(\frac{64}{3} p + \frac{160}{3}\right) . \, 4^p + \left(9p^2 + \frac{63}{2} p + \frac{135}{4}\right) . \, 3^p$$
$$- \left(\frac{8}{3} p^3 + 8p^2 + \frac{34}{3} p + \frac{20}{3}\right) 2^p + \left(\frac{2}{3} p^4 + \frac{2}{3} p^3 + \frac{5}{6} p^2 + \frac{2}{3} p + \frac{5}{24}\right),$$

e in generale:

$$a_{p,\lambda-1} = \frac{\lambda^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \,.\, \lambda^p - M_{\lambda,1} (\lambda-1)^p + M_{\lambda,2} (\lambda-2)^p - \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^\lambda M_{\lambda,\lambda-2} \,.\, 2^p - (-1)^\lambda M_{\lambda,\lambda-1},$$

dove $M_{\lambda,i}$ è un polinomio in p di grado i a coefficienti razionali e positivi.

Uno studio più profondo dovrebbe condurre alla determinazione della forma dei polinomi M.

Mi credo

Mantova, 5 dicembre 1892.

Suo Dev.mo

G. VIVANTI.

Sul teorema di Lehmus ed affini. — Le dimostrazioni di alcuni teoremi affini contenute negli ultimi due numeri del *Periodico di Matematica* e particolarmente gli interessanti cenni storici della Redazione mi fecero ripensare ad una mia dimostrazione assai semplice della quale segnai traccia in un libro da me pubblicato (*). Cercando ricostruirla pervenni ad una dimostrazione che ritengo opportuno far conoscere ai lettori del *Periodico*: essa è quella del secondo dei seguenti teoremi.

(*) *Geometria piana ad uso dei Ginnasi e Licei*; Palermo, 1890: pag. 88, 38.

T. 1. *A due lati eguali d' uno stesso triangolo corrispondono bissettrici eguali.*

D. Si può rimettere il triangolo sopra sè stesso dopo d'averne scambiati i lati eguali, bastando per quest' intento rivoltare sopra sè stesso l'angolo compreso dai detti lati. Con ciò scambiansi tra loro le bissettrici corrispondenti ai lati eguali, cioè ognuna va a coincidere con la posizione iniziale dell'altra: esse bissettrici sono dunque eguali.

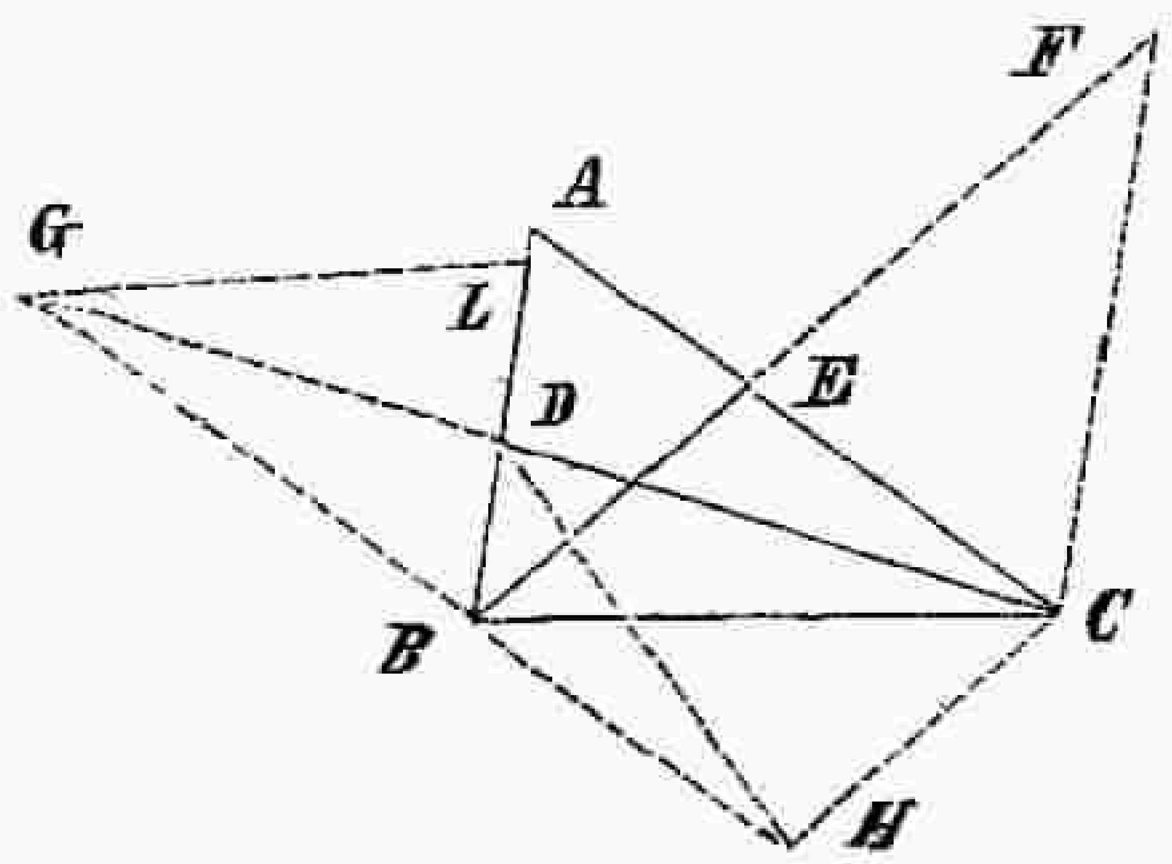
T. 2. *A due lati diseguali di uno stesso triangolo corrispondono due bissettrici diseguali ed è maggiore la bissettrice corrispondente al lato minore.*

D. Nel triangolo ABC siano CD, BE le bissettrici degli angoli C, B; e sia $AB < AC$ per cui l' angolo B sarà maggiore dell' angolo C e la metà del primo sarà maggiore della metà del secondo. Siano F e G i punti d' incontro delle parallele a BA e CA condotte per C e B con le BE, CD prolungate. Sarà

$$\text{ang. } BGD = DCA = DCB \qquad \text{ang. } CFE = EBA = EBC$$

onde, per quanto fu detto:

$$\text{ang. } BGD < CFE$$



e per le riconosciute eguaglianze di angoli sarà inoltre

$$GB = BC = CF.$$

Con un lato in GB, dalla parte di BGD, costruiscasi un angolo eguale a CFE, quindi maggiore di BGD, e sia L il punto d'incontro del secondo lato del medesimo con la retta BA. Per quanto fu detto, i triangoli CEF, BLG hanno un lato eguale adiacente a due angoli uguali epperò essi triangoli sono uguali ed è

$$CE = BL > BD.$$

Ora, siccome un angolo esterno ad un triangolo è la somma dei due interni opposti, è

$$\text{ang. } BEC = A + \frac{1}{2} B \qquad \text{ang. } BDC = A + \frac{1}{2} C$$

per cui, essendo $B > C$, è

$$\text{ang. } BEC > BDC.$$

Si conducano per B e C le parallele ad EC ed EB e s'unisca con D il loro punto d' incontro H. Il quadrilatero $BHCE$ è un parallelogrammo, per cui, tenendo pur conto di quanto precede, si ha:

$$BH = CE > BD \qquad \text{ang. } BHC = BEC > BDC$$

da cui segue immediatamente

$$\text{ang. } BHD < BDH \qquad \text{ang. } BHC - BHD > BDC - BDH.$$

Essendo l'angolo DHC del triangolo DHC maggiore dell'angolo HDC del medesimo triangolo, ne segue che DC è maggiore di CH, ossia di BE che è uguale a CH.

C. *Se due bissettrici d'un triangolo sono eguali, i lati corrispondenti sono eguali. Se due bissettrici d'un triangolo sono diseguali, i lati corrispondenti sono diseguali ed è maggiore quello corrispondente a bissettrice minore.*

La verità di questo corollario si riconosce subito mediante un principio che ho applicato spesso ed utilmente anche nella mia *Geometria piana* (*).

Genova, 3 dicembre 1892.

F. Giudice.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI

114, 115, 119, 134*, 135*, 137*, 138*, 140* e 141*

114. *Si considerano tutte le frazioni, non inferiori all'unità, che hanno il numeratore uguale ad* n *ed il denominatore privo di fattori quadrati (diversi dall'unità). Dimostrare che la somma dei massimi interi, i cui quadrati non superano le frazioni considerate, è uguale ad* n. (E. Cesàro).

Dimostrazione del Sig. Prof. *U. Scarpis.*

Convenendo d'indicare col segno di radice quadrata solamente la parte intera della radice, dimostriamo che essendo n, α due interi, ed $\alpha \leq n$ sarà sempre $\sqrt{\frac{n}{\alpha}} = \sqrt{\frac{n+1}{\alpha}}$ eccetto che $\frac{n+1}{\alpha}$ sia intero e quadrato perfetto nel qual caso sarà: $\sqrt{\frac{n+1}{\alpha}} = \sqrt{\frac{n}{\alpha}} + 1$.

Poniamo infatti $\frac{n}{\alpha} = q + \frac{r}{\alpha}$ $(r < \alpha)$ e quindi $\frac{n+1}{\alpha} = q + \frac{r+1}{\alpha}$: avremo evidentemente $\sqrt{\frac{n}{\alpha}} = \sqrt{q}$, $\sqrt{\frac{n+1}{\alpha}} = \sqrt{q}$ ogniqualvolta sia $r+1 < \alpha$, oppure $r+1 = \alpha$ ma $q+1$ quadrato non perfetto; mentre invece sarà $\sqrt{\frac{n+1}{\alpha}} = \sqrt{q+1} = \sqrt{q} + 1 = \sqrt{\frac{n}{\alpha}} + 1$ qualora oltre ad essere $r+1 = \alpha$, $q+1$ sia pure quadrato perfetto.

Ciò premesso, indichiamo con Σx, Σy rispettivamente, la somma delle radici intere delle frazioni non minori di 1 che hanno per numeratori n, $n+1$

(*) Pag. 5; T.: oppure Sannia e D'Ovidio, *Elementi di Geometria*, 5ª ediz., pag. 27, n. 20.

e per denominatori numeri soddisfacenti alla condizione di non contenere fattori quadratici diversi dall'unità, e dimostriamo che sussiste la relazione:

$$(1) \qquad \Sigma y = \Sigma x + 1$$

Distinguiamo i seguenti casi:

1°) Sieno n ed $n+1$ entrambi privi di fattori quadratici.

Indichiamo con $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots n, n+1$ i numeri tra l'unità ed $n+1$ (gli estremi inclusi) sprovvisti di fattori quadratici. Avremo:

$$\Sigma x = \sqrt{\frac{n}{1}} + \sqrt{\frac{n}{\alpha_1}} + \sqrt{\frac{n}{\alpha_2}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n}},$$

$$\Sigma y = \sqrt{\frac{n+1}{1}} + \sqrt{\frac{n+1}{\alpha_1}} + \sqrt{\frac{n+1}{\alpha_2}} + \ldots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+1}}.$$

Ma per quanto precede si ha:

$$\sqrt{\frac{n}{1}} = \sqrt{\frac{n+1}{1}}, \quad \sqrt{\frac{n}{\alpha_1}} = \sqrt{\frac{n+1}{\alpha_1}}, \ldots \sqrt{\frac{n}{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

ed oltre a ciò: $\sqrt{\dfrac{n+1}{n+1}} = 1$, per cui è manifesta la (1).

2°) Sia $n = m^2 . q$, $n+1 = \mu^2 . k$ essendo m^2, μ^2 i massimi fattori quadratici di n, $n+1$ di modo che q e k ne saranno privi.

Sieno ora $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_r$ i numeri inferiori ad n che non contengono fattori quadratici, tra i quali si troveranno q e k, avremo:

$$\Sigma x = \sqrt{\frac{n}{1}} + \sqrt{\frac{n}{\alpha_1}} + \ldots\ldots + \sqrt{\frac{n}{\alpha_r}},$$

$$\Sigma y = \sqrt{\frac{n+1}{1}} + \sqrt{\frac{n+1}{\alpha_1}} + \ldots\ldots + \sqrt{\frac{n+1}{\alpha_r}}.$$

Ora, per quanto s'è detto in principio e notando inoltre che k è l'unico divisore di $n+1$ che non contenga fattori di 2° grado ed al quale corrisponda un quoziente μ^2 quadrato perfetto, si scorge che per α diverso da q, k come pure per $\alpha = q$ si ha: $\sqrt{\dfrac{n}{\alpha}} = \sqrt{\dfrac{n+1}{\alpha}}$, mentre invece solo per $\alpha = k$ abbiamo: $\sqrt{\dfrac{n+1}{\alpha}} = \sqrt{\dfrac{\mu^2 k}{k}} = \mu = \sqrt{\dfrac{n}{\alpha}} + 1$ e così pure in questo caso resta provata la (1).

3°) Sia n mancante di fattori di 2° grado, ed $n+1 = \mu^2 . k$ essendo μ^2 il massimo quadrato divisore di $n+1$.

Si dimostra come il precedente.

4°) Sia $n+1$ privo di fattori quadratici e sia invece $n = m^2 . q$.

I denominatori delle frazioni che si considerano saranno in questo caso $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_r, n+1$ tra i quali si troverà pure q ed avremo:

$$\Sigma x = \sqrt{\frac{n}{1}} + \sqrt{\frac{n}{\alpha_1}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{\alpha_r}},$$

$$\Sigma y = \sqrt{\frac{n+1}{1}} + \sqrt{\frac{n+1}{\alpha_1}} + \ldots\ldots + \sqrt{\frac{n+1}{\alpha_r}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+1}},$$

e siccome anche per $\alpha = q$ si ha: $\sqrt{\frac{n}{\alpha}} = \sqrt{\frac{n+1}{\alpha}}$ ed è $\sqrt{\frac{n+1}{n+1}} = 1$, si ricava:

$$\Sigma y = \Sigma x + 1$$

e la (1) resta dimostrata in ogni caso.

Rappresentando ora con Σx, Σz, Σt, ... Σv, Σw rispettivamente le somme delle radici intere di tutte le frazioni soddisfacenti alle condizioni volute ed aventi successivamente per numeratori n, $n-1$, $n-2$, ... 2, 1, dalla (1) si ricaverà la seguente catena di eguaglianze:

$$\Sigma x = \Sigma z + 1\,,\quad \Sigma z = \Sigma t + 1\,,\ \ldots\ldots\quad \Sigma v = \Sigma w + 1\,,\quad \Sigma w = 1$$

dalle quali sommando si ha: $\Sigma x = n$ (*)

115. *Sia* $\varphi(n)$ *il numero dei numeri primi con* n *e non superiori ad* n. *Dimostrare che, se* α, β, γ, ... *sono tutti gli interi che entrano (esattamente o no) un numero dispari di volte in* 2n, *si ha:*

$$\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \varphi(\gamma) + \ldots\ldots = n^2.$$

(E. Cesàro).

Dimostrazione del Sig. Prof. *U. Scarpis.*

Dimostriamo anzitutto che se si rappresentano con x, y rispettivamente, gli interi che entrano (esattamente o no) un numero dispari di volte in $2n$, $2(n-1)$, si ha:

(1) . . . . $\Sigma\varphi(x) = \Sigma\varphi(y) + 2n - 1.$

In primo luogo, com'è facile vedere, i numeri x si compongono: 1°) dei numeri y, tolti però i numeri $\eta > 1$ divisori di $2n$ che danno quozienti pari; 2°) dei numeri k divisori di $2n-1$, eccettuata l'unità; 3°) dei numeri λ, divisori pari di $2n$ che danno quozienti dispari.

Ciò premesso si ha così:

(2) . . . $\Sigma\varphi(x) = \Sigma\varphi(y) - \Sigma\varphi(\eta) + \Sigma\varphi(k) + \Sigma\varphi(\lambda).$

Cerchiamo ora i valori di $\Sigma\varphi(\eta)$, $\Sigma\varphi(k)$, $\Sigma\varphi(\lambda)$ ed a tal uopo distinguiamo i seguenti casi:

a) n dispari. - I numeri η, cioè i divisori di $2n$ che lasciano quozienti pari, coincidono con i divisori δ di n, tolta l'unità, e si ha quindi per una nota proprietà della funzione φ:

$$\Sigma\varphi(\eta) = \Sigma\varphi(\delta) - \varphi(1) = n - 1.$$

I numeri k coincidono con i divisori di $2n-1$, esclusa l'unità, per cui:

$$\Sigma\varphi(k) = \Sigma\varphi(\delta) - \varphi(1) = 2n - 1 - 1 = 2n - 2.$$

(*) Una dimostrazione sostanzialmente analoga è stata inviata dal Sig. Prof. *G. Santacroce.*

I numeri λ poi, cioè i divisori pari di $2 \cdot n$, che danno quozienti dispari, sono della forma 2δ essendo δ sempre dispari divisore di n che è pure dispari, e per essi avremo:

$$\Sigma \varphi(\lambda) = \Sigma \varphi(2\delta) = \Sigma \varphi(\delta) = n.$$

b) n pari. – Si faccia $n = 2^{\nu} . n'$ essendo n' dispari. I numeri η cioè i divisori di $2.n$, tolta l'unità, che danno quozienti pari, sono della forma $2^{\nu'} . \delta$ essendo $\nu' < \nu + 1$ e δ divisore di n', mentre quelli che danno quozienti dispari sono della forma $2^{\nu+1} . \delta$: indicando quindi con d i divisori tutti di $2 . n$ avremo:

$$\Sigma \varphi(\eta) = \Sigma \varphi(d) - \Sigma \varphi(2^{\nu+1} . \delta) - \varphi(1),$$

ma poichè $2^{\nu+1}$ e δ sono numeri primi fra loro, per altra proprietà della funzione φ, segue:

$$\varphi(2^{\nu+1} . \delta) = \varphi(2^{\nu+1}) \varphi(\delta) = 2^{\nu+1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \varphi(\delta) = 2^{\nu} \varphi(\delta).$$

Così essendo

$$\Sigma \varphi(d) = 2n, \ \Sigma \varphi(2^{\nu+1} . \delta) = 2^{\nu} \Sigma \varphi(\delta) = 2^{\nu} . n' = n,$$

si avrà:

$$\Sigma \varphi(\eta) = n - 1.$$

Per i numeri k, come precedentemente, è

$$\Sigma \varphi(k) = \Sigma \varphi(\delta) - \varphi(1) = 2n - 2.$$

I numeri λ infine, cioè i divisori pari di $2n = 2^{\nu+1} . n'$ e che danno quozienti dispari, sono della forma $2^{\nu+1}\delta$ per cui

$$\Sigma \varphi(\lambda) = \Sigma \varphi(2^{\nu+1}\delta) = 2^{\nu} . n' = n.$$

Le espressioni $\Sigma \varphi(\eta)$, $\Sigma \varphi(k)$, $\Sigma \varphi(\lambda)$ hanno dunque gli stessi valori in ogni caso, e sostituiti nella (2) conducono alla (1).

Rappresentando ora rispettivamente con $x, y, z, \ldots\ldots u, v, w$ il numero degli interi che entrano esattamente o no un numero dispari di volte in $2.n$, $2(n-1)$, $2(n-2), \ldots\ldots 2[n-(n-1)]$, applicando la (1), si ha:

$$\begin{aligned}
\Sigma \varphi(x) &= \Sigma \varphi(y) + 2n - 1 \\
\Sigma \varphi(y) &= \Sigma \varphi(z) + 2n - 3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Sigma \varphi(v) &= \Sigma \varphi(w) + 3 \\
\Sigma \varphi(w) &= 1
\end{aligned}$$

e sommando membro a membro e riducendo:

$$\Sigma \varphi(x) = 1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n - 1) = n^2.$$

119. *In un cerchio* O *siano* OA, OB *due raggi perpendicolari l'uno all'altro. Immaginando diviso il raggio* AO *in* n *parti uguali nei punti* A_1, $A_2, \ldots . A_{n-1}$, *poi condotte le corde* BA, BA_1B_1, $BA_2B_2, \ldots BA_{n-1}B_{n-1}$, *dimostrare che la somma dei triangoli* BAA_1, BB_1A_2, BB_2A_3, ... $BB_{n-1}O$, *quando* n *tende all'infinito, ha per limite il quadrante* BOA.

(A. Lugli).

Dimostrazione del Sig. Prof. *S. Catania.*

Suppongo che i punti $A_1, A_2, \ldots . A_{n-1}$ siano segnati a partire da O andando verso A, e indico con A_0 il punto O, con A_n il punto A, e suppongo il raggio $OA = 1$. Si ha successivamente:

$$OA_k = k \cdot \frac{1}{n} \quad , \quad \overline{BA}_k^2 = 1^2 + k^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}(n^2 + k^2),$$

$$BA_k \cdot A_k B_k = 1 - \overline{OA}_k^2 = \frac{1}{n^2}(n^2 - k^2) \quad , \quad \overline{A_k B}_k^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n^2 - k^2)^2}{n^2 + k^2}.$$

L'altezza del triangolo $A_{k-1} A_k B_k$, relativa alla base $A_{k-1} A_k$, è

$$A_k B_k \operatorname{sen} B A_k O = \frac{1}{n} \frac{n^2 - k^2}{\sqrt{n^2 + k^2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}\sqrt{n^2 + k^2}} = \frac{n^2 - k^2}{n^2 + k^2},$$

onde l'area di tale triangolo sarà espressa da

$$\frac{1}{2n} \cdot \frac{n^2 - k^2}{n^2 + k^2} = \frac{1}{2n}\left(\frac{2n^2}{n^2 + k^2} - 1\right) = \frac{n}{n^2 + k^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

La somma dei triangoli $A_0 A_1 B_1$, $A_1 A_2 B_2$, ... $A_{n-2} A_{n-1} B_{n-1}$, risulterà così uguale a

$$\left\{ \frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \ldots . + \frac{n}{n^2 + (n-1)^2} \right\} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2}.$$

Il limite per n tendente all'infinito di $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, resta quindi a cercare il limite per $n = \infty$ della somma entro le grappe.

Dalla trigonometria si ha:

$$\frac{\operatorname{arc\,tan}(x + \Delta x) - \operatorname{arc\,tan} x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \operatorname{arc\,tan} \frac{\Delta x}{1 + (x + \Delta x)x},$$

onde il limite per $\Delta x = 0$ del 1° membro sarà uguale a

$$\lim_{\Delta x} \left(\frac{\operatorname{arc\,tan} \frac{\Delta x}{1 + (x + \Delta x)x}}{\frac{\Delta x}{1 + (x + \Delta x)x}} \cdot \frac{\frac{\Delta x}{1 + (x + \Delta x)x}}{\Delta x} \right)$$

e poichè, com'è noto, $\lim_{\alpha = 0} \frac{\operatorname{arc\,tan} \alpha}{\alpha} = 1$, il limite del primo fattore è l'unità, e il limite del prodotto è uguale ad $\frac{1}{1 + x^2}$.

Potremo dunque porre, quando Δx sia una quantità infinitesima:

$$\operatorname{arc\,tan}(x + \Delta x) - \operatorname{arc\,tan} x = \frac{\Delta x}{1 + x^2} + \varepsilon(\Delta x).$$

dove ε è una quantità che va a zero con Δx.

In questa formula, facciasi ora $\Delta x = \frac{1}{n}$, supponendo n grandissimo, ed $x = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}$. Riducendo convenientemente il 2° membro, si avrà:

$$\text{arc tan}\frac{2}{n} - \text{arc tan}\frac{1}{n} = \frac{n}{n^2+1^2} + \varepsilon_1 \cdot \frac{1}{n}$$
$$\text{arc tan}\frac{3}{n} - \text{arc tan}\frac{2}{n} = \frac{n}{n^2+2^2} + \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{arc tan}\frac{n}{n} - \text{arc tan}\frac{n-1}{n} = \frac{n}{n^2+(n-1)^2} + \varepsilon_{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Sommando, coll'osservare che $\text{arc tan}\, 1 = \frac{\pi}{4}$, risulta:

$$\frac{\pi}{4} - \text{arc tan}\frac{1}{n} = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2} + \sum_{k=1}^{k=n-1} \varepsilon_k \cdot \frac{1}{n}.$$

Se ε_i rappresenta il più gran valore di ε, sarà $\sum \varepsilon_k \cdot \frac{1}{n} < n \cdot \varepsilon_i \cdot \frac{1}{n} = \varepsilon_i$, ed allora, passando nell'eguaglianza precedente al limite per $n = \infty$, avendosi $\lim_{n=\infty} \text{arc tan}\frac{1}{n} = 0$ e $\lim_{n=\infty} \varepsilon_i = 0$, si ottiene infine

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2} \right\} = \frac{\pi}{4},$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{k=n} A_{k-1} A_k B_k = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Se a questa somma si aggiunge il triangolo $OAB = \frac{1}{2}$, si ha, come volevasi dimostrare, $\frac{\pi}{4}$ = quadrante OAB per limite della somma dei triangoli indicati nella quistione.

Dimostrazione del Sig. Prof. *G. Santacroce.*

Sia A_r uno dei punti di divisione del raggio OA, che poniamo, per semplicità, uguale ad 1, ed indichiamo con x il segmento OA_r e con dx una dell'ennesime parti del raggio, p. es. $A_r A_{r+1}$ (essendo n estremamente grande).

Il $\Delta\, BB_r A_{r+1}$ essendo uguale alla somma dei triangoli aventi per base il segmento $A_r A_{r+1}$ e per vertici B e B_r, la sua area elementare sarà espressa da

$$\frac{dx}{2}(OB + B_r P) = \frac{dx}{2}(1 + \text{sen}\, B_r O A)$$

dove $B_r P$ rappresenta la perpendicolare condotta da B_r al raggio OA.

Si ha dalla trigonometria che $\text{sen}\, 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$. D'altra parte l'angolo AOB_r è doppio dell'angolo ABB_r, (differenza fra gli angoli $ABO = 45^\circ$

e $B_r B O$): la sua tangente trigonometrica è data per conseguenza da: $\dfrac{\tan A B O - \tan A_r B O}{1 + \tan A B O \cdot \tan A_r B O} = \dfrac{1-x}{1+x}$, onde per la relazione precedente:

$$\operatorname{sen} A O B_r = 2 \frac{\frac{1-x}{1+x}}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

L'area del $\Delta\, B_r A_{r+1} B$ è quindi uguale a

$$\frac{dx}{2}\left(1 + \frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Non rimane ora che integrare l'espressione $\dfrac{dx}{1+x^2}$ fra i limiti 0 e 1. Ma è noto dal calcolo integrale che: $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x$, e fra i limiti 0 e 1 lo stesso integrale è uguale a $\dfrac{\pi}{4}$, che esprime appunto l'area del quadrante nel cerchio di raggio 1, c. d. d. (*).

134*. *Eliminare* u *e* v *dalle tre equazioni*

$$\frac{z\sqrt{2}}{1-z^4} = \frac{1}{u}\sqrt{1-\sqrt{1-u^4}}$$

$$\frac{u\sqrt{2}}{1-u^4} = \frac{1}{v}\sqrt{1-\sqrt{1-v^4}}$$

$$v^2 + z^2 + v^2 z^2 = 1.$$

(D. Besso).

Soluzione dei Sigg. *G. Trapani*, macchinista in primo ed *E. de Vito*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Roma.

Sostituendo nella seconda equazione il valore di v, ricavato dalla terza, dopo facili riduzioni si ha:

$$\frac{u^2}{(1-u^4)^2} = \frac{1-z}{2(1+z)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

La prima equazione liberata dai radicali diviene

$$u^2 = \frac{4z^2(1-z^4)^2}{4z^4 + (1-z^4)^4}.$$

Sostituendo nella (1), fatta ogni riduzione, si ha:

$$8z^2(1-z^4)(1+z^2)(1+z)^2[(1-z^4)+4z^4]^3 = [(1-z^4)^4 - 4z^4]^4$$

che è la relazione domandata (**).

(*) Due dimostrazioni, analoghe nella sostanza alle precedenti, vennero inviate dal Sig. *F. Mariantoni*, studente nella R. Università di Roma.

(**) Soluzioni sostanzialmente analoghe vennero inviate dai Sigg. *D. de Blasi* alunno R. Liceo Lecce) e *D. Pacillo* (R. Ist. tec. Foggia).

135*. *Se in un triangolo rettangolo si descrive un cerchio che sia tangente all'ipotenusa e sottenda un cateto, il triangolo che ha per vertice un punto qualunque del cerchio e per base il cateto sotteso, è equivalente al triangolo che ha per vertici le proiezioni del medesimo punto sui tre lati del triangolo rettangolo.* (P. Morino).

Dimostrazione del Sig. *G. Trapani*, macchinista in primo.

Si abbia il triangolo ABC rettangolo in C; si descriva una circonferenza avente per corda il cateto BC e che sia tangente all'ipotenusa AB; si unisca un punto P di questa circonferenza con B e con C; siano D, E, F rispettivamente le proiezioni del punto P su AB, AC e BC: dico che i due triangoli PBC, DEF sono equivalenti.

Sia G la proiezione del vertice B su CP, e si unisca F con G. In virtù delle ipotesi fatte gli angoli DBP, FCG sono uguali. Inoltre dall'essere FG antiparallela a BP, si ha pure che l'angolo $CGF = CBP$. Di qui segue ang. $DBF = DBP + CBP = FCG + CGF$; ma ang. $BFG = FCG + CGF$, quindi ang. $DBF = BFG$.

Le due coppie di triangoli simili CFG, CPB; BCG, PBD dànno: $CG : BC = FG : BP$, $CG : BC = BD : BP$, da cui $GF = BD$, onde i due triangoli DBF, GBF sono uguali per avere l'ang. $DBF = BFG$, il lato $BD = FG$ e il lato BF di comune; quindi anche ang. $BFD = FBG$ e lato $BG = FD$.

Inoltre abbiamo $CP = FE$, perchè diagonali del rettangolo $CFPE$ ed ang. $DFE = BFP - BFD + PFE =$ ang. retto $- FBG + PFE =$ ang. retto $- PCE + PFE =$ ang. retto $- PFE + PFE =$ ang. retto.

Adunque i due triangoli PBC, DEF avendo basi CP ed FE, e altezze BC e DF, uguali, sono equivalenti, c. d. d..

137*. *Risolvere un triangolo dati un angolo* A, *la bisettrice interna* α *e l'inclinazione* i *di questa sul lato* a. *Qual dev'essere il valore di* i *affinchè il triangolo abbia la ragione* m *col quadrato di* α? (G. Bellacchi).

Soluzione del Sig. *E. Ghisi*, studente a Catania e del Sig. *V. Columbo*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Bari (*).

Si ha subito:

$$B = 180^0 - \left(i + \frac{A}{2}\right), \qquad C = i - \frac{A}{2};$$

$$b = \frac{\alpha \operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} C} = \frac{\alpha \operatorname{sen} i}{\operatorname{sen}\left(i - \frac{A}{2}\right)}, \qquad c = \frac{\alpha \operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} B} = \frac{\alpha \operatorname{sen} i}{\operatorname{sen}\left(i + \frac{A}{2}\right)},$$

$$a = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{\alpha \operatorname{sen} i \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}\left(i + \frac{A}{2}\right) \operatorname{sen}\left(i - \frac{A}{2}\right)}.$$

(*) Altre soluzioni vennero inviate dai Sigg. *A. Parsi* (studente a Genova), *D. Pasillo* e *G. Russi Ruggi* (R. Ist. tec. Foggia), *E. G. Ricci* (R. Liceo Bari).

Per la seconda parte si ha:

$$\frac{\frac{1}{2}\,bc\,\text{sen}\,A}{\alpha^2} = m\,.$$

Sostituendovi i valori di b e c trovati, si ottiene:

$$\frac{\text{sen}^2 i\,.\,\text{sen}\,A}{2\,\text{sen}\left(i - \frac{A}{2}\right)\text{sen}\left(i + \frac{A}{2}\right)} = m\,,$$

da cui:

$$\text{sen}\,i = \sqrt{\frac{m(1 - \cos A)}{2m - \text{sen}\,A}} = \text{sen}\,\frac{1}{2}A\sqrt{\frac{2m}{2m - \text{sen}\,A}}\,.$$

Intanto dev'essere $i > \frac{A}{2}$. Perchè poi i sia reale, si richiede che si abbia $2m > \text{sen}\,A$ ed inoltre:

$$m - m\cos A \leq 2m - \text{sen}\,A \quad \text{da cui} \quad \text{sen}\,A \leq m + m\cos A\,.$$

Questa seconda condizione include la prima, perciò come unica condizione di possibilità, oltre ad $i > \frac{A}{2}$, si ha:

$$m \geq \frac{\text{sen}\,A}{1 + \cos A} \quad \text{cioè} \quad m \geq \text{tg}\,\frac{1}{2}A\,.$$

Quando $m = \tan\frac{A}{2}$, risulta $\text{sen}\,i = 1$, cioè $i = 90^0$ ed il triangolo è isoscele.

138*. *Per quali valori razionali di* n *l'espressione*

$$\frac{(n+5)\,(n+6)}{6n}$$

si riduce a un intero positivo? (S. Catania).

Risposta del Sig. *G. Russi Ruggi*, alunno del R. Istituto tecnico di Foggia.

L'espressione data può mettersi sotto la forma $\left(n + 11 + \frac{30}{n}\right) : 6$ donde si vede che n deve essere un fattore di 30. I fattori di 30 essendo 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, il valore di $n + \frac{30}{n}$, che si indicherà con k, dovrà essere uno dei seguenti:

$$1 + 30 = 31\,, \quad 2 + 15 = 17\,, \quad 3 + 10 = 13\,, \quad 5 + 6 = 11.$$

Ora il minimo valore di k che rende $\frac{11 + k}{6}$ numero intero è 1. Gli altri valori saranno, come è noto, i termini della progressione aritmetica 1, 7, 13, 19, 25, 31, ...

I valori che coincidono con quelli di k sono 13 e 31 che corrispondono ai valori

$$1,\ 30,\ 3,\ 10$$

di n.

140*. *Essendo* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ *numeri interi dati, indichino* $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ *rispettivamente i minimi multipli comuni alle coppie* (a_1, a_2), (m_1, a_3), $(m_2, a_4), \ldots (m_{n-2}, a_n)$, *e* $d_1, d_2, d_3, \ldots d_{n-1}$ *i massimi comuni divisori di queste coppie. Dimostrare che il prodotto* $d_1 d_2 \ldots d_{n-1}$ *si mantiene costante variando l'ordine dei numeri dati.* (A. Tagiuri).

Dimostrazione dei Sigg. *C. Aiello*, studente a Napoli, *V. Columbo* del R. Istituto tecnico di Bari, *E. de Vito* a Roma, *E. Ghisi* a Catania, *A. Parsi* a Genova, *L. Perrotti* del R. Istituto tecnico di Aquila, *G. Russi Ruggi* del R. Istituto tecnico di Foggia.

Se d è il massimo comun divisore ed m il minimo comune multiplo dei numeri a e b, è noto che $d = (ab) : m$. Si avrà dunque nel caso presente

$$d_1 = \frac{a_1 a_2}{m_1}, \quad d_2 = \frac{m_1 a_3}{m_2}, \quad d_3 = \frac{m_2 a_4}{m_3}, \ldots \quad d_{n-1} = \frac{m_{n-2} a_n}{m_{n-1}}.$$

Moltiplicando queste uguaglianze membro a membro, poi riducendo, risulta

$$d_1 d_2 d_3 \ldots d_{n-1} = \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n}{m_{n-1}}.$$

Ora nel secondo membro il numeratore è indipendente dall'ordine dei fattori e il denominatore è il m. c. m. dei numeri dati pure indipendente dall'ordine nel quale essi sono presi. Segue adunque che il prodotto $d_1 d_2 d_3 \ldots d_{n-1}$ rimane costante variando comunque l'ordine dei numeri dati.

Il Sig. *E. Ghisi* osserva poi che il teorema proposto seguita a sussistere scambiando le d con le m e viceversa.

141*. *Se* p *è un numero primo maggiore di* 3 *ed* a *un numero intero qualunque, dimostrare che la differenza* $a^p - a$, *è sempre divisibile per* $6p$.

(F. Giudice).

Dimostrazioni sostanzialmente analoghe dei Sigg. *G. Candido* studente a Pisa, *U. Gerra* e *G. Mazza* del R. Istituto tecnico di Piacenza, *M. Piattelli* del R. Liceo di Bari.

Deriva dall'ipotesi che p è dispari, quindi $(p-1):2$ numero intero. Si ha così

$$a^p - a = a(a^{p-1} - 1) = a\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right).$$

Ora se $(p-1):2$ è pari, nell'ultimo prodotto il terzo fattore è divisibile per $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$, se $(p-1):2$ è dispari il secondo fattore è divisibile per $a+1$ e l'ultimo per $a-1$. In ogni caso adunque la differenza $a^p - a$ è divisibile per $(a-1)a(a+1)$, che è il prodotto di tre numeri consecutivi, quindi, per un teorema elementare, divisibile per 6.

In secondo luogo se p è un numero primo maggiore di 3, pel teorema di Fermat, $a^{p-1} - 1$ è divisibile per p. La differenza $a^p - a$ è dunque divisibile per 6 e per p, che sono numeri primi fra loro, quindi anche pel loro prodotto $6p$.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

143. Dimostrare il seguente teorema di Giamblico (IV Sec. dell'E. v.) « Dati tre numeri consecutivi della serie dei numeri naturali, il massimo dei quali sia divisibile per tre, se ne faccia la somma: si addizionino poi le cifre del numero così ottenuto, altrettanto facciasi per questo nuovo numero, e così via. Si arriverà così finalmente al numero 6 ». E cercare se in sistemi di numerazione a base diversa da 10 esista un'analoga proposizione.

G. Loria.

144. Eliminare x, y, z dalle quattro equazioni

$$\begin{aligned} y z (1-2x) &= \alpha^2 (1-x)^2 \\ z x (1-2y) &= \beta^2 (1-y)^2 \\ x y (1-2z)^2 &= \gamma^2 (1-z)^2 \\ x+y+z &= 1. \end{aligned}$$

D. Besso.

145**. Posto

$$a_1 = \frac{a+b}{2},\ a_2 = \frac{b+a_1}{2},\ a_3 = \frac{a_1+a_2}{2}, \ldots .\ a_n = \frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2},$$

esprimere a_n in funzione di a, b, n, e trovare il limite a cui tende a_n quando n tende all' infinito.

D. Besso.

146*. In un dato triangolo isoscele costruire tre circoli fra loro eguali, ciascuno dei quali sia tangente a due lati del triangolo, e in modo che quello tangente ai due lati eguali tocchi ciascuno degli altri due.

147*. Sia $ABCD$ un rettangolo e sia, sul prolungamento del lato AB, il punto P così situato che il rapporto $\frac{AB}{AD}$ sia il cubo del rapporto $\frac{BP}{AD}$: se la PC incontra in R il prolungamento della AD, i punti R e P saranno equidistanti dal punto d' incontro delle diagonali del rettangolo.

148*. Dati i raggi delle basi di due coni retti di egual volume e di eguale superficie totale, calcolare le loro altezze (**).

(*) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

(**) Delle quistioni 146*, 147* e 148* la prima è stata risoluta da L. Paciolo, la seconda è riportata dal Tartaglia nel suo *General Trattato di numeri et misure*, la terza si trova in una lettera di Roberval diretta a Fermat.

149*. Per un punto P distante del segmento a dal centro O di un cerchio descritto col raggio r, condurre una trasversale PMM', in modo che le tangenti MT, TM' agli estremi della corda intercetta formino un dato angolo θ; esprimere la distanza PT, il perimetro del triangolo MTM' in funzione della a, r, θ e dare il valore di θ nel caso di angolo $OPM = MTM'$.

G. Bellacchi.

150**. Determinare un triangolo sferico equilatero, la cui superficie sia il complemento del suo perimetro.

G. Bellacchi.

151**. Risolvere un triangolo sferico rettangolo, il cui perimetro è un quadrante, ed è pur dato un angolo obliquo.

G. Bellacchi.

152**. Dati gli angoli di un triangolo sferico ABC, determinare l'arco AD verificante la relazione $\text{sen}^2 AD = \text{sen}\, BD \,.\, \text{sen}\, DC$, cercando in quali casi è possibile.

G. Bellacchi.

153*. Se convertendo la frazione $\frac{1}{p}$, con p numero primo, in decimali, risulta un numero periodico il cui periodo ha un numero dispari di cifre, i resti della divisione $1 : p$ corrispondenti alle singole cifre del periodo, due a due, non sono mai complementari cioè tali che la loro somma sia uguale a p.

A. Lugli.

154*. Dato l'angolo $BOA = 2\alpha$, si descriva con centro O e raggio arbitrario un cerchio a tagliare i lati dell'angolo in A e B, poi con diametri AB, OB due semicerchi, il secondo dei quali passa pel punto medio H di AB e il primo taglia OH, dalla parte del vertice O dell'angolo, in C. Condotta CB poi tracciato il cerchio di centro B e raggio uguale alla metà di BC fino a tagliare l'arco BH in P, dimostrare che prendendo l'angolo BOP uguale alla terza parte dell'angolo dato, si commette un errore che è espresso da

$$\frac{2\alpha}{3} - \text{ang}\left(\text{sen} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\sqrt{2}}\right) \ (*).$$

(*) La costruzione precedente è ricavata dal Redattore, con qualche fatica, da un opuscolo che porta la data del 1892 ed il titolo: *Sulla elementare trisezione in parti eguali dell'angolo rettilineo.* L'A., che ha voluto ornare l'opuscolo della sua fotografia, crede colla costruzione riportata d'aver dato la soluzione completa, col mezzo della retta e del cerchio, del problema propostosi e ne dà una dimostrazione a modo suo il cui disordine è degno di nota, promettendo per l'avvenire altre scoperte (!) di vantaggio alle arti ed alle scienze.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

FRANCESCO GRASSI. – *Trattato di trigonometria piana e sferica* di G. A. SERRET, tradotto in italiano sulla settima edizione francese. — Seconda edizione con note ed aggiunte del traduttore e 900 esercizi colle risposte. — Torino, Fratelli Bocca editori, 1893. — Prezzo L. 3, 50.

Lodevolissima è la raccolta degli esercizi contenuti in questo libro. Di esercizi, che sono parte tanto vitale nell'insegnamento, è difetto, bisogna riconoscerlo, nella trigonometria del Serret; ma ben può dirsi che il Grassi ha colmato questo difetto, e di buona misura. È vero che nel libro del Grassi esercizi e risposte domandano qua e là qualche rammenda: (*) ma è altresì certo che un maestro avveduto può trarre gran profitto dal materiale che esso Grassi, con lungo studio e grande amore, ha raccolto e ordinato.

Non direi altrettanto delle aggiunte che egli ha creduto doversi fare all'opera del Serret. È mia opinione che, ormai, i libri per le scuole, piuttosto che *aggiungendo*, si dovrebbero migliorare *togliendo*: (**) ma a tacer di ciò, non credo che tutte le aggiunte del Grassi siano di tale importanza da giustificare la cresciuta mole dell'antico Serret. Alcune avrebbero potuto far corpo con gli esercizi, perchè non sono altro che esercizi (v. p. es. i § 58-*bis* e 96-*bis*). – L'aggiunta relativa al seno e al coseno di una somma di archi, mi è sembrata troppo difficile, mentre, se ben si osserva, la verità contenuta in essa è un'ovvia conseguenza del teorema di moltiplicazione dei numeri complessi, combinato con la legge di formazione del prodotto di n binomi, tutte cose che gli studiosi di matematica prima o poi dovranno imparare. – Nell'aggiunta a pag. 128 si legge: « Una delle più importanti applicazioni del calcolo dei logaritmi è la risoluzione delle equazioni trigonometriche. Il metodo più generale consiste nell'esprimere le linee trigonometriche in funzione di una sola; prendendo questa linea come incognita ausiliaria, si è ridotti alla risoluzione di una equazione algebrica ». Ora è ovvio, e lo dimostrano gli stessi esempi trattati dall'autore, che ad esprimere tutte le linee trigonometriche in funzione di una sola e a risolvere l'equazione risultante, i logaritmi non possono giovare. Mi sembra poi che le parole dell'autore abbiano a ribadire il pregiudizio di chi credesse le tavole dei logaritmi strumento per la risoluzione dei problemi trigonometrici, solo ed in quanto esse sono tavole di *logaritmi*, quasichè una tavola di seni e coseni naturali non potesse prestare eguali servigi. — Della noterella a pag. 114, quantunque dettata da ottimo intendimento, perchè relativa alla misura dell'errore nel consueto calcolo del logaritmo di un seno, non può farsi

(*) Così, nella maggior parte delle risposte relative alla risoluzione di equazioni trigonometriche, si indica soltanto qualche soluzione particolare e si rimette allo studioso la ricerca della soluzione generale, conforme l'autore ne avvisa a pag. 37, lasciando adito al dubbio che, in fatto di risoluzione di equazioni, la ricerca della soluzione generale sia quasi un di più, da affidarsi al buon volere degli scolari.

(**) Naturalmente io considero quello del Grassi come libro per le scuole medie, quale apparisce dalla natura e dal lavorio degli esercizi. Come tale, anche il Serret contiene alcune cose di troppo: per citarne una, la risoluzione trigonometrica delle equazioni del 2° e 3° grado. - Perchè rincarare la dose?

gran caso. Oltrechè troppo laconica, e perciò oscura, essa non mi pare utile, didatticamente parlando, perchè suppone la conoscenza della serie di Taylor per lo sviluppo di log. sen $(x+h)$ — log. sen x. Ma è certo che, ripubblicata sotto veste elementare in una ristampa del libro, che auguro prossima, sarebbe un complemento desiderato, forse l'unico veramente desiderato, dell'opera magistrale di A. Serret.

Le precedenti osservazioni, se giuste, non toccano tuttavia che le aggiunte: quanto al libro, tra per l'eccellenza del testo, tra per la bontà e la copia degli esercizi, io lo reputo utilissimo all'insegnamento (*).

G. Frattini.

Ing. ALESSANDRO PEPOLI. – *Elementi di aritmetica.* – Palermo, tipografia del *Giornale di Sicilia*, 1891. — Prezzo L. 3,50.

È questo un trattato di aritmetica teorica o pratica? Esaminando le dimostrazioni dei teoremi più importanti, le quali, benchè non di rado chiare e piane, non sono scientificamente rigorose, nè sempre sono logicamente dedotte da principi prestabiliti, si viene facilmente alla conclusione che il voluminoso libro del Pepoli non merita il nome di aritmetica razionale; osservando poi la soverchia estensione data ad alcune teoriche, si può concludere che non è una aritmetica pratica. Si può dire quindi che è una aritmetica ibrida, di quelle così dette teorico-pratiche (che viceversa poi non sono nè l'una nè l'altra cosa), della quale veramente non si sentiva il bisogno e che non ha nessuna ragione di essere, perchè è una edizione poco riveduta e molto scorretta delle vecchie aritmetiche del Luvini, del Pagnini, dell'A. e C., ecc..

Ma, affinchè le mie osservazioni non sembrino censure gratuite, offrirò al lettore qualche saggio del libro, incominciando da alcune definizioni.

« Piu' cose che si contano si esprimono colle parole due, tre, quattro, ecc. », e più innanzi: « diremo parti aliquote dell'unità i simboli $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ecc. » senza che l'A. dica che cosa rappresentino questi simboli, ed anche: « Dicesi problema una questione in cui, essendo conosciuti alcuni numeri, se ne cercano altri ».

Nè più rigorosi ed esatti sono gli enunciati delle regole. Per rappresentare i numeri l'A. dice che bisogna avvertire che « ogni classe deve avere tre cifre e quindi di scrivere *degli* (quanti?) zeri alla sinistra delle classi che hanno una o due cifre.... ». Osserva che nel fare l'addizione conviene non pronunciare i *numeri* (!) pensati.

Curiosa è la dimostrazione del teorema: « moltiplicando per uno stesso numero tanto il dividendo quanto il divisore ecc. »: « Infatti dalla divisione di 75 per 8 si sa che 75 unità contengono 9 volte al più 8 unità più 3 unità. La parola unità indica una cosa qualunque; di guisa che, sostituendo alla parola

(*) Della stessa Trigonometria del Serret, vogliamo anche segnalare agli studiosi l'apparizione in questi giorni della 2ª ristampa della traduzione italiana dal prof. Fenoglio, e di cui rese conto il prof. Besso nel vol. II, p. 158-159 del *Periodico*.

(*Nota della Red.*).

unità la parola dozzina, si può dire: 75 dozzine contengono 9 volte al più 8 dozzine più 3 dozzine, cioè 12 $\times$ 75 diviso 12 $\times$ 8 dà per quoto 9 e per resto 12 $\times$ 3, c. d. d. ».

Di molti teoremi l'A. non dà la dimostrazione, contentandosi di asserire: « questo teorema non è altro che il precedente *preso in senso inverso* ».

Per finire: « la lunghezza del viaggio è inversamente proporzionale al numero degli uomini dell'equipaggio rimanendo costanti la quantità di viveri che ha la nave e il trattamento giornaliero (*sic*) per ciascun uomo dell'equipaggio » (p. 498).

A. Massa.

G. DE LONGCHAMPS. — *Cours de Mathématiques spéciales.* Supplément comprenant la Trigonométrie et la Mécanique. — Paris, Librairie Ch. Delagrave, 1893. — Prix 7,50 fs.

Del *Corso di matematiche speciali* del valente e fecondo Direttore del *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*, e della 1ª edizione del *Supplemento* al Corso medesimo demmo altra volta un'analisi in questo giornale (Vol. II, p. 188-90) ed ora è per noi un debito di far noto come l'opera abbia trovato fevorevole accoglimento nel pubblico in modo da rendere necessaria già da tempo una 2ª edizione dell'*Algebra* e adesso una 3ª edizione del Supplemento. Questa ultima racchiude in più della 1ª edizione, una rapida esposizione della Trigonometria piana e sferica, lo sviluppo del programma di Meccanica per l'ammissione alla scuola politecnica di Parigi, programma che può considerarsi quale indice di un trattato di meccanica non superiore, ma neppure affatto elementare in quanto richiede l'uso di alcune proprietà dell'analisi infinitesimale ed abbraccia la cinematica e dinamica del punto e la statica dei solidi liberi ed invariabili, finalmente l'esposizione delle coordinate trilineari, baricentriche e tangenziali con applicazione alle principali proprietà delle coniche, e lo studio dell'intersezione di due quadriche.

I pregi di chiarezza e profondità di vedute, già segnalati nel Corso del signor Prof. de Longchamps, com'era da prevedere, non mancano neppure nelle aggiunte del supplemento, il quale contiene inoltre scelti e numerosi esercizî di cui in generale è presentato un cenno di soluzione.

Chiudono il volume i soggetti d'esame scritto in matematiche dati negli anni 1889-92 nella scuola politecnica, normale e centrale, al concorso generale ed all'Aggregazione.

A. Lugli.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques, publié par G. Eneström. Nouvelle série. 6. N. 4. — Stockholm, 1892.

Bulletin scientifique, rédigé par M. E. Lebon. — Septième année. N. 2, 3. Novembre, Décembre. Félix Alcan, éditeur. Paris, 1892.

El Progreso matemático, periódico de matemáticas puras y applicadas. Director D. Zoel G. de Galdeano. Año II. N. 22, 23. Octubre, Noviembre 1892. — Zaragoza.

Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Vol. XXX. Settembre e Ottobre 1892. — Napoli, B. Pellerano.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. de Longchamps. 4e Série, XVI année. N. 11, 12 Novembre, Décembre 1892. — Paris, Librairie Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. 17e année. Nombres 3, 4, 5, 6. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles, 1892.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. Mansion et J. Neuberg. Deuxième série. Tome II. Novembre, Décembre 1892. — Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo VI, Fasc. V. Settembre-Ottobre 1892.

Revue de mathématiques spéciales, rédigée par M. B. Niewenglowski. 3e année. N. 2, 3 Novembre, Décembre 1892 — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles.

Rivista di matematica, diretta dal Prof. G. Peano. Fasc. 10°-11°. Ottobre, Novembre 1892. — Torino, Fratelli Bocca.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. XXIII Jahrgang: 7, 8 Heft, 1892. — Leipzig, G. B. Teubner.

Bustelli (A. M.) — L'insegnamento nel Ginnasio pareggiato e nel R. Liceo di Ferrara per l'anno scolastico 1892-93. — Ferrara, 1892.

Casey (J.) — *A Sequel to the first six Books of the Elements of Euclid*, Containing an Easy Introduction to Modern Geometry, with numerous Exercises. Sixth Edition. — Dublin, Hodges, Figgis & C., 1892. — Price: 3s. 6d.

De Longchamps (G.) — *Supplément* au Cours de Mathématiques spéciales, comprenant la Trigonométrie et la Mécanique. — Paris, Ch. Delagrave, 1892. — Prix: fr. 7,50.

Gianni (L.) — Sulle equazioni che ammettono coppie di radici reciproche. (Giornale di Matematiche di Battaglini, Vol. XXX, 1892).

Gillet (J.) — Théorie des plans hypercycliques des surfaces du second degré. (*Mathesis*, 1892, 2me série, t. II).

Giudice (F.) — Sulle equazioni algebriche. (Rivista di mat.. Anno II, 1892).

Grilli (R.) — Saggio di un nuovo trattato di Algebra elementare per i Licei. — Correggio, 1889.

— — Esposizione di uno dei principii intorno all'equivalenza di due equazioni e considerazioni relative. — Correggio, 1890.

Humbert (E.) — Traité d'Arithmétique, avec des Compléments et une Préface de J. Tannery. — Paris, Nony et Cie, 1892. — Prix: 5 fr. (*franco*).

Pepoli (A.) — *Elementi d'Aritmetica*. — Palermo, Tip. del *Giornale di Sicilia*, 1892. — Prezzo: L. 3,50.

Sbrana (S.) — Sulla condensazione del vapore acqueo durante l'espansione. (Rivista Scient.-industriale di G. Vimercati. Firenze, 1892).

Serret (J. A.) — *Trattato di Trigonometria*. Versione autorizzata dall'autore con aggiunte di L. Fenoglio. Seconda edizione. — Ditta G. B. Paravia e Comp., 1893. — Prezzo: L. 3.

— — *Trattato di Trigonometria piana e sferica*, tradotto in italiano sulla 7a edizione francese col consenso dell'autore da F. Grassi. 2a edizione, con note ed aggiunte del traduttore e 900 Esercizi colle risposte. — Torino, Fratelli Bocca, 1893. — Prezzo: L. 3,50.

Vivanti (G.) — L'infinito nella natura e nella scienza. Discorso letto nella R. Accademia Virgiliana di Mantova il giorno 12 giugno 1892. — Milano, Tipo-litografia Ingegneri, 1892.

Chiusura della redazione il dì 31 dicembre 1892.

SULLA DEFINIZIONE DELLA LINEA RETTA

(*Continuazione e fine*, V. *pag. 16*).

10. Un' altra definizione che si trova assai diffusa è quella per cui la retta è « una linea di direzione costante ». Tralascio di occuparmi di chi, senz'altro, dice essere la retta « il cammino fatto da « un punto che si muova sempre nella stessa direzione », poichè qui si ricorre al concetto di moto continuo di cui non è il caso di parlare sul principio della geometria puramente teorica, prima di tutto perchè richiede, per essere compreso e ben chiarito, delicate nozioni sulla costituzione dello spazio e delle linee, non solite a darsi in principio, e forse malagevoli a svolgersi senza aver già il concetto di retta; e poi perchè contiene, sebbene poco avvertibile, il concetto di tempi successivi, estraneo troppo alla geometria. Tale definizione, insieme all'altra simile che « la linea retta è quella che « ha la stessa direzione in tutti i suoi punti » non hanno valore teorico, oltrechè per le ragioni precedenti, anche per l'uso della parola « direzione » non definita; tanto più che il concetto di direzione guida, se altro non si aggiunge, piuttosto all'idea di raggio (semiretta) che a quello di retta.

Chi, pure accogliendo il concetto che informa le definizioni accennate, ha voluto rendere queste più rigorose, si è trovato di fronte l'idea di direzione, che occorreva chiarire prima di farla servire ad introdurre una linea. P. es. lo Schlegel (*) con concetti attinti all' « Ausdehnungslehre » del Grassmann, ragiona così « Vi è una « infinità di movimenti fra i quali un punto può scegliere in principio « della sua variazione. Il segno distintivo per un tal moto iniziale si « dice *direzione*. Se il punto prosegue nello stesso moto iniziale scelto « una volta, il suo moto si dirà semplice. Il segno di un moto semplice « è dunque la direzione... Quando un punto varia la sua posizione con « un moto semplice, la figura che genera si dice retta ». — Non

(*) SCHLEGEL. — *System der Raumlehre I.* — Leipzig, 1872. Einleitung — e 2te Ab: —

si può negare che l'artifizio sia sottile; ma esso consiste unicamente nel sostituire alla parola « direzione » la frase « segno distintivo « per il moto iniziale », cioè il concetto di moto iniziale che si compie in infiniti modi diversi, senza che sia detto che cosa vuol dire il compiersi due volte in egual modo, essendo così priva di significato la definizione di moto semplice e quindi di retta. Inoltre si presenta anche qui, quasi senza che ce ne accorgiamo, il moto continuo, e si possono quindi rinnovare le obiezioni già esposte.

Lo Schotten (*) con procedimento migliore, scansa la definizione di direzione; egli dice che un punto insieme ad un altro qualunque individua due concetti, cioè una distanza ed una direzione, e che dato un punto si dice retta l'insieme dei punti che accoppiati con quelli danno la stessa direzione o l'opposta. Egli usa il concetto di direzione senza definirlo, con metodo che oggi giustamente si usa spesso secondo l'esempio di Euclide nel suo 5° libro; ma non pensa a definire che cosa vuol dire direzioni uguali, mentre gli occorre appunto di usare il concetto « di ugual direzione ». Se tale definizione fosse data, il metodo sarebbe corretto, scientifico e di notevole importanza; ma io credo che il concetto di direzione, o almeno quello di direzioni uguali o disuguali, sia molto difficile (almeno per ora) a stabilire senza quello di retta a cui strettamente si collega. Lo stesso Staudt, p. es. non parla di direzione altro che dopo aver parlato della retta.

Questo metodo adunque che saputo bene stabilire avrebbe il pregio di mettere in rilievo una delle qualità più salienti della retta è, almeno nello stato attuale della geometria, non bene sviluppato.

11. Presso alcuni autori (**) si trova data la retta come « quella « linea la quale nella sua totalità non suppone che una dimensione « sola ». — Non mi trattengo su questo modo di introdurre la retta, potendosi ad esso muovere l'obiezione stessa del precedente, quella di usare il concetto di dimensione non definito, forse anche più difficilmente definibile della direzione, e l'altra di essere circondato di eccessiva oscurità.

(*) SCHOTTEN. *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterricht.* — Leipzig, 1890. V. Kap..

(**) SCHOTTEN l. c. - SCHMIDT. *Euklids 11 axiom durch eine neue Definition der geraden Linien bewiesen.* — Moskau 1891.

12. Accenno anche appena alla definizione platoniana della retta (*) come la linea « i cui punti intermedi adombrano gli estremi » la quale ricorrendo, come è chiaro, alla intuizione di un raggio luminoso, costringerebbe per renderla esatta a introdurre in geometria qualcosa di corrispondente al concetto di luce e di raggio luminoso, il che non mi pare conveniente. L'utilità di tal definizione potrà manifestarsi al più in un insegnamento primitivo.

13. Per molto tempo ha fatto fortuna la definizione adottata dal Legendre, quella che « la retta (o meglio un segmento sua parte) è « il più corto cammino fra due punti », combinata coll'osservazione che per due punti passa una retta sola. Si volle appoggiare questa definizione al nome augusto di Archimede; ma (v. Höuel l. c.) si è forse presa come definizione quello che Archimede chiedeva di ammettere come proprietà della retta, o meglio come un concetto per avviarsi alla definizione di lunghezza di una curva.

Per quanto si dica, questa proposizione presa come definizione è quella che più facilmente si presta ad una critica severa. Ed infatti, pure prescindendo dalla circostanza che tal definizione non dice nulla sull' aspetto della retta (circostanza di nessun valore da un punto di vista puramente scientifico) interviene in essa il concetto di lunghezza che, generalmente, a quel punto non è ancora stabilito. — Si suole rispondere che il concetto di lunghezza è intuitivo e non può definirsi; ma di ciò ho già detto in generale (§ 3). Si potrebbe rendere più esatta l' idea, introducendo il postulato: « Per ogni linea esiste un concetto (ente) che è la sua lunghezza »: ma, anche in questo modo più corretto, come ci si può servire di quel postulato là dove si parla di *minima* lunghezza, se prima per la lunghezza non si definiscono le parole uguale, maggiore e minore relative a qualunque linea?

V'ha chi a questa obiezione non pensa, e così fanno i più; v'ha invece chi tenta rispondervi, come il Bonnel, il quale, avendo due linee da confrontare in lunghezza, suppone « di attribuire col pen- « siero ad una la rigidità assoluta, all'altra la flessibilità perfetta

(*) BONNEL, l. c.

« coll'inestendibilità necessaria per salvaguardare le sue proprietà di « lunghezza, portandole poi l'una sull'altra per giudicare quale so« pravanzi », Questo ultimo mezzo, prezioso in pratica per misurare gli oggetti materiali per i quali le parole flessibilità, rigidità, ecc. hanno un significato ben netto, è addirittura assurdo se usato in geometria fin da principio, quale processo indefinibile. Poichè infatti la forma è un attributo delle linee, se ad una linea si toglie la forma sua propria per cambiarla in un' altra, la linea cessa di essere *quella* linea, e quindi i ragionamenti non hanno più significato. Nè si opponga che togliendo la proprietà della forma si lascia alla linea quella della sua lunghezza; questo infatti equivale a dire che la linea nell'aspetto primitivo e nell'aspetto alterato ha la medesima lunghezza e così si viene unicamente a dare una definizione di lunghezze uguali in due linee delle quali la prima è nota e la seconda no, non avendo quello stendimento nessun significato senza il concetto di conservazione di lunghezza che è appunto quello che si deve definire. Questo stendimento delle linee si può considerare soltanto dopochè, in un modo o nell'altro, si sia già stabilito il concetto di lunghezza, potendosi allora dire che si distende o comunque si deforma una linea quando invece di essa se ne consideri un'altra non congruente, ma che abbia ugual lunghezza. Come ben si vede, sono dunque le idee di lunghezze e di lunghezze paragonabili fra loro che servono ad introdurre l'idea di linee flessibili, e non reciprocamente. È perciò chiaro, che, se si vuol fare intervenire la lunghezza nella definizione della retta, devesi prima introdurre quella in modo rigoroso indipendentemente da questa.

Tutto ciò stabilito è ancora da vedersi se il concetto di lunghezza, anche se rigorosamente introdotto, è davvero il più opportuno ad essere assunto per fondarvi la definizione di retta. Si dice che l'idea di lunghezza è inseparabile da quella di linea, e quindi deve ritrovarsi anche nella retta; ma da questo all'affidarle pienamente l'introduzione di tal ente vi è un passo notevole. E, invero, se la lunghezza è l'attributo comune delle linee, è proprio necessario fondare su essa la distinzione di una certa linea da tutte le altre? Ed allora perchè ciò dev'essere della sola retta e non di altre linee, p. es. del circolo? Ma v'ha di più; se si *definisce* la retta come il più breve cammino fra due punti, si presenta la domanda se fra tutte le linee cogli estremi in due punti *esiste* effettivamente una linea di cui la lunghezza sia la minima. È noto che data una classe di oggetti di cui siano conosciute le relazioni di uguale, maggiore e minore non sempre ve ne esiste uno che è il minore: così accade, p. es., nel sistema di tutte le corde di un circolo. Ne viene che l'esistenza, e così dicasi dell'unicità, di una linea di lunghezza minima fra due punti, sono due verità da ammettersi per postulato o da dimostrarsi con teoremi, il che ordinariamente non si fa, aggravando così le inesattezze della definizione. Non così, è vero, si comporta il Bonnel, il quale cerca di dimostrare quelle due proposizioni; ma è forza convenire che i suoi ragionamenti peccano per mancanza di rigore, a ristabilire il quale sarebbero necessari forse tanti postulati da rendere preferibile d'introdurre più semplicemente quello solo che ammette quell'esistenza e quell'unicità.

Concludendo, può dirsi che mentre il fatto che la retta è il più corto cammino fra due punti è una verità che deve appartenere al patrimonio della geometria, non è conveniente dare la definizione per mezzo di essa, tanto più se prima non si definisce in tutto il suo rigore il concetto di lunghezza, e non si ammette o si dimostra esattamente l'esistenza e l'unicità della linea di distanza minima (*).

14. Passo alle definizioni nelle quali la retta è data per mezzo di enti geometrici di ordine superiore ad essa o di proprietà meno salienti di quelle fin qui citate.

Del Leibniz (**) si ha una definizione del piano come « la superficie « che divide lo spazio in due parti simmetriche, » e poi della retta come « la linea del piano che ne divide la superficie in due parti « simmetriche ».

A questa s'uniformano alcuni autori più moderni: così la dà, p. es., il Clifford, (***) se si prescinde dalla forma più materiale, scusabile coll'indole dell'opera (del resto eccellente) in cui è inserita. Tale definizione, la cui esattezza dipende dall'esattezza con cui è

(*) Per lo sviluppo di tale concetto, che è possibile dare prima di quello di retta, vedi la mia Nota citata: *Il concetto di lunghezza e la retta.*

(**) Cfr. BALTZER. *Elementi di matematica*, trad. da L. CREMONA. — Genova, 1878, parte 4ª, § 1.

(***) CLIFFORD. L. c.

definito il piano, ha senza dubbio molti pregi, primo fra gli altri, quello di seguire per definire la retta il processo con cui si introducono comunemente gli enti geometrici, giacchè si sogliono definire prima le superficie poi le linee, e queste per mezzo di superficie di cui esse limitano le parti; ma ha anche il difetto, comune a tutte le definizioni che ancora ho da esporre, di non essere appropriata a dare da sè sola un'idea chiara della retta.

15. Più interessante, poichè legata ad un'epoca memorabile nella storia della geometria, è la definizione del Bolyai e del Lobatschewski, la quale si collega colle ricerche da cui ebbe origine la distinzione della geometria in euclidea e non euclidea. Essa si dà così (*). Definita la coppia di punti come figura invariabile, si genera una sfera col tener fermo un punto di una coppia e dare all'altro tutte le posizioni possibili. Si prendono poi le infinite coppie di sfere aventi centri fissi distinti e raggi variabili, ma eguali in ogni coppia; poi, movendo le figure collo scambiare i centri, si mostra che in tale movimento in ogni linea d'intersezione delle sfere di una coppia stanno fermi due punti. L'insieme di tutti questi punti immobili costituisce una linea tale che se di essa stanno fermi due punti, è immobile tutta. Questa linea e le consimili si dicono *rette*.

Tale definizione è evidentemente rigorosa, quando si abbia cura di supplire con postulati alle osservazioni che vi si riscontrano, fra cui sostanziale è quella che l'insieme dei punti immobili in quello scambio di centri sia una linea e non un altro ente. Essa in conclusione conduce al concetto di retta come linea immobile quando ne sono immobili due punti; ma invece che presentare questo concetto fin da principio con un postulato, lo presenta come teorema dimostrando l'esistenza della retta. Esso richiede certo un numero ristretto di imagini fondamentali, essendo le figure da cui si parte di natura elementare e facilmente definibili. Così pure pensa il Baltzer (**) per il quale « tra i luoghi geometrici non la retta ed il piano, ma la sfera « ed il circolo sono definibili in guisa che la loro possibilità non sia « sottoposta a dubbio alcuno ». Non ostante ciò è certo che nell'inse-

(*) V. p. es. FRISCHAUF. *Absolute Geometrie.* — Leipzig, 1876, 1. Buch.
(**) BALTZER. L. c., § 1, n. 5.

gnamento è più opportuno cominciare subito collo stabilire la retta, al che non si presta il metodo del Bolyai, il quale per altro, occorre ripeterlo, ha singolare valore scientifico.

16. Il Cassani (*) dà una definizione che s'informa a concetti simili, sebbene sotto aspetto alquanto diverso.

Egli pure parte dal concetto di coppia di punti: poi conclude l'esistenza (A, B, C), di terne regolari, tali cioè che siano uguali le tre coppie formate da $(A B)$, da (B, C), da (A, C), e dice essere una linea il luogo geometrico dei punti M tal che sieno uguali le tre coppie (MA), (MB), (MC): una simile linea non cambia posizione se ne stanno fermi due punti, e si chiama retta. Questa definizione è davvero ingegnosa, per quanto, come la precedente, l'eccessivo artifizio la renda inadattabile all'insegnamento.

Essa del resto sotto forma assai simile fu già proposta dal Fourier (**), il quale, cercando una definizione più appropriata di quella del Legendre, supponeva nello spazio tre punti fissi e prendeva una serie di punti di cui ciascuno distasse ugualmente da quei tre fissi, ottenendo una linea retta: talchè così poteva dirsi essere la retta una serie di punti di cui ciascuno è ugualmente distante da tre punti dati, con analogia con la sfera che è il luogo geometrico dei punti ugualmente distanti da uno dato, e col piano che è il luogo di quelli equidistanti da due punti dati. A tale definizione obiettava il Monge (nella discussione alla seduta dell'Accademia del 14 febbraio 1795) che la definizione è rigorosa, ma più complicata di quello che vuol definire. La proprietà che ha da servire di definizione ad una figura deve essere, è vero, una proprietà comune a tutti i punti della stessa figura; ma dev'essere scelta in modo da riuscire la più semplice, la più atta a far concepire la natura della figura. Così non sarebbe opportuno, p. e., definire il circolo come luogo geometrico dei vertici degli angoli retti i cui lati passano per due punti fissi. Una definizione deve essere tale, sopratutto in geometria, che essa faccia imagine. Tali

(*) CASSANI. *Giornale di Matematiche*, l. c..
(**) V. MATHESIS. V. 9, pag. 139.

le obiezioni di Monge, alle quali altro non credo occorra aggiungere per la critica della definizione di cui ci stiamo occupando.

17. Voglio finalmente fare semplice cenno di alcuni che definiscono certe figure geometriche come limite di certe altre. Oltre esser cosa molto delicata il dare tale definizione colla quale è facile cadere nell'uso di concetti di continuità sempre malagevoli a darsi in principio della geometria, non credo si debba usare tal metodo per le figure fondamentali geometriche, fra cui la retta, delle quali il concetto è bene sia più assoluto che si possa.

18. Da questo esame delle principali definizioni della retta io non mi permetto di trarre nessuna conclusione decisiva nella scelta di una di esse, sapendo come molto possano in questo argomento le vedute personali: solo credo osservare a modo di riassunto come, secondo me, la definizione euclidea, posta in forma chiara e rigorosa, abbia il massimo valore scientifico e molto ne abbia pure quella del Bolyai; ma che per la questione dell' insegnamento sia più utile ricorrere ad una definizione più descrittiva della retta, cioè, per ora, come la meglio stabilita, alla definizione della retta quale luogo geometrico di punti che sono immobili quando ne sono immobili due, o all' altro della linea di direzione costante, quando per altro si sarà pervenuti a stabilire il concetto di direzione senza ricorrere a quello di retta.

Torino, 10 settembre 1892.

RODOLFO BETTAZZI.

UNA FORMULA DI TRASFORMAZIONE PER *ARC. TG.*

Mediante la nota formula

$$\text{arc tg}\, p + \text{arc tg}\, q = \text{arc tg}\, \frac{p+q}{1-pq}$$

si riconosce essere:

$$2 \,.\, \text{arc tg}\, \frac{1}{2a} = \text{arc tg}\, \frac{4a}{4a^2-1} = \text{arc tg}\, \frac{1}{a} + \text{arc tg}\, \frac{1}{a\,.\,(4a^2+3)},$$

ossia:

$$(1)\qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a}=-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a(4a^2+3)}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2a}.$$

Mediante la ripetuta applicazione a sè medesima di questa notevole formula di trasformazione, si ottiene:

$$(2)\ \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a}=-\sum_{0\lambda}^{n-1}2^\lambda.\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2^\lambda.a(2^{2\lambda+2}a^2+3)}+2^n.\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2^n.a}.$$

Facendo crescere n indefinitamente ed osservando essere: $\lim_{n=\infty} 2^n.\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2^n.a}=\frac{1}{a}$, si deduce:

$$(3)\qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a}=\frac{1}{a}-\sum_{0\lambda}^{\infty}2^\lambda.\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2^\lambda.a(2^{2\lambda+2}a^2+3)}.$$

Questa può anche utilizzarsi per calcolare π in modo semplice ed elementare dopo d'avere osservato che la stessa formula, (3), dà immediatamente:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a}>\frac{1}{a}-\sum_{0\lambda}^{\infty}2^\lambda.\frac{1}{2^\lambda a(2^{2\lambda+2}a^2+3)}>\frac{1}{a}-\sum_{0\lambda}^{\infty}\frac{1}{2^{2\lambda+2}a^3},$$

ossia:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a}>\frac{1}{a}-\frac{1}{3a^3}.$$

Voghera, agosto 1892.

F. Giudice.

A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

(Continuazione, V. pag. 25 di questo Vol. e pag. 81, 113, 169 del Vol. VII).

IV.

Nei seguenti esempi si determinano le ragioni dei volumi poliedrici per i teoremi di Eudosso* e di Euclide senza ricorrere alle formole stereometriche.

Di un parallelepipedo (Tav. I, fig. 1ª) siano $A, A', B, B', C, C', D, D'$, le coppie dei vertici opposti ed $AB=a$, $AD=b$, $AC'=c$ gli spigoli diversi; dei quali prendansi i segmenti $AP=a_1$, $AQ=b_1$, $AR=c_1$ e con i lati PQ, QR, RP nelle faccie $ABCD$,

$ADB'C'$, $ABD'C'$ s' inscrivano i parallelogrammi PQP_0Q_0, QRQ_1R_1, RPR_0P_1; indi nelle faccie opposte $A'B'C'D'$, $A'D'BC$, $A'B'DC$ con i lati P_1Q_1, R_0Q_0, R_1P_0 s' inscrivano i parallelogrammi $P_1Q_1P_2Q_2$, $R_0Q_0R_2Q_2$, $R_1P_0R_2P_2$. I piani PQR, $P_0Q_0R_2$, $Q_1P_2R_1$, $P_1Q_2R_0$ troncano dagli angoli solidi A, C, B', D', tetraedri equivalenti alla sesta parte del parallelepipedo (a_1, b_1, c_1); onde resta un decaedro con sei faccie esagone e quattro trilatere, il cui volume è la differenza $(a, b, c) - \frac{2}{3}(a_1, b_1, c_1)$. Parimenti segando gli altri angoli solidi B, D, C', A' con i rispettivi piani PR_0Q_0, QP_0R_1, RP_1Q_1, $Q_2P_2R_2$ risulta un secondo decaedro che equivale ad $(a, b, c) - \frac{2}{3}(a - a_1, b - b_1, c - c_1)$. Nel caso di $a_1 : a = b_1 : b = c_1 : c = k$, essi hanno col parallepipedo AA' le ragioni $1 - \frac{2}{3}k^3$, $1 - \frac{2}{3}(1 - k)^3$; il primo decaedro per $k = 1$, ed il secondo per $k = 0$ riducansi ai tetraedri $A'C'BD$, $ACB'D'$ simmetrici rispetto al baricentro comune, ed eguali alla terza parte dell'esaedro AA'.

In un prisma a basi n-latere intersecando le faccie adiacenti due a due con piani paralleli al comune spigolo si ottiene un solido contenuto da $4n + 2$ faccie, delle quali n sono quadrilatere, $3n$ esagone e due n-latere.

Per esempio si consideri un parallelepipedo rettangolo v (fig. 2ª) con le dimensioni $AB = a$, $AD = b$, $AC' = c$; disegnati i quadrilateri $EFGH$, $LMPQ$, $RSTV$ omotetici diretti alle faccie $C'D'A'B'$, $C'D'BA$, $D'A'CB$ secondo la ragione k^2, si avranno $EF = LM = ka$, $FG = RS = kb$, $PM = VR = kc$. I lati FG, PM s' incontrino in Y punto dello spigolo $C'D'$; parimenti LM ed RS in Z su $D'B$ ed EF, VR in X punto di $D'A'$; ne risulteranno $FY = \frac{b}{2}(1 - k)$, $YM = \frac{c}{2}(1 - k)$, $MZ = \frac{a}{2}(1 - k)$. I piani $EFLM$, $FGSR$ si segheranno lungo la retta FZ, ed il mezzo I di FZ giacerà nel piano $MPVR$; le distanze del punto I dalle faccie del parallelepipedo AA' si esprimono con $\frac{a}{4}(1 - k)$, $\frac{b}{4}(1 - k)$, $\frac{c}{4}(1 - k)$; onde i lati convergenti dell' esagono

$EFIMLU$ sono eguali ad $FI = IM = \left(\frac{1-k}{4}\right).d$; dove d simboleggia la diagonale AA'. Il solido W racchiuso dalle faccie trapezie $C'D'FE$, $C'D'ML$, dall'esagono $EFIMLU$ e dai triangoli $FD'I$, MID', $EC'U$, $C'UL$ è doppio del tronco di prisma avente gli spigoli $C'D' = a$, $EF = ka$, $UI = C'D' - MZ = \frac{a}{2}(1-k)$ e per sezione retta la metà del triangolo FYM, la cui ragione al triangolo $AC'B'$ è $\left(\frac{1-k}{2}\right)^2$; onde $W = \frac{v}{2^4}(1-k)^2(1+k)$ e ripetendo lo stesso ragionamento per tutti gli altri spigoli dell'esaedro AA' troncati con piani ad essi paralleli, il poliedro che ne resta equivale a $v\left[1 - \frac{3}{4}(1-k)^2(1+k)\right]$. Facendo $k = 0$, il solido riducesi ad un dodecaedro romboidale, perchè le faccie divengono rombi con i lati pari ad $\frac{1}{4}d$; e ciascuno ha due vertici nei centri delle faccie contigue del parallelepipedo, e gli altri due nei mezzi delle congiungenti il baricentro di questo ai termini dello spigolo comune alle faccie medesime. E nel caso di $a = b = c$ i rombi sono tutti eguali fra loro e tangenti ad una sfera.

Anche l'*icositetraedro*, solido contenuto da 24 faccie quadrilatere, si può derivare dal parallelepipedo rettangolo. Si chiamino (fig. 3ª) O il centro di questo, ed OA, OB, OC i semiassi o le congiungenti O con i centri delle tre faccie contigue; l'esaedro $v = OBC'A \cdot O'A'CB'$ è l'ottava parte del parallelepipedo. Si disegni il triangolo FDE omotetico ad $A'B'C'$ per la ragione $OF : OA' = OE : OB' = OD : OC' = k$; conducansi i piani CFE, BFD, ADE segantisi due a due lungo le rette EI, FI, DI; i quadrilateri $CFIE$, $BFID$, $AEID$ limitano esternamente un volume nel triedro trirettangolo $OABC$ e sono le basi di piramidi col vertice comune O. I piani CFE, OAB s' intersecano per la retta $E'F'$ parallela ad EF; perchè dai triangoli simili CEB', OEE' oppure CFA', OFF' si deducono $OE' = \frac{k}{1-k}CB'$, $OF' = \frac{k}{1-k}CA'$, $F'E' = \frac{FE}{1-k} = \frac{k}{1-k}AB$; le rette AB, $F'E'$ essendo parallele ne consegue la OC' bisecare $F'E'$ nel punto C_0, cioè $OC_0 = C_0E' = \frac{k}{1-k}\,\frac{AB}{2}$.

I piani CFE, COC' s' incontrano per la retta CIC_0 e dai triangoli simili $CO'I$, OIC_0 determinati dalle parallele CO', OC_0 e dalle traversali OO', CC_0 si conchiude $OI : IO' = OC_0 : CO' = k : 2 - 2k$ o componendo $OI : OO' = k : 2 - k$. I tetraedri $OFBD$, $OFCE$, $OEAD$ sono equivalenti in virtù della proporzione $OFBD : OA'BC' = (OB : OB)(OD : OC')(OF : OA') = k^2$, e siccome $OA'BC' = \frac{1}{6}v$ si ottiene $OFBD = \frac{k^2}{6}v$. Delle surriferite piramidi quadrangole restano da determinarsi i tetraedri $OFDE$, $IFDE$, che hanno per somma la piramide costruita sulla base FDE ed un laterale spigolo equipollente ad OI (cioè della stessa lunghezza e direzione); paragonando questa al tetraedro descritto con la base $A'B'C'$ ed un laterale spigolo equipollente ad OO' si trova $OFDE + FDEI : OA'B'C' + A'B'C'O' = (FDE : A'B'C')(OI : OO') = k^3 : 2 - k$. Ora la retta OO' è divisa dal piano $A'B'C'$ nella ragione $2 : 1$; ne risulta $OA'B'C' = 2A'B'C'O' = \frac{v}{3}$, ovvero $OA'B'C' + A'B'C'O' = \frac{v}{3} + \frac{v}{6} = \frac{v}{2}$ e quindi $OFDE + FDEI = \frac{k^3}{2-k}\frac{v}{2}$. La somma delle tre piramidi quadrangole equivale a $3\,OFBD + OFDE + FDEI = \frac{k^2 v}{2-k}$; così l'icositetraedro e il parallelepipedo hanno i loro volumi nella ragione $k^2 : 2 - k$. E se abbiasi $OA = OB = OC = a$, le faccie quadrilatere $CFIE, \ldots$ si compongono di due triangoli isosceli con i lati $CE = CF$, $IE = IF$ e toccano una sfera avente il centro O ed il raggio pari a $\frac{ka}{\sqrt{3k^2 - 4k + 2}}$.

Le prime proposizioni del XIII libro euclideo si esprimono per l'eguaglianze

$$[1]\ \left(\frac{a}{2} + x\right) = 5\left(\frac{a}{2}\right), \qquad [2]\ (a + x) + (x) = 3(a),$$
$$[3]\ (a) + (a - x) = 3(x);$$

simboleggiando con x il segmento aureo di a e con la parentesi il quadrato descritto sulla racchiusa lunghezza; si provano mercè l'ipotesi $(a, x) + (x) = (a)$. Succedono le proprietà del pentagono regolare, e fra le quali sono ammirabili: 1° dividersi due diagonali l' in media ed estrema ragione e la parte maggiore l esser il lato del poligono; 2° detti x, a i lati del decagono e dell'esagono regolari iscritti nello stesso cerchio aversi la relazione $(l) = (a) + (x)$. Ora il medesimo ragionamento conduce alla simile $(l') = (a) + (x')$; significando l' ed x' i lati del pentagono e decagono regolari stellati; poichè nel circolo O (fig. 4ª) descritto col raggio a siano $AC = CB = x'$ le corde degli angoli $AOC = COB = \frac{3\pi}{5}$, e quindi $AB = l'$ la corda dell'angolo $BOA = \frac{4\pi}{5}$; tirato il raggio OD normale a BC segante AB in D risulta $AD = DO$, e per i triangoli equiangoli AOD, AOB si trae $(AB, AD) = (OA)$, e per i triangoli simili ABC, BDC si ha pure $(AB, DB) = (BC)$; onde con l'aggiungere queste due eguaglianze si conchiude $(AB) = (OA) + (BC)$.

Le regole di Euclide per iscrivere nella sfera i poliedri platonici sono le più eleganti che pensare si possono, e mi sembra opportuno il riassumerle. Un diametro $AA' = d$ (fig. 5ª) della sfera sia diviso in tre parti eguali $AI = II' = I'A'$, per il punto I si conduca la sezione normale al diametro, ed in questa s' iscriva il triangolo equilatero BCD; il tetraedro avente i vertici nei punti A', B, C, D è regolare a motivo di $(A'B) = (BC) = 3(BI) = \frac{2}{3}(d)$. Tirando per gli stessi punti A, B della circonferenza massima ABA' i piani perpendicolari alla corda AB e nelle sezioni sferiche iscrivendo i quadrati $ACB'D$, $A'C'BD'$, i loro otto vertici a due a due opposti sono i vertici dell'esaedro regolare e si trova $(AB) = (AC) = \frac{1}{2}(AB') = \frac{1}{3}(d)$. I triangoli equilateri BCD, $B'C'D'$ risultano simmetrici rispetto al centro O e trisecano AA'; in un piano ad essi parallelo le proiezioni ortogonali dei loro vertici cadono in quelli di un esagono regolare; di cui il lato è medio proporzionale fra AI ed IA'.

L'ottaedro regolare si costruisce inscrivendo il quadrato $CBC'B'$ (fig. 6ª) in una circonferenza massima c e menando i piani per ciascun lato ed i centri sferici A, A' di c; si trova $(AC) = (CB') = \frac{1}{2}(d)$. Le faccie sono simmetriche due a due rispetto al centro O della sfera come per esempio ABC, $A'B'C'$ e distano di un segmento pari al lato del quadrato iscritto nel cerchio minore ABC; le loro proiezioni ortogonali sopra un piano ad esse parallelo sono due triangoli equilateri iscritti nella circonferenza ABC e tali che i vertici dell'uno sono i mezzi degli archi sottesi dai lati dell' altro. I due solidi esaedro ed ottaedro regolare sono correlativi; e se ρ indica il raggio del cerchio circoscritto ad una loro faccia, si dimostra i quadrati dei raggi delle sfere iscritta e circoscritta valere $\frac{1}{2}(\rho)$ e $\frac{3}{2}(\rho)$.

(Continua).

G. Bellacchi.

TEMI D'ESAMI DI MATEMATICA IN SCUOLE DELLA DANIMARCA

(1888-1891).

(Dall'opuscolo: *Matematiske Eksamenopgaver. Udgifne af P. T. Foldberg. Andet Hefte. Kjobenavn 1892*) (*).

1. Costruire un triangolo eguale ad un triangolo dato per modo che ogni lato del triangolo cercato tocchi un circolo dato. Ogni lato del triangolo cercato deve avere il relativo circolo corrispondente e il vertice ad esso opposto da parti contrarie.

2. Con $a_1\ a_2\ a_3 \ldots . a_{n-1}\ a_n \ldots .$ s' indichi una serie di numeri positivi di cui ciascuno è medio proporzionale fra i due precedenti. Dimostrare le formole

$$a_n \sqrt{a_{n-1}} = a_2 \sqrt{a_1} \qquad a_n = a_2^{\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]} \cdot a_1^{\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]}$$

ed esprimere $\sqrt[n]{a_1\ a_2 \ldots . a_n}$ in funzione di $a_1\ a_2$ e n. A qual limite tendono

$$\sqrt[n]{a_1\ a_2 \ldots . a_n} \quad \text{e} \quad a_n$$

quando n cresce indefinitamente?

3. Calcolare il valore di $\cos \operatorname{tg} \log \pi$ e quello di $\operatorname{sen} \sqrt{\cos \sqrt{\log \pi}}$.

4. Mostrare che è $\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right)=9$ quando $x+y+z=0$.

5. Risolvere il sistema

$$zy - y^2 = 5 + 5z - 6y \qquad zy - z^2 = -10 + 3z - 5y.$$

(*) Dobbiamo questi temi tradotti alla cortesia del Sig. Prof. G. Loria. — *N. d. Red.*

6. Nei polinomii

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + y$$
$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x + z$$

attribuire a y e z valori tali che essi abbiano comune un fattore di 2° grado.

7. Due sfere di raggi R e r si segano ortogonalmente. Trovare il volume della parte che esse hanno comune.

8. Dati in un piano tre punti A, B, C e una retta per C; determinare su questa un punto da cui AB e BC siano visti sotto angoli eguali.

9. Due triangoli ABC e $A'B'C'$ e una retta r sono dati in un piano, e AB è parallelo ad $A'B'$. Trovare due punti D e D', di cui D su r, tali che le rette DA, DB, DC risultino parallele rispettivamente a $D'A'$, $D'B'$, $D'C'$.

10. Dati due circoli di raggi a, b, tracciare una parallela alla linea dei centri su cui i dati circoli determinino corde di dato rapporto. Entro quali limiti dev'essere compreso il rapporto delle corde affinchè il problema sia possibile?

11. In un triangolo acutangolo ABC è inscritto un triangolo $A_1 B_1 C_1$ per modo che $A_1 B_1 C_1$ stanno rispettivamente sui lati AB, BC, CA e che i lati A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 sono perpendicolari a AB, BC, CA. Esprimere i lati di $A_1B_1C_1$ in funzione dei lati a, b, c di ABC.

12. In un triangolo acutangolo i lati a, b, c sono opposti rispettivamente agli angoli A, B, C. Disegnare un nuovo triangolo avente per lati

$$a \cos A\,, \qquad b \cos B\,, \qquad c \cos C\,.$$

Dimostrare come gli angoli del nuovo triangolo rispettivamente opposti a questi lati si possono esprimere, il primo in funzione del solo A, il secondo del solo B, il terzo del solo C.

13. In un circolo è inscritto un triangolo i cui lati sono il lato del pentagono inscritto, la corda supplementare e un diametro; la figura ruota attorno a quel diametro; trovare il rapporto dei volumi generati dal triangolo e dal segmento ($<$ di un semicerchio) sotteso dal lato del pentagono.

14. Risolvere il sistema

$$x^2 + 3xy = 4a^2 \qquad (\sqrt{y} - \sqrt{x})(2a - x) = 3(x + y)\sqrt{x}\,.$$

15. In un circolo inscrivere un triangolo, conoscendo di un lato lunghezza e direzione e della bisettrice dell'angolo opposto un punto.

16. Dimostrare che in qualunque triangolo

$$\frac{b - 2a\cos C}{a \operatorname{sen} C} + \frac{c - 2b\cos A}{b \operatorname{sen} A} + \frac{a - 2c\cos B}{c \operatorname{sen} B} = 0\,.$$

17. Se p è un numero primo e $0 < n < p$ il m. c. d. di $x^p - 1$ e $x^n - 1$ è $x - 1$; se α è una radice diversa da 1 di $x^p - 1 = 0$, $\alpha\, \alpha^2 \ldots\, \alpha^p$ saranno tutte radici; trovare la somma delle loro potenze m^{me}.

18. Due cerchi di raggi R e r si tagliano sotto l'angolo v. Trovare il volume compreso entro la superficie generata dalla porzione di tangente comune

ai due cerchi limitata dai punti di contatto quando la figura rota attorno alla retta dei centri.

19. In un triangolo acutangolo un'altezza divide il lato a nei segmenti a_1 e a_2 e l'angolo opposto A nelle parti A_1 e A_2. Costruire il triangolo conoscendo quell'altezza e le differenze $a_1 - a_2$ e $A_1 - A_2$.

20. Costruire un triangolo ABC simile a uno dato per modo che AB e AC tocchino rispettivamente in B e C due dati circoli. Quante soluzioni si ottengono se i dati circoli sono esterni l'uno all'altro?

21. In un circolo di raggio r è inscritto un poligono regolare di $2n$ lati. A, B, C ne sono tre vertici consecutivi. K è il vertice opposto ad A. Per K si conduce una retta che incontri in un punto P la retta AB (non il suo prolungamento). KP divide il poligono in due altri le cui aree stanno fra loro come p a q $(p > q)$. In quale rapporto quella retta divide il perimetro del $2n$-gono?

Nella figura risultante delle rette KB, KC e dall'arco BC si può inscrivere un cerchio tangente a queste tre linee. Come si può trovare pel raggio di questo cerchio un'espressione comoda pel calcolo con logaritmi? – Quale è il volume generato dalla detta figura KBC quando il circolo rota attorno il diametro AK?

22. Risolvere il sistema

$$\begin{gathered} x + y + z = 1 \\ x \operatorname{tg} A + y \operatorname{tg} B + z \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} D \\ x \operatorname{tg}^2 A + y \operatorname{tg}^2 B + z \operatorname{tg}^2 C = \operatorname{tg}^2 D. \end{gathered}$$

Quindi calcolare i coefficienti dell'equazione cubica avente per radici x^2, y^2, z^2.

23. Trovare i valori reali di x e y soddisfacenti l'equazione

$$y\sqrt{2} - x\sqrt{-3} = \left(\frac{x}{2} + y\sqrt{-b}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

24. Dimostrare per induzione che

$$(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

25. Se x è intero $x^7 - x$ è divisibile per 42.

26. L'asse di un cono rotondo passa pel centro della sfera ed il suo centro dista da questo centro del diametro. Conoscendo che l'area del pezzo di cono esterno alla sfera è doppia dell'area del pezzo interno, trovare l'angolo al vertice del cono.

27. Descrivere un cerchio di dato raggio che passi per un punto dato e tagli su una retta data un segmento di lunghezza data.

28. Date le equazioni

$$p + q = a, \quad px + qy = b, \quad px^2 + qy^2 = c, \quad px^3 + qy^3 = d$$

trovare un'equazione quadratica avente per radici x, y e i cui coefficienti siano funzioni di p o di q.

29. Dato un triangolo ABC, trovarne un altro $A_1B_1C_1$ equivalente o tale che sia ang. $A_1 =$ ang. A, $A_1B_1 + A_1C_1 =$ retta data.

30. Dati su una retta quattro punti $A\,B\,P\,Q$ trovarne un quinto tale che

$$\frac{A\,X}{B\,X} = \frac{P\,X}{Q\,X}.$$

31. È dato un triangolo $A\,B\,C$ con due punti P e Q posti sul lato $A\,B$. Trovare un altro triangolo $a\,b\,c$ tale che a stia in $B\,C$ e b in $C\,A$, che $a\,b$ sia parallelo ad $A\,B$, $b\,c$ passi per P e $a\,c$ per Q, e che finalmente i lati $a\,c$ e $b\,c$ abbiano fra loro un dato rapporto. Come si può risolvere questo problema se, invece di questo rapporto, è dato il rapporto delle mediane relative ai lati $a\,c$ e $b\,c$?

32. Se $\alpha\,\beta\,\gamma$ sono le radici dell'equazione $x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0$ ed m è un numero dato, calcolare $(m - \alpha^2)\,(m - \beta^2)\,(m - \gamma^2)$ in funzione di a, b, c.

33. In quanti modi n cose possono distribuirsi in due gruppi?

34. Un tetraedro regolare è inscritto in una sfera di raggio r. Una seconda sfera ha il centro in un vertice del tetraedro e passa per gli altri tre. Trovare l'area ed il volume del solido comune alle due sfere.

35. Costruire un triangolo $A\,B\,C$ di cui sono date l'altezza e la bisettrice uscenti da A nonchè il rapporto in cui quell'altezza divide il lato a.

36. Trovare quale relazione deve passare fra i coefficienti dell'equazione

$$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

affinchè una radice sia media proporzionale fra le altre due. Supposta soddisfatta, esprimere le radici in funzione di a e c.

37. $\dfrac{y_{n-1}}{z_{n-1}}$ e $\dfrac{y_n}{z_n}$ sono due ridotte consecutive di una frazione continua con i quozienti incompleti $a_0\,a_1\,\ldots\,a_{n-1}\,a_n$. Dimostrare che $\dfrac{y_n}{y_{n-1}}$ e $\dfrac{z_n}{z_{n-1}}$ possono svilupparsi in frazioni continue aventi entrambe per quozienti incompleti $a_n\;a_{n-1}\ldots$ in quest'ordine. Come finiscono nei due casi le due serie di quozienti incompleti?

38. In un cono di rivoluzione avente l'angolo al vertice di 90° sono inscritte, dalla stessa parte del vertice, due sfere fra loro tangenti e di cui la linea dei centri è a. Trovare il volume compreso fra il cono e le due sfere.

39. Sono dati un circolo ed un punto A. Costruire un triangolo $A\,B\,C$ di cui si conosca l'angolo B ed il lato $A\,C$, per modo che $B\,C$ tocchi in B il dato circolo.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

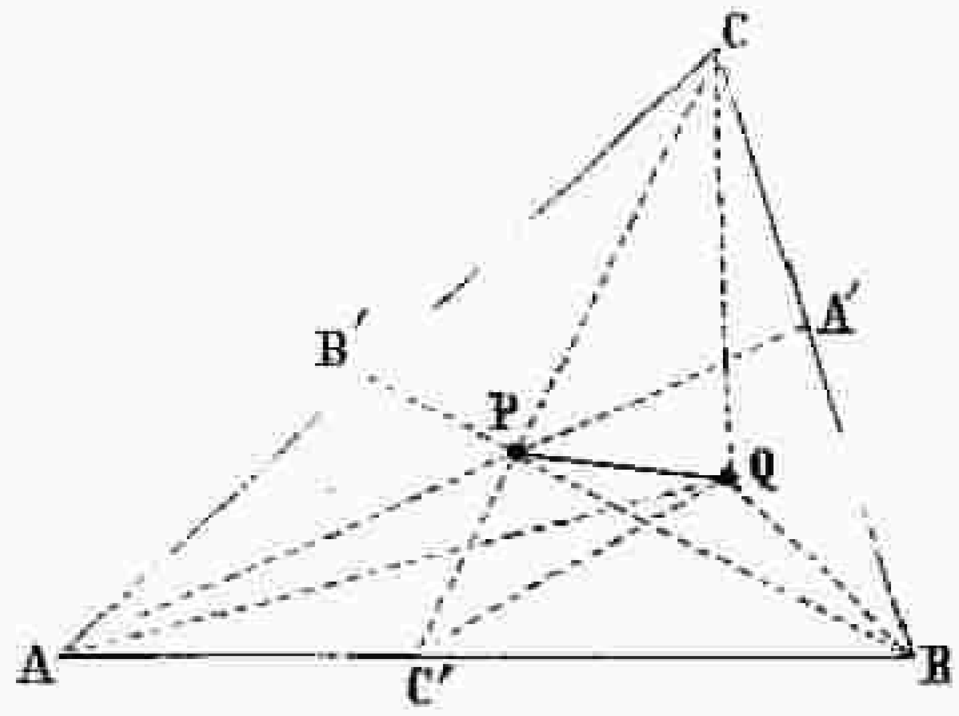
Distanze di punti notevoli del triangolo. — Il Sig. Thiry in due sue pubblicazioni (*) calcola le distanze di molti punti notevoli del triangolo dai vertici e fra loro; le formole di cui si serve si possono rendere affatto generali così da essere atte a dare le distanze dai vertici e fra loro di tutti i

(*) Vedi riassunto in questo *Periodico*, anno VI, pag. 196 e a. VII, p. 28.

punti del piano del triangolo, noti i rapporti che le rette che li proiettano dai vertici sui lati opposti determinano su di questi.

1. Sia ABC il triangolo, e sieno a, b, c, Δ rispettivamente le misure di BC, CA, AB, ABC.

Essendo P un punto interno od esterno al triangolo, ed AA', BB', CC' le rette che lo proiettano da A, B, C su BC, CA, AB, pongo



$$\frac{AC'}{C'B} = m, \quad \frac{BA'}{A'C} = p, \quad \frac{CB'}{B'A} = q \quad (1)$$

e prendo m, p, q positivi o negativi secondochè A', B', C' cadono sui lati o sui loro prolungamenti.

2. Dalle (1) componendo si ha

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{m+1}{m}, \quad \frac{AB}{C'B} = m+1, \text{ ecc. } (2);$$

dal triangolo $CC'B$ segato dalla AA' si ha per il teorema di Menelao $\frac{CP}{PC'} \cdot \frac{C'A}{AB} \cdot \frac{BA'}{A'C} = -1$, donde per le (1) (2) risulta la prima delle formole seguenti e in modo analogo le altre

$$\frac{CP}{PC'} = \frac{m+1}{mp} = q(m+1), \quad \frac{AP}{PA'} = m(p+1), \quad \frac{BP}{PB'} = p(q+1) \quad (3).$$

3. Dalle (3) componendo si ottiene

$$\frac{CC'}{CP} = \frac{mp+m+1}{m+1} \text{ ecc.}, \quad \frac{CC'}{PC'} = \frac{mp+m+1}{mp} \text{ ecc.} \quad (4),$$

donde per le relazioni di Stewart

$$\overline{CC'}^2 = [(1+m)\,m\,a^2 + (1+m)\,b^2 - m\,c^2] \div (1+m)^2, \quad \text{ecc.} \quad (5)$$

si ricava

$$\left.\begin{aligned} CP^2 &= [(1+m)\,m\,a^2 + (1+m)\,b^2 - m\,c^2] \div (mp+m+1)^2 \\ AP^2 &= [(1+p)\,p\,b^2 + (1+p)\,c^2 - p\,a^2] \div (pq+p+1)^2 \\ BP^2 &= [(1+q)\,q\,c^2 + (1+q)\,a^2 - q\,b^2] \div (qm+q+1)^2 \end{aligned}\right| \quad (6)$$

che danno le distanze di P dai vertici del triangolo.

4. Sia Q un altro punto qualunque interno od esterno ad ABC. Dal triangolo $CC'Q$, per il teorema di Stewart, si ha

$$PQ^2 = \frac{CP}{CC'} \cdot QC'^2 + \frac{PC'}{CC'} \cdot QC^2 - \frac{PC'}{CC'} \cdot \frac{CP}{CC'} \cdot CC'^2;$$

dal triangolo AQB si ha pure

$$QC'^2 = \frac{m}{m+1} \cdot QB^2 + \frac{1}{m+1} \cdot QA^2 - \frac{m}{m+1}\,\frac{1}{m+1} \cdot c^2,$$

per la quale e per le relazioni (4), (5) la precedente diviene con facili trasformazioni

$$PQ^2 = \frac{QA^2 + m\,.\,QB^2 + mp\,.\,QC^2}{1+m+mp} - m\,\frac{mp\,.\,a^2 + p\,.\,b^2 + c^2}{(mp+m+1)^2} \quad (7).$$

Mediante la (7) e la (6) si potranno così calcolare le distanze di punti qualunque interni od esterni ad ABC, dati i rapporti corrispondenti ad essi.

La (7) si riduce a quella trovata dal Sig. Thiry per il punto $K^{(n)}$ ponendovi

$$m = \frac{b^n}{a^n}, \qquad p = \frac{c^n}{b^n}, \qquad q = \frac{a^n}{c^n}.$$

Se Q è il circumcentro, la (7) diventa

$$PO^2 = R^2 - m\,\frac{mp\,.\,a^2 + p\,.\,b^2 + c^2}{(mp+m+1)^2} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

la quale si presta a calcolare assai facilmente tutte le distanze $OK^{(n)}$, $O\Omega$, $O\Omega'$, OH, ecc., dove Ω, Ω', H, ecc. hanno il solito significato.

Se P va in A' la (7) dà

$$A'Q^2 = \frac{QB^2 + p\,QC^2}{1+p} - \frac{p\,.\,a^2}{(p+1)^2} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

e se Q va in C', la (9) dà

$$A'C'^2 = \frac{mp\,.\,a^2 + p\,.\,b^2 + c^2}{(m+1)(p+1)} - \frac{mc^2}{(m+1)^2} - \frac{pa^2}{(p+1)^2} \quad (10)$$

che serve a calcolare le distanze fra i piedi delle mediane, delle bisettrici, delle altezze, ecc..

Se Q va su BC, la (9) dà la distanza di due punti di BC

$$A'Q = a\,\frac{p-p'}{(p+1)(p'+1)} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

ove p, p' sono i rapporti secondo cui A', Q dividono BC.

5. Se a Q corrispondono i rapporti m', p', q' si ha per le (6)

$$CQ^2 = [(1+m')m'a^2 + (1+m')b^2 - m'c^2] \div (m'p' + m' + 1)^2, \quad \text{ecc.}$$

e se P, Q sono in linea retta con C, essendo $m = m'$, si ha

$$CQ^2 = [(1+m)m\,a^2 + (1+m)b^2 - mc^2] \div (mp' + m + 1)^2$$

onde

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{mp' + m + 1}{mp + m + 1}$$

da cui decomponendo

$$\frac{PQ}{CQ}=\frac{m(p-p')}{mp+m+1}, \quad \text{ossia} \quad PQ=CQ\,.\frac{m(p-p')}{mp+m+1} \qquad (12).$$

Se P, Q sono punti armonicamente associati e quindi $p'=-p$, la (12) diviene

$$PQ=CQ\,.\frac{2mp}{mp+m+1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13).$$

Permutando circolarmente fra m, p, q e fra m', p', q' si hanno le distanze fra punti P, Q allineati con A, con B.

6. Farò alcune applicazioni delle formole (7), (8), (13), che credo nuove.

I. Indicando con K_1, K_2, K_3 i punti armonicamente associati a K (punto di Lemoine), cioè i vertici del triangolo circoscritto al cerchio ABC nei punti A, B, C dalla (13) si ha

$$K_1K_2=\frac{2abc^3}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}=\frac{c}{2\cos A\ \cos B}, \quad \text{ecc.}$$

e

$$K_1K_2+K_2K_3+K_3K_1=\frac{2abc\,.\,16\,\Delta^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}=$$
$$\frac{4\,\Delta^2}{abc\cos A\ \cos B\cos C}=\frac{\Delta}{R\cos A\ \cos B\cos C}=\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{2\cos A\cos B\cos C}.$$

II. Indicando con $\alpha(P)$ la quantità indipendente da Q

$$m\,\frac{mp\,.\,a^2+p\,.\,b^2+c^2}{(mp+m+1)^2}=R^2-PO^2=-\text{ potenza di } P \text{ rispetto al circumcerchio,}$$

si ottiene

$$\alpha(\Omega)=\alpha(\Omega')=\frac{a^2b^2c^2}{\Sigma a^2b^2}=4R^2\,\text{sen}^2\omega \quad (\omega \text{ angolo di Brocard}), \text{ onde si ha}$$

$$Q\Omega^2=\frac{\Sigma(c^2a^2\,.\,QA^2)-a^2b^2c^2}{\Sigma a^2b^2},$$

$$Q\Omega'^2=\frac{\Sigma(a^2b^2\,.\,QA^2)-a^2b^2c^2}{\Sigma a^2b^2}, \quad Q\Omega^2-Q\Omega'^2=\frac{\Sigma a^2\,.\,QA^2(c^2-b^2)}{\Sigma a^2b^2}.$$

III. Indicando con N, N_1, N_2, N_3 il punto di Nagel e i punti affini posti rispettivamente negli angoli A, B, C; con r, r_1, r_2, r_3 i raggi dei cerchi inscritti ed ex-iscritti; con s il semiperimetro di ABC, si ha

$$\alpha(N)=\frac{1}{s^2}\left[a^2(s-b)(s-c)+b^2(s-c)(s-a)+c^2(s-a)(s-b)\right]=4r(R-r)$$

$$\alpha(N_1)=\frac{1}{(s-a)^2}\left[a^2(s-b)(s-c)-b^2.s.(s-b)-c^2(s-c).s\right]=-4r_1(R+r_1),$$

ecc.

$$ON=R-2r, \qquad ON_1=R+2r_1, \quad \text{ecc.},$$
$$HN^2=4R(R-2r), \qquad HN_1^2=4R(R+2r_1), \quad \text{ecc.}$$

$$\Omega N^2 = \frac{a^4 b^2 (s-c) + b^4 c^2 (s-a) + c^4 a^2 (s-b)}{s \,.\, \Sigma a^2 b^2} - 4r(R-r)$$

$$\Omega N_1^2 = \frac{b^4 c^2 \,.\, s - c^4 a^2 (s-c) - a^4 b^2 (s-b)}{(s-a)\, \Sigma a^2 b^2} + 4r_1 (R+r_1)\,, \quad \text{ecc.}$$

$$\Omega' N^2 = \frac{a^2 b^4 (s-c) + b^2 c^4 (s-a) + c^2 a^4 (s-b)}{s \,.\, \Sigma a^2 b^2} - 4r(R-r)$$

$$\Omega' N_1^2 = \frac{b^2 c^4 \,.\, s - c^2 a^4 (s-c) - a^2 b^4 (s-b)}{(s-a) \,.\, \Sigma a^2 b^2} + 4r_1 (R+r_1)\,, \quad \text{ecc.}$$

$$K N^2 = \frac{2s \,.\, \Sigma a^2 b^2 - 2abc\, \Sigma ab}{s \,.\, \Sigma a^2} - \frac{3a^2 b^2 c^2}{(\Sigma a^2)^2} - 4r(R-r)\,.$$

Luglio, 1893.

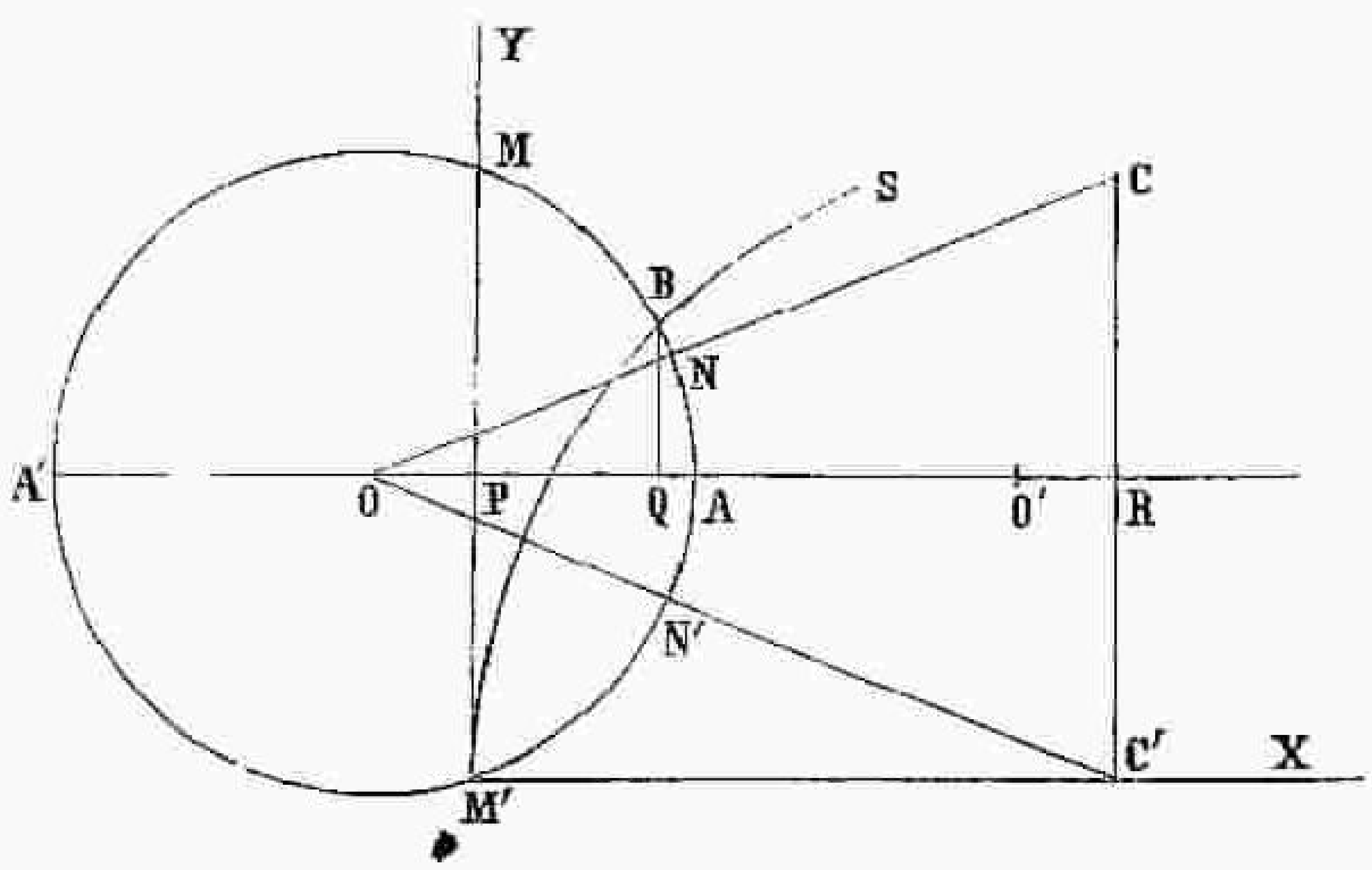
F. Ferrari.

In seguito di un esercizio proposto dal Sig. Prof. Bellacchi. — 1. A pag. 194 del vol. VII di questo *Periodico* si trova risoluta la seguente quistione proposta dal Sig. Bellacchi:

« Divisa la corda AB di un arco in tre parti eguali $AI = IE = EB$ e condotti i raggi OIM, OEN, dimostrare che il coseno dell'angolo medio, cioè $\cos IOE = \dfrac{4 + 5\cos\alpha}{5 + 4\cos\alpha}$, essendo angolo $AOB = \alpha$ l'angolo al centro ».

Scopo della presente nota è di dimostrare: 1° Che l'arco che ha quel coseno, si può costruire direttamente sul cerchio. — 2° Che quell'arco si presta ad un metodo *diretto* di approssimazione per un vecchio problema. — 3° In che modo dato un arco α, per tutti gli archi inferiori si può dare al coseno quella forma.

2. Sia A l'origine degli archi ed M l'estremo di un arco qualunque α non



maggiore di 90°. Si abbassi dal punto estremo M la normale MP sul raggio OA e si prolunghi questa sino al suo incontro col cerchio in M'. Si conduca la retta $M'X$ parallela al diametro AA' e preso su questa il segmento $M'C' = AA'$ si descriva col centro C' e col raggio $C'M'$ l'arco $M'BS$. Il punto B in cui quest'arco incontra di nuovo il cerchio dato sarà sull'arco AM.

Infatti per essere $A'AC'M'$ un parallelogrammo, $C'A = M'A'$ epperò $C'A < C'M'$; è poi $C'M > C'M'$, dunque i punti A e M sono l'uno interno l'altro esterno al cerchio $M'BS$, il cui raggio è $C'M'$. Poniamo $OP = a$, $MP = b$ l'equazione del cerchio dato di centro O e di raggio r riferita agli assi ortogonali $M'X$, $M'MY$ sarà

$$(x + a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

e quella del cerchio di centro C' e di raggio $C'M' = 2r$

$$[1] \quad (x - 2r)^2 + y^2 = 4r^2.$$

Sviluppando e sottraendo, posto anche $r = 1$, si ottiene per equazione della corda comune $y = \frac{2 + a}{b} x$ e sostituendo questo valore nella [1] si ha l'equazione

$$x^2 + \frac{x^2}{b^2}(2 + a)^2 - 4x = 0$$

che è soddisfatta dai valori $x = 0$, $x = \frac{4b^2}{4a + 5}$ e quindi

$$[2] \quad OQ = a + x = \frac{5a + 4}{4a + 5}$$

che è il coseno dell'arco AB.

3. Si congiunga il centro O coll'altro C'. Il punto N' in cui questa congiungente taglia l'arco AM' sarà il punto medio dell'arco BM' ed anche si avrà $AN' = \frac{1}{2} MB$, perchè $AN' = AM' - N'M' = MA - BN' = MA - (BA + AN')$ e quindi $2AN' = MB$.

Portato l'arco AN' in senso positivo AN, sarà sempre $AN < AB$. Infatti $\operatorname{tang} AN = \frac{b}{a + 2}$, $\operatorname{tang} AB = \frac{3b}{5a + 4}$ ed essendo $a < 1$, si ha

$$\frac{1}{5a + 4}\left(= \frac{1}{3a + 4 + 2a}\right) > \frac{1}{3a + 6} \quad \text{ossia} \quad \frac{3}{5a + 4} > \frac{1}{a + 2}.$$

Inoltre i due archi AB e AN tendono a diventare eguali quanto più diventa piccolo l'arco α perchè si ha

$$\operatorname{tang}(AB - AN) = \frac{2(1 - a)\sqrt{1 - a^2}}{14a + 2a^2 + 11}$$

e posto $a = 1 - \lambda$

$$\operatorname{tang}(AB - AN) = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}\, 2\sqrt{2 - \lambda}}{27 - 18\lambda + 2\lambda^2},$$

quantità che va a zero con λ.

Dalle relazioni trovate $AN < AB$, $AN = \frac{1}{2} MB$ resulta che l'arco NB è sempre positivo ed è trisecato dallo stesso punto X che triseca l'arco dato α, per essere $AX - AN = NX = \frac{1}{3} AM - AN = \frac{1}{3}(3AN + BN) - AN = \frac{1}{3} BN$; sicchè ripetendo la stessa operazione grafica sull'arco $NB = \alpha'$ si otterranno due nuovi punti N' e B' che si avvicineranno di più a quello X e determineranno un terzo arco $N'B'$ che sarà pure trisecato dal punto X; si opererà di nuovo al modo stesso sull'arco $N'B'$ e così via via. Si avranno per tal modo due classi di punti

$$\begin{array}{lllll} (B) & B & B' & B'' & B''' \ldots\ldots \\ (N) & N & N' & N'' & N''' \ldots\ldots \end{array}$$

che soddisferanno alle seguenti condizioni:

1° I punti della classe (N) saranno tutti superiori a quelli della classe (B).

2° Quelli della classe (N) saranno disposti in ordine crescente, e quelli della classe (B) in ordine decrescente.

3° I punti dell'una e dell'altra classe saranno in numero infinito.

4° Mai un punto della classe (N) potrà coincidere con uno della classe (B), nè essere compreso fra due della classe (B) e viceversa.

4. Per passare dall'arco AM a quello NB, e da questo al successivo $N'B'$, ecc. non sono necessarie tutte le linee della figura; la costruzione è assai semplice. Osserviamo sulla figura che i punti O, N', C' essendo in linea retta, il cerchio che ha per centro N' e passa per M' passerà anche per B. Ciò posto ecco la costruzione. Si prenda sul diametro prolungato $OO' = AA'$ e si costruisca il quarto vertice C del parallelogrammo $MOO'C$ sarà C simmetrico di C' rispetto la retta AA' e condotta la retta OC questa determinerà il punto N; si porti ora in senso negativo $AN' = AN$, $AM' = AM$ e con centro in N' si descriva un cerchio passante per M', questo determinerà B; così si avrà con poche intersezioni l'arco NB; allo stesso modo si opererà su questo per avere il successivo $N'B'$, ecc.

Diciamo θ questa costruzione grafica per la quale da un arco si passa al successivo e dimostriamo che presa una frazione μ piccola a piacere si potrà determinare il numero n delle volte che si dovrà ripetere l'operazione θ perchè l'errore sia $< \mu\alpha$.

Si ha infatti per l'errore NX:

$$NX = AX - AN = \frac{\alpha}{3} - \text{arc sen} \frac{b}{\sqrt{5 + 4a}},$$

e sostituendo al seno l'arco

$$NX < \frac{\alpha}{3} - \frac{b}{\sqrt{5 + 4a}}.$$

Ora essendo a una frazione si avrà a più forte ragione

$$NX < \frac{1}{3}(\alpha - b),$$

ma la differenza fra l'arco e il suo seno è noto essere minore del sesto del cubo dell'arco, quindi

$$NX < \frac{1}{3}\,\frac{1}{6}\,\alpha^3 \qquad \text{e} \qquad NB(=3NX) < \frac{1}{6}\,\alpha^3 .$$

Perciò indicando gli archi NX colla lettera ε e quelli NB colla lettera α, si avrà

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\,\alpha^3, \qquad \alpha_1 < \frac{1}{6}\,\alpha^3$$

e ripetendo su α_1 l'operazione θ:

$$\varepsilon_2 < \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\,\alpha_1^{\,3}, \qquad \alpha_2 < \frac{1}{6}\,\alpha_1^{\,3}$$

e ponendo in queste in luogo di α_1 il valore maggiore $\frac{1}{6}\,\alpha^3$ sarà a più forte ragione

$$\varepsilon_2 < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^4 \alpha^9, \qquad \alpha_2 < \left(\frac{1}{6}\right)^4 \alpha^9,$$

applicando su α_2 l'operazione θ e così di seguito si avrà

$$\varepsilon_3 < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{13} \alpha^{27}, \qquad \alpha_3 < \left(\frac{1}{6}\right)^{13} \alpha^{27}, \quad \text{ecc.}$$

e in generale

$$\varepsilon_n < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3^n-1}{2}} \alpha^{3^n}, \qquad \alpha_n < \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3^n-1}{2}} \alpha^{3^n}.$$

Sicchè per determinare il numero n perchè sia $\varepsilon_n < \mu\alpha$, essendo μ una frazione piccola a piacere, basterà porre:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3^n-1}{2}} \alpha^{3^n-1} = \mu \qquad \text{ossia} \qquad \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha^2}{6}\right)^{\frac{3^n-1}{2}} = \mu,$$

da cui

$$n = \frac{\log\left(2\,\dfrac{\log 3\mu}{\log\dfrac{\alpha^2}{6}} + 1\right)}{\log 3}$$

e prendere per n l'intiero subito superiore. Così ad esempio preso $\alpha = 1$ e $\mu = 0{,}001$ si trova $n = 1{,}8$ cioè per l'arco eguale al raggio, si ha l'errore minore di un millesimo ripetendo l'operazione θ due volte. Per un arco α a piacere sul cerchio, si calcoli n per un arco qualunque maggiore e di valor numerico arbitrario $< \frac{\pi}{2}$; il valore che risulta sarà vero per α.

La dichiarata costruzione θ ha questo di singolare che è *diretta* cioè indipendente da ogni estranea divisione ed è geometricamente *completa* per sè.

5. Se si prende $M'C$ non più eguale a $2r$ ma eguale a p volte r si trova collo stesso processo

$$[3] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \cos AB = \frac{(p^2+1)a+2p}{2pa+(p^2+1)}$$

dove a è il coseno di un arco $\alpha < 90^0$. Ora, qualunque sia l'arco $AB < AM$ si può sempre far passare un cerchio per B e tangente alla corda MM' nel punto M', dunque data ai coseni degli archi minori di α la forma [3] p rappresenta il raggio del cerchio che passa per l'estremo B dell'arco ed è tangente alla corda MM' nel punto M'.

Treviso, gennaio 1898.

G. Z. Reggio.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 112, 127 e 145**

112. *Se* a, b, n *sono interi qualunque ad* a, b *primi tra loro, e si indica con* D(x, y), φ(x) *rispettivamente il massimo comun divisore di* x, y *ed il numero degli interi minori di* x *e primi con esso, il numero dei valori interi di* z, *minori di* n, *che rendono il binomio* az + b *primo con* n, *è dato da*

$$d_1\, d_2 \ldots . d_m . \varphi\left(\frac{n}{d_1\, d_2 \ldots . d_m}\right),$$

essendo $d_1 = D(n, a)$, $d_2 = D\left(\frac{n}{d_1}, d_1\right)$, $d_3 = D\left(\frac{n}{d_1 d_2}, d_2\right) \ldots \ldots$ $d_m = D\left(\frac{n}{d_1 d_2 \ldots . d_{m-1}}, d_{m-1}\right)$ *e posto che sia* $d_{m+1} = 1$.

(U. Scarpis).

Soluzione del Sig. *F. Mariantoni*, studente nella R. Università di Roma.

È noto che se b è primo con a tutti i numeri della forma $az + b$ (z intero) sono primi con a e, per conseguenza, con qualunque suo divisore. In particolare i numeri siffatti sono tutti primi con $d_1 = D(n, a)$ e perciò con $d_2 = D\left(\frac{n}{d_1}, d_1\right)$, con $d_3 = D\left(\frac{n}{d_1 d_2}, d_2\right)$, e infine, posto che sia $d_{m+1} = 1$, con $d_m = D\left(\frac{n}{d_1 d_2 \ldots . d_{m-1}}, d_{m-1}\right)$, segue che quei numeri sono tutti primi col prodotto $d_1 d_2 \ldots . d_m$.

Ciò posto si cerchino i numeri dell'anzidetta forma che risultano primi con n; chiaramente basterà soltanto cercare quelli di essi primi con $n_1 = \frac{n}{d_1 d_2 \ldots d_m}$ e tutti gli altri congrui ad essi rispetto al mod. n_1.

Pertanto il numero $b + az$ sarà primo con n_1 se z soddisfa alla congruenza

(1) . . . . $az + b \equiv \alpha \pmod{n_1}$

dove α è uno qualunque dei $\varphi(n_1)$ numeri primi con n_1 e minori di n_1. Poichè, evidentemente, è a primo con n_1 la (1), come si sa, fornisce una soluzione, *cioè un valore di* z *minore di* n_1, per ognuno dei $\varphi(n_1)$ valori che possono attribuirsi ad α. Così è stabilito che vi sono $\varphi(n_1)$ valori di z minori di n_1 che rendono il binomio $az + b$ primo con n. Ma quando si vogliano tutti i valori di z minori di n si osservi che se z_r è una radice di (1) minore di n_1, $z_r + kn_1$ è anch'essa una radice qualunque sia l'intero k, così avremo determinate tutte le radici di (1) minori di n quando avremo stabilito il massimo valore che può avere k. Se z_r è una delle radici minori di n_1, basterà sottoporre k alla condizione

$$z_r + kn_1 \leq n \quad \text{donde si trae} \quad k \leq \frac{n - n_1}{n_1} + \frac{n_1 - z_r}{n_1}$$

e perciò, essendo k intero, il suo più grande valore è

$$k = \frac{n - n_1}{n_1} = d_1 d_2 \ldots . d_m - 1$$

quando si osservi che $\dfrac{n_1 - z_r}{n_1}$ è una frazione propria positiva.

Presa dunque una radice generica di (1) z_r minore di n_1 attribuendo nella espressione $z_r + kn_1$ a k tutti i valori da 0 a $d_1 d_2 \ldots . d_m - 1$ si deducono $d_1 d_2 \ldots . d_m$ radici di (1) minori di n. Lo stesso ripetendo per ognuna delle $\varphi\left(\dfrac{n}{d_1 d_2 \ldots . d_m}\right)$ radici di (1) minori di n_1 si deduce evidentemente che il numero dei valori di z minori di n che rendono $az + b$ primo con n_1 e perciò con n, è dato da

$$d_1 d_2 \ldots d_m \cdot \varphi\left(\frac{n}{d_1 d_2 \ldots . d_m}\right). \qquad \text{c. v. d..}$$

127. *Dimostrare che il numero dei modi nei quali un intero* M *può ottenersi come differenza di due quadrati interi, è dato dalla formola*

$$\frac{(-1)^{\mathrm{M}} (\mathrm{m}_1 + 1)(\mathrm{m}_2 + 1) \ldots . (\mathrm{m}_n + 1)(\mathrm{m} - 1) - \alpha}{2},$$

dove α *è l'unità quando* M *è quadrato perfetto, zero negli altri casi,* m *denota l'esponente del fattore* 2 *ed* $\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \ldots . \mathrm{m}_n$ *gli esponenti degli altri fattori primi di* M. (A. TAGIURI).

Dimostrazione del Sig. *D*.... (Seminario di Solmona) (*).

Il numero dei modi nei quali un intero M può ottenersi come differenza di due quadrati non è altro che il numero delle soluzioni intere dell'equazione

[1] $\qquad x^2 - y^2 = M$ od anche $(x + y)(x - y) = M$,

(*) Dimostrazioni sostanzialmente analoghe pervennero dai Sigg. Prof. *S Catania*, *F. Palatini* e *G. Santacroce* e dal Sig. *F. Mariantoni* studente nella R. Università di Roma.

le quali soluzioni saranno quindi tante quanti sono i modi di scomporre M in due fattori M_1, M_2 tali che

1.° siano ineguali, p. es. $M_1 > M_2$, perchè non risulti $y = 0$,

2.° siano entrambi impari o pari, perchè ponendo $x + y = M_1$, $x - y = M_2$, risulti $x = \frac{M_1 + M_2}{2} =$ intero, $y = \frac{M_1 - M_2}{2} =$ intero.

Ora indicando con m_1, m_2 . . . . m_n gli esponenti dei fattori primi, in numero di n, di M, è noto che il numero N dei divisori di M è uguale ad $(m_1 + 1)(m_2 + 1) \dots (m_n + 1)$, e si ha pure che disposti questi N divisori per ordine di grandezza, il primo e l'ultimo, il secondo ed il penultimo, ecc. danno per prodotto M, quindi i modi di scomporre M in due fattori son tanti quante sono le coppie de' suoi N divisori, cioè $\frac{N}{2}$, per N pari, o $\frac{N-1}{2}$ per N impari (ossia per M quadrato perfetto), escludendo la coppia di fattori eguali secondo il n.° 1.°

Supponendo ora che gli n fattori primi di M siano impari, tutti i divisori saranno pure tali, e quindi, essendo soddisfatta anche la condizione del n.° 2°, il numero delle soluzioni della [1] sarà appunto

$$[2] \qquad \frac{N - \alpha}{2} = \frac{(m_1 + 1)(m_2 + 1) \dots (m_n + 1) - \alpha}{2},$$

dove α va presa nel senso indicato dalla quistione.

Se poi M fosse pari, cioè se avesse, oltre i predetti n fattori primi, anche il fattore 2^m, allora si avranno tutti i suoi divisori moltiplicando ciascuno dei precedenti N divisori per 2^m, 2^{m-1}, ... , 2, 1. Nei prodotti dei nuovi divisori due a due, non potranno tuttavia essere considerati come utili quelli che contengono l'uno il fattore 2^m e l'altro il fattor 1, perchè secondo il n.° 2°, non può essere M_1 pari ed M_2 dispari, e viceversa, così nella serie precedente i termini 1 e 2^m sono da escludere per modo che i divisori da considerare resteranno così $N(m-1)$. Quindi il numero delle coppie di fattori M_1 ed M_2, ossia delle soluzioni della [1], sarà

$$[3] \qquad \frac{N(m-1) - \alpha}{2} = \frac{(m_1 + 1)(m_2 + 1) \dots (m_n + 1)(m-1) - \alpha}{2}.$$

Ma la formola proposta comprende le due formole [2] e [3], poichè per M impari, ossia per $m = 0$, riproduce la [2], essendo $(-1)^M (m-1) = (-1)^2 = 1$, e per M pari riproduce la [3], essendo $(-1)^M = 1$. Dunque il numero dei modi nei quali l'intero M può ottenersi come differenza di due quadrati interi è dato effettivamente da

$$\frac{(-1)^M (m_1 + 1)(m_2 + 1) \dots (m_n + 1)(m-1) - \alpha}{2},$$

con α uguale ad 1 o a zero, secondoche M è o non è quadrato perfetto.

145.** *Posto*

$$a_1 = \frac{a+b}{2},\quad a_2 = \frac{b+a_1}{2},\quad a_3 = \frac{a_1+a_2}{2},\ \ldots.\ a_n = \frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2},$$

esprimere a_n *in funzione di* a, b, n, *e trovare il limite a cui tende* a_n *quando* n *tende all'infinito.* (D. Besso).

Soluzione del Sig. Prof. *G. Mola* a Campobasso.

Dal seguente sistema di n equazioni lineari

$$\begin{aligned} a + (m-1)\,b &= m\,a_1 \\ b &= -(m-1)\,a_1 + m\,a_2 \\ 0 &= -a_1 - (m-1)\,a_2 + m\,a_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= -a_{n-2} - (m-1)\,a_{n-1} + m\,a_n\,, \end{aligned}$$

se indichiamo con Δ_n il seguente determinante di grado n

$$\begin{vmatrix} (m-1) & -m & 0 & \ldots \\ 1 & (m-1) & -m & \ldots \\ 0 & 1 & (m-1) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

che, sviluppato secondo gli elementi della prima orizzontale, dà la relazione

$$\Delta_n = (m-1)\,\Delta_{n-1} + m\,\Delta_{n-2}\,, \tag{1}$$

si avrà per il valore di a_n

$$a_n = \frac{a\,\Delta_{n-1} + b\,\Delta_n}{m^n}. \tag{2}$$

Dalla (1) si trae $\Delta_n + \Delta_{n-1} = m\,(\Delta_{n-1} + \Delta_{n-2})$; e poichè è evidente che $\Delta_1 = m - 1$, $\Delta_2 = (m-1)^2 + m$, donde $\Delta_2 + \Delta_1 = m^2$, sarà: $\Delta_3 + \Delta_2 = m^3$, $\Delta_4 + \Delta_3 = m^4$, e in generale $\Delta_n + \Delta_{n-1} = m^n$. E si deduce

$$\Delta_{n-1} = m^{n-1} - m^{n-2} + m^{n-3} \ldots. (-1)^{n-1} = \frac{m^n \pm 1}{m+1},$$

$$\Delta_n = m^n - m^{n-1} + \ldots. (-1)^n = \frac{m^{n+1} \mp 1}{m+1};$$

(i segni superiori sono per n dispari)

Per questi valori la (2) diventa:

$$a_n = a\,\frac{1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{m^n}}{m+1} + b\,\frac{m + \dfrac{(-1)^n}{m^n}}{m+1},$$

e per $n = \infty$, si ha

$$\lim a_n = a \frac{1}{m+1} + b \frac{m}{m+1}.$$

Facendo $m = 2$, questi valori divengono quelli domandati dal problema proposto (*).

Risposte a quistioni alle quali rimane a dare evasione. Quistione **118** risposta del Sig. *F. Palatini*; **132**. *S. Catania*, *M. Martone*; **133**. *S. Catania*; **143**. *R. Bettazzi*, *U. Fazzini*, *F. Ferrari*, *G. Marotta*, *F. Mariantoni*, *F. Palatini*; **145****. *C. Aiello*, *G. Candido*, *E. Ghisi*, *G. Marotta*, *A. Tagiuri*, M.me *F. Prime*; **146***. *L. L. Mucci*, *M. Piattelli*, Sig.ina *L. Polverini*, M.me *F. Prime*, *C. Scarponi*, Sig.ina *A. Sciava*; **147***. *U. Gerra*, *G. Mazza*, *A. Parsi*, M.me *F. Prime*; **148***. *A. Parsi*, M.me *F. Prime*; **149***. *C. Aiello*, *Barbieri*, *U. Gerra*, *G. Mazza*, *A. Parsi*, M.me *F. Prime*, *Veneziali*; **151****, **153*** e **154***. M.me *F. Prime*.

QUISTIONI PROPOSTE (**)

155*. Dato il triangolo ABC e le rette AH, BH, CH passanti per lo stesso punto H, inscrivere in ABC un triangolo $A'B'C'$ in modo che A' cada in BC, B' in CA, C' in AB, ed i lati $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ siano bisecati rispettivamente da AH, BH, CH.

Dimostrare poi che le rette AA', BB', CC' passano per uno stesso punto.

L. Merante.

156**. Se in un triangolo ABC è inscritto un triangolo $A'B'C'$ tale che le rette AA', BB', CC' passino per uno stesso punto, le simediane dei triangoli $AC'B'$, $BA'C'$, $CB'A'$, corrispondenti ai lati $C'B'$, $A'C'$, $B'A'$, passeranno per uno stesso punto; e viceversa se nei triangoli $AC'B'$, $BA'C'$, $CB'A'$ le simediane corrispondenti ai lati $C'B'$, $A'C'$, $B'A'$ concorrono in uno stesso punto, anche le rette AA', BB', CC' passeranno per uno stesso punto.

L. Merante.

(*) Altre soluzioni di questa quistione verranno pubblicate nel fascicolo venturo.

(**) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

157**. Se in un triangolo ABC i punti H', H'' sono coniugati isogonali ed in esso s'inscrivono due triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$ tali che i lati $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$; $A''B''$, $B''C''$, $C''A''$ siano bisecati rispettivamente dalle rette CH', AH', BH'; CH'', AH'', BH'', i sei punti A', B', C', A'', B'', C'' appartengono ad uno stesso cerchio e ciascuno dei detti triangoli è prospettivo al triangolo ABC.

L. Merante.

158. Si ponga

$$\begin{aligned} \alpha' &= (\alpha s - \beta r) M + (\gamma s - \delta r) N \\ \beta' &= (\beta m - \alpha n) M + (\delta m - \gamma n) N \\ \gamma' &= (\alpha s - \beta r) R + (\gamma s - \delta r) S \\ \delta' &= (\beta m - \alpha n) R + (\delta m - \gamma n) S \end{aligned} \qquad (A)$$

e inoltre

$$MS - NR = ms - nr = 1. \qquad (B)$$

Dalle (A), lineari e di determinante 1 per rispetto alle α, β, γ, δ, si deduce

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

È vera la reciproca? Se cioè α', β', γ', δ' sono espresse per mezzo delle α, β, γ, δ da formole lineari e di determinante 1, e se

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

le α', β', γ', δ' saranno sempre riducibili alla forma definita dalle (A) e dalle (B)?

G. Frattini.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Ing. FILIPPO NICITA. — *Descrizione del cerchio.* Raccolta di 527 problemi di Geometria elementare colle relative soluzioni. — Ragusa, tip. Piccitto e Antoci, 1892. Prezzo L. 3.

L'Autore avverte nella prefazione che ha inteso soltanto di fare un prontuario utile per la pratica, ed io penso ch'egli abbia bene raggiunto lo scopo; imperocchè ha ordinati e raggruppati i diversi problemi relativi alla descrizione d'un cerchio per modo che riesce facile rintracciarli. Non è quindi questa una raccolta intesa a mostrare l'applicazione dei differenti metodi generali e particolari che si hanno per iscoprire la soluzione d'un dato problema, l'Autore non ha badato a ciò; bensì è un qualche cosa d'analogo alle tavole dei logaritmi. Egli, considerate prima le diverse condizioni (in numero di diciasette) che generalmente si danno per la determinazione d'un cerchio, prende a risolvere successivamente la serie dei problemi in cui, fra le condizioni date, vi è che il cerchio richiesto debba avere un dato centro, un dato raggio; debba determinare, sopra due parallele, segmenti dati; debba passare per due punti dati, essere tangente a due rette o a due circoli dati; le quali serie sono ottenute combinando le precedenti condizioni con ciascuna di quelle da principio considerate. Per ultimo risolve alcuni problemi in cui le tre condizioni date sono di specie differente, o della stessa specie; ed altri nei quali il cerchio richiesto deve passare per un punto avente una posizione speciale. Mediante poi opportune considerazioni poste alla fine della trattazione dei problemi d'ogni serie, l'Autore riduce ai problemi considerati altri, i quali vengono disposti con bell'ordine in tavole contenenti l'indicazione abbreviata del problema, cui ciascuno d'essi si riduce. Fra queste considerazioni noterò specialmente quella per cui la risoluzione dei problemi relativi alla descrizione d'un cerchio secante normalmente o diametralmente due cerchi dati è ridotta alla descrizione d'un cerchio passante per due punti noti. A tal uopo egli dimostra il teorema:

« Qualunque cerchio che taglia normalmente due cerchi dati, o ne taglia uno « normalmente e l'altro diametralmente, o li taglia entrambi diametralmente, passa « sempre per una coppia di punti fissi posti sulla congiungente dei centri dei « cerchi dati ».

L'Autore non aggiunge, come doveva (l'omissione non è giustificabile in un libro d'indole elementare), che questo teorema suppone, per il primo dei casi considerati, che i due cerchi dati non sieno secanti. La dimostrazione ch'egli ne dà è divisa in due parti, ma queste non hanno fra loro un legame tale che della prima non si possa far a meno; la seconda parte poi, cioè la vera dimostrazione, parmi sia troppo elevata per una questione così semplice, vorrei anzi dire, quasi evidente (si può vedere in proposito la nota della pag. 97 della Geometria dell'Amiot). Inoltre i due teoremi che seguono (pag. 50), dovevano precedere il teorema ora detto, perchè nella dimostrazione di questo l'Autore si serve di quelli.

Quanto alle soluzioni date dei diversi problemi, esse sono esatte e parecchie anche non prive d'eleganza; alcuna tuttavia è scorretta in qualche sua parte, come quelle dei problemi 289 e 385. Queste scorrezioni però, essendo evidenti, credo sieno accidentalmente sfuggite all'Autore, animato forse un poco da troppa fretta; e son certo che in una nuova edizione del suo libro, che di cuore gli auguro possa prossimamente fare, non figureranno affatto; come non figurerà qualche errore di ortografia, grammatica e dicitura che ora vi si trova sparso qua e là. Anche alla discussione dei problemi sarà bene dare più larga parte. Ciò non pertanto, come già il lettore avrà forse avvertito, il libro in parola è nel suo complesso buono, e all'Autore va tributata lode per avere fatto un lavoro che ha, per quanto io mi sappia, un carattere di novità, e che certo può tornar utile ad ogni studioso della Geometria elementare.

L'edizione è nitida, con bella stampa e figure abbastanza ben disegnate; v'è solo da lamentare qualche omissione e alcuni errori.

R. Grilli.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico.

Bulletin scientifique, rédigé par M. E. Lebon. — Septième année. N. 3, 4. Janvier, Février, 1893. Félix Alcan, éditeur. Paris.

El Progreso matemático, periódico de matemáticas puras y aplicadas. Director D. Zoel G. de Galdeano. Año II. N. 24. Diciembre de 1892 — Año III, N. 25, Enero de 1893 — Zaragoza.

Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Vol. XXX. Novembre e Dicembre 1892. — Napoli, B. Pellerano.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. de Longchamps. 4e Série, XVII année. N. 1, 2, Janvier, Février, 1892. — Paris, Librairie Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. 17e année. N. 7, 8, 9, 10, 11. — Paris, Librairie Nony et C.ie, 17 rue des Écoles, 1893.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. Mansion et J. Neuberg. Deuxième série. Tome III. Janvier, Février, 1893. — Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo VI, Fasc. VI. Novembre-Dicembre 1893.

Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. — Serie 2a; Vol. V, Fasc. 7° a 12°. Luglio a Dicembre 1892; Vol. VI, Fasc. 1°, 2°. Gennaio, Febbraio 1893.

Revue de mathématiques spéciales, rédigée par M. B. Niewenglowski. 3e année. N. 4, 5, Janvier, Février 1893 — Paris, Librairie Nony et C.ie, 17 rue des Écoles.

Rivista di matematica, diretta dal Prof. G. Peano. Vol. II, Fasc. 12°. Dicembre 1892; Vol III, Fasc. 1°, 2°. Gennaio, Febbraio 1893.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. XXIV Jahrgang: 1 Heft, 1893. — Leipzig, G. B. Teubner.

Association for the Improvement of Geometrical Teaching. XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII General Report. — Bedford: W. J. Robinson, Printer. 1887, -88, -89, -90, -91, -92.

Bardelli (G.) — Osservazioni sull'uso della formula di Simpson in risposta alle obbiezioni mosse alla medesima dal Sig. Ing. *F. Crotti*. (Rivista di matem. Anno III, 1893).

Bernardi (F.) — Luoghi geometrici nella risoluzione dei problemi. — R. Tip. edit. Salentina, Lecce 1893.

Carvallo (E.) — *Traité de mécanique* — Paris, Librairie Nony & Cie, 1893. — Prix fr. 2,50.

Del Re (A.) — Sulla superficie del 5° ordine dotata di cubica doppia e punto triplo (Rend. R. Acc. Lincei, vol. I, 5a serie, 1892) — Altre proprietà relative alla superficie del 5° ordine con cubica doppia e punto triplo (Idem, idem) — Sopra alcune varietà della superficie del 5° ordine con cubica doppia e punto triplo (Idem, idem).

Loria (G.) — Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani (Bibliotheca math. par G. Eneström, nouv. série, n. 4, 1892). - Risposta alle osservazioni del prof. E. Pascal (Rivista di mat. Anno III, 1893).

Millosevich (E.) — Sul moto proprio di 9352 Lacaille (Mem. Società Spettroscopisti italiani, vol. XXI, 1892).

Occella (F.) — Nuove dimostrazioni elementari di teoremi sulle diseguaglianze con applicazioni ai massimi e minimi — Casale, tip. F.lli Torelli, 1893.

Sferra (V.) — Progressioni, logaritmi e loro applicazioni — Napoli, Stamperia del Vaglio, 1882.

Chiusura della redazione il di 5 marzo 1893.

DELLA VARIA FORTUNA DI EUCLIDE

IN RELAZIONE CON I

PROBLEMI DELL'INSEGNAMENTO GEOMETRICO ELEMENTARE [1]

DI

GINO LORIA

Prof. di Geometria Superiore nella R. Università di Genova

> « Ich weiss zu wohl, noch bleibt es unvollendet,
> Wenn es auch gleich geendigt scheinen möchte ».
>
> GOETHE.

1. Se vero è, come pensava Diogene Laerzio, che chiunque si pone a discorrere debba di necessità produrre un principio irrefragabile, io non so cominciar meglio questo mio scritto che asserendo: « la legge di continuità governa il movimento del pensiero umano, con la stessa regolarità e con le medesime interruzioni, con cui presiede a tutti gli altri fenomeni naturali ». Questa proposizione, la cui accettazione da parte dell'universalità dei dotti è per fermo uno dei risultati più cospicui (per non dire il più eccelso) delle ricerche critiche rigorose sulla storia della scienza, ha sradicata la fede nell'esistenza di opere a cui potesse adattarsi l'epiteto di *prolem sine matre creatam* [2]; e, senza indurre alcuno a sminuire il merito di coloro che radunarono in un corpo di dottrina o in un enunciato unico degli elementi di ve-

---

(1) Le quistioni didattiche devono a parer mio risolversi non meno col ragionamento che con i dati di fatto. Ritengo perciò non inutile la presente monografia ove, in base a testimonianze scritte e a notizie favoritemi da varii amici (a cui debbo pubblicamente esprimere la mia gratitudine), io tento di scoprire la tendenza generale che ebbe ed ha, e la mèta a cui dovrebbe ragionevolmente mirare l'odierno insegnamento della geometria elementare.

(2) Questa credenza era divisa da CHASLES che la manifestò nel giudicare l'invenzione della geometria analitica (*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. 2.e ed., Paris 1875, pag. 94).

rità dispersi ed apparentemente fra loro eterogenei, persuase fosse doveroso il riporre in onore quei modesti collaboratori i quali spianarono il terreno su cui riposano e prepararono i materiali di cui sono costruiti gli edificii dinanzi a cui l'umanità con riverente riconoscenza s'inchina.

A tale revisione del giudizio su essi pronunciato non sfuggirono Descartes e Galileo, Keplero e Newton; ed arrivò l'istante in cui ad Euclide stesso venne strappata la corona di gloria che lo faceva apparire siccome creatore del primo sistema geometrico organico, vennero in pari tempo disseppelliti e ricordati onorevolmente i nomi di Ippocrate da Chio, di Leone, di Teudio da Magnesia, che precorsero Euclide nel comporre degli elementi di matematica (1), e finalmente si pose il problema (il cui solo enunciato sarebbe in passato parso a molti un'eresia!) di ricostruire la geometria greca pre-euclidea (2).

2. Benchè questo problema non abbia ancora ottenuta una soluzione completa, pure le indagini fatte per raggiungerla permettono già di asserire che Euclide nello scrivere il suo celebre libro pose poco di originale; nulla autorizza ad ammettere che esso appartenga ad una epoca di decadenza (3), giacchè per converso dal momento in cui fu scritto ha origine quello che è da designarsi senza titubanza per il periodo aureo della geometria greca, nè si può asserire che esso abbia sopravvissuto a scapito di altri per essere migliore di tutti i congeneri, chè la qualità di insegnante nel Museo d'Alessandro doveva rendere facile ad Euclide l'imporlo come codice geometrico. Ma del resto ciò per noi è di secondaria importanza; bastandoci constatare che per lunghi secoli a lui arrise una sorte favorevole della quale non era certamente indegno.

Errerebbe però chi credesse che nell'antichità ad Euclide venisse tributata quella venerazione di cui cominciò ad essere fatto segno a partire dal momento in cui gli Arabi lo fecero conoscere agli Occiden-

(1) Per maggiori particolari si vegga il I libro del mio lavoro *Le scienze esatte nell'antica geometria* che si sta stampando nel vol. X della 2ª Serie delle *Memorie dell'Accademia di Modena*.

(2) Si vegga l'enunciato dato da F. Hultsch per questo problema nella *Bibliotheca mathematica*, 1889, pag. 89.

(3) Questa strana opinione, a cui si oppongono ragioni intrinseche e storiche, è riferita da H. Schotten (*Inhalt und Methode des planimetrischen Unterricht. Eine vergleichende Planimetrie*, Leipzig, 1890, p. 99, nota 2).

tali e che continuò fino a tempi a noi vicini (1). A provare che tale opinione sarebbe contraria al vero basta ricordare l'esistenza di un procedimento per gettar la base della geometria che sembra escogitasse, poco dopo Euclide, il grande geometra Apollonio Pergeo (2).

3. Del resto il professare tuttora per Euclide quel culto superstizioso che induce a giudicare sacrilega qualunque modificazione proposta agli *Elementi*, non soltanto è al presente in aperto contrasto con lo spirito critico che aleggia su tutti gli studii moderni e che in particolare spinge a frugare molto addentro in tutta la compagine della geometria; ma, dopo che la scienza ha chieste a una critica severa più potenti formole di evocazione, è sragionevole per due ragioni: perchè in primo luogo gli *Elementi* non possono più considerarsi come rappresentanti (eccezione fatta tutto al più per i primi due libri) del pensiero definitivo dell'autore; perchè in secondo luogo essi giunsero a noi dopo tante ricopiature dovute a persone di cui non è dato misurare nè l'intelligenza nè la coscienza che è ingiusto giudicarli con criterii analoghi a quelli che servono a valutare un'opera che l'autore pubblicò dopo di averla sottoposta ad un'ultima revisione.

Vero è che i mezzi di cui oggi dispone la critica filologica applicati all'opera di Euclide (3), fecero bandire come pregiudizii alcune opinioni dianzi assai diffuse (4) e permisero di ricostruire in gran parte il testo primitivo sceverando le interpolazioni successive della lezione originale e di approntare un'edizione critica dell'intera opera (5). Sono questi risultamenti di cui io al certo non debbo porre in dubbio l'importanza.

---

(1) VINCENZO FLAUTI, per istima ad Euclide a nessuno secondo, raccolse nei *Preliminari* alle sue edizioni di Euclide (V. ad es. p. LXXV e seg. dell'ed. del 1816), le frasi di elogio più significanti pronunciate da eminenti geometri sugli *Elementi*: ivi si trova la giustificazione del nostro asserto. Il quale d'altronde è confermato dall'ingente numero di edizioni di cui sono alteri gli *Elementi* e di cui una miriade è registrata nel *Saggio di una Bibliografia Euclidea* del RICCARDI (Mem. dell'Istituto di Bologna, Serie IV, t. 8 e 9, Serie V, t. 1°, 1887-90).

(2) V. P. TANNERY, *Quelques fragments d'Apollonius de Perge* (Bulletin des Sciences math. et astr., 2ª Série, t. V, 1881) e *Euclidis Opera omnia*, ed. Heiberg et Menge (t. V, Lipsiae 1888, p. LXXXIX).

(3) Cfr. HEIBERG, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid* (Leipzig 1882) e il citato vol. V di *Euclidis Opera omnia*.

(4) Fra queste piacemi citare l'opinione che nella redazione degli *Elementi* fatta da TEONE ALESSANDRINO nel IV sec. dell'E. v. e da cui provengono i migliori manoscritti esistenti (tranne quelli utilizzati dal Peyrard per la sua celebre edizione delle opere di Euclide), gli enunciati fossero di Euclide e di Teone i ragionamenti; ed in conseguenza fu dimostrato che il sopprimervi le dimostrazioni, come fece taluno, non era restituire alla forma originale, ma mutilare il lavoro di Euclide

(5) Quella di Heiberg precitata.

Siccome però essi furono ottenuti mediante materiali che nulla autorizza a ritenere per gli unici da sfruttare, nè come quelli che a preferenza di altri (oggi forse perduti) si dovessero chiamare in aiuto, così lo scienziato giudicante il sistema euclideo deve sempre fare qualche riserva intorno al valore delle basi del proprio verdetto, epperò non rifiutare *a priori* dei cambiamenti che la logica suggerisce e che forse tendono a ricondurre il testo alla sua originale purezza.

4. L'indipendenza di giudizio nel valutare l'opera di Euclide, della quale aveva dato l'esempio il grande geometra di Perga, venne seguita non appena l'umanità, sfuggita dalla tenebra dell'età di mezzo, si ridestò a nuova vita intellettuale. La usò magistralmente Pietro Ramus (n. 1515, m. 1572) in Francia ed in Italia con maggiori cautele il Padre Saccheri (n. 1667 o 1670; m. 1733).

Questi (1), mirando a correggere gli errori che Euclide non aveva saputo evitare nell'esporre la teoria delle parallele e nel redigere le definizioni sesta del V libro e quinta del VI, fece « una critica veramente accurata e profonda del postulato di Euclide, critica nella quale vengono messi in sodo alcuni dei principii fondamentali della odierna teoria delle parallele, in quella stessa forma può dirsi, in cui si potrebbero oggi enunciare da noi. Che se disgraziatamente l'A. finisce col concludere all'assoluta verità (di cui allora niuno dubitava) del famoso postulato, non bisogna fargliene soverchio addebito, tanto più che la bonarietà colla quale egli si adopera, all'ultimo, a demolire tutto il proprio edifizio è di gran lunga superata dall'amore e dal retto senso geometrico di cui fa prova nell'innalzarlo » (2).

5. Ma questo rispetto, quasi superstizioso, per Euclide che vietò al nostro connazionale di trarre le conseguenze più eterodosse dalle esattissime sue premesse, non fu di alcun impaccio allo spirito indipendente di Pietro della Ramée (3). Questo fiero e sventurato oppositore

(1) Si vegga l'opera *Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus quae stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae principia, Auctore Hieronymo Saccherio, Societate Jesu, in Ticinensi Universitate Matheseos Professore* (Milano 1733); sulla quale di recente attrasse l'attenzione dei matematici il prof. Beltrami con la nota *Un precursore italiano di Legendre e Lobatschewsky* (Red. della R. Accademia dei Lincei, 17 marzo 1889); e della quale diede poi un sunto il MANSION nelle *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (t. XIV, II Partie, 1889-90, p. 41-59). Cfr. anche VERONESE, *Fondamenti di Geometria*, Padova, 1891, p. 569-70.

(2) BELTRAMI, l. c.

(3) Si vegga il bel lavoro di C. WADDINGTON, *Ramus (Pierre de la Ramée); sa vie, ses écrits et ses opinions* (Paris 1856).

di Aristotele, mal soffrendo il dominio di qualunque autocrazia che l'intelletto facesse ritenere indegna di governare, ritenendo per converso che nessuna autorità fosse superiore alla ragione ma che questa dovesse gettar le basi e porre i limiti di qualunque autorità (3), dopo avere sottoposto ad una critica spietata tanto « il maestro di color che sanno » quanto Cicerone e Quintiliano, si rivolse alle matematiche (« i cui pensieri sono sempre liberi ») e scoperse delle gravi imperfezioni anche negli *Elementi* di Euclide (i quali fin dal 1545 egli avea tradotti in latino) ed ardì perfino suggerire i mezzi per toglierle.

Ora questo fatto appare ai nostri occhi come dotato di importanza maggiore di quanto può sembrare a prima vista. Infatti le critiche del Ramus si presentavano come speciali applicazioni di tutto un ordine di concetti costituenti un vero sistema filosofico il quale trovò più tardi (e non solo in Francia) numerosi ed ardenti fautori. Di più esse provenivano da uno che godeva fama di professore incomparabile in quell'epoca gloriosa in cui da un capo all'altro d'Europa i giovani accorrevano in folla a Parigi per ascoltarvi dei maestri illustri. Esse finalmente erano dovute ad uno scienziato il cui zelo per le matematiche è indiscutibilmente attestato dalla fondazione, per parte sua, di una cattedra di matematica che per due secoli conservò il nome di *cattedra di Ramus* e trovò in Roberval il suo più degno occupatore. Tutte queste circostanze cospirarono indubbiamente a dotare le critiche di Ramus di una rinomanza, di una facoltà di diffondersi, epperò di un'influenza, quale per fermo non avrebbero posseduto ove fossero uscite dalla bocca di uno esclusivamente matematico, come era ad esempio il nostro Padre Saccheri. E chi può asserire che l'insofferenza per il giogo euclideo, che la Francia ha sempre rivelato più di ogni altra nazione civile, non abbia la sua prima radice in quelle celebri *Scholarum mathematicarum*, le cui numerose edizioni tramandarono ai più tardi nepoti di Ramus l'eco delle eloquenti parole con cui egli aveva tuonato contro il feticismo per il famoso Alessandrino? Ipotesi questa tanto più verosimile perchè a ragione

(3) « Nulla auctoritas rationis, sed ratio auctoritatis regina dominaque esse debet ». *Scholarum mathematicarum*, L. III, p 78.

fu notato [1] come nel sistema delle opinioni che vanno sotto il nome di *ramismo*, si trovi accoppiata una grandezza veramente filosofica del piano generale, ad una moltitudine di considerazioni importanti unicamente dal punto di vista didattico e che indubbiamente richiamarono sulle idee di Ramus l'attenzione degli insegnanti.

6. Che, come dissi, lo spirito di libero esame di cui era infiammato il Ramus, abbia continuato a lungo vivace ne' geometri suoi connazionali è rivelato indiscutibilmente da un celebre tentativo fatto da A. M. Legendre sul finire dello scorso secolo per rinnovare il metodo di esporre gli elementi della geometria [2], e dal fatto che gli *Éléments de géomètrie* da lui per la prima volta pubblicati nel 1794 ebbero uno straordinario successo [3]. L'ebbero e lo meritarono, giacchè riguardo alla *forma*, se possono competere con Euclide per la chiarezza e la precisione del dettato, li superano per l'euritmia complessiva che dà ad essi la parvenza di un bel edificio diviso in due parti simmetriche destinate l'una alla geometria del piano e l'altra alla geometria dello spazio; e riguardo alla *sostanza* superano Euclide essendo più ricchi di materia e migliori in certi particolari [4]. Ma il grande analista francese, nello scrivere di geometria, non seppe dimenticare i prediletti suoi studii, sicchè nelle sue mani la geometria divenne vassalla dell'aritmetica, a cui chiese a prestito alcuni raziocinii e perfino delle denominazioni [5], e perdette dai suoi dominii tutta la teoria delle proporzioni. Se si aggiunge che, mentre Euclide schiva l'uso di ogni

---

(1) WADDINGTON, l. c. p. 345.

(2) Uno analogo era stato fatto poco prima nella vicina Ginevra da L. BERTRAND con il *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques* (Gèneve 1778) ove fra l'altro si legge: « le plus sûr moyen de réunir différentes matières sous les différents chefs qui leur sont propres c'est de les discuter et les traiter au fond: du moins paroît-il qu'alors on ne mêlera pas tous les sujets, qu'on ne mettra pas à côté d'une démonstration sur les angles une démonstration sur les lignes, puis à côté d'une démonstrations sur les lignes une démonstration sur les surfaces et ainsi de suite, comme cela se voit presque continuellement dans Euclide » (Préface, p. XXI-XXII).

(3) Ne ho innanzi la XV edizione, uscita a Parigi nel 1862.

Che essi siano da designarsi, come fa il COURNOT (*Des institution d'istruction publique en France*, Paris 1864, p. 96) come una variazione di Euclide, ci sembra difficile ammettersi da chi non pensi doversi chiamare *euclideo* qualunque trattato *rigoroso* di geometria.

(4) È bene citare alcune delle buone innovazioni: introduzione delle *figure equivalenti*, distinzione tra figure eguali e figure simmetriche, nuova definizione di figura simile includente (a differenza di quella di Euclide) condizioni tutte fra loro indipendenti, ricerche importanti sul celebre postulato (cfr. VERONESE l. c. p. 570). Rileviamo ancora che LEGENDRE riconobbe per riprovevole il sistema euclideo di ammassare le definizioni al principio di ciascun libro, senza osare però di appigliarsi ad altro partito; invece si scostò da Euclide separando di regola i problemi dai teoremi.

(5) Es. invece di *rettangolo* di due rette, LEGENDRE scrive *prodotto*.

figura di cui il lettore ignora la costruzione, Legendre usa senza scrupoli le così dette *costruzioni ipotetiche;* e che questi accordò la preferenza all'infelice definizione (usata del resto anche da Kant) di retta siccome linea minima; si avranno argomenti sufficienti per rendersi conto del fatto che l'edificio di Legendre non tardò a mostrarsi di solidità incomparabilmente inferiore alla bellezza [1].

7. Sia per queste, sia per altre ragioni, certo si è che dopo la metà del secolo attuale parve che in Francia la sorte arridesse nuovamente ad Euclide, giacchè nel 1867 due geometri egregi, indipendentemente l'uno dall'altro, presero a combattere il metodo di Legendre, a vantare quello di Euclide, a consigliare l'adozione di un metodo modellato sull'antico per rialzare il livello dell'istruzione geometrica. Sono il Duhamel e l'Höuel.

Quegli, nella seconda parte [2] della sua lodatissima opera che tratta *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, criticò a fondo (v. p. 7) la definizione di retta preferita da Legendre [3] — nonchè quella di piano proposta da Simson (p. 12) — e propose (p. 5) d'interpretare quella di Euclide come l'asserzione dell'essere retta una linea determinata da due punti; espose (p. 312-339) un dopo l'altro i procedimenti di Euclide e Legendre per gettar le basi della geometria, concluse in favore del primo ed un terzo ne fece conoscere che del medesimo è una semplice modificazione; mise innanzi (p. 378) una nuova definizione per le figure simili [4] e (d'accordo in questo col Lacroix [5]) proclamò (p. 390) essere il *metodo dei limiti* l'unico rigoroso per introdurre nella geometria l'uso dell'infinito.

---

(1) Senza esplicitamente criticare, ma senza nemmeno accettare il metodo di LEGENDRE accostandosi piuttosto ad Euclide, di cui però non condivideva tutte le opinioni, il LACROIX compose poco dopo LEGENDRE dei nuovi Elementi che ebbero l'onore di parecchie edizioni. Essi non hanno però i lineamenti decisivi di un'opera originale, sicchè è malagevole determinare se e quale influenza esercitarono. Chi vuol conoscerne l'andamento generale, consulti i pregevoli *Essais sur l'enseignement en général et celui des mathématiques en particulier* (IV ed., Paris 1838) del medesimo autore.

(2) Le citazioni seguenti si riferiscono alla II ed. (Parigi 1877).

(3) Nella quale, al dire del DUHAMEL, interviene il concetto non semplice di lunghezza di una linea e la necessità di confrontare le lunghezze di due linee eterogenee.

(4) « Due sistemi di punti diconsi simili se è possibile situarli in modo che le congiungenti le coppie di punti omologhi passino per uno stesso punto il quale abbia da due punti corrispondenti qualunque distanze aventi rapporto costante ».

Il Prof. GIUDICE, dopo aver trovata da sè tale definizione, la pose a fondamento della teoria della similitudine esposta nelle sue opere, ad uso dei Licei, *Geometria piana* (Palermo 1890) e *Geometria solida* (Palermo 1891).

(5) *Essais* citati p. 287.

Meno particolareggiate sono le critiche che a Legendre mosse l'Höuel [1]; il quale per converso si dichiarò più schiettamente favorevole ad Euclide, augurando che questo fosse adottato nuovamente come libro di testo, dopo averne rinfrescata la facciata (in modo simile a quello che il Lorenz fece in Germania), e presentando un saggio d'una esposizione razionale dei principii della geometria [2] destinata a giovani già resi famigliari con le figure geometriche mediante una speciale propedeutica analoga a quella che da noi fu designata (durante la breve sua vita) col nome di geometria intuitiva.

8. Questo conato dei due valorosi geometri francesi non arrecò i frutti da essi sperato; perocchè non nuove edizioni di Euclide nè un orientamento verso gli *Elementi* seguirono le loro proposte; e come rifacimento di Euclide non è al certo da riguardarsi il trattato (che oggi in Francia gode del maggior favore [3] e che anche presso di noi è conosciuto assai favorevolmente) di E. Rouchè e C. de Comberousse [4]. Il quale, attenendosi ai programmi ufficiali, non presenta novità rilevanti di metodo; esso però, mediante numerose appendici, si estende oltre agli stretti confini da questi segnati per raggiungere le regioni che sono di pertinenza della geometria proiettiva; ivi il nuovo è mescolato non combinato al vecchio, le idee moderne non esercitano pressochè alcuna influenza sul modo di concepire ed esporre i principii della geometria, sicchè a noi appare come rispecchiante un'epoca di transizione in cui la convinzione della necessità di cambiamenti non corrisponde alla forza per operarli. Esso poi sembra colpito dalle cri-

---

(1) Nell'*Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou Commentaire sur les XXXII premières propositions des Elements d'Euclide* (Paris 1867).

(2) Fondata su quattro postulati: invariabilità delle figure, postulato della retta, postulato del piano, esistenza di una parallela unica.

Giova osservare che il Duhamel (p. 10-11) e l'Houel (p. 41) concordano nel ritenere non necessario definire l'angolo; se si conviene di dire che due rette concorrenti formano un angolo, dopo avere definito che cosa s'intende per angoli eguali si può stabilire tutta la teoria degli angoli. Cfr. Veronese, l. c. p. 618-9.

(3) Come m'informa il D^r. Niewenglowski, membro del Consiglio superiore della pubblica Istruzione, i testi ora più seguiti in Francia sono Rouchè et de Comberousse e Vaquant. Ebbero ivi anche molto fortuna la *Geometria* dell'Amiot e alcuni rifacimenti del Legendre quale sarebbe quello dovuto ai Fratelli delle Scuole cristiane.

(4) *Traité de géométrie. Conforme aux programmes officiels, renfermant un très-grand nombre d'exercices et plusieurs appendices consacrées à l'exposition des principales méthodes de la géométrie moderne.* (La IV ed. è del 1879).

Nella prefazione vi è un rapido sguardo alla storia della geometria, ove si desidererebbe evitati certi errori gravi intorno alla storia della geometria greca pre-euclidea.

tiche mosse (indipendentemente gli uni dagli altri) dal Todhunter [1], dall'Hauck [2], dal Fiedler [3] e dal Veronese [4] il primo dei quali non voleva che lo scopo dell'insegnamento matematico fosse di somministrare una forte dose di notizie, mentre gli altri due protestavano contro chi presentava quali appendici dell'antica geometria elementare le teorie della geometria superiore.

9. Anche il vicino Belgio sembra essersi sottratto all'influenza dei due citati matematici francesi, giacchè ivi [5] i trattati generalmente usati sono quello di Legendre o genuino o con le variazioni che vi recarono Blanchet da un lato, Cambier dall'altro.

In condizioni simili trovasi la Spagna ove fin dal momento (1689) in cui il Padre Kresa tradusse Euclide in castigliano, tanto il traduttore quanto Antonio Hugo avvertirono la necessità di modificare certe parti degli *Elementi* [6]; ove oggi, piuttosto che Euclide, dominano i francesi [7]; ove finalmente vide la luce un pregevole trattato di geometria [8] in cui, dei canoni che col proprio esempio ha stabiliti Euclide, sono osservati quelli soltanto che è impossibile dimenticare senza porre in non cale i precetti della logica. Nel quale di più la scolastica divisione in due grandi sezioni della geometria, in piana e solida, è surrogata dall'altra in teoria della eguaglianza delle figure e teoria della proporzionalità geometrica, mentre la distinzione fra planimetria e stereometria è invocata soltanto per suddividere ulteriormente quelle due sezioni principali; spesso le proprietà delle figure piane si trovano accostate a quelle analoghe delle figure solide, ma con ciò non è ancora operata quella perfetta fusione fra la geo-

(1) « As a general principle it may be said that the older practice in education was to aim at the discipline of the mind, and that the modern seeks to store with informations ». TODHUNTER, *The Conflict of Studies and other Essays connected with Education*, London 1878, p. 31.

(2) In una conferenza tenuta nel 1876 dinanzi al 31° Congresso dei filologi *Ueber die Stellung der neueren Geometrie zur Euklidische Geometrie und ueber die Annahme des ersteren in den Lehrplan der zehnklassigen Realschulen und Realgymnasien.*

(3) *Sulla riforma dell' insegnamento geometrico* (Giornale di Matematiche. T. XVI, 1878), pag. 251.

(4) L. c. p. XX.

(5) Notizie favoritemi dal prof. Mansion dell'Università di Gand.

(6) Z. G. de GALDEANO, *Estudios criticos sobra la generaciòn de los conceptos mathematicos.* — *Cuaderno 2° La evolucion de la Geometria euclidiana hasta los tiempos modernos* (Madrid 1870), pag. 23 e 36.

(7) Secondo le informazioni inviatemi dal Prof. Zoel G. de Galdeano dell'Università di Saragozza.

(8) Z. G. de GALDEANO, *Geometria elemental conforme con el desarollo actual de las teorias modernas.* II ed., Toledo 1889.

metria piana e la geometria solida da cui solo risulta evidente la convenienza di togliere l'antica separazione; inoltre trovarono accesso nell'opera in questione teorie che ordinariamente non s'incontrano in opere elementari, quali sarebbe quella dei porismi di Euclide secondo la celebre restituzione fattane da Chasles.

Importanza incomparabilmente minore dal punto di vista scientifico, ha un'altra opera geometrica che vide le luce nella penisola iberica, e di cui facciamo qui menzione come di quella che rispecchia le idee governative in Portogallo sull' insegnamento della geometria elementare [1], ma a cui, appunto per essere condotta su linee generali segnate indipendentemente dalla volontà dell'autore, non si può rimproverare la poca originalità. Essa tuttavia non è un rifacimento di Euclide come non si può dire imitata dagli *Éléments* di Legendre: ha comuni con questi dei difetti e delle qualità, ma mentre ha pregi che questi non posseggono, presenta dei nèi che in questi non si scorgono: così se in essa si trova dimostrata l'eguaglianza di tutti gli angoli retti e la proprietà di qualunque circolo di essere bisecato da un diametro, contiene d' altronde la definizione di retta come linea avente in ogni punto la stessa direzione e caratterizzata dalla proprietà di segnare la minima distanza fra due suoi punti quali si vogliano, proprietà dalla quale l'autore si crede autorizzato a dedurre l'unicità della retta congiungente due punti, quasichè ogni problema di minimo avesse sempre una ed una sola soluzione [2].

10. Continuando l'iniziata rassegna delle condizioni rispetto ad Euclide dei vari paesi d'Europa, rileveremo [3] come in Grecia, sino a nove anni or sono, il governo non imponesse alcun testo, ma il preferito generalmente fosse quello del prof. Lakon dell'Università di Atene. Nel 1884 il governo bandì un concorso il quale fu vinto dall'Hazzidakis, il cui trattato venne adottato come testo sino allo

(1) J. A. Serrasqueiro, *Tratado de Geometria elementar composto seguendo o Programma official para o ensino d'esta sciencia nos Lyceus. Obra aprovada pelo Conselho superior de Instrucçao publica.* 7ª ediçao. Coimbra 1870.

Ne debbo la conoscenza alla cortesia del Prof. F. Gomes Teixeira, direttore dell' Accademia politecnica di Porto.

(2) Aggiungasi che il trattato di cui è parola conduce fino a conoscere le proprietà fondamentali delle coniche (definite separatamente mediante le loro proprietà focali) ed i rudimenti della geometria descrittiva.

(3) Debbo queste notizie al Prof. Mazaraki insegnante a Cefalonia.

scorso anno, nel quale si ritornò al sistema di libertà; ma questo cesserà quando sarà chiuso il nuovo concorso recentemente bandito dal governo greco per un trattato completo di matematica elementare. Importa frattanto notare che i due testi citati del Lakon e dell'Hazzidakis (e così dicasi di altri meno pregiati) contengono la materia degli *Elementi* svolta in modo diverso da quello euclideo: sicchè nemmeno i compatriotti di Euclide si serbano ad essi fedeli!

Neppure in Olanda [1] v'è un trattato imposto dal governo o da tutti gl'insegnanti adottato; benchè molti riconoscano dei gravi inconvenienti in tale sistema, all'adozione del sistema contrario si oppone lo spirito d'indipendenza che caratterizza quella gagliarda nazione: se ivi Euclide è pressochè ignoto nella primitiva sua forma, i numerosi trattati che colà recentemente uscirono in luce hanno con i celebri *Elementi* molteplici e profonde rassomiglianze.

In condizioni analoghe trovasi la Svezia [2] ove ogni insegnante può adottare il testo che vuole, purchè sia approvato dall'*Ephorus* (vescovo), ma i libri in uso sono variazioni di Euclide.

Sono queste condizioni non dissimili da quelle in cui versa l'Italia per quanto concerne la istruzione classica [3]; ne differiscono però perchè da noi l'uso di Euclide come libro di testo nei Licei, fu più tardi surrogato con quello di altri testi redatti con metodi analoghi [4] e questa libertà, di cui già si usufruì, tende a raggiungere il suo completo sviluppo, sicchè è ragionevole sperare essere questo un periodo che immediatamente preceda un trapasso a tempi migliori; e la comparsa di opere originali e ponderate, quali gli *Elementi di geometria* di Riccardo de Paolis e i *Fondamenti di geometria* di Giuseppe Vero-

---

(1) Informazioni attinte dal D.r J. de Vries.

(2) Notizie avute dal Prof. Björling dell'Università di Lund.

(3) La variabilità di programmi per l'insegnamento matematico negli Istituti tecnici ci impedisce di occuparci di questo.

(4) Cfr. Hoüel *L'enseignement de la géometrie élémentaire en Italie* (Nouv. Annales de Math., 1869, p. 278-283). Nell'epoca in cui questi regolamenti erano in vigore apparve (1869) un trattato che incontrò il favore del pubblico, sicchè ebbe numerose edizioni, a cui continuano ad aggiungersene di nuove; alludo agli *Elementi di Geometria di* A. Sannia ed E. d'Ovidio, i quali si attengono alla sostanza del metodo euclideo, ma contengono una materia assai più ricca e variata. Non meno numerose e frequenti furono le edizioni degli *Elementi di Geometria* di A. Faifofer, tanto diffusi nelle nostre scuole, i pregi dei quali sono attestati dai prof. Beltrami e Mansion, ai cui giudizii io mi rimetto non avendo avuto l'occasione di studiare quegli *Elementi*.

nese (1), dà fondata speranza che la patria nostra, col precetto quanto coll'esempio, contribuirà in modo degno delle sue tradizioni scientifiche al risolvimento delle questioni concernenti l'educazione geometrica.

11. In Danimarca (2), ove l' insegnamento geometrico raggiunge un livello di considerevole altezza (3), Euclide è ignoto ed è assai diffuso un trattato del Petersen. Nè miglior fortuna trova oggi in Russia (4) il celebre autore degli *Elementi*, giacchè questi indarno si cercherebbero o fra i libri (approvati, ma non imposti, dal governo) destinati all' insegnamento, oppure fra quelli ausiliarii per l' istruzione o consigliati per le biblioteche scolastiche; libri fra cui godono il maggior favore fra gli elementari quello del Davidoff (5) e fra i complementari quello di Watschenko-Zakhartchenko (6).

In modo simile alla Russia si comporta rispetto ad Euclide l'Austria-Ungheria (7). Infatti le istruzioni date dal governo sono in gran parte ispirate ad idee opposte a quelle che presiedettero alle redazione degli *Elementi* (8) inoltre fra i numerosi trattati che il governo ha ivi approvati ad uso dell'insegnamento secondario (9), non si trova Euclide ed il più accreditato e diffuso ha analogie molte discutibili con gli *Elementi* euclidei. Alludiamo al *Lehrbuch der Geometrie für Ober-*

(1) Opera in cui mi piace rilevare (oltre all'eccellente esposizione storico-critica degli studi fatti intorno ai fondamenti della geometria) le osservazioni (p. 60-62; cfr. anche 615-618) che giustificano l'uso del movimento nella pura geometria, toccando esse una questione didattica controversa.

(2) Come m' informa il Dr. C. Juel.

(3) Ne fanno fede le questioni proposte negli esami, alcune delle quali vennero di recente riprodotte in questo *Periodico*.

(4) Notizie fornite dal mio dotto amico S. Dickstein.

(5) XVI Ed., Mosca, 1891.

(6) Kief, 1880.

(7) Da informazioni ricevute dal Prof. Emilio Weyr dell'Università di Vienna e dal Dottore Corrado Zindler.

(8) Infatti nell' *Instruction für den Unterricht in Geometrie und geometrischen Zeichen an der Unterrealschulen* si legge fra l'altro: «L'esperienza ha dimostrato che la difficoltà dell'insegnamento geometrico si accresce e che esso dà qualche risultato soltanto con la minoranza degli studenti più intelligenti ed attivi, quando il maestro insegna dogmaticamente e si limita ad esporre le proposizioni già bell' e preparate e a richiedere che gli studenti le ripetano ecc. ». «.... le definizioni non si devono esporre tutte al principio, ma devono venire distribuite in modo che sia già pronto tutto quanto è necessario per la loro intelligenza ». « ... ogni dimostrazione si presenti all'intuizione quasi con un carattere di necessità, invece che come un caso fortunato od un artificio d'un geometra intelligente ».

(9) *Verzeichniss der für die österreichen Mittelschulen zum Unterrichtsgebrauche allgemein zulässigen Lehrtexte und Lehrmittel nach den zuletzt approbierten Auflagen* (Wien 1888), p. 11, 24, 32, 39, 43 e 46.

gymnasien von Dr. F. Hočevar (Wien 1888). Nel quale l'autore (seguendo le traccie segnate dalla precitata *Instruction*), invece di partire come Euclide dal *punto* per costruire il proprio sistema di geometria, preferisce, come molti altri buoni insegnanti, prendere le mosse dal *solido geometrico;* invece di dare delle pseudo-definizioni di retta e di piano, suppone cognite al lettore queste figure e si limita ad enunciare come assiomi le loro proprietà caratteristiche; e sopperisce all'assenza di ordinamento logico dei concetti che si rimprovera ad Euclide coll'introdurre le più elementari corrispondenze geometriche (congruenza diretta ed inversa, simmetria rispetto a un centro o ad un asse, similitudine) in base a cui distribuisce le proposizioni da dimostrare (1). Aggiungiamo che egli definisce come il Duhamel e il Giudice (v. n. 7) la similitudine di due figure, e, seguendo l'esempio dato dal Baltzer, espone un teorema generale di Cavalieri (2) per dedurne con procedimento uniforme le espressioni della misura dei volumi di certi solidi. Si noti finalmente che la trigonometria rettilinea e la geometria analitica cartesiana si presentano nel libro dell'Hočevar come continuazioni dell'ordinaria geometria elementare.

12. Quantunque gli Stati Uniti d'America non abbiano contribuito in modo notevole al progresso delle matematiche pure, non sarà superfluo far sapere come anche ivi il movimento di distacco da Euclide abbia proceduto in maniera non dissimile da quello che notammo in varie contrade d'Europa (3). Allorquando essi non erano ancora indipendenti, ed anche nei primordii della libertà, l'influenza della madre patria era tuttora così possente che molte edizioni inglesi di Euclide vennero ristampate in America (p. 55), ed in alcune università, quali quelle della Carolina settentrionale nel 1795 (p. 79) e del Kentucky nel 1816 (p. 84), vi fu per parecchio tempo un corso di lezioni su gli *Elementi* di Euclide. Ma all'acquisto dell'autonomia politica seguì in America ben presto il raggiungimento

(1) Non sappiamo se dar lode all'autore per aver collocato di fronte (p. 84, 85, 88) certe proposizioni analoghe ma non correlative.

(2) « Due solidi sono equivalenti se si possono disporre in posizione tale che risultino equivalenti le sezioni fatte con piani di data giacitura ».

(3) Tolgo le notizie seguenti dall'opera di Florian Cajori intitolata *The Teaching and History of Mathematics in the United States* (Washington 1890), alla quale si riferiscono le citazioni di questo n..

della libertà di pensiero, ed in conseguenza vediamo prima Legendre surrogare Euclide (p. 120) (1) e dal 1885 questo venire generalmente abbandonato (p. 158) sicchè il Collegio di Princeton (di cui è notevole il conservatorismo in parecchi rami dell'insegnamento matematico) è l'unico importante istituto d'istruzione in cui si seguano gli *Elementi*: ma anch'esso dovrà, presto o tardi, cedere alla corrente generale perchè in una scuola ad essa collegata questi furono già abbandonati per il testo della Chauvenet (p. 163-165). Tutto ciò non è forse sufficiente per dimostrare che anche in America la posizione d'Euclide è assai scossa?

13. Con quale venerazione fosse considerato Euclide nell'antica Germania, con quanto ardore fosse ivi promosso lo studio degli *Elementi*, è dimostrato dalla storia tutta dell'insegnamento matematico ivi impartito (2) e se non altro dal fatto che un opera stampata nel 1588 in tedesco antico viene attribuita a « Magister Johann Scheybl, der löblichen universität zu Tübingen, *des Euclidis* und Arithmetic Ordinarien » (3). Ma, quale attitudine ha assunto la Germania moderna di fronte ad Euclide? A tale questione non è difficile porgere oggi una risposta sicura invocando l'aiuto di due opere recenti.

Una di esse (4) è destinata a servire di guida al giovane che, uscito dall'università, è chiamato a professare in una scuola secondaria. Quantunque io credo necessario fare alcune riserve prima di accettare per buono il modo con cui sono trattate e risolte talune questioni e, in particolare, ritenga indispensabile avere sempre presente che le illazioni dell'autore furono tratte in base al frutto di esperienze fatte nella sola Germania; pure non si può che tributare larga ed incondizionata lode all'autore il quale, dopo un lungo insegnamento, raccolse gli enunciati e schizzò almeno le soluzioni dei

(1) Ad esempio nel Collegio di Darmouth, fondato nel 1769, dal 1839 Legendre fu preso invece di Euclide per libro di testo (p. 166) e se nell'Università del Mississipi Euclide è consigliato assieme ad altri testi (p. 223), in quella di Michingam il vecchio Alessandrino, a differenza di Legendre, non potè mai ottenere l'accesso (p. 250).

(2) Veggasi S. Günther *Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525* (Berlin 1887).

(3) Kästner, *Geschichte der Mathematik*, t. I. (Göttingen 1796) p. 104. Mi piace rilevare che questo autore riteneva che « die neueren Werke des Geometrie verlieren umsomehr an Klarheit und Gründlichkeit, je weiter sie sich von Euklid entfernen ».

(4) *Anleitung zum mathematishen Unterricht an höheren Schulen, herausgegeben von* Dr. Fr. Reidt, Professor am Gymnasium zu Hamm (Berlin 1886).

più cospicui problemi didattici che s' impongono e formano il tormento di chiunque è destinato a rendere famigliari i giovani con la geometria e l'aritmetica. Anzi, siccome sono tanto scarse le opere congeneri e tanto vivamente ne è sentito il bisogno, così io non voglio lasciarmi sfuggire quest'occasione per consigliare lo studio del lavoro del Reidt a tutti coloro che sono ascritti da poco o stanno per essere arruolati nella falange dei docenti di matematica elementare e desiderano una guida per sormontare alle più serie difficoltà didattiche o uno stimolo a rivolgere ad esse la propria attenzione.

Nell'altra (1) delle opere a cui sopra allusi, sono riassunte le numerose discussioni fatte in Germania intorno a tutto che concerne l'insegnamento della geometria elementare (2), opera diligente ed utile come ricco repertorio di notizie sull'argomento, eccellente opera di consultazione a cui, come al Reidt, può farsi un solo appunto (che è piuttosto un lamento) quello cioè di non avere una base che si estenda al di là dei confini della patria di Arminio (3).

14. Dallo scritto dello Schotten emerge (p. 10-11, 46, 53-4, 64, 79, 98) che Euclide domina ancora in Germania; ma vi domina, non già come un sovrano scelto da tutto un popolo e ad esso gradito, ma piuttosto come un capo di cui si discutono e spesso si riprovano gli atti, che si anela a rovesciare e si sopporta nell'attesa di uno migliore con cui sostituirlo. Di tale stato d'animo fanno fede le deliberazioni prese da assemblee di persone competenti (4), l'espressione delle necessità di far subire all'insegnamento elementare l'influenza delle idee che governano le parti superiori della scienza (5), ed i tentativi già fatti per tradurre in realtà questo desiderio (6).

---

(1) H. SCHOTTEN, *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie*. Leipzig 1890.

(2) Esse ebbero per teatro principale la *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts* dell'HOFFMANN.

(3) Sono ivi considerati, fra i trattati stranieri, i soli di LEGENDRE, FRANCOEUR e VAN SWINDEN perchè tradotti in tedesco.

(4) Ad esempio la sezione matematica della *Schulmännerversammlung* tenuta a Lipsia nel 1872 deliberava « dass der Weg des Euklids absolut zu verlassen ist »; mentre nella 31ª Riunione dei Filogici si concludeva: « Im Unterricht der Elementargeometrie bleibt die Euklidische Geometrie dem Systhem nach bestehen, wird aber im Geist des neueren Geometrie reformiert ».

(5) Cfr. i lavori citati di HAUCK e FIEDLER.

(6) Secondo lo SCHOTTEN (p. 19) essi trovansi nei trattati seguenti: SCHLEGEL, *Lehrbuch der Elementar-mathematik* II (Wolfenbüttel 1879), H. MÜLLER, *Lehrbuch der ebenen Geometrie* (Leipzig 1879), KRUSE, *Elemente der Geometrie* (Berlin 1875), BECKER, *Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage*, WORPITZKY, *Elemente der Geometrie* (Berlin 1871), HENRICI und TREUTLEIN, *Lehrbuch der Elementargeometrie* (Leipzig 1881).

Sembra però che i tempi non siano ancor maturi per ottenere la riforma, perchè, malgrado la libertà di scelta ivi lasciata dal governo [1], i testi più diffusi sono ancor quelli imitati da Euclide [2]; onde non è priva di base la congettura essere questo un momento di preparazione a tempi migliori.

15. Per quale via verranno raggiunti quegli ideali che la Germania, come le altre nazioni, cercano irrequietamente di toccare, l'avvenire dirà. Noi intanto crediamo opportuno di non passare sotto silenzio come dalle citate opere di Schotten (v. p. 25, 37, 67, 91 e 109) e di Reidt (p. 168-171) risulti essere convincimento assai diffuso in Germania che l'insegnamento geometrico scientifico debba essere preceduto da una speciale propedeutica destinata a famigliarizzare i discepoli con le figure geometriche e con quelle fra le loro proprietà che ci sono rivelate dai nostri sensi [3]; propedeutica la quale starebbe alla geometria scientifica in un rapporto analogo a quello dell'atto d'intuire una verità geometrica all'opera intellettuale di dimostrarla: propedeutica la quale, per dar buoni frutti, dovrebbe essere affidata ad insegnanti provetti, i quali, a parer nostro, dovrebbero modellare il loro discorso su quel celebre passo del *Menone* di Platone [4] ove il divino filosofo presenta Socrate quando, volendo provare essere l'arte d'insegnare identica a quella di ridestare dei ricordi, guida uno schiavo intelligente a scoprire le proprietà di maggiore rilievo possedute da una figura geometrica complicata.

Un altro fatto che importa notare è l'avversione generale per l'esplicita enunciazione di tutti i postulati della geometria e la dimostrazione di proposizioni di verità intuitiva.

Che la prima ripugnanza sia ingiustificata vedrà chiunque osserva che, siccome la geometria è una scienza la quale parte da alcuni dati sperimentali e procede poi mediante il puro raziocinio, così è indispensabile a chiunque vuol misurare la solidità delle conclusioni a cui

(1) Libertà che sarebbe tolta se comparisse un eccellente testo, come m' informa il professore Lampe di Berlino.

(2) Cfr. i dati statistici esposti nella puntata di gennaio 1880 del *Centralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preussen*; inoltre Reidt, p. 84 e seg., Schotten, p. 21, nota 2.

(3) Il Reidt (p. 168) delinea anzi un piano di tale insegnamento.

(4) Esso trovasi, tradotto in italiano, nel n. 59 del I Libro del mio citato lavoro sulla storia della matematica greca.

perviene, di avere schierate sott'occhio le premesse da cui esse derivano. Nè valgono a giustificare tale avversione ragioni pratiche di ordine didattico, chè per nessun conto, nell'insegnamento matematico, il rigore deve cedere dinanzi al desiderio di evitare le difficoltà.

Quanto poi alla tendenza verso il sopprimere i ragionamenti destinati a dimostrare proposizioni la cui verità tutti concedono, esso è pienamente giustificato quando si ritiene essere còmpito esclusivo del maestro quello di somministrare un certo corredo di cognizioni. Ma siccome si esige oggi invece che egli metta in chiaro i legami che intercedono fra le varie proposizioni, affinchè sia allo studioso rivelata della geometria non soltanto l'apparenza esterna, ma eziandio l'intima costituzione, così dimostrare un teorema serve non soltanto a metterne fuor di dubbio la verità, ma anche a dimostrarne la connessione con gli altri (1); dimostrare dunque un teorema facile serve meno a legittimarne l'introduzione nella geometria, che a chiarire la sua ragione di essere, i suoi legami con altre verità e a dimostrare l'impossibilità di negarlo in cui trovansi coloro che accettarono queste ultime (2). Si aggiunga che chiamando troppo spesso a consiglio la testimonianza de' sensi per decidere la verità o meno di una proposizione di geometria, si spegne nell'alunno la facoltà di dubitare ammettendo la verità di proposizioni che i sensi farebbero dichiarare vere ma che la ragione è impotente a dimostrar tali (3).

16. La notata attitudine della Germania di fronte ad Euclide risulta anche dall'esame di alcune pregiate opere didattiche (4).

Citiamo come prima fra queste gli *Elementi di Matematica* di R. Baltzer, i quali, benchè dovuti ad uno dei più eruditi matematici dei nostri tempi e benchè serbino traccia e diano notizia dei metodi antichi e dell'antica nomenclatura, hanno un'impronta moderna che

---

(1) Io quindi non credo, col Dauge, che « une démonstration n'a d'autre objet que de faire naître dans l'esprit le sentiment bien net de la vérité » (*Leçons de methodologie mathématique à l'usage des Élèves de l'École normale des sciences annexée à l'Université de Gand*, 1881-82, pag. 5).

(2) Questo modo di giudicare concorda con quello di Kummer, secondo il quale: « der Geist der Mathematik besteht eben darin, zu beweisen, dass, wenn das Eine es ist, so muss unumstösslich das Andere so sein; nicht aber zu zeigen dass das Erste wirklich so ist, wie wir annahmen ».

(3) Superfluo avvertire che in questo momento il nostro pensiero si volge alle considerazioni che diedero la vita alla geometria non euclidea, ad accoglier le quali occorre che la mente del giovane sia pronta, anzi favorevolmente disposta.

(4) Mi duole di non essere in grado di estendere questa breve rassegna sino al trattato di H. Müller (v. una nota al n. 14) al quale Clebsch attribuiva grande valore.

li differenzia dai libri congeneri anteriori e specialmente da quello di Euclide. È superfluo l'arrestarci a delinearne i contorni generali perchè tutti in Italia li conoscono attraverso la traduzione fattane dal Cremona; d'altronde la forma stringata in cui sono scritti e l'enorme quantità di materia che racchiudono, distribuita in maniera insolita e non a tutti gradita, li rende poco adatti a servir di testo nelle scuole di mezzo. Vogliamo soltanto notare che ivi è accordato il posto che merita allo studio dei segni da attribuirsi alle figure (siano queste lineari, superficiali o solide) fatto in base alle considerazioni che è merito del Möbius di avere per primo svolto nell'intento di attribuire alle figure geometriche tutta la loro generalità (ad es. per non essere obbligati ad escludere le figure a contorno intrecciato).

Più recente, meno nota in Italia, ma pure pregevolissima è la seconda delle opere tedesche a cui crediamo opportuno di concedere qui un posto: è il *Lehrbuch der Elementar-Geometrie* (1) di Henrici e Treutlein. Nel quale gli autori si prefissero di evitare l'assenza di distribuzione logica dei concetti lamentati in Euclide (2) e vi riuscirono scegliendo come principale criterio di distribuzione dei teoremi i metodi di dimostrazione. Ad esempio riunirono in una sezione le proposizioni che si dimostrano mediante rotazioni attorno ad un punto fisso, in altra quelle che si dimostrano considerando figure simmetriche rispetto ad una retta, in altra ancora quelle che si dimostrano con scorrimenti o movimenti in generale, abbandonando però questo criterio a favore di altri quando ciò riusciva vantaggioso. Con tal metodo gli autori riescono ad introdurre così naturalmente in tante parti superiori delle matematiche che sembra per loro merito realizzato il sogno di colmare l'abisso esistente fra l'insegnamento universitario ed il secondario. Nemici come siamo di qualunque concessione fatta con sacrificio del rigore geometrico, siamo per converso favorevoli a qualunque mezzo lecito per ravvivare e tener desto l'interesse dei giovani per la geometria, interesse di regola

(1) I. Thl., 2.e Aufl., Leipzig 1891; II Thl. 1882; III Thl. 1883.

(2) « Mit Recht gelten Euklids Elemente als einen Muster systematischer Anordnung der Schlüsse, insofern jeder Lehrsatz da steht wo die Prämissen zu seinem Beweise vollständig gegeben sind; ein Muster von logischer Anordnung der Begriffe aber sind jene Elemente nicht, da ihnen eine logische Eintheilung des Stoffes fehlt ».

posseduto soltanto da pochi eletti: onde ci sembra costume degno di venire ammirato ed imitato quello dei citati autori di accennare alle applicazioni che delle teorie esposte furono fatte alla geografia (1), alla cristallografia e all'arte del disegno. Aggiungiamo che la trigonometria si presenta nel *Lehrbuch* in discorso come ausiliare della geometria di misura, il cui intervento è necessario quando nei dati o nelle incognite delle questioni geometriche si trovino degli angoli: è questo un sistema che va diffondendosi ognor più siccome quello che corrisponde alla natura delle cose.

Da tutto ciò risulta palese la nostra convinzione che i professori Henrici e Treutlein diedero con la loro opera un contributo importantissimo alla soluzione dei problemi attuali dell'insegnamento geometrico elementare (2), in particolare abbiano posto fuori di questione la possibilità di far conoscere sino dagli elementi, illustrandola mediante esempii speciali, la teoria delle corrispondenze geometriche, quella teoria cioè che indubbiamente è la chiave di volta della parte più alta dell'edificio geometrico moderno.

Tale possibilità è confermata da un altro recente libretto (3), piccolo di mole (4) ma non di valore, nel quale è fatto largo uso della simmetria rispetto a una retta ed inoltre è fatto conoscere un modo facile per dar notizia ai principianti degli importanti studii a cui diede luogo il V postulato d'Euclide (5).

Superfluo che avvertiamo da ultimo come il libro del Rausenberger (6) di cui abbiamo già discorso in questo *Periodico* (7) accentui sempre più il dissidio fra la dotta Germania ed Euclide.

---

(1) Ad es. nella II Parte si legge una relazione abbastanza particolareggiata della triangolazione del granducato di Baden, accompagnata dalla relativa carta geografica.

(2) Non possiamo quindi capacitarci come siasi preferito tradurre in italiano altre opere di dubbio valore e certamente dotate di originalità assai minore nè capaci, come questa, di aiutare il giovane anche durante i primordi della sua istruzione universitaria.

(3) M. Simon, *Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie.* (Strassburg i. E. 1890).

(4) Non è un trattato, perchè l'A. ritiene che lo scolaro non ne abbia bisogno.

(5) Osserva a questo proposito l'autore: « Ein Jahrhundert ist verflossen, seit Gauss die Folgerungen aus der Nichtannahme des Parallelaxioms sämmtlich gezogen, und noch hat die Schule von den tiefsinnigen Betrachtungen des grössten Mathematikers sowie seiner Nachfolger Lobatschewsky, Bolyai Vater und Sohn, Riemann und Helmholtz, etc. so gut wie gar keine Kenntnis genommen ».

(6) *Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, systhematisch und kritisch behandelt* (Leipzig 1887). Come il titolo indica e l'autore dichiara, non è un trattato pei principianti, ma un saggio di una trattazione metodica delle figure costituite da punti, rette e piani.

(7) Anno III, 1888, p. 29.

17. Così adunque in ogni angolo' dell'Europa e dell'America, ogni anno arrecava nuove reclute alla schiera degli oppositori di Euclide; anzi molti dei giovani combattenti si presentavano muniti di nuove e più potenti armi, e tendevano a surrogare all'antica e sterile critica demolitrice la feconda critica ricostruttrice.

Ultimo asilo pel vecchio Alessandrino fu l'Inghilterra ove, sia a cagione del culto per tutto che avesse attinenza alla coltura classica [1], sia per l'immutabilità delle disposizioni governative regolatrici certi celebri esami [2], egli trovava miriadi di ammiratori e commentatori, di traduttori e di editori. Ma anche qui lo spirito di libero esame, invadente ogni campo nel nostro secolo, rese meno sicura la posizione di Euclide. Già fin dal 1849 il De Morgan faceva rilevare [3] uno ad uno i difetti degli *Elementi* e Tyndall irriverentemente (ma con piena ragione) osservare che dalla definizione di Euclide nessuno poteva formarsi l'idea di retta. E circa venti anni dopo Wilson [4] e Jones [5] dichiaravano la necessità di abbandonare il metodo euclideo. Finalmente nel 1869 un uomo, a cui tutti s'inchinavano, fece echeggiare il grido di rivolta dinanzi alla assemblea delle più spiccate intelligenze britanne [6]; e tale e tanta era la gloria che constellava la fronte di chi innalzava il vessillo della ribellione che egli ben tosto raccolse attorno a sè un drappello di seguaci, uno dei quali (il sig. Levett) poco dopo (cioè nella primavera del 1870) proponeva, mediante una lettera inserita nel giornale *Nature*, la fondazione di un sodalizio avente per intento la riforma dei metodi per insegnare la geometria.

---

(1) Questa tendenza fu rilevata e criticata fin dal principio del nostro secolo da Byron, il quale, in alcuni *Thoughts suggested by a College Examinations*, rilevava quanto d'interessante si tralasciava in conseguenza di insegnare ai giovani e, fra l'altro, scriveva:

« Happy the youth in Euclid's axiom tried
« Though little versed in any art beside. »

(2) Cfr. TODHUNTER *The mathematical Tripos* (The conflict of Studies and other Essays, London 1873, p. 193-242) e W. W. Rouse Ball *A History of Study of Mathematics at Cambridge* (London 1889).

(3) Nel *Companion to the British Almanak*.

(4) *Educational Times* 1868. Quest' articolo, che venne letto dall'autore dinanzi alla Società matematica di Londra per ottenere che essa si ponesse a capo del moto rivoluzionario, fu tradotto in italiano e pubblicato nel T. VI (1868) del *Giornale di Matematiche* col titolo *Euclide come testo di geometria elementare*; gli argomenti e le conclusioni ne vennero combattute da F. Brioschi e L. Cremona nel vol. seguente del *Giornale* stesso.

(5) *On the Unsuitableness of Euclid as a Text-Book of Geometry*. London.

(6) Alludo al discorso di SYLVESTER per inaugurare l'adunanza della *British Association for the Advancement of Science*.

18. Nel paese classico dell'associazione quest'idea doveva trovare un terreno favorevole ed infatti il 17 gennaio 1871 nell'*University College* di Londra ebbe luogo sotto la presidenza di T. Archer Hirst, un'adunanza ove vennero gettate le fondamenta del nuovo istituto, di cui primo e principale scopo fu « di promuovere il progresso dell'insegnamento geometrico e anzitutto di fare tutti gli sforzi per indurre i direttori degli esami, a cui dovevano presentarsi dei giovani usciti da differenti scuole, a formulare le domande in modo indipendente dall'uso di un particolare libro di testo ». Per ciò dietro proposta del presidente, il sodalizio si chiamò *Association for the Improvement of geometrical Teaching* (o brevemente A. I. G. T.) non *for the Reform*, poichè il *progresso* è indefinito mentre la *riforma* è transitoria [1]. Per raggiungere tale intento si decise di raccogliere delle notizie sull'insegnamento della geometria nel continente e preparare, con la collaborazione di alcuni ed i consigli di tutti i socii, un programma (*Syllabus*) della geometria elementare da sottoporsi al giudizio dei capi delle Università di Cambridge, Oxford e Londra, rimandando a miglior tempo il deliberare se esso dovesse considerarsi come schema di un futuro trattato di geometria.

Durante il primo anno di vita il numero dei soci dell'A. I. G. T. crebbe da 61 a 89 [2] e la Commissione incaricata di formulare delle proposte concrete sull'indirizzo da darsi all'insegnamento degli elementi della geometria le riassumeva in diciotto proposizioni le quali, sottoposte all'Assemblea, dopo breve discussione, raccoglievano l'unanimità delle approvazioni [3]. L'Assemblea stessa nominava in pari tempo una Commissione per redigere un *Syllabus* in base a queste proposizioni e tenendo conto delle altre idee che erano state espresse durante la discussione. E infatti nell'adunanza successiva (15 gennaio 1873) il progettato *Syllabus* venne presentato e discusso, e gl' intervenuti decisero [4], che, dopo essere stato modificato nel

(1) *Association for the Improvement of Geometrical Teaching. I General Report* (o brevemente I. G. R.) 1871, p. 14.

(2) Questo numero crebbe quasi costantemente di poi, come risulta dal seguente prospetto: Anno 1873, membri 102; 1874, 105; 1875, 105; 1877, 107; 1878, 116; 1881, 113; 1882, 120; 1883, 123; 1884, 138; 1885, 136; 1886, 153; 1887, 173; 1888, 191; 1891, 189.

(3) II G. R. 1872, p. 18-20.

(4) III G. R. 1873, p. 28.

modo che alcuni di essi avevano consigliato, esso venisse sottoposto alla Commissione (1) a cui l'Associazione britannica per l'avanzamento della scienza aveva affidato il còmpito di studiare la possibilità di far progredire i metodi in uso per insegnare la geometria elementare. Sembra però che quest'ultima parte della deliberazione fosse intempestiva, perchè la detta Commissione, pure esprimendo la propria simpatia e la propria benevolenza per l'A. I. G. T., rimandava il giudizio sul *Syllabus* al momento in cui questo fosse stato completato (2). Tale risposta doveva servire di eccitamento ai componenti dell'A. I. G. T. a continuare nella via in cui si erano messi; ed infatti noi li troviamo occupati durante le due adunanze annuali successive a discutere certi punti controversi ed in particolare intenti allo studio della teoria delle proporzioni (3). I buoni frutti ottenuti con questi sforzi collettivi sono dimostrati dalla relazione fatta all'Associazione britannica nel 1876 dalla Commissione competente (4), la quale « non esitò a constatare, come risultato dell'esame da essa fatto del *Syllabus* nel suo insieme, che esso era stato redatto con tanta cura e tali riguardi alle condizioni essenziali del problema, da rendere estremamente desiderabile venisse studiato a fondo da alcuni delegati delle Università e degli altri grandi corpi esaminatori del Regno unito, coll'intento di decidere se si dovesse adottarlo — dopo averlo forse modificato nel modo che quello studio speciale dimostrerebbe necessario — come testo per gli esami di geometria elementare » (5).

Per agevolare l'effettuazione di quanto veniva così saggiamente suggerito, l'anno seguente l'A. I. G. T. decideva di inviare il *Syllabus* in esame alle più cospicue autorità universitarie, accompagnandolo da una lettera ove fossero dichiarati gl'intenti dell'Associazione e riportato il giudizio surriferito (6). Le risposte ottenute durante

---

(1) Composta di Sylvester, Cayley, Hirst, Price, Smith, Spottiswood, Hayward, Salmon, Townsend, Fuller, Kelland, Wilson e Clifford.

(2) *Report of the XLIII Meeting of the British Association* (Bradford, 1873), p. 459-60. Cfr anche IV G. R. 1874, pag. 11-13.

(3) Veggasi il IV e il V G. R.

(4) Era la stessa di prima, coll'aggiunta di Henrici e Glaisher.

(5) *Report of the XLVI Meeting of the British Association*, Glasgow 1876, p 8-13. Cf. *Association for the Impr. of Geom. Teach., Report of Committee, January* 1877, p. 11.

(6) Citato *Report of Committee*, p. 13-16.

il 1878 furono poco numerose e mediocremente soddisfacenti [1]: Oxford si dichiarò favorevole alla conservazione di Euclide e Cambridge contraria ai fini dell'A. I. G. T., Londra evasivamente avvertiva che essa non aveva mai imposto un testo speciale e Duham rispondeva in modo non definitivo. Nell'attesa di altre e migliori risposte, l'A. I. G. T. fissò [2] l'attenzione dei corpi esaminatori sulla necessità che i candidati fossero tenuti a dar prova di abilità nel risolvere dei facili problemi di geometria, ed in pari tempo volgeva la mente ad allargare il suo campo di azione fino a comprendere la geometria solida, la geometria superiore e le coniche geometriche [3]. Non deve recar meraviglia se l'A. I. G. T. dimostrava con i fatti di non lasciarsi abbattere dalla opposizione che incontrava nelle più eccelse autorità scolastiche, perchè la simpatia di cui si sentiva circondata [4] la incoraggiava a perseverare, simpatia dimostrata dai giudizii che sul *Syllabus* venivano pronunciati da molte persone che lo avevano adoperato [5], dalla richiesta sempre maggiore di esso (che aveva avuto l'onore di una traduzione in giapponese [6]) e dal fatto che « la geometria non veniva più considerata come un ramo di scienza già da tempo perfetto, non più collocata, ad esempio, allo stesso livello dei cinque ordini d'architettura, che uno non può toccare senza venire riprovato [7] ».

19. Coll'adunanza annuale del 1878 riteniamo chiusa la prima èra dell'A. I. G. T.; pensiamo così perchè allora ebbe luogo un cambiamento nel presidente (all'Hirst succedette l'Hayward) e venne deciso di estendere l'azione della Società al di là dei confini dell'insegnamento elementare. E questa deliberazione non fu che il primo sintomo di un'affezione che palesemente manifestossi quando, nell'adunanza del 7 gennaio 1881, venne fatta la proposta di occuparsi, oltre che di geometria, anche delle altre parti della matematica (aritmetica e meccanica) le quali avevano altrettanto bisogno delle cure di un sodalizio

(1) VI G. R., 1878, p. 18-19.
(2) Ib., p. 24-30.
(3) VI G. R., p. 30-34.
(4) II G. R., p. 17, III G. R., p. 10, *Report of Committee*, p. 12, ecc..
(5) V. ad es. nel VI G. R. (p. 20-21) un confronto dei risultati ottenuti in una scuola femminile addottando prima Euclide, poi il *Syllabus*.
(6) XV G. R., p. 19.
(7) VI G. R., p. 12.

che non fosse di « geometri fanatici [1] ». La discussione che ne seguì, non portò subito ad una conclusione, ma preparò il terreno alla deliberazione, che fu presa l'anno veniente [2], di ritenere che la parola *geometrical* che entrava nel nome dell'associazione dovesse prendersi nel senso di *mathematical* allo stesso modo che i francesi interpretano *géomètre* nel senso di *mathématicien*.

Però questa tendenza all'espansione non rese tiepidi i sentimenti dell'A. I. G. T. verso la geometria in senso stretto. Infatti sino dal 1881 essa si propose di munire di dimostrazioni ed esercizii il *Syllabus* di geometria piana e nell'anno seguente decideva di porsi all'opera [3] e in pari tempo proseguiva la redazione dei *Syllaba* per l'insegnamento delle altre parti della geometria,

Nella medesima direzione l'A. I. G. T. continuò a procedere durante gli anni seguenti animata a far ciò dal sapere i suoi libri scelti come testi in Inghilterra [4] e nelle colonie [5], le sue idee influire sulla composizione di opere didascaliche [6], la sua opera apprezzata anche da coloro che non ne approvavano incondizionatamente gli atti [7] e l'Università di Cambridge scendere a più miti consigli [8]. Al conseguimento di questi risultamenti avranno per fermo contribuito le pubbliche conferenze che, a partire dal 1883, si tennero in occasione delle riunioni annuali e colle quali persone competenti spesso iniziavano uno scambio di idee su qualche importante argomento matematico: e si noti che i lettori non venivano scelti esclusivamente fra i membri della Società o fra quelli che ne approvavano il modo di procedere, ma eziandio fra coloro che professavano idee differenti [9].

Intanto una petizione (sottoscritta da 186 persone di cui soltanto 82 appartenevano all'A. I. G. T.) veniva diretta nel 1887 alle prinpali autorità universitarie per far concedere agli insegnanti la libertà

(1) VII G. R., 1881, p. 12-15.
(2) VIII G. R., 1882, p. 15.
(3) VII G. R., p. 23-27, VIII G. R, p. 17-29.
(4) X G. R., 1884, p. 38-9.
(5) XI G. R., 1885, p. 21, XII G. R., 1886, p. 23, XVI G. R., 1890, p. 6.
(6) XII G. R., p. 24.
(7) X G. R., p. 23-9.
(8) XII G. R., p. 24.
(9) Cfr., XVII G. R., 1891.

di adottare come testo un libro differente dagli *Elementi* di Euclide. Ed il consiglio direttivo dell'A. I. G. T. l'inoltrava accompagnandola da una lettera ove si definivano i fini che essa erasi proposta, si descrivevano i mezzi usati per raggiungerli, si dava il catalogo delle opere pubblicate sotto il suo patrocinio e si proponevano delle conferenze per discutere e chiarire i punti per avventura ancora oscuri (1). In conseguenza l'Università di Oxford consentì a sostituire ad Euclide delle opere composte con lo stesso metodo (2); e quella di Cambridge, dopo una conferenza avuta coi capi dell'A. I. G. T., si espresse in modo non dissimile (3).

Allora la presidenza dell'Associazione fece nuove istanze per ottenere che si recedesse dall'esigere fosse rispettato l'ordine euclideo nella successione delle proposizioni, ma non fu esaudita (4), onde si tenne paga del risultato ottenuto (5), che riuscì anzi ad estendere ad altre Università (6).

Finalmente chiese una riforma per ovviare ad un grave difetto esistente nel Regolamento per le *Oxford Pass Examinations Papers in Geometry*, ma ricevette una nuova risposta negativa (21 aprile 1891 (7)).

20. Se si misurano i risultati ufficialmente constatati che ottenne l'A. I. G. T. in più di vent'anni di vita, è forza constatare che essi non sono di grande entità. Taluno potrà attribuire questo non brillante successo ai mezzi adoperati (8); tutti però dovranno riconoscere che il pubblico sul quale essa operava si componeva in gran parte di

(1) XIII G. R., 1887, p. 21-2.

(2) XIV G. R., 1888, p. 23.

(3) Ib., p. 23-4.

(4) Ib., p. 24-6.

(5) XV G. R., 1889, p. 11, XVI G. R., 1889, p. 5.

(6) XV G. R., p. 12-13, XVI G. R., p. 6.

(7) Lo stesso inconveniente è segnalato in un articolo, intitolato *Oford* « *Pass* », inserito nella *Nature* del 20 marzo 1889.

(8) Infatti chi vuole ottenere una riforma nel metodo d'insegnare la geometria ha a propria disposizione due metodi di procedere. Egli può analizzare minuziosamente gli *Elementi di Euclide*, additarne i difetti e suggerire il modo di correggerli. Oppure può prescindere affatto dal metodo euclideo, fissare quali teorie debbano formar parte di un trattato elementare ed esporle a modo suo. Come si vedrà tra poco, è il primo di questi modi che preferì l'A. I. G. T. e forse non poteva fare altrimenti, chè il secondo può difficilmente essere adottato quando trattisi di un lavoro collettivo.

ammiratori di Euclide [1], i quali, da questi educati, non vedevano altrove nessuna via di salute [2]. D'altronde l'avere modificato l'ambiente coll'introdurvi degli elementi ad essa favorevoli non era forse preparare il terreno a un cambiamento di coltura?

E poichè testè abbiamo fatta una breve analisi dei mezzi che l'A. I. G. T. adoperò, dobbiamo completarne il catalogo mediante l'esame delle pubblicazioni ad essa dovute.

Quello che deve di preferenza fissare la nostra attenzione è il *Syllabus of Plane Geometry corresponding to Euclid, Books I-VI* [3], il quale, dopo che gli enunciati vennero muniti di dimostrazioni ed esercizii divenne *The Elements of plane Geometry* [4]. Che questi *Elementi* siano somigliantissimi a quelli di Euclide si vede subito rilevando che anche ivi la figura donde si prendono le mosse è il punto e che la teoria delle proporzioni è una riproduzione dell'antica. Che però delle innovazioni non insignificanti siano state fatte si scorge osservando che il libro si apre con un *Syllabus of geometrical constructions*, destinato a rendere famigliare il giovane con i concetti più importanti della geometria ed alcuni dei risultati a cui essa giunge, al quale segue un'introduzione destinata a porgere quelle nozioni di logica che trovano incessante applicazione nella geometria. Di più le definizioni vengono distribuite nel corpo di ogni libro e poi riassunte al termine, i problemi sono disgiunti dai teoremi e si trova una speciale sezione sui luoghi; il postulato d'Euclide viene surrogato con quello che afferma l'esistenza di una sola retta parallela ad un'altra e passante per un dato punto; finalmente nuove proposizioni e nuove dimostrazioni vengono aggiunte alle euclidee. I nuovi *Elementi* sono dunque un rimaneggiamento degli antichi, ma nessuna idea schiettamente originale dà loro nuova vita, sicchè, se il primo studio degli

(1) Basti citare fra questi il maggiore astro della matematica inglese, il CAYLEY, che non vuole a nessun costo abbandonare Euclide (XV G. R., p. 21) e in particolare ritiene il V libro degli *Elementi* come la migliore trattazione della teoria delle proporzioni (*Reports of the British Association*, 1876, p. 12).

(2) Però così non pensava il CLIFFORD (come risulta dalla terza delle sue bellissime conferenze (*On the Philosophy of pure Science*, Lectures and Essays, London 1882, I, p. 295-323) nè l'HENRICI, il quale, in un discorso che citeremo fra poco, notava fra l'altro: « The chief progress in geometrical teaching has to be sought in the introduction of modern ideas and methods into the very elements, and modern teaching ought to take ful account of this ».

(3) New Edition, London Macmillan 1889.

(4) Part I, 1884; Part II, second edition 1885, London, W. Swan Sonnenschein and Co.

antichi fece a Sylvester odiare la geometria, di amore per fermo non l'avrebbe infiammato lo studio dei nuovi.

Questa stessa mancanza di coraggio di abbandonare i sistemi didattici in uso si nota in chi compilò il *Syllabus of Elementary Geometrical Conics* (1) ove queste celebri curve sono definite prima separatamente mediante le loro proprietà focali e poi insieme come sezioni di un cono rotondo (2) e il *Syllabus of Modern Plane Geometry* (3) di cui già discorremmo in questo *Periodico* (4) e sul quale con maggior diffusione esporremo altrove le nostre idee. Notiamo da ultimo che l'A. I. G. T., dando prova di sentimenti onorevoli ed elevati, curò la ristampa di due discorsi nei quali, fra l'altro, si criticavano i sistemi da essa preferiti per raggiungere il proprio intento (5) e provocò una nuova edizione della versione inglese fatta da G. B. Halsted delle celebri *Geometrische Untersuchungen zur Therie der Parallellinien* di Lobatschèwsky (6).

21. Malgrado il fine modesto che fin dall'origine erasi proposto l'A. I. G. T., malgrado il rispetto che i suoi membri pubblicamente professavano per Euclide, e malgrado l'esiguità dei risultati da essa indiscutibilmente raggiunti, pure vi fu chi credette necessario scendere in campo per combattere la direzione in cui essa progrediva.

Primo fra questi avversari è il Todhunter (7) e della difesa da lui fatta di Euclide come libro di testo bisogna tenere grandissimo conto sia perchè dovuta a persona di altissima fama didattica, sia perchè le idee da lui espresse, per quanto vengano dall'autore dichiarate sua proprietà, sono però quelle che in Cambridge raccoglie-

---

(1) London, Swan Sonnenschein, Lowrey and Co. 1887.

(2) Mi sembra opportuno riportare a questo proposito la seguente giustissima osservazione del TODHUNTER (*Essays* citati, p. 178-9): « One great drawback to our present systhem of mathematical instruction and examination is the monotony which prevail in many parts. When a mathematical subject has been studied so far as to master the essential principles, little more is gained by pursuing these principles into almost endless applications. On this account we may be disposed to regard with slender satisfaction the expenditure of much time on geometrical conics sections; the student seems gain only new facts, but no fresh idea or principles ».

(3) London. Macmillan and Co. 1889.

(4) T. IV, 1889, p. 125.

(5) *Reprint of Presidential Adresses to Section A of the British Association by Prof.* HENRICI (1883) *and Prof.* CHRYSTAL (1885) (Bedford 1887).

(6) Del *Syllabus of Elementary Dinamics* pubblicato da W. N. STOCKER (London, Macmillan 1889) sotto gli auspici dell'A. I. G. T. non occorre far qui più di una rapida menzione.

(7) Si vegga il lavoro *Elementary Geometry* facente parte degli *Essays* già citati.

vano e raccolgono l'approvazione della maggioranza per non dire della totalità degl'insegnanti. Ora, comunque si sia disposti a giudicare la tesi sostenuta dal Todhunter, non v'ha dubbio che con piena ragione egli si opponeva alla sostituzione di Euclide con un trattato meno rigoroso e al decretare il bando di questi prima di possedere un degno sostituto (1), e dava agli oppositori di Euclide il consiglio di dimostrare coi fatti la superiorità di altri metodi per insegnare la geometria. Nè si dovranno giudicare cattive, per la massima parte, le ragioni con cui egli s'industria a dimostrare infondate le accuse mosse agli *Elementi* per la mancanza di vita, di freschezza e di suggestività, per l'eccesso di proposizioni e l'assenza di *costruzioni ipotetiche* (2), per il metodo sillogistico e la teoria delle proporzioni. Ma quello in cui a noi non sembra lodevole il Todhunter è di avere trattata in modo troppo ristretto l'ampia questione dell'insegnamento della geometria elementare. E della stessa labe è macchiato l'altro assertore convinto che in tempi a noi vicini Euclide trovò in Inghilterra, C. L. Dodgson. Il quale in un brillante libretto (3) ha vagliate con insolito acume le critiche mosse al metodo euclideo in generale ed in particolare al modo con cui sono esposte le materie dei due primi libri, dimostrandole in gran parte infondate (4), indicando però le lievi modificazioni di cui il testo ha bisogno e concludendo che colmate le lacune che gli *Elementi* offrono (perchè Euclide ammise come evidente l'eguaglianza di tutti gli angoli retti e l'impossibilità di un segmento comune a due rette e tacque i teoremi concernenti la perpendicolare e le oblique con-

---

(1) Credo bene riferire anche le seguenti parole: « In conclusion I will say that no person can be a warmer advocate than I am for the *improvement of geometrical teaching*; but I think that this may be attained without hazardous experiments of rejecting methods, the efficacy of which a long experience has abundantly demonstrated ». L. c. p. 192.

(2) A sostegno della necessità di insegnare negli elementi il modo di eseguire qualunque operazione adoperata, il Todhunter a ragione osserva (p. 186): perchè un principiante non dovrebbe ammettere possibile il far passare un circolo per quattro punti?

(3) *Euclid and his Moderns Rivals.* 2ª ed. (London 1885).

La forma di dialogo prescelta dall'autore è conveniente, non soltanto perchè rende meno tediosa l'esposizione, ma anche perchè permette di togliere a certe asserzioni troppa rigidità, di ribattere delle obbiezioni secondarie e di fare concessioni di pari entità.

(4) Le critiche concernono: la miscela dei problemi con i teoremi, l'eccesso di proposizioni, la definizione di retta, la teoria delle parallele, i postulati e lo stile di Euclide. Sulle difese notiamo 1º che il Dodgson trova che la definizione di retta adottata da Euclide non è inferiore a quella prescelta dagli altri geometri, 2º che il postulato delle parallele di Euclide supera i congeneri perchè porge un mezzo facile e sicuro per riconoscere se due date rette siano parallele.

ducibili da un punto a una retta) si ottiene un'opera superiore a tutte le altre conosciute [1]. Importa notare che l'autore giunse a questa conclusione: 1° senza combattere coloro che biasimano Euclide per avere sagrificata la logica distribuzione delle materie trattate a una rigorosa concatenazione delle varie conclusioni, 2° senza analizzare dei libri seguenti il secondo (in particolare senz'occuparsi della teoria dell'equivalenza la quale soltanto in tempi vicini a noi raggiunse il desiderato grado di perfezione [2]), il che è deplorevole specialmente perchè un sistema geometrico deve essere considerato nel suo insieme, una parte di esso potendo essere eccellente senza che tale sia il tutto.

22. Tuttavia, ammesso pure per un momento che la perfezione che il Dodgson si sforzò di porre in luce nei primi due libri di Euclide si trovi anche in tutti gli altri e che i suoi *Elementi* siano superiori, non soltanto alle opere congeneri da lui conosciute, ma a tutte quelle oggi esistenti, la questione sul metodo d'insegnare la geometria non sarebbe ancora definitivamente risolta a favore di Euclide. Si potrà dire che, conservando il piano degli *Elementi* e seguendo nelle sue linee generali il modo di procedere euclideo, non è possibile fare opera ad essi *Elementi* superiore (tranne, ben inteso, in pochi punti isolati). Ma con ciò non si esclude che battendo altre vie non si possa giungere ad un risultato da ritenersi *oggi* superiore a quello conseguito da Euclide. Dico *oggi* perchè il fine a cui tende un trattato elementare varia a seconda dell'epoca in cui è scritto; ora quello di Euclide mirava a preparare allo studio di opere elevate quali sarebbero le trattazioni delle curve di second'ordine che hanno per

---

(1) Quelle citate ed esaminate dall'autore sono:

A. M. LEGENDRE, *Éléments de géométrie*, XIV ed. 1860. — W. D COOLEY, *Elements of Geometry, simplified and explained*, 1860. — CUTHBERTSON *Euclidian Geometry*, 1874. — O. HENRICI, *Elementary Geometry: Congruent Figures*, 1879. — WILSON, *Elementary Geometry*, II ed 1869. — B. PEIRCE, *An Elementary Treatise on plane and solid Geometry*, 1872. — W. A. WILLOCK, *The Elementary Geometry of Right Line and Circle*. 1875. — W. CHAUVENET, *A Treatise on Elementary Geometry*, 1870. — E. LOOMIS, *Elements of Geometry. A revised Edition*, 1876. — J. R. MORELL, *Euclid simplified, compiled from the most important french Works, approved by the University of Paris and the Minister of Public Instruction*, 1868. — R. P. WRIGHT, *The Elements of plane Geometry*, II ed. 1871 (cfr. *Parole del Prof. Hirst sull'Introduzione agli Elementi di geometria del Prof. Wright*, Giornale di Matematiche, T. VI, 1868. p. 369-70) — *Syllabus of the Association for the Improvement of geometrical Teaching*, 1878. — J. W. WILSON, *Elementary Geometry*, 1878.

(2) Cfr. DUHAMEL, op. cit., p. 445 e seg.; DE ZOLT, *Principii dell'eguaglianza di poligoni (equivalenza di poligoni)* e *Principii dell'eguaglianza di poliedri e di poligoni sferici* (Milano 1881 e 1883), nonchè gli autori ivi citati; finalmente le opere precitate di Sannia e d'Ovidio, Faifofer e De Paolis.

archetipo le *Coniche* di Apollonio, e quello scopo fu raggiunto così bene che io mi spiego perfettamente il conservatorismo dell'Inghilterra, ove la geometria più elevata si concepisce nello stile del geometra Pergeo. Convengo anche con l'Höuel [1] quando asserisce che la geometria d'Euclide può benissimo servire di testo per preparare allo studio di tutti i principii fondamentali dell'analisi moderna e somministrare ad un giovane intelligente un'ottima preparazione per lo studio della geometria analitica e del calcolo infinitesimale. Ma questo frutto dell'insegnamento geometrico è ancora troppo poco nutriente! La geometria infatti non è più (come pensava forse a ragione Lagrange sulla fine del secolo scorso) una lingua morta che *si deve* studiare nelle opere di Euclide; essa all'opposto è una lingua viva per imparare la quale fa mestieri meditare le opere immortali di Poncelet, Chasles, Steiner, Möbius, Staudt e Cremona, all'intelligenza delle quali non si giungerà mai se si rimane eternamente attaccati agli scritti di Euclide; ostinandosi a far ciò sarebbe quanto suggerire a chi volesse imparare l'italiano l'unico studio di Ciullo d'Alcamo e Frate Jacopone da Todi [2]! Fa mestieri dunque che invece l'insegnamento elementare prepari allo studio della geometria projettiva e alle applicazioni che essa riceve nella geometria descrittiva e nella statica grafica; verrà in tal maniera ovviato al grave inconveniente che il giovane, nel suo entrare all'università, riceva l'impressione di trovarsi in un paese geometrico agli antipodi di quello nel quale gli fu guida Euclide.

23. Ora per raggiungere tale intento, non potendosi pensare ad aggravare i programmi delle scuole secondarie [3], si può o adoperare negli inizii della geometria projettiva dei metodi di dimostrazione per quant'è possibile somiglianti a quelli di Euclide, oppure introdurre nell'insegnamento elementare sotto forma rudimentale quei concetti e quei modi di ragionare destinati a trovare il loro pieno

---

(1) Op. cit. p. 86.

(2) Si aggiunga che noi siamo frammenti vivi di una lunga storia di molti secoli, onde il sottoporre i nostri studenti allo stesso regime didattico di quello adottato nell'Accademia di Alessandria, varrebbe quanto negare le modificazioni subite dalla razza umana durante duemila anni, di continuo perfezionamento.

(3) Come vorrebbe il Günther: cfr. Reidt, l. c. p. 67.

svolgimento nell'insegnamento superiore. Al primo espediente sembrano essersi appigliati parecchi autori tedeschi (1), ma noi esitiamo a ritenere e per definitivo il conseguente metodo poggiando questo più su un ingegnoso artifizio che sulla vera natura delle cose. Appigliandosi al secondo partito fa d'uopo riordinare completamente il piano degli elementi (2).

Bisogna anzitutto togliere la vieta separazione della planimetria dalla stereometria, al che non si oppone nessuna seria difficoltà scientifica (cfr. n. 10) nè (come l'esperienza dimostra (3)) didattica, e potrebbe essere generalmente adottata purchè i programmi governativi avessero una elastità sufficiente (4).

In secondo luogo converrebbe far conoscere ai giovani al più presto possibile il concetto governatore della matematica superiore, cioè quello di *corrispondenza* (5); e poichè il concetto generale è forse troppo astratto per essere abbracciato fin dal principio, seguendo l'ordine naturale dal particolare al generale, converrebbe svolgerlo ed applicarlo in casi speciali notevoli, quali sarebbero la simmetria, la similitudine ecc., come fecero alcuni trattatisti citati nelle pagine precedenti (n. 7 e 16).

Per dare alla trattazione di certe teorie la massima generalità bisognerebbe poi parlare dei segni delle figure (cfr. n. 16).

Lascio pel momento irresoluta la questione se sia opportuno introdurre presto la legge di dualità (la quale negli elementi trova scarse applicazioni) e seguire il consiglio di chi (6) vorrebbe introdurre nell'insegnamento mezzano la geometria non-euclidea. Rilevo invece la necessità di una teoria della proporzionalità ove, senza rinunciare a presentarla come parte integrante della geometria, siano poste in

---

(1) Henrici e Treutlein, (v. n. 16) e il Küpper (*Einleitung in die projektivischen Geometrie der Ebene, bearb. von* K. Bobek, Leipzig 1889).

(2) In ciò che segue non pretendo certamente di assegnare completamente le riforme, ma intendo soltanto di indicarne alcune.

(3) Si vegga Lazzeri e Bassani, *Elementi di geometria* (Livorno 1891), opera che mi è nota soltanto dietro le bibliografie fattene dal Prof. Giudice nel T. I (p. 160-162) della *Rivista di Matematica* e dal Prof. Bettazzi nel Vol. VI (p. 155-163) di questo *Periodico*.

(4) Cfr. Bettazzi, *Sull'insegnamento della Geometria nei Licei*, questo *Periodico*, Vol. VI, p. 113-116.

(5) Forse verrà un giorno in cui si sarà costretti ad accompagnarlo con quello di *gruppo*. Intanto venne già da tempo propugnata l'introduzione del concetto di *funzione*; v. Basso *Del concetto di funzione nell'insegnamento della geometria elementare* (*Giornale di Matematiche*, T. VII, 1869).

(6) Spitz, *Die ersten Sätze vom Dreiecke und den Parallelen nach Bolyais Grundsätze bearbeitet* (Leipzig). Cfr. anche n. 16.

evidenza le relazioni che passano fra essa e la teoria aritmetica delle quantità irrazionali e la teoria generale delle grandezze; nè vuol tacersi la grande utilità che deriverebbe dal tenere sempre innanzi agli occhii della mente gli *Elementi di Euclide* come modello insuperato di logica concatenazione delle parti, ove si aspiri che il nuovo sistema abbia un'influenza educatrice dell'intelligenza non meno buona di quella che ebbe sempre quello euclideo.

Per assicurare poi al nuovo edificio tutta la desiderabile solidità converrebbe enunciare esplicitamente tutte le proposizioni tolte dall'esperienza, riducendole al loro numero minimo (cfr. n. 15) e mettere in chiaro la loro connessione con i teoremi dedottine. Le notizie storiche [1] e le applicazioni pratiche opportunamente presentate (cfr. n. 16) servirebbero a raccogliere sulla geometria quella poca luce di diletto che vi può splendere.

24. Ma (affrettiamoci a convenirne noi per i primi) un insegnamento costruito su un simile piano non potrebbe venire impartito a chi fosse completamente digiuno dei rudimenti della geometria. Sarebbe quindi indispensabile farlo precedere da un insegnamento preparatorio (accompagnato forse da esercizii di disegno geometrico) che rendesse il giovane famigliare con le figure geometriche e loro più ovvie proprietà. Tale propedeutica fu consigliata dall'Höuel [2], dal Fiedler [3] e dai commissarii che riferirono all'Associazione britannica sul tema che ci occupa [4]; la sua utilità è generalmente riconosciuta in Germania [5], essa è imposta e giustificata dagli eccellenti Regolamenti pubblicati dai governi dell'Austria [6] e della Danimarca [7]. All'adozione generale di essa si oppone forse la mancanza di un buon testo [8] ma l'ostacolo che così nasce non è insuperabile, tanto più che esistono libri che possono essere consultati con profitto e collezioni di modelli capaci di servire quali efficacissimi ausiliarii [9].

(1) Cfr. l'opuscolo di P. Treutlein da noi analizzato in questo *Periodico* (T. V, pag. 59-61). La stessa questione è stata trattata dall'Heppel in un discorso (*The Use of History in Teaching Mathematics*) letto il 14 gennaio 1893 dinanzi all'A. I. G. T., ma non ancora pubblicato.

(2) L. c. p. 81 e seg.

(3) Si vegga l'articolo dianzi citato.

(4) Si vegga la prima delle *Relazioni* dianzi (n. 18) nominate.

(5) Reidt, l. c. p. 167-173.

(6) Cfr. l'*Instruction* di cui già parlammo nel n. 11.

(7) Cfr. *Samling of Eksamenbestemmelser vedrørende det højere Skolevæsen* (Kjøbenhavn 1891).

(8) Reidt l. c. p. 170.

(9) Ib. p. 171-174.

Se, come sembra, tale istruzione geometrica preparatoria rendesse possibile dirigere la prora dell'insegnamento geometrico elementare verso quei nuovi continenti che è gloria del secolo attuale di avere scoperto, converrebbe affrettarsi a introdurlo dappertutto. Sarebbe forse allora reso possibile il raggiungimento di quegli ideali che, più o meno schiettamente, sono dichiarati dai più eminenti rappresentanti di tutte le nazioni civili e di cui i punti di contatto e le dissomiglianze noi ci siamo proposti di dimostrare con le pagine precedenti, nella fiducia che dalle essenziali analogie esistenti fra essi risulti giustificata e possa trasfondersi nel lettore la convinzione nostra che è debito di ogni geometra contribuire nella misura delle proprie forze, con le opere, i consigli o gl'incoraggiamenti, a che essi vengano avvicinati e, se è possibile, raggiunti.

Genova, febbraio 1893.

A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

(Continuazione, V. p. 25 e 57 di questo Vol. e p. 81, 113, 169 del Vol. VII).

Per il centro O (Tav. I, fig. 7ª) di un cubo iscritto nella sfera $A\,A'$ si tirino i semiassi $OM = ON = OP = a$, congiungenti O con i centri delle faccie contigue, e si prolunghino delle parti $MX = NY = PZ = x$ segmento aureo di a; nei piani MON, NOP, POM si descrivano sopra MX, NY, PZ i quadrati dalle due parti di ciascun asse; i sei vertici E, F, G, H, I, L dei quadrati posti sulle rette passanti per X, Y, Z, insieme ai loro punti simmetrici E', F', G', H', I', L', rispetto ad O, ed agli otto vertici A, B, C, D, A', B', C', D' del cubo sono i venti vertici di un dodecaedro regolare iscritto nella sfera, avente per diametro la diagonale del cubo. Infatti chiamando I_0 la proiezione ortogonale di I sul quadrato $ABCD$ e V il mezzo di BC, i triangoli rettangoli II_0V, VMX sono simili a motivo della proporzione $a - x : x = x : a$ identica ad $I_0V : I_0I = MX, VM$; dunque risultando complementari gli angoli I_0VI, XVM i tre punti I, V, X giacciono in linea retta e la figura $ICFEB$ è un pentagono piano; di più equilatero, attesochè $(IB) = (I I_0) + (B I_0) = (x) + (a - x) + (a) = 4\,(x)$ per la (3); onde $IB = 2x = EF$ e parimente si prova $BE = EF$. Inoltre dalle $(OI) = (OZ) + (ZI) = (a + x) + (x) = 3\,(a) = (OB)$ si deduce esser i vertici del pentagono equidistanti da O e giacere sopra una stessa circonferenza; dunque *il lato del dodecaedro regolare pareggia il segmento aureo del lato di un cubo iscritto nella medesima sfera*. Le faccie sono due a due simmetriche rispetto ad O; ai vertici del pentagono $IBEFC$ corrispondono i punti opposti $I'B'E'F'C'$; gli altri vertici del dodecaedro costituiscono i pentagoni regolari e simmetrici $LHD'A'G'$, $L'H'DAG$ giacenti in piani paralleli alle suddette faccie. I raggi ρ', ρ dei cerchi circoscritti ai pentagoni $LHD'A'G'$, $IBEFC$ hanno la ragione $a : x$ dei loro lati $LH = BC$ ed IB; quindi $\rho' : \rho = \rho : \rho' - \rho$, ovvero $\rho' - \rho$ è il segmento aureo di ρ ed eguaglia il lato del decagono regolare convesso iscritto nel cerchio $IBEFC$. Sia $\delta = I I_1$ la distanza del punto I dal piano $LHD'A'G'$ per il triangolo rettangolo $L I I_1$ si ha $(LI) = (L I_1) + (I I_1)$ e siccome LI ed $L F_1 = \rho' - \rho$ sono i respettivi lati del pentagono e decagono regolari iscritti nel cerchio ρ si conchiude $\delta = I I_1 = \rho$. Indicando con δ' la distanza fra i piani paralleli $LHD'A'G$, $L'H'DAG$ si vedrà come $\delta' : \delta$ eguagli la ragione delle distanze di A dalle parallele LH, IB; cioè $\delta' : \rho = IV : VX = I I_0 : VM = x : a = \rho : \rho'$, da cui si ha $\delta' = \rho' - \rho$; onde il diametro della sfera iscritta nel dodecaedro regolare pareggia $\rho + \rho'$. La proiezione ortogonale delle due faccie opposte $IBEFC$, $I'B'E'F'C'$ sopra un piano a queste parallelo si compone di due pentagoni regolari iscritti nel cerchio ρ e tali che i vertici dell'uno siano i mezzi degli archi sottesi dai lati dell'altro; i rimanenti vertici del dodecaedro hanno la loro proiezione sulla circonferenza concentrica alla prima ρ e disegnata col raggio ρ' pari al lato del decagono regolare stellato iscritto nel cerchio ρ (*).

(*) Indicando con i l'angolo diedro del dodecaedro regolare, dal triangolo rettangolo VMX, si ricava $\tan\frac{i}{2} = \frac{VM}{MX} = \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

La costruzione dell'icosaedro è semplice e diretta; in una semicirconferenza massima ABA' della sfera OA (fig. 8ª) s'iscriva il quadrato $BMM'N$, tirando in A la tangente $AT = 2\,OA = d$, e la OT segante la circonferenza in B, la corda AB è il lato l dell'icosaedro. Nelle sezioni sferiche MB, $M'N$ normali al diametro AA' s'iscrivano i pentagoni regolari $BCDEF$, $B'C'D'E'F'$ simmetrici al centro O della sfera, i loro dieci vertici insieme ai punti A, A' costituiscono i dodici vertici del poliedro regolare. Infatti ponendo $M'M = MB = x$, $MA = y = \frac{d-x}{2}$ per il triangolo rettangolo OMB si ottengono $\left(\frac{d}{2}\right) = (x) + \left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{x}{2} + y\right)$, cioè $(x) = \frac{1}{5}(d)$, $(y) = (x, x - y)$; dunque MA è il segmento aureo di MB, od il lato del decagono regolare convesso iscritto nel cerchio minore MB, e siccome per il triangolo AMB si ha pure $(AB) = (AM) + (MB)$ si deduce $AB = BC = l$, così le faccie eguali ABC, ACD, ADE, AEF, AFB e le loro simmetriche $A'B'C'$, $A'C'D'$ ..... sono triangoli equilateri. Inoltre le congiungenti i vertici B, C, D, E, F con i punti N, ... mezzi degli archi sottesi dalle corde $D'E'$, $E'F'$, $F'B'$ ..... sono perpendicolari al piano del cerchio $M'N$, ed eguali i triangoli BNE', $E'CP$, ... risultano congrui a BMA e per conseguenza $AB = BC = BE' = E'C = \ldots\ldots$; i dieci triangoli $BE'C$, $E'CF'$, $CF'D$, $F'DB'$, $DB'E$, $B'EC'$, $EC'F$, $C'FD'$, $FD'B$ sono congrui ad ABC e la superficie del poliedro si compone di venti triangoli equilateri (*). Ad una faccia qualunque ABC è opposta la $A'B'C'$ simmetrica rispetto al centro O della sfera; gli altri sei vertici giacciono in piani paralleli ad ABC e costituiscono due triangoli equilateri $DE'F$, $D'EF'$ pur simmetrici rispetto ad O; ogni loro lato $DF = l'$ è diagonale del pentagono regolare $BCDEF$ e perciò con il lato l soddisfa alla proporzione $l' : l = l : l' - l$. Chiamando

---

(*) Se dai vertici B, D si abbassino le BH, DH normali allo spigolo AC l'angolo $BHD = i_1$ misurerà ciascun diedro dell'icosaedro e dal triangolo isoscele BHD si deduce sen $\frac{i_1}{2} = \frac{BD}{2\,BH} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}$; da cui si trae tang $\frac{i_1}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \text{tang}^2 \frac{i}{2}$, essendo i l'angolo diedro del dodecaedro regolare.

ρ, ρ' i raggi dei cerchi circoscritti ai triangoli ABC, $DE'F$ si ha pure $\rho' : \rho = l' : l = \rho : \rho' - \rho$; onde ρ' è il lato del decagono regolare stellato iscritto nel cerchio ρ. La distanza δ fra i piani ABC, $DE'F$ è il cateto di un triangolo rettangolo avente gli altri lati eguali a $\frac{3}{2}\rho$, $\rho' - \frac{1}{2}\rho$; ovvero $(\delta) = \left(\frac{3}{2}\rho\right) - \left(\rho' - \frac{1}{2}\rho\right) = 9\left(\frac{\rho}{2}\right) - 5\left(\frac{\rho}{2}\right) = (\rho)$, cioè $\delta = \rho$. La distanza fra i piani $DE'F$, $D'EF'$ si ottiene conducendo la normale comune $E'E_0 = \delta'$, ed osservando che il piede E_0 cade sulla circonferenza ρ' circoscritta a $D'EF'$ e nel mezzo dell'arco $F'D'$, onde $E_0F' = \rho'$ e dal triangolo rettangolo $E'E_0F'$ si ricava $(\delta') = (l) - (\rho') = 3(\rho) - (\rho') = (\rho' - \rho)$; ne consegue $\delta' = \rho' - \rho$ e il diametro della sfera iscritta nel solido pareggiare $\rho + \rho'$. Il dodecaedro e l'icosaedro regolare sono poliedri correlativi; e se il medesimo cerchio ρ sia circoscritto ad una faccia di entrambi, avranno comuni le due sfere iscritte e circoscritte; proposizione di Aristeo contemporaneo di Euclide, e riferita pure dal Prof. Loria alla pagina 70 della sua Memoria.

(Continua). G. BELLACCHI.

SOPRA ALCUNE EQUAZIONI INDETERMINATE DI PRIMO GRADO.

(Continuazione e fine, V. pag. 29).

3. Facendo nella (A) $p = 4$ si ottiene:

$$s_{m,4} = \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)} s_{m-4k,\,3}\,.$$

Mutando nella $(1)'$ m in $m - 4k$, e sostituendo in quest' ultima formola si ha:

$$s_{m,4} = \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)} \frac{(m - 4k + 3)^2 - r^2_{m-k}}{12} + \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)} \frac{(-1)^m + (-1)^{r_{m-k}}}{8}$$

che si riduce a

$$s_{m,4} = \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)} \frac{(m - 4k + 3)^2}{12} + \frac{(-1)^m}{8}\left[\left(\frac{m}{4}\right) + 1\right] - \frac{1}{24}\sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)}\left[2r^2_{m-k} - 3(-1)^{r_{m-k}}\right].$$

Ed applicando al primo termine del secondo membro la formola per la somma delle progressioni aritmetiche di ordine superiore, si trova eseguendo calcoli

$$s_{m,4}=\frac{1}{24}\left\{\left[\left(\frac{m}{4}\right)+1\right]_1\left[2(m+3)^2+3(-1)^m\right]-\right.$$

$$16\left[\left(\frac{m}{4}\right)+1\right]_2(m+1)+64\left[\left(\frac{m}{4}\right)+1\right]_3-$$

$$\left.\sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)}\left[2r_{m-k}^2-3(-1)^{r_{m-k}}\right]\right\}.$$

Ricordando ora che r_{m-k} è il resto della divisione di $m-k$ per 3, denotiamo con n_0, n_1, n_2 rispettivamente il numero delle $r_{m-k}\left[k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \left(\frac{m}{4}\right)\right]$ uguali a 0, 1, 2. Sarà:

$$\sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)}r_{m-k}^2=n_1+4n_2,\quad \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)}(-1)^{r_{m-k}}=n_0-n_1+n_2,$$

$$\sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)}\left(2r_{m-k}^2-3(-1)^{r_{m-k}}\right)=5(n_1+n_2)-3n_0,$$

e per la determinazione in funzione di m della quantità $\sum_k\left(2r_{m-k}^2-3(-1)^{r_{m-k}}\right)$ conviene ora distinguere vari casi:

I. $$m\equiv 0\qquad(\text{mod. } 3).$$

Dei numeri k della serie 0, 1, 2 .... $\left(\frac{m}{4}\right)$ si formino tre gruppi che soddisfino le congruenze

$$k_0\equiv 0,\qquad k_1\equiv 1,\qquad k_2\equiv 2\qquad(\text{mod. } 3)$$

ne segue

$$m-k_0\equiv 0,\qquad m-k_1\equiv 2,\qquad m-k_2\equiv 1$$

ed i numeri n_0, n_2, n_1 saranno uguali rispettivamente al numero delle soluzioni di queste congruenze pei valori delle K non maggiori di $\left(\frac{m}{4}\right)$. E considerando ora tre sottocasi distinti a seconda che è $\left(\frac{m}{4}\right)\equiv 0,\ 1,\ 2,$ si trova con facilità:

1.° $\left(\frac{m}{4}\right)\equiv 0:\ n_0=\dfrac{\left(\frac{m}{4}\right)}{3}+1,\quad n_1=\dfrac{\left(\frac{m}{4}\right)}{3},\quad n_2=\dfrac{\left(\frac{m}{4}\right)}{3}$

onde

$$\sum_k \left[2r^2_{m-k} - 3(-1)^{r_{m-k}}\right] = \frac{7\left(\frac{m}{4}\right) - 9}{3}.$$

2.° $\left(\frac{m}{4}\right) \equiv 1$; $\sum_k \left[2r^2_{m-k} - 3(-1)^{r_{m-k}}\right] = \frac{7\left(\frac{m}{4}\right) - 1}{3}$.

3.° $\left(\frac{m}{4}\right) \equiv 2$; $\sum_k \left[2r^2_{m-k} - 3(-1)^{r_{m-k}}\right] = \frac{7\left(\frac{m}{4}\right) + 7}{3}$.

Gli altri casi si trattano in modo analogo, e si troverà adunque:

II. $m \equiv 1 \pmod{3}$.

1.° $\left(\frac{m}{4}\right) \equiv 0$; $\sum_k \left[2r^2_{m-k} - 3(-1)^{r_{m-k}}\right] = \frac{7\left(\frac{m}{4}\right) + 15}{3}$.

2.° $\left(\frac{m}{4}\right) \equiv 1$; $\sum_k \left[2r^2_{m-k} - 3(-1)^{r_{m-k}}\right] = \frac{7\left(\frac{m}{4}\right) - 1}{3}$.

3.° $\left(\frac{m}{4}\right) \equiv 2$; $\sum_k \left[2r^2_{m-k} - 3(-1)^{r_{m-k}}\right] = \frac{7\left(\frac{m}{4}\right) + 7}{3}$.

III. $m \equiv 2 \pmod{3}$.

1.° $\left(\frac{m}{4}\right) \equiv 0$; $\sum_k \left[2r^2_{m-k} - 3(-1)^{r_{m-k}}\right] = \frac{7\left(\frac{m}{4}\right) + 15}{3}$.

2.° $\left(\frac{m}{4}\right) \equiv 1$; $\sum_k \left[2r^2_{m-k} - 3(-1)^{r_{m-k}}\right] = \frac{7\left(\frac{m}{4}\right) + 23}{3}$.

3.° $\left(\frac{m}{4}\right) \equiv 2$; $\sum_k \left[2r^2_{m-k} - 3(-1)^{r_{m-k}}\right] = \frac{7\left(\frac{m}{4}\right) + 7}{3}$.

L'ispezione dei valori trovati per la quantità $\sum \left[2r^2_{m-k} - 3(-1)^{r_{m-k}}\right]$ mostra che essi si riducono a cinque differenti, sostituendo nell'ultima espressione trovata per $s_{m,4}$ si ottiene:

$$s_{m,4} = \frac{1}{24}\left\{\left[\left(\frac{m}{4}\right) + 1\right]_1 \left[2(m+3)^2 + 3(-1)^m\right] - 16\left[\left(\frac{m}{4}\right) + 1\right]_2 (m+1) + 64\left[\left(\frac{m}{4}\right) + 1\right]_3 - \frac{7}{3}\left(\left(\frac{m}{4}\right) + \alpha\right)\right\} \quad \ldots (4)$$

dove si ha:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha = 1 \quad \text{quando } m \text{ è } \textit{qualunque} \text{ ed } \quad \frac{m}{4} \equiv 2 \\
&\alpha = -\frac{1}{7} \quad \text{»} \quad \left(m \equiv 0, \left(\frac{m}{4}\right) \equiv 1\right) \text{ ovv. } \left(m \equiv 1, \frac{m}{4} \equiv 1\right) \\
&\alpha = -\frac{9}{7} \quad \text{»} \quad \left(m \equiv 0, \left(\frac{m}{4}\right) \equiv 0\right) \\
&\alpha = +\frac{15}{7} \quad \text{»} \quad \left(m \equiv 1, \left(\frac{m}{4}\right) \equiv 0\right) \quad \text{»} \quad \left(m \equiv 2, \left(\frac{m}{4}\right) \equiv 0\right. \\
&\alpha = +\frac{23}{7} \quad \text{»} \quad \left(m \equiv 2, \left(\frac{m}{4}\right) \equiv 1\right.
\end{aligned}\right\} \pmod{3}$$

Ponendo $p = 4$ nella (B) e nella (C) si avrà:

$$s'_{m,4} = s_{m-4,4}\,, \qquad s''_{m,4} = s_{m-10,4}$$

e per la (4) si ricaverà:

$$(5) \qquad s'_{m,4} = \frac{1}{24}\left\{\left(\frac{m}{4}\right)_1 \left[2(m-1)^2 + 3(-1)^m\right] - \right.$$
$$\left. 16\left(\frac{m}{4}\right)_2 (m-3) + 64\left(\frac{m}{4}\right)_3 - \frac{7}{3}\left[\left(\frac{m}{4}\right) - 1 + \alpha'\right]\right\},$$

$$(6) \qquad s''_{m,4} = \frac{1}{24}\left\{\left[\left(\frac{m-2}{4}\right) - 1\right]_1 \left[2(m-7)^2 + 3(-1)^m\right] - \right.$$
$$\left. 16\left[\left(\frac{m-2}{4}\right) - 1\right]_2 (m-9) + 64\left[\left(\frac{m-2}{4}\right) - 1\right]_3 - \frac{7}{3}\left[\left(\frac{m-2}{4}\right) - 2 + \alpha''\right]\right\}$$

dove α' ed α'' si determinano nei singoli casi colla stessa tabella che fornisce i valori delle α, quando vi si muti rispettivamente m in $m-4$ ed in $m-10$.

4. Mostreremo finalmente come si possa determinare il numero delle soluzioni delle equazioni

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = m\,, \qquad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = m.$$

Denotando con S^3_m, S^4_m i numeri cercati si ha dalla formola (9) della mia nota citata

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad S^3_m = s'_{m+3,3}\,, \qquad S^4_m = s'_{m+4,4}$$

e per tutto quanto precede i secondi membri di queste eguaglianze sono perfettamente conosciuti.

Roma, 1892.

ALBERTO TAGIURI.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Regole d'analogia nel triangolo o trasformazione continua, e trasformazione analitica corrispondente. (*Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, T. CXVI. N.° 1, 1893). — Chiamando A, B, C, a, b, c, p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, S, R, r, r_a, r_b, r_c, δ, δ_a, δ_b, δ_c, ... gli angoli, i lati, il semiperimetro, le quantità $\frac{b+c-a}{2}$, $\frac{c+a-b}{2}$, $\frac{a+b-c}{2}$, la superficie, il raggio del cerchio circoscritto, i raggi dei quattro cerchi inscritto ed ex-inscritti, le quantità $4R+r$, $4R-r_a$, $4R-r_b$, $4R-r_c$, ...

Se, in una formola fra gli elementi del triangolo, si cambiano queste quantità rispettivamente in $-A$, $\pi-B$, $\pi-C$, a, $-b$, $-c$, $-(p-a)$, $-p$, $(p-a)$, $(p-b)$, $-S$, $-R$, r_a, r, r_c, r_b, $-\delta_a$, $-\delta$, $-\delta_c$, $-\delta_b$, si avrà una formula esatta.

Se, per esempio, è stata dimostrata la formola

$$\Sigma\,(b-a)^2\,(c-a)^2=(p^2-3\,r\,\delta)^2\,,$$

se ne deduce

$$(b+a)^2\,(c+a)^2+(b+a)^2\,(b-c)^2+(c+a)^2\,(b-c)^2=[(p-a)^2+3\,r_a\,\delta_a]^2\,,$$

che sarebbe stato impossibile indovinare *a priori*.

E. LEMOINE.

Nota della Red. — Per maggiori particolari sull'argomento si possono consultare: un articolo dell'A. nel *Bulletin de la Société mathématique de France* (1891, pp. 136-141), le seguenti note del medesimo: 1° *Étude sur une nouvelle méthode de transformation dite transformation continue* (*Mathesis*, 1892, pp. 58-64, 81-92) — 2°. *Sur les transformations systématiques des formules relatives au triangle. Transformation continue* (*Association française p. l'avan. des Sciences*, *Annuaire* de 1891, pp. 118-130) — 3°. *Règle des analogies dans le triangle. Transformation continue* (*Journal de Mathé. élém.* de M. DE LONGCHAMPS, 1892, pp. 103-106) — 4°. *Une règle d'analogies dans le triangle et la spécification de certaines analogies à une transformation dite « transformation continue »* (*Nou. Annales de Mathé.*, 1893, pp. 20-36); come pure la nota del Sig. A. POULAIN col titolo *Transformation des formules du triangle* (*J. de Mathé. élem.*, 1892, pp. 110-113, 136-139, 151-153).

Sopra una soluzione della Quistione 113. — Potendo il metodo analitico da me seguito nella ricerca della radice doppia dell'equazione proposta nella q. 113 essere oggetto di alcune critiche, espongo qui la stessa ricerca con metodo rigoroso, credendo di giovare ai giovani studenti col porgere loro occasione di rivedere la poco curata teoria della divisibilità dei polinomi (Vedasi p. es. BERTRAND - *Algebra*, traduz. di Betti, Cap. XIII).

La quistione era: « *Dimostrare che l'equazione*

$$A_4x^4+A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0=0\,,$$

in cui è $A_4 = m^5 - l m^3 n + m^2 l^4$, $A_3 = 4 m^4 n - 31 m^2 n^2 - 11 m^3 l^3 + 2 m n l^4$, $A_2 = 6 m^3 n^2 - 3 m n^3 l + 64 m^4 l^2 - 49 l^3 n m^2 + n^2 l^4$, $A_1 = 4 m^2 n^3 - n^4 l + 128 m^3 n l^2 - 65 m n^2 l^3$, $A_0 = m n^4 + 64 m^2 n^2 l^2 - 27 l^3 n^3$, *ha due radici eguali, ed esprimere queste e l'altre radici in funzione di* l, m, n. (D. Besso) ».

Pongasi

$$f(x) = A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 ;$$

allora la prima derivata di $f(x)$ sarà

$$f'(x) = 4 A_4 x^3 + 3 A_3 x^2 + 2 A_2 x + A_1 .$$

Osservo intanto che

$$A_4 = m^2 A_4' , \quad \text{ove} \quad A_4' = m^3 - lmn + l^4 ;$$

ora A_4' non può essere risoluto in fattori razionali di cui uno sia di 1° grado rispetto ad m, perchè quest'ultimo sarebbe della forma $m - p$, essendo p un divisore intero di l^4, e allora A_4' si annullerebbe per un valore di m indipendente da n, il che per l'arbitrarietà di n è chiaramente impossibile. Ma A_4' non è divisibile nemmeno per un polinomio che contenga le sole lettere l ed n, perchè tale polinomio dovrebbe dividere i singoli termini di A_4'; dunque A^4 è primo (irriducibile in fattori).

Ciò posto, si osservi che A_4' non divide A_0, perchè A_0 è di 2° grado in m, mentre A_4' è di 3° grado in m; inoltre m non divide A_0, dunque A_4 è primo con A_0. Segue di qui che non esiste un divisore dei cinque coefficienti A_4, A_3, A_2, A_1, A_0 di $f(x)$, cioè che A_4 *è primo con* $f(x)$.

Sia ora α la radice doppia di $f(x) = 0$; sappiamo che, se le rimanenti due radici β e γ di $f(x) = 0$ sono distinte, $x - \alpha$ sarà il massimo divisore di $\frac{f(x)}{A_4}$ ed $\frac{f'(x)}{4 A_4}$, e perciò α sarà razionale ; potremo dunque porre $\alpha = \frac{r}{s}$, indicando con r ed s due polinomi in l, m, n primi fra loro.

Allora sarà

$$f(x) = A_4 \left(x - \frac{r}{s}\right)^2 (x - \beta)(x - \gamma) ,$$

da cui

$$s^2 f(x) = A_4 (s x - r)^2 (x - \beta)(x - \gamma) .$$

Dividendo dunque il polinomio a coefficienti interi $s^2 f(x)$ per l'altro a coefficienti interi $A_4 (s x - r)^2$, si otterrà il quoziente di 2° grado $(x - \beta)(x - \gamma) = x^2 + p x + q$ (poniamo); e quindi p e q saranno espressioni razionali in l, m, n, e si potrà supporre che p e q siano rappresentati da due frazioni aventi lo stesso *minimo* denominatore ; sicchè, posto $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, avremo

$$x^2 + p x + q = \frac{a x^2 + b x + c}{a} ,$$

ed a, b, c non avranno alcun divisore comune. Allora avremo

$$a s^2 f(x) = A_4 (s x - r)^2 (a x^2 + b x + c) .$$

Ora as^2 divide il 1° membro di questa equazione, dunque dividerà anche il secondo. Ma as^2 è primo con $ax^2 + bx + c$, poichè a, b, c non hanno alcun divisore comune, ed è primo con $sx - r$ e quindi anche con $(sx - r)^2$; dunque as^2 divide A_4. Inoltre A_4, dividendo il secondo membro della medesima equazione, ne dividerà anche il primo membro $as^2 f(x)$; ma abbiamo già provato che A_4 è primo con $f(x)$, dunque A_4 divide as^2. Sicchè A_4 ed as^2 sono ciascuno un divisore dell'altro, dunque $A_4 = as^2$. Avremo perciò

$$f(x) = (sx - r)^2 (ax^2 + bx + c).$$

Ora, confrontando i coefficienti dei due membri, si trova in particolare $A_0 = cr^2$; dunque s ed r debbono essere fattori doppi rispettivamente di A_4 e di A_0.

D'altronde si ha

$$A_0 = n^2 A_0', \quad \text{ove} \quad A_0' = mn^2 + 64 m^2 l^2 - 27 l^3 n;$$

dico che A_0' è primo. Intanto il discriminante di A_0', essendo

$$n^4 + 4 \cdot 64 \cdot 27 l^5 n,$$

non è un quadrato, e quindi A_0' non è decomponibile in fattori razionali rispetto ad m; inoltre, essendo i coefficienti di m^2, m, m^0 in A_0' primi fra loro, A_0' non è divisibile nemmeno per un fattore razionale che non contenga m, e quindi A_0' è primo; dunque $\pm n$ e ± 1 sono i soli fattori doppi di A_0. Siccome si ha $A_4 = m^2 A_4'$ e si è già osservato che A_4' è primo, si conclude anche che $\pm m$ e ± 1 sono i soli fattori doppi di A_4.

Segue di qui che, se α è radice doppia razionale di $f(x) = 0$, non può essere che

$$\alpha = \pm \frac{n}{m}, \quad \alpha = \pm n, \quad \alpha = \pm \frac{1}{m}, \quad \alpha = \pm 1,$$

cioè α è indipendente da l. Ma facendo $l = 0$ si trova subito

$$f(x) = m(mx + n)^4,$$

dunque, se α è razionale, deve essere

$$\alpha = -\frac{n}{m}.$$

Non resta dunque che verificare; e la verifica dà facilmente

$$f\left(-\frac{n}{m}\right) = 0, \qquad f'\left(-\frac{n}{m}\right) = 0,$$

cioè $\alpha = -\frac{n}{m}$ è effettivamente una radice doppia.

Palermo, gennaio 1893.

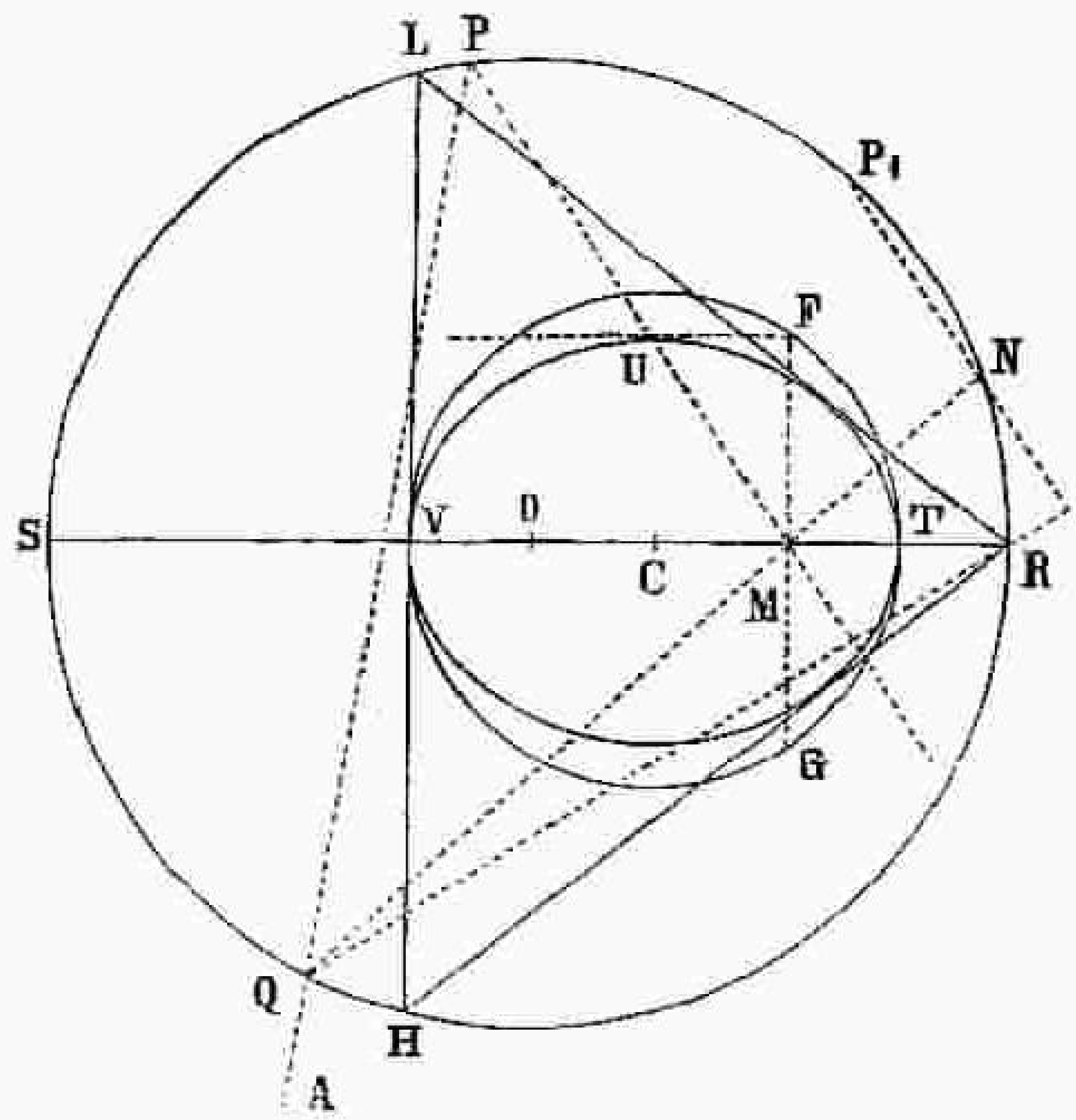
G. Rozzolino.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
118, 132, 133, 145**, 146*, 147*, 148* e 151** (*)

118. *L' inviluppo dei lati dei triangoli iso-ortocentrici e iscritti in un dato cerchio è una conica concentrica e bitangente alla circonferenza dei nove punti, comune a tutti quei triangoli, e avente un fuoco nel comune ortocentro, e l'altro fuoco nel centro del dato cerchio.* (S. CATANIA).

Dimostrazione del Sig. Prof. *F. Palatini* a Venezia.

Sia A un punto qualunque del piano, e vediamo quanti dei lati dei triangoli in discorso passano per esso. Fissiamo un punto P sul cerchio dato di centro O e tiriamo AP, la quale taglierà il cerchio ulteriormente in Q; tiriamo PM (M comune ortocentro dato) e da Q la perpendicolare ad essa, la quale taglierà il cerchio dato ancora in N; tiriamo QM ed a questa la perpendicolare da N, la quale taglierà ancora il cerchio O in un punto P_1; se P_1 cadesse in P, il triangolo PNQ sarebbe uno dei triangoli della quistione. Ora essendo che ad ogni punto P corrisponde un punto P_1 e ad ogni P_1 un P, le coincidenze sono due, e perciò due sono i raggi in discorso passanti per A. Dunque l'inviluppo che stiamo esaminando è una conica K, ed i triangoli della quistione sono gl'infiniti triangoli contemporaneamente circoscritti a K ed inscritti in O. È chiaro che la K dev'essere simmetrica rispetto ad $RMOS$ che adunque contiene un asse della medesima.



Ora per ognuno dei nostri triangoli esiste un cerchio dei nove punti col centro in C, punto di mezzo di OM (V. p. es. BALTZER. *Plan.* § 12, 8), ed è evidente che due di tali triangoli XYZ, $X'Y'Z'$, simmetrici rispetto ad RS, hanno il medesimo cerchio dei nove punti, che dimezza MX, MY, ..., MZ'. Ma il

(*) La risposta alla quistione 143 viene rimandata al fascicolo venturo, in causa del notevole sviluppo che richiede.

luogo dei punti di mezzo dei segmenti che uniscono M coi punti di O è una conica (perchè ha due punti sopra ogni retta per M senza passare per questo punto), la quale ha dunque sei punti in comune col cerchio ultimamente considerato. Dunque tutti i cerchi dei nove punti dei nostri triangoli coincidono in un unico cerchio C che si può definire: 1° come il luogo dei punti di mezzo dei segmenti che uniscono M coi punti di O; 2° come la podaria di M rispetto a K; 3° come il luogo dei punti di mezzo delle corde che il cerchio O intercetta sulle tangenti di K. Ora prendendo il triangolo HLR è chiaro che C tocca HL in V, cioè la K in V ed analogamente in T; ossia il cerchio dei nove punti comune ai nostri triangoli tocca la K in due vertici, ed è quindi ad essa concentrico.

Se M è interno ad O e quindi a C, la perpendicolare da M ad RS incontra C in due punti reali F, G; conducendo p. e. da F la parallela ad RS, essa è tangente a K (è chiaro che la K può anche definirsi come l'inviluppo delle perpendicolari alle rette uscenti da M nei punti in cui queste incontrano C) in un vertice (reale) U dell'asse diverso da TV, il che prova che K è un'ellisse; ed essendo $MU = CF = CT$, vuol dire che M è uno dei fuochi reali della curva, e quindi O l'altro.

Se M è fuori del cerchio O e quindi di C, conducendo da M una tangente a C, MD (D punto di contatto), la CD che è perpendicolare ad MD in D è tangente a K, della quale sarà dunque un assintoto reale; perciò in questo caso la K è un'iperbole. E poichè la perpendicolare condotta da M all'assintoto CD taglia su questo un segmento CD eguale al semi-asse CT, vuol dire che M è uno dei fuochi reali della curva, e quindi O l'altro.

Se infine M cade sulla circonferenza O, i triangoli della quistione sono tutti rettangoli col vertice dell'angolo retto in M e coll'ipotenusa ruotante intorno ad O, ed il nostro inviluppo si riduce a due fasci di raggi coi centri M, O.

132. *Risolvere l'equazione*

$$x^7 - 7(x-1)^2 . x . (x+1)^2 = a. \qquad (*)$$

(F. Giudice).

Risoluzione del Sig. Prof. *M. Martone* a Reggio Calabria.

Sviluppando e ordinando si ha l'equazione

$$x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x - a = 0$$

che per $x = z + \frac{1}{z}$ [1], dove z indica una nuova incognita, si muta nell'equazione trinomia

$$z^{2 \cdot 7} - az^7 + 1 = 0 \qquad [2],$$

(*) Come avverte il Sig. Prof. *S. Catania* ponendo $a = -b$, l'equazione proposta si riduce a $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x + b = 0$, che non è se non un caso particolare ($a = -1$), dell'equazione $x^7 + 7ax^5 + 14a^2x^3 + 7a^3x + b = 0$ considerata nella q. 52 (Cfr. *Periodico*, an. V, pp. 27, 142). Tuttavia stante la qualche diversità del processo di risoluzione seguito appresso in confronto a quello della soluzione della q. 52, diamo posto alla risposta inviataci.

da cui si ricava

$$z^7 = y = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{4} \qquad [3].$$

Ora sono da esaminare tre casi:

1° $a^2 - 4 = 0$, cioè $a = \pm 2$. Risulta $z^7 = \pm 1$. Quindi

$$z = \cos\frac{2k\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{7} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

o

$$z = \cos\frac{(2k+1)\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{7} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

e perciò per la [1], le radici della proposta equazione saranno date da

$$x = 2\cos\frac{2k\pi}{7} \quad \text{od} \quad x = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{7} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

2° $a^2 - 4 > 0$. Indicando in questo caso con b_1 e b_2 le due radici [3], saranno da risolvere le due equazioni binomie $z^7 - b_1 = 0$, $z^7 - b_2 = 0$, le quali dànno

$$z = \sqrt[7]{b_1}\left[\cos\frac{2k\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{7}\right], \quad z = \sqrt[7]{b_2}\left[\cos\frac{2k\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{7}\right]$$

e tali valori sostituiti alla lor volta in [1], facendo $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, forniscono le radici dell'equazione proposta.

3° $a^2 - 4 < 0$ quindi $a < 2$ in valore assoluto. Pongasi

$$\frac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2} = \cos\beta \pm i \operatorname{sen}\beta,$$

donde $a = 2\cos\beta$. L'equazione [2] diviene in tal caso

$$z^{2\cdot 7} - 2\cos\beta \,.\, z^7 + 1 = 0,$$

che ha per radici i quattordici valori

$$z = \cos\frac{2k\pi+\beta}{7} \pm i \operatorname{sen}\frac{2k\pi+\beta}{7} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Sostituendo questo valore di z in [1], segue poi

$$x = 2\cos\frac{2k\pi+\beta}{7} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Dalla discussione precedente risulta che nel 1° e nell' ultimo caso le radici dell'equazione proposta sono tutte reali, nel 2° una è reale e le altre sei sono immaginarie.

133. *Se il triangolo* ABC *ruota attorno ad un punto* K *del suo piano ed è* A'B'C' *una nuova sua posizione, e se inoltre* α, β, γ *sono i punti d'incontro rispettivamente di* BC *con* B'C', *di* CA *con* C'A' *e di* AB *con* A'B', *si ha che:*

1° se K *è il punto di Lemoine (o punto d' incontro delle simediane) del triangolo* ABC, *è anche il baricentro del triangolo* $\alpha\beta\gamma$;

2° se K è un punto di Brocard del triangolo ABC, *è pure un punto di Brocard del triangolo* $\alpha\beta\gamma$, *il quale è simile ad* ABC.

(G. Riboni).

Risposta del Sig. Prof. *S. Catania* a Catania.

1° Dico E, F, G i piedi delle perpendicolari condotte da K rispettivamente ai lati BC, CA, AB del triangolo ABC, ed E', F', G' i punti analoghi per il triangolo $A'B'C'$; risulteranno $KG = KG'$, $\gamma G = \gamma G'$. Detto δ l'angolo di cui è rotato il triangolo ABC, ed x, y, z le distanze KE, KF, KG, si avrà $K\gamma = z : \cos\frac{1}{2}\delta$.

Ora, essendo K il punto di Lemoine del triangolo ABC, si ha

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{2\Delta}{a^2+b^2+c^2} = Q,$$

dove a, b, c, Δ rappresentano i lati e l'area del triangolo stesso. Si deduce $z = c.Q$ e $\frac{K\gamma}{c} = \frac{Q}{\cos\frac{1}{2}\delta}$, e per conseguenza

$$\frac{K\alpha}{a} = \frac{K\beta}{b} = \frac{K\gamma}{c} \quad \text{ovvero} \quad \frac{K\alpha}{x} = \frac{K\beta}{y} = \frac{K\gamma}{z} \qquad (1).$$

I triangoli $KE\alpha$, $KF\beta$ essendo rettangoli, e per le (1) essendo $K\alpha : KE = K\beta : KF$ (2), detti triangoli saranno eziandio simili, e sarà l'angolo $\alpha KE = \beta KF$; posto in comune l'angolo $FK\alpha$, risulterà l'angolo $\beta K\alpha = FKE$. E siccome inoltre ha luogo la (2), i triangoli $K\alpha\beta$, KEF saranno simili fra loro. Si dimostra in modo analogo che sono simili i triangoli $K\beta\gamma$, KFG, e i triangoli $K\gamma\alpha$, KGE.

I triangoli EFG, $\alpha\beta\gamma$ essendo composti dello stesso numero di triangoli simili e similmente situati, saranno simili, e K sarà omologo di sè stesso. Ora è noto (J. Casey, *A sequel to Euclid*, pag. 172, 1888 - G. Bellacchi, *Algebra*, vol. 3°, pag. 58) che essendo K il punto di Lemoine del triangolo ABC, è anche il baricentro del triangolo podario EFG relativo al punto K e al medesimo triangolo, quindi K è pure il baricentro del triangolo $\alpha\beta\gamma$.

Oss. 1.ª Dalla dimostrazione precedente risulta che *due triangoli analoghi al triangolo* $\alpha\beta\gamma$ *sono simili fra loro e simili al triangolo* EFG.

Oss. 2.ª Si ha da tale similitudine

$$T.\alpha\beta\gamma : T.EFG = \overline{K\gamma}^2 : z^2 = 1 : \cos^2\frac{1}{2}\delta,$$

cioè: *due triangoli analoghi al triangolo* $\alpha\beta\gamma$ *sono fra loro in ragione inversa dei quadrati dei coseni delle metà delle corrispondenti rotazioni.*

Oss. 3.ª Si può esprimere l'area del triangolo $\alpha\beta\gamma$ in funzione di a, b, c e δ. Infatti, essendo $\frac{3}{2}x$, $\frac{3}{2}y$, $\frac{3}{2}z$, cioè $\frac{3}{2}Q.a$, $\frac{3}{2}Q.b$, $\frac{3}{2}Q.c$ le mediane del triangolo EFG, la sua area sarà espressa, come è facile verificare, da $3Q^2.\Delta = \frac{12\Delta^3}{(a^2+b^2+c^2)^2}$, e sarà quindi $T.\alpha\beta\gamma = \frac{12\Delta^3}{(a^2+b^2+c^2)^2\cos^2\frac{1}{2}\delta}$.

2° Dico Ω e ω rispettivamente il punto positivo e l'angolo di Brocard relativi al triangolo ABC; saranno Ω ed ω il punto positivo e l'angolo di Brocard relativi al triangolo $A'B'C'$. Essendo ang. $\Omega B\alpha = \Omega B'\alpha$, e ang. $\alpha B\gamma = \alpha B'\gamma$, i cinque punti $\Omega, \alpha, \gamma, B, B'$ saranno conciclici, e risulterà ang. $\Omega\gamma\alpha = \omega$. Si dimostra similmente che ang. $\Omega\alpha\beta = \Omega\beta\gamma = \omega$, e perciò Ω è il punto positivo di Brocard relativo al triangolo $\alpha\beta\gamma$. Inoltre, dal pentagono iscrittibile $\Omega\alpha BB'\gamma$ si ha ang. $\Omega\alpha\gamma = \Omega B\gamma$, e quindi ang. $\gamma\alpha\beta = ABC$. Si dimostra similmente che ang. $\beta\gamma\alpha = CAB$ e ang. $\alpha\beta\gamma = BCA$. Così il triangolo $\alpha\beta\gamma$ è simile al triangolo ABC. Si noti però che ai lati $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ del primo sono omologhi nel secondo i lati BC, CA, AB.

Oss. 1.ª Si può determinare anche qui l'area del triangolo $\alpha\beta\gamma$. Infatti, si ha $T.\alpha\beta\gamma : T.ABC = \overline{\Omega\gamma}^2 : \overline{\Omega A}^2$. Detta m la perpendicolare condotta da Ω ad AB si ha: $m = \Omega\gamma \, . \cos\frac{1}{2}\delta = \Omega A$ sen ω: quindi

$$T.\alpha\beta\gamma = \frac{\text{sen}^2\omega}{\cos^2\frac{1}{2}\delta} . \Delta.$$

E si può enunciare un teorema analogo a quello della precedente 2ª Oss..

Oss. 2.ª Del teorema 2° esiste pure l'inverso, che si può enunciare nel seguente modo: *Se il triangolo* ABC *ruota attorno a un punto* K *del suo piano ed è* A'B'C' *una nuova sua posizione, e se inoltre* α, β, γ *sono i punti d'incontro rispettivamente di* BC *con* B'C', *di* CA *con* C'A' *e di* AB *con* A'B', *e il triangolo* $\alpha\beta\gamma$ *è simile al triangolo* BCA, *allora* K *è un punto di Brocard del triangolo* ABC. La dimostrazione è facile, perchè dalle ipotesi fatte risultano conciclici i gruppi di punti α, B, B', γ e B, B', γ, Ω, cioè risultano conciclici i cinque punti $B, B', \gamma, \Omega, \alpha$, e sarà ang. $\Omega\gamma\alpha = \Omega BC$. Inoltre ang. $AB\Omega = \gamma\alpha\Omega$; sarà perciò ang. $\Omega\alpha\beta = \Omega BC = \Omega\gamma\alpha$. Di qui è ovvio dedurre che Ω è un punto di Brocard tanto del triangolo $\alpha\beta\gamma$, quanto del triangolo ABC.

Rimane anche risoluto il seguente problema: *Determinare nel piano d' un triangolo* ABC *un punto* K *in modo che sieno verificate le condizioni espresse nel teorema dell'ultima osservazione.*

145.** *Posto*

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \; a_2 = \frac{b+a_1}{2}, \; a_3 = \frac{a_1+a_2}{2}, \ldots\ldots a_n = \frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2},$$

esprimere a_n *in funzione di* a, b, n, *e trovare il limite a cui tende* a_n *quando* n *tende all'infinito.*

(D. Besso).

Soluzione della Sig.ra V.va *F. Prime* a Bruxelles e del Sig. *C. Aiello*, studente nella R. Università di Napoli.

Sopra l'asse Ox, prendiamo, nella stessa direzione, $OA = a$, $OB = b$ e sia A_1 il punto medio del segmento AB, A_2 il centro del segmento A_1B, A_3 il centro del segmento A_1A_2, ... A_n il centro del segmento $A_{n-2}A_{n-1}$.

È chiaro che a_1 rappresenta il segmento OA_1; a_2 il segmento OA_2, ... a_n il segmento OA_n. E quindi

$$a_n = b - \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^2} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{b-a}{2^n} =$$

$$b - \frac{b-a}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right) = b - \frac{b-a}{3} + (-1)^n \cdot \frac{b-a}{3 \cdot 2^n}$$

e

$$a_\infty = b - \frac{b-a}{3} = \frac{2b+a}{3}.$$

Si vede da ciò che, tendendo n all'infinito, il punto A_n tende verso il punto che divide AB nel rapporto $2:1$.

Soluzione del Sig. *E. Ghisi*, studente nella R. Università di Catania.

Ponendo

$$\alpha_k = 2^k - 2^{k-1} + 2^{k-2} - \dots (-1)^k \, 2^0 \qquad [1]$$

è facile verificare che $\alpha_{k+2} = \alpha_{k+1} + 2\alpha_k$ [2]. Ciò posto, si trova

$$a_2 = \frac{a\alpha_1 + b\alpha_2}{2^2}, \qquad a_3 = \frac{a\alpha_2 + b\alpha_3}{2^3}.$$

Dico che in generale $a_i = \dfrac{a\alpha_{i-1} + b\alpha_i}{2^i}$. Infatti ammettiamo che la legge di formazione delle a espressa da questa formola valga per le due consecutive a_k ed a_{k+1}: si avrà per dato e in seguito alla [2]

$$a_{k+2} = \frac{a_k + a_{k+1}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{a\alpha_{k-1} + b\alpha_k}{2^k} + \frac{a\alpha_k + b\alpha_{k+1}}{2^{k+1}}\right] =$$

$$= \frac{a\left(\alpha_k + 2\alpha_{k-1}\right) + b\left(\alpha_{k+1} + 2\alpha_k\right)}{2^{k+2}} = \frac{a\alpha_{k+1} + b\alpha_{k+2}}{2^{k+2}},$$

sicchè la legge, che è vera per a_2 e a_3, è vera sempre.

Ora osservando che i termini del secondo membro della [1] sono in progressione geometrica di ragione -2, α_k, che ne è la somma, prende anche la forma $\dfrac{2^{k+1} + (-1)^k}{3}$, cosicchè sarà

$$a_n = \frac{a\alpha_{n-1} + b\alpha_n}{2^n} = \frac{a\left[2^n + (-1)^{n-1}\right] + b\left[2^{n+1} + (-1)^n\right]}{3 \cdot 2^n} =$$

$$= \frac{2b+a}{3} + (-1)^n \frac{b-a}{3 \cdot 2^n}$$

e

$$\lim_{n=\infty} a_n = \frac{2b+a}{3} \quad (*).$$

(*) Altre soluzioni pervennero dai Sigg. *G. Candido* (studente nella R. Università di Pisa), *V. Colombo* (R. Ist. tec. Bari), *E. de Vito* (R. Univ. Roma) e *G. Marotta* (R. Univ. Catania).

146*. *In un dato triangolo isoscele costruire tre circoli fra loro eguali, ciascuno dei quali sia tangente a due lati del triangolo, e in modo che quello tangente ai due lati eguali tocchi ciascuno degli altri due.*

Soluzione analoga dai Sigg. *V. Columbo*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari; *L. Luigi Mucci*, R. Liceo Lucera; *M. Piattelli*, R. Liceo Bari; *C. Scarponi*, R. Scuola tecnica Osimo; dalla Sig.ª V.va *F. Prime* e dalle Sig.ne *Luisa Polverini*, *Ada Sciava*.

Sia ABC ($AB = AC$) il triangolo isoscele considerato e siano AI, BI, CI le bisettrici dei suoi angoli. I centri α, β, γ dei circoli cercati si troveranno su queste rette e poichè $\alpha\beta$ dista da AB d'un segmento $= \alpha\beta : 2$, la quistione sarà ridotta ad inscrivere nel triangolo BIA un rettangolo col lato parallelo ad AB doppio dell'altro lato. Chiamando $\alpha\beta\gamma\delta$ un tale rettangolo è chiaro che il suo vertice γ si troverà nell'intersezione di AB col luogo dei punti pei quali le distanze a BI, valutate perpendicolarmente ad AB, sono le metà delle distanze dei corrispondenti punti β ad AI, prese parallelamente ad AB medesimo. Un tal luogo, che è una retta passante per I, può costruirsi immediatamente determinandone un punto così: Si innalzi ad AB la perpendicolare $DB = AB : 2$ e tirisi DI. Il punto d'incontro γ di DI con AB è un vertice del rettangolo cercato e per completare la soluzione del problema, basterà condurre da γ la perpendicolare ad AB ad incontrare BI in β, tirare da β la parallela $\beta\alpha$ ad AB fino che incontri AI in α e da α la parallela ad AC finchè incontri CI in γ. I punti α, β, γ saranno i centri dei circoli richiesti.

È facile dimostrare *a posteriori* l'esattezza della costruzione precedente. Dalle coppie di triangoli simili DBI, $\gamma\beta I$; ABI, $\alpha\beta I$, si ha:

$$DB : \gamma\beta = BI : \beta I \quad ; \quad AB : \alpha\beta = BI : \beta I$$

onde $DB : \gamma\beta = AB : \alpha\beta$ e quindi $\gamma\beta : \beta\alpha = DB : BA = 1 : 2$.

Il Sig. *T. Mari*, alunno del R. Istituto tec. di Napoli, dà una soluzione di carattere analitico. Egli indicata con ρ la distanza, da considerarsi nota, di I da AB, e con R il raggio comune dei tre cerchi, osserva, come precedentemente, che si ha:

$$AB : 2R = \rho : \rho - R,$$

da cui

$$R = \frac{AB \cdot \rho}{AB + 2\rho},$$

onde conclude che il raggio dei cerchi cercati è una quarta proporzionale dopo le tre lunghezze $AB + 2\rho$, AB e ρ. Determinato R è poi agevole costruire i circoli medesimi.

147*. *Sia* ABCD *un rettangolo e sia, sul prolungamento del lato* AB, *il punto* P *così situato che il rapporto* $\frac{AB}{AD}$ *sia il cubo del rapporto* $\frac{BP}{AD}$: *se la* PC *incontra in* R *il prolungamento della* AD, *i punti* R *e* P *saranno equidistanti dal punto d'incontro delle diagonali del rettangolo.*

Soluzione dei Sigg. *A. Parsi* a Genova, *E. de Vito* a Roma, *V. Columbo*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari e *G. Mazza*, alunno del R. Istituto tecnico di Piacenza.

Chiamando O il punto d'incontro delle diagonali, conducansi le perpendicolari OM, ON ai lati AD, AB del rettangolo e si tirino RO, OP.

Dai triangoli ROM, PON si ha subito

$$\overline{RO}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{RM}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 + \overline{DR}^2 + \overline{AD}.\overline{DR}, \qquad [1]$$

$$\overline{OP}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{NP}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{AB}.\overline{BP}. \qquad [2]$$

Ma dai triangoli simili RDC, CBP segue $\overline{RD} = \dfrac{\overline{AB}.\overline{AD}}{\overline{BP}}$, onde $\overline{DR}^2 + \overline{AD}.\overline{DR} = \dfrac{\overline{AB}^2.\overline{AD}^2}{\overline{BP}^2} + \dfrac{\overline{AB}.\overline{AD}^2}{\overline{BP}}$ e introducendo la condizione $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BP}^3}{\overline{AD}^3}$ che equivale a $\dfrac{\overline{AD}^2}{\overline{BP}^2} = \dfrac{\overline{BP}}{\overline{AB}}$ oppure a $\dfrac{\overline{AD}^2}{\overline{BP}} = \dfrac{\overline{BP}^2}{\overline{AB}}$, si ricava infine

$$\overline{DR}^2 + \overline{AD}.\overline{DR} = \overline{AB}.\overline{BP} + \overline{BP}^2,$$

ciò che mostra come i secondi membri delle [1] e [2] siano equivalenti. Si ha dunque $\overline{RO} = \overline{OP}$ c. v. d.. (*)

148*. ***Dati i raggi delle basi di due coni retti di egual volume e di eguale superficie totale, calcolare le loro altezze.***

Soluzioni analoghe della Sig.ra V.va *F. Prime* a Bruxelles e del Sig. *V. Columbo*, allievo del R. Istituto tecnico di Bari.

Siano r, R i raggi delle basi, h, H le altezze dei coni considerati; le quantità r, R sono note e le quantità h, H incognite.

I volumi dei coni essendo uguali, si ha

$$[1] \qquad r^2 h = R^2 H \qquad \text{o} \qquad h : H = R^2 : r^2 ;$$

le superficie totali essendo uguali, si ha ancora

$$[2] \qquad r.\sqrt{r^2 + h^2} + r^2 = R.\sqrt{R^2 + H^2} + R^2 .$$

Ponendo $\dfrac{h}{H} = \dfrac{R^2}{r^2} = k^2$, l'equazione [1] dà $h = k^2 H$ ed $R = kr$ e la [2] diviene

$$\sqrt{r^2 + k^4 H^2} - k\sqrt{k^2 r^2 + H^2} = r(k^2 - 1).$$

Poniamo ancora $k^2 r^2 + H^2 = Y^2$ e saremo infine condotti a risolvere l'equazione

$$\sqrt{r^2 + k^4 Y^2 - k^6 r^2} = r(k^2 - 1) + kY,$$

rispetto ad Y.

(*) Altre soluzioni pervennero dal Sig. *U. Gerra* (R. Istituto tec. Piacenza), *M. Giordano* (R. Istituto tec. Napoli) e dalla Sig.a V.a *F. Prime* a Bruxelles.

Ora, elevando al quadrato e trasformando, quest'equazione, dopo aver diviso per $k(k^2 - 1)$, diviene

$$k\,Y^2 - 2\,r\,Y - r^2 k\,(k^2 + 2) = 0\,,$$

da cui la soluzione accettabile

$$Y = r\,.\,\frac{k^2+2}{k}\,.$$

Risulta da ciò che

$$H = 2\,\frac{r}{R}\sqrt{R^2+r^2} \qquad \text{e} \qquad h = 2\,\frac{R}{r}\sqrt{R^2+r^2}\,.$$

La Sig.^{ra} *Prime* conclude osservando come questa soluzione si traduca nel seguente elegante enunciato: Le ipotenuse BC, CE, EG dei triangoli rettangoli simili ABC, DCE, FEG essendo poste consecutivamente su di una retta, se $AC = CD$ e $DE = EF$, il cono il cui raggio di base uguaglia AC e l'altezza $2\,EG$ ha lo stesso volume e la stessa superficie totale di quello il cui raggio di base è EF e l'altezza $2\,BC$.

Il Sig. *V. Columbo* osserva che il problema ha sempre una soluzione qualunque siano i raggi r, R e le altezze cercate sono quarte proporzionali dopo grandezze note.

151**. *Risolvere un triangolo sferico rettangolo, il cui perimetro è un quadrante, ed è pur dato un angolo obliquo.*

(G. Bellacchi).

Risoluzione della Sig.^{ra} V.^{va} *F. Prime*, a Bruxelles.

Sia B l'angolo noto; l'ipotesi $a + b + c = 90^0$ trasforma le relazioni relative al triangolo sferico rettangolo $(A = 90^0)$

$$\cos a = \cos b \cos c \quad , \quad \tan c = \tan a\,.\cos B$$

in

$$\operatorname{sen}(b + c) = \cos b \cos c \quad , \quad \tan c = \frac{1 - \tan b \tan c}{\tan b + \tan c}\,.\cos B.$$

La prima di queste formule dà $\tan b + \tan c = 1$, ciò che permette di scrivere la seconda

$$\cos B\,.\tan^2 c - (1 + \cos B)\,.\tan c + \cos B = 0.$$

Di qui si ricava

$$\tan c = \frac{\cos^2\frac{B}{2} \pm \operatorname{sen}\frac{B}{2}\,.\sqrt{\frac{1+3\cos B}{2}}}{\cos B}\,.$$

Il problema, ammette quindi, in generale, due soluzioni.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

159. Se dagli estremi di un segmento che scorre sopra una tangente di un cerchio (in generale di una conica qualunque) si conducono le coppie di tangenti alla curva, i loro punti d'incontro descrivono una conica, avente un contatto quadripunto col cerchio dato. Al variare della lunghezza del considerato segmento, le coniche corrispondenti formano un fascio, cui appartiene il cerchio dato e la tangente a questo (contata due volte) nel punto opposto al punto di contatto con la tangente data.

Applicazione. Dato un triangolo vi sono quattro coppie di tangenti (non necessariamente tutte reali) al cerchio inscritto, ognuna delle quali sega sui tre lati tre segmenti uguali.

F. PALATINI.

160.** Risolvere l'equazione

$$x^6 - 3 = 3x^2(2x^2 - 3).$$

F. GIUDICE.

161*. In un triangolo ABC, indicati con H l'ortocentro e con G il baricentro, si conoscono le distanze $AH = \alpha$, e $GH = l$ insieme all'angolo i di queste rette: esprimere le tangenti degli angoli A, B, C e le condizioni affinchè la GH sia parallela a ciascuno dei tre lati.

G. BELLACCHI.

162*. In un cono obliquo detta α l'inclinazione della retta centrale $OV = l$ sulla base circolare OMA, ed ω l'angolo del raggio $OM = r$ di questa con la proiezione della OV, provare che la generatrice $g = VM$ fa con la tangente MT alla circonferenza OM l'angolo θ determinato per la formola $\cos\theta = \frac{l}{g}\cos\alpha \operatorname{sen}\omega$.

G. BELLACCHI.

163*. Dimostrare che l'equazione

$$x^2 - 168921\,y^2 = 382291$$

ammette una sola soluzione in numeri interi e positivi. Qual'è questa soluzione?

A. TAGIURI.

(*) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

164*. Nella serie $x_1, x_2, \ldots . x_n, \ldots .$ si ha per $n \geq 2$

$$x_n = h\,x_{n-1} + l.$$

Dato il valore a_r di x_r esprimere x_n per mezzo di h, l, n, a_r.

A. Tagiuri.

165**. Dimostrare che il prodotto di tutti i quozienti completi della frazione continua generata dalla frazione ordinaria irriducibile $\frac{P}{Q}$, è uguale a P.

A. Tagiuri.

166*. Descrivere un cerchio che passi per due punti dati e sia diviso diametralmente da un cerchio dato.

P. Morino.

167*. Dimostrare che il limite della somma delle successive ed infinite parti auree delle parti auree di un segmento è uguale al segmento stesso aumentato della sua parte aurea (*).

G. Pucciano.

168**. Dimostrare che l'espressione

$$\left\{ \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} \right\} : \left\{ 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} \right\}$$

è un numero intero se n è pari.

V. Correnti.

169*. Se in un triangolo rettangolo il semicerchio descritto sul cateto maggiore con diametro uguale al cateto minore, tangenzialmente a questo cateto, è tangente all'ipotenusa, i lati del triangolo stanno fra loro come 5 : 4 : 3.

M. Piattelli.

170**. Trovare tre numeri continuamente proporzionali dei quali la somma sia 20 e la somma dei quadrati 140.

(Dall'*Arithmetica universalis* di Newton).

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Riccardo Mazzola. — *Elementi di aritmetica*. Livorno, R. Giusti, editore, 1892. — Prezzo L. 3. 20.

Fra i trattati di aritmetica usciti alla luce in questi ultimi tempi e che meritano il favore del pubblico, è da annoverare quello del prof. R. Mazzola della R. Accademia navale.

(*) Si preferisce una dimostrazione geometrica (*N. d. Red.*).

Son nove capitoli, seguiti (meno il settimo) da esercizi in buon numero, che contengono le ordinarie teorie prescritte da' programmi di aritmetica per le nostre scuole: numeri interi, frazionari, decimali, radici quadrate e cubiche, numeri irrazionali, misura delle grandezze, sistema metrico, rapporti, proporzioni e grandezze proporzionali.

Benchè il titolo non lo dica, pure la trattazione è quale s'addice all'aritmetica detta razionale.

È notissimo come la teoria del massimo comun divisore si faccia indipendentemente da quella de' numeri primi. E seguendo il consiglio e l'esempio del direttore di questo periodico (anno 1888, pag. 62), l'autore dimostra la formola che dà il m. m. c. senza la teoria de' numeri primi (*).

Anche la conversione delle frazioni ordinarie in decimali e viceversa è trattata bene, come, del resto, ne aveva dato l'esempio il prof. Amanzio nel suo volume d'aritmetica teorica pubblicato nel 1887, e del quale il direttore del periodico parlò tanto favorevolmente e meritamente (anno 1888, pag. 60). Ed è opportuna la distinzione che si fa della frazione in quanto essa è generatrice della periodica ed in quanto è poi il numero limite di questa.

I capitoli VII ed VIII trattano dei numeri irrazionali e della misura della grandezza e sono inspirati ai concetti che ormai si hanno in quelle teorie (Ved. per es. gli *Elementi di geom.* di Sannia e d'Ovidio, de Paolis, ecc.).

Auguro all'amico prof. R. Mazzola che egli stampi la 5ª edizione del suo libro, donde, se gli parrà, potrà far scomparire qualche inesattezza ch' io v' ho notata, e delle quali alcune mi permetto di segnalare:

1° Nella « Numerazione » invece della definizione del numero, sempre difficile, preferirei si dicesse che la riunione di due o più cose si esprime con numeri, come pur fanno alcuni buoni trattati.

2° A pag. 94 e 95. In questa esposizione c'è qualche cosa che bisognerebbe modificare a proposito delle frazioni eguali. Perchè se prima leggo « Un « numero frazionario si dice *minore*, *eguale* o *maggiore* di un altro, se, rife« rendoli ad una determinata unità, l'insieme delle parti indicate dal primo co« stituisce un tutto minore, eguale o maggiore di quello costituito dalle parti « indicate dal secondo », trovo poi inutile il teorema I del § 122: « Se si au« menta ecc. », o, almeno, esso è la stessa definizione. La quale, secondo me dovrebbe esser meglio ed in altro modo stabilita.

3° A pag. 197 si afferma, senz'altro, che p essendo un numero qualunque si può prendere n abbastanza grande in modo che sia

$$\frac{2}{10^n} < p$$

laddove questo è un teorema che dovrebbe essere dimostrato.

Roma, aprile 1893.

G. Pittarelli.

(*) Vedansi anche a questo proposito le belle *Lezioni di aritmetica* dei proff. Sadun e Boschino, altro libro degno di considerazione uscito quest'anno. (Cfr. *Periodico*, a. VII, pp. 197-199).

G. PEANO. — *Lezioni d'Analisi infinitesimale.* — Tip. Editrice G. Candeletti, Torino, 1893.

Non credo inopportuno accennare rapidamente, in questo Periodico, al volume I delle lezioni di Analisi infinitesimale del Prof. G. Peano recentemente pubblicate, pel rigore a cui sono sempre informate e per l'abbondanza d'esercizi analitici e geometrici svolti contemporaneamente alla teoria e proposti alla fine d'ogni argomento. Non si può fare a meno di riconoscere che esse sono grandemente adatte al loro scopo e quindi raccomandabili, sotto ogni aspetto, agli studiosi.

Questo primo volume contiene le regole di derivazione e le proprietà delle derivate; gli sviluppi di Taylor e Maclaurin, le formule d'interpolazione di Lagrange e di Newton e gli sviluppi speciali del binomio, delle funzioni esponenziali e circolari e della lunghezza dell'ellisse; le regole d'integrazione per parti, per sostituzione e per serie e le regole speciali per le funzioni razionali ed irrazionali, pei differenziali binomii e per le trascendenti: contiene inoltre le proposizioni più notevoli sugli integrali definiti, con importanti regole d'integrazione per approssimazione e formule di quadratura, poi un capitolo speciale sulle serie, a termini costanti e variabili, dove è dato anche l'importante criterio di convergenza di Cauchy, ed è provato con un esempio, relativo al logaritmo integrale, che le serie semiconvergenti possono riescire molto utili per calcoli numerici; vi sono pur dati criterii di convergenza e divergenza poi prodotti infiniti.

Molti teoremi, dopo d'esser enunciati nei termini usuali, sono enunciati anche in simboli e ciò costituisce pure un pregio non trascurabile perchè, riescendo a rendere generale l'uso dei simboli logici, si guadagnerebbe in semplicità e chiarezza d'enunciati e si faciliterebbe la rapida propagazione dei risultati nuovi togliendo, o diminuendo almeno, le difficoltà cagionate dalla varietà delle lingue.

Ancorchè ritenga inutile fermarmi ulteriormente a porre in evidenza i molti pregi del libro del quale ho riferito rapidamente, essendo troppo noto il rigore con cui l'Autore del medesimo usa trattare la Matematica, non posso terminare senza segnalare in modo speciale la originale trattazione della sviluppabilità delle funzioni secondo le potenze ascendenti d'una variabile, a cui l'Autore diede una generalità, che prima non aveva (*)

F. Giudice.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico. (**)

Agamennone (G.) — Il tromometro a registrazione fotografica (Rend. R. Acc. Lincei, Vol. II, Se. 5ª, 1893).

Bardelli (G.) — Su un problema di dinamica di G. Saladini generalizzato da A. Serret (Rend. R. Ist. Lom. Se. II, Vol. XXVI).

(*) V. anche G. Peano: *Sulla formula di Taylor*; R. Acc. delle Scienze di Torino, 1891.

(**) Per deficienza di spazio, l'elenco delle pubblicazioni periodiche ricevute, dalla chiusura del II fas., viene rimandato al fascicolo venturo.

BETTAZZI (R.) — *La risoluzione dei problemi numerici e geometrici.* Ditta G. B. Paravia e Comp., 1893 — Prezzo: L. 2.

BRAMBILLA (A.) — Nella geometria degli iperspazi. Nota 1ª. Napoli, L. Pierro, editore, 1893.

CARRARA (B.) — *Saggio d' introduzione alla teoria delle quantità complesse geometricamente rappresentate.* Cremona, Tip. Fezzi, 1893 — Prezzo: L. 2,50.

CHISTONI (C.) — Magnetometro unifilare dei seni (Mem. R. Acc. Sc. Lett. ed Arti di Modena. Vol. IX, Se. II).

DEL RE (A.) — Sulla superficie del 4° ordine a conica doppia (Rend. R. Acc. Lincei, Vol. II, Se. 5ª, 1893).

FRATTINI (G.) — Di un doppio isomorfismo nella teorica generale delle sostituzioni (Rend. R. Acc. Lincei, Vol. II, Se. 5ª, 1893).

GAMBIOLI (D.) — *Raccolta di circa 1500 esercizii di Geometria, di Trigonometria piana e sferica e di Geometria descrittiva*, con una breve esposizione dei varî metodi per risolverli e con esempi di applicazione dell'algebra alla geometria, ad uso dei Ginnasi, Licei, degli Istituti tecnici e nautici e delle Scuole militari. F. Vallardi, editore, Milano; 1893 — Prezzo: L. 2,50.

GIOVENALE (G.) — Perfezionamento della macchina pneumatica a mercurio (Atti Acc. Pontificia de' Nuovi Lincei, To: XLVI, 1893).

GIUDICE (F.) — Sulla risoluzione algebrica delle equazioni (Atti R. Acc. del. Sc. Torino, Vol. XXVIII, 1893).

GRILLIÈRES (L.) — Étude des modifications apportées par la rotation diurne de la terre aux lois de l'équilibre et du mouvement des corps pesants. Paris, Librairie Nony et Cie, 1893.

GUCCIA (G. B.) — Due proposizioni relative alle involuzioni di specie qualunque, dotate di singolarità ordinarie (Rend. Circolo mat. Palermo, Tomo VII, 1893).

LORIA (G.) — L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della Storia delle scienze esatte. Relazione fatta al Quinto Congresso Storico Italiano. Genova, Tip. R. Istituto Sordo-muti, 1893.

MARCOLONGO (R.) — Intorno ad un punto della teoria della rotazione di un corpo (Rend. Circolo mat. Palermo, Tomo VII, 1893) — Sulla ricerca dei centri di curvatura delle traiettorie dei punti di una figura mobile (Idem., idem.).

MILLOSEVICH (E.) — Sull'anno che serve di origine delle olimpiadi (Mem. Società Spettroscopisti ital., Vol. XXII, 1893). — Sull'eclisse di Archiloco e sulla iconografia al Canone degli eclissi di sole di Oppolzer (Idem., idem.).

PADOVA (E.) — Commemorazione di Enrico Betti (Atti R Istituto Veneto di scien., lett. ed arti. Tomo IV, Se. VII, 1892-93).

PALAZZO (L.) — Sopra un caso osservato a riguardo dell'influenza di considerevoli masse di ferro sulle misure magneto-telluriche (Mem. Società Spettroscopisti ital., Vol. XXII, 1893).

PIRONDINI (G.) — Alcune formule relative alle linee tracciate sopra una superficie e loro applicazioni (Ann. di mat. pura ed app., Serie II, to. XXI, 1893).

PITTEI (C.) — *Dell'origine, diffusione e perfezionamento del sistema metrico decimale.* Firenze, Loescher & Seeber, 1892 — Prezzo: L. 1.

PORTA (F.) — Discussioni delle equazioni generali delle coniche e delle quadriche in coordinate cartesiane. Torino, Tip. G. Candeletti, 1893.

REBIÈRE (A.) — *Mathématiques et mathématiciens.* Pensées et Curiosités. 2.me édition. Paris, Librairie Nony, 1893 — Prix: 5 fr..

VIVANTI (G.) — Sull'applicazione della funzione ellitica *pu* alla teoria dei poligoni di Poncelet (Rend. Circolo mat. Palermo, Tomo VII, 1893). — Sulle serie di potenze i cui coefficienti dipendono da una variabile (Ann. di mat. pura ed app., Serie II. to: XXI, 1893).

Chiusura della redazione il dì 12 maggio 1893.

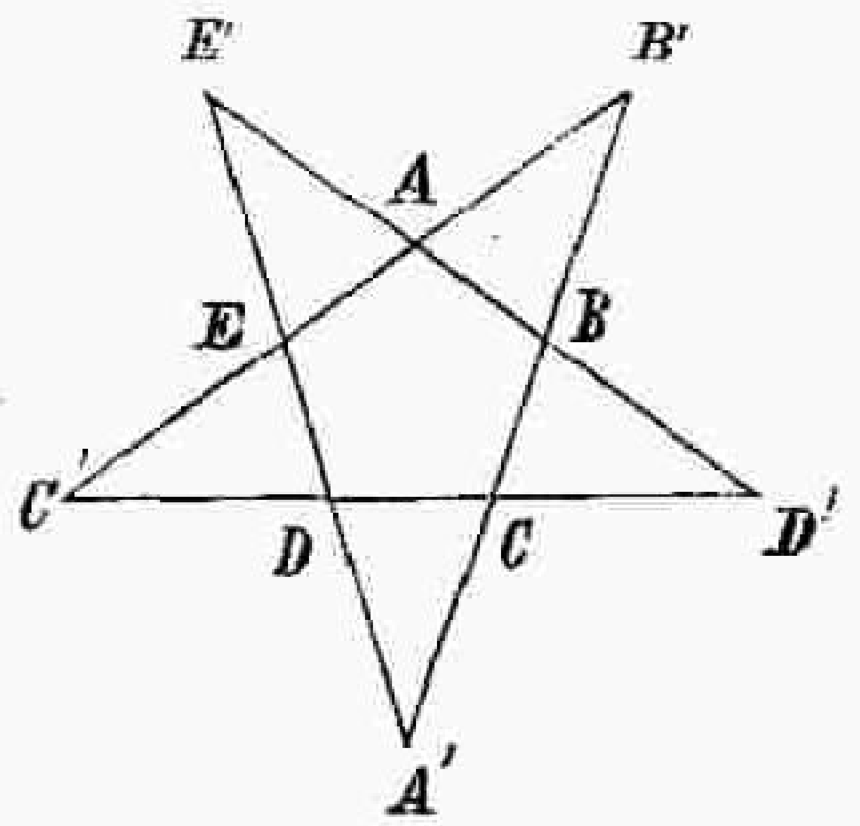
A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

Continuazione e fine,
V. pag. 25, 57 e 113 di questo Vol. e pag. 81, 113, 169 del Vol. VII.

V.

Il pentagono stellato fu l'emblema dei pitagorici, od il segno di riconoscimento e di mutua assistenza fra i discepoli e gli adepti della virtuosa Scuola italo-greca.

Prolungando tutti i lati del pentagono regolare convesso $ABCDE$ si trova lo stellato $A'B'C'D'E'$: la retta AA' congiungente i vertici opposti dei due angoli $BAE = \frac{3}{5}\pi$, $A' = \frac{\pi}{5} = DAC$ è loro bisettrice comune; i triangoli isosceli ADC, $A'DC$ sono congrui $AC = CA'$ e BC pari al segmento aureo di $A'C$. La piramide costruita con la base $ABCDE$ e con le faccie laterali ABB', BCD'. CDA', DEC', EAE' ha i diedri dell'angolo al vertice congrui a quelli del dodecaedro platonico e gli altri supplementari.



Nell'opera la *Divina proportione* di Luca Pacioli stampata a Venezia l'anno 1509, si ammirano disegnati dalla maestra mano di Leonardo da Vinci alcuni poliedri a stella aventi per nucleo uno qualunque dei cinque solidi platonici, sulle cui faccie prese per basi erigonsi altrettante piramidi regolari; onde l'esterna superficie viene a comporsi di triangoli isosceli. Indicando con f, v, s i respettivi numeri delle faccie, vertici, spigoli del nucleo, quelli dei poliedri stellari del Pacioli evidentemente saranno $f' = nf$, $v' = v + f$, $s' = s + nf$, dove n rappresenta quanti lati formino il perimetro di ogni faccia del nucleo. Supponendo i triangoli isosceli giacere n' ad n' in uno stesso piano, gli s spigoli del solido platonico divenire diagonali delle nuove faccie ed i rimanenti nf disporsi due a due in linea retta, i suddetti numeri si ridurrebbero ad $f' = \frac{n}{n'} f$, $v' = f$, $s' = \frac{n}{2} f$.

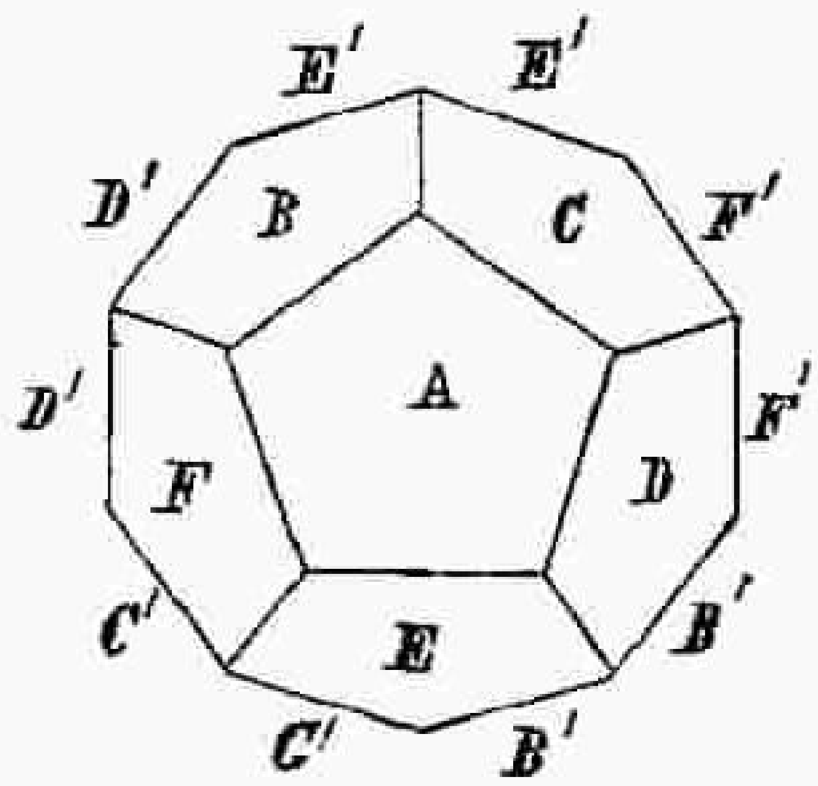
Il sommo Kepler nel 1° libro dell'*Harmonices mundi, Lincii Austria 1619* (*) discorrendo sopra le segrete relazioni degli astri coi numeri, i ritmici suoni, e le figure geometriche, svolge le varietà dei poligoni regolari stellati iscritti in una circonferenza, cominciando da quelli che si possono costruire con gli elementi di Euclide; poi analizzando le proprietà derivanti dal cerchio supposto diviso in sette parti eguali e preso il raggio per unità di misura prova esistere tre ettagoni con i lati corda $\frac{2\pi}{7} = x$, corda $\frac{4\pi}{7} = x\sqrt{4 - x^2} = y$, corda $\frac{6\pi}{7} = x(3 - x^2) = z$, radici dell'equazione $x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0$. Il quale asserto si può agevolmente verificare eliminando x, fra la precedente eguaglianza e ciascuna delle variabili y, z, poichè si deducono $x^2 = \frac{7 - 3y^2}{2 - y^2}$, $x = z\left(\frac{z^2 - 3}{z^2 - 2}\right)$; mediante le sostituzioni di queste formule si ottengono due equazioni l'una in y l'altra in z identiche alla sestica surriferita evidentemente riducibile al terzo grado.

Kepler si occupò eziandio di formare alcuni reticoli piani per aggruppamenti di poligoni regolari diversi, e nel 2° libro del medesimo trattato descrisse e delineò i poliedri di Platone e di Archimede enumerandone le faccie e gli angoli solidi.

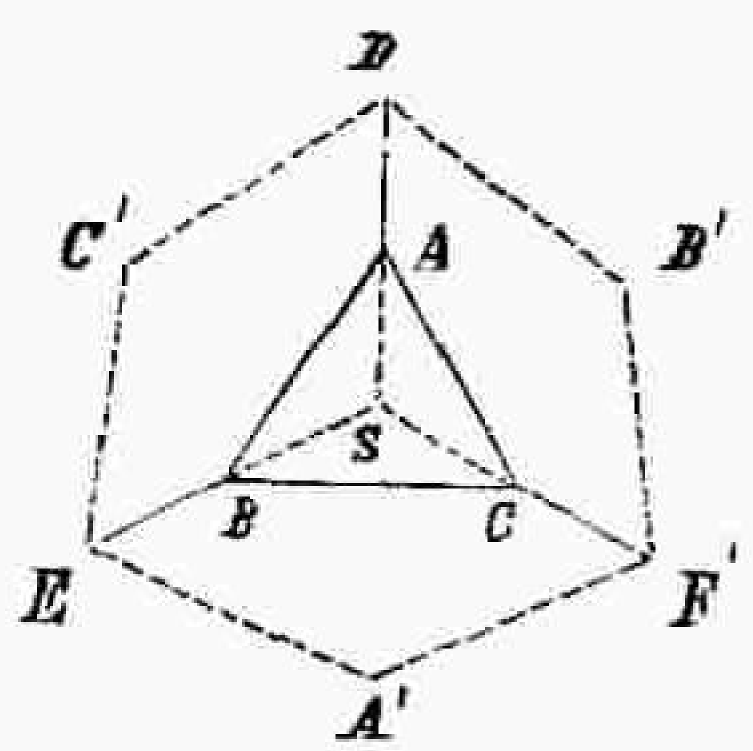
Alla proposizione 26^{sima} indica, disegnandoli, due nuovi poliedri regolari a stella K_1, K_2 contenuti da dodici pentagoni stellati che nel primo foggiano dodici angoli pentaedri convessi e nel secondo venti angoli triedri. Il dodecaedro K_1 nasce dal prolungare tutti gli spigoli del dodecaedro platonico, o dal costruire sopra ogni faccia di questo solido una piramide regolare, in cui il lato l della base eguagli il segmento aureo dell'altro spigolo l'; significando con ρ il raggio del cerchio circoscritto alla base e con h l'altezza della piramide si trova $(l') = (\rho) + (h)$; ora essendo l' il lato del pentagono regolare a stella iscritto nel cerchio ρ, si conchiude h identico al lato ρ' del decagono regolare a stella iscritto nel medesimo cerchio ρ. Inoltre le faccie del dodecaedro platonico sono simmetriche rispetto al suo centro O e distano fra loro del segmento

(*) Joannis Kepleri. *Opera omnia*, volumen V; edizione curata dal Dott. Carlo Frisch a Francoforte negli anni 1858-73.

$\rho + \rho'$, il vertice A di K_1 ha per simmetrico un altro vertice A' rispetto ad O; ne consegue il diametro della sfera circoscritta al primo dodecaedro di Kepler pareggiare $\rho + 3\rho'$. Nelle formule trovate per i poliedri del Pacioli facendo $f = 12$, $n' = n = 5$ si deducono per K_1 i numeri $f' = v' = 12$, $s' = 30$; perocchè i venti vertici del nucleo spariscono e vengono sostituiti da quelli delle faccie pentagonali stellate aggruppantisi 5 a 5 per comporre ciascun angolo solido. Simboleggino A, B, C, D, E, F sei vertici del poliedro K_1 situati sopra i raggi che dal centro O proiettano i centri delle faccie adiacenti nel semidodecaedro platonico, ed A', B', C', D', E', F' siano i loro punti simmetrici; dai pentagoni convessi $BCDEF$, $CAFD'E'$, $ABE'F'D$, $CAEB'F'$, $DAFC'B'$, $BAEC'D'$, risultano gli stellati $BDFCE$, $CFE'AD'$, $AE'DBF'$, $CEF'AB'$, $DFB'AC'$, $BED'AC'$ che insieme con i loro simmetrici $B'D'F'C'E'$, $C'F'EA'D$, $A'ED'B'F$, $C'E'FA'B$, $D'F'BA'C$, $B'E'DA'C$ costituiscono le dodici faccie di K_1.



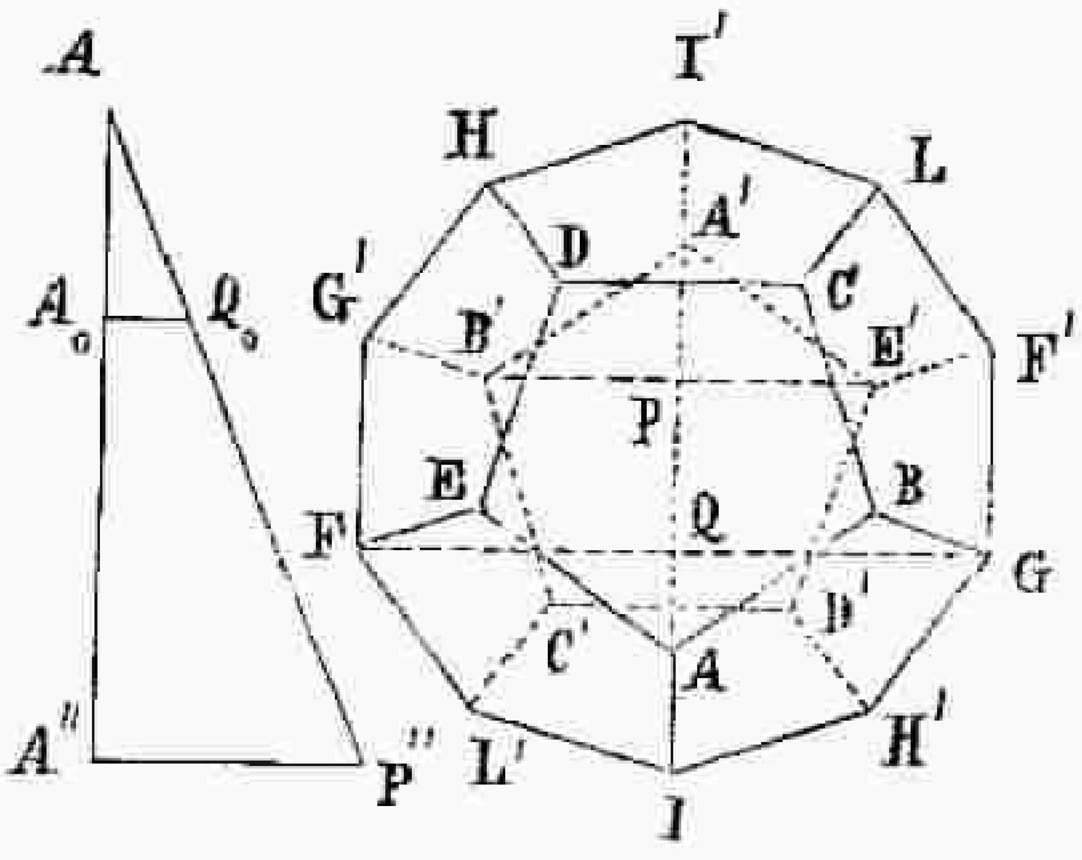
L'altro dodecaedro K_2 si ricava dall'icosaedro platonico prolungando gli spigoli BE, CF', AD terminanti ai vertici di ciascuna faccia ABC ed aventi l'inclinazione $\frac{2}{5}\pi$ sui due lati AB, BC della medesima; ne risultano così tante piramidi regolari $ABCS$ quante sono le faccie del nucleo ed il lato AB della base eguaglia il segmento aureo dello spigolo AS. Il punto S è vertice comune ai pentagoni stellati che si deducono col prolungare i lati dei pentagoni regolari convessi $ABEC'D$, $ACF'B'D$, $BCF'A'E$ esistenti sulla superficie del nucleo. Adunque il poliedro K_2 è della specie dei solidi stellati del Pacioli e ponendo $f = 20$, $n = 3$, $n' = 5$ si trovano i numeri $f' = 12$, $v' = 20$, $s' = 30$; infatti i vertici di K_2 sono 20 giacendo sui raggi proiettanti i centri delle faccie dell'icosaedro convesso dal suo centro O, e ad ogni vertice S di K_2



concorrono tre pentagoni stellati onde se i triedri fossero disgiunti si avrebbero 3.20 pentagoni; ma sul poliedro K_2 i vertici di ogni faccia appartenendo a cinque triedri, ne consegue esser $3.20 : 5 = 12$ il numero delle faccie distinte e $3.20 : 2 = 30$ il numero degli spigoli, attesochè ciascuno di questi unisce i vertici di due triedri. Rappresentando ρ il raggio del cerchio circoscritto al triangolo $A\,B\,C$, ρ' il lato del decagono regolare iscritto nel cerchio ρ, h l'altezza della piramide $S\,A\,B\,C$, l, l' i respettivi spigoli $A\,B$, $A\,S$ deduconsi le relazioni $(l) = 3\,(\rho)$, $l' = 3\,(\rho')$, $(h) = 3\,(\rho') - (\rho) = (\rho + \rho')$; quindi si trae $h = \rho + \rho'$. E poichè le faccie parallele $A\,B\,C$, $A'B'C'$ dell'icosaedro platonico distano fra loro del segmento $\rho + \rho'$, ne risulta il diametro della sfera circoscritta al dodecaedro K_2 di Kepler esser triplo di quello della sfera iscritta nel suo nucleo.

Il Professore Giuseppe Bertrand ricavò questo poliedro stellato dal dodecaedro platonico unendone cinque a cinque i vertici, e la sua memoria è inserita nel volume XLVI dei *Comptes Rendus*, anno 1858.

Fa mestieri dimostrare che il pentagono $A\,F\,B'\,E'\,G$ è regolare; infatti la normale $A\,A''$ abbassata dal vertice A sulla faccia opposta $A'\,B'\,C'\,D'\,E'$ eguaglia il diametro $\rho + \rho'$ della sfera iscritta ed il piede A'' cade nel mezzo dell'arco sotteso dalla corda $C'D'$ nella circonferenza ρ e la distanza $A''\,P''$ pareggia il segmento $A\,P$ terzo proporzionale in ordine ad $A\,A' = 2\rho$ ed $A\,B' = \rho'$: onde a motivo

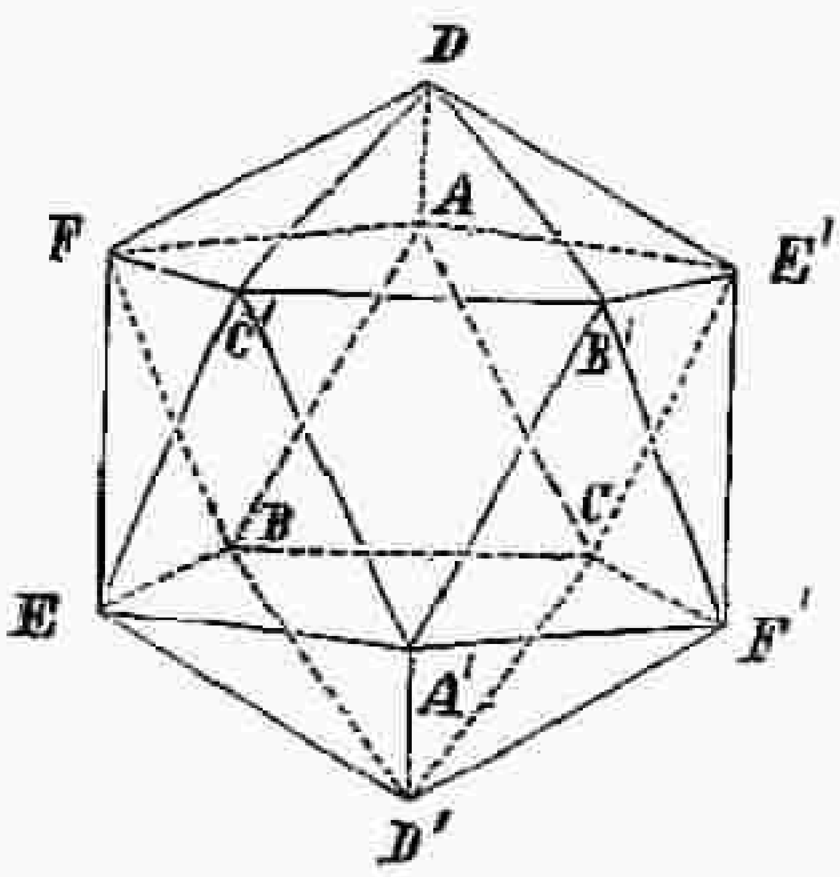


della relazione $\rho : \rho' = \rho' : \rho + \rho'$ si ottiene $A\,P = \frac{\rho + \rho'}{2}$. La medesima normale $A\,A''$ sega il piano del pentagono $F\,I\,G\,L\,H$ in un punto A_0 tale che $A\,A_0 = \rho$ distanza di questo piano dal parallelo $A\,B\,C\,D\,E$, or condotta la perpendicolare $A_0\,Q_0$ alla diagonale $F\,G$ si vedrà $A_0\,Q_0$ esser identica alla proiezione $A\,Q = I\,I' - (I\,A + Q\,I') = \rho + \rho' - Q\,I'$;

il segmento QI' terzo proporzionale in ordine a $2\rho'$ ed FI' lato del decagono regolare stellato iscritto nel cerchio ρ'; perciò dalle relazioni $\rho' : FI' = FI' : FI' + \rho'$, $\rho' : \rho = \rho : \rho' - \rho$ ne discendono l'eguaglianze $FI' = \rho + \rho'$, $QI' = \frac{FI' + \rho'}{2} = \rho' + \frac{1}{2}\rho$, $A_0 Q_0 = \frac{1}{2}\rho$. Sussiste dunque la proporzione $AA'' : A''P'' = AA_0 : A_0 Q_0$, i triangoli rettangoli AA_0Q_0, $AA''P''$ sono simili, il vertice A giace nel piano delle parallele FG, $B'E'$ ed il pentagono convesso $AFB'E'G$ è regolare. Così ogni vertice A del dodecaedro platonico è pure vertice dei tre pentagoni regolari convessi $AFB'E'G$, $ADI'E'H'$, $ACI'B'L'$, che hanno per lati le diagonali delle faccie e gli altri vertici coincidono con quelli del poliedro. Da questi pentagoni si deducono gli stellati $AB'GFE'$, $AI'H'DE'$, $AI'L'CB'$ segantisi due a due per i lati AB', AE', AI' e perciò componenti un triedro A con gli angoli piani uguali a $\frac{\pi}{5}$. Aggiungendovi i poligoni $A'BG'F'E$, $A'IHD'E$, $A'ILC'B$ simmetrici dei primi rispetto al centro O del dodecaedro, si vedrà esistere fra i detti sei pentagoni stellati soltanto due col vertice B segantisi per il lato BA', e poichè gli altri lati concorrenti in B sono BG', BC' si troverà il nuovo pentagono stellato $BG'H'DC'$ che interseca i primi due lungo le rette BG', BC' e determina con essi il triedro B congruo ad A. E costruendo il suo simmetrico $B'G$ $HD'C$ risultano insieme ai precedenti otto pentagoni stellati, dei quali due soli hanno il vertice comune C e si segano per il lato CB'; siccome gli altri due lati coi termini in C sono CD', CL' si deduce il pentagono stellato $CL'F'ED'$ formante coi primi due il triedro C congruo ad A e B. Descrivendo il simmetrico $C'LFE'D$ si ottengono coi surriferiti, dieci pentagoni stellati, fra i quali tre compongono il triedro D, altri il triedro E, ma due soli hanno comuni il vertice F ed il lato FE', e poichè i loro lati adiacenti sono FG, FL si vedrà doversi aggiungere il poligono $FGHIL$ per formare il triedro F; ed insieme al suo simmetrico $F'G'H'I'L'$ completano l'intera superficie del poliedro stellato K_2.

Ai due solidi Kepleriani K_1, K_2 sono respettivamente correlativi il dodecaedro P_1 e l'icosaedro P_2 stellati, nel 1810 invenuti dal geometra Poinsot (*Journal de l'École Polytechnique, 10e cahier*); ai cinque vertici di ogni faccia del poliedro K_1 corrispondono cinque piani formanti un angolo pentaedro stellato in P_1, e viceversa alle cinque faccie componenti ogni angolo pentaedro convesso di K_1 corrispondono i vertici di un pentagono regolare convesso faccia del solido P_1. E poichè in due poliedri correlativi indicati con f, v, s i numeri delle faccie, vertici e spigoli dell'uno, risultano v, f, s i rispettivi numeri dell'altro, si conchiude *il dodecaedro* P_1 *di Poinsot esser costituito da dodici faccie pentagone regolari convesse, dodici angoli pentaedri stellati e trenta spigoli.* Ragionando in simil guisa per il solido K_2, composto di venti angoli triedri, dodici faccie pentagonali stellate e trenta spigoli, si vedrà *l'icosaedro* P_2 *di Poinsot contenere venti faccie triangolari equilatere, dodici angoli pentaedri stellati e trenta spigoli.*

Il professor Bertrand ricavò i poliedri P_1, P_2 dall'icosaedro platonico; infatti ogni vertice A di questa figura è comune ai cinque pentagoni convessi $ABEC'D$, $ADB'F'C$, $ACD'EF$, $AFC'B'E'$, $AE'F'D'B$ situati sulla superficie dell'icosaedro, e che hanno un lato coincidente con ciascuno spigolo dell'angolo solido A, secondo i quali si segano due a due i suddetti poligoni; i termini di questi spigoli cadono nei vertici del pentagono stellato $BE'FCD$ che è pure una faccia di P_1 ed insieme con le altre $A'B'E'CD'$, $A'EFDB'$, $A'F'CBE$, $A'CDE'F'$, $A'D'BFC'$, $B'EF'C'D'$ simmetriche delle prime compongono la superficie del dodecaedro stellato di Poinsot. Parimenti ogni vertice A dell'icosaedro platonico è comune ai cinque triangoli equilateri $AF'E$, AEB', $AB'D'$, $AD'C$, $AC'F'$, descritti col lato pari alla diagonale del pentagono regolare convesso $ACF'B'D$: i suddetti triangoli segansi due a due lungo i lati AE, AB', AD', AC', AF' aventi gli estremi nei vertici del pentagono stellato $EB'D'C'F'$. Aggiungendo i trilateri $A'FE'$, $A'E'B$, $A'BD$, $A'DC$, $A'CF$ simmetrici dei primi cinque si ottiene la metà della superficie del poliedro P_2.



Fra questi dieci triangoli esistono due sole faccie col vertice B segantisi per il lato BA' onde si dovranno unire ad essi i triangoli $BE'C'$, $BC'F'$, $BF'D$ per comporre il pentaedro stellato B congruo ad A. Costruendo i loro simmetrici $B'EC$, $B'CF$, $B'FD'$ è facile osservare come per le sedici faccie precedenti esistano quattro sole col vertice comune C e perciò doversi aggiungere il triangolo CED per ottenere il pentaedro stellato C congruo ad A e B. Presa la figura $C'E'D'$ simmetrica di CED si vedrà come fra i diciotto triangoli surriferiti vi siano soltanto quattro col vertice comune D, e vi occorra la faccia $DF'E$ per comporre il pentaedro stellato D congruo ad ABC. Aggiungendovi la simmetrica $D'FE'$ si avranno determinate le venti faccie dell'icosaedro stellato P_2.

Per un poliedro contenuto da faccie tutte n-latere e da angoli solidi tutti m-edri sussistono le relazioni (1′) $nf = mv = 2s$. Proiettando le faccie di un poliedro regolare dal suo centro sulla superficie sferica in esso iscritta o circoscritta, ottengonsi poligoni sferici equiangoli ed equilateri aventi i loro vertici sovra circonferenze minori. Significando con a la misura di ogni angolo sferico referita all'angolo retto, la somma degli angoli intorno a ciascun vertice di questi poligoni si esprime per (2′) $ma = 4\sigma$; dove σ rappresenta la *specie* dell'angolo solido, pari al numero dei giri che l'arco di cerchio massimo, proiezione di uno spigolo, deve eseguire attorno al vertice percorrendo tutti gli m angoli sferici successivi. Se indichiamo con P il centro sferico (o polo) del cerchio minore circoscritto al poligono $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{n-1} A_n$ proiezione di una faccia del poliedro, l'area di ciascuno dei detti triangoli sferici isosceli $PA_1 A_2$, $PA_2 A_3, \ldots\ldots$ $PA_n A_1$ referita al trirettangolo verrà misurata dall'eccesso sferico $\alpha - 2$, e perciò l'area di tutto il surriferito poligono eguaglia $n\alpha - 2n$, ovvero $na + 4\varphi - 2n$; perchè la somma $n\alpha$ degli angoli si compone degli angoli interni ai vertici del poligono e di φ volte quattro retti; essendo φ la specie di questa figura, od il numero dei giri compiuti dal raggio sferico PA_1, quando l'estremo A_1 abbia descritto il perimetro $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ Supponendo esistere f poligoni eguali ricuoprenti e volte la superficie sferica avremo (3′) $(na + 4\varphi - 2n)f = 8e$; il qual numero e chiamasi la *specie del poliedro*. Il geometra Poinsot nella sua memoria introdusse gli angoli solidi concavi stabilendo la formula (2′) e considerò solo poligoni convessi dando la (3′) col valore $\varphi = 1$. Il sommo Cayley generalizzò il teorema Euleriano in un breve scritto pubblicato nel 17^{esimo} volume del *Philosophical Magazine*, anno 1859, mostrando la relazione $\varphi f + \sigma v = s + 2e$ per i poliedri a faccie stellate ed angoli solidi concavi: come è facile verificarla per i poliedri regolari eliminando a, m, n per le precedenti eguaglianze (1′), (2′), (3′). Da queste ricavasi la serie delle identiche ragioni (4′) $\frac{e}{2(m\varphi + n\sigma) - mn} = \frac{f}{4m} = \frac{v}{4n} = \frac{s}{2mn}$; scambiandovi m con n, σ con φ rimangono invariabili i numeri e ed s, i poliedri sono correlativi, il numero delle faccie (o vertici) dell'uno pareggia il numero dei vertici (o faccie) dell'altro. Così attribuendo nella (4′) ad n, φ, m, σ i respettivi valori 5, 2, 3, 1 (oppure 3, 1, 5, 2) risultano per e, f, v, s le più piccole soluzioni 7, 12, 20, 30 (oppure 7, 20, 12, 30), che danno il dodecaedro K_2 e l'icosaedro P_2 della settima specie, e nella stessa serie (4′) posto $m = n = 5$, $\varphi = 2$, $\sigma = 1$ (oppure $\varphi = 1$, $\sigma = 2$) si traggono per e, f, v, s numeri proporzionali ai rispettivi 1, 4, 4, 10, e moltiplicati questi per 3 danno i numeri 3, 12, 12, 30, che forniscono i due dodecaedri stellati K_1, P_1 della terza specie. Ad ogni maniera di decomporre la superficie sferica in poligoni regolari eguali corrisponderebbe un poliedro regolare circoscritto alla sfera; sibbene l'eguaglianze (1′), (2′), (3′) risultano necessarie ma non sono sufficienti a determinare la cercata decomposizione.

G. Bellacchi.

SUI NUMERI DATI

MEDIANTE INSIEMI DI NUMERI RAZIONALI

L'uso di gruppi di numeri per la determinazione di altri numeri è ormai affatto comune: tuttavia ci pare che il collegamento di detta maniera di determinazione ai primi concetti di limite si possa migliorare e semplificare: appunto questo ci proponiamo ora di fare.

Considereremo sempre insiemi formati di soli numeri razionali, sebbene questa limitazione non sia necessaria, per non complicare la dicitura senza conseguire nessun utile nè teorico nè pratico.

I.

Definizioni e proposizioni fondamentali sugli insiemi di numeri.

Anzitutto ci occuperemo della determinazione d'un numero per mezzo di due insiemi limitrofi e stabiliremo, pei numeri determinati in tal modo, i concetti d'eguale, maggiore e minore, concetti che per numeri razionali son quelli che si danno negli elementi d'aritmetica.

1. *Definizione* (D.). Si dice che *un numero è razionale* se il medesimo può esser dato da una frazione ordinaria, a termini interi.

Si sa dall'aritmetica che un numero razionale si può sempre esprimere, ed in un sol modo, o con un intero o con una frazione irreducibile.

2. D. 1. Si dice che dei numeri formano un *insieme*, od un *gruppo*, od una *classe* per significare che i medesimi sono tutti i numeri aventi certe assegnate proprietà.

Dicesi che *un insieme è finito*, od *infinito*, secondo che consta d'un numero finito, od infinito, di numeri.

D. 2. Si dice che un numero d'un gruppo è un *massimo*, od un *minimo*, se il medesimo non è minore, o non è maggiore, di nessun numero del gruppo.

Teorema (T.). *Un insieme, che non contenga un massimo ed un minimo, è infinito.*

Dimostrazione (R.). Infatti; se un insieme privo di massimo contiene il numero a_1, devesi trovare nell'insieme un numero a_2 maggiore di a_1, e, siccome a_2 non è massimo, vi si deve trovare un numero a_3 maggiore di a_2; similmente, non potendo a_3 essere un massimo, vi sarà un numero a_4 maggiore di a_3: continuando così si riconosce la presenza nell'insieme di infiniti numeri $a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots$ ciascuno dei quali supera il precedente. Se l'insieme fosse privo di minimo, si riconoscerebbe in modo simile la presenza di infiniti numeri osservando che, dopo d'aver fissato un numero dell'insieme, se ne potrà sempre fissare uno più piccolo.

Corollario (C.). *Ogni insieme finito contiene un massimo ed un minimo.*

Esempio (E.) 1. L'insieme (21, 23, 5, 9, 17) è finito: ha il minimo 5 ed il massimo 23.

E. 2. L'insieme dei numeri razionali non minori di 2 e minori di 5 è infinito: contiene il minimo 2 e non ha massimo.

E. 3. L'insieme dei numeri razionali maggiori di 3 aventi quadrato minore di 11 è infinito e non contiene nè massimo nè minimo.

E. 4. L'insieme dei numeri razionali non minori di 3 e non maggiori di 7 è infinito e contiene il minimo 3 ed il massimo 7.

3. D. 1. Si dice che *un insieme è superiore ad un altro* se ogni numero del primo insieme è maggiore di ciascuno del secondo: allora dicesi pure che il secondo insieme è *inferiore* al primo.

D. 2. Si dice che *due insiemi sono limitrofi* se uno è inferiore all'altro ed ogni numero razionale positivo dato arbitrariamente è più grande che la differenza di due numeri presi convenientemente nell'insieme inferiore l'uno e nel superiore l'altro.

E. 1. L'insieme dei numeri razionali minori di 10 non è nè inferiore nè superiore a quello dei numeri ottenibili da $\frac{8n^2-15}{3n+4}$ attribuendo ad n i valori 1, 2, 3, . . . , 100.

E. 2. L'insieme dei numeri razionali minori di 2 è inferiore a quello dei numeri razionali compresi fra 7 e 9: i due insiemi non sono limitrofi.

E. 3. L'insieme dei numeri razionali compresi fra 3 e 5 e quello dei numeri razionali maggiori di 5 sono limitrofi.

E. 4. L'insieme dei numeri ottenibili da $\frac{5n-1}{7n}$ e quello dei numeri ottenibili da $\frac{5n+3}{7n}$, dando ad n tutti i valori interi positivi, sono limitrofi.

E. 5. L'insieme dei numeri razionali x soddisfacenti la diseguaglianza $x+x^3<1$ e quello dei numeri razionali y soddisfacenti la $y+y^3>1$ sono limitrofi.

4. T. *Se è dato un insieme di numeri razionali tutti minori, o maggiori, d'un dato numero razionale, l'insieme dei numeri razionali maggiori, o minori, d'ogni numero dell'insieme dato ed il dato sono limitrofi.*

R. Sia (X) un insieme di numeri razionali ed h sia un numero maggiore d'ogni numero di (X). Si componga un insieme (Y) con tutti i numeri razionali maggiori d'ogni numero di (X), tra i quali sonvi per ipotesi h ed i maggiori di h. Il gruppo (Y) è manifestamente superiore ad (X): dico inoltre che ogni numero razionale positivo, ε, è maggiore della differenza di due numeri presi convenientemente, l'uno in (X) e l'altro in (Y). Infatti; si fissi un intero n maggiore di $\frac{1}{\varepsilon}$ per cui sarà $\varepsilon > \frac{1}{n}$; si prenda poi in (Y) la minima frazione di denominatore n, la quale per quanto fu supposto non sarà maggiore di $\frac{hn}{n}$ ossia di h; tale minima frazione sia $\frac{m}{n}$: la frazione $\frac{m-1}{n}$ non sarà dunque in (Y) epperò non supererà tutti i numeri di (X): in questo gruppo prendiamo appunto un numero x', che non sia minore di $\frac{m-1}{n}$: sarà così $\frac{m}{n} > x' \overline{\geqq} \frac{m-1}{n}$, per cui sarà

$$\frac{m}{n} - x' < \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n} \text{ ossia } \frac{m}{n} - x' < \frac{1}{n}$$

per cui, essendo $\frac{1}{n} < \varepsilon$, sarà con più ragione minore di ε la differenza tra il numero $\frac{m}{n}$ di (Y) ed il numero x' di (X). Resta così provato che i gruppi (X) ed (Y) sono limitrofi.

Si dimostra nello stesso modo il teorema per l'insieme dei numeri razionali minori di quelli d'uno dato e quest'insieme dato.

E. 1. L'insieme dei numeri razionali minori, o maggiori, d'ogni numero ottenibile da $\frac{8n-1}{3n^2}$ dando ad n i valori interi positivi minori di 1000 e l'insieme dei 999 numeri, ottenibili come fu detto, sono limitrofi.

E. 2. Il gruppo dei numeri ottenibili da $\frac{1-n^2}{n}$, dando ad n ogni valore intero positivo, è limitrofo all'insieme dei numeri positivi. Non esiste nessun numero minore d'ognuno di quelli ottenibili nel detto modo.

5. D. Si dice *successione* un insieme di numeri corrispondenti univocamente ai valori interi positivi di n: il numero corrispondente al valore p di n dicesi p^{mo} numero della successione.

Si dice che una successione non è *mai decrescente* se nessun suo numero è più piccolo del precedente: si dice che non è *mai crescente* se nessun suo numero è maggiore del precedente. Si dice che una successione è *sempre crescente* se ogni suo numero è maggiore del precedente; si dice che è *sempre decrescente* se ogni suo numero è minore del precedente. Diconsi *monotone* le successioni mai crescenti, o mai decrescenti; si dicono *oscillanti* quelle non monotone.

T. *Se il numero* n^{mo} *d'una successione mai decrescente di numeri razionali è minore, qualunque sia* n, *del numero* n^{mo} *d'una mai crescente ed ogni numero razionale positivo è maggiore della differenza dei numeri* n^{mi} *delle due successioni, per opportuni valori di* n, *le due successioni sono limitrofe.*

R. Siano x_n y_n i numeri n^{mi} di due successioni di numeri razionali, (X) ed (Y); e supponiamo che sia, per tutti i valori di n,

$$x_n \leqq x_{n+1} \qquad y_n \geqq y_{n+1} \qquad x_n < y_n .$$

Sia x_p un numero qualunque di (X) ed y_q uno qualunque di (Y): siccome i numeri x non decrescono mai ed i numeri y non crescono mai, è

$$x_p \leqq x_{p+q} \qquad y_q \geqq y_{p+q}$$

per cui, ricordando ancora essere $x_{p+q} < y_{p+q}$, si riconosce che è:

$$x_p \leqq x_{p+q} < y_{p+q} \leqq y_q$$

da cui segue dover essere $x_p < y_q$. Ogni numero di (X) è dunque minore di qualsiasi numero di (Y); ma, per ipotesi, ogni numero razionale positivo è maggiore della differenza di due numeri presi convenientemente l'uno nell'una e l'altro nell'altra successione per cui le due successioni sono limitrofe.

E. 1. Le due successioni aventi per numeri n^{mi}

$$x_n = \frac{3n-7}{5n} \qquad y_n = \frac{3n+11}{5n}$$

sono limitrofe.

E. 2. Le successioni aventi per numeri n^{mi}

$$x_n = 1 + \frac{3}{2!} + \frac{5}{4!} + \ldots + \frac{2n+1}{(2n)!} \qquad y_n = x_n + \frac{1}{(2n)!}$$

sono limitrofe.

6. T. 1. *Se due insiemi di numeri razionali sono limitrofi e tutti i numeri razionali compresi fra un numero dell'inferiore ed uno del superiore appartengono all'uno od all'altro insieme e non si trova un massimo nell'insieme inferiore nè un minimo nel superiore, allora non esiste un numero razionale, che non sia minore di nessun numero dell'insieme inferiore e non sia maggiore di nessuno del superiore.*

R. Siano (X) ed (Y) due insiemi limitrofi di numeri razionali e supponiamo che ogni numero razionale compreso fra un certo numero x' di (X) ed uno y' di (Y) appartenga ad uno dei due insiemi. Dico che, se non conterrà un massimo il gruppo inferiore (X) nè un minimo il superiore (Y), non potrà esistere un numero razionale che non sia minore di nessun numero dell'insieme inferiore e non sia maggiore di nessuno del superiore. Infatti, se vi fosse un numero con queste proprietà, non essendo il medesimo minore di x' nè maggiore di y', dovrebbe appartenere ad uno dei due gruppi: se appartenesse al gruppo inferiore, sarebbe un massimo del medesimo, non essendo minore di nessun numero dello stesso: se invece appartenesse al gruppo superiore, sarebbe un suo minimo, non superando nessun numero del medesimo.

T. 2. *Se due insiemi di numeri razionali sono limitrofi, od esiste un sol numero razionale che non è minore di nessun numero dell' insieme inferiore e non è maggiore di nessuno del superiore, o non ne esiste alcuno. In quest'ultimo caso non può avere un massimo l'insieme inferiore nè un minimo il superiore.*

R. Siano (X) ed (Y) due insiemi limitrofi di numeri razionali e supponiamo che esista un numero razionale a che non sia minore di nessun numero del gruppo inferiore (X) nè maggiore d'alcuno del superiore (Y). Se è dato un numero razionale b maggiore di a, essendo limitrofi (X) ed (Y) e numero positivo $b-a$, si possono prendere un numero in (X) ed uno in (Y) tali che la loro differenza sia più piccola di $b-a$: siano x' ed y' tali numeri; sia cioè:

$$y'-x'<b-a \qquad \text{epperò} \qquad b>y'+(a-x').$$

Per l'ultima diseguaglianza, essendo positivo o nullo $a-x'$, è $b>y'$. Adunque, ogni numero maggiore di a è maggiore di qualche numero di (Y). In simil modo si riconosce che ogni numero razionale minore di a è minore di qualche numero di (X) per cui nessun altro numero, oltre ad a, gode la proprietà di non esser minore di nessun numero del gruppo inferiore (X) e di non esser maggiore di nessuno del superiore (Y). Ora un numero, che fosse un massimo del gruppo inferiore od un minimo del superiore, non sarebbe minore di nessun numero del gruppo inferiore nè maggiore d'alcuno del superiore per cui segue che: se un numero razionale con queste proprietà non esiste, non può esservi un massimo nel gruppo inferiore nè un minimo nel superiore.

E. 1. Non esiste un numero razionale, che non sia minore di nessun numero razionale avente quadrato minore di 3 nè sia maggiore d'alcuno avente quadrato maggiore di 3.

E. 2. Le due successioni aventi per numeri n^{mi}

$$x_n = \frac{4n-1}{2n} \qquad y_n = \frac{4n+1}{2n}$$

sono limitrofe. Il numero razionale 2, ed esso solo, non è minore di nessun numero x e non è maggiore di nessun numero y.

(Continua).

F. GIUDICE.

LA RISOLUZIONE COMPLETA DI UN PROBLEMA

Il problema che forma oggetto della presente nota fu già trattato in questo *Periodico* (*), ed altrove (**), ma nè l'una nè l'altra trattazione ci sembra completa, ed è per ciò che crediamo opportuno ritornare sull'argomento, non tanto per il problema in se stesso, quanto per determinare i limiti ai quali, a nostro avviso, deve giungere la trattazione completa di un problema geometrico di secondo grado o riducibile al secondo grado.

Desideriamo specialmente porre in evidenza che la trattazione geometrica di un problema deve contenere, oltre alla soluzione, la discussione geometrica completa, *dei dati e dei risultati*, senza limitarsi ad accennare alla possibilità o meno che il problema ammetta una o più soluzioni, e che la trattazione algebrica di un problema geometrico deve giungere alle *identiche* conclusioni non solo, ma contenere la rappresentazione grafica delle incognite, senza di che un

(*) Anno VI, 1891, pag. 135.

(**) Dott. Ing. FEDERICO OCCELLA: *Alcune questioni di Matematica elementare* — Casale, Tip. e Lit. C. Cassone, 1893, pag. 18.

problema geometrico non si può dire risolto. È ben vero che, cercando tale rappresentazione, raramente si giunge alle semplici ed eleganti costruzioni che costituiscono la risoluzione geometrica, ma ciò potrà formare oggetto di studio. Crediamo utile infine che faccia seguito tanto alla risoluzione geometrica, quanto alla risoluzione algebrica, la ricerca del come possano variare i dati del problema, rimanendo invariate alcune soluzioni di esso.

A chiarire il nostro concetto varrà l'esposizione compendiata del problema in discorso.

PROBLEMA. — *Dal vertice* A *di un triangolo* ABC, *i cui lati sono dati, condurre al lato opposto* BC *una retta* AD, *in modo che il quadrato di* AD *sia equivalente al rettangolo dei segmenti* BD, DC *del lato* BC. *Calcolare uno dei segmenti, e discutere i dati e il risultato.*

RISOLUZIONE GEOMETRICA. — Posta la condizione che il punto D debba trovarsi fra B e C, sia O il centro della circonferenza circoscritta al triangolo. I punti comuni al lato BC ed alla circonferenza che ha per diametro OA risolvono il problema; infatti tale circonferenza è il luogo geometrico dei punti di mezzo di tutte le corde condotte per A nella circonferenza circoscritta al triangolo. Si potranno così avere due, una o nessuna soluzione; ed è condizione necessaria e sufficiente per la possibilità del problema che la perpendicolare MN abbassata dal punto di mezzo M del raggio OA sul lato BC sia minore od uguale ad MO.

Se l'angolo A del triangolo dato è ottuso, si ha $MN < MO$, ed il problema ammette due soluzioni.

Nel caso speciale che il triangolo, essendo ottusangolo in A, sia isoscele, i due punti D che risolvono il problema, e che chiameremo D_1, D_2, sono ad uguale distanza dai vertici B e C, ed i segmenti AD_1, AD_2 sono uguali.

Se l'angolo A è retto, si ha pure in generale $MN < MO$: il problema ammette due soluzioni, ed uno dei punti D coincide col punto di mezzo di BC, mentre l'altro è il piede dell'altezza corrispondente a BC; infatti uno degli angoli aventi il vertice in tale punto risulta inscritto in mezza circonferenza.

Nel caso speciale che il triangolo, essendo rettangolo in A, sia isoscele si ha $MN = MO$, ed il problema ammette una sola soluzione determinata dal punto di mezzo di BC.

Se l'angolo A è acuto, può essere $MN \gtreqless MO$. Per determinare in questo caso a quali condizioni debbano soddisfare gli elementi dati, ossia i lati del triangolo, affinchè il problema sia possibile, supponiamo che la circonferenza di centro M e di raggio MO sia tangente al lato BC nel punto $D_{1.2}$, e tagli i lati AB ed AC rispettivamente nei punti P e Q loro punti di mezzo. Condotti i segmenti $AD_{1.2}$, $PD_{1.2}$, $QD_{1.2}$ e PQ, il triangolo $PQD_{1.2}$ è isoscele, quindi $AD_{1.2}$ è la bissettrice dell'angolo A, e si ha perciò:

$$\overline{AD}^2_{1.2} + BD_{1.2} \,.\, CD_{1.2} = AB \,.\, BC \quad \text{ossia} \quad 2BD_{1.2} \,.\, CD_{1.2} = AB \,.\, BC. \quad \text{(I)}$$

Ma si ha pure:

$$\overline{BD}^2_{1.2} = BP \,.\, BA \qquad \text{e} \qquad \overline{CD}^2_{1.2} = CQ \,.\, CA$$

ossia:

$$\overline{BD}_{1.2}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{2} \qquad \text{e} \qquad \overline{CD}_{1.2}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{2},$$

quindi, sommando membro a membro queste due relazioni e la (1) insieme:

$$\overline{BD}_{1.2}^2 + \overline{CD}_{1.2}^2 + 2\, BD_{1.2} \,.\, CD_{1.2} = \frac{\overline{AB}^2}{2} + \frac{\overline{AC}^2}{2} + AB \,.\, BC,$$

ossia:

$$2\,\overline{BC}^2 = (AB + AC)^2 .$$

Se invece la circonferenza di centro M e raggio MO taglia il lato BC in due punti, prendendo sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABC un punto A_1 tale che, condotto il raggio OA_1, la circonferenza di centro M_1 (punto di mezzo di OA_1) e raggio $M_1 O$ risulti tangente al lato BC, si ha per la dimostrazione precedente:

$$2\,\overline{BC}^2 = (A_1 B + A_1 C)^2 ,$$

ma (*):

$$A_1 B + A_1 C > AB + AC,$$

dunque:

$$2\,\overline{BC}^2 > (AB + AC)^2 .$$

Se infine la circonferenza di centro M e di raggio MO nè tocca, nè taglia il lato BC, preso il punto A_1, come sopra si è detto, si ha ancora:

$$2\,\overline{BC}^2 = (A_1 B + A_1 C)^2,$$

ma (*) in questo caso:

$$A_1 B + A_1 C < AB + AC,$$

(*) LEMMA. — *Se due triangoli aventi un lato in comune sono inscritti nello stesso cerchio, la somma degli altri due lati è maggiore in quel triangolo che ha maggiore l'altezza corrispondente al lato comune.*

DIM. — Siano ABC, A_1BC i due triangoli, che potremo ritenere situati dalla stessa parte del lato comune BC, e sia ad es. ABC quello che ha maggiore l'altezza corrispondente al lato BC; si vuol dimostrare che

$$AB + AC > A_1B + A_1C.$$

È manifesto che se:

$$BA_1 < BA, \qquad \text{si ha:} \qquad CA_1 > CA,$$

e se invece:

$$BA_1 > BA, \qquad \text{si ha:} \qquad CA_1 < CA;$$

per fissare le idee supponiamo che si verifichi la prima ipotesi, allora al dimostrare che:

$$AB + AC > A_1B + A_1C$$

equivarrà il dimostrare che;

$$AB - A_1B > A_1C - AC.$$

Sui lati BA e CA_1 a partire da B e da C si prenda rispettivamente $BP = BA_1$ e $CP_1 = CA$, e, condotti i segmenti AA_1, A_1P, AP_1, si noti che i due triangoli AA_1P, AA_1P_1 hanno uguali gli angoli opposti al lato comune AA_1 perchè supplementari degli angoli alla base dei triangoli isosceli BA_1P, CAP_1 che hanno uguali gli angoli al vertice; si può dunque descrivere una circonferenza per i punti A, A_1, P, P_1. Si noti inoltre che nei due triangoli AA_1P, AA_1P_1 l'angolo A_1AP del primo è minore dell'angolo AA_1P_1 del secondo, sarà quindi l'angolo AA_1P del primo maggiore dell'angolo A_1AP_1 del secondo, e perciò nel cerchio AA_1PP_1 sarà la corda AP maggiore della corda A_1P_1, c. v. d..

dunque:

$$2\overline{BC}^2 < (AB + AC)^2 .$$

Sulla posizione reciproca della circonferenza di centro M e raggio MO e del lato BC non si possono fare altre ipotesi, d'altra parte le ipotesi fatte hanno condotto a conclusioni che si escludono a vicenda, dunque sono vere le proposizioni inverse, cioè: Se sussiste la disuguaglianza:

$$2\overline{BC}^2 > (AB + AC)^2 ,$$

la circonferenza di centro M e raggio MO taglia in due punti il lato BC, ed il problema ammette due soluzioni. Se sussiste l'uguaglianza:

$$2\overline{BC}^2 = (AB + AC)^2 ,$$

la circonferenza tocca il lato BC, il punto di contatto è sulla bissettrice dell'angolo A, ed il problema ammette una sola soluzione. Se sussiste infine la disuguaglianza:

$$2\overline{BC}^2 < (AB + AC)^2 ,$$

la circonferenza nè taglia, nè tocca il lato BC, ed il problema non ammette soluzioni.

Nel caso speciale che il triangolo, essendo acutangolo in A, sia isoscele, il problema è manifestamente impossibile, ed in conseguenza è pure impossibile se il triangolo è equilatero.

Posta la condizione che il punto D debba trovarsi sul prolungamento di BC, esso sarà determinato su tale prolungamento dalla tangente condotta in A alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC. Perchè il problema sia possibile, è quindi necessario e sufficiente che i lati AB ed AC siano disuguali; ed il punto che risolve il problema, e che chiameremo D_3, sarà dalla parte di B o di C, secondo che si avrà $AC \gtrless AB$.

(Continua). DIEGO DOTT. FELLINI.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Sull'area delle figure piane limitate da linee rette (Dai *Sitzungsberichten der Dorpater Naturforscher Gesellschaft.* Jhrg. 1892). — Un problema così semplice come quello della misura delle aree piane limitate da linee rette non fu ancora trattato, per quanto risulta dai lavori che io conosco, con tutto il rigore e tutta la chiarezza possibili. A tacere dell'introduzione di procedimenti illimitati, vengono a torto usati assiomi generali concernenti le grandezze, assiomi immediatamente evidenti solo quando le grandezze considerate sono segmenti rettilinei, quando cioè il confronto fra esse si può fare mediante sovrapposizione. Uno di tali assiomi generali sulle grandezze, che viene applicato in tutti i trattati a me noti di geometria elementare per dimostrare l'equivalenza di due parallelogrammi aventi egual base ed eguale altezza, è ad es. quello che « grandezze eguali tolte da grandezze eguali danno differenze fra loro eguali ». Se infatti i lati dei parallelogrammi opposti alla base comune hanno comune una parte od almeno un punto, i due parallelogrammi si possano immediatamente decomporre in parti tali che ogni parte dell'uno corrisponde ad una parte ad essa eguale nell'altro. Ma nel caso in cui quei due lati non hanno alcuna parte comune si credette dovere abbandonare quel metodo di dimostrazione, insuperato e fondato su una definizione precisa, e com'è noto lo si sostituì con altro ove ciascuno parallelogrammo si considera come la differenza fra uno stesso trapezio e due triangoli congruenti. Ma sinchè non si sia riusciti a misurare mediante segmenti le aree piane, il che è reso possibile appunto e solo coll'aiuto del teorema da dimostrare, è illegittima l'applicazione del precedente assioma sulle grandezze.

Questo metodo di dimostrazione si deve dunque rigettare, con tanta maggiore ragione perchè in ogni caso ognuno dei due parallelogrammi aventi la stessa base ed eguale altezza può venir decomposto, in modo semplice ed intelligibile a qualunque scolaro, in un certo numero di parti tali che ad ogni parte dell'un parallelogrammo corrisponda nell'altro una parte congruente. Esso si trova esposto ad es. nella I parte (p. 75 e seg.) delle *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* dello Stolz (Leipzig 1885). Questo metodo può anzi un po' semplificarsi col diminuire il numero delle parti in cui si fa la decomposizione (*).

Si considerino infatti gli estremi contigui dei lati dei parallelogrammi opposti alla base comune e per ciascuno si conduca la parallela ai lati del parallelogrammo a cui quel vertice non appartiene e si prolunghi fino ad incontrare i lati estremi dei due parallelogrammi. La congiungente dei due estremi così ottenuti è parallela alle due basi e stacca dai due parallelogrammi dati due nuovi parallelogrammi immediatamente decomponibili in due coppie di triangoli a due a due congruenti. Se i due parallelogrammi residui hanno per lati opposti alla base comune due segmenti non aventi alcun punto comune, si operi su di essi come prima e così dopo un numero finito di prove si giungerà ad una coppia di parallelogrammi a cui è applicabile il consueto ragionamento. Se le distanze degli anzidetti vertici contigui dei lati opposti alla comune base è maggiore di n volte la base, ma non maggiore di $n + 1$ volte la base stessa, allora ogni parallelogrammo resta decomposto in un trapezio (o per eccezione un triangolo) tre triangoli ed n parallelogrammi, e ad ogni sua parte ne corrisponde una congruente nell'altro parallelogrammo.

Ora se in generale si chiamano equivalenti due figure piane rettilinee quando ciascuna può essere decomposta in un numero finito di parti per modo che ogni parte dell'una figura corrisponda ad una parte congruente dell'altra, si può, come si legge in Stolz l. c., dimostrare con pieno rigore che ad ogni figura dell'anzidetta specie si può associare un rettangolo equivalente avente per uno dei suoi lati un dato segmento ed allora la superficie di essa figura è realmente rappresentata dall'altro lato di quel rettangolo. Però così si è tacitamente pas-

(*) Cfr. anche: De Paolis, *Elementi di Geometria*, p. 293 — Faifofer, *Ele. di Geo.*, 7ª ediz., p. 187 ed esercizio 501 p. 212 — Sannia e D'Ovidio, *Ele. di Geo.*, 8ª ediz., p. 278 — Lazzeri e Bassani, *Ele. di Geo.*, p. 259; ecc. (*N. d. R.*).

sati sopra la questione se questo rettangolo sia determinato univocamente, se cioè decomponendo altrimenti la figura in triangoli – è questo in fatto il punto di partenza – non si ottenga un altro rettangolo. Tale silenzio non può essere giustificato che escludendo la possibilità che un rettangolo sia equivalente ad una sua parte in base all'assioma generale delle grandezze che dice « non potere essere la parte eguale al tutto » : ed in fatto Stolz nel c. l. alla citata definizione di equivalenza aggiunge la condizione: « Un poligono è maggiore di un altro se contiene, oltre alle parti di questo, delle altre ancora ». Ma è chiaro che colla precedente definizione precisa dell'equivalenza questa proposizione non è in alcun modo chiara di per sè, ed un primo tentativo per dimostrarla conduce ad un metodo di esaustione il quale anzi, prescindendo dal procedimento illimitato ivi adoperato, non sembra nemmeno condurre allo scopo. Eppure anche qui si può, con mezzi semplicissimi e senza introdurre alcun postulato, raggiungere completo rigore entro i limiti della scelta definizione di equivalenza.

Basta a tale scopo partire da ciò che: 1° ad ogni triangolo si può associare un rettangolo equivalente avente un dato lato, cosa che non esige molte spiegazioni; 2° ogni poligono può in un modo determinato venire decomposto in triangoli. Come modo di decomposizione si presenta spontaneamente quello adoperato da Möbius (*Ges. Werke*, vol. II, pag. 485 e seg.) e nel quale si prende come vertice comune di tutti quei triangoli un punto posto nell' interno o sul perimetro del poligono e come basi i lati del poligono stesso. In tal modo per ogni posizione del vertice è associato al poligono un rettangolo determinato, quello cioè che nasce riunendo i rettangoli equivalenti ai triangoli componenti ed aventi tutti per un lato un dato segmento, ed è agevole dimostrare (cfr. Möbius l. c.) (*) che il rettangolo ottenuto ha un'area indipendente dalla posizione assunta per il vertice. Questo rettangolo che corrisponde univocamente al poligono può considerarsi per rappresentante dell'area di questo, ove si ritenga che uno dei lati di questo rettangolo sia dato una volta per tutte. Si vede allora subito che ai due poligoni risultanti dal segare un poligono con una retta che va da un punto all'altro del contorno, corrispondono due rettangoli la cui somma è il rettangolo che corrisponde all'intero poligono; per persuadersene basta scegliere come vertice un punto di quella trasvesarle. Se quindi si decompone un poligono in poligoni parziali conducendo rette qualisivogliano, si potrà proseguire la suddivisione mediante rette congiungenti ciascuna due punti del contorno dei poligoni componenti finchè tutto il poligono risulti diviso in poligoni parziali mediante rette congiungenti ciascuna due punti del contorno del poligono primitivo epperò anche dei poligoni parziali. Donde emerge finalmente che i rettangoli corrispondenti ai singoli poligoni parziali formano insieme il rettangolo corrispondente al poligono primitivo; e così è compiuta la desiderata dimostrazione che il rettangolo associato ad un poligono, equivalente a questo ed avente un dato lato, è indipendente dal modo in cui il poligono stesso viene decomposto in triangoli.

F. Schur.

(*) Oppure cfr. Cremona, *Elementi di Calcolo grafico*, n. 19 - Baltzer, *Plani.* § 9,9 (*N. d. R.*).

Quistione di massimo o minimo. (*Lettera al Redattore*). — Egregio Sig. Professore : — I problemi di massimo e minimo furono conservati negli ultimi programmi di Matematica della sezione fisico-matematica di Istituto tecnico molto opportunamente, perchè offrono all' insegnante un campo assai svariato per esercitare gli alunni in quistioni interessanti, non solamente di matematica, ma anche di meccanica generale e di fisica.

Non dovendosi però uscire dagli elementi, i problemi che si possono trattare hanno sostanzialmente per punto di partenza la ricerca dei valori massimi e minimi di una funzione $\varphi(x)$ nei casi in cui, posto

$$y = \varphi(x),$$

quest'equazione resulti di secondo grado, o si scinda in equazione di secondo grado, rispetto ad x, dalla cui discussione dipende la determinazione dei valori massimi o minimi, quando esistono.

Ora nei libri di testo, tranne in qualche caso particolare, si ritiene, o si lascia supporre, che la forma più generale della funzione $\varphi(x)$ sia quella di una funzione algebrica razionale a termini interi e non eccedenti il secondo grado rispetto ad x. Molte altre funzioni algebriche, non razionali, godono della detta proprietà, ad esempio le seguenti :

$$\sqrt{ax+b} + \sqrt{a_1 x + b_1},$$

$$ax + b + \sqrt{a_1 x^2 + b_1 x + c_1},$$

$$\frac{\sqrt{ax+b}}{a_1 x + b_1}, \ldots\ldots$$

in cui i radicali si possono considerare biformi ; e siccome non pochi problemi conducono a funzioni analoghe, così mi è parso che possa giovare il proporre ai lettori del *Periodico di Matematica* lo studio e la discussione dell'equazione

$$y = \varphi(x)$$

in tutti quei casi in cui i valori massimi o minimi della $\varphi(x)$ possano dedursi da una equazione o da equazioni di secondo grado.

Con stima mi creda

Milano, 1 aprile 1893.

Suo Dev.^{mo}

G. Bardelli.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 143, 149*, 153** e 154*

143. *Dimostrare il seguente teorema di Giamblico (IV Sec. dell'E. v.) « Dati tre numeri consecutivi della serie dei numeri naturali, il massimo dei quali divisibile per tre, se ne faccia la somma; si addizionino poi le cifre del numero così ottenuto, altrettanto facciasi per questo nuovo numero, e così via. Si* *arriverà così finalmente al numero 6 ». E cercare se in sistemi di numerazione a base diversa da 10 esista un'analoga proposizione.*

(G. Loria).

Dimostrazione del Sig. Prof. *R. Bettazzi* a Torino.

Prendansi i tre numeri consecutivi $p, p+1, p+2$, la cui somma S è $3p+3$; poichè p è di una delle tre forme $3k$, $3k+1$, $3k+2$, sarà S di una delle tre forme $9k+3$, $9k+6$, $9k+9$ rispettivamente. Facendo in ogni caso la somma delle cifre di S, poi quella delle cifre della somma così ottenuta, e così di seguito, si giunge ad un numero di una cifra che in ciascuno dei tre casi è sempre 3, o 6, o 9: e quindi si trova sempre lo stesso numero. Il caso del teorema di Giamblico corrisponde ai valori di p della forma $3k+1$, nel quale caso 6 è il numero al quale finalmente si arriva.

Ma il teorema può ulteriormente generalizzarsi considerando una base qualunque. Sia b la base qualunque d'un sistema di numerazione e pongasi $b-1 = a$, siccome il resto della divisione per a di un numero qualunque è uguale a quello della divisione per a della somma delle cifre del numero, anche in tale sistema si ha che sommando le cifre di un numero, quelle della somma ottenuta e così via, si arriva ad un numero d'una cifra che è il resto della divisione per a del numero dato, od è a stesso se il numero è divisibile per a.

Pongasi $a = \alpha c$ (potendo essere $c = 1$). Presi α numeri consecutivi $p, p+1, \ldots p+\alpha-1$, la loro somma sarà $S = p\alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$. Ora distinguendo i vari valori di p rispetto al modulo c, sarà $p = ct + c'$ $(c' < c)$, quindi

$$S = (ct + c')\alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = at + c'\alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$$

donde si vede che il resto della divisione di S per a, sarà quello stesso della divisione per a di $c'\alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$. Questo numero non dipende da t ma solo da c' ed è lo stesso per tutti i numeri p che hanno un medesimo c'. Si ha dunque il teorema cercato:

Se la cifra massima a di un sistema di numerazione si spezza in due fattori α, c e si prendono α numeri consecutivi qualunque purchè il primo sia sempre congruo collo stesso numero rispetto al modulo c, fatta la somma di essi, sommate le cifre di questa somma, poi quelle del numero ottenuto, ecc., si perviene ad un numero di una cifra che è sempre lo stesso.

Per $\alpha = a$, $c = 1$, poichè i numeri p sono congrui fra loro rispetto al modulo 1, il teorema dà il corollario:

Sommando a numeri consecutivi, poi le cifre della somma, ecc., si giunge sempre allo stesso numero di una cifra qualunque siano gli a numeri scelti.

Se a è dispari questo numero finale è a stesso: infatti la somma degli a numeri è $S = ap + \frac{a(a-1)}{2}$ ed S è divisibile per a, giacchè $\frac{a-1}{2}$ è un numero intero.

Dimostrazione del Sig. *F. Mariantoni*, studente nella R. Università di Roma.

1° Siano $a_0, a_1, a_2, \ldots a_m$ le cifre, da destra a sinistra, di un numero N in un sistema di numerazione qualsiasi di base x, è chiaro che per $x \equiv 1 \pmod{n}$ $(n < x)$ e solo in questo caso, le due congruenze

$$N = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \equiv 0 \quad \text{o} \quad a_0 + a_1 + \ldots + a_m \equiv 0 \pmod{n}$$

sono l'una conseguenza dell'altra, giacchè si ha allora:

$$N \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_m \pmod{n}.$$

In tutti i sistemi di numerazione, eccetto il binario e il ternario, per $n = x - 1$ o per n divisore di $x - 1$ ha dunque luogo la proprietà che N è divisibile per n quando è tale la somma delle cifre di N.

2° Sia $r < n$ ed n divisore di $x - 1$. Si consideri il numero $kn + r$, ove k è un intero qualunque. Per ciò che precede se σ indica la somma delle cifre di questo numero $\sigma \equiv r \pmod{n}$, onde o $\sigma = r$ o $\sigma = k_1 n + r$: in questo secondo caso si avrà pure che la somma σ_1 delle cifre di σ od è r o $k_2 n + r$, ecc.. Così proseguendo si giunge necessariamente al numero r. Quindi il teorema: « Se n è un divisore di $x - 1$, $r < n$ e k intero, facendo la somma delle cifre di $kn + r$, la somma delle cifre del risultato e così di seguito, si arriva al numero r ».

3° Sia n impari e prendiamo in ordine crescente gli n numeri consecutivi

$$\mu n - (p - 1),\ \mu n - (p - 2), \ldots,\ \mu n,\ \mu n + 1, \ldots\ \mu n + n - p$$

dei quali il p^{esimo} è multiplo di n. La somma di questi numeri, divisibile per n, è

$$S = \mu n^2 + \frac{n(n+1)}{2} - pn.$$

Ora supposto che n^2 sia divisore di $x - 1$, perchè $\frac{n(n+1)}{2} - pn < n^2$ in valore assoluto, facendo la somma delle cifre di S, la somma delle cifre del risultato e così di seguito, si giungerà (2°) ad un numero d'una sola cifra ν tale che

$$\nu \equiv \frac{n(n+1)}{2} - np \pmod{n^2}.$$

Così, lasciando da parte il caso privo d'interesse che non sia n^2 divisore di $x - 1$, si ha questo teorema generale: « In qualunque sistema di numerazione a base x (escluso $x = 1, 2$) tale che $x - 1$ ammetta un divisore quadratico dispari n^2, presi n numeri consecutivi qualunque in ordine crescente, de' quali il p^{esimo} è quello multiplo di n, facendo la loro somma, la somma delle cifre del risultato e così via si arriverà finalmente ad un numero d'una sola cifra congruo con $\frac{n(n+1)}{2} - pn \pmod{n^2}$ ».

Di qui discende come corollario che: « Nel sistema di numerazione decimale presi tre numeri consecutivi in ordine crescente, facendo la loro somma, la somma delle cifre del risultato, ecc., si arriva al numero 3 o 9 o 6 secondo che nella terna il numero multiplo di 3 è il minore, il medio od *il maggiore* $(p = 1, 2, 3)$ ». (*).

149'. *Per un punto* P *distante del segmento* a *dal centro* O *di un cerchio descritto col raggio* r, *condurre una trasversale* PMM', *in modo che le tangenti* MT, TM' *agli estremi della corda intercetta formino un dato angolo* θ; *esprimere la distanza* PT, *il perimetro del triangolo* MTM' *in funzione della* a, r, θ *e dare il valore di* θ *nel caso di angolo* OPM = MTM'.

(G. Bellacchi).

Soluzione dei Sigg. *Barbieri* e *Veneziali*, alunni del R. Liceo di Campobasso.

La corda MM', divisa in modo qualunque dal punto P, dà la relazione $MP \,.\, M'P = r^2 - a^2$ [1] e perchè MM' è corda anche del circolo che ha per raggio TM, si avrà pure $MP \,.\, M'P = \overline{MT}^2 - \overline{TP}^2$, donde $\overline{MT}^2 - \overline{TP}^2 = r^2 - a^2$ e $\overline{TP}^2 = \overline{MT}^2 - r^2 + a^2$.

Ma nel triangolo rettangolo OMT, nel quale l'angolo in T è eguale a $\frac{\theta}{2}$, si ha $TM = r \cot \frac{\theta}{2}$, onde, sostituendo e riducendo, risulta:

$$TP = \sqrt{\frac{r^2\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) + a^2 \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sqrt{r^2\cos\theta + a^2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}.$$

Per dare il valore di θ, nel caso che angolo $MPO = MTM'$, osserviamo che nel triangolo $OM'P$ se si pone l'angolo esterno $MPO = \theta$, essendo $OM'P = \frac{\theta}{2}$, sarà $POM' = \frac{\theta}{2}$, e però $OM' = r = 2a\cos\frac{\theta}{2}$: dunque il valore di θ sarà dato dalla relazione

$$\theta = 2\,.\,\mathrm{ang}\left(\cos = \frac{r}{2a}\right).$$

Il perimetro del triangolo MTM' è formato dalla corda $MM' = 2r\cos\frac{\theta}{2}$ [2]. e dalle due tangenti MT e $M'T$, eguali ciascuna a $r\cot\frac{\theta}{2}$, onde:

$$Perimetro = 2r\cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right) = 4r\cot\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\pi - \theta}{4}.$$

(*) Altre interessanti risposte alla quistione ci sono pervenute dai Sigg. *G. Marotta*, studente nella R. Università di Catania, Dott. *U. Ceretti*, Prof. *U. Fazzini*, *U. Scarpis*, *F. Ferrari*. Quella inviata da quest'ultimo è notabilmente diversa delle due pubblicate e molto elaborata ed estesa; ne vieta la pubblicazione deficienza di spazio.

Si potrebbe anche domandare la distanza del punto T dal centro O; il triangolo rettangolo OMT dà a tale scopo:

$$\overline{TO}^2 = r^2 + \frac{r^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \quad \text{da cui} \quad TO = \frac{r}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} .$$

Infine per mostrare quale relazione debba esistere tra a e l'angolo θ, perchè il problema sia solubile, troviamo i valori di MP e $M'P$, dei segmenti cioè della corda: le formule [1] e [2] ce ne dànno il prodotto e la somma: onde questi segmenti saranno le radici dell'equazione

$$x^2 - 2r \cos \frac{\theta}{2} x + (r^2 - a^2) = 0 ,$$

che, risoluta, dà:

$$x = r \cos \frac{\theta}{2} \pm \sqrt{a^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} ,$$

onde i valori dei due segmenti saranno reali solo quando è

$$a \geqq r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} .$$

Posto $a < r$, nel caso particolare

$$a = r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} ,$$

i due segmenti sono eguali, la corda è perpendicolare ad a, ed θ è il massimo angolo che possano formare tra loro le due tangenti. Posto $a > r$, il problema è sempre solubile, qualunque sia il valore di θ, compreso tra 0^0 e 180^0: per $\theta = 0^0$ la trasversale passa pel centro, e per $\theta = 180^0$ essa è tangente.

Per risolvere geometricamente il problema, basta descrivere su OP un segmento di cerchio capace dell'angolo $\frac{\theta}{2}$, perchè le due coppie di tangenti menate agli estremi delle due corde che passano per P e per i punti d'intersezione di questo segmento di cerchio col cerchio dato formano un angolo eguale a θ. (*)

153''. *Se convertendo la frazione* $\frac{1}{\mathrm{p}}$, *con* p *numero primo, in decimali, risulta un numero periodico il cui periodo ha un numero dispari di cifre, i resti della divisione* 1 : p *corrispondenti alle singole cifre del periodo, due a due, non sono mai complementari cioè tali che la loro somma sia uguale a* p.

(A. Lugli).

(*) Soluzioni di questa questione pervennero anche dai Sigg. *C. Aiello* (studente a Napoli), *U. Gerra* e *G. Mazza* (R. Ist. tec. Piacenza), *M. Giordano* (R. Ist. tec. Napoli) e dalla Sig. *V.ª F. Prime* a Bruxelles.

Dimostrazione della Sig.[ra] V.[va] F. *Prime* a Bruxelles.

Sia $2k+1$ il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{p}$ e supponiamo che possa aversi

$$10^i \equiv r \ (\text{mod. } p) \quad \text{e} \quad 10^j \equiv r' \ (\text{mod. } p)$$

con le ipotesi $i < j < 2k+1$ ed $r + r' \equiv p$. Risulterebbe

$$10^i(10^{j-i}+1) \equiv 0 \ (\text{mod. } p) \quad \text{da cui} \quad 10^{s+1}+1 \equiv 0 \ (\text{mod. } p) \quad [1],$$

avendo posto $j - i = s + 1$.

Ma la generatrice della frazione decimale periodica avendo per denominatore un numero formato da $2k+1$ cifre 9, lasciando in disparte il caso $p=3$ che dà una frazione avente una sola cifra al periodo, p dovrà dividere il numero $111\ldots.1$ formato da $2k+1$ cifre 1. Se dunque indichiamo con N_x il numero formato da x cifre uguali all'unità, avremo anche

$$10 \,.\, N_{2k} + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p). \qquad [2]$$

Sottraendo, membro a membro, le congruenze [1] e [2] e dividendo per 10, verrebbe

$$N_{2k} - 10^s \equiv 0 \ (\text{mod. } p) \quad \text{o} \quad 10^{s+1}.\,N_t + N_s \equiv 0 \ (\text{mod. } p) \qquad [3],$$

avendo posto $2k - s - 1 = t$ [4].

Ma tenendo conto di [1] la congruenza [3] si ridurrebbe a

$$N_s - N_t \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

od anche, dividendo per 10^t, a

$$N_{s-t} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

ciò che permetterebbe di convertire $\frac{1}{p}$ in frazione decimale avente $s-t$ cifre al periodo, dunque meno di $2k+1$.

Osservazione. Ciò suppone s diversa da t, ma è chiaro che l'ipotesi $s = t$ è inammissibile poichè se potesse essere $s = t$, dalla relazione [4] si avrebbe $2k - 1 = 2s$.

154'. *Dato l'angolo* BOA $= 2\alpha$, *si descriva con centro* O *e raggio arbitrario un cerchio a tagliare i lati dell'angolo in* A *e* B, *poi con diametri* AB, OB *due semicerchi, il secondo dei quali passa pel punto medio* H *di* AB *e il primo taglia* OH, *dalla parte del vertice* O *dell'angolo, in* C. *Condotta* CB *poi tracciato il cerchio di centro* B *e raggio uguale alla metà di* BC *fino a tagliare l'arco* BH *in* P, *dimostrare che prendendo l'angolo* BOP *uguale alla terza parte dell'angolo dato, si commette un errore che è espresso da*

$$\frac{2\alpha}{3} - ang\left(sen = \frac{sen\,\alpha}{\sqrt{2}}\right).$$

Dimostrazione della Sig.ra V.va *F. Prime*, a Bruxelles.

Il triangolo rettangolo OPB, supponendo $OB = 1$, dà

$$\operatorname{sen} BOP = BP.$$

Ma l'angolo BCH uguagliando 45°:

$$BP = \frac{BC}{2} = \frac{BH}{\sqrt{2}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{2}}.$$

da cui

$$\operatorname{ang} BOP = \operatorname{ang}\left(\operatorname{sen} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{2}}\right)$$

e quindi

$$\frac{2\alpha}{3} - BOP = \frac{2\alpha}{3} - \operatorname{ang}\left(\operatorname{sen} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{2}}\right).$$

Risposte a quistioni alle quali rimane a dare evasione. Quistione **150**** e **152**** dalla Sig.a Ved.va *F. Prime*; **156**** dal Sig. *E. de Vito*; **159**. *S. Catania, E. de Vito, F. Mariantoni*; **160****. *F. Mariantoni*, M.me *F. Prime, V. Sferra*; **162***. *E. de Vito, U. Gerra, G. Mazza*, M.me *F. Prime, R. Scozzari*; **163***. *M. Piattelli*, M.me *F. Prime*; **164***. *E. de Vito*, M.me *F. Prime, R. Scozzari*; **165****. *M. Piattelli*, M.me *F. Prime, R. Scozzari, V. Sferra*: **166***. M.me *F. Prime*; **167***. *U. Ceretti, G. Pucciano, G. Tirella*; **168****. *E. de Vito, F. Mariantoni*, M.me *F. Prime, R. Scozzari, G. Tirella*; **169***. *B. Armono, E. de Vito, U. Gerra, E. Lugaro, G. Mazza*, M.me *F. Prime, R. Scozzari, G. Tirella*; **170****. *V. Correnti, E. de Vito, F. Mariantoni, M. Piattelli.*

QUISTIONI PROPOSTE (*)

171*. La retta $B'C'$ tirata per i piedi delle altezze BB', CC' del triangolo ABC incontri in A'' il lato BC e si conduca AA''' perpendicolare ad AA''. Dimostrare che le rette AA''', BB''', CC''' si tagliano in un punto.

V.va F. Prime.

172*. Dato un triangolo ABC, siano B' e C' i punti in cui le perpendicolari innalzate sul lato BC nei vertici B, C incontrano i lati AC, AB. Dimostrare che la retta $B'C'$ è perpendicolare alla retta che unisce il centro del cerchio circoscritto col punto medio dell'altezza relativa al vertice A.

V.va F. Prime.

(*) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

173**. In un triangolo isoscele di base costante 1° il luogo geometrico dei centri delle circonferenze ex-inscritte è un' iperbole equilatera, 2° il luogo geometrico incontro della mediana di uno dei lati eguali con l'altezza dell'altro è un'ellisse; che ha per asse maggiore la base del triangolo.

G. Bellacchi.

174**. Ad un dato triangolo rettangolo circoscrivere una parabola 1° con l'asse normale all'ipotenusa, 2° con il vertice coincidente con quello dell'angolo retto.

G. Bellacchi.

175**. Per i vertici A, B della base di un triangolo isoscele si può sempre descrivere una parabola, il cui fuoco giaccia nell'ortocentro H; quali devono essere gli angoli $A = B$ del triangolo isoscele affinchè la parabola passi pure per C?

G. Bellacchi.

176**. Se un triangolo isoscele ha i lati eguali di grandezza costante ed uno fisso di posizione il luogo geometrico del suo ortocentro H è una strofoide.

G. Bellacchi.

177**. Dimostrare che, per n intero e positivo qualunque, si ha

$$\left[1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\dots\right]^2+\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\dots\right]^2=2^n.$$

V. Correnti.

178*. Il punto P di una sfera di raggio R è vertice di un cono che ha per asse il diametro PQ della sfera condotto per P, e ha per base un cerchio di raggio R situato sul piano condotto perpendicolarmente al diametro PQ per il suo estremo Q. Trovare a quale distanza dalla base dovranno essere tagliati, con un piano parallelo a questa, sì il cono che la sfera perchè le aree delle sezioni circolari fatte nel cono e nella sfera siano fra loro in un rapporto dato n, o perchè siano in un rapporto dato n' le superficie del tronco di cono e della zona sferica corrispondente; e discutere i risultati.

179*. In un triangolo rettangolo è data la somma a dei due cateti x ed y, e l'altezza k relativa all'ipotenusa z; determinare i tre lati x, y, z del triangolo, e indicare in quali casi il problema è possibile (*).

(*) Le quistioni 178* e 179* sono i temi di matematica dati nel luglio per la licenza dagli Istituti tecnici nella *Sezione Fisico-matematica*.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

G. PEANO. — *Lezioni d'Analisi infinitesimale*: *Vol. II.* — Tip. G. Candeletti, Torino, 1893.

Abbiamo già detto rapidamente in questo Periodico del vol. I delle *Lezioni d'Analisi infinitesimale* del Prof. G. PEANO: ora diremo pure molto brevemente del vol. II, non occorrendo spendere molte parole per metterne in evidenza i pregi, essendo conosciuto lo zelo con cui il valente autore si occupa dell'insegnamento.

Dopo d'aver posta qualche definizione generale sui complessi d'ordine n, tratta in modo particolare dei vettori e dei numeri immaginari: poi stabilisce le principali proposizioni relative alle forme geometriche di 1ª, 2ª, 3ª e 4ª specie, alle operazioni sulle medesime, alla loro riduzione ed alle loro coordinate; ritrova così, come forme di prima specie, i vettori con le loro proprietà. Passa poi ai sistemi di complessi; per una classe u definisce la Cu, o classe u resa chiusa, e la classe derivata Du e per esse classi dà alcune proposizioni importanti e generali, fra cui il teorema di CANTOR: *Se* u *è una proprietà distributiva dei campi di punti, e se un campo* s *ha la proprietà* u, *e questo campo è limitato, allora esiste un punto* x *del campo* s *reso chiuso tale chè ogni sfera di centro* x *ha la proprietà* u. Dopo tratta dei limiti, considerando tanto i complessi in generale quanto le speciali forme geometriche studiate precedentemente, e valendosi sovente delle proposizioni stabilite già sui sistemi di complessi. Accenna alle serie a termini complessi qualsiansi, dà il teorema sulla moltiplicazione di due serie assolutamente convergenti a termini immaginarii: considera in particolare la funzione esponenziale, e le logaritmica e circolari che ne dipendono. Dice poi rapidamente della derivazione dei complessi. Dà la direzione della tangente ad una curva ed il differenziale dell'arco. Estende la formola di Taylor ai complessi ed alle forme geometriche di prima specie, funzioni d'una variabile numerica, ed alle funzioni di più variabili (pag. 85, 139, 153). Tratta del piano osculatore, delle curvature, del cerchio osculatore, dell'evoluta e della sfera osculatrice d'una linea. Parla dell'integrazione dei complessi: mostra come l'uso degli immaginari può semplificare il calcolo di integrali. Sviluppa secondo le potenze ascendenti di n

$$\int_0^\pi (1 + 2\,n \cos x + n^2)^p \, dx \qquad\qquad n^2 < 1$$

e ne deduce una formula per il calcolo della lunghezza dell'ellisse. Passando a trattare delle funzioni di più variabili, parla delle derivate parziali ed, incidentalmente, delle approssimazioni. Si occupa delle funzioni implicite e delle omogenee. Considerando sempre funzioni di più variabili, dice dei massimi e minimi delle medesime. Parla del piano tangente ad una superficie. Definisce il parametro differenziale di primo ordine di un numero funzione della posizione d'un punto e lo applica alla costruzione di normali a curve ed alla ricerca di massimi e minimi. Tratta degli inviluppi di linee e di superficie e della curvatura delle superficie. Si occupa degli integrali multipli, delle aree e dei volumi. Tratta delle equazioni differenziali lineari, omogenee e non omogenee: s'occupa pure delle equazioni differenziali in generale: parla prima particolarmente di quelle nelle quali si possono separare le variabili, delle riducibili alla forma omogenea $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$; delle equazioni di BERNOULLI, RICCATI, CLAIRAUT: s'occupa anche dei sistemi d'equazioni differenziali: sviluppa in serie l'integrale dell'equazione lineare omogenea del 2° ordine. In ultimo tratta del calcolo delle variazioni, prendendo in considerazione anche il caso in cui nell'integrale, che si considera, comparisca un qualsiasi numero complesso funzione d'una variabile x. Nelle applicazioni delle diverse teorie sono presi in considerazione le linee e superficie ed i solidi principali: *asteroide, parabole, cicloide, trocoide, trattrice, elica, logaritmica, ovali, spirali, geodetiche, linee e superficie di livello, superficie rigate, superficie e solidi di rivoluzione.* .... Nelle questioni geometriche, le quali formano la maggior parte del libro, è quasi sempre introdotto il punto generatore con le sue derivate, approfittando per ciò di quanto fu premesso sulle forme geometriche e sulla loro derivazione.

Il libro del Prof. Peano « destinato ad esser guida agli allievi per apprendere i fondamenti dell' Analisi » (*) è veramente pregevole così per il rigore di tutte le dimostrazioni, come per l'uso dei metodi nuovi nella trattazione dei varii argomenti: esso è quindi molto raccomandabile a quegli studenti, che desiderano abituarsi allo stretto rigore con metodi moderni.

Genova, luglio 1893.

F. GIUDICE.

B. CARRARA. — *Saggio d'introduzione alla teoria delle quantità complesse geometricamente rappresentate.* Cremona, Tip. Fezzi, 1893. — Prezzo: L. 2.50.

Questo saggio è un lavoro diligente di compilazione che ha il pregio d'una introduzione storica in cui è delineato lo sviluppo raggiunto dalla teorica delle quantità complesse sotto il rispetto d'una rappresentazione geometrica dalla origine di siffatta rappresentazione la quale sembra dovuta al geometra E. Kühn. Vi sono inoltre, nel testo, molte note illustrative accompagnate da indicazioni storiche.

Il libro del Sig. Prof. Carrara è diviso in due parti, la prima elementare, la seconda di carattere più elevato.

Nella prima parte l'A. dopo aver stabilito con molta chiarezza il significato geometrico dell'espressione $a + ib$ ed accennato alle altre notazioni per le quantità complesse, passa a svolgere l'addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza ed estrazione di radice per queste quantità allorchè si considerano sotto l'aspetto geometrico (quantità geometriche), accennando alle più importanti proprietà che ne derivano e svolgendo anche qualche applicazione allo scopo di mostrare di quale potente ausilio riescano nel calcolo. Chiude questa parte la risoluzione compendiosa delle equazioni binomie e la considerazione delle radici dell'unità.

(*) G. PEANO. *Lez. d'Anal.*: Vol. II, Note.

La seconda parte contiene i seguenti argomenti distribuiti in paragrafi:

1. *Delle serie a termini complessi o quantità geometriche.* Vi si trova la definizione di serie anche quando i termini non sono indipendenti da $\sqrt{-1}$ ed il carattere di convergenza per tali serie.

2. *Nuova espressione delle quantità geometriche e formole che se ne deducono.* Dimostrazione dell'identità $e^{ip} = \cos p + i \operatorname{sen} p$ con alcune applicazioni.

3. *Esempi d'applicazione delle quantità geometriche ad alcuni risultati di Geometria Analitica.* Dimostrazione di una nota relazione fra i lati e gli angoli d'un triangolo. Equazioni del cerchio in coordinate cartesiane ed equazione dell'ellisse in coordinate polari.

4. *Serie trigonometriche.* Sviluppo in serie di $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, e^{ix} e dimostrazione della formola $x = \tan x - \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} - \ldots$.

5. *Sopra una serie logaritmica ed una formola speciale logaritmico-trigonometrica.* Sviluppo in serie di $\operatorname{Log}(1 + x)$ e dimostrazione dell'identità $2ix = \operatorname{Log} \frac{1 + i \tan x}{1 - i \tan x}$.

6. *Variabili geometriche o complesse.* Concetto di variabile per una quantità geometrica complessa z e continuità di essa. Differenza del modo di comportarsi d'una quantità reale rispetto ad una complessa nel passaggio da un valor z ad un altro z'. Differenziale di z.

7. *Funzioni di variabili geometriche o complesse. Applicazioni ed esempi.* Concetto generale di funzione (molto chiaramente esposto) e concetto di funzione per quantità complesse. Una funzione w della variabile $z = x + iy$ è in generale della forma $u + iv$. Funzioni *monodrome* e *polidrome*. Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione complessa monodroma $w = u + iv$ (con u e v funzioni reali di x ed y) sia funzione di $z = x + iy$. Dimostrazione del teo.: « Se w è una funzione della variabile complessa z, la derivata $\frac{dw}{dz}$ è indipendente da dz ossia ha lo stesso valore per ogni direzione dell'elemento dz ». Definizione *riemanniana* d'una funzione di variabile complessa. Proprietà delle derivate di w. Conservazione della similitudine nelle parti infinitesime per le due rappresentazioni delle quantità geometriche w e z, quando w è funzione monodroma di z ed applicazioni di tale similitudine od isogonalità.

8. *Principii e* (tre) *dimostrazioni del teorema fondamentale sulle equazioni.*

9. *Teorema secondo.* Ogni equazione algebrica $f(z) = 0$ del grado m ammette precisamente m radici.

10. *Variazioni speciali dell'argomento d'una funzione.* Dimostrazione della proposizione seguente: Se la variabile z descrive una linea in due sensi opposti la funzione w descrive essa pure una linea in due sensi opposti; l'argomento di w prova dunque due variazioni uguali e di segno contrario.

11. *Teorema terzo.* Il numero delle radici d'un polinomio intero comprese in un'area piana data è uguale alla variazione che subisce l'argomento del polinomio quando la variabile descrive il contorno dell'area, questa variazione divisa per 2π.

12. *Definizioni e proprietà degli integrali di funzioni di variabili complesse.* Differenza che parebbe manifestarsi in un integrale sia esso preso fra limiti reali o fra limiti complessi. Dimostrazione della proposizione che il valore di $w = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$ è una funzione dei limiti come nel caso che questi limiti siano reali.

13. *Sugli integrali doppi.* Concetto e determinazione di $\iint \frac{\partial U}{\partial y} dx\, dy$ quando U è una funzione *reale* e monogena di x ed y per tutti i punti di un'area A (e converrebbe aggiungere $\frac{\partial U}{\partial y}$ ha un valore finito per tutti i punti di quest'area), l'integrale doppio essendo esteso all'area A. Dimostrazione della proprietà (dovuta a Riemann) $\int (U\, dx + V\, dy) = \iint \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) dx\, dy$ in cui l'integrale semplice è esteso al contorno di A e quello doppio ad A.

14. *Teorema fondamentale. Applicazione.* Se il cammino d'integrazione della variabile complessa $z = x + iy$ consiste in una curva chiusa, dentro il cui limite $f(z)$ è una funzione finita e continua: l'integrale di $f(z)\, dz$ è uguale a zero. Nella applicazione è mostrato poi con un esempio preso dal *Compendio di analisi superiore* dello Schlömilch, come il precedente teorema possa servire a trovare i valori di integrali definiti.

Gli schiarimenti da me aggiunti ai titoli dei diversi paragrafi mi sembrano sufficienti a formarsi un'idea del contenuto del libro del Sig. Prof. Carrara, libro che tra per la natura di parte della materia che contiene, difficile a rinvenirsi altrove, tra pei numerosi dati storici e critici presentati al lettore in modo da invogliarlo a maggiori studii, riuscirà di molto giovamento ai giovani studenti delle nostre Università ai quali l'A. più particolarmente sembra indirizzarlo.

A. Lugli.

AIRY (Sir G. Biddel). *Gravitazione.* Londra 1834. Traduzione italiana di Francesco Porro. Manuali Hoepli. Milano 1893. — Prezzo L. 1. 50.

Il libretto « Gravitazione » del celebre Sir Giorgio Biddel Airy, del quale si hanno due edizioni inglesi, una tedesca ed ora una italiana mercè le cure dell'astronomo Francesco Porro, è un monumento nel suo genere. Evitare l'analisi e ad un tempo rendere conto con mirabile sintesi geometrica, o meglio con puro ragionamento, dei precipui effetti della gravitazione, porgendo nozioni abbastanza precise sulle perturbazioni degli elementi delle orbite e sulla natura della forza, che perturba un pianeta od un satellite, prodotta dall'attrazione di altri corpi; farne l'applicazione alla teoria della luna e a quella, giammai tentata da alcuno, dei satelliti di Giove; offrire un saggio delle perturbazioni periodiche e secolari nella teoria dei pianeti, prima quando il perturbante è nel piano del perturbato, poi in piani diversi; esporre da ultimo l'effetto dello schiacciamento dei pianeti sul moto dei loro satelliti; tale è il mirabile lavoro di Airy, nel quale non si trova neppur una notazione algebrica.

Per trovare qualche cosa, che ricordi il libro suddetto, conviene ricorrere o al celebre capitolo undecimo dei Principii di Newton, o al trattato di Giovanni Herschel, locchè prova che solo agli uomini di genio e profondi nella scienza la più elevata, è concesso tentare con felice esito mirabili sintesi adatte al massimo numero di lettori.

Il libro di Airy, tradotto in italiano dal Porro, può rendere eminenti servigi *anche* a coloro che pur sarebbero in caso di leggere e studiare quegli argomenti esposti coi metodi completi dell'alta analisi.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico.

Bardelli (G.) — Su un problema di dinamica di G. Saladini generalizzato da A. Serret (Aggiunta alla nota :). (Rend. R. Ist. Lom. Vol. XXVI, 1893).

Biddel Airy (G.) — *Gravitazione*. Spiegazione elementare delle principali perturbazioni nel sistema solare. Traduzione italiana con note ed aggiunte di F. Porro. Milano, U. Hoepli, 1893 — Prezzo : L. 1,50.

Caldarera (G.) — Sviluppo delle differenze finite in funzione delle derivate e viceversa (Atti Acc. Gioenia di Scie. Nat. in Catania. Vol. VI, Serie 4ª, 1893).

Carlini (L.) — Saggio d'una teoria generale delle progressioni aritmetiche. Treviso, Tip. Luigi Zoppelli.

Catania (S.) — La proporzione matematica ed il suo uso nel saggio critico del Diritto Penale di Giovanni Bovio (Rivista Etnea, 1893) — Sul concetto di condizione a cui devono soddisfare gli elementi di una figura nella Geometria elementare (Riv. di Matematica, Vol. III, 1893).

Del Re (A.) — Sopra un sistema di rette (3, 4) (Rend. R. Acc. Lincei. Vol. II, 1893) — Sopra i sistemi di rette cremoniani (Idem, idem).

Giudice (F.) — Sulla soluzione dell'equazione algebrica di 5º grado con l'aggiunta dell'irrazionalità icosaedrale (Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, Vol. XXVIII, 1893).

Millosevich (E.) — Sugli eclissi totali di sole del 1900 V 28 e del 1905 VIII 30 (Memorie Società Spettroscopisti italiani, Vol. XXII, 1893).

Miraglia (M.) — *Questioni vive di riforma scolastica*. Lettere aperte a S. E. il prof. F. Martini Ministro di P. Istruzione. Torino, G. Scioldo, editore, 1893 — Prezzo : L. 1.

Neppi Modona (A.) — Un'applicazione della trasformazione funzionale di Laplace e della sua inversa. Bologna, Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1893.

Paternò (F. P.) — Un teorema sulle h dei piani di un certo fascio e le sue applicazioni in un sistema generale di assi obliqui. Palermo, Tip. M. Amenta, 1887 — Sulla determinazione diretta dei piani bisettori di un angolo diedro (Atti Coll. Ing. e Arch., Palermo, An. XII, 1889).

Riccardi (P.) — Sopra un codice ebraico contenente alcuni scritti matematici ed astronomici (Bib. math. di Eneström, To. 7, 1893).

Tagiuri (A.) — Sulla integrazione dell' equazione $\psi(n) = h\psi(n-1) + k\psi(n-2) + l$. (Gior. di mat. di Battaglini, Vol. XXXI, 1893).

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques, publié par G. Eneström. Nouvelle série. 7. N. 1, 2. — Stockholm, 1893.

Bulletin scientifique, rédigé par M. E. Lebon. — Septième année. N. 6-10. Mars-Juillet, 1893. Félix Alcan, éditeur. Paris.

El Progreso matemático, periódico de matemáticas puras y aplicadas. Director D. Zoel G. de Galdeano. Año III, N. 26-32. Febrero-Agosto de 1893 — Zaragoza.

Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Vol. XXXI. Gennaio e Febbraio, Marzo e Aprile 1893. — Napoli, B. Pellerano.

(*Continua*).

Chiusura della redazione il dì 12 settembre 1893.

SUL CAMBIAMENTO SIMULTANEO DEI PIANI DI PROJEZIONE.

NOTA dell'Ing. F. P. PATERNÒ

1. Invece del consueto cambiamento, volta a volta, di un solo de' piani di projezione (p. di pr.) può, in taluni casi, convenire quello simultaneo di due di essi, facendone rotare il sistema attorno al loro asse comune: giacchè, dopo d'aver projettato sui nuovi piani, nel supporli poscia ricondotti alla posizione iniziale, viensi ad ottenere, abbenchè a scapito quasi sempre della chiarezza nel disegno, un collegamento, se non più semplice, certo più diretto fra le antiche e le nuove projezioni; le quali, riferendosi ad un punto, saranno allineate colle prime perpendicolarmente alla linea di terra che, com'è ovvio, non cambia.

2. Importa rilevare che le ragioni di tale variante risiedono essenzialmente sulla possibilità di condurre per una data retta (la linea di terra) un piano, ed un solo, parallelo o perpendicolare, rispettivamente, ad una retta o ad un piano dati. Per altro il metodo suddetto, di riportare cioè le nuove projezioni sugli antichi piani, applicato al cambiamento semplice di un solo di essi, p. es. il verticale, differisce dal risaputo in ciò: che, invece di ribaltarlo sul piano orizzontale, lo si ribalta su quel piano, parimenti verticale, che ne indica la primitiva posizione.

3. Indipendentemente dal principio delle rotazioni, può anche esser utile, in altri casi, il cambiamento simultaneo traslatorio dei piani fondamentali, supponendo che ciascuno si sposti parallelamente a sè stesso. Si mettono così in rilievo le maggiori risorse e l'importanza de' metodi di trasformazione in Geometria Descrittiva, come sarà meglio chiarito dalle seguenti applicazioni.

4. Si ottiene p. es. un'altra soluzione del problema sulla minima distanza di due rette g ed h non situate nello stesso piano, operando come appresso (Tav. I di questo fasc., fig. 1ª):

a) Dopo d'aver condotto per una di esse, p. es. per la g, il piano **S** parallelo all'altra h, si faccia rotare dell'angolo ω, attorno alla linea di terra, il sistema de' primi due p. di pr., fino a che il piano orizzontale diventi perpendicolare al suddetto piano **S**.

b) Costruite indi le novelle projezioni delle date rette, è ovvio che quelle orizzontali ${}_1g'$ ed ${}_1h'$ debbono risultare fra loro parallele; e che, inoltre, una di esse, la ${}_1g'$, coinciderà colla nuova prima traccia del piano **S**.

c) Si cambii, infine, il piano verticale, rendendolo parallelo alle due date rette; e, dopo averne segnate le nuove projezioni verticali ${}_2g''$ ${}_2h''$, se dal loro punto comune R si conduce la perpendicolare $R\,12$ alla direzione delle ${}_1g'$ ed ${}_1h'$, e dai punti 1 e 2, ov'essa rispettivamente le taglia, le perpendicolari all'antica linea di terra sino alle antiche projezioni, saranno 12 la minima distanza n richiesta ed $1'2'$. $1''2''$ le sue prime due projezioni n' ed n''.

Verificano l'esattezza del tracciato, oltre i risaputi caratteri di perpendicolarità fra retta e piano e le note relazioni metriche fra la vera grandezza e le projezioni di un segmento rettilineo, il parallelismo fra la linea di terra e la congiungente i punti ${}_1 1''$ e ${}_1 2''$, ottenuti rispettivamente sulle ${}_1g''$ ed ${}_1h''$ come indica la figura. (*)

5. Un cambiamento rotatorio di 45° del sistema di due de' piani fondamentali, p. es. del $1°$ e $2°$ fa determinar subito due dei punti $\mathfrak{H}_i$ di una retta, nel nostro caso $\mathfrak{H}_x$ ed $\mathfrak{H}_{x'}$ e le nuove projezioni di essa: (Tav. II, fig. 2ª) ciò per le facili relazioni che allora si manifestano fra due delle sue traccie (1^a e 2^a) e le projezioni omonime degli anzidetti suoi punti. Ed è ovvio che, riferendosi alternativamente a due posizioni distinte del sistema, cioè all'iniziale ed allo spostato, una fra le tracce della retta e due fra le projezioni dei suoi punti $\mathfrak{H}_i$, convenientemente scelti, debbonsi trovare allineati perpendicolarmente alla linea di terra; e che inoltre il rapporto fra le loro distanze da questa è quanto $\sqrt{2} : 1$, come facilmente si deduce dalle costruzioni segnate nella tavola.

6. La distanza n da un punto A ad un piano **S** (Tav. II, fig. 3ª)

(*) Pertanto è bene si noti, come una rotazione eguale e di senso contrario a quella già considerata del sistema delle due rette, attorno la linea di terra, condurrebbe del pari alla soluzione del problema; ma è facile accorgersi che, malgrado trattisi della più semplice tra le figure non piane (un sistema di due rette) occorrerebbe determinare, fra le generatrici delle due iperboloidi coassiali che esse, rotando, rispettivamente descrivono, quelle che, sopra un dato piano, si projettano parallele: problema che non è certamente così elementare come quello da noi posto.

può determinarsi in vera grandezza e nelle due projezioni, conducendo per A il piano perpendicolare al dato ed a quello verticale, e considerandolo come un cambiamento rotatorio di questo attorno alla traccia verticale del primo; ma, invece di ribaltarlo, come ordinariamente suol farsi, attorno alla sua traccia orizzontale, lo si ribalti attorno a quella verticale e sul piano omonimo: eseguite ivi le operazioni del caso, si ottiene dapprima la distanza richiesta, e, ricondotto indi l'anzidetto piano alla posizione iniziale, le relative projezioni.

Sono facili verifiche dell'esattezza del disegno la nota perpendicolarità fra le suddette projezioni e le omonime tracce del piano considerato, non che il confronto colla rotazione attorno la verticale del punto A, sino a divenire perpendicolare al piano verticale. (*)

7. La rotazione attorno ad un suo punto, e nel suo piano, della figura costituita da projezioni e tracce relative ad una data quistione di Geometria Descrittiva, può utilizzarsi a far cadere entro il campo del quadro elementi dapprima inaccessibili, operando sui quali e riconducendo poscia la figura alla posizione primitiva, mediante rotazione eguale e contraria a quella già eseguita, si ottiene la soluzione richiesta. Ciò s'interpreti come un cambiamento rotatorio attorno al loro asse comune di due de' p. di pr., supposto che formi sistema con essi, epperò simultaneamente ruoti, la figura ai quali è riferita: ed è superfluo aggiungere come tal metodo possa, per casi analoghi, estendersi anche a semplici quistioni di Geometria pura.

8. La figura 4ª (Tav. III) rappresenta l'intersezione di due piani, nel caso che cada fuori il quadro il punto d'incontro delle loro tracce verticali; la rotazione ha luogo attorno l'asse delle y, e la sua grandezza α è, per maggior semplicità, quanto l'angolo che la perpendicolare OH alla prima traccia HR di uno de' piani dati, fa colla linea di terra.

9. Ecco, infine, un'applicazione del cambiamento simultaneo di semplice traslazione dei p. di pr., anch'esso utile nel caso di ele-

(*) Può, talvolta, conferire alla più facile intelligenza del tracciato, l'uso di numeri progressivi e di frecce convenientemente apposti nelle sue parti principali, onde meglio fissarne l'ordine e il senso delle costruzioni: del che è un saggio nella figura.

menti inaccessibili nei dati del problema: trattisi p. es. di determinare (Tav. III, fig. 5ª) l'intersezione i dei due piani L e T, nel caso che i punti comuni alle loro tracce omonime cadano entrambi fuori il campo del quadro. Si spostino allora parallelamente a sè stessi, e nel senso indicato, il piano verticale di y e quello orizzontale di z: la loro intersezione $L\,T$, nuova linea di terra, individua colla primitiva $L\,T$ il piano α, il quale taglierà la retta i nel punto C, centro di omotetia de' due tetraedri che i piani L e T rispettivamente determinano cogli antichi e coi nuovi piani di projezione; d'onde il seguente tracciato:

Condotte le $L''\,T''$ ed $L'\,T'$ parallele alla $L\,T$ ed alle stabilite distanze da questa, si costruiscono i parallelogrammi $L\,2\,(L)\,1$ e $2'\,T\,1'\,(T)$, dei quali i lati e le diagonali convenientemente prolungati, determinano il quadrilatero $S_2\,(T)\,S_1\,(L)$ e il punto (C), centro di riduzione omotetica nel piano del quadro, ecc. Del resto le numerose costruzioni sussidiarie ivi segnate, le quali a vicenda si verificano, rendono superflui ulteriori schiarimenti.

10. Il tracciato precedente diviene assai più semplice ed utile in pratica, se sono eguali gli spostamenti dei due p. di pr.; giacchè, allora, le prime due projezioni della nuova linea di terra saranno equidistanti dall'antica $L\,T$, sulla quale cadranno sia il ribaltamento della prima che l'anzidetto centro di riduzione (C).

Palermo, agosto 1893.

SUI NUMERI DATI
MEDIANTE INSIEMI DI NUMERI RAZIONALI

(*Continuazione e fine, V. pag. 144*).

7. D. Si dice *numero irrazionale* ogni numero non razionale che separi tutti i numeri razionali in due classi.

Postulato. Si ammette che: *Se tutti i numeri razionali sono divisi in due classi e quelli d'una sono tutti minori di quelli dell'altra, esiste uno ed un solo numero irrazionale maggiore d'ogni numero della classe inferiore e minore di ciascuno della superiore* *allora e soltanto allora che non contiene un massimo la classe inferiore e non contiene un minimo la superiore.*

T. 1. *Due numeri, razionali od irrazionali, distinti sono sempre separati da infiniti numeri razionali.*

R. Consideriamo prima due numeri p e q razionali: essi sono separati dagli infiniti numeri, razionali, che s'ottengono da $p+m.(q-p)$ ponendovi per m le infinite frazioni proprie, positive. Consideriamo ora un numero razionale p con uno irrazionale u e supponiamo che p sia minore di u: per il precedente postulato, p non può essere massimo dei numeri razionali minori di u, per cui potremo fissare un numero razionale q, che sia maggiore di p e minore di u: gli infiniti numeri razionali, che separano i due numeri razionali p e q, separano anche p ed u. In modo simile si riconosce che sono separati da infiniti numeri razionali un numero irrazionale ed uno razionale che lo superi. Se infine i due numeri sono irrazionali, per esser distinti determineranno una diversa divisione in classi dei numeri razionali, per l'ammesso postulato, per cui si potrà fissare un numero razionale p maggiore dell'uno e minore del rimanente dei due numeri irrazionali: questi sono quindi separati da p e dagli infiniti numeri razionali separanti uno di essi da p.

D. 2. *Due numeri sono eguali* se nessun numero razionale è minore dell'uno e maggiore dell'altro.

D. 3. Un numero è *maggiore* d'un altro, che dicesi *minore* del primo, se qualche numero razionale è minore del primo numero ed è maggiore del secondo.

C. *Due numeri, razionali od irrazionali, o sono eguali o sono diseguali. Se sono diseguali, uno è maggiore dell'altro.*

Se con a, b, c indichiamo tre numeri, razionali od irrazionali:

da	$a=b$	e	$b=c$	segue	$a=c$
»	$a \geqq b$	»	$b>c$	»	$a>c$
»	$a \leqq b$	»	$b<c$	»	$a<c$.

T. 2. *Due insiemi limitrofi di numeri razionali individuano sempre un numero, che non è minore di nessun numero dell'insieme inferiore e non è maggiore di nessuno del superiore.*

R. Siano (X) ed (Y) due insiemi limitrofi di numeri razionali. Dividiamo tutti i numeri razionali in due classi, ponendo tutti quelli che non sono maggiori di qualche numero di (X) in una classe, che diremo (X'), ed i rimanenti nell'altra classe, che diremo (Y'); questa conterrà quindi tutti i numeri di (Y) e sarà formata di numeri tutti maggiori di quelli di (X'). Esiste certamente un numero che non è minore di nessun numero della classe inferiore e non è maggiore di nessuno della superiore perchè o v'è un numero massimo nella classe inferiore o ve n'è uno minimo nella superiore ed allora tal numero ha, manifestamente, la dichiarata proprietà; oppure non ha massimo la classe inferiore nè minimo la superiore ed allora, pel postulato precedentemente ammesso, esiste un numero irrazionale colla detta proprietà. Ora dico che un sol numero non è minore di nessun numero dell'insieme inferiore e non è maggiore di nessuno del superiore, cosicchè tal numero resta individuato dai due insiemi: infatti; se due diversi numeri possedessero l'accennata proprietà, gli infiniti numeri razionali separanti essi numeri, per l'ultimo teorema, dovrebbero separare anche i due insiemi; ma ciò non può avverarsi perchè s'è visto che due insiemi limitrofi di numeri razionali non possono esser separati da più numeri razionali. (6, T. 2).

E. 1. Le due successioni aventi per numeri n^{mi}

$$x_n = \frac{11n-3}{5n+8} \qquad y_n = \frac{11n+4}{5n-1}$$

individuano il numero 2, 2.

E. 2. L'insieme dei numeri x e quello dei numeri y definiti dalle

$$x^2 < 5 \qquad y^2 > 5$$

individuano un numero irrazionale.

E. 3. *Frazione periodica.* Il gruppo dei numeri

$$0{,}37 \qquad 0{,}3737 \qquad 0{,}373737 \qquad \ldots$$

e quello dei numeri

$$0{,}38 \qquad 0{,}3738 \qquad 0{,}373738 \qquad \ldots$$

individuano la frazione $\frac{37}{99}$.

$$\left[\frac{37}{99}=\frac{3700}{9900}=\frac{370000}{990000}=\ldots=\frac{3700+37}{9900+99}=\frac{370000+3737}{990000+9999}=\ldots\right.$$

$$\left.\frac{1}{1}>\frac{1+3737}{1+9999}>\frac{3737}{9999} \qquad \frac{3738}{10000}>\frac{3737}{9999}>\frac{3737}{10000} \text{ ecc.}\right]$$

E. 4. *Base Neperiana.* Le due successioni aventi per numeri

$$x_n = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{n!} \qquad y_n = x_n + \frac{1}{n!}$$

individuano un numero irrazionale.

[Qualsiasi frazione di denominatore n o non è maggiore di x_n o non è minore di y_n per cui od è minore di x_{n+1} od è maggiore di y_{n+1}. Si ricordi anche il teorema del n. 5].

II.

Limiti inferiore e superiore d'un insieme. Limite d'una successione.

Dopo quanto fu detto s'intuisce facilmente che il numero individuato da due insiemi limitrofi di numeri razionali resta pure individuato da un solo dei due insiemi (4, T.), Porremo ciò in evidenza occupandoci ora del limite inferiore e del limite superiore d'un insieme. Ci occuperemo pure del limite d'una successione nel senso usuale. Queste tre specie di limiti le definiremo servendoci solo di quanto qui fu detto, indipendentemente quindi da qualsiasi conoscenza d'operazioni con numeri irrazionali.

8. T. *Se un insieme è formato di numeri razionali tutti minori d'uno fisso, esiste un numero ed uno solo, irrazionale o razionale, che non sia minore di nessun numero dell'insieme e non sia maggiore di nessun numero razionale che superi tutti quelli dell'insieme. Se i numeri d'un insieme sono tutti maggiori d'uno fisso, esiste un numero ed uno solo, che non sia maggiore di nessun numero dell'insieme e non sia minore di nessun numero razionale, che sia minore di tutti quelli dell'insieme.*

R. Sia (X) un insieme di numeri razionali tutti minori d'uno fisso. Il numero individuato dall'insieme (X) con quello di tutti i numeri razionali maggiori d'ogni numero di (X), ed esso solo, non è minore di nessun numero di (X) e non è maggiore di nessun numero razionale che superi tutti quelli di questo insieme (7, T. 2; 4, T.). In modo simile si riconosce la verità del teorema relativamente ad un insieme di numeri tutti maggiori d'uno fisso.

D. Si dice *limite superiore* d'un insieme di numeri, tutti minori d'uno fisso, il numero che non è minore di nessun numero dell'insieme e non è maggiore di nessuno che superi tutti quelli dell'insieme. Si dice *limite inferiore* d'un insieme di numeri, tutti maggiori d'un fisso, il numero che non è maggiore di nessun numero dell'insieme e non è minore di nessuno, che sia minore di tutti quelli dell'insieme. Per significare che un insieme contiene numeri maggiori d'ogni dato numero positivo, o minori di ognuno negativo, si usa dire che il medesimo ha l'*infinito positivo, o negativo, per limite superiore, od inferiore.*

C. *Il limite superiore, od inferiore, d'un insieme può appartenere o non appartenere al medesimo: se gli appartiene, è un suo massimo o minimo.*

E. 1. Il gruppo dei numeri ottenibili da $\frac{2n}{5n+1}$, dando ad n tutti i valori interi positivi, ha il limite inferiore $\frac{1}{3}$ ed il superiore 0,4: soltanto il limite inferiore appartiene all'insieme.

E. 2. L'insieme dei numeri ottenibili da $\frac{5m+3n}{2m+4n}$, dando ad m ed n tutti i valori interi positivi, ha il limite superiore 2,5 e l'inferiore 0,75; nessuno dei due limiti appartiene all'insieme.

E. 3. L'insieme dei numeri non minori di 2 e non maggiori di 7 contiene i suoi limiti inferiore e superiore, che sono 2 e 7.

9. D. 1. Diremo che *una relazione sussiste tra un numero dato ed i termini lontani d'una data successione* se sia possibile fissare n abbastanza grande perchè tale relazione sussista tra il numero dato ed ognuno dei termini che seguono il termine n^{mo} nella data successione.

E. Poniamo

$$(X) = \left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{3}{4}, 5, \frac{5}{6}, 7, \frac{7}{8}, \ldots\right)$$

indichiamo cioè con (X) la successione, che ha per termini $(2n-1)^{mo}$ e $(2n)^{mo}$ i numeri $2n-1$ e $\frac{2n-1}{2n}$. Ogni data frazione propria è minore dei termini lontani: nessun numero è maggiore dei termini lontani della successione (X). Non è possibile fissare n abbastanza grande perchè qualsiasi frazione propria sia poi minore d'ogni termine seguente il termine n^{mo} nella successione (X).

D. 2. Si dice che *una successione tende ad un limite* l se i termini lontani della successione sono maggiori d'ogni numero razionale, che sia minore di l, e sono minori d'ognuno, che sia maggiore di l.

T. *Una successione non può tendere a due limiti.* (*)

R. Sia x_n il numero n^{mo} d'una successione, che tenda al limite l; e sia h un numero minore di l. Indichiamo con r un numero razionale maggiore di h e minore di l (7, T. 1). Siccome la successione tende ad l ed r è un numero razionale minore di l, i termini lontani della successione sono maggiori di r. La successione non può dunque tendere ad h come limite perchè i termini lontani della medesima non sono minori di r, che è un numero razionale maggiore di h. In modo simile si riconosce che la successione non può tendere ad un limite maggiore di l: quindi è vero che, se la medesima tende al limite l, essa non può tendere ad alcun altro limite.

10. T. *Perchè una successione di numeri tenda ad un limite è sufficiente e necessario che per ogni numero razionale positivo prefissato si possa assegnare ad* n *un valore abbastanza grande perchè le differenze tra il termine* n^{mo} *della successione ed i termini successivi siano tutte minori di quel numero positivo.*

R. Consideriamo la successione

$$a_1 \qquad a_2 \qquad a_3 \qquad a_4 \qquad \ldots$$

e supponiamo che, per ogni numero razionale positivo ε dato, si possa fissare per l'indice n un valore m tale che sia minore di ε ogni differenza tra a_m ed i termini successivi ad a_m, cosicchè sarà:

$$a_{m+p} - \varepsilon < a_m < a_{m+p} + \varepsilon \text{ per } p = 1, 2, 3 \ldots$$

da cui ricavasi:

$$a_m - \varepsilon < a_{m+p} < a_m + \varepsilon.$$

(*) Per uno studio di limiti d'una successione, in senso più largo, V. una mia nota nel Tomo V dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, anno 1891, pag. 280.

Diamo successivamente ad ε i valori $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... e fissiamo relativi valori di m i quali indicheremo con $m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots$: corrispondentemente potremo stabilire le diseguaglianze:

$$a_{m_1} - \frac{1}{1} < a_{m_1+p} < a_{m_1} + \frac{1}{1}$$
$$a_{m_2} - \frac{1}{2} < a_{m_2+p} < a_{m_2} + \frac{1}{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m_n} - \frac{1}{n} < a_{m_n+p} < a_{m_n} + \frac{1}{n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

per $p = 1, 2, 3, \ldots$

Poniamo:

$$(X) = \left(a_{m_1} - 1\,,\ a_{m_2} - \frac{1}{2},\ a_{m_3} - \frac{1}{3},\ \ldots\right),$$
$$(Y) = \left(a_{m_1} + 1\,,\ a_{m_2} + \frac{1}{2},\ a_{m_3} + \frac{1}{3},\ \ldots\right).$$

Proveremo che questi due gruppi sono limitrofi.

Prendiamo in (X) un numero qualunque $a_{m_k} - \frac{1}{k}$ ed in (Y) uno qualunque $a_{m_i} + \frac{1}{i}$: siccome il numero $a_{m_k} - \frac{1}{k}$ è minore di ciascuno dei numeri a_{m_k+p} ed $a_{m_i} + \frac{1}{i}$ è maggiore di ciascuno dei numeri a_{m_i+p}, è

$$a_{m_k} - \frac{1}{k} < a_{m_k+m_i} < a_{m_i} + \frac{1}{i}$$

epperò è

$$a_{m_k} - \frac{1}{k} < a_{m_i} + \frac{1}{i}.$$

Ogni numero di (X) è dunque minore d'ogni numero di (Y). Sia ora α un numero positivo dato arbitrariamente: si fissi un intero n maggiore di $\frac{2}{\alpha}$; sarà così α maggiore di $\frac{2}{n}$, che è la differenza tra il numero $a_{m_n} + \frac{1}{n}$ di (Y) ed il numero $a_{m_n} - \frac{1}{n}$ di (X): ogni numero positivo dato è dunque maggiore della differenza di due numeri presi convenientemente nell'insieme superiore (Y) l'uno e nell'inferiore (X) l'altro.

Resta così provato che i due insiemi (X) ed (Y) sono limitrofi

(3, D. 2): indichiamo con l il numero che i medesimi individuano (7, T. 2). Sia b un numero razionale minore di l, quindi minore d'ogni numero di (Y) ed inoltre minore di qualche numero di (X) perchè solamente l non è maggiore di nessun numero di (Y) e non è minore di nessuno di (X); un numero di (X) maggiore di b sia $a_{m_s} - \frac{1}{s}$; essendo:

$$a_{m_s} - \frac{1}{s} < a_{m_s+p} \qquad \text{per } p = 1, 2, 3, \ldots$$

ancora b, che è minore di $a_{m_s} - \frac{1}{s}$ sarà minore di ciascuno dei numeri a_{m_s+1}, a_{m_s+2}, a_{m_s+3}, ... Il numero b è dunque minore dei termini lontani della successione $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Si riconosce nello stesso modo che ogni numero, che sia maggiore di l, è maggiore dei termini lontani della successione. La successione tende adunque ad l come limite, per cui resta provato che la condizione enunciata nel teorema è sufficiente.

Ammettiamo ora che la successione

$$a_1 \qquad a_2 \qquad a_3 \qquad \ldots$$

tenda ad un limite l; e supponiamo dato arbitrariamente un numero positivo ε. Fissiamo l'intero positivo k più grande che $\frac{2}{\varepsilon}$ per cui sarà $\varepsilon > \frac{2}{k}$. Dei numeri

$$\ldots \quad -\frac{1}{k} \quad \frac{0}{k} \quad \frac{1}{k} \quad \frac{2}{k} \quad \frac{3}{k} \quad \ldots$$

sia $\frac{h-1}{k}$ il maggiore di quelli più piccoli di l per cui $\frac{h}{k}$ non sarà minore ed $\frac{h+1}{k}$ sarà maggiore di l. I termini lontani della nostra successione saranno quindi maggiori di $\frac{h-1}{k}$ e minori di $\frac{h+1}{k}$, cioè potremo fissare due interi n' ed n'' abbastanza grandi perchè i numeri $a_{n'+1}$ $a_{n'+2}$ $a_{n'+3} \ldots$ siano maggiori di $\frac{h-1}{k}$ ed i numeri $a_{n''+1}$ $a_{n''+2}$ $a_{n''+3} \ldots$ siano minori di $\frac{h+1}{k}$. Indicando con n un intero, che superi ciascuno dei numeri n' ed n'', p. es. $n'+n''$, avremo dunque:

$$\frac{h-1}{k} < a_{n+p} < \frac{h+1}{k} \quad \text{per } p = 0, 1, 2, \ldots$$

Essendo minore di $\frac{h+1}{k}$ e maggiore di $\frac{h-1}{k}$ ciascuno dei numeri

$$a_n \quad a_{n+1} \quad a_{n+2} \quad a_{n+3} \quad \ldots$$

sarà minore di $\frac{h+1}{k} - \frac{h-1}{k}$, ossia di $\frac{2}{k}$ epperò con maggior ragione di ε, la differenza di due qualunque dei medesimi numeri, ed in particolare sarà minore di ε ciascuna delle differenze

$$a_n - a_{n+1} \quad a_n - a_{n+2} \quad a_n - a_{n+3} \ldots$$
$$a_{n+1} - a_n \quad a_{n+2} - a_n \quad a_{n+3} - a_n \ldots$$

Avendo ammesso che la successione

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \ldots$$

tenda ad un limite, siamo così giunti alla necessaria conseguenza che, dopo aver dato arbitrariamente un numero positivo ε, sia possibile fissare n in modo che fossero minori di ε le differenze tra il termine a_n e ciascuno dei successivi. È dunque vero che la condizione enunciata nel teorema è anche necessaria.

Genova, novembre 1892.

F. Giudice.

LA RISOLUZIONE COMPLETA DI UN PROBLEMA

(*Continuazione e fine, V. pag. 150*).

Risoluzione algebrica. — Posta la condizione che il punto D debba essere fra B e C, indicando con a, b, c i lati opposti rispettivamente agli angoli A, B, C, con x il segmento BD, con y il segmento AD, e con z la proiezione di AD su BC, si avrà il sistema:

$$b^2 = y^2 + (a-x)^2 \pm 2(a-x)z \;,\quad c^2 = y^2 + x^2 \mp 2xz \;,\quad y^2 = x(a-x) \;,$$

ed eliminando y e z:

$$b^2 x + c^2 (a-x) = 2ax(a-x) \;,$$

ossia:

$$2ax^2 - (2a^2 - b^2 + c^2)x + ac^2 = 0 \;, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

da cui:

$$x = \frac{2a^2 - b^2 + c^2 \pm \sqrt{(2a^2 - b^2 + c^2)^2 - 8a^2c^2}}{4a} \,.$$

Affinchè le radici dell'equazione (2) siano soluzioni del problema, dovranno essere positive e reali; il loro prodotto è positivo, quindi saranno ambedue positive quando si abbia:

$$2\,a^2 + c^2 \geqq b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

In tale ipotesi le radici saranno anche reali se:

$$2\,a^2 - b^2 + c^2 \geqq 2\,a\,c\sqrt{2} \ \text{ ossia } \ 2\,a^2 - 2\,a\,c\sqrt{2} + c^2 \geqq b^2 \,.$$

L'ultima relazione si può porre sotto la forma:

$$(a\sqrt{2} - c)^2 \geqq b^2\,,$$

e, ponendo la condizione:

$$a\sqrt{2} > c\,,$$

si avrà pure:

$$a\sqrt{2} - c \geqq b\,,$$

ossia:

$$a\sqrt{2} \geqq b + c;$$

evidentemente in quest'ultima condizione è compresa la precedente, che si potrà quindi trascurare. Perciò le radici saranno reali quando

$$2\,a^2 \geqq (b+c)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Qualora sia soddisfatta la (4), lo è, a più forte ragione, anche la (3), quindi la (4) esprime l'unica condizione per la possibilità del problema.

Se l'angolo A del triangolo dato è ottuso, e perciò $\cos A < 0$, si ha:

$$2\,a^2 = 2\,(b^2 + c^2) - 4\,b\,c\cos A$$

ossia:

$$2\,a^2 = (b+c)^2 + (b-c)^2 - 4\,b\,c\cos A\,,$$

quindi:

$$2\,a^2 > (b+c)^2,$$

ed il problema ammette due soluzioni.

Nel caso speciale che il triangolo, essendo ottusangolo in A, sia isoscele, posto $b = c$, si ha:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2\,c^2}}{2}\,,$$

e quindi:

$$x_1 = a - x_2\,;$$

vale a dire che i punti D_1 e D_2 sono ad uguale distanza dai vertici B e C, ed i segmenti $A\,D_1$, $A\,D_2$ sono uguali.

Se l'angolo A è retto, si ha:

$$2\,a^2 = 2\,(b^2 + c^2)$$

ossia:

$$2\,a^2 = (b+c)^2 + (b-c)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

e quindi, in generale:

$$2\,a^2 > (b+c)^2\,.$$

Il problema ammette due soluzioni, e si ha:

$$x = \frac{b^2 + 3c^2 \pm (b^2 - c^2)}{4a}$$

ossia:

$$x_1 = \frac{a}{2} \qquad \text{ed} \qquad x_2 = \frac{c^2}{a},$$

vale a dire che i punti D_1 e D_2 sono i piedi della mediana e dell'altezza corrispondenti all'ipotenusa.

Nel caso speciale che il triangolo, essendo rettangolo in A, sia isoscele, la (5) diviene:

$$2a^2 = (b+c)^2;$$

il problema ammette una sola soluzione, e si ha:

$$x = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{a},$$

onde si ricava:

$$2x = \frac{b^2 + c^2}{a}, \text{ ossia: } 2x = a, \; x = \frac{a}{2};$$

vale a dire che il punto $D_{1.2}$ è il punto di mezzo del lato a.

Se l'angolo A è acuto, si ha:

$$2a^2 = (b+c)^2 + (b-c)^2 - 4bc \cos A \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6),$$

quindi:

$$2a^2 \gtreqless (b+c)^2,$$

ed il problema ammette due, una, o nessuna soluzione. Quando sia:

$$2a^2 = (b+c)^2$$

si ha:

$$x = \frac{2a^2 - b^2 + c^2}{4a}, \text{ ossia: } x = \frac{c(b+c)}{2a}$$

$$a - x = \frac{2a^2 - c(b+c)}{2a}, \text{ ossia: } a - x = \frac{b(b+c)}{2a},$$

quindi:

$$\frac{x}{a-x} = \frac{c}{b};$$

vale a dire che il punto $D_{1.2}$ appartiene alla bissettrice dell'angolo A.

Nel caso speciale che il triangolo, essendo acutangolo in A, sia isoscele, la (6) diviene:

$$2a^2 = (b+c)^2 - 4bc \cos A,$$

quindi:

$$2a^2 < (b+c)^2;$$

il problema è impossibile, ed in conseguenza è pure impossibile se il triangolo è equilatero.

Riprendendo la formula

$$x = \frac{2a^2 - b^2 + c^2 \pm \sqrt{(2a^2 - b^2 + c^2)^2 - 8a^2c^2}}{4a}$$

proponiamoci di trovare graficamente i segmenti x_1 ed x_2 per mezzo dei lati del triangolo. Giova scrivere:

$$x = \frac{a}{2} - \frac{b^2}{4a} + \frac{c^2}{4a} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{b^2}{4a} + \frac{c^2}{4a}\right)^2 - \frac{c^2}{2}};$$

rappresentando con h_1 il segmento terzo proporzionale dopo $4a$ e b, e con h_2 il segmento terzo proporzionale dopo $4a$ e c, si ha:

$$x = \frac{a}{2} - h_1 + h_2 \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2} - h_1 + h_2\right)^2 - \frac{c^2}{2}},$$

e, posto $\frac{a}{2} - h_1 + h_2 = h_3$, se indichiamo con h_4 il cateto di un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa uguale ad h_3 e l'altro cateto uguale a $\frac{c}{\sqrt{2}}$, si ha infine:

$$x = h_3 \pm h_4.$$

Posta la condizione che il punto D debba trovarsi sul prolungamento di BC, e continuando ad indicare con x, y, z rispettivamente i segmenti BD, AD, e la proiezione di AD su BC, secondo che il punto D sarà dalla parte di B o dalla parte di C, si avrà il primo od il secondo dei seguenti sistemi di equazioni:

$$\begin{cases} b^2 = y^2 + (x+a)^2 \pm 2(x+a)z \\ c^2 = y^2 + x^2 \pm 2xz \\ y^2 = x(x+a) \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = y^2 + (x-a)^2 \pm 2(x-a)z \\ c^2 = y^2 + x^2 \pm 2xz \\ y^2 = x(x-a). \end{cases}$$

Eliminando y e z, si ha dal primo sistema:

$$b^2x - c^2x = ac^2 \qquad \text{ossia:} \qquad x = \frac{ac^2}{b^2 - c^2}$$

e dal secondo:

$$-b^2x + c^2x = ac^2 \qquad \text{ossia:} \qquad x = \frac{ac^2}{c^2 - b^2}.$$

Se dunque $b > c$ il punto, che chiameremo D_3, si trova dalla parte di B; se $b < c$, si trova invece dalla parte di C; se $b = c$ il problema è impossibile.

Per rappresentare graficamente il segmento x dato dalla formula:

$$x = \pm \frac{ac^2}{b^2 - c^2}$$

giova scrivere:

$$x = \pm \frac{a}{b+c} \cdot \frac{c^2}{b-c};$$

indicando con l il segmento terzo proporzionale dopo $(b-c)$ e c, ovvero il segmento terzo proporzionale dopo $(c-b)$ e c, si avrà:

$$x = \frac{al}{b+c},$$

e non rimarrà che a prendere il segmento quarto proporzionale dopo $(b+c)$, a ed l.

Considerazioni. — Essendo D_1, D_2 i punti interni e D_3 il punto esterno corrispondenti rispettivamente alle soluzioni x_1, x_2, x_3 del problema ed ai segmenti AD_1, AD_2, AD_3, che indicheranno con y_1, y_2, y_3, è chiaro che avranno una soluzione in comune col triangolo dato tutti i triangoli aventi due vertici in B ed in C ed il terzo vertice in un punto qualunque delle circonferenze descritte con centro D_1, D_2, D_3 e rispettivamente con raggio y_1, y_2, y_3.

Volendo esprimere algebricamente la relazione esistente fra i lati del triangolo dato, e quelli di uno qualunque avente col dato in comune una delle soluzioni x_1, x_2, premetteremo che, affinchè due equazioni della forma:

$$x^2 + p\,x + q = 0 \qquad\qquad x^2 + p_1\,x + q_1 = 0$$

abbiano una radice comune, deve esistere fra i coefficienti la relazione seguente:

$$(q_1 - q)^2 = (p_1 - p)\,(p\,q_1 - p_1\,q).$$

Ciò posto, se chiamiamo a, b_1, c_1 i lati del nuovo triangolo, mentre pel triangolo dato si ha:

$$2\,a\,x^2 - (2\,a^2 - b^2 + c^2)\,x + a\,c^2 = 0,$$

si avrà pel nuovo triangolo:

$$2\,a\,x^2 - (2\,a^2 - b_1^2 + c_1^2)\,x + a\,c_1^2 = 0;$$

dunque nel caso attuale:

$$p = \frac{-2\,a^2 + b^2 - c^2}{2\,a}, \quad q = \frac{c^2}{2}, \quad p_1 = \frac{-2\,a^2 + b_1^2 - c_1^2}{2\,a}, \quad q_1 = \frac{c_1^2}{2},$$

e sostituendo questi valori nella precedente relazione, fatte le opportune operazioni e riduzioni, si ottiene:

$$2\,a^2\,(b_1^2 - b^2)\,(c_1^2 - c^2) = (c_1^2\,b^2 - c^2\,b_1^2)\,(b_1^2 - b^2 - c_1^2 + c^2) \quad . \quad (7)$$

che è la relazione cercata. Inoltre, perchè i due triangoli abbiano in comune la soluzione x_1, che per fissare le idee, supporremo essere la maggiore, dovrà essere:

$$x_1 + y_1 > c_1 > x_1 - y_1, \qquad y_1 + (a - x_1) > b_1 > y_1 - (a - x_1),$$

e perchè abbiano invece in comune la soluzione x_2, dovrà essere:

$$y_2 + x_2 > c_1 > y_2 - x_2, \qquad (a - x_2) + y_2 > b_1 > (a - x_2) - y_2.$$

Fra tutti i triangoli che hanno col dato in comune una delle soluzioni x_1, x_2 ve n'è uno che, oltre all'avere in comune col dato il lato a, è inscritto con esso nella stessa circonferenza. Per questo speciale triangolo, che è equivalente al dato, ed ha l'angolo opposto al lato a supplementare all'angolo A del triangolo dato, si ricava facilmente:

$$b_1\,c_1 = b\,c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Questa relazione trasforma la (7) nella seguente:

$$b_1^2 + c_1^2 + b^2 + c^2 = 2\,a^2: \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

e, risolvendo infine rispetto a b_1 e c_1 il sistema costituito dalle (8) (9), si ricava:

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a^2-(b-c)^2} \pm \sqrt{2a^2-(b+c)^2}\right)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a^2-(b-c)^2} \mp \sqrt{2a^2-(b+c)^2}\right).$$

Volendo esprimere algebricamente la relazione esistente fra i lati del triangolo dato e quelli di uno qualunque avente col dato in comune la soluzione x_3, continueremo ad indicare con a, b_1, c_1 i lati del nuovo triangolo. Avendosi pel triangolo dato:

$$x = \pm \frac{a c^2}{b^2 - c^2},$$

si avrà pel nuovo triangolo:

$$x = \pm \frac{a c_1^2}{b_1^2 - c_1^2},$$

e quindi dovrà essere:

$$\frac{c_1^2}{b_1^2 - c_1^2} = \frac{c^2}{b^2 - c^2} \qquad \text{ossia} \qquad b c_1 = b_1 c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Inoltre, se $b > c$, dovrà essere:

$$y_3 + x_3 > c_1 > y_3 - x_3, \qquad (a + x_3) + y_3 > b_1 > (a + x_3) - y_3,$$

e se $b < c$:

$$x_3 + y_3 > c_1 > x_3 - y_3, \qquad y_3 + (x_3 - a) > b_1 > y_3 - (x_3 - a).$$

Fra tutti i triangoli, che hanno col dato in comune la soluzione x_3, ve n'è uno che, oltre all'avere in comune col dato il lato a, è inscritto con esso nella stessa circonferenza. Per questo speciale triangolo, che ha l'angolo opposto al lato a supplementare all'angolo A del triangolo dato, detta S_1 la sua superficie si ha:

$$16 S_1^2 = 4 b_1^2 c_1^2 - (-a^2 + b_1^2 + c_1^2)^2, \qquad \text{ed anche} \qquad S_1^2 = \frac{b_1^2 c_1^2 \operatorname{sen}^2 A}{4},$$

mentre pel triangolo dato si ha:

$$16 S^2 = 4 b^2 c^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)^2, \qquad \text{ed anche} \qquad S^2 = \frac{b^2 c^2 \operatorname{sen}^2 A}{4};$$

onde avremo la relazione:

$$\frac{4 b_1^2 c_1^2 - (-a^2 + b_1^2 + c_1^2)^2}{4 b^2 c^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)^2} = \frac{b_1^2 c_1^2}{b^2 c^2},$$

ossia:

$$b^2 c^2 (-a^2 + b_1^2 + c_1^2)^2 = b_1^2 c_1^2 (-a^2 + b^2 + c^2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Da ultimo, risolvendo rispetto a b_1 e c_1 il sistema costituito dalle (10) (11), si ricava:

$$b_1 = \frac{a b}{\sqrt{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}} \qquad c_1 = \frac{a c}{\sqrt{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}}.$$

Forlì, Marzo 1893.

Diego Dott. Fellini.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

A proposito del teorema di Lehmus (*). — Non mi pare inutile far notare alcuni teoremi, dei quali noti teoremi sulle mediane e sulle bissettrici sono casi particolari.

1. In un triangolo ABC chiamo A', B', C' i punti che dividono rispettivamente i lati $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ nel rapporto delle potenze n^{me} (n qualunque) dei lati adiacenti, cosicchè

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{c^n}{b^n}, \qquad \frac{CB'}{B'A} = \frac{a^n}{c^n}, \qquad \frac{AC'}{C'B} = \frac{b^n}{a^n};$$

chiamo $K^{(n)}$ il punto comune delle AA', BB', CC'; rette $k^{(n)}$ opposte ad a, b, c rispettivamente i segmenti AA', BB', CC'; raggi $k^{(n)}$ opposti ad a, b, c i segmenti $AK^{(n)}$, $BK^{(n)}$, $CK^{(n)}$; rettangoli corrispondenti ad a, b, c i rettangoli $\overline{BA'.A'C}$, $\overline{CB'.B'A}$, $\overline{AC'.C'B}$.

Per $n = 0, 1, 2, -1, -2$ le rette $k^{(n)}$ sono rispettivamente le mediane, le bissettrici, le simediane, le isotomiche delle bissettrici e delle simediane.

Teorema. — Per n qualunque a lati eguali si oppongono rette $k^{(n)}$ eguali: per $0 \leq n \leq 2$ al lato maggiore si oppone la retta $k^{(n)}$ minore; per $0 \leq n \leq 2$ sono vere le reciproche.

Mediante il teorema di Stewart si trova

$$(1)\quad \overline{AA'}^2 = \frac{b^n c^2 + b^2 c^n}{b^n + c^n} - \frac{a^2 b^n c^n}{(b^n + c^n)^2}, \quad \overline{BB'}^2 = \frac{c^n a^2 + c^2 a^n}{c^n + a^n} - \frac{b^2 c^n a^n}{(c^n + a^n)^2}$$

che si possono anche scrivere così:

$$(2)\quad \overline{AA'}^2 = \frac{c^2 + \dfrac{c^n}{b^{n-2}}}{1 + \dfrac{c^n}{b^n}} - \frac{a^n b^n c^n}{a^{n-2}(b^n + c^n)^2}, \quad \overline{BB'}^2 = \frac{\dfrac{c^n}{a^{n-2}} + c^2}{\dfrac{c^n}{a^n} + 1} - \frac{b^n c^n a^n}{b^{n-2}(c^n + a^n)^2}.$$

Le (1) mostrano che se $a = b$ è $AA' = BB'$ per n qualunque; le (2) mostrano che se $a > b$ è $AA' < BB'$ per ogni valore di n che soddisfa alle $0 \leq n \leq 2$, perchè per questi valori è $a^n \geq b^n$, $b^{n-2} \geq a^{n-2}$, quindi

$$\frac{c^2 + \dfrac{c^n}{b^{n-2}}}{1 + \dfrac{c^n}{b^n}} < \frac{\dfrac{c^n}{a^{n-2}} + c^2}{\dfrac{c^n}{a^n} + 1}, \qquad \frac{a^n b^n c^n}{a^{n-2}(b^n + c^n)^2} > \frac{b^n c^n a^n}{b^{n-2}(c^n + a^n)^2}.$$

Onde reciprocamente per $0 \leq n \leq 2$ da $AA' = BB'$ deriva $a = b$, e da $AA' < BB'$ deriva $a > b$.

Teorema. — Per n qualunque a lati eguali si oppongono raggi $k^{(n)}$ eguali; per n positivo al lato maggiore si oppone il raggio $k^{(n)}$ minore; per n positivo sono vere le reciproche.

(*) *Periodico*, anno VII, pag. 147 e 187; anno VIII, pag. 31.

Si ha (*)

(3) $AK^{(n)2} = [(b^n + c^n)\, c^n\, b^2 + (b^n + c^n)\, c^2\, b^n - b^n\, c^n\, a^2] \div (a^n + b^n + c^n)^2$

che, ponendo $\Sigma a^n = a^n + b^n + c^n$, $\Sigma a^{n-2}\, b^{n-2} = a^{n-2}\, b^{n-2} + b^{n-2}\, c^{n-2} + c^{n-2}\, a^{n-2}$, si può trasformare così:

$$A K^{(n)2} = \frac{b^n c^2 + b^2 c^n}{\Sigma a^n} - a^2 b^2 c^2 \frac{\Sigma a^{n-2}\, b^{n-2}}{(\Sigma a^n)^2}.$$

Allo stesso modo

$$B K^{(n)2} = \frac{c^n a^2 + c^2 a^n}{\Sigma a^n} - a^2 b^2 c^2 \frac{\Sigma a^{n-2}\, b^{n-2}}{(\Sigma a^n)^2}$$

dalle quali deriva subito il teorema.

Osservazione. — Per n negativo $= -m$ da $a > b$ deriva $A K^{(n)} \gtreqless B K^{(n)}$ secondochè

$$b^{-m} c^2 + b^2 c^{-m} \gtreqless c^{-m} a^2 + c^2 a^{-m}$$

ossia secondochè

$$c^{m+2} \gtreqless a^m b^m \frac{a^2 - b^2}{a^m - b^m}.$$

Ad esempio per $n = -2$, da $a > b$ deriva $A K^{(n)} \gtreqless B K^{(n)}$ secondochè $c \gtreqless \sqrt{a b}$.

Corollario. — Da $a = b$ deriva ang. $K^{(n)} A B = K^{(n)} B A$ per n qualunque; da $a > b$ deriva ang. $K^{(n)} AB > K^{(n)} BA$ per n positivo; onde per n positivo sono vere le reciproche,

TEOREMA. — Per n qualunque a lati eguali corrispondono rettangoli eguali; per $-2 \leq n \leq 2$ al lato maggiore corrisponde il rettangolo maggiore; per $-2 \leq n \leq 2$ sono vere le reciproche.

Dalla $\frac{BA'}{A'C} = \frac{c^n}{b^n}$ componendo si ha $\frac{BC}{BA'} = \frac{b^n + c^n}{c^n}$, $\frac{BC}{A'C} = \frac{b^n + c^n}{b^n}$, donde

(4) $$BA'.\, A'C = \frac{a^2\, b^n\, c^n}{(b^n + c^n)^2} = \frac{a^n\, b^n\, c^n}{a^{n-2}\,(b^n + c^n)^2};$$

e così

$$CB'.\, B'A = \frac{b^2\, c^n\, a^n}{(c^n + a^n)^2} = \frac{b^n\, c^n\, a^n}{b^{n-2}\,(c^n + a^n)^2}.$$

Dalle quali segue che se $a = b$ è pure $\overline{BA'.\,A'C} = \overline{CB'.\,B'A}$ per ogni valore di n; e che se $a > b$ è $\overline{BA'.\,A'C} > \overline{CB'.\,B'A}$ per ogni valore di n che soddisfa alla $0 \leq n \leq 2$, perchè per questi valori è $a^n > b^n$, $b^{n-2} > a^{n-2}$, e quindi anche per ogni valore di n che soddisfa alla $-2 \leq n < 0$ perchè i rettangoli $\overline{BA'.\,A'C}$ ecc. non variano mutando n in $-n$.

Perciò sono vere le reciproche per $-2 \leq n \leq 2$.

(*) *Periodico*, anno VIII, pag. 66, formole 6).

Osservazione. — Per $n > 2$ da $a > b$ deriva $BA'.A'C \gtreqless CB'.B'A$ secondochè

$$a^{n-2}(b^n + c^n)^2 \lesseqgtr b^{n-2}(c^n + a^n)^2$$

ossia secondochè

$$a^{\frac{n-2}{2}}(b^n + c^n) \lesseqgtr b^{\frac{n-2}{2}}(c^n + a^n)$$

ossia secondochè

$$c^n \lesseqgtr (a\,b)^{\frac{n-2}{2}} \frac{a^{\frac{n+2}{2}} - b^{\frac{n+2}{2}}}{a^{\frac{n-2}{2}} - b^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Ad esempio per $n = 4$ è $\overline{BA'.A'C} \gtreqless \overline{CB'.B'A}$ secondochè è

$$c^4 \lesseqgtr a\,b\,(a^2 + a\,b + b^2).$$

Teorema. — Le rette $k^{(n)}$ opposte a lati eguali sono divise in rapporti eguali; la retta $k^{(n)}$ opposta al lato maggiore è divisa nel rapporto minore o maggiore secondochè è $n \gtrless 0$; sono vere le reciproche per n diverso da zero.

Ciò deriva tosto dalle formole

$$(5) \qquad \frac{AK^{(n)}}{K^{(n)}A'} = \frac{b^n + c^n}{a^n}, \qquad \frac{BK^{(n)}}{K^{(n)}B'} = \frac{c^n + a^n}{b^n}.$$

Per $n = 0$ è sempre $\qquad \dfrac{AK^{(n)}}{K^{(n)}A'} = \dfrac{BK^{(n)}}{K^{(n)}B'}.$

Proprietà analoghe valgono per i rapporti $\dfrac{AK^{(n)}}{AA'} \ldots\ldots, \dfrac{AA'}{K^{(n)}A'} \ldots\ldots$

2. Indicando con A'', B'', C'' i punti che dividono i lati BC, CA, AB rispettivamente nei rapporti negativi $-\dfrac{c^n}{b^n}$, $-\dfrac{a^n}{c^n}$, $-\dfrac{b^n}{a^n}$, per le rette AA'', BB'', CC'' i teoremi precedenti non sono più veri in generale.

Noto il seguente caso particolare. Mutando nella prima (1) c^n in $-c^n$, e nella seconda (1) a^n in $-a^n$, si ha

$$(6) \qquad AA''^2 = \frac{b^n c^2 - b^2 c^n}{b^n - c^n} + \frac{a^2 b^n c^n}{(b^n - c^n)^2},$$
$$BB''^2 = \frac{c^n a^2 - c^2 a^n}{c^n - a^n} + \frac{b^2 c^n a^n}{(c^n - a^n)}.$$

Per $n = 2$, AA'', BB'', CC'' sono tangenti in A, B, C al cerchio ABC; per esse si ha

$$AA''^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(b^2 - c^2)^2}, \qquad BB''^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(c^2 - a^2)^2};$$

donde se $a = b$ deriva $AA'' = BB''$; se $a > b$ deriva AA'' diverso da BB''

ove sia $c^2 \gtrless \frac{a^2+b^2}{2}$, e $AA''=BB''$ ove sia $c^2=\frac{a^2+b^2}{2}$. Onde si ha reciprocamente:

se due tangenti al circumcircolo (porzioni comprese fra i vertici del triangolo e i lati opposti) sono diseguali, i lati opposti sono diseguali;

se due tangenti al circumcircolo sono eguali o i lati opposti sono eguali, o se no il lato compreso c soddisfa alla relazione $c^2=\frac{a^2+b^2}{2}$.

Osservo a proposito di queste tangenti la proprietà: se ABC è scaleno ed è p. es. $a>b>c$ si ha in valore assoluto

$$AA''=\frac{abc}{b^2-c^2}, \qquad BB''=\frac{abc}{a^2-c^2}, \qquad CC''=\frac{abc}{a^2-b^2},$$

onde

$$\frac{1}{BB''}=\frac{1}{CC''}+\frac{1}{AA''},$$

od anche

$$\overline{CC''}.\overline{AA''}=\overline{AA''}.\overline{BB''}+\overline{BB''}.\overline{CC''}=\overline{BB''}.\overline{CC''+AA''}.$$

3. Se nelle formole (1), (3), (4), (5) si muta a in a_1 si hanno le corrispondenti relazioni per un triangolo i cui lati sieno a_1, b, c, e ne risultano chiaramente i seguenti teoremi:

in due triangoli che hanno due lati rispettivamente eguali e i terzi lati diseguali 1° al lato maggiore si oppone la retta $k^{(n)}$ minore (n qualunque) — 2° al lato maggiore si oppone il raggio $k^{(n)}$ minore (n positivo) — 3° al lato maggiore corrisponde il rettangolo maggiore (n qualunque) — 4° la retta $k^{(n)}$ opposta al lato maggiore è divisa nel rapporto minore o maggiore secondochè $n \gtrless 0$;

reciprocamente in due triangoli che hanno due lati rispettivamente eguali 1° se le rette $k^{(n)}$ opposte ai terzi lati sono eguali, questi sono eguali; e se sono diseguali, alla maggiore si oppone il lato minore — 2° se i raggi $k^{(n)}$ opposti ai terzi lati sono eguali, questi sono eguali; e se sono diseguali, al maggiore si oppone il lato minore (n positivo) — 3° se i rettangoli corrispondenti ai terzi lati sono eguali, questi sono eguali; e se sono diseguali al maggiore corrisponde il lato maggiore — 4° se le rette $k^{(n)}$ opposte ai terzi lati sono divise nello stesso rapporto ($n \gtrless 0$), questi lati sono eguali, e se sono divise in rapporti diseguali è maggiore il lato opposto a quella divisa nel rapporto minore o il lato opposto a quella divisa nel rapporto maggiore secondochè $n \gtrless 0$.

A risultati analoghi si giunge considerando le rette che dividono a, a_1 nei rapporti negativi delle potenze n^{me} dei lati adiacenti.

F. FERRARI.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
150**, 152**, 155*, 156**, 157**, 160**, 162*, 163* e 164*

150.** *Determinare un triangolo sferico equilatero, la cui superficie sia il complemento del suo perimetro.* (G. BELLACCHI).

Soluzione della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Siano A, a l'angolo e il lato di questo triangolo, si ha

$$3A - \pi = \frac{\pi}{2} - 3a \qquad \text{donde} \qquad A + a = \frac{\pi}{2}. \qquad [1]$$

Ma è noto che nel triangolo ABC

$$\cos b \cos C = \cot a \operatorname{sen} b - \cot A \operatorname{sen} C;$$

le quantità a, A verificano perciò l'equazione $\cos x \operatorname{sen} x = \pm (\cos x - \operatorname{sen} x)$; od anche, elevando i due membri al quadrato

$$\operatorname{sen}^2 2x + 4 \operatorname{sen} 2x - 4 = 0. \qquad [2]$$

L'unica radice accettabile di quest'equazione è

$$\operatorname{sen} 2x = -2 + \sqrt{8} \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen} 2x = 4\sqrt{2} \,.\, \operatorname{sen}^2 22^\circ\, 30'.$$

Si trova, dalle tavole delle funzioni circolari, che $2x = 55^\circ\, 56'\, 15''$ o $124^\circ\, 3'\, 45''$ e così

$$a = 27^\circ\, 58'\, 7'',5 \qquad \text{e} \qquad A = 62^\circ\, 1'\, 52'',5\,.$$

La soluzione $A = 27^\circ\, 58'\, 7'',5$ con $a = 62^\circ\, 1'\, 52'',5$ non può essere accettata perchè $3A$ dev'essere compreso fra 2 e 6 retti.

152.** *Dati gli angoli di un triangolo sferico* ABC, *determinare l'arco* AD *verificante la relazione*

$$\operatorname{sen}^2 \mathrm{AD} = \operatorname{sen} \mathrm{BD} \,.\, \operatorname{sen} \mathrm{DC},$$

cercando in quali casi è possibile. (G. BELLACCHI).

Soluzione della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Indichiamo con α l'angolo BAD e con β l'angolo CAD, si ha, nel triangolo BAD, $\operatorname{sen} AD : \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} BD : \operatorname{sen}\alpha$, e nel triangolo CAD, $\operatorname{sen} AD : \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} CD : \operatorname{sen}\beta$.

Moltiplicando queste relazioni membro a membro e tenendo conto dell'ipotesi $\operatorname{sen}^2 AD = \operatorname{sen} BD \,.\, \operatorname{sen} CD$, risulta

$$\operatorname{sen}\alpha \,.\, \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \qquad \text{o} \qquad \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C.$$

Casi differenti da considerare:

1.° L'arco AD è nell'angolo BAC; in questo caso $\alpha + \beta = A$ e gli angoli α, β, e in conseguenza la posizione di AD, sono determinati dalle due equazioni

$$\alpha + \beta = A, \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos A + 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C.$$

Perchè l'arco AD esista è necessario e sufficiente che la seconda equazione dia $|\alpha - \beta| < A$; ciò avrà luogo se

$$-1 \leqq \cos A + 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \leqq 1.$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, si troveranno per $\alpha - \beta$ due valori uguali e di segno contrario, vi saranno quindi due archi AD soddisfacenti alla quistione, simmetrici rispetto alla bisettrice dell'angolo A.

2.° Essendo C_1 il secondo vertice del fuso C, l' arco AD cada nell'angolo C_1AB. In questo caso $\beta - \alpha = A$ e si ha da considerare il sistema

$$\beta - \alpha = A, \qquad \cos(\alpha + \beta) = \cos A - 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C.$$

Le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza dell'arco AD sono

$$-1 \leqq \cos A - 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \leqq 1$$

poichè se queste condizioni sono soddisfatte, la seconda equazione darà per $\alpha + \beta$ un valore maggiore di A. Il problema non avrà che una sola soluzione, poichè il valore negativo di $\alpha + \beta$ dovrà esser messo in disparte.

3.° Il punto B_1 essendo il secondo vertice del fuso B, sia l'arco AD nell'angolo CAB_1. I valori di α e β son quelli trovati per β e per α nel secondo caso. Essi determinano quindi un arco di cerchio massimo simmetrico dell'arco trovato nell'angolo BAC_1 rispetto alla bisettrice dell'angolo BAC.

4.° L' arco AD cada entro l' angolo B_1AC_1. In questo caso il sistema a risolvere è

$$\alpha + \beta = 2\pi - A, \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos A + 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C.$$

Qui, come nel primo caso, si deve avere $|\alpha - \beta| < A$, ciò che richiede che si abbia

$$-1 \leqq \cos A + 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \leqq 1.$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, si troveranno due archi AD simmetrici rispetto alla bisettrice dell'angolo BAC. Inoltre questi archi si troveranno nel prolungamento degli archi trovati nel 1° caso, ciò che d'altronde era prevedibile poichè la relazione $\operatorname{sen}^2 AD = \operatorname{sen} BD \,.\, \operatorname{sen} CD$ non è alterata sostituendo agli archi AD, BD, DC i loro supplementari.

Le condizioni di possibilità trovate nei diversi casi non sono contradditorie poichè addizionandole membro a membro dànno

$$-1 \leqq \cos A \leqq 1.$$

Ne risulta che il problema può ammettere otto soluzioni, quattro, due o nessuna.

155*. *Dato il triangolo* ABC *e le rette* AH, BH, CH *passanti per lo stesso punto* H, *inscrivere in* ABC *un triangolo* A′B′C′ *in modo che* A′ *cada in* BC, B′ *in* CA, C′ *in* AB, *ed i lati* B′C′, C′A′, A′B′ *siano bisecati rispettivamente da* AH, BH, CH.

Dimostrare poi che le rette AA′, BB′, CC′ *passano per uno stesso punto.*

(L. Merante).

Risposta della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

1.° I segmenti limitati ai lati dell'angolo BAC e che AH divide per metà, sono paralleli alla direzione α, coniugata armonica di AH nell'angolo BAC. Si è quindi condotti ad inscrivere in ABC un triangolo $A'B'C'$ i cui lati sono rispettivamente paralleli a tre direzioni date α, β, γ. La soluzione di questo problema è nota; si conduce, nell'angolo BAC, la retta $B''C''$ parallela ad α e si compie il triangolo $A''B''C''$ i cui lati $A''C''$, $A''B''$ sono paralleli alle direzioni β, γ. La retta $A''A$ determina su BC il vertice A', determinato A' si ha immediatamente B' e C'.

2.° Le rette AH, BH, CH passano per i centri dei lati del triangolo $A'B'C'$, H è il centro della conica circoscritta ad $A'B'C'$ ed inscritta in ABC; allora le rette AA', BB', CC' si tagliano in uno stesso punto.

Si può dimostrare questo teorema indipendentemente dalla teoria delle coniche. Se A_1 è il punto d'intersezione delle rette $B'C'$, BC, A_1 è su BC il coniugato armonico di A'; allora pel teorema di Menelao si ha

$$\frac{A'B}{A'C} = -\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{BC'.B'A}{CB'.AC'} \quad \text{da cui} \quad \frac{A'B.CB'.AC'}{A'C.BC'.B'A} = 1$$

la quale eguaglianza prova, come si sa, che le rette AA', BB', CC' sono concorrenti.

156.** *Se in un triangolo* ABC *è inscritto un triangolo* A′B′C′ *tale che le rette* AA′, BB′, CC′ *passino per uno stesso punto, le simediane dei triangoli* AC′B′, BA′C′, CB′A′, *corrispondenti ai lati* C′B′, A′C′, B′A′, *passeranno per uno stesso punto; e viceversa se nei triangoli* AC′B′, BA′C′, CB′A′ *le simediane corrispondenti ai lati* C′B′, A′C′, B′A′ *concorrono in uno stesso punto, anche le rette* AA′, BB′, CC′ *passeranno per uno stesso punto.*

(L. Merante).

Prima dimostrazione della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Conducasi AA'' antiparallela a $B'C'$ nell'angolo ABC a tagliare BC in A'' e altrettanto facciasi pei vertici B e C; si sa che AA'' è, rispetto all'angolo ABC, la coniugata armonica della simediana tirata da A nel triangolo $C'AB'$. Se le simediane considerate nell'enunciato sono concorrenti, i tre punti A'', B'', C'' sono in linea retta e reciprocamente. Ora i triangoli $A''AB$, $A''AC$ dànno

$$\frac{A''B}{A''A} = \frac{\operatorname{sen} A''AB}{\operatorname{sen} B}, \qquad \frac{A''A}{A''C} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A''AC};$$

se ne ricava

$$\frac{A''B}{A''C} = \frac{\operatorname{sen} A''AB}{\operatorname{sen} A''AC} \cdot \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}.$$

Ma

$$\frac{\operatorname{sen} A''AB}{\operatorname{sen} A''AC} = \frac{\operatorname{sen} AB'C'}{\operatorname{sen} AC'B'} = \frac{AC'}{AB'} \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} = \frac{AB}{AC},$$

si ha dunque $\frac{A''B}{A''C} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC'}{AB'}$; analogamente si trova $\frac{B''C}{B''A} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{BA'}{BC'}$ e $\frac{C''A}{C''B} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{CB'}{CA'}$. Ne risulta che

$$\frac{A''B \,.\, B''C \,.\, C''A}{A''C \,.\, B''A \,.\, C''B} = \frac{AC' \,.\, BA' \,.\, CB'}{AB' \,.\, BC' \,.\, CA'}$$

e così, se i punti A'', B'', C'' sono in linea retta, le rette AA', BB', CC' concorrono e reciprocamente.

Seconda dimostrazione della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Le rette AA', BB', CC' essendo concorrenti, le congiungenti i vertici di ABC coi punti medi dei lati di $A'B'C'$ concorrono nel centro P della conica tangente in A', B', C' ai lati del triangolo ABC. Allora le simediane considerate nell'enunciato si tagliano nel punto P' che nel triangolo ABC è il coniugato isogonale di P.

Dimostrazione del Sig. *E. de Vito*, studente nella R. Università di Roma.

Siano AD, BE, CF le simediane dei triangoli $AC'B'$, $BA'C'$, $CB'A'$ intersecanti i lati opposti ad A, B, C rispettivamente in D', E', F'. Si ha

$$\frac{BD'}{\operatorname{sen} BAD'} = \frac{AB}{\operatorname{sen} AD'B}, \qquad \frac{C'D}{\operatorname{sen} BAD'} = \frac{AC'}{\operatorname{sen} C'DA},$$

$$\frac{CD'}{\operatorname{sen} CAD'} = \frac{AC}{\operatorname{sen} AD'C}, \qquad \frac{B'D}{\operatorname{sen} CAD'} = \frac{AB'}{\operatorname{sen} ADB'}$$

da cui, dividendo membro a membro la prima e seconda eguaglianza e la terza e quarta, ricavasi

$$\frac{BD'}{C'D} = \frac{AB}{AC'} \cdot \frac{\operatorname{sen} C'DA}{\operatorname{sen} AD'B}, \qquad \frac{CD'}{B'D} = \frac{AC}{AB'} \cdot \frac{\operatorname{sen} ADB'}{\operatorname{sen} AD'C},$$

e da queste, nuovamente dividendo membro a membro, deducesi $\frac{BD' \,.\, B'D}{C'D \,.\, CD'} = \frac{AB \,.\, AB'}{AC' \,.\, AC}$. Ora, per la nota proprietà delle simediane che $\frac{B'D}{C'D} = \frac{\overline{AB'}^2}{\overline{AC'}^2}$, l'ultima relazione diviene

$$\frac{BD'}{CD'} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC'}{AB'}.$$

In modo analogo si deduce

$$\frac{CE'}{AE'} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{BA'}{BC'}, \qquad \frac{AF'}{BF'} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{CB'}{CA'}.$$

Moltiplicando membro a membro le tre ultime relazioni si ottiene

$$\frac{BD'}{CD'}\cdot\frac{CE'}{AE'}\cdot\frac{AF'}{BF'}=\frac{AC'}{AB'}\cdot\frac{BA'}{BC'}\cdot\frac{CB'}{CA'}$$

da cui segue che se le simediane considerate nell'enunciato concorrono nello stesso punto altrettanto avviene per le rette AA', BB', CC' e viceversa.

157.** *Se in un triangolo* A B C *i punti* H′, H″ *sono coniugati isogonali ed in esso s' inscrivono due triangoli* A′B′C′, A″B″C″ *tali che i lati* A′B′, B′C′, C′A′; A″B″, B″C″, C″A″ *siano bisecati rispettivamente dalle rette* CH′, AH′, BH′; CH″, AH″, BH″, *i sei punti* A′, B′, C′, A″, B″, C″ *appartengono ad uno stesso cerchio e ciascuno dei detti triangoli è prospettivo al triangolo* A B C. (L. MERANTE).

Dimostrazione della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Sia dato soltanto il punto H e si costruisca il triangolo $A'B'C'$ che gli corrisponde; si sa (quistione 155) che questo triangolo è prospettivo al triangolo ABC. Sia $A''B''C''$ il triangolo formato coi secondi punti d'intersezione del circolo circoscritto ad $A'B'C'$ coi lati di ABC. Le rette $B'C'$, $B''C''$ sono antiparallele nell'angolo A, AH' è perciò una delle simediane del triangolo $B''AC''$ e la mediana corrispondente è simmetrica di AH' rispetto alla bisettrice dell'angolo BAC. Si vede da ciò che le rette AH'', BH'', CH'', condotte dai vertici di ABC ai centri dei lati di $A''B''C''$, passano per il punto H'' coniugato isogonale di H' nel triangolo ABC.

160.** *Risolvere l'equazione*

$$x^6 - 3 = 3x^2(2x^2 - 3).$$

(F. GIUDICE).

Risoluzioni analoghe dalla Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles e dai Sigg. Prof. *V. Sferra* e *F. Mariantoni.*

Ponendo $y = x^2$, quest'equazione diviene

$$y^3 - 6y^2 + 9y - 3 = 0$$

o

$$(y-2)^3 - 3(y-2) - 1 = 0 \qquad [1].$$

La [1] ha le tre radici reali poichè il suo primo membro muta segno da $y-2=-1$ ad $y-2=0$ e da $y-2=\sqrt{3}$ ad $y-2=2$, essa appartiene quindi al caso irreducibile delle equazioni cubiche. Per risolverla facciasi $y-2=2\cos z$; si è così condotti all'equazione

$$8\cos^3 z - 6\cos z - 1 = 0,$$

che dà $\cos 3z = \frac{1}{2}$, poichè $\cos 3z = 4\cos^3 z - 3\cos z$.

Allora $3z = \pm 60^0 + k.360^0$ ed y può prendere i tre valori $y_1 = 2(1+\cos 20^0) = 4\cos^2 10^0$, $y_2 = 2(1+\cos 140^0) = 4\cos^2 70^0$, $y_3 = 2(1+\cos 260^0) = 4\cos^2 50^0$, donde i sei valori di x:

$$x_1 = \pm 2\cos 10^0, \qquad x_2 = \pm 2\cos 70^0, \qquad x_3 = \pm 2\cos 50^0$$

o

$$x_1 = \pm 1{,}96961, \qquad x_2 = \pm 0{,}68404, \qquad x_3 = \pm 1{,}28557,$$

162*. *In un cono obliquo detta* α *l'inclinazione della retta centrale* $\mathrm{OV} = \mathrm{l}$ *sulla base circolare* OMA, *ed* ω *l'angolo del raggio* $\mathrm{OM} = \mathrm{r}$ *di questa con la proiezione della* OV, *provare che la generatrice* $\mathrm{g} = \mathrm{VM}$ *fa con la tangente* MT *alla circonferenza* OM *l'angolo* θ *determinato per la formola* $\cos\theta = \frac{1}{\mathrm{g}} \cos\alpha \operatorname{sen}\omega$.

(G. Bellacchi).

Risposta dei Sigg. *R. Scozzari*, alunno dei R. Istituto tecnico di Girgenti; *U. Gerra* e *Mazza*, alunni del R. Istituto tecnico di Piacenza; *E. de Vito*, studente a Roma e della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Sia B la proiezione di V sul piano della base del cono e C la proiezione di B su MT, indicando T il punto in cui la tangente in M alla circonferenza OM incontra OB. Per un noto teorema C sarà pure la proiezione di V sopra MT e poichè finalmente M è la proiezione di O sulla stessa MT, si avrà ad un tempo dal triangolo VMC e da quello che risulta tirando per O una parallela ad MC ad incontrare CB:

$$MC = VM \cos VMC = g \cos\theta \quad \text{e} \quad MC = OB \cos OTM = OB \operatorname{sen}\omega.$$

Di qui, uguagliando, si ricava $OB = g \cos\theta : \operatorname{sen}\omega$; ma dal triangolo VOB si ha anche $OB = OV \cos VOB = l \cos\alpha$, perciò infine

$$g \cos\theta = l \cos\alpha \operatorname{sen}\omega.$$

163*. *Dimostrare che l'equazione*

$$\mathrm{x}^2 - 168921\,\mathrm{y}^2 = 382291$$

ammette una soluzione in numeri interi e positivi. Qual'è questa soluzione?

(A. Tagiuri).

Soluzione identica dalla Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles e dal Sig. *M. Piattelli*, alunno del R. Liceo di Bari.

L'equazione data può scriversi

$$(x - 411\,y) \cdot (x + 411\,y) = 7 \cdot 13 \cdot 4201$$

e poichè 4201 è un numero primo, bisogna considerare soltanto i tre sistemi

$$\begin{cases} x - 411y = 7 \\ x + 411y = 54613, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 411y = 13 \\ x + 411y = 29407, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 411y = 91 \\ x + 411y = 4201 \end{cases}$$

poichè gli altri sistemi darebbero $x + 411\,y < 411$.

Il terzo di questi sistemi è il solo che ametta soluzioni intere e queste sono;

$$x = 2146 \qquad \text{e} \qquad y = 5.$$

164*. *Nella serie* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_n, \ldots$ *si ha per* $\mathrm{n} \geqq 2$

$$\mathrm{x}_n = \mathrm{h}\,\mathrm{x}_{n-1} + \mathrm{l}.$$

Dato il valore a_r *di* x_r *esprimere* x_n *per mezzo di* h, l, n, a_r.

(A. Tagiuri).

Soluzione della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Le $n - r$ relazioni

$$\begin{aligned} x_n &= h\,x_{n-1} + l, \\ x_{n-1} &= h\,x_{n-2} + l, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_{r+2} &= h\,x_{r+1} + l, \\ x_{r+1} &= h\,a_r \quad + l \end{aligned}$$

moltiplicate rispettivamente per $1, h, h^2, \ldots. h^{n-r-1}$, poi addizionate membro a membro, dànno

$$x_n = h^{n-r}\,a_r + l\,\frac{h^{n-r}-1}{h-1}. \qquad [1]$$

Questa formola suppone però $n > r$; per dedurre quella relativa al caso di $n < r$, permutiamovi le lettere n, r, cambiamo a_n in x_n ed x_r in a_r. Avremo così

$$x_n = a_r\,h^{-(r-n)} - l\,\frac{1 - h^{-(r-n)}}{h-1}.$$

Ora questa relazione è identica alla [1], la quale è perciò applicabile in tutti i casi, anche per $r = n$, poichè, allora, essa riducesi ad $x_r = a_r$. (*).

Risposte a quistioni alle quali rimane a dare evasione. Quistione **159** dal Sig. *S. Catania, E. de Vito, F. Mariantoni*; **165****. *M. Piattelli*, M.^me^ *F. Prime, R. Scozzari, V. Sferra*; **166***. M.^me^ *F. Prime*; **167***. *U. Ceretti, G. Pucciano, G. Tirella*; **168****. *E. de Vito, F. Mariantoni*, M.^me^ *F. Prime, R. Scozzari, G. Tirella*; **169***. *B. Armano, E. de Vito, U. Gerra, E. Lugaro, G. Mazza*, M.^me^ *F. Prime, R. Scozzari, G. Tirella*; **170****. *V. Correnti, E. de Vito, F. Mariantoni, M. Piattelli*, M.^me^ *F. Prime*; **172***. *B. Armano*; **173****. *U. Ceretti*, M.^me^ *F. Prime*; **175****. M.^me^ *F. Prime*; **176****. *U. Ceretti*, M.^me^ *F. Prime*; **177****. M.^me^ *F. Prime, G. Santacroce, G. Tirella*; **178***. M.^me^ *F. Prime*; **179***. M.^me^ *F. Prime, G. Tirella.*

QUISTIONI PROPOSTE (**)

180**. Data la somma 2σ (o la differenza 2δ) dei lati di due triangoli sferici equilateri e polari fra loro, determinarli.

G. Bellacchi.

(*) Soluzione analoga dal Sig. *E. de Vito*, studente nella R. Università di Roma. — Un'altra soluzione mandata dal Sig. *R. Scozzari* verrà pubblicata nel fas. 1, 1894.

(**) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

181*. Se due tangenti BA, BC di un cerchio si tagliano in B ad angolo retto e la parallela a BC, condotta pel punto medio della corda AC dei punti di contatto, sega il cerchio in E ed F, le rette AE, AF incontrano la tangente BC ed il suo prolungamento in due punti G, H tali che

$$\overline{CG}^2 = 2BC.GB \quad , \quad \overline{HC}^2 = 2BC.HB.$$

G. Pucciano.

182*. Di due numeri reali e positivi x e y è data la somma m^2 dei quadrati, e quella k dei rapporti $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{x}$; trovare questi numeri e discutere i risultati.

183*. Si conosce la somma a delle tangenti di due archi x e y, e la tangente b della somma degli archi stessi. Trovare questi archi, discutere i risultati, e farne una applicazione numerica al caso di $a=3$, $b=4$ (*).

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

E. HUMBERT. — *Traité d'arithmétique avec des complements.* Paris, Librairie Nony et C^{ie}, 1893. Prix: 5 fr..

Di questo libro, che porta una dotta e brillante prefazione del Sig. J. Tannery, già si occuparono con parole di non comune encomio parecchi periodici stranieri. Io pure reputo opportuno dirne motto, persuaso di far cosa utile ai lettori di questo giornale che non ne conoscessero l'esistenza o la sostanza.

Per ciò che riguarda la parte sostanziale si tratta di un libro d'aritmetica redatto con molto rigore e da considerarsi completo in quanto vi figurano oltre alle nozioni sui numeri, alle quattro operazioni su di essi, alle ordinarie proprietà dei numeri primi e composti, alle teoriche del m. c. d. e del m. c. m., alle proprietà dei numeri frazionari e decimali, anche le estrazioni delle radici quadrata e cubica, le proprietà e le operazioni sui numeri irrazionali, i rapporti e le proporzioni, le regole del tre d'interesse, ecc., l'esposizione del sistema metrico decimale e una succinta teoria degli errori. Alla fine delle diverse teoriche trovansi esercizi in buon numero e l'A. ha voluto giustamente dedicare pure un capitolo allo svolgimento di alcuni problemi e teoremi interessanti.

Ma se è un pregio del libro la lucida e rigorosa esposizione dell'A. per le ordinarie teoriche dall'aritmetica, maggior pregio per me è quello d'averlo arric-

(*) Le quistioni 182* e 183* sono i temi di matematica dati nell'ottobre per la licenza dagli Istituti tecnici nella *Sezione Fisico-matematica*.

chito di complementi in cui, per la maggior parte, sono sviluppate, con altrettanta chiarezza e precisione, le proprietà dei numeri che servono d'introduzione a quella che è chiamata *teoria dei numeri* e sarebbe forse meglio designare col nome d'*aritmetica superiore*, cosicchè l'opera del sig. prof. Humbert servirà molto opportunamente e in modo facile a coloro che vogliono riandare sul passato per chiarir meglio concetti che un primo studio non illumina mai abbastanza od iniziarsi nelle teorie complementari dell'aritmetica senza ricorrere alle opere sistematiche sull'argomento, o ricorrendovi solo più tardi: quindi assai bene ai giovani delle classi superiori delle nostre scuole secondarie o delle prime classi delle Università. Gli argomenti svolti in tali complementi e che mette conto riportare sono: Numeri interi negativi e loro proprietà - Somme algebriche - Prodotto di due numeri interi positivi o negativi - Moltiplicazione di una somma algebrica per un numero intero positivo e negativo - Moltiplicazione di due somme algebriche - Divisione di due numeri interi positivi o negativi - Qualche proprietà relativa alle somme algebriche - Osservazioni sulle uguaglianze - Sistemi di numerazione - Resti negativi - Resti dei numeri negativi - Carattere di divisibilità per 7 - Carattere di divisibilità per un numero qualunque positivo A - Carattere di divisibilità in un sistema di numerazione qualunque - Resti delle potenze d'un numero, relativi ad un modulo primo dato - Esponente al quale appartiene un numero rispetto ad un modulo primo p - Teorema di Fermat - Calcolo dei resti ottenuti nella ricerca del m. c. d. di due numeri, in funzione di questi numeri - Uso dell'uguaglianza $\pm \delta = bu - av$ - Risoluzione dell'equazione $ax + by = c$ in numeri interi - Numeri congrui od equivalenti - Idea delle congruenze intere - Caratteri di divisibilità - Congruenze di primo grado - Teorema di Fermat - Numeri associati rispetto ad un modulo primo p - Teorema di Wilson - Sul numero dei numeri primi con un numero dato e non superiori a questo numero - Numeri frazionari negativi - Insieme dei numeri razionali - Ineguaglianze - Resti delle potenze d'un numero a rispetto ad un modulo qualunque b, primo con esso - Teorema di Fermat generalizzato - Numero dei termini del periodo dello sviluppo d'un numero frazionario in decimale - Residui e non residui quadratici - Residui dei moduli primi - Del residuo -1. Residuo minimo - Criterio d'Eulero e di Gauss - Teorema di Bachet - Numeri irrazionali negativi - Segmenti - Rappresentazione dei numeri mediante segmenti - Differenza fondamentale esistente fra l'insieme dei numeri razionali e l'insieme totale dei numeri - Eguaglianze - Ineguaglianze.

In causa dello spazio limitato in cui sono costretto a tenere questa rivista, osserverò solo che l'A. ha rispettato la consuetudine svolgendo la numerazione in principio del libro, ha premesso i processi per effettuare le prime quattro operazioni allo svolgimento *sistematico* delle proprietà inerenti alle medesime ed ha ricorso con qualche frequenza a rappresentazioni segmentarie (frazioni e numeri irrazionali). Si potrebbe a questo proposito obbiettare, volendo fare della critica ad ogni costo, che in un libro di aritmetica rigorosa: 1° la numerazione, come ne è stato dato esempio in due opere recenti pubblicate fra noi (*), ha la

(*) E. Sadun e C. Soschino: *Lezioni d'aritmetica*. — C. Burali Forti: *Aritmetica razionale*.

sua vera sede dopo l'esposizione delle proprietà inerenti alle quattro prime operazioni, che le servono di fondamento; 2° che i processi di operazioni sono la traduzione pratica di proprietà relative alle medesime e completano queste proprietà; 3° che ciascuna teoria per essere stabilita senza eccezione non dovrebbe valersi di enti estranei alla propria natura, ma conviene pur considerare che la scuola ha delle esigenze alle quali non è dato impunemente di venir meno.

La teoria dei numeri irrazionali è sviluppata ampiamente e con eccezionale scrupolosità d'esattezza e l'A. non manca di mostrare come *si potrebbe fare a meno del concetto di lunghezza* per stabilirla, valendosi d'operazioni effettuate su numeri razionali, continuate senza fine. A. Lugli.

Dott. RODOLFO BETTAZZI. — *La risoluzione dei problemi numerici e geometrici.* Ditta G. B. Paravia e Comp., 1893. — Prezzo: L. 2.

L'operetta, oggettivamente considerata, fa buona compagnia agli altri noti lavori del valente autore. E sebbene questi dichiari nella prefazione di aver tratto partito dalle opere congeneri del Serret, del Duhamel, del Petersen e di altri, pure gli è dovuta lode per molte novità di sostanza e di forma, tutte confacenti allo scopo del libro, che è il guidare gli studenti dei Licei e degli Istituti tecnici nella risoluzione dei problemi di matematica. Quanto alla ragione didascalica dell'opera, è fuor di dubbio che un professore di matematica, cui piacesse seguire l'usanza del Bettazzi, e distribuire la materia dei programmi così, da potersi soffermare a mezzo il corso liceale, per costituire in piccol corpo di dottrina metodi ed accorgimenti già noti ai suoi discepoli, per l'uso fattone in questioni particolari, troverebbe nel libro del nostro autore la miglior guida per il suo ufficio. Gli scolari poi, avrebbero nel libro medesimo un epilogo delle lezioni di metodo udite dal professore, epilogo che invano cercherebbero negli ordinarî trattati scolastici. Un solo consiglio mi fo lecito di dare all'autore: che cioè, quando ristamperà il lavoro, asperga ancora più « di soave licor gli orli del vaso » confortando a più brevi intervalli le teorie generali con esempî illustrativi: amerei anzi che appunto da questi s'incominciasse il libro. La parte prima, generale ed astratta quanto l'argomento suo comporta, sarebbe così framezzata da qualche riposo o diletto pei giovani. Inoltre alcune frasi ostiche ai principianti, come quella di « problema conseguenza di un altro », otterrebbero la spiegazione che domandano: e finalmente questa egregia pubblicazione, mentre non fallirebbe a nessuno degli scopi particolari che l'autore si è prefisso, conseguirebbe ad esuberanza il più arduo: quello cioè di spianare la via ai giovinetti che, per inveterato pregiudizio, si credessero negati alle scienze matematiche. Giovanni Frattini.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico.

Arzelà (C.) e Ingrami (G.) — *Aritmetica razionale* ad uso delle Scuole secondarie. Bologna, N. Zanichelli, 1894. — Prezzo: L. 3.

Cesàro (E.) — Su talune erronee « riflessioni » del Prof. Arminio Nobile. (Rivista di matematica, Anno III, 1893).

DE GALDEANO (Z. G.) — El Congreso de Besanzon (Diario de Avisos, agosto 1893).
GARBIERI (G). — Sulla teoria della eliminazione fra due equazioni (Atti Acc. Gioenia di Scien. Nat. in Catania, Vol. VI, Serie 4ª, 1893).
GUCCIA (G. B.) — Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie (Rend. Circolo mat. Palermo, Tomo VII, 1893).
— — Una definizione sintetica delle curve polari (idem, idem).
LORIA (G.) — Le scienze esatte nell'antica Grecia. Libro I. I geometri precursori di Euclide; pp. 168 con 2 tav. (Memorie R. Acc. Scienze, Lett ed Arti di Modena, Vol. X, serie II, 1893).
MAROTTA (G.) — Grandezze proporzionali e regole del tre. Acireale, Tip. V Micale, 1893.
MATTEUCCI (A.) — Strumenti ottici (Enciclopedia delle Arti e Industrie, 1893).
RIBONI (G.) — *Elementi di geometria* ad uso delle Scuole secondarie superiori. Bologna, N. Zanichelli, 1894 — Prezzo: L. 3.
SADUN (E.) — Alcune proprietà dei coefficienti polinomiali dedotte dalla divisibilità di vari polinomi per $x^m + a\,x^{m-1} + a^2\,x^{m-2} + \ldots + a^{m-1}\,x + a^m$ (Giorn. di Matematiche di Battaglini, Vol. XXXI, 1893).
VIVANTI (G.) — Sulle serie di potenze (Estratto d'una lettera al Prof. S. Pincherle) (Annali di matematica. Serie II tomo XXI).
Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques, publié par G. ENESTRÖM. Nouvelle série. 7. N. 3. — Stockholm, 1893.
Bulletin scientifique, rédigé par M. E. LEBON. — Huitième année. N. 1. Octobre, 1893. Félix Alcan, éditeur. Paris.
El Progreso matemático, periódico de matemáticas puras y aplicadas. Director D. ZOEL G. DE GALDEANO. Año III, N. 32-33. Septiembre-Octubre de 1893 — Zaragoza.
Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del Prof. G. BATTAGLINI. Vol. XXXI. Maggio e Giugno 1893. — Napoli, B. Pellerano.
Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. DE LONGCHAMPS. 4ª Série, XVII année. N. 3-9, Mars-Octobre, 1893. — Paris, Librairie Ch. Delagrave.
Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. 17ª année. N. 12-20. 18ª année. N. 1, 2, 3 — Paris, Librairie Nony et C.ie, 17, rue des Écoles, 1893.
Mathesis, recueil mathématique publié par P. MANSION et J. NEUBERG. Deuxième série. Tome III. Mars-Octobre, 1893. — Gand, Ad. Hoste, éditeur.
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo VII, Fasc. I, II, III-IV e V, Gennaio-Ottobre 1893.
Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. — Serie 2ª; Vol. VII, Fasc. 3° a 7°. Marzo a Luglio 1893.
Revue de mathématiques spéciales, rédigée par M. B. NIEWENGLOWSKI. 3ª année. N. 6-12, Mars-Septembre 1893. 4ª année. N. 1, Octobre 1893 — Paris, Librairie Nony et C.ie, 17, rue des Écoles.
Rivista di matematica, diretta dal Prof. G. PEANO. Vol. III, Fasc. 4° a 10°. Aprile ad Ottobre 1893.
Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. HOFFMANN. XXIV Jahrgang: 2, 3, 4, 5, 6-7 Heft, 1893. — Leipzig, G. B. Teubner.

Chiusura della redazione il dì 8 novembre 1893.