Indice Articoli Anno 1892

A PROPOSITO D'UNA GENERALIZZAZIONE

DELLA FUNZIONE φ DI *GAUSS*

In una recente nota (*) il signor L. Carlini si è proposto di calcolare quanti gruppi di p numeri, uguali o disuguali e non superiori ad n, ammettono un massimo comun divisore primo con n, ed ha dimostrato che, se $\varphi_p(n)$ è il numero di tali gruppi, si ha

$$\varphi_p(a) + \varphi_p(b) + \varphi_p(c) + \ldots. = n^p. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1]$$

supponendo che $a, b, c, \ldots..$ siano tutti i divisori di n. Questa relazione determina completamente la funzione incognita φ. Si sa infatti che la funzione f soddisfacente, per tutti i valori di n, alla condizione

$$f(a) + f(b) + f(c) + \ldots. = F(n). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [2]$$

è in modo unico determinata dall'eguaglianza

$$f(n) = \mu(a) F\left(\frac{n}{a}\right) + \mu(b) F\left(\frac{n}{b}\right) + \mu(c) F\left(\frac{n}{c}\right) + \ldots, \quad . \quad . \quad [3]$$

nella quale $\mu(n)$ rappresenta una funzione generalmente nulla, ma uguale a $(-1)^k$ quando n è il prodotto di k fattori primi, disuguali. Si ha dunque

$$\frac{\varphi_p(n)}{n^p} = \frac{\mu(a)}{a^p} + \frac{\mu(b)}{b^p} + \frac{\mu(c)}{c^p} + \ldots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [4]$$

cioè, chiamando $u, v, w, \ldots.$ i fattori primi di n,

$$\varphi_p(n) = n^p \left(1 - \frac{1}{u^p}\right)\left(1 - \frac{1}{v^p}\right)\left(1 - \frac{1}{w^p}\right)\ldots.,$$

come ha dimostrato direttamente il signor Carlini.

Ogni funzione φ_p si può esprimere mediante le analoghe funzioni corredate di minori indici. Si osservi infatti che, se si ha un'altra

(*) *V.* pag. 119 dell'anno VI.

relazione [2], in cui al posto delle funzioni f ed F intervengano altre funzioni g e G, è identicamente

$$\sum f(a)\, G\left(\frac{n}{a}\right) = \sum g(a)\, F\left(\frac{n}{a}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [5]$$

Ora, poichè le relazioni [1] e [4] hanno entrambe la forma [2], possiamo scrivere, ponendo mente alla stessa [4],

$$\varphi_{p+q}(n) = \sum a^q \varphi_p(a)\, \varphi_q\left(\frac{n}{a}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [6]$$

Ne segue che la funzione $\varphi_p(n)$ si può esprimere mediante una qualunque delle somme

$$\sum a\varphi_{p-1}(a)\varphi_1\left(\frac{n}{a}\right),\ \sum a^2\varphi_{p-2}(a)\,\varphi_2\left(\frac{n}{a}\right),\ \ldots,\ \sum a^{p-1}\varphi_1(a)\,\varphi_{p-1}\left(\frac{n}{a}\right),$$

estese a tutti i divisori di n.

Molte altre relazioni analoghe si deducono in modo assai facile dalla [5]. Così, rappresentando con $\theta_p(n)$ la somma delle p^{esime} potenze dei divisori di n, si ottiene, adoperando l'identità [1],

$$\sum \varphi_p(a)\, \theta_{p+q}\left(\frac{n}{a}\right) = n^p\, \theta_q(n);$$

poi da questa, osservando che si ha identicamente

$$n^p\, \theta_{-p}(n) = \theta_p(n),$$

si deduce anche

$$\sum a^q \varphi_p(a)\, \theta_q\left(\frac{n}{a}\right) = \theta_{p+q}(n).$$

Adoperando invece la [4] si trova che la funzione

$$f_p(n) = a^p f(a)\, \varphi_p\left(\frac{n}{a}\right) + b^p f(b)\, \varphi_p\left(\frac{n}{b}\right) + c^p f(c)\, \varphi_p\left(\frac{n}{c}\right) + \ldots.$$

soddisfa all' identità

$$f_p(a) + f_p(b) + f_p(c) + \ldots. = n^p F(n).$$

Basta supporre $F(n) = n^q$ per ritrovare la relazione [6].

Ancora si osservi che dalla [4] si deduce immediatamente l'espressione assintotica della funzione φ_p, constatando che la serie

$$\frac{\mu(1)}{1^{p+1}} + \frac{\mu(2)}{2^{p+1}} + \frac{\mu(3)}{3^{p+1}} + \ldots.$$

converge assolutamente. Ciò basta (*) infatti per asserire che la sua somma rappresenta il *valor medio* della funzione $n^{-p}\varphi_p(n)$, e per scrivere assintoticamente

$$\varphi_p(n) = \frac{n^p}{1+\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{3^{p+1}}+\ldots}.$$

In particolare si ottiene $\frac{6n}{\pi^2}$ come espressione assintotica della *funzione di Gauss*.

Quando l'indice è negativo la funzione φ_p perde il significato attribuitole dal signor Carlini, ma si può ridurla a funzioni che hanno quel significato osservando che

$$\varphi_{-p}(n) = \pm\left(\frac{uvw\ldots}{n^2}\right)^p \varphi_p(n).$$

La funzione $n^p\varphi_{-p}$ si presenta in una interessante questione di Aritmetica. Se la rappresentiamo con ζ_{p+1}, se cioè poniamo

$$\zeta_p(n) = (1-u^{p-1})(1-v^{p-1})(1-w^{p-1})\ldots,$$

la somma delle p^{esime} potenze dei numeri primi con n, e non superiori ad n, è data (**) dalla formola simbolica

$$\sigma_p(n) = \frac{(n+B\zeta)^{p+1}-(B\zeta)^{p+1}}{p+1} \quad \ldots\ldots\ldots [7]$$

in cui le B rappresentano i *numeri di Bernoulli*. Inversamente è facile riconoscere che le funzioni φ si esprimono in modo assai semplice mediante le somme σ. Si ottiene infatti, invertendo l'ultima eguaglianza,

$$n\,B_p\,\zeta_p(n) = (\sigma - n\,B)^p. \quad \ldots\ldots\ldots [8]$$

In altri termini, se $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ son tutti i numeri primi con n e non superiori ad n, la somma

$$(\alpha - nB)^p + (\beta - nB)^p + (\gamma - nB)^p + \ldots$$

è nulla se p è dispari, ed è proporzionale ad $n\zeta_p$ se p è pari. Ciò per-

(*) *Comptes-rendus*, 1888, p. 1651.
(**) *Giornale di Crelle*, t. XL, p. 89.

mette di calcolar subito ogni σ con indice dispari quando si conoscano le precedenti σ con indice pari. Si ottiene

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} n \sigma_0$$

$$\sigma_3 = \frac{3}{2} n \sigma_2 - \frac{1}{4} n^3 \sigma_0$$

$$\sigma_5 = \frac{5}{2} n \sigma_4 - \frac{5}{2} n^3 \sigma_2 + \frac{1}{2} n^5 \sigma_0$$

$$\sigma_7 = \frac{7}{2} n \sigma_6 - \frac{35}{4} n^3 \sigma_4 + \frac{21}{2} n^5 \sigma_2 - \frac{17}{8} n^7 \sigma_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

come si riconosce anche sviluppando l'eguaglianza simbolica evidente

$$\sigma^p = (n - \sigma)^p$$

Si hanno inoltre, per esprimere nelle σ le funzioni ζ con indice pari, le formole

$$\zeta_0 = \quad \frac{1}{n} \sigma_0$$

$$\zeta_2 = \quad \frac{6}{n} \sigma_2 - 2 n \sigma_0$$

$$\zeta_4 = - \frac{30}{n} \sigma_4 - 60 n \sigma_2 - 14 n^3 \sigma_0$$

$$\zeta_6 = \quad \frac{42}{n} \sigma_6 - 210 n \sigma_4 + 294 n^3 \sigma_2 - 62 n^5 \sigma_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si può anche dire che, a prescindere da un fattore che dipende unicamente dal prodotto dei divisori primi di n, ognuna delle funzioni considerate dal signor Carlini è esprimibile, se l'indice è dispari, come somma dei valori che assume un polinomio bernoulliano quando la variabile percorre la serie delle frazioni proprie irriducibili, di denominatore n.

È facile risalire dalle relazioni [7] ed [8] ad una formola molto più generale. Immaginiamo che le frazioni

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots\ldots, \frac{n}{n}$$

si riducano al minimo denominatore. Per uno stesso denominatore a

(che necessariamente divide n) il numeratore prende tutti i valori primi con a e non superiori ad a. Ne segue che, se si pone

$$f(n) = \psi\left(\frac{\alpha}{n}\right) + \psi\left(\frac{\beta}{n}\right) + \psi\left(\frac{\gamma}{n}\right) + \ldots.$$

e

$$F(n) = \psi\left(\frac{1}{n}\right) + \psi\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots + \psi\left(\frac{n}{n}\right),$$

tra le funzioni così definite sussiste il vincolo [2]. Se, per esempio, si prende $\psi(x) = x^p$, si ha

$$f(n) = \frac{\sigma_p(n)}{n^p}, \qquad F(n) = \frac{1^p + 2^p + \ldots. + n^p}{n^p};$$

quindi si ottiene, sostituendo in [3], la *formola di Liouville* (*)

$$\sum a^p \sigma_p\left(\frac{n}{a}\right) = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots. + n^p,$$

che per inversione dà

$$\sigma_p(n) = \sum \left[1^p + 2^p + \ldots\ldots + \left(\frac{n}{a}\right)^p\right] a^p \mu(a).$$

È poi facile trasformare quest'ultima formola nella [7]. Supponendo invece $\psi(x) = (x - B)^p$ si ottiene

$$f(n) = \frac{(\sigma - nB)^p}{n^p}, \qquad F(n) = \frac{B_p}{n^{p-1}},$$

in virtù di note proprietà dei polinomii bernoulliani; poi, adoperando la [3], si ricade sulla [8]:

$$(\sigma - nB)^p = nB_p \sum a^{p-1} \mu(a) = nB_p \zeta_p(n).$$

Del resto si passa agevolmente dalla [8] alla [7], osservando prima che i numeri A definiti dall'eguaglianza simbolica

$$(A - B)^p = 0$$

sono

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{3}, \quad A_3 = \frac{1}{4}, \quad \ldots\ldots$$

(*) *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. XLIV.

e scrivendo poi

$$\sigma_p = (\sigma - nB + nA)^p = n \sum_{i=0}^{i=p} \frac{p(p-1)\dots(p-i+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots i} B_{p-i} \zeta_{p-i} \frac{n^i}{i+1}$$

$$= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{i=p} \frac{(p+1)p\dots(p-i+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots (i+1)} B_{p-i} \zeta_{p-i} n^{i+1} = \frac{(n+B\zeta)^{p+1} - (B\zeta)^{p+1}}{p+1}.$$

Ancora si faccia $\psi(x) = x^{-p}$. Si ottiene, per rappresentare la funzione φ_p, l'eguaglianza

$$\varphi_p(n) = n^p \frac{\frac{1}{\alpha^p} + \frac{1}{\beta^p} + \frac{1}{\gamma^p} + \dots + \frac{1}{p-1} \,.\, \frac{1}{(n+B\zeta)^{p-1}}}{1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots} \,. \quad [9]$$

Per esempio si ha, in serie semi-convergente,

$$\varphi_2(n) = \frac{6}{\pi^2} \left[n^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \dots \right) + \varphi(n) + \frac{\zeta_2}{6n} - \frac{\zeta_4}{30n^3} + \frac{\zeta_6}{42n^5} - \dots \right].$$

La formola [9] cade in fallo quando $p = 1$. Allora bisogna sostituirle quest'altra notevole relazione simbolica

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \dots = \log(n + B\zeta) + \left(\sum \frac{\log u}{u-1} + 0{,}577215664\dots \right) \frac{\varphi(n)}{n},$$

intendendo estesa a tutti i divisori primi di n la somma che comparisce nel secondo membro. Finalmente, se si fa $\psi(x) = \log x$, si ottiene, rappresentando con ε un numero inferiore all'unità in valore assoluto,

$$\alpha\beta\gamma \dots = \left(\frac{n}{e} \right)^{\varphi(n)} \,.\, e^{\frac{1}{24n} [(1-u)(1-v)\dots + \varepsilon(1+u)(1+v)\dots]}$$

purchè n non sia potenza di qualche numero primo u: in questo caso bisogna ancora moltiplicare per $\sqrt{u}$ il secondo membro. L'ultima relazione è, per così dire, la *formola di Stirling* dell'Aritmetica.

E. Cesàro.

DELL'ANALISI INDETERMINATA DI SECONDO GRADO

(Continuazione, V. pag. 169). (*)

8. *Metodo per la ricerca di una soluzione intera dell'equazione di* Pell *e, più generalmente, di qualsiasi soluzione dell' equazione* $x^2 - Dy^2 = N$.

Si indichi con m la radice di D a meno di un'unità in difetto e con n il resto dell'estrazione di tale radice. Si avrà: $D = m^2 + n$, e inoltre: $2m + 1 - n > 0$. Sia pertanto (x_1, y_1) una qualunque soluzione intera e positiva dell'equazione proposta.

Supponendo $x_1 > (m+1)\,y_1$, si trova facilmente che

$$y_1 < \sqrt{\frac{N}{2m+1-n}}.$$

Se invece $x_1 \leq (m+1)\,y_1$, si ponga: $x_1 = (m+1)\,y_1 - h$, intendendo per h un intero, positivo o nullo. La y_1 e la h soddisferanno la condizione

$$(2m+1-n)\,y_1^2 - 2h\,(m+1)\,y_1 + h^2 - N = 0,$$

la quale, risoluta per rispetto alla y_1, darà:

$$y_1 = \frac{h\,(m+1) \pm \sqrt{Dh^2 + N\,(2m+1-n)}}{2m+1-n}.$$

Essendo il primo membro di questa formola un numero intero, lo sarà anche il secondo: epperò la quantità sotto radice dovrà essere un quadrato intero k^2. Si avrà dunque:

$$y_1 = \frac{h\,(m+1) \pm k}{2m+1-n};$$

e quanto ai numeri k ed h, essi saranno i valori della x e della y in una soluzione dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N\,(2m+1-n).$$

(*) Per intendere questo articolo non è necessario conoscere il precedente, del quale è continuazione.

Qui si deve notare che il segno negativo davanti alla k della penultima formola è inaccettabile. Infatti da essa e dalla $x_1 = (m+1)\,y_1 - h$ si ricava:

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n}\left(\pm k + h\sqrt{D}\right).$$

Se si desse alla k il segno negativo, il secondo membro di questa eguaglianza sarebbe negativo, perchè $k > h\sqrt{D}$, per virtù della

$$k^2 - D h^2 = N(2m+1-n).$$

L'eguaglianza adunque sarebbe impossibile, perchè il suo primo membro è positivo. Rimane così stabilito che, *se* y_1 *non è minore della radice del secondo membro dell'equazione proposta, diviso per* $2m+1-n$, *deve aversi:*

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n}\left(k + h\sqrt{D}\right),$$

denotando (k, h) *una soluzione di quell'equazione che si ottiene dalla proposta moltiplicandone il secondo membro per* $2m+1-n$.

Applicando questo principio alla soluzione (k, h) dell'equazione

$$x^2 - D y^2 = N(2m+1-n),$$

si avrà, qualora h non sia minore di $\sqrt{N}$,

$$k + h\sqrt{D} = \frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n}\left(k' + h'\sqrt{D}\right),$$

indicando con (k', h') una certa soluzione dell'equazione

$$x^2 - D y^2 = N(2m+1-n)^2.$$

Conseguentemente:

$$x_1 + y_1\sqrt{D} = \left(\frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n}\right)^2 \left(k' + h'\sqrt{D}\right).$$

Di nuovo: se h' non sarà minore di $\sqrt{N(2m+1-n)}$, si avrà:

$$x_1 + y_1\sqrt{D} = \left(\frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n}\right)^3 \left(k'' + h''\sqrt{D}\right),$$

indicando con (k'', h'') una certa soluzione dell'equazione

$$x^2 - D y^2 = N(2m+1-n)^3.$$

E via così. - Continuando, si deve finalmente arrivare ad un'eguaglianza

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n}\right)^{\lambda} (x' + y' \sqrt{D}) = \frac{x' + y' \sqrt{D}}{(m+1-\sqrt{D})^{\lambda}},$$

nella quale y' denoterà un certo valore di y che, mentre apparterrà ad una certa soluzione dell'equazione

$$x^2 - D y^2 = N (2m+1-n)^{\lambda},$$

sarà superato dalla radice del secondo membro dell'equazione medesima, diviso per $2m+1-n$ (*). Se non fosse così, si avrebbe, per θ intero positivo, grande a piacimento:

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \frac{k^{(\theta-1)} + h^{(\theta-1)} \sqrt{D}}{(m+1-\sqrt{D})^{\theta}}.$$

Ciò è impossibile, perchè, essendo $m+1-\sqrt{D}$ minore dell'unità, il secondo membro crescerebbe indefinitamente al crescere di θ, mentre il primo è costante.

Si consideri adunque il sistema

$$\begin{array}{l} x^2 - D y^2 = N \\ x^2 - D y^2 = N (2m+1-n) \\ x^2 - D y^2 = N (2m+1-n)^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad [A]$$

e tra le soluzioni delle varie equazioni ond'esso si compone, si chiamino *singolari* quelle nelle quali il valor d'y è minore della radice del secondo membro della relativa equazione, diviso per $2m+1-n$. Segue dalle cose dette che ogni soluzione (x_1, y_1) dell'equazione $x^2 - D y^2 = N$ si può derivare da una soluzione singolare (x', y'). Appartenendo questa alla $(\lambda+1)^a$ equazione del precedente sistema, se ne deriverà la (x_1, y_1) moltiplicando il binomio $x' + y' \sqrt{D}$ per il fattore

$$\frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n} \qquad [9]$$

(*) Supponendo $D = a^2 - 1$ e conseguentemente $m = a - 1$, $2m+1-n = 1$, si ritrova tutto ciò che fu detto nel n. 1 in proposito dell'equazione $x^2 - (a^2-1) y^2 = N$.

λ volte, ed eguagliando x_1 alla parte razionale ed y_1 al coefficiente di $\sqrt{D}$ dell'ultimo prodotto.

Di qui un metodo per la ricerca delle soluzioni dell'equazione $x^2 - D y^2 = N$. Si troveranno per tentativi le soluzioni singolari delle successive equazioni del sistema scritto di sopra. Se una soluzione singolare (x', y') sarà stata ottenuta dopo aver fatto λ passaggi da un'equazione del sistema alla seguente, e se il binomio $x' + y' \sqrt{D}$ moltiplicato per il fattore [9] λ volte di seguito darà nascita a λ binomi nei quali la parte razionale e il coefficiente di $\sqrt{D}$ siano numeri interi, la parte razionale e il coefficiente di $\sqrt{D}$ relativi all'ultimo prodotto saranno i valori della x e della y in una soluzione dell'equazione proposta.

9. *Discussione del metodo.* — Ci riferiremo più specialmente al caso in cui $\sqrt{D}$ sia più vicina al suo valore a meno di un'unità in eccesso che non a quello in difetto, supponendo

$$m + 1 - \sqrt{D} < \sqrt{D} - m.$$

Perchè, se si verificasse il contrario, sarebbe più vantaggioso un procedimento diverso dall'indicato, come si vedrà in appresso. Dalla condizione precedente si ricava:

$$m + 1 - \sqrt{D} < \frac{1}{2},$$

mentre generalmente si ha soltanto:

$$m + 1 - \sqrt{D} < 1.$$

Si supponga che la soluzione (x_1, y_1) dell'equazione proposta si derivi dalla soluzione singolare (x', y') e che questa sia stata trovata dopo λ passaggi da un'equazione del sistema $[A]$ alla susseguente, così che si abbia:

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \frac{x' + y' \sqrt{D}}{(m + 1 - \sqrt{D})^\lambda}.$$

Si avrà ancora, per essere la (x', y') una soluzione singolare, $x' > (m + 1)\, y'$. Conseguentemente:

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} > \frac{y' (m + 1 + \sqrt{D})}{(m + 1 - \sqrt{D})^\lambda}.$$

Ora poi si osservi che, quando per la ricerca della (x_1, y_1) occorre passare dall'equazione proposta alle susseguenti del sistema [A], come supporremo, la soluzione (x_1, y_1) non è singolare per l'equazione proposta, e ciò vuol dire che $x_1 \leq (m+1)y_1$. Combinando questa disuguaglianza con la precedente, si ottiene:

$$y_1 > \frac{y'}{(m+1-\sqrt{D})^\lambda}.$$

Essendo $m+1-\sqrt{D}$ quantità minore dell'unità, anzi, nel caso più specialmente considerato minore di $\frac{1}{2}$, e inoltre tanto più piccola quanto $\sqrt{D}$ è più vicina al suo valore a meno di un'unità in eccesso, si conclude che, *se per trovare y' occorrono λ passaggi, essa è minore della $(2^\lambda)^a$ parte dell'incognita y_1 che se ne deriva, e tanto più considerabilmente quanto più $m+1-\sqrt{D}$ si discosta dal suo limite superiore $\frac{1}{2}$*. Pertanto, qualora y_1 non sia straordinariamente grande, basteranno pochi passaggi perchè y' sia superata dal limite fissato per la y delle soluzioni singolari di taluna delle equazioni del sistema [A], e divenga perciò nota (*).

Esaminiamo ora l'entità dei tentativi da premettersi ai singoli passaggi da equazione ad equazione del sistema [A]. Il limite superiore fissato per la y delle soluzioni singolari relative all'equazione che occorre considerare dopo λ passaggi, è

$$\sqrt{N(2m+1-n)^{\lambda-1}}.$$

Ora, poichè

$$2m+1-n=(m+1)^2-D: \quad m+1<\frac{1}{2}+\sqrt{D},$$

e conseguentemente

$$2m+1-n<\left(\frac{1}{2}+\sqrt{D}\right)^2-D=\frac{1}{4}+\sqrt{D},$$

il suddetto limite è minore di

$$\sqrt{N\left(\frac{1}{4}+\sqrt{D}\right)^{\lambda-1}},$$

(*) La precedente conclusione riguardante la piccolezza di λ non si applica a quelle soluzioni la cui y' risultasse eguale a zero. Siffatte soluzioni, quando esistono, sono eccezionali: e non possono esistere se non quando N oppure $N(2m+1-n)$ sono quadrati perfetti, come dal sistema [A] chiaramente apparisce.

numero che, ritenute le precedenti conclusioni relative a λ, non è molto grande, se pure N e D non sono grandissimi.

Applichiamo il metodo alla ricerca di una soluzione dell'equazione $x^2 - 46\,y^2 = 1$. Per questa il sistema $[A]$ diviene:

$$\begin{array}{lc}
x^2 - 46\,y^2 = 1 & 0 \\
x^2 - 46\,y^2 = 3 & 0 \\
x^2 - 46\,y^2 = 9 & 1 \\
x^2 - 46\,y^2 = 27 & 2 \\
x^2 - 46\,y^2 = 81 & 5 \\
x^2 - 46\,y^2 = 243 & 8 \\
\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots &
\end{array}$$

A lato di ciascuna equazione è scritto il valor massimo per la y delle relative soluzioni singolari, che è l'intero prossimo inferiore alla radice quadrata del secondo membro diviso per 3. Trascurando la soluzione evidente (1, 0) della 1ª equazione, che è la proposta, e le soluzioni (3, 0), (9, 0) della 3ª e della 5ª, perchè non se ne derivano soluzioni intere per la 1ª, dopo pochi e facili tentativi si trova (17, 1), soluzione singolare della 6ª equazione. Questa soluzione fu ottenuta con 5 passaggi. Il relativo binomio $17 + \sqrt{46}$, moltiplicato 5 volte di seguito per

$$\frac{7 + \sqrt{46}}{3},$$

produce i binomi:

$$55 + 8\sqrt{46};\quad 251 + 37\sqrt{46};\quad 1153 + 170\sqrt{46};$$
$$5297 + 781\sqrt{46};\quad 24335 + 3588\sqrt{46}.$$

Si ottiene così per l'equazione proposta la soluzione (24335, 3588).

10. Dalla discussione generale risulta, e l'esempio precedente lo conferma, che il metodo in proposito fa dipendere la ricerca della desiderata soluzione da tentativi con numeri di gran lunga più piccoli dei numeri incogniti. Detti tentativi si possono alla lor volta facilitare. Dovendosi per esempio sperimentare sull'equazione $x^2 - D\,y^2 = F$

il valore $q+1$ della y, a fine di riconoscere se mai $D(q+1)^2+F$ risulti quadrato perfetto, si farà uso dell'identità

$$D(q+1)^2+F=(Dq^2+F)+D(2q+1).$$

Si otterrà pertanto il valore del primo membro, aggiungendo al numero Dq^2+F, già noto per il tentativo precedente, il prodotto $D(2q+1)$. Ma sarebbe un fuor d'opera l'intrattenere il lettore in particolari di questa natura. Mostreremo piuttosto che l'indicato metodo dà tutte le soluzioni dell'equazione proposta senza ripetizione alcuna: che anzi le soluzioni che a mano a mano ci sono fornite, risultano ordinate per ragion di grandezza, dalla minima in poi. Infatti dalla formola

$$x+y\sqrt{D}=\frac{x'+y'\sqrt{D}}{(m+1-\sqrt{D})^\lambda}$$

apparisce che, ferma restando λ, il binomio $x+y\sqrt{D}$, e con esso la soluzione (x, y), cresce al crescere della relativa soluzione singolare (x', y'). Le soluzioni derivate dalle soluzioni singolari di una medesima equazione del sistema $[A]$ si presenteranno adunque ordinate nel modo sopraddetto. Rimane da dimostrare che le soluzioni derivate dalle soluzioni singolari di qualsiasi equazione succedanea alla $(\lambda+1)^a$ sono maggiori di tutte quelle che si derivano dalle soluzioni di questa.

Siano (x', y'), (x'', y'') soluzioni singolari della $(\lambda+1)^a$ e della $(\lambda+1+p)^a$ equazione del sistema $[A]$, e supponiamo che se ne derivino le soluzioni (x_1, y_1), (x_2, y_2) dell'equazione proposta. Si avrà:

$$x_1+y_1\sqrt{D}=\frac{x'+y'\sqrt{D}}{(m+1-\sqrt{D})^\lambda}:\quad x_2+y_2\sqrt{D}=\frac{x''+y''\sqrt{D}}{(m+1-\sqrt{D})^{\lambda+p}}.$$

Bisogna dimostrare che, se $p>o$,

$$x_2+y_2\sqrt{D}>x_1+y_1\sqrt{D},$$

ossia che

$$x''+y''\sqrt{D}>(m+1-\sqrt{D})^p\,(x'+y'\sqrt{D}).$$

Avendosi

$$y'<\sqrt{N(2m+1-n)^{\lambda-1}}$$

e conseguentemente

$$x' < (m+1)\sqrt{N(2m+1-n)^{\lambda-1}},$$

e ciò per essere (x', y') soluzione singolare dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N(2m+1-n)^{\lambda},$$

basterà dimostrare che

$$x'' + y''\sqrt{D} > (m+1-\sqrt{D})^{p-1}\sqrt{N(2m+1-n)^{\lambda+1}};$$

ossia che

$$N(2m+1-n)^{\lambda+p} > (m+1-\sqrt{D})^{p-1}\sqrt{N(2m+1-n)^{\lambda+1}}\,(x''-y''\sqrt{D});$$

vale a dire:

$$x'' - y''\sqrt{D} < \frac{\sqrt{N(2m+1-n)^{\lambda+2p-1}}}{(m+1-\sqrt{D})^{p-1}}.$$

Pertanto, essendo

$$(x''+y''\sqrt{D})(x''-y''\sqrt{D}) = N(2m+1-n)^{\lambda+p},$$

si ha

$$x'' - y''\sqrt{D} < \sqrt{N(2m+1-n)^{\lambda+p}};$$

epperò ancora

$$x'' - y''\sqrt{D} < \frac{\sqrt{N(2m+1-n)^{\lambda+2p-1}}}{(m+1-\sqrt{D})^{p-1}},$$

dacchè $p \geq 1$ e inoltre $m+1-\sqrt{D} < 1$.

11. Per il fatto che le soluzioni dell'equazione proposta ci sono fornite in ordine per ragion di grandezza, dalla minima in poi, il metodo in proposito è applicabile (e non è piccolo vantaggio) alla determinazione di tutte quelle soluzioni che sono inferiori a un certo limite Λ, fissato per la y (*). E invero, prima di por mano ai relativi calcoli, si può dire quanti passaggi da equazione ad equazione del sistema [A] sono al più necessari per ottenere le desiderate soluzioni, o per accertarne l'inesistenza.

(*) Per esempio delle soluzioni fondamentali: la cui ricerca, senza il sussidio di acconcio metodo, sarebbe spesso assai faticosa.

Ciò risulta dalla formola

$$y \geq \frac{y'}{(m+1-\sqrt{D})^{\lambda}} \,. \text{(*)}$$

Dato alla y' il valor minimo 1, si ottiene:

$$y \geq \frac{1}{(m+1-\sqrt{D})^{\lambda}}$$

e, dovendo essere $\Delta > y$,

$$\Delta > \frac{1}{(m+1-\sqrt{D})^{\lambda}} = \left(\frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n}\right)^{\lambda}.$$

Dunque

$$\lambda < \frac{\log \Delta}{\log(m+1+\sqrt{D}) - \log(2m+1-n)}\,.$$

12. *Osservazione*. — Chiamando δ il massimo comun divisore fra $m+1$ ed $n+1$ (eguale a quello fra $m+1$ e $2m+1-n$), sulle successive equazioni del sistema $[A]$ non occorrerà provare se non quei valori d' y che rendono $(2m+1-n)\,y^2$ divisibile per δ^2, meno che si tratti della 1ª e della 2ª equazione, per le quali tale semplificazione non sarebbe giustificata. Si tratti per esempio della 3ª equazione. Dettane (r, s) una soluzione singolare, la quale metta capo ad una soluzione dell'equazione proposta, dovrà aversi:

$$\left(\frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n}\right)(r+s\sqrt{D}) = r'+s'\sqrt{D},$$

essendo r' ed s' numeri interi. Perciò

$$s' = \frac{r+(m+1)\,s}{2m+1-n}\,.$$

Affinchè il secondo membro possa risultare intero, come lo è il primo, occorre che r sia divisibile per δ. Ma poichè

$$r^2 - [(m+1)^2 - (2m+1-n)]\,s^2 = N\,(2m+1-n)^2,$$

δ^2 dovrà dividere $(2m+1-n)\,s^2$, che è quanto bisognava dimostrare.

(*Continua*). G. Frattini.

(*) Il segno di eguaglianza si riferisce al caso in cui $\lambda = 0$.

LA DEFINIZIONE DI PROPORZIONE

ED IL V LIBRO DI EUCLIDE

1. Due sono i modi con cui si possono trattare le proporzioni nei corsi di geometria: quello che parte dalla definizione d'Euclide o da consimili, e quello che le studia come eguaglianze di rapporti, chiamando con questo ultimo nome dei numeri. Non voglio qui occuparmi di giudicare quale sia il migliore di essi; tale questione è ancora discutibile, avendo il primo metodo dalla sua parte la lunga tradizione, il valore educativo e l'indipendenza dal concetto di numero, l'altro la maggior facilità e chiarezza insieme alla rapidità dello svolgimento.

Indubitatamente la definizione di Euclide, così complicata nella forma, non è adatta a mettere in chiaro a menti inesperte l'essenza delle proporzioni, e conduce a dimostrazioni di teoremi che tutti sanno quanto sono penose. Ma se si osserva che la definizione euclidea non si restringe alle grandezze geometriche e vale invece per infinite altre classi di grandezze, si vede come per due vie si possa tentare di rendere più accessibile la teoria delle proporzioni che si fa in geometria, senza ricorrere al concetto di numero: quella di semplificare la definizione di Euclide conservandole la portata così generale, e l'altra di limitarsi a darla per le sole grandezze che studia la geometria.

Scopo principale della presente nota è di tentare la prima via; ma credo opportuno di dare prima un cenno anche del come si possa percorrere la seconda, già da altri in parte tracciata.

Proporzioni fra sole grandezze geometriche.

2. Il Prof. Raiola Pascarini in un suo lavoro (*) destinato appunto a scansare la definizione euclidea, mostra come si possa darne un'altra, limitandosi peraltro ai soli segmenti. In conclusione secondo il suo metodo può dirsi così:

Dati quattro segmenti a, b, c, d *si dirà* che essi *sono in propor-*

(*) *Studio sulla proporzionalità grafica e sue applicazioni alla similitudine e omotetia*, per il Dr. Luigi Raiola Pescarini, professore nel R. Liceo Ginnasio Principe Umberto. — Napoli, 1876.

zione, quando presi consecutivamente su un lato di un angolo MVN, ed a partire dal vertice V, due segmenti $VA = a$, $AB = b$ e sull'altro lato in modo simile i due $VC = c$, $CD = d$, le congiungenti AC, BD siano parallele. Dopo che si sia dimostrato che la proprietà precedente è indipendente dall'angolo scelto, tale definizione è legittima: e, chiaramente, a causa del teorema di Talete, equivale per i segmenti a quella ordinaria.

3. Per proseguire per le altre grandezze utilizzando il concetto del Prof. Raiola, possiamo definire così:

Due archi di un medesimo circolo *si dirà* che *sono in proporzione coi due segmenti* che li rappresentano rettificati ossia che i *due archi stanno fra loro come questi segmenti.*

Due angoli *stanno fra loro come i due archi rettificati* compresi in essi appartenenti a cerchi coi centri nei loro vertici e coi raggi uguali: lo stesso dicasi per due diedri, avvertendo di prendere i circoli coi centri sull'asse ed in piani perpendicolari all'asse.

Si dirà poi che due striscie (o due strati) *stanno fra loro come le loro altezze.*

Due superficie piane di quelle che studia la geometria elementare (superficie di poligoni, di circoli e loro parti) si trasformeranno in due rettangoli d'uguale base (come insegna la teoria dell'equivalenza) e *si dirà che stanno fra loro come le altezze di queste:* due solidi si trasformeranno in due parallelepipedi d'uguale base e *si dirà* che *stanno fra loro come le altezze di questi.*

In tal modo, date due grandezze geometriche α, β omogenee, si trovano sempre due segmenti a, b per i quali si dice che stanno fra loro come esse, e si scrive:

$$\alpha : \beta = a : b.$$

Si dimostra che, trovate con due modi differenti due coppie di segmenti a, b, ed a', b' tali che

$$\alpha : \beta = a : b$$
$$\alpha : \beta = a' : b',$$

deve essere

$$a : b = a' : b'$$

nel senso già spiegato per i segmenti. Indi avendosi due coppie di grandezze geometriche α, β, A, B, omogenee due a due, ma non necessariamente tutte e quattro, e non tutte segmenti, se essendo (colle definizioni date)

$$\alpha : \beta = a : b$$
$$A : B = a' : b',$$

dove a, b, a', b' sono segmenti, si verificasse che

$$a : b = a' : b',$$

si dirà (con nuova definizione) che α e β *stanno fra loro come* A e B, e si scriverà

$$\alpha : \beta = A : B.$$

In questo modo vengono definite le proporzioni fra coppie di grandezze geometriche, omogenee o no, di qualunque specie, e si possono con metodi puramente geometrici e differenti da una specie di grandezze all'altra (perchè differenti sono le definizioni), dimostrare le loro proprietà.

4. Non si può negare che questo metodo, pregevole perchè puramente ed esclusivamente geometrico, oltre il difetto di esigere dimostrazioni disparate secondo le varie specie di grandezze, ha quello non trascurabile di non mostrare sin da principio il concetto che informa le diverse definizioni delle proporzioni, concetto che è unico e non per la sola geometria, giacchè si estende anche ad altri campi.

Per questo stimo opportuno, invece che sviluppare quel metodo, tentare una definizione di proporzione generale per tutte le grandezze simili alle geometriche; e di ciò mi occuperò nei seguenti paragrafi (*).

(*) Anche il Ch. Prof. Biffignandi in un suo opuscolo: (*Biffignandi* - Le principali proprietà delle grandezze proporzionali novamente esposte - Acireale 1891) comparso dopochè il presente scritto era già stato consegnato per la stampa, tenta un nuovo modo di trattare le proporzioni. Egli parte dalla definizione d'Euclide, mostra che, per i segmenti, il fatto da essa espresso coincide con quello preso come definizione dal Prof. Raiola, e ricava da questo le proprietà delle proporzioni: la sua trattazione per i segmenti viene quindi ad informarsi alle stesse idee di quella del Prof. Raiola. Soltanto, il Prof. Biffignandi giudica la sua teoria valida senz'altro per tutte le grandezze, a causa unicamente dell'osservazione che fa in principio, e che è così concepita: « Ammetteremo, « in quanto segue, che una grandezza sia rappresentata da un segmento rettilineo che colla sua « lunghezza indichi la *quantità* di quella ». Ora, o io m'inganno, o questa osservazione, che non può esprimere un'assioma, nasconde una teoria completa, che dovrebbe essere svolta, quella della corrispondenza fra grandezze e segmenti: teoria non semplice e di difficoltà pari a quella delle proporzioni fra grandezze non omogenee della misura. In modo simile a quello tenuto dall'autore potrebbesi dire che ogni grandezza è rappresentata da un numero che ne indica la quantità, e interpretare per i numeri la definizione euclidea di proporzione, e svolgere la teoria aritmetica delle proporzioni fra i numeri, giudicando ciò sufficiente ad una trattazione generale delle proporzioni; ma come ciò non è esatto se prima non si stabilisce la teoria della misura, così non appare rigoroso il metodo accennato senza una teoria della *rettificazione delle grandezze*.

Corrispondenze metriche.

5. Si suol dare nei trattati di geometria il seguente teorema: « Se due serie di grandezze sono in corrispondenza univoca in modo « che a grandezze uguali di una corrispondano grandezze uguali del- « l'altra, ed alla somma di due grandezze della prima la somma delle « corrispondenti della seconda, allora due grandezze qualunque della « prima serie, e le due corrispondenti dell'altra, sono in proporzione « (con la definizione d'Euclide) e viceversa ». Tale teorema suggerisce di prendere come definizione della proporzione quella proprietà che è assunta come ipotesi nell'enunciato, premettendo quindi lo studio delle grandezze proporzionali a quello delle proporzioni vere e proprie fra quattro grandezze sole; ed è appunto questa via che io mi propongo di tracciare.

6. Parlando di classi di grandezze, in quello che segue intenderò alludere a tutte le classi lineari (costituite come quelle geometriche), le quali sono continue (*). Per esse quindi, fra le altre, valgono le proprietà espresse dai postulati d'Archimede (**) e di Dedekind (***), e le altre che di ogni loro grandezza esiste la sottomultipla secondo un numero qualunque e che per ogni grandezza presa nella classe ve n'è in questa una minore, oltre alla grandezza nulla, se esiste: in queste classi la somma gode le proprietà ordinarie della somma nelle grandezze geometriche. Col segno $=$ indicherò la parola *equivalenti*, e così potrò riferirmi anche alle classi geometriche delle superficie e dei solidi; in certe classi, per es. quelle delle grandezze geometriche elementari, questo nome si potrà sostituire con l'altro *uguali*.

Per semplicità supporrò di non considerare la grandezza nulla in nessuna classe.

7. Date due grandezze C e D, rispettivamente omogenee alle due A e B, per brevità di linguaggio si dirà che C e D sono *simili* rispetto ad A e B, quando avvenga che M ed N sieno:

1° o equimultiple di A e B,

(*) Cfr. la mia « Teoria delle grandezze » § 48.

(**) cioè che, prese in esse due grandezze qualunque A e B, fra le multiple di A ve ne sono di quelle maggiori di B.

(***) cioè che due coppie di variabili convergenti hanno sempre un limite.

2° o equisummultiple di A e B,

3° o equimultiple di equisummultiple di A e B,

4° o limiti di variabili convergenti formate con equimultiple di equisummultiple di A e B, casi che si indicheranno rispettivamente così:

$$1° \quad C = mA, \qquad D = mB,$$

$$2° \quad C = \frac{1}{n} A = \frac{A}{n}, \qquad D = \frac{1}{n} B = \frac{B}{n},$$

$$3° \quad C = \frac{m}{n} A, \qquad D = \frac{m}{n} B,$$

$$4° \quad C = \lim \frac{m}{n} A, \qquad D = \lim \frac{m}{n} B,$$

dove m ed n indicano numeri interi indeterminati.

Si dimostra facilmente che le grandezze simili rispetto a tutte le grandezze di una classe sono di nuovo tutte le grandezze della classe stessa.

8. Ricordando che nelle nostre classi se, date due coppie di variabili convergenti, si fa la somma delle grandezze corrispondenti, si ha una nuova coppia di variabili convergenti, il cui limite è la somma dei limiti delle variabili date (tale proprietà se non è teorema è definizione) si vede che, se due grandezze C e D sono simili rispetto ad altre due A e B:

1° se $A \gtreqless B$ sarà rispettivamente $C \gtreqless D$,

2° la somma $C + D$ è essa pure, considerata rispetto ad $A + B$, simile a C e D considerate rispetto ad A e B.

9. Diremo che due classi di grandezze non necessariamente omogenee sono in *corrispondenza metrica* quando si corrispondono univocamente, in modo che se A_1, A_2 sono due grandezze qualunque equivalenti della 1ª classe siano pure equivalenti le corrispondenti B_1, B_2 della 2ª, ed alla somma $A_1 + A_2$ corrisponda quella $B_1 + B_2$ delle grandezze corrispondenti, qualunque siano A_1 e A_2 (*).

Corrispondenze di tal genere sono note nelle classi geometriche: se n'ha un esempio ponendo una classe in corrispondenza con sè stessa

(*) È chiaro che una corrispondenza fra due classi omogenee, non è che una corrispondenza delle grandezze di una classe colle stesse o con altre della classe medesima.

in modo che ad ogni sua grandezza corrisponda la grandezza stessa, la quale ultima corrispondenza metrica si chiama *identità.*

10. Dalla definizione precedente si vede con facilità che in due classi poste in corrispondenza metrica, se A_1, A_2 sono due grandezze della 1ª, e B_1, B_2 le corrispondenti dell'altra, secondochè $A_1 \gtreqless A_2$ sarà anche $B_1 \gtreqless B_2$; ed A_2, B_2 saranno simili rispetto ad A_1, B_1. In particolare, se ad A corrisponde B, ad $\frac{m}{n} A$, a $\lim \frac{m}{n} A$ corrispondono rispettivamente $\frac{m}{n} B$, $\lim \frac{m}{n} B$: e se due variabili convergenti della 1ª classe hanno un limite M, le grandezze corrispondenti della 2ª formano pure due variabili convergenti il cui limite è la grandezza corrispondente ad M. Così si vede facilmente che, quando $A_1 > A_2$, ad $A_1 - A_2$ corrisponde $B_1 - B_2$.

Prese ora due grandezze uguali nella 2ª classe, B_1 e B_2, se le corrispondenti A_1 ed A_2 della 1ª non fossero uguali, sarebbe per es.: $A_1 > A_2$ e quindi $B_1 > B_2$ contro l'ipotesi. Così a $B_1 + B_2$ corrisponde $A_1 + A_2$: altrimenti se vi corrispondesse una grandezza non equivalente $A' \gtrless A_1 + A_2$, poichè per definizione ad $A_1 + A_2$ corrisponde $B_1 + B_2$, a questa grandezza corrisponderebbero nella 1ª classe due grandezze non equivalenti A' e $A_1 + A_2$, contro quanto ora si è detto. Si conclude che la 2ª classe rispetto alla 1ª gode le stesse proprietà che la 1ª rispetto alla 2ª.

11. È facile vedere come, date due classi qualunque α, β di grandezze (in particolare data due volte la stessa classe) sia possibile stabilire fra esse una corrispondenza metrica, dando ad arbitrio una coppia di grandezze che debbono essere corrispondenti.

Se infatti A e B sono due grandezze rispettivamente delle due classi, alla grandezza A si faccia corrispondere B, ed alle grandezze mA, $\frac{A}{n}$, $\frac{m}{n} A$, dove m ed n sono numeri qualunque interi, rispettivamente le altre mB, $\frac{B}{n}$, $\frac{m}{n} B$ cogli stessi numeri. Le grandezze della classe α che così non si sono ancora considerate, sono ciascuna, com'è facile a vedere (*), limite di serie convergenti formate da grandezze già considerate: esse si faranno corrispondere ai limiti

(*) Per brevità tralascio alcune facili dimostrazioni, che il lettore ritroverà agevolmente da sè.

delle serie convergenti di β corrispondenti a quelle ora dette di α. La corrispondenza attuale è metrica. Infatti se due grandezze A_1, A_2 di α sono equivalenti, sia che abbiano la forma $\frac{m}{n}A$ o che siano limiti di serie convergenti, chiaramente per il modo con cui sono ottenute sono equivalenti anche le loro corrispondenti: e ad $A_1 + A_2$ corrisponde una grandezza che (pensando alla definizione di somma di grandezze anche quando queste sono limiti di serie convergenti) si vede essere $B_1 + B_2$. Queste due proprietà sono quelle che caratterizzano le classi in corrispondenza metrica.

È chiaro inoltre che se A deve corrispondere a B la corrispondenza non può stabilirsi che in questo modo.

La corrispondenza metrica di due classi è quindi individuata da quella di due loro grandezze A, B: e per indicarla ci si potrà servire del simbolo $\binom{A}{B}$. Usando di questa notazione, se vorremo indicare che in due classi in corrispondenza metrica α, β alle grandezze A_1, A_2, A_3, ecc. di α corrispondono quelle B_1, B_2, B_3, ecc. di β si scriverà:

$$\begin{pmatrix} A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots \\ B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

Potremo quindi, per quanto si è detto, scrivere:

$$\begin{pmatrix} A, & mA, & \frac{A}{n}, & \frac{m}{n}A, \ldots\ldots \\ B, & mB, & \frac{B}{n}, & \frac{m}{n}B, \ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

12 Si ha come corollario del teorema precedente, che, date due grandezze A e B di due classi α e β ed un'altra A_1 di α, è sempre possibile trovare la grandezza B_1 di β che corrisponderebbe a B se α e β fossero in corrispondenza metrica ed A corrispondesse ad A_1: e che la grandezza B_1 è unica, ossia tutte quelle che possono corrispondere così a B sono equivalenti fra loro ed a B_1.

13. È evidente che se due classi sono in corrispondenza metrica con una terza, sono in corrispondenza metrica fra loro quando si facciano corrispondere quelle grandezze di esse che corrispondono ad una stessa della terza classe.

Se dunque abbiamo:

$$\begin{pmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & \dots \\ B_1, & B_2, & B_3, & \dots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & \dots \\ C_1, & C_2, & C_3, & \dots \end{pmatrix},$$

sarà:

$$\begin{pmatrix} B_1, & B_2, & B_3, & \dots \\ C_1, & C_2, & C_3, & \dots \end{pmatrix}.$$

14. Date due classi α, β in corrispondenza metrica, se a tutte le grandezze di α si sostituiscono altre grandezze simili rispetto ad esse, il cui insieme è di nuovo α (come si è accennato al § 7), la classe α in questo nuovo aspetto è ancora in corrispondenza metrica con β. Ed infatti, se A_1 ed A_2 sono due grandezze di α, B_1 e B_2 le corrispondenti di β nella 1ª corrispondenza, A'_1 ed A'_2 due grandezze di α simili rispetto ad A_1, A_2, sarà (§ 8) $A'_1 = A'_2$ se è $A_1 = A_2$, cioè se $B_1 = B_2$: e la grandezza corrispondente a $B_1 + B_2$, che nel 1° aspetto era $A_1 + A_2$, sarà quella che, rispetto ad $A_1 + A_2$, è simile ad A'_1 ed A'_2 rispetto ad A_1 ed A_2, la quale (§ 8) è $A'_1 + A'_2$. Ne viene che la corrispondenza $\begin{pmatrix} A'_1, & A'_2 \\ B_1, & B_2 \end{pmatrix}$ è metrica c. d. d.

Lo stesso può ripetersi per la classe β.

In particolare si ha che dalla corrispondenza metrica $\begin{pmatrix} A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2 \end{pmatrix}$ discendono le altre

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{n} A_1, & \frac{m}{n} A_2 \\ B_1, & B_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1, & A_2 \\ \frac{p}{q} B_1, & \frac{p}{q} B_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{n} A_1, & \frac{m}{n} A_2 \\ \frac{p}{q} B_1, & \frac{p}{q} B_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lim \frac{m}{n} A_1, & \lim \frac{m}{n} A_2 \\ \frac{p}{q} B_1, & \frac{p}{q} B_2 \end{pmatrix} \text{ ecc.}$$

15. Date due coppie di grandezze omogenee A_1, A_2 e B_1, B_2 corrispondenti in una corrispondenza metrica di una classe con sè stessa, si potrà scrivere $\begin{pmatrix} A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2 \end{pmatrix}$. Si avrà allora, nella stessa corrispondenza metrica, che sono corrispondenti le grandezze $p A_1$, $q A_2$

alle altre pB_1, qB_2, cioè che si ha $\begin{pmatrix} pA_1, & qA_2 \\ pB_1, & qB_2 \end{pmatrix}$ e che quindi sarà, per le proprietà della corrispondenza metrica (§ 10),

(1) $$pB_1 \gtreqless qB_2 \text{ secondochè } pA_1 \gtreqless qA_2 .$$

Presa ora la coppia A_1, B_1 si cerchi (§ 12) una grandezza B' la quale corrisponda ad A_2 nella corrispondenza metrica $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, cioè tale che sia $\begin{pmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B' \end{pmatrix}$. Per il teorema del § 14 si avrà pure $\begin{pmatrix} pA_1, & pB_1 \\ qA_2, & qB' \end{pmatrix}$ qualunque sieno p e q interi: quindi, poichè pA_1 e qA^2 sono simili rispetto a pB_1 e qB' a causa della corrispondenza metrica, il § 8 mostra che sarà

$$pB_1 \gtreqless qB' \text{ secondochè } pA_1 \gtreqless qA_2 ,$$

e che perciò, per questa relazione combinata con la (1), sarà contemporaneamente, qualunque sieno p e q interi,

$$pB_1 \gtreqless qB_2 \quad \text{e} \quad pB_1 \gtreqless qB'$$

ossia

$$B_2 \gtreqless \frac{p}{q} B_1 \quad \text{e} \quad B' \gtreqless \frac{p}{q} B_1 .$$

Ciò prova che $B_2 = B'$, giacchè o per convenienti p e q si ha insieme $B_2 = \frac{p}{q} B_1$ e $B' = \frac{p}{q} B_1$, o B_2 e B' sono limiti delle stesse serie convergenti formate con grandezze $\frac{p}{q} B_1$.

Si conclude che la corrispondenza $\begin{pmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B' \end{pmatrix}$ diviene $\begin{pmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{pmatrix}$, cioè:

« Se la coppia di grandezze A_1, A_2 corrisponde in una corri-
« spondenza metrica all'altra omogenea B_1, B_2, lo stesso avverrà
« delle altre coppie A_1, B_1 e A_2, B_2 ».

16. Il teorema precedente mostra che data la corrispondenza metrica

$$\begin{pmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & A_4, & \ldots \\ B_1, & B_2, & B_3, & B_4, & \ldots \end{pmatrix}$$

fra classi omogenee, poichè discendono da esse le altre

$$\begin{pmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1, & B_1 \\ A_3, & B_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1, & B_1 \\ A_4, & B_4 \end{pmatrix} \text{ ecc.,}$$

per la proprietà di una corrispondenza metrica (§ 10) B_1 e B_2 sono simili rispetto ad A_1, A_2, e così B_1, B_3 e B_1, B_4 ecc. sono simili rispettivamente rispetto ad A_1, A_3 ed A_1, A_4 ecc., cioè, più brevemente, B_1, B_2, B_3, B_4 ecc. sono simili rispetto ad A_1, A_2, A_3, A_4 ecc. e quindi:

« Date due classi omogenee in corrispondenza metrica in cui « sieno corrispondenti le grandezze A e B, secondochè B è del tipo « mA, $\frac{A}{n}$, $\frac{m}{n}A$ o $\lim \frac{m}{n}A$, altrettanto potrà dirsi di ogni altra « grandezza della 2ª classe rispetto alla corrispondente della 1ª, « coi medesimi numeri m ed n ».

(*Continua*).

R. Bettazzi.

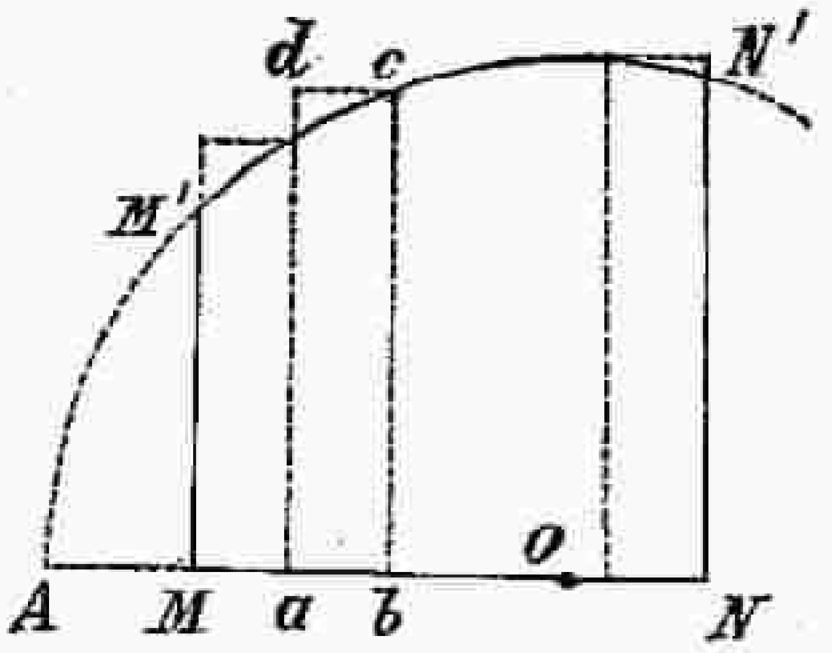
VOLUME DEL SEGMENTO SFERICO A DUE BASI

In una polemica recente che si legge nei fasc. 3, 4 e 5 della *Zeitschrift für math. u. naturwissenschaftlichen Unterricht*, dell'anno 1891, a proposito della determinazione del volume della sfera con applicazione del principio espresso dalla formola

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^m + 2^m + \dots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1} \qquad [1]$$

nel caso di m intero e positivo e limitatamente ad $m=1$ ed $m=2$, ed anche nella *Geometrie des Maasses* dello Schlömilch, dove è fatta larga applicazione del principio stesso alla determinazione del volume di corpi di rotazione, non trovo determinato direttamente il volume del segmento sferico a due basi qualsiasi, prescindendo da qualunque cognizione relativa a volumi di corpi sferici. È perciò che non mi è sembrato fuor di luogo mostrare, anche pel valore didattico intrinseco che la quistione presenta, con quali semplici artifici si possa giungere a ricavare sifatto volume in base al principio menzionato, potendosene poi dedurre come caso particolare quello del segmento sferico ad una base e della sfera.

Sia $MNN'M'$ un semisegmento circolare, d'altezza $MN = h$, appartenente ad un cerchio di raggio $AO = R$ e si indichino con r, r' le semicorde MM', NN' che lo limitano, insieme al segmento MN del diametro AO ed all'arco circolare $M'N'$. Nella sua rotazione intorno ad MN tale semisegmento circolare genera un segmento sferico a due basi di cui r, r' sono i raggi di queste basi, h l'altezza ed R il raggio della sfera a cui appartiene. Chiamisi $h_1 = AM$ la saetta del semiarco AM', che, dalla parte di MM', nella rotazione della figura intorno ad AO, verrebbe a completare la sfera e si supponga diviso MN in n parti uguali e condotte dai punti di divisione le perpendicolari ad MN a terminare all'arco $M'N'$. La distanza di due perpendicolari consecutive sarà $\frac{h}{n}$ e se per esse si completano i rettangoli come $abcd$, tirando dall'estremità della maggiore una parallela ad MN ad incontrare la minore, poi si immagina che la figura ruoti nuovamente intorno ad MN, il volume del segmento, senza entrare in discussioni ovvie della natura di quelle che si riscontrano in molti manuali di matematica, può considerarsi come il limite della somma dei cilindri generati dai rettangoli circoscritti al semisegmento circolare, allorchè il loro numero cresce oltre ogni limite.



Ora, indicando per brevità i raggi delle basi di tali cilindri con $r_1, r_2, \ldots\ldots r_n$ ed i loro volumi con $C_1, C_2, \ldots\ldots C_n$, poichè:

$$r_i^2 = \left(h_1 + \frac{ih}{n}\right)\left(2R - \left[h_1 + \frac{ih}{n}\right]\right) =$$

$$2Rh_1 + 2Rh \cdot \frac{i}{n} - h_1^2 - 2hh_1 \cdot \frac{i}{n} - h^2 \cdot \frac{i^2}{n^2},$$

si avrà:

$$C_1 = 2\pi Rhh_1 \cdot \frac{1}{n} + 2\pi Rh^2 \cdot \frac{1}{n^2} - \pi hh_1^2 \cdot \frac{1}{n} - 2\pi h^2 h_1 \cdot \frac{1}{n^2} - \pi h^3 \cdot \frac{1^2}{n^3},$$

$$C_2 = 2\pi Rhh_1 \cdot \frac{1}{n} + 2\pi Rh^2 \cdot \frac{2}{n^2} - \pi hh_1^2 \cdot \frac{1}{n} - 2\pi h^2 h_1 \cdot \frac{2}{n^2} - \pi h^3 \cdot \frac{2^2}{n^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_n = 2\pi Rhh_1 \cdot \frac{1}{n} + 2\pi Rh^2 \cdot \frac{n}{n^2} - \pi hh_1^2 \cdot \frac{1}{n} - 2\pi h^2 h_1 \cdot \frac{n}{n^2} - \pi h^3 \cdot \frac{n^2}{n^3}.$$

Sommando membro a membro, risulta:

$$\Sigma C = 2\pi R h h_1 - \pi h h_1^2 + \left(2\pi R h^2 - 2\pi h^2 h_1\right)\frac{1+2+\dots n}{n^2} - \pi h^3 \frac{1^2+2^2+\dots n^2}{n^3}$$

e ponendo mente che per la [1] si ha: $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1+2+\dots\dots n}{n^2} = \dfrac{1}{2}$,

$\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1^2+2^2+\dots\dots n^2}{n^3} = \dfrac{1}{3}$, si ottiene, in seguito a teoremi noti sui limiti:

$$\lim_{n=\infty} \Sigma C = 2\pi R h h_1 - \pi h h_1^2 + 2\pi R h^2 \cdot \frac{1}{2} - 2\pi h^2 h_1 \cdot \frac{1}{2} - \pi h^3 \cdot \frac{1}{3},$$

che è la formola esprimente il volume del segmento sferico a due basi, in funzione di h, h_1 ed R.

Per ridurla alla forma ordinaria si osservi che essa può scriversi successivamente così:

$$\begin{aligned}
\text{Vol. seg.} &= \frac{2\pi R h h_1 - \pi h h_1^2}{2} + \frac{2\pi R h^2 + 2\pi R h h_1}{2} - \frac{\pi h^3 + 2\pi h^2 h_1 + \pi h h_1^2}{2} + \frac{\pi h^3}{6} \\
&= \pi h \frac{h_1(2R - h_1)}{2} + \pi h \frac{2R(h+h_1)}{2} - \pi h \frac{(h+h_1)^2}{2} + \frac{\pi h^3}{6} \\
&= \pi h \frac{h_1(2R - h_1)}{2} + \pi h \frac{(h+h_1)(2R - [h+h_1])}{2} + \frac{\pi h^3}{6}.
\end{aligned}$$

Ma $h_1(2R - h_1) = r^2$, $(h+h_1)(2R - [h+h_1]) = r'^2$, talchè ad esprimere il volume cercato si ha in ultimo la formola:

$$\frac{\pi r^2 + \pi r'^2}{2} \cdot h + \frac{\pi h^3}{3}.$$

Nota. Dimostrazioni della relazione [1], per m intero e positivo qualunque, possono leggersi a p. 108-109 della 2ª parte della *Geometria della misura* dello Schlömilch, a p. 60-61 del II vol. del *Trattato di Alg. elem.* del Prof. Garbieri, ed anche nell'art. del Prof. Giudice: *Sui limiti*, pubblicato nel 6° vol. di questo Periodico, fas. II a V.

Del resto pei casi speciali di $m = 1$ ed $m = 2$ se ne può dare la dimostrazione ovvia che brevemente accenno. Si ha:

$$\begin{gathered}
n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1 \\
(n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 \\
1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1
\end{gathered}$$

e sommando membro a membro :

$$n^3 = 3\,(1^2 + 2^2 + \ldots\ldots n^2) - 3\,(1 + 2 + \ldots\ldots n) + n.$$

Ma $1 + 2 + \ldots\ldots n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$, onde :

$$1^2 + 2^2 + \ldots\ldots n^2 = \frac{n^3 - n}{3} + \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6},$$

risulta quindi, per n tendente all' infinito :

$$\lim \frac{1 + 2 + \ldots\ldots n}{n^2} = \frac{1}{2} \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\lim \frac{1^2 + 2^2 + \ldots\ldots n^2}{n^3} = \frac{1}{6} \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

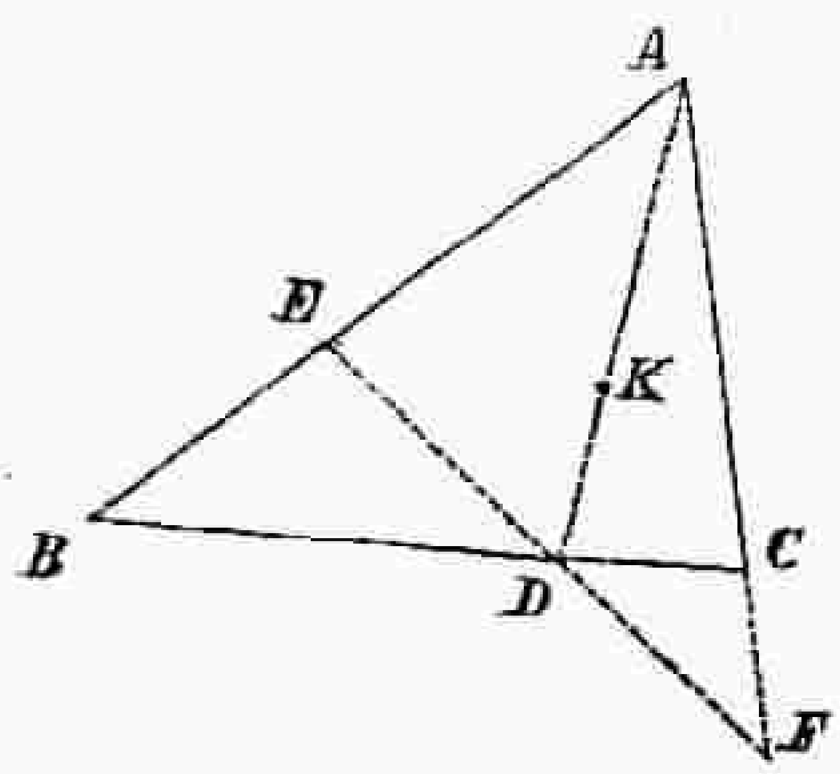
A. Lugli.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

THIRY (Cl.) — *Distances des points remarquables du triangle.* – Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 3e série, t. XXI, pp. 471-481, 1891.

In questa nota, per la maggior parte estratta dal libro « *Applications remarquables du théorème de Stewart...* », di cui demmo ragguaglio nella rivista bibliografica dell'ultimo fas. di questo periodico, l'A. raccoglie alcuni risultati notevoli, molti dei quali aventi tratto colla recente geometria del triangolo, che reputo opportuno riassumere premessi alcuni schiarimenti per comodo del lettore.

1. Sia K il punto di Lemoine del triangolo ABC, D il punto in cui AK incontra BC, EDF l'antiparallela a BC passante per D. Sarà $ED = DF$. (Cfr. *Alcuni teo. della rec. geo. del triangolo*, Per., 1891, p. 23, n.° 2).



Dai triangoli ABD, AED, aventi in comune il vertice D e le basi sulla stessa retta, si ha: $\Delta ABD : \Delta AED = AB : AE$ e per la stessa ragione $\Delta ADF : \Delta ADC = AF : AC$ e poichè i due triangoli AED, ADF sono equivalenti, segue:

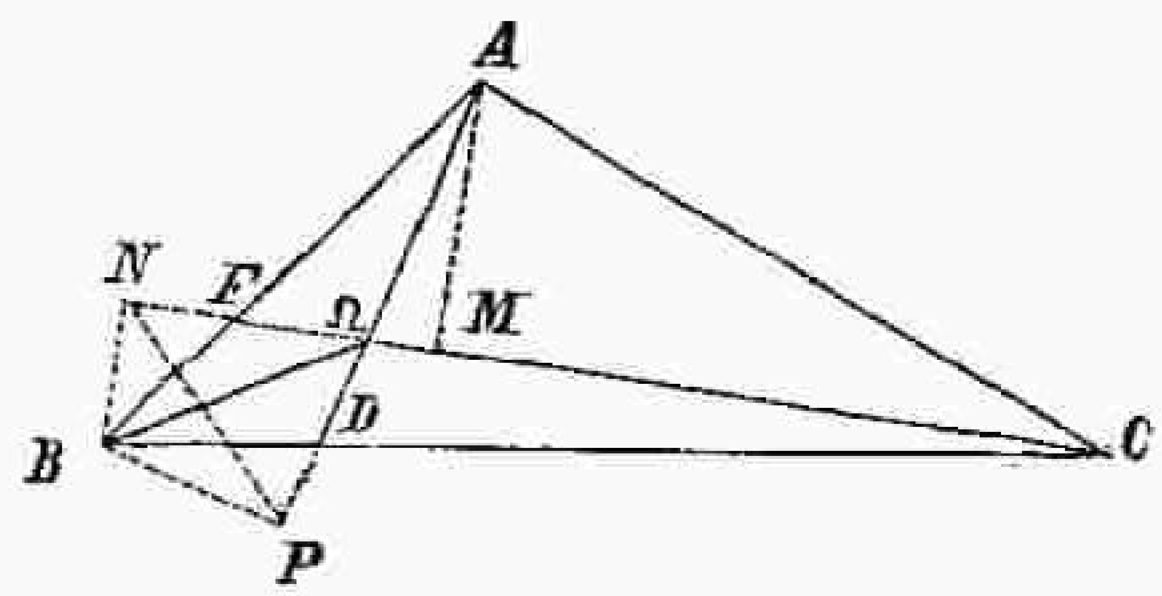
$$\Delta ABD : \Delta ADC = (AB\,.\,AF) : (AE\,.\,AC).$$

Ora perchè i triangoli ABC, AFE sono equiangoli risulta $AF : AE = AB : AC$, talchè, sostituendo nella proporzione ultima, risulta :

$$\Delta ABD : \Delta ADC = BD : DC = (AB\,.\,AB) : (AC\,.\,AC) = c^2 : b^2,$$

cosicchè *la simediana di ciascun lato d'un triangolo divide il lato stesso in due segmenti proporzionali ai quadrati dei lati adiacenti.*

2. Sia, nel triangolo ABC, Ω il punto positivo di Brocard, per modo che ang. $\Omega BC = \Omega CA = \Omega AB = \omega$ (nota cit., n. 8), F il punto in cui $C\Omega$ incontra AB e debbasi determinare, in funzione dei lati di ABC, il rapporto $AF : FB$. Condotte AM, BN perpendicolari a $C\Omega$ e BP, perpendicolare ad $A\Omega$ e tirata NP, si avrà $AF : FB = AM : BN$ e il quadrilatero $BP\Omega N$ risulterà inscrittibile. Ora i triangoli rettangoli MCA, PAB sono simili, ed avendosi ang. $C\Omega B = 180° - C$, ang. $B\Omega A = 180° - B$, e conseguentemente ang. $B\Omega N = BPN = C$, ang. $P\Omega B = PNB = B$, risulterà il triangolo BNP simile ad ABC. Si hanno così le proporzioni $AM : BP = b : c$, $BP : BN = b : c$, donde



$$AF : FB = AM : BN = b^2 : c^2 = c^{-2} : b^{-2}. \quad (*)$$

In modo analogo, chiamando D il piede di $A\Omega$ su BC ed E il piede di $B\Omega$ su CA, si otterrebbe:

$$BD : DC = c^2 : a^2 \qquad CE : EA = a^2 : b^2.$$

Se invece siano Ω' il punto negativo di Brocard del triangolo ABC e D', E', F' i piedi di $A\Omega'$, $B\Omega'$, $C\Omega'$, si ha:

$$BD' : D'C = a^2 : b^2; \quad CE' : E'A = b^2 : c^2; \quad AF' : F'B = c^2 : a^2.$$

3. Nell'ultima figura si applichi al triangolo ABD il teorema di Menelao, considerando FC come trasversale. Segue:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{D\Omega}{\Omega A} = \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{c^2 + a^2}{a^2} \cdot \frac{D\Omega}{\Omega A} = 1,$$

(*) La determinazione di questo e del precedente rapporto risulta altrettanto facilmente coll'uso della trigonometria. Infatti dalla 1ª figura si ha:

$$BD : AD = \text{sen}\, DAB : \text{sen}\, B, \qquad AD : DE = \text{sen}\, AED\ (= \text{sen}\, C) : \text{sen}\, DAB,$$

quindi $BD : DE = \text{sen}\, C : \text{sen}\, B$. Analogamente $DF : DC = \text{sen}\, C : \text{sen}\, B$. Concludendo $BD : DC = \text{sen}^2 C : \text{sen}^2 B = c^2 : b^2$.

Dalla 2ª fig. si ha: $AF : FB = \text{tri.}\ \Omega CA : \text{tri.}\ \Omega BC = (\Omega C \cdot b) : (\Omega B \cdot a)$. Ora dal triangolo ΩBC risulta $\Omega B : \Omega C = \text{sen}\,(C - \omega) : \text{sen}\,\omega = (\text{sen}\, C \cos\omega - \cos C\, \text{sen}\,\omega) : \text{sen}\,\omega = \text{sen}\, C \cdot \cot\omega - \cos C$. Ma (no. cit. n° 9) $\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$, sicchè:

$$\Omega B : \Omega C = \text{sen}\, C\,(\cot A + \cot B) = \text{sen}\, C \frac{\text{sen}\,(A + B)}{\text{sen}\, A\, \text{sen}\, B} = \frac{\text{sen}^2 C}{\text{sen}\, A\, \text{sen}\, B} = c^2 : ab.$$

Sostituendo questo valore del rapporto $\Omega B : \Omega C$ nella prima proporzione, si ottiene infine:

$$AF : FB = (ab \cdot b) : (c^2 \cdot a) = b^2 : c^2.$$

onde

$$\frac{A\Omega}{\Omega D} = \frac{b^2 c^2 + b^2 a^2}{a^2 c^2}.$$

Applicando invece al triangolo ABC il teorema di Stewart, considerando AD come trasversale, si ha: $c^2 . DC + b^2 . BD = \overline{AD}^2 . BC + DC . BD . BC$, o, per essere $BD : DC : BC = c^2 : a^2 : c^2 + a^2$,

$$c^2 \cdot \frac{a^2}{c^2 + a^2} + b^2 \cdot \frac{c^2}{c^2 + a^2} = \overline{AD}^2 + \frac{a^2 c^2 . a^2}{(c^2 + a^2)^2},$$

da cui:

$$\overline{AD}^2 = \frac{(a^2 c^2 + b^2 c^2)(c^2 + a^2) - a^4 c^2}{(c^2 + a^2)^2} = \frac{c^2 \,\Sigma\, a^2 b^2}{(c^2 + a^2)^2},$$

avendo posto $\Sigma\, a^2 b^2 = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2$.

Finalmente per essere $\overline{A\Omega}^2 : \overline{\Omega D}^2 : \overline{AD}^2 = (b^2 a^2 + b^2 c^2)^2 : (a^2 c^2)^2 : (\Sigma\, a^2 b^2)^2$, consegue

$$\overline{A\Omega}^2 = \frac{(b^2 a^2 + b^2 c^2)^2 . \overline{AD}^2}{(\Sigma\, a^2 b^2)^2} = \frac{b^4 . (a^2 + c^2)^2 . c^2 . \Sigma\, a^2 b^2}{(\Sigma\, a^2 b^2)^2 . (c^2 + a^2)^2} = \frac{b^4 c^2}{\Sigma\, a^2 b^2}.$$

Similmente ricavasi:

$$\overline{B\Omega}^2 = \frac{c^4 a^2}{\Sigma\, a^2 b^2} \; ; \qquad \overline{C\Omega}^2 = \frac{a^4 b^2}{\Sigma\, a^2 b^2}.$$

Collo stesso procedimento si perviene alle formole:

$$\overline{A\Omega'}^2 = \frac{c^4 b^2}{\Sigma\, a^2 b^2}, \qquad \overline{B\Omega'}^2 = \frac{a^4 c^2}{\Sigma\, a^2 b^2}, \qquad \overline{C\Omega'}^2 = \frac{b^4 a^2}{\Sigma\, a^2 b^2}.$$

4. Siano ora A_1, B_1, C_1 punti interni dei lati BC, CA, AB del triangolo ABC, tali che si abbia $\frac{BA_1}{A_1 C} = \frac{c^n}{b^n}$, $\frac{CB_1}{B_1 A} = \frac{a^n}{c^n}$, $\frac{AC_1}{C_1 B} = \frac{b^n}{a^n}$, poichè in tal caso $\frac{BA_1}{A_1 C} \cdot \frac{CB_1}{B_1 A} \cdot \frac{AC_1}{C_1 B} = 1$, il teorema di Ceva c'insegna che le tre rette AA_1, BB_1, CC_1 concorrono in uno stesso punto che il Sig. Thiry designa colla lettera K_n.

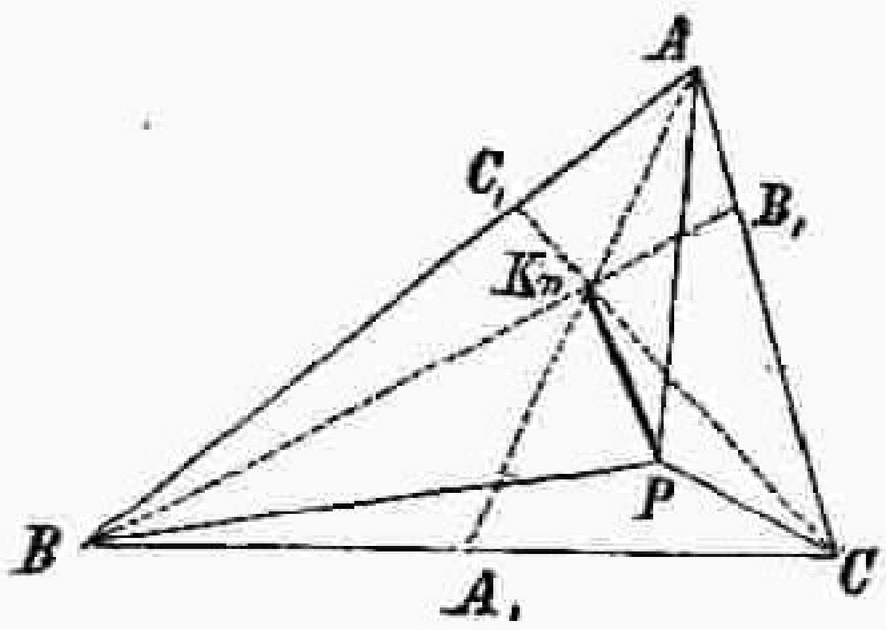
Se poi in questa stessa figura, analogamente a quanto si fece precedentemente, si applica al triangolo ABA_1 il teorema di Menelao, considerando CC_1 come trasversale, si ha:

$$\frac{AK_n}{K_n A_1} \cdot \frac{A_1 C}{CB} \cdot \frac{BC_1}{C_1 A} = \frac{AK_n}{K_n A_1} \cdot \frac{b^n}{b^n + c^n} \cdot \frac{a^n}{b^n} = 1,$$

donde $AK_n : K_n A_1 = (b^n + c^n) : a^n$.

5. Ciò premesso passeremo ad indicare il modo seguito dal Sig. Thiry per ricavare la formola che dà la distanza del punto K_n ad un punto qualsiasi P interno al triangolo, note che siano PA, PB, PC.

Applicando il teorema di Stewart successivamente ai triangoli APA_1, BPC, ABC, in causa di $BA_1 : A_1C = c^n : b^n$ e $AK_n : K_nA_1 = (b^n + c^n) : a^n$, si ha:



$$a^n . \overline{PA}^2 + (b^n + c^n) . \overline{PA_1}^2 =$$
$$(a^n + b^n + c^n) . \overline{PK_n}^2 + \frac{a^n (b^n + c^n)}{a^n + b^n + c^n} . \overline{AA_1}^2$$

$$b^n . \overline{PB}^2 + c^n . \overline{PC}^2 = (b^n + c^n) . \overline{PA_1}^2 + \frac{b^n c^n}{b^n + c^n} . a^2$$

$$b^n . c^2 + c^n . b^2 = (b^n + c^n) . \overline{AA_1}^2 + \frac{b^n c^n}{b^n + c^n} . a^2,$$

da cui, eliminando PA_1 ed AA_1 si deduce la relazione cercata (*), che può scriversi brevemente così:

$$[1] \quad \overline{PK_n}^2 = \frac{\Sigma a^n \overline{PA}^2}{\Sigma a^n} - \left(\frac{abc}{\Sigma a^n}\right)^2 . \Sigma a^{n-2} b^{n-2} = \frac{\Sigma a^n \overline{PA}^2}{\Sigma a^n} - C_n,$$

rappresentando C_n una costante indipendente dalla posizione del punto P.

6. Indichino, come al solito, O, R il centro e il raggio del cerchio circoscritto, I il centro del cerchio inscritto, G il baricentro, H l'ortocentro del triangolo ABC.

Supponendo che il punto P cada successivamente in O, H, Ω, Ω' e tenendo conto che in tal caso si ha successivamente $AP = BP = CP = R$; $\overline{AP}^2 = \overline{AH}^2 = 4R^2 - a^2, \ldots\ldots\ldots;$ $\overline{AP}^2 = \overline{A\Omega}^2 = \dfrac{b^4 c^2}{\Sigma a^2 b^2}, \ldots\ldots\ldots;$ $\overline{AP}^2 = \overline{A\Omega'}^2 = \dfrac{c^4 b^2}{\Sigma a^2 b^2}, \ldots\ldots\ldots$ poi facendo $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ nella [1], con che si viene a supporre che K_n divenga il baricentro G, il centro del cerchio inscritto I e il punto K di Lemoine del triangolo ABC, il Sig. Thiry giunge alle formole notabili seguenti, di facile deduzione:

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}, \quad \overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr, \quad \overline{OK}^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2};$$

$$\overline{HG}^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2) = 4\,\overline{OG}^2, \quad \overline{HI}^2 = 4R^2 - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} - 2Rr,$$

$$\overline{HK}^2 = 4R^2 - \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2};$$

$$\overline{\Omega G}^2 = \frac{a^4 b^2 + b^4 c^2 + c^4 a^2}{3 \Sigma a^2 b^2} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9},$$

(*) Cfr. *Periodico*, vol. VI, pag. 197.

$$\overline{\Omega I}^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{\Sigma a^2 b^2 . 2p}\left[\frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c}\right] - 2Rr =$$
$$\frac{2Rr}{\Sigma a^2 b^2}\left[a^2 b (a-b) + b^2 c (b-c) + c^2 a (c-a)\right],$$

$$\overline{\Omega K}^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{\Sigma a^2 b^2} - \frac{3 a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} = \overline{\Omega' K}^2,$$

alle quali altre ne aggiunge per esprimere GK, IK, IG.

7. Nella stessa memoria, supponendo che M sia un punto della base BC del triangolo ABC e T_a un punto di AM, tali che $BM : MC = m : n$; $AT_a : T_a M = \alpha : \beta$, l'A., applicando il teorema di Stewart successivamente ai triangoli AOM, BOC, ABC, dove O è sempre il circumcentro di ABC, ricava l'altra formola:

$$\overline{OT_a}^2 = R^2 - \frac{\alpha}{(m+n)(\alpha+\beta)^2}\left[\frac{mn\alpha}{m+n} a^2 + \beta (mb^2 + nc^2)\right]$$

della qnale fa alcune applicazioni fra le quali è degna di nota quella per cui viene a determinarsi $\overline{O\Omega}^2 = R^2 - \frac{a^2 b^2 c^2}{\Sigma a^2 b^2} = \overline{O\Omega'}^2$. Inoltre esso determina, applicando sempre tre volte il teorema di Stewart, in modo facile a comprendersi, direttamente ΩH, che viene dato dalla formola:

$$\overline{\Omega H}^2 = 4R^2 - \frac{(a^2 b^2 c^2 + a^2 b^4 + b^2 c^4 + c^2 a^4)}{\Sigma a^2 b^2} =$$
$$\frac{R^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2 - (a^2 b^4 + b^2 c^4 + c^2 a^4)}{\Sigma a^2 b^2}$$

ed osserva che con metodo analogo possono determinarsi altre distanze fra le quali OH, $O\Omega$, GI, GK, $G\Omega$, IK, $K\Omega$, ...

Finalmente nel § ultimo sono notate alcune conseguenze interessanti delle formole ottenute.

A. Lugli.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 84 e 102

84. *Dimostrare che, se* p *è un numero primo, e se* D *e* λ *sono due numeri interi non divisibili per* p, *la congruenza*

$$x^2 - D y^2 \equiv \lambda \ (mod.\ p)$$

ammette $\frac{p-1}{2}$ *soluzioni quando la congruenza*

$$z^2 \equiv D \ (mod.\ p)$$

è risolubile, e ne ammette $\frac{p+1}{2}$ *nel caso contrario.*

Avvertenza. - Una soluzione $(x=\alpha,\ y=\beta)$ si consideri come identica all'altra $(x=-\alpha,\ y=-\beta)$; epperò due soluzioni siffatte si contino per una sola.

(G. Frattini).

Dimostrazione del Sig. Prof. *F. Viaggi.*

La quistione si riduce a trovare le soluzioni per valori d' x ed y compresi tra 0 e $\frac{p-1}{2}$ (i limiti inclusi), le quali chiameremo *soluzioni positive* e indicheremo s. p.: a ciascuna di queste, in generale, corrispondono due soluzioni distinte, a' sensi dell'avvertenza, le quali si ottengono premettendo ad una delle radici il segno doppio $\pm$; ne corrisponde una sola, quando il valore d'una radice è 0.

A semplificare la ricerca ricorderemo, completandole, alcune proprietà dei numeri.

I numeri $1, 2, \ldots. p-1$, inferiori al numero primo p, si separano in $\frac{p-1}{2}$ coppie di numeri diseguali *coniugati*, tali che il prodotto dei numeri di una stessa coppia sia congruo con λ, se λ è non-residuo di p; e in $\frac{p-3}{2}$ di tali coppie e in due numeri, ciascuno coniugato con se stesso, se λ è residuo. Una coppia è individuata da un suo elemento. (Cfr. Dirichlet: *T. dei N.* § 34). Sieno r, s elementi di una coppia (eguali o no), $p-r$, $p-s$ sono pure elementi coniugati d'un'altra coppia, che chiameremo *complementare* della precedente. Se il numero di coppie è dispari, almeno una di esse dev' essere complementare di sè stessa, quindi i suoi elementi hanno per somma p; ed evidentemente se la somma di due numeri coniugati è p, essi formano una coppia complementare di se stessa.

Dimostriamo che di tali coppie non può essercene più di una. E invero, se (r, s), (r', s') sono due coppie, ciascuna complementare di se stessa, sussistono le relazioni

$$r+s=p \qquad r'+s'=p$$
$$rs \equiv r's' \pmod{p};$$

ora dalla eguaglianza $(r+s)^2=(r'+s')^2$ si sottragga la congruenza moltiplicata per 4, si ottiene

$$(r-s)^2 \equiv (r'-s')^2 \pmod{p}$$

donde

$$(r+r'-s-s')(r-r'-s+s') \equiv 0.$$

Perciò, o

$$r-r'-s+s' \equiv 0,$$

oppure

$$r+r'-s-s' \equiv 0.$$

Nella prima ipotesi, essendo ancora

$$r-r'+s-s'=0,$$

si concluderà che $r \equiv r'$, $s \equiv s'$. Nella seconda ipotesi, avendosi inoltre

$$r+r'+s+s'=2p \equiv 0,$$

si concluderà che $r \equiv -r' \equiv s'$; $s \equiv -s' \equiv r'$. In ambedue i casi le coppie (r, s) (r', s') saranno identiche.

Ed ora veniamo alla quistione.

1° Caso. — *D* **residuo quadratico.**

Sia h una delle due radici della congruenza $z^2 \equiv D$ (mod. p) la congruenza da risolvere sarà equivalente all'altra

$$(x + hy)(x - hy) \equiv \lambda \text{ (mod. } p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

Le soluzioni d'uno dei quattro sistemi di congruenze

$$x \pm hy \equiv \pm r \qquad x \mp hy \equiv \pm s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [2]$$

(nelle quali si corrispondono i segni ambigui dei primi membri fra loro, e fra loro quelli dei secondi; ed r, s sono due qualunque numeri coniugati) sono soluzioni della [1]; e, reciprocamente, le soluzioni della [1] sono soluzioni di uno dei sistemi [2], quando si prenda la coppia (r, s) in tutti i modi possibili.

Combinando le [2] per addizione e sottrazione, e tenendo presente il teorema di Fermat, le soluzioni dei quattro sistemi [2] sono

$$x \equiv \pm (r + s) \,.\, 2^{p-2} \qquad y \equiv \pm (r - s) \,.\, (2\,h)^{p-2} \quad \ldots\ldots [3]$$

(nelle quali i segni ambigui sono indipendenti fra loro).

In generale, i numeri eguali e di segno contrario $\pm (r + s) \,.\, 2^{p-2}$ sono congrui con due numeri positivi, che hanno per somma p, quindi uno solo di questi è $\leqq \frac{p-1}{2}$; essi sono congrui con 0, se $r + s = p$. Così $\pm (r - s) \,.\, (2\,h)^{p-2}$ sono congrui a due numeri positivi, di cui uno solo è $\leqq \frac{p-1}{2}$, se $r \gtrless s$, e al solo numero 0, se $r = s$. Il che mostra che le [3] forniscono una sola s. p., e che una delle radici acquista il valore 0, quando la coppia adoprata è complementare di se stessa, o composta di numeri eguali.

Se in luogo della coppia (r, s) si adopera la complementare, di leggieri si scorge che le soluzioni fornite da [3] sono le stesse. Reciprocamente, se le coppie (r, s) ed (r', s') danno le stesse radici, o sono identiche o complementari: infatti se le soluzioni sono le stesse da [3] si deducono le congrueze

$$r + s \equiv \pm (r' + s'), \qquad r - s \equiv \pm (r' - s') \text{ (mod. } p)$$

donde, addizionando e semplificando,

$$r \equiv \pm r' \qquad \text{oppure} \qquad r \equiv \pm s'$$

e in corrispondenza

$$s \equiv \pm s' \qquad \text{oppure} \qquad s \equiv \pm r'$$

Premesse queste cose:

$$\text{se} \qquad p = 4n + 1 \qquad \text{e } \lambda \text{ residuo di } p,$$

le due coppie complementari, ciascuna di numeri eguali, forniscono 1 s. p. con $y = 0$; una coppia complementare di se stessa fornisce 1 s. p. con $x = 0$; le rimanenti $2n-2$ a due a due complementari ne forniscono $n-1$: in tutto $1+1+2(n-1)=\frac{p-1}{2}$ soluzioni distinte;

se $p=4n+1$ e λ non-residuo di p,

le $2n$ coppie sono a due a due complementari e danno n s. p.: cioè $2n=\frac{p-1}{2}$ soluzioni;

se $p=4n+3$ e λ residuo di p,

le due coppie complementari, ciascuna di elementi eguali, danno 1 s. p. con $y=0$; le rimanenti $2n$ coppie ne danno n: in tutto $1+2n=\frac{p-1}{2}$ soluzioni;

se $p=4n+3$ e λ non residuo di p,

la coppia complementare di se stessa fornisce 1 s. p. con $x=0$; le rimanenti $2n$ ne forniscono n: in tutto $1+2n=\frac{p-1}{2}$. Rimane così dimostrata la prima parte del teorema.

Ove si ricordi che λ e $-\lambda$ hanno lo stesso carattere o carattere diverso, secondo che p è della forma $4n+1$ o $4n+3$, dall'esame precedente può anche dedursi che « il numero di soluzioni positive è

$$\frac{1}{4}\left[p+1+\left(\frac{\lambda}{p}\right)+\left(\frac{-\lambda}{p}\right)\right] \text{»}$$

nella quale espressione s'è adoperato il simbolo di Legendre.

Dei risultati ottenuti facciamo un'applicazione utile in prosieguo.

Dei valori $0, 1, 2, \ldots\ldots, \frac{p-1}{2}$, successivamente attribuiti ad x, tanti rendono zero o residuo la differenza $x^2-\lambda$, quante sono le s. p. della $x^2-y^2\equiv\lambda$; quindi quelli che la rendono non-residuo sono in numero di $\frac{p+1}{4}-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\lambda}{p}\right)+\left(\frac{-\lambda}{p}\right)\right]$; tra i non-residui potrà presentarsi o no $-\lambda$ e, tenendo conto da parte di questo, possiamo conchiudere che: « il valore 0 attribuito ad x, trasforma $x^2-\lambda$ in $\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{-\lambda}{p}\right)\right]$ non residuo, e i valori $1, 2, \ldots., \frac{p-1}{2}$ « in $\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right]$ valore nullo e $\frac{p-1}{4}+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{-\lambda}{p}\right)-\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right]$ non « residui ».

2° *Caso.* — D non residuo di p.

La congruenza proposta, in tutti i casi, è equivalente alla seguente

$$y^2\equiv(x^2-\lambda)\,D^{p-2} \pmod{p}$$

perchè $D\,.\,D^{p-2}\equiv 1$; e per questo nel caso presente, pure D^{p-2} è non-residuo epperò il 2° membro sarà congruo con 0 o residuo, se il primo fattore è congruo con 0 o non-residuo; ora badando che 0 se rende $x^2 - \lambda$ non-residuo dà luogo a 1 soluzione, ogni altro valore che la renda tale dà luogo a 2 soluzioni, e il valore che l'annulli dà luogo a 1 soluzione della congruenza (scelti sempre i valori d'x tra 0 e $\frac{p-1}{2}$), si deduce che il numero di soluzioni è

$$\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{-\lambda}{p}\right)\right]+\frac{p-1}{2}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{-\lambda}{p}\right)-\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right]=\frac{p+1}{2}.$$

E così rimane dimostrata la seconda parte del teorema.

Il numero di soluzioni positive è, in questo 2° caso,

$$\frac{1}{4}\left[p+3+\left(\frac{\lambda}{p}\right)-\left(\frac{-\lambda}{p}\right)\right]$$

e, in tutti i casi,

$$\frac{1}{4}\left[p+2-\left(\frac{D}{p}\right)+\left(\frac{\lambda}{p}\right)+\left(\frac{-\lambda D}{p}\right)\right].$$

Soluzione del Prof. *U. Scarpis.*

Lemma. « Se $\mu=\frac{p-1}{2}$ e D_1, D_2 .... D_μ sono i residui quadratici di p si ha:

$$[1] \qquad \sum_r (D_r-\lambda)^\mu \equiv \mu+(-1)^\mu \cdot \mu\lambda^\mu. \text{ »} \quad (*)$$

Sviluppando e sommando rispetto ad r si ha:

$$[2] \quad \sum_r (D_r-\lambda)^\mu = \sum_r D_r^\mu - \binom{\mu}{1}\lambda \sum_r D_r^{\mu-1} + \ldots\ldots + (-1)^\mu \cdot \mu\lambda^\mu.$$

Se ora S_n è la somma delle potenze n^{esime} dei numeri 1, 2, 3, ... $(p-1)$, si ha: (*Serret–Algèbre Supérieure*, vol. 2°, n.° 302)

$$S_1 \equiv S_2 \equiv \ldots\ldots \equiv S_{p-2} \equiv 0, \qquad S_{p-1} \equiv p-1$$

ed essendo, com'è evidente:

$$S_2 \equiv 2\sum_r D_r, \quad S_4 \equiv 2\sum_r D_r^2, \ldots, S_{p-1} \equiv 2\sum_r D_r^\mu,$$

si ottengono le relazioni:

$$\sum_r D_r \equiv \sum_r D_r^2 \equiv \ldots\ldots \equiv \sum_r D_r^{\mu-1} \equiv 0, \quad \sum_r D_r^\mu \equiv \mu,$$

con le quali dalla [2] si passa alla [1].

Ciò premesso, osservando che, escluso il caso nel quale $D_r - \lambda$ sia divisibile per p, $(D_r-\lambda)^\mu$ è sempre congruo ad 1 o a -1 secondo che $D_r - \lambda$ è o no residuo di p, si deduce che dalla [1] potremo sapere quanti resti e non resti si trovino nella serie

$$[3] \qquad D_1-\lambda, \quad D_2-\lambda, \quad \ldots\ldots\ldots \quad D_\mu-\lambda$$

(*) Questa congruenza e tutte le seguenti s'intendono riferite al modulo p.

tanto che sia $\left(\frac{\lambda}{p}\right) - 1$ e quindi uno dei suoi termini divisibile per p, come pure nel caso che sia $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = -1$.

Distinguiamo ora i seguenti casi:

1°) μ numero pari e quindi $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = \left(\frac{-\lambda}{p}\right)$:

a) $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = 1$.

In questa ipotesi la [1] diviene: $\sum_r (D_r - \lambda)^\mu \equiv -1$ e si deduce quindi che nella serie [3] vi sono $\frac{p-5}{4}$ residui e $\frac{p-1}{4}$ non-residui, rammentando che uno dei suoi termini è divisibile per p, essendo λ, come residuo, congruo ad uno dei numeri $D_1, D_2, \ldots\ldots D_\mu$.

Facendo ora $x \equiv 0, 1, 2, \ldots\ldots (p-1)$, x^2, oltre ad un valore congruo a 0, assume pure μ valori diversi congrui ai resti $D_1, D_2, \ldots\ldots D_\mu$ e quindi il binomio $x^2 - \lambda$, oltre a due valori congrui rispettivamente a $0, -\lambda$, assume pure altri $\frac{p-5}{4}$ valori diversi $R_1, R_2, \ldots\ldots R_{\frac{p-5}{4}}$ che sono residui e $\frac{p-1}{4}$ valori $N_1, N_2, \ldots\ldots N_{\frac{p-1}{4}}$ non resti. Oltre a ciò poi, per una nota proprietà dei resti quadratici, il prodotto Dy^2, oltre ad essere congruo a 0 per $y \equiv 0$, ci darà costantemente un residuo od un non-residuo secondochè $z^2 \equiv D$ è o no possibile.

Se ora $z^2 \equiv D$ è possibile, cioè se $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$, indicando con $\pm\xi$, $\pm\eta$ rispettivamente le radici di $x^2 - \lambda \equiv 0$, $Dy^2 \equiv -\lambda$, e parimenti con $\pm\alpha_r$, $\pm\beta_r$ le radici di $x^2 - \lambda \equiv R_r$, $Dy^2 \equiv R_r$, si scorge che la proposta congruenza ha le $2\frac{p-5}{4} + 2 = \frac{p-1}{2}$ soluzioni $x \equiv \pm\xi$, $y \equiv 0$; $x \equiv 0$, $y \equiv \pm\eta$; $x \equiv \pm\alpha_r$, $y \equiv \pm\beta_r$; $x \equiv \mp\alpha_r$, $y \equiv \pm\beta_r$, per $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots \frac{p-5}{4}$ e contando per una due soluzioni eguali ed opposte.

Se invece $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, oltre $x \equiv \pm\xi$, $\eta \equiv 0$, vi sono pure le $2\frac{p-1}{4}$ soluzioni $x \equiv \pm\alpha_r$, $y \equiv \pm\beta_r$; $x \equiv \pm\alpha_r$, $y \equiv \mp\beta_r$; essendo $\pm\alpha_r$, $\pm\beta_r$ radici di $x^2 - \lambda \equiv N_r$; $Dy^2 \equiv N_r$ per $r = 1, 2, \ldots\ldots \frac{p-1}{4}$.

b) $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = -1$.

La [1] ci dà $\sum_r (D_r - \lambda)^\mu \equiv 0$, per cui in [3] vi sono $\frac{\mu}{2}$ residui ed altrettanti non-residui e quindi $x^2 - \lambda$, al variare di x da $x \equiv 0$ ad $x \equiv p-1$, assumerà, oltre ad un valore congruo a $-\lambda$ per $x \equiv 0$, $\frac{\mu}{2}$ valori $R_1, R_2, \ldots\ldots R_{\frac{\mu}{2}}$ residui ed altrettanti non-residui $N_1, N_2, \ldots\ldots N_{\frac{\mu}{2}}$.

Se ora $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$, la proposta congruenza avrà solo le $\frac{p-1}{2}$ soluzioni $x \equiv \pm \alpha_r$, $y \equiv \pm \beta_r$; $x \equiv \pm \alpha_r$, $y \equiv \mp \beta_r$, essendo $\pm \alpha_r$, $\pm \beta_r$ radici di $x^2 - \lambda \equiv R_r$, $Dy^2 \equiv R_r$ $\left(r = 1, 2, \ldots\ldots, \frac{p-1}{4}\right)$ inquantochè per $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = -1$ non è possibile la $x^2 - \lambda \equiv 0$.

Se all'incontro $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, oltre alla soluzione $x \equiv 0$, $y \equiv \pm \eta$, essendo $\pm \eta$ radice della $Dy^2 \equiv -\lambda$, possibile in questo caso, ne ammetterà altre $\frac{p-1}{2}$, $x \equiv \pm \alpha_r$, $y \equiv \pm \beta_r$; $x \equiv \pm \alpha_r$, $y \equiv \mp \beta_r$, essendo $\pm \alpha_r$, $\pm \beta_r$ radici di

$$x^2 - \lambda \equiv N_r, \quad Dy^2 \equiv N_r \quad \left(r = 1, 2, \ldots\ldots \frac{p-1}{4}\right).$$

In tutto quindi $\frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p+1}{2}$ soluzioni.

2°) μ dispari, $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = -\left(\frac{-\lambda}{p}\right)$:

a) $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = 1$.

La [1] diventa: $\sum_r (D_r - \lambda)^\mu \equiv 0$, per cui in [3], oltre ad un termine nullo, vi sono $\frac{\mu-1}{2} = \frac{p-3}{4}$ residui ed altrettanti non-residui, il che ci indica che $x^2 - \lambda$, al variare di x da $x \equiv 0$ ad $x \equiv p-1$, oltre ad un valore congruo a $-\lambda$ per $x \equiv 0$ ed un valore congruo a 0, assumerà pure $\frac{p-3}{4}$ valori $R_1, R_2, \ldots\ldots R_{\frac{p-3}{4}}$ residui, ed altrettanti $N_1, N_2, \ldots\ldots N_{\frac{p-3}{4}}$ non-residui.

Se ora $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$, e con $\pm \xi$ si indicano le radici di $x^2 - \lambda \equiv 0$, si scorge che, oltre alla soluzione $x \equiv \pm \xi$, $\eta \equiv 0$, abbiamo pure le soluzioni: $x \equiv \pm \alpha_r$, $y \equiv \pm \beta_r$; $x \equiv \pm \alpha_r$, $y \equiv \mp \beta_r$; essendo $\pm \alpha_r$, $\pm \beta_r$ radici di

$$x^2 - \lambda \equiv R_r, \quad Dy^2 \equiv R_r \quad \left(r = 1, 2, \ldots\ldots \frac{p-3}{4}\right)$$

vale a dire in tutto $2\,\frac{p-3}{4} + 1 = \frac{p-1}{2}$.

Se all'incontro $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, oltre alle soluzioni $x \equiv \pm \xi$, $y \equiv 0$; $x \equiv 0$, $y \equiv \pm \eta$, essendo $\pm \eta$ radice di $Dy^2 \equiv -\lambda$ possibile per essere $\left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{-\lambda}{p}\right)$, ve ne saranno pure altre $\frac{p-1}{2}$, com'è facile vedere riferendosi ai casi precedenti.

b) $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = -1$.

Valendoci nuovamente della [1] e tenendo sempre presente che per μ dispari λ e $-\lambda$ hanno carattere quadratico opposto, si deduce con lo stesso ragionamento precedentemente usato che se $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$, le soluzioni sono in numero di $\frac{p-3}{4} \cdot 2 + 1 = \frac{p-1}{2}$; ed in numero di $\frac{p+1}{4} \cdot 2 = \frac{p+1}{2}$, se $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$.

102. *Indicando col simbolo* $\binom{h}{r}$ *il numero delle combinazioni di* h *elementi presi* r *ad* r, *dimostrare che*

$$\sum_{i=0}^{i=k} \binom{m+i}{m} = \binom{m+k+1}{m+1}$$

e farne applicazione a mostrare che

$$\sum_{i=0}^{i=k} (1+2+\ldots\ldots+i) = \binom{k+2}{3}, \quad \sum_{i=1}^{i=k} i^2 = \binom{k+2}{3} + \binom{k+1}{3}.$$

(C. Marsengo Bastia).

Dimostrazione del Sig. Prof. *Giuseppe Bernardi* (*).

Per dimostrare la prima uguaglianza proposta osservo che quando si formano le $\binom{m+k+1}{m+1}$ combinazioni di $m+k+1$ elementi $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{m+k+1}$, presi $m+1$ ad $m+1$ secondo il loro ordine dato, ciascuna di esse termina con qualcuno dei $k+1$ elementi $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots\ldots, a_{m+k+1}$, e poichè in generale delle suddette combinazioni ve ne sono manifestamente tante che terminano coll'elemento a_{m+s} quante combinazioni si possono formare cogli $m+s-1$ elementi $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{m+s-1}$ che lo precedono, presi m ad m, cioè ve ne sono $\binom{m+s-1}{m}$, si deve avere necessariamente:

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \ldots\ldots + \binom{m+k}{m} = \binom{m+k+1}{m+1} \ldots \text{c. d. d.}$$

Per dimostrare poi la seconda uguaglianza proposta osservo che in conseguenza della nota relazione:

$$1+2+\ldots\ldots+i = \frac{(i+1)\,i}{2} = \binom{i+1}{2}$$

e della prima uguaglianza proposta si ottiene:

$$\sum_{i=0}^{i=k}(1+2+\ldots\ldots+i) = \sum_{i=0}^{i=k}\binom{i+1}{2} = \sum_{i=1}^{i=k}\binom{i+1}{2} =$$

$$\sum_{i-1=0}^{i-1=k-1}\binom{2+(i-1)}{2} = \binom{k+2}{3} \ldots\ldots\ldots \text{c. d. d.}$$

(*) Dimostrazioni poco dissimili pervennero dai Sigg. Prof. *L. Bosi, S. Catania, M. Martone, G. Rozzolino* e dal Sig. *F. Marlantoni* (studente nella R. Università di Roma).

Finalmente per dimostrare la terza eguaglianza proposta osservo che dall' identità:

$$i^2 = \frac{(i+1)\,i}{2} + \frac{i\,(i-1)}{2} = \binom{i+1}{2} + \binom{i}{2}$$

e dalla prima uguaglianza proposta consegue l'altra:

$$\sum_{i=1}^{i=k} i^2 = \sum_{i=1}^{i=k} \binom{i+1}{2} + \sum_{i=2}^{i=k} \binom{i}{2} = \sum_{i-1=0}^{i-1=k-1} \binom{2+(i-1)}{2} + \sum_{i-2=0}^{i-2=k-2} \binom{2+(i-2)}{2} = \binom{k+2}{3} + \binom{k+1}{3} \ldots\ldots \text{c. d. d.}$$

I Sigg. Prof. *L. Bosi* e *M. Martone*, fondandosi sulle relazioni

$$\sum_{i=1}^{i=k} i\,(k-i+1) = \sum_{i=0}^{i=k} (1+2+\ldots\ldots+i) = \binom{k+2}{3},$$

$$\sum_{i=1}^{i=k} i^n = (k+1) \sum_{i=1}^{i=k} i^{n-1} - \sum_{i=1}^{i=k} i^{n-1}\,(k-i+1)$$

e sul fatto che $\sum_{i=0}^{i=k} (1^n + 2^n + \ldots\ldots + i^n)$ può dedursi da $\sum_{i=1}^{i=k} i^n$ sommando l'espressione esprimente quest'ultima quantità, trovano poi formole analoghe alle ultime due della quistione per esprimere le somme delle successive potenze dei numeri naturali fino a k e le somme di queste somme, ossia:

$$\sum_{i=0}^{i=k} (1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + i^2) = \binom{k+2}{4} + \binom{k+3}{4},$$

$$\sum_{i=1}^{i=k} i^3 = \binom{k+1}{4} + 4\binom{k+2}{4} + \binom{k+3}{4},$$

$$\sum_{i=0}^{i=k} (1^3 + 2^3 + \ldots\ldots + i^3) = \binom{k+2}{5} + 4\binom{k+3}{5} + \binom{k+4}{5},$$

$$\sum_{i=1}^{i=k} i^4 = \binom{k+1}{5} + 11\binom{k+2}{5} + 11\binom{k+3}{5} + \binom{k+4}{5},$$

. . . .

Il primo di questi formola le seguenti leggi, verificabili per induzione, che presiedono alla formazione delle somme medesime:

1°. La somma $\sum_{i=1}^{i=k} i^n$ (dove n è un numero qualunque aritmetico intero) equivale alla somma degli n numeri

$$\binom{k+1}{n+1},\ \binom{k+2}{n+1},\ \ldots\ldots \binom{k+i}{n+1},\ \ldots\ldots \binom{k+n-1}{n+1},\ \binom{k+n}{n+1} \qquad [1]$$

moltiplicati per certi coefficienti che indicheremo con

$$C_1^{(n)},\quad C_2^{(n)},\ldots\ldots\quad C_i^{(n)},\ldots\ldots\quad C_{n-1}^{(n)},\quad C_n^{(n)},$$

e il primo e l'ultimo di questi coefficienti sono sempre eguali ad 1;

2ª. Dalla formola che dà $\sum_{i=1}^{i=k} i^n$ si ricava quella che dà $\left\{\sum_{i=0}^{i=k} (1^n+2^n+\dots+i^n)\right.$ col sostituire ordinatamente ai numeri [1] i numeri che seguono

$$\binom{k+2}{n+2},\ \binom{k+3}{n+2},\ \ldots\ \binom{k+i+1}{n+2},\ \ldots\ \binom{k+n}{n+2},\ \binom{k+n+1}{n+2};$$

3ª. Supposto $n > 2$, nella formola che dà $\sum_{i=1}^{i=k} i^n$ il coefficiente $C_i^{(n)}$ di un termine qualunque che non sia il primo nè l'ultimo si esprime in funzione di $C_{i-1}^{(n-1)}$ e $C_i^{(n-1)}$ (coefficienti dell' $i-1^{\text{esimo}}$ e dell' i^{esimo} termine dell'espressione che dà $\sum_{i=1}^{i=k} i^{n-1}$) mediante la relazione

$$C_i^{(n)} = (n-i+1)\,C_{i-1}^{(n-1)} + i\,C_i^{(n-1)}.$$

Sono pervenute inoltre le soluzioni seguenti: quistione **108**'. dal Sig. *E. Colonna, E. G. Ricci, G. Trapani*; **109**'. *G. Candido, F. Facciolli, E. G. Ricci, G. Trapani* — soluzioni alle quali verrà data evasione nei fascicoli venturi.

La Redazione.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

113. Dimostrare che l'equazione

$$A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0,$$

in cui è

$$\begin{aligned}
A_4 &= m^5 - l\,m^3 n + m^2 l^4,\\
A_3 &= 4\,m^4 n - 3\,l\,m^2 n^2 - 11\,m^3 l^3 + 2\,m\,n\,l^4,\\
A_2 &= 6\,m^3 n^2 - 3\,m\,n^3 l + 64\,m^4 l^2 - 49\,l^3 n\,m^2 + n^2 l^4,\\
A_1 &= 4\,m^2 n^3 - n^4 l + 128\,m^3 n\,l^2 - 65\,m\,n^2 l^3,\\
A_0 &= m\,n^4 + 64\,m^2 n^2 l^2 - 27\,l^3 n^3,
\end{aligned}$$

ha due radici eguali, ed esprimere queste e l'altre radici in funzioni di l, m, n.

D. Besso.

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

114. Si considerano tutte le frazioni, non inferiori all'unità, che hanno il numeratore uguale ad n ed il denominatore privo di fattori quadrati (diversi dall'unità). Dimostrare che la somma dei massimi numeri interi, i cui quadrati non superano le frazioni considerate, è uguale ad n.

115. Sia $\varphi(n)$ il numero dei numeri primi con n e non superiori ad n. Dimostrare che, se α, β, γ, ... sono tutti gli interi che entrano (esattamente o no) un numero dispari di volte in $2n$, si ha:

$$\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \varphi(\gamma) + \ldots\ldots = n^2.$$

116. Dimostrare che, se nella serie $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots$ si cambia il segno ad ogni termine il cui denominatore ha la forma $4k + 1$ ed è composto d'un numero dispari di fattori primi, uguali o disuguali, o ha la forma $4k - 1$ ed è composto d'un numero pari di tali fattori, la somma della serie che si ottiene è $\frac{\pi}{2}$. In altri termini

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \ldots = \frac{\pi}{2}.$$

117. Dimostrare che, se si cambiano i segni dei termini nella serie

$$\varphi(1) + \frac{\varphi(3)}{9} + \frac{\varphi(5)}{25} + \frac{\varphi(7)}{49} + \ldots.$$

seguendo la legge indicata nella precedente quistione, la somma della serie che si ottiene è uguale a

$$\frac{48}{\pi^3}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \ldots.\right).$$

E. Cesàro.

118. L'inviluppo dei lati dei triangoli iso-ortocentrici e iscritti in un dato cerchio è una conica concentrica e bitangente alla circonferenza dei nove punti, comune a tutti quei triangoli, e avente un fuoco nel comune ortocentro, e l'altro fuoco nel centro del dato cerchio.

S. Catania.

119. In un cerchio O siano OA, OB due raggi perpendicolari l'uno all'altro. Immaginando diviso il raggio AO in n parti uguali nei punti $A_1, A_2, \ldots\ldots A_{n-1}$, poi condotte le corde BA, BA_1B_1,

$BA_2B_2, \ldots . BA_{n-1}B_{n-1}$, dimostrare che la somma dei triangoli BAA_1, BB_1A_2, $BB_2A_3, \ldots . BB_{n-1}O$, quando n tende all'infinito, ha per limite il quadrante BOA.

A. Lugli.

120*. Nel piano d'un cerchio è dato un punto C. Dimostrare che vi sono, in generale, quattro triangoli equilateri ABC, ciascuno dei quali ha il lato AB tangente in B al dato cerchio e costruirli. I quattro vertici A sono per diritto.

S. Catania.

121*. Risolvere l'equazione

$$x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 5x + 1 = 0.$$

F. Giudice.

122*. Costruito sopra un raggio AB di un cerchio un triangolo equilatero ABC e condotta la congiungente dei punti di mezzo dei lati AC, BC, questa determina sull'arco BC un arco BM; trovare con quale approssimazione quest'arco rappresenta un quattordicesimo della circonferenza.

F. Palatini.

123*. Sull'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, esternamente ad esso, è costruito un quadrato. Se l'intera figura ruota intorno ad un cateto del triangolo, dimostrare che il volume generato dal quadrato è equivalente ad un cilindro retto avente per raggio di base l'ipotenusa e per altezza la somma dei cateti.

V. Correnti.

124*. Dato un cerchio, siano A, B, C, D, E, F i punti che lo dividono in sei parti uguali. Una retta AM ruoti nel piano del cerchio, intorno al punto A, incontrandolo in un punto variabile H. Dimostrare che tirata la corda HE, che incontra il diametro AD in I, e per I la perpendicolare IL a questo diametro, il luogo dei punti in cui IL incontra AM è la segante CD.

125*. Siano AD, AE le rette che dividono l'angolo retto di un triangolo rettangolo ABC in tre parti uguali, incontrando l'ipotenusa in D, E, dimostrare che si ha:

$$BE \,.\, DC = 3BD \,.\, EC.$$

S. Gatti.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

GIACOMO BELLACCHI. — *Lezioni di Algebra elementare.* — Parte seconda: Teoria dell'equazioni. — Firenze, Tip. Barbera, 1891. — Prezzo: L. 3.

Della prima parte: *Aritmetica generale,* si è tenuta parola in questo Periodico (an. V, fasc. III); ed ora a proposito della seconda si possono ripetere le osservazioni generali che si fecero allora.

Tutta l'opera, piuttosto che un corso d'Algebra, va considerata come una raccolta preziosa di esercizi maestrevolmente svolti. Con ciò non s'intenda che le teorie vi sono esposte monche o senza cura, perchè è da ritenere anzi proprio il contrario; ma se può accadere di trovar l'una o l'altra teoria trattata in alcuna delle nostre migliori Algebre in guisa più soddisfacente che in questa, sarà difficile trovare in altre esercizi più spinosi e trattati con maggior bravura: gli stessi problemi dei corrieri, delle fontane, degli orologi e dei treni, che si ripresentano fatalmente in ogni Algebra, in questa appaiono come ringiovaniti dall'abilità dell'illustre A.

Ma per dare al lettore un'idea adeguata del presente libro, sarà bene trascriverne l'indice particolareggiato.

LEZIONE I. — Equazioni ad un'incognita.

Definizioni e teoremi sull'equivalenza. Equazioni di primo grado.

Esercizi. — Identità numeriche ed equazioni riducibili al primo grado. Relazioni fra i lati, le diagonali di un quadrilatero circoscritto ed il raggio del cerchio.

LEZIONE II. — Equazioni irrazionali e forme singolari.

Equazioni con radicali ridotte a forma razionale, ed in alcuni casi al primo grado. Significati dei simboli $\frac{m}{0}$, $\frac{0}{0}$ per il valore dell'incognita.

Esercizi. — Ricerca dell'equazioni di forma intera e che hanno una data radice irrazionale.

LEZIONE III. — Analisi dei problemi.

La regola di Platone per l'analisi tradotta in simboli ed illustrata con esempi. Definizioni d'Euclide sovra i dati e i porismi. Cenno sul metodo della falsa posizione.

Esercizi. — Problemi sopra gl'interessi e gli sconti semplici, il moto uniforme, i pesi specifici, sulla corona di Gerone, ecc..

LEZIONE IV. — Proprietà euleriane del triangolo.

Distanza fra i centri O, I, I_a, I_b, I_c, dei cerchi circoscritto, inscritto, exinscritti ed il punto H comune alle altezze di un triangolo ABC; relazioni fra i lati dei triangoli IOH, ABC.

Esercizi — Circonferenza dei nove punti, ed altri luoghi geometrici; punti di Beltrami o di Lemoine e di Crelle o di Brocard.

Osservazioni. — Le interessanti proprietà contenute in questo capitolo sono state dimostrate, come era naturale in un'Algebra, con metodi algebrici: potrà essere utile ai giovani cercarne le dimostrazioni geometriche o trigonometriche. Badino inoltre i giovani che a proposito del punto di Beltrami, nel testo è solo dimostrato che le corde parallele ai lati condotte per esso hanno a due a due gli estremi conciclici, ma la dimostrazione agevole che i tre cerchi coincidono è lasciata alla loro diligenza.

Lezione V. — Determinanti delle funzioni lineari.

Nozioni sulle coordinate cartesiane e plucheriane. Sistemi equivalenti. Determinanti del secondo e terzo ordine; loro proprietà e cenno storico.

Esercizi. — Addizione e prodotto dei determinanti. Proprietà aritmetiche e geometriche espresse con determinanti.

Lezione VI. — Sistemi di equazioni lineari.

Teoremi fondamentali. I metodi della sostituzione, della riduzione allo stesso coefficiente e dei moltiplicatori indeterminati. Coordinate trimetriche d'un punto e di una retta; tetrametriche del punto e del piano.

Esercizi. — Sistemi speciali di n equazioni lineari. Problemi di primo grado a più incognite; quesiti del Fibonacci e del Pacioli, con cenni storici.

Lezione VII. — Discussione delle formole risolventi i sistemi di primo grado.

Le forme $\frac{m}{0}$, $\frac{0}{0}$ nell'equazioni lineari a più incognite, con esempi geometrici. Teoremi per la coesistenza e l'indeterminazione dei sistemi.

Esercizi. — Porismi d'Euclide. Equazioni di una punteggiata, d'un fascio di piani, di rette nello spazio, e condizioni del loro incontro. Teorema di Desargues. Stella di rette e spazio lineare a tre dimensioni, con la rappresentazione del Nicoli. Veri valori delle radici nell'equazioni di secondo, terzo e quarto grado aventi nullo al limite il coefficiente del primo termine.

Lezione VIII. — Interpretazione dei valori delle incognite.

Problemi e significato delle radici negative; costruzioni grafiche per le radici dell'equazioni di secondo grado.

Esercizi. — Le radici di un'equazione cubica derivante da un problema di Archimede interpretate da Poinsot (il problema è il seguente: con un piano segare una sfera in un dato rapporto); esempi simili. Problemi sopra le intensità luminose. Rapporto anarmonico e serie proiettive di punti.

Lezione IX. — Le diseguaglianze di primo grado.

Teoremi; regola di risoluzione ed esempi. Diseguaglianze a due variabili e loro rappresentazioni geometriche.

Esercizi. — Relazioni fra due lati e le bisettrici degli angoli opposti in un triangolo. Dimostrazione di Cauchy per il confronto fra le medie aritmetica e geometrica di n quantità positive. Numeri delle combinazioni binarie e ternarie di m elementi $a_1, a_2, \ldots, a_m$, con la somma degli indici minore di un numero dato. Teoremi aritmetici con dimostrazioni originali di Campano da Novara, di Fibonacci e di Fermat.

Lezione X. — Le diseguaglianze del secondo grado.

Teoremi principali e regole di risoluzione. Quesiti diversi sul triangolo: problema sul manometro.

Esercizi. — Polare comune a due cerchi. Parallelepipedo rettangolo di nota superficie e nota diagonale con uno spigolo medio armonico fra gli altri due. Incontro di due gravi ascendenti per la linea verticale. Cilindro massimo inscritto nello sferoide. Problemi di secondo grado risoluti da Bhascara.

Lezione XI. — La forma quadratica ternaria.

Riduzione di un polinomio quadrico ed omogeneo con tre variabili alla somma dei quadrati di tre funzioni lineari, e significato geometrico per le coordinate cartesiane e plucheriane. Semplici luoghi geometrici ed inviluppi.

Esercizi. — Altri luoghi geometrici di un punto ed inviluppi di rette. Genesi delle coniche trovata da Maclaurin, e porisma d'Euclide; proposizioni correlative di Pascal e Brianchon. Figure piane omologiche.

Lezione. XII. — Sistemi di equazioni quadriche.

Soluzione dei sistemi di una o due quadriche insieme ad $n - 1$ od $n - 2$ equazioni lineari. I punti e le tangenti comuni a due coniche si determinano risolvendo una quartica od una cubica. Costruzione delle radici di un'equazione di terzo o quarto grado mediante una circonferenza ed una parabola.

Esercizi. — Sistemi particolari di n equazioni quadriche ad n incognite. Formula del Sacchi per l'area del triangolo. Sistema di equazioni per esprimere i lati di un triangolo in funzione delle bisettrici degli angoli. Trisezione dell'arco circolare mediante l'iperbole; iscrizione degli ettagoni ed enneagoni regolari nel cerchio. Problema del Malfatti: inscrivere in un triangolo tre cerchi tangenti tra loro. Il cerchio osculatore e le sviluppate delle coniche; teoremi di Steiner e Joachimstahl.

Osservazione. — La soluzione del problema del Malfatti è la stessa che fu data dall'A, alquanto semplificata; i giovani iniziati nella trigonometria potranno con l'aiuto di questa semplificare ancora un po' la soluzione del prof. Bellacchi.

Ed ora dopo aver notato, nuovo pregio dell'opera le numerose ed interessanti note storiche, mi rimane da esaminare se questa possa o no essere adottata come libro di testo nelle nostre scuole secondarie.

L'A. opina di sì, se ho letto bene nell'avvertenza premessa alla seconda parte; io, senza contraddire recisamente, osservo che il suo libro presenta le seguenti difficoltà per un primo insegnamento d'Algebra: 1ª la quasi assoluta assenza di esercizi proposti da risolvere ma non risoluti; 2ª il frequente uso d'artifici speciali, che, mentre conferiscono all'eleganza della soluzione, sono insieme ostacolo al ribadirsi nella mente dei discepoli di quelle teorie generali, che si vogliono illustrare; 3ª un certo disordine per cui, a mo' d'esempio, nel I volume si risolvono le equazioni di 2°, 3° e 4° grado; e nel III si definisce l'equazione e si risolvono l'equazioni di 1° grado. Ma a queste piccole mende un insegnante volenteroso, che abbia da fare con una scolaresca volonterosa e intelligente, può facilmente trovare rimedio.

Termino col porgere al chiaro A. e in questo s'uniranno a me molti colleghi, vive azioni di grazia pel godimento avuto dalla lettura della sua opera.

F. Viaggi.

Prof. FRANCESCO PANIZZA. – *Aritmetica razionale.* – Ulrico Hoepli — Milano, 1891.

L'Aritmetica razionale del prof. Panizza viene a completare felicemente la raccolta dei manuali Hoepli per quanto riguarda la Matematica elementare.

Certamente questa operetta non è da considerarsi come un trattato di Aritmetica ad uso delle scuole, inquantochè i vari argomenti sono semplicemente abbozzati con spigliatezza e sobrietà bene spesso degne d'essere imitate, ma che qualche volta possono sembrare eccessive.

Ciò nonpertanto le definizioni (tranne forse quelle di numero e di addizione, che del resto lasciano a desiderare in quasi tutti i trattati) e le dimostrazioni sono esposte col voluto rigore ed oltre a ciò l'Autore insiste molto opportunamente nel distinguere in ogni caso dai risultati delle operazioni che sono conseguenza delle definizioni, quelli che si assumono per convenzione.

Tra i vari capitoli troviamo specialmente degni di nota quello intorno alla ricerca del minimo comune multiplo di più numeri esposta una buona volta indipendentemente dai numeri primi e collocata quindi nel suo posto naturale subito dopo la teoria dei divisori; e quello finale nel quale viene elegantemente riassunta l'evoluzione del concetto di numero.

Anche la determinazione del limite di un numero decimale periodico è trattato con molta chiarezza: ma l'Autore, stabilita la forma della frazione limite, dice semplicemente che essa si chiama la sua generatrice, senza dimostrare che ridotta in decimali deve riprodurre il dato numero periodico, cosa che a mio parere non sarebbe stata lunga nè difficile e che avrebbe completato l'argomento.

Se però il manuale del prof. Panizza, come abbiamo detto, non è fatto per un primo studio dell'Aritmetica, è invece consigliabile a tutti coloro che avendo studiata questa materia in altri tempi, fossero costretti a tornarci su, poichè troveranno in esso un buon riassunto di Aritmetica razionale e nello stesso tempo una eccellente introduzione all'Algebra.

U. SCARPIS.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Nouvelle série. 5. N. 4. — Stockholm, 1891.

Bulletin scientifique, rédigé par M. E. LEBON. Sixième année. N. 1, 2, 3. — A. Colin et C., éditeurs. Paris, 1891.

El Progreso matemático. Director DON ZOEL G. DE GALDEANO. Año I. N. 10, 11 e 12; Octubre, Noviembre, Diciembre de 1891. Zaragoza.

Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del Prof. G. BATTAGLINI. Vol. XXIX. Settembre-Ottobre 1891. — Napoli, B. Pellerano.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. DE LONGCHAMPS. 3e Série, XV année. N. 11, 12; Novembre, Décembre 1891. — Paris, Librairie Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. 16e année. Nombres 3, 4, 5, 6. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles, 1891.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. MANSION et J. NEUBERG. Deuxième série. Tome I. Novembre, Décembre 1891. — Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo V, Fasc. VI; Novembre e Dicembre 1891.

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par M. B. NIEWENGLOWSKI. 2e année N. 2, 3; Novembre, Décembre 1891. — Paris, Librairie Nony et C., 17, rue des Écoles.

Rivista di matematica, diretta da G. PEANO. Fasc. 10°-12°; Ottobre-Dicembre 1891. — Torino, Fratelli Bocca.

BELLACCHI (G.) — Galileo e i suoi successori. Discorso letto nel R. Istituto tecnico Galilei di Firenze il dì XXIX ottobre MDCCCLXXXXI. — Firenze, tipografia Galletti e Cocci, 1891.

FIBBI (C.) — I sistemi doppiamente infiniti di raggi negli spazii di curvatura costante. (Annali della R. Scuola normale Superiore di Pisa, 1891).

FRATTINI (G.) — Aritmetica pratica per uso delle Scuole elementari del Regno, approvata da molti Consigli scolastici. Parte I, 5a edizione. — Ditta G. B. Paravia e C., 1892. - Prezzo: cent. 40.

GARBIERI (G.) — Trattato di aritmetica razionale. Libro di testo per i Ginnasi superiori e per gli Istituti tecnici e militari. 2a edizione, interamente rifatta. — Padova, tip. F. Sacchetto, 1891. - Prezzo: L. 2.

GIUDICE (F.) — G. Lazzeri ed A. Bassani: *Elementi di Geometria*. (Rivista di Matematica. Anno 1891).

LORIA (G.) — Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche. (Journal d'histoire des mathé. par Eneström. Nou. série 5, n.° 4).

NICOLI (F.) — Interpretazione geometrica del campo delle soluzioni reali di una equazione quadratica a quattro variabili. (Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Vol. VIII, Serie II).

VALERI (D.). — Proprietà metriche delle cubiche gobbe. (Id. id.)

REGGIO (G. Z.) — *Complementi di geometria* proposti come libro di testo pel secondo biennio degli Istituti tecnici e come avviamento ai corsi superiori ai giovani licenziandi dei Licei e degli Istituti. — Treviso, Tip. L. Zoppelli, 1891. - Prezzo: L. 3.

Chiusura della redazione il dì 29 dicembre 1891.

DELL'ANALISI INDETERMINATA DI SECONDO GRADO

(Continuazione, V. pag. 7).

13. Esporremo ora un'altra maniera per trovare le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$. Quando $\sqrt{D}$ è più vicina ad m, suo valore a meno di un'unità in difetto, che non ad $m+1$, questa seconda maniera è più rapida di quella che fu già esposta nel n. 8 e discussa nel n. 9.

Ricordando che si è posto $D = m^2 + n$, si consideri il sistema

$$\begin{aligned} x^2 - Dy^2 &= N \\ x^2 - Dy^2 &= -Nn \\ x^2 - Dy^2 &= Nn^2 \\ x^2 - Dy^2 &= -Nn^3 \\ &\dots\dots \\ &\dots\dots \end{aligned} \qquad [B]$$

Detta in generale (x, y) una soluzione di una delle equazioni del sistema, si riconoscerà facilmente che $x > my$, se la soluzione appartiene a equazione di posto dispari, e che $x < (m+1)y$, se essa appartiene a equazione di posto pari.

Una soluzione appartenente a equazione di posto dispari sarà detta *singolare*, se, oltre alla condizione $x > my$, si verificherà l'altra: $x \geq (m+1)y$. - Una soluzione appartenente a equazione di posto pari si dirà singolare, se, oltre alla condizione $x < (m+1)y$, si verificherà l'altra: $x \leq my$.

Affinchè una soluzione sia singolare, è necessario e sufficiente che in essa il valore della y non superi la radice quadrata del secondo membro diviso per $2m + 1 - n$, se l'equazione occupa posto dispari; oppure la radice del secondo membro diviso per n e positivamente preso, se l'equazione occupa posto pari. - È facile verificare.

Sia (x_1, y_1) una soluzione qualsiasi della prima equazione. Se essa è singolare, non discuteremo più avanti. Se no, porremo:

$x_1 = my_1 + h$, intendendo per h un numero che sarà positivo, perchè $x_1 > my_1$. Sostituendo $my_1 + h$ invece di x_1 nella prima equazione e risolvendo per rispetto ad y_1, viene:

$$y_1 = \frac{mh \pm \sqrt{Dh^2 - Nn}}{n}.$$

Epperò, posto $Dh^2 - Nn = k^2$ (k intera e positiva), si avrà successivamente:

$$y_1 = \frac{\pm k + mh}{n}$$

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right) (\pm k + h\sqrt{D}),$$

indicando con (k, h) una certa soluzione della seconda equazione. Se la (k, h) è singolare, non discuteremo più avanti. Se non è tale, se cioè $k > mh$, rifiuteremo il segno — davanti alla k delle due precedenti eguaglianze, affinchè y_1 risulti positiva. Porremo inoltre: $k = mh + h'$ (h' positiva). Fatto ciò, procedendo nella solita maniera, troveremo che, detta (k', h') una certa soluzione della terza equazione,

$$k = \frac{\pm k' + mh'}{n}$$

$$k + h\sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right) (\pm k' + h'\sqrt{D}).$$

Ma dovremo rifiutare il segno — davanti a k', perchè $k' > mh'$. Perciò, combinando le espressioni di $x_1 + y_1\sqrt{D}$ e di $k + h\sqrt{D}$,

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^2 (k' + h'\sqrt{D}).$$

Se (k', h') è soluzione singolare della terza equazione, non discuteremo più avanti. Nel caso contrario dimostreremo che

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^3 (\pm k'' + h''\sqrt{D}),$$

significando con (k'', h'') una certa soluzione della quarta equazione. Se (k'', h'') non sarà peranco soluzione singolare della quarta equazione, all'eguaglianza precedente succederà l'altra:

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^4 (k''' + h'''\sqrt{D}).$$

E via così. — Argomentando come si è fatto più volte nel corso di questo scritto, si concluderà che

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^{\lambda} (\pm x' + y' \sqrt{D}),$$

intendendo per x' e y' i valori della x e della y in una soluzione singolare della $(\lambda + 1)^a$ equazione, ed avvertendo che, per λ pari, bisogna escludere il segno — davanti alla x'.

Per risolvere l'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ si ricercheranno adunque le soluzioni singolari (x', y') delle successive equazioni del sistema $[B]$, ossia quelle soluzioni nelle quali la y non supera la radice del secondo membro della relativa equazione diviso per $2m + 1 - n$, se l'equazione occupa posto dispari; oppure quelle soluzioni nelle quali la y non supera la radice del secondo membro della relativa equazione, positivamente preso e diviso per n, se l'equazione occupa posto pari. Si supponga che la soluzione singolare (x', y') siasi ottenuta dopo λ passaggi da un'equazione del sistema $[B]$ alla susseguente, e che il relativo binomio $\pm x' + y' \sqrt{D}$, moltiplicato per

$$\frac{m + \sqrt{D}}{n}$$

λ volte di seguito, dia nascita a prodotti interi della stessa forma, determinato convenientemente il segno della x', che, come si disse, per λ dispari è ambiguo. Alla (x', y') corrisponderà una soluzione (x, y) dell'equazione proposta: e quanto alla x e alla y, esse saranno la parte razionale e il coefficiente di $\sqrt{D}$ relativo all'ultimo prodotto. È poi superfluo aggiungere, perchè risulta dalle cose dette di sopra, che tal maniera di derivazione conviene a qualsivoglia soluzione della proposta equazione.

14. Per ciò che riguarda la discussione del metodo, ci occuperemo anche qui del rapporto $y : y'$, la cui grandezza, come si vide nel n. 9, ha stretta attinenza con l'efficacia del metodo stesso. Perciò supporremo che la soluzione (x', y') sia stata ottenuta dopo λ passaggi da un'equazione del sistema $[B]$ alla succedanea, e di-

mostreremo che, se $\lambda > 0$, il detto rapporto è maggiore dell'unità. Di più che

$$y > \frac{m + \sqrt{D}}{m + \sqrt{D} + 1} \cdot \frac{y'}{(\sqrt{D} - m)^{\lambda - 1}}.$$

Dalla quale formola, essendo $\sqrt{D} - m$ minore di $\frac{1}{2}$, apparisce chiaramente che il rapporto $y : y'$ (sempre maggiore dell' unità quando $\lambda > 0$) cresce rapidamente al crescere di λ.

Che il rapporto $y : y'$ è maggiore dell'unità, risulta dal ricordare che, se (x, y) non è soluzione singolare della prima equazione, essa si deriva da una soluzione (k, h) della seconda; e che questa soluzione è legata alla (x, y) dalla relazione $x - my = h$. Essendo $x > my$, e nel medesimo tempo $x < (m + 1)y$, si conclude che $y > h$. Similmente, se (k, h) non è soluzione singolare della seconda equazione, talchè si derivi da una soluzione (k', h') della terza, si avrà $h > h'$, e a più forte ragione: $y > h'$. Ecc. - Dunque finalmente: $y > y'$.

Supponendo ora che la (x', y'), ottenuta dopo λ passaggi $(\lambda > 0)$, sia soluzione singolare di un'equazione di posto dispari, si avrà:

$$x + y\sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^{\lambda} (x' + y'\sqrt{D}).$$

E di più:

$$x < (m + 1)y \quad ; \quad x' \geq (m + 1)y'.$$

Conseguentemente:

$$y > \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^{\lambda} y' = \frac{y'}{(\sqrt{D} - m)^{\lambda}}.$$

E a più forte ragione:

$$y > \frac{m + \sqrt{D}}{m + \sqrt{D} + 1} \cdot \frac{y'}{(\sqrt{D} - m)^{\lambda - 1}}.$$

Supponendo invece che (x', y') appartenga ad equazione di posto pari, si avrà:

$$x + y\sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^{\lambda} (\pm x' + y'\sqrt{D}).$$

Ma si ricordi che questa eguaglianza è preceduta da un'altra della forma

$$x + y \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^{\lambda - 1} (u + v \sqrt{D}),$$

nella quale u e v significano i valori delle incognite in una soluzione non singolare dell'equazione di posto dispari, che precede quella alla quale (x', y') appartiene: cosicchè

$$x < (m + 1) y \quad ; \quad u > m v ;$$

e perciò:

$$y (m + 1 + \sqrt{D}) > \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^{\lambda - 1} (m + \sqrt{D}) v.$$

Da questa disuguaglianza, ricordando che $v > y'$, come poco sopra si è dimostrato, risulta:

$$y > \frac{m + \sqrt{D}}{m + \sqrt{D} + 1} \cdot \frac{y'}{(\sqrt{D} - m)^{\lambda - 1}} .$$

Applichiamo il metodo alla ricerca di una soluzione dell'equazione $x^2 - 205 y^2 = 1$. In questo caso $m = 14$, $n = 9$, $2m + 1 - n = 20$. Il sistema [B] diviene:

$x^2 - 205 y^2 = 1$	0
$x^2 - 205 y^2 = - 9$	1
$x^2 - 205 y^2 = 81$	2
$x^2 - 205 y^2 = - 729$	9
$x^2 - 205 y^2 = 6561$	18
$x^2 - 205 y^2 = - 59049$	81
. . . .	
. . . .	

Accanto ad ogni equazione sta scritto il valor massimo per la y delle relative soluzioni singolari, ossia la radice a meno di un'unità del valore positivo del secondo membro, diviso per 20 o per 9, secondochè il posto dell'equazione è dispari o pari. Nel provare sulla 6ª equazione i successivi valori interi e positivi della y, dal 17 in poi, affinchè $205 y^2 - 59049$ risulti positivo, s'incontra alla prima prova la soluzione singolare (14, 17). Dato al primo termine il segno positivo, il binomio $\pm 14 + 17\sqrt{205}$, moltiplicato 5 volte per

$$\frac{14 + \sqrt{205}}{9},$$

produce l'un dopo l'altro i binomi:

$$409 + 28\sqrt{205}\,;\;\; 1274 + 89\sqrt{205}\,;\;\; 4009 + 280\sqrt{205}\,;$$
$$12614 + 881\sqrt{205}\,;\;\; 39689 + 2772\sqrt{205}.$$

Si ottiene così per l'equazione proposta la soluzione (39689, 2772).

(Continua).

G. Frattini.

LA DEFINIZIONE DI PROPORZIONE
ED IL V LIBRO DI EUCLIDE

(Continuazione e fine: V. pag. 16).

Proporzioni.

17. Date due classi in corrispondenza metrica e prese due grandezze A e B della prima e le corrispondenti C e D della seconda, si dice che le quattro grandezze nell'ordine in cui sono scritte *sono in proporzione* e si scrive:

$$A : B = C : D.$$

Una proporzione individua una corrispondenza metrica fra le due classi a cui appartengono le sue grandezze, la quale potrà dirsi per brevità *corrispondenza della proporzione*.

18. Dal teorema del § 12 discende subito che date tre grandezze A, B, C delle quali le prime due sieno omogenee, esiste una grandezza ed una sola D (o più equivalenti) omogenee a C, e tale che $A : B = C : D$.

19. Si ha per definizione che

$$A : A = B : B$$

cioè che

$$A : A' = B : B' \text{ quando } A = A',\ B = B'.$$

20. Avendosi che nella corrispondenza metrica $\binom{A}{C}$ si corrispondono le grandezze delle due classi che sono simili rispetto ad A e C, si ha subito che sono vere le seguenti proporzioni:

$$A : mA = C : mC$$

$$A : \frac{1}{n}A = C : \frac{1}{n}C$$

$$A : \frac{m}{n}A = C : \frac{m}{n}C$$

$$A : \lim \frac{m}{n}A = C : \lim \frac{m}{n}C.$$

21. Poichè la proporzione

$$A : B = C : D$$

individua la corrispondenza metrica $\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}$, si vede subito che da questa e dalla definizione data discendono le proporzioni:

$$B : A = D : C$$

$$C : D = A : B$$

$$D : C = B : A.$$

22. Se la proporzione del § precedente è fra grandezze tutte omogenee, allora per il teorema del § 15, essendo corrispondenti le coppie A, B e C, D, lo sono, in un'altra corrispondenza metrica, le altre A, C e B, D, cioè si ha:

$$A : C = B : D;$$

talchè in una proporzione di grandezze tutte omogenee si possono permutare i medi.

Ai quattro aspetti indicati nel § precedente che può prendere una proporzione, si possono allora aggiungere gli altri quattro:

$$A : C = B : D$$

$$B : D = A : C$$

$$C : A = D : B$$

$$D : B = C : A.$$

23. Data la proporzione

$$A : B = C : D,$$

per le proprietà della corrispondenza metrica $\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}$ (§ 10), si ha subito che sarà contemporaneamente

$$A \gtreqless B \quad \text{e} \quad C \gtreqless D$$

e che A e C saranno simili rispetto a B e D, cioè che sarà contemporaneamente

$$A = \frac{m}{n} B \quad \text{e} \quad C = \frac{m}{n} D$$

o

$$A = \lim \frac{m}{n} B \quad \text{e} \quad C = \lim \frac{m}{n} D.$$

24. Data la proporzione

$$A : B = C : D,$$

dalla sua stessa corrispondenza metrica discendono immediatamente le altre

$$A \pm B : A = C \pm D : C$$
$$A \pm B : B = C \pm D : D$$

e, pure dalla stessa corrispondenza, che

$$\frac{m}{n} A : B = \frac{m}{n} C : D$$
$$\lim \frac{m}{n} A : B = \lim \frac{m}{n} C : D$$
$$\frac{m}{n} A : \frac{p}{q} B = \frac{m}{n} C : \frac{p}{q} D \text{ ecc..}$$

25. Se B e D sono variabili i cui successivi stati sono corrispondenti nella corrispondenza metrica $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$, talchè sussista la proporzione

$$A : B = C : D$$

per tutti gli stati corrispondenti delle variabili B e D, sarà anche, a causa della stessa corrispondenza metrica :

$$A : \lim B = C : \lim D.$$

26. Se si ha la proporzione

$$A : B = C : D$$

e quindi sussiste la corrispondenza metrica $\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}$, per il teorema del § 14 sussisteranno anche le altre

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{n} A \,, & \frac{m}{n} B \\ C \,, & D \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lim \frac{m}{n} A \,, & \lim \frac{m}{n} B \\ C \,, & D \end{pmatrix}$$

e quindi avremo le proporzioni

$$\frac{m}{n} A : \frac{m}{n} B = C : D$$

$$\lim \frac{m}{n} A : \lim \frac{m}{n} B = C : D .$$

In modo simile si ha

$$\frac{m}{n} A : \frac{m}{n} B = \frac{p}{q} C : \frac{p}{q} D \text{ ecc..}$$

27. Se si hanno le proporzioni

$$A : B = C : D$$
$$M : N = C : D ,$$

poichè esse hanno per corrispondenze le due $\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} M, & N \\ C, & D \end{pmatrix}$, da queste per il teorema del § 13 discenderà l'altra $\begin{pmatrix} A, & B \\ M, & N \end{pmatrix}$ e quindi avrà luogo la proporzione

$$A : B = M : N .$$

28. Date le proporzioni

$$A : B = M : N$$
$$B : C = N : P$$

le loro corrispondenze che sono $\begin{pmatrix} A, & B \\ M, & N \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} B, & C \\ N, & P \end{pmatrix}$ costituiscono la corrispondenza unica $\begin{pmatrix} A, & B, & C \\ M, & N, & P \end{pmatrix}$ e quindi si ha la proporzione

$$A : C = M : P .$$

Analogamente da

$$A : B = C : D$$
$$A : M = C : N$$

discende la proporzione

$$B : M = D : N,$$

e dalle due

$$A : B = C : D$$
$$M : B = N : D,$$

l'altra

$$A : M = C : N.$$

29. Dalle proporzioni

$$(1) \qquad A : B = N : P$$
$$(2) \qquad B : C = M : N$$

dico che discende l'altra

$$A : C = M : P.$$

Cerco infatti X omogenea ad M, N, P tale che (§ 18)

$$(3) \qquad B : C = P : X.$$

Allora (1) e (3) per il teorema del § precedente danno

$$(4) \qquad A : C = N : X,$$

mentre (2) e (3), per il teorema del § 27, danno

$$M : N = P : X,$$

proporzione fra grandezze omogenee da cui, permutando i medi (§ 22), si ha

$$(5) \qquad M : P = N : X.$$

La (4) e (5) danno

$$A : C = M : P, \text{ c. d. d.}$$

30. Se

$$A : B = C : D$$
$$M : B = C : N,$$

permutando i medi nella seconda ed applicando il teorema del § precedente, si conclude che

$$A : M = N : D.$$

31. Date le proporzioni

$$\begin{aligned} A_1 : B &= C_1 : D \\ A_2 : B &= C_2 : D \\ &\dots\dots\dots \\ A_n : B &= C_n : D, \end{aligned}$$

poichè esse hanno tutte la stessa corrispondenza $\binom{B}{D}$ e può scriversi

$$\begin{pmatrix} B, & A_1, & A_2, \dots A_n, & A_1 + A_2 + \dots + A_n, \dots \\ D, & C_1, & C_2, \dots C_n, & C_1 + C_2 + \dots + C_n, \dots \end{pmatrix},$$

si vede che vale la proporzione

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n : B = C_1 + C_2 + \dots + C_n : D.$$

32. Passiamo ora ad occuparci delle proporzioni fra grandezze tutte omogenee.

Dalla definizione di proporzione si rileva subito che se $A = A'$, si ha

$$A : B = A' : B \quad \text{e} \quad B : A = B : A',$$

qualunque sia B omogenea ad A.

33. Data la proporzione fra grandezze omogenee

$$A : B = C : D,$$

permutando i medi ed applicando le proprietà già dimostrate, si conclude che si avrà contemporaneamente

$$A \gtreqless C \quad \text{e} \quad B \gtreqless D,$$

ed A e B saranno simili rispetto a C e D.

34. Dalle proporzioni, supposte fra grandezze omogenee, del § 20 permutando i medi si conclude, che se A e B sono grandezze omogenee sussistono le proporzioni

$$A : B = \frac{m}{n} A : \frac{m}{n} B$$

$$A : B = \lim \frac{m}{n} A : \lim \frac{m}{n} B.$$

35. Dalla proporzione fra grandezze omogenee

$$A : B = C : D,$$

permutando i medi ed applicando il teorema del § 24, si rileva che sono valide le proporzioni

$$A \pm C : A = B \pm D : B$$
$$A \pm C : C = B \pm D : D.$$

36. Come si vede, i teoremi sulle proporzioni si dimostrano tutti facilmente con l'accennata definizione, solo che si premettano considerazioni generali sulle corrispondenze delle classi.

La definizione data rassomiglia evidentemente assai a quella aritmetica, anzi si informa ad essa, essendo le grandezze simili rispetto a due altre quelle che ad esse (secondo la definizione aritmetica) hanno eguale rapporto. Per altro la definizione che ho dato non invoca il concetto generale di numero, ma solo quello di numero intero e (non altro che per brevità ma non necessariamente) quello di frazione - concetti i quali, ormai, sono indissolubili dal linguaggio ordinario.

37. È facile riconoscere ora come tale definizione coincida con quella d'Euclide.

Infatti se sia $A : B = C : D$, con la definizione del § 17 avremo la corrispondenza $\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}$, della quale due coppie corrispondenti sono pA, qB e pC, qD qualunque sieno p e q interi. Per la definizione di corrispondenza metrica sarà dunque

$$pA \gtreqless qB \text{ secondochè } pC \gtreqless qD,$$

ossia le quattro grandezze saranno in proporzione secondo la definizione d'Euclide.

Viceversa, sia insieme

$$pA \gtreqless qB \quad \text{e} \quad pC \gtreqless qD,$$

qualunque sieno gli interi p e q (definizione euclidea di proporzione). Allora possono darsi due casi: O per convenienti p_1, q_1 si ha $p_1 A = q_1 B$ e quindi $p_1 C = q_1 D$, ed allora nella corrispondenza metrica $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ si corrispondono $\frac{p_1}{q_1} A$ e $\frac{p_1}{q_1} C$, cioè B e D, talchè si avrà $\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}$. Oppure ciò non accade, ed allora presi i numeri

q, q^2, ..., q^n, ... con q numero intero qualunque, si troveranno convenienti numeri interi p_1, p_2, ... p_n tali che sia

$$\begin{aligned} p_1 A &< q B < (p_1 + 1) A, \\ p_2 A &< q^2 B < (p_2 + 1) A, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ p_n A &< q^n B < (p_n + 1) A, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

e che quindi, per l'ipotesi fatte, sia anche:

$$\begin{aligned} p_1 C &< q D < (p_1 + 1) C, \\ p_2 C &< q^2 D < (p_2 + 1) C, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ p_n C &< q^n D < (p_n + 1) C, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Si vede allora che B è limite delle serie convergenti

$$\left| \begin{array}{lll} \frac{p_1}{q} A, & \frac{p_2}{q^2} A, \dots & \frac{p_n}{q^n} A, \dots \\ \frac{p_1 + 1}{q} A, & \frac{p_2 + 1}{q^2} A, \dots & \frac{p_n + 1}{q^n} A, \dots \end{array} \right.$$

e D delle altre

$$\left| \begin{array}{lll} \frac{p_1}{q} C, & \frac{p_2}{q^2} C \dots & \frac{p_n}{q^n} C, \dots \\ \frac{p_1 + 1}{q} C, & \frac{p_2 + 1}{q^2} C, \dots & \frac{p_n + 1}{q^n} C, \dots \end{array} \right.$$

le quali nella corrispondenza metrica $\binom{A}{C}$ sono corrispondenti. Corrisponderà dunque D a B in detta corrispondenza, cioè, come nel caso precedente, sarà $\binom{A,\ B}{C,\ D}$. Ne viene che in ogni caso si ha la proporzione $A : B = C : D$ anche nel nostro senso.

Torino, maggio 1891.

R. Bettazzi.

TEMI DI MATEMATICA

per la licenza nei Licei di Francia

(*Sessione d'aprile 1891*).

1. Dato un triangolo qualunque ABC, si domanda di condurre pel vertice A una retta AD tale, che se dai vertici B e C si abbassano delle perpendicolari Bb e Cc sopra AD, i due triangoli ABb, ACc siano equivalenti. — Vi sono più soluzioni? (*Besançon*).

2. Sapendo che le due equazioni

$$x^2 + px + q = 0 \quad , \quad x^2 + p'x + q' = 0$$

hanno in comune una radice, formare l'equazione che ammette per radici le seconde radici di ciascuna di queste equazioni. (*Bordeaux*).

3. A e B essendo due punti fissi ed OX la proiezione sopra un piano orizzontale P della retta AB che li congiunge e che taglia questo piano in O, si tracci nel piano P una retta OI inclinata su OX dell'angolo α. Trovare su OI un punto M tale che la somma dei quadrati delle sue distanze da A e B abbia il valore S^2, ossia $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = S^2$.

Minimo di questa somma e posizione corrispondente di M.

Come cambierà questo punto M, pel quale S è minimo, quando si farà variare l'angolo α?

I dati sono ang. $XOA = \beta$, $OA = a$, $OB = b$. (*Bordeaux*).

4. Dimostrare che se un numero intero è divisibile separatamente per più numeri interi dati, è divisibile pel loro minimo multiplo comune. Posto ciò, trovare due numeri interi tali che ciascuno sia divisibile per 20, per 30 e per 35 e che la differenza dei loro quadrati sia uguale a 529200. (*Caen*).

5. Calcolare i lati d'un triangolo sapendo che questi lati e la superficie sono rispettivamente uguali a quattro numeri interi consecutivi. (*Caen*).

6. Dato un cerchio di raggio R ed un punto P situato ad una distanza d dal centro, si domanda: 1° di condurre per il punto P due secanti rettangolari APC, BPD, seganti il cerchio nei punti A, B, C, D e tali che l'area del quadrilatero $ABCD$ sia uguale ad $\frac{1}{2}a^2$. — Discussione; 2° R, d, a essendo noti, di calcolare i lati del quadrilatero $ABCD$; — 3° di trovare questi lati nel caso di

$$d = \frac{R}{2}\sqrt{4 - \sqrt{5}}\,, \quad a^2 = R^2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}. \quad (\textit{Clermont}).$$

7. Sopra un lato d'un triangolo, trovare un punto in modo che la somma dei quadrati delle perpendicolari abbassate da questo punto sugli altri due lati sia minima. (*Clermont*).

8. Risolvere un parallelogrammo conoscendo i valori p, q delle sue due coppie di lati paralleli e l'angolo acuto θ formato dalle sue diagonali.

Qual'è il maggior valore dell'angolo θ pel quale il problema è possibile, e, quale forma dà esso al parallelogrammo? *(Digione)*.

9. In un triangolo ABC, si sa che i lati sono rappresentati da numeri in progressione aritmetica. È data la mediana m che va al centro del lato medio ed il raggio r del cerchio inscritto nel triangolo. Si domandano le espressioni dei tre lati. Si rappresenterà il lato medio con x.

Quale relazione deve esistere fra m ed r affinchè il triangolo sia rettangolo? *(Grenoble)*.

10. Risolvere e discutere l'equazione

$$\operatorname{tang}^2 x + m \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0,$$

in cui m è un parametro variabile.

Completare i calcoli quando $m = -\frac{16}{3}$ e trovare tutti gli archi che rispondono al quesito. *(Lilla)*.

11. In un triangolo rettilineo ABC si conosce la base $b = 428^m, 27$; l'altezza $h = 303^m, 64$ e la differenza degli angoli alla base $A - C = 21^\circ\ 47'\ 12'', 4$. Si domanda di calcolare i lati a e c a meno d'un centimetro, gli angoli A e C a meno di $\frac{1}{10}$ di secondo. *(Lione)*.

12. Un punto A può muoversi senz'attrito lungo una retta fissa XY. Questo punto è sollecitato da due forze P e Q. La direzione della forza P fa con AY un angolo di 60°; la direzione della forza Q fa con AX un angolo di 45°. La forza Q è uguale a 10 Cg.; quale dev'essere la forza P perchè il punto A sia in equilibrio? *(Marsiglia)*.

13. Determinare un triangolo rettangolo conoscendo la somma m dei cateti e la somma k dell'ipotenusa e dell'altezza relativa all'ipotenusa. — Discussione. *(Montpellier)*.

14. Calcolare i lati e gli angoli d'un triangolo conoscendo la superficie di questo triangolo, il volume che esso genera ruotando intorno ad uno de' suoi lati a, e l'angolo A opposto a questo lato. Discutere il problema. *(Montpellier)*.

15. Dato un angolo circoscritto ad un cerchio, si domanda di condurre al cerchio una tangente che formi coi lati dell'angolo un triangolo di dato perimetro. *(Montpellier)*.

16. Volume del segmento sferico; dimostrazione. Mostrare che il volume può essere espresso anche dalla formola $V = Sh - \frac{\pi h^3}{12}$, essendo h l'altezza del segmento, ed S indicando l'area della sezione fatta nella sfera da un piano equidistante dalle basi. *(Nancy)*.

17. Data l'equazione

$$\operatorname{tang}(x + a) \,.\, \operatorname{tang}(x - b) = \pm \operatorname{tang}^2 x,$$

si domanda di ricavare $\operatorname{tang} x$.

Discutere la soluzione nel caso particolare in cui b è uguale ad a. *(Nancy)*.

18. Dividere 13 in due parti x ed y tali che $3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$ sia un massimo. (*Parigi*).

19. Sono dati due assi rettangolari Ox ed Oy; un cerchio di raggio R è tangente ad Oy nel punto O. Da un punto A di Ox si conduce una tangente AB che incontra Oy in B. Determinare la posizione del punto A in modo che sia $\overline{AB} \,.\, \overline{OB} = m^2$.

Si prenderà come incognita $OA = x$. (*Parigi*).

20. Determinare sopra una semicirconferenza $ACMB$, di raggio R, un punto M tale che conducendo la retta AM ed abbassando MP perpendicolarmente al diametro AB, il volume generato dal segmento circolare ACM, ruotando intorno al diametro AB, sia uguale a h volte il volume generato dal triangolo AMP. (*Parigi*).

21. Dividere una retta AB di lunghezza $2a$ in due parti MA ed MB tali che $\overline{MA}^2 + 3\,\overline{MB}^2$ sia minimo. (*Parigi*).

22. Pel vertice A del quadrato $ABCD$, si conduca una retta che incontri i lati CD e CB od i loro prolungamenti in E (sulla retta CD) ed in F (sulla retta CB); il lato del quadrato è a, la distanza EF è b; si domanda di calcolare la distanza x del punto C alla retta AEF. (*Poitiers*).

23. Dato un angolo $XOY = \alpha$, si prendano sul lato OX due punti A e B tali che sia $OA = a$, $OB = b$. Trovare sul lato OY un punto M ($OM = x$) tale che MA sia bisettrice dell'angolo OMB. — Discussione. (*Rennes*).

24. Il sistema d'equazioni

$$\lambda x + ay = cbx + \lambda y = d,$$

ove a, b, c, d sono date ed ove λ è variabile, ammette per ciascun valore di λ una coppia x, y di soluzioni in generale determinate. Fra questi numeri x ed y vi è una relazione indipendente da λ; qual'è essa?

Stabilire come varia con λ il rapporto di y ad x. (*Rennes*).

25. Risolvere l'equazione

$$\frac{\cos x \,.\, \cos 3a}{1 - \cos^2 x} = m. \qquad (\textit{Rennes}).$$

26. Dato un rettangolo $OAMB$ la cui diagonale $OM = 2u$ e di cui l'angolo delle diagonali è 2α, s'innalzi dal punto M, sulla diagonale OM, una perpendicolare fino al suo incontro in M' col prolungamento della diagonale AB; pel punto M' si conducano delle parallele ai lati del primo rettangolo; si forma così un secondo rettangolo. Trovare la sua diagonale OM', come pure l'angolo delle sue diagonali in funzione di α e di u. (*Rennes*).

27. Due punti A e B si proiettano ortogonalmente in A', B' sopra una retta data indefinita xy. Posto $AA' = a$, $BB' = b$, $A'B' = c$, si domanda di determinare, mediante la sua distanza al punto A, il punto M di xy tale che l'angolo BMB' sia doppio dell'angolo AMA'. (*Rennes*).

28. Si indichi con y l'espressione $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, a, b, c, d essendo numeri dati. 1° Dimostrare che se $ad - bc$ non è zero, y varia sempre nello stesso senso

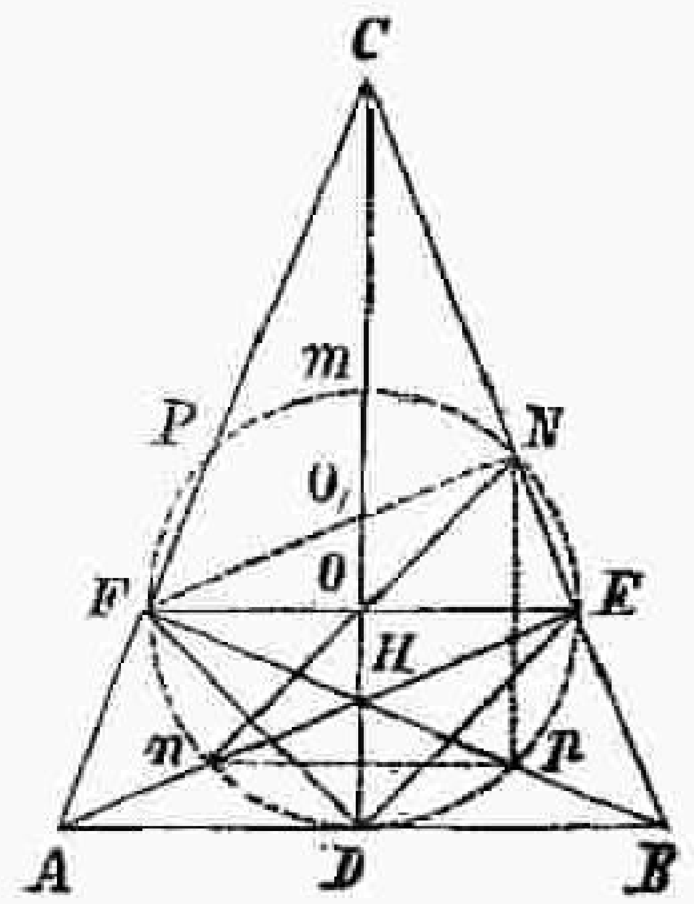
allorchè si danno ad x valori crescenti. 2° Si indichino con y_1, y_2, y_3, y_4 i valori che assume y quando si rimpiazza x con x_1, x_2, x_3, x_4, si domanda la relazione che esiste fra le due quantità

$$\frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} : \frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4} \quad , \quad \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} \,. \qquad (Tolosa).$$

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Un teorema sul triangolo. — *Se in un triangolo isoscele la congiungente il piede dell'altezza di uno dei lati eguali, col punto medio dell'altro lato eguale, è parallela all'altezza corrispondente a quest'ultimo lato, il cerchio passante pei punti medi dei lati del triangolo, sega tali lati e le altezze in otto punti che sono vertici d'un ottagono regolare.*

Siano AE, BF, CD, rispettivamente, le altezze relative ai lati eguali BC, CA, ed alla base AB del triangolo isoscele ABC, H il punto comune a queste tre altezze ed N, n, p, ordinatamente, i punti medî di BC, AH, BH, ed abbiasi FN parallela ad AE.



Poichè Np è parallela a CD ed np parallela ad AB, l'angolo npN sarà retto. Ma anche l'angolo nEN è retto ed inoltre CD è asse di np, onde il cerchio passante per n, p, N avrà il suo centro nel punto O (in cui nN taglia CD) e passerà per E, e, a motivo di simmetria anche pel punto medio P di AC, non che pel piede F dell'altezza BF. Essendo poi nD parallela ad FB, ND parallela ad AC ed FB perpendicolare ad AC, l'angolo nDN è retto cosicchè questo cerchio passa anche per D.

Ricordando poi che le altezze d'un triangolo sono bisettrici del suo triangolo ortico, si ha che FB è bisettrice dell'angolo EFD, onde arco $Ep =$ ar. pD, similmente arco $Dn = nF = Dp$. Inoltre avendosi Np parallela a CD ed FN parallela ad AE, si può concludere che arco $Dp = mN = mP = NE = PF$, talchè i punti F, P, m, N, E, p, D, n sono i vertici dell'ottagono regolare inscritto nel cerchio O.

Corollario. Il teorema dimostrato permette di concludere che Nm è parallela a BH, sicchè, a motivo di $CN = NB$, m è punto medio di HC. Sono così trovate tutte le proprietà caratteristiche del cerchio O che è il cerchio dei *nove punti* relativo al triangolo ABC.

Osservazione I. — Il quadrangolo $FNEn$ è un rettangolo e le sue diagonali sono diametri del cerchio O, per modo che FE passa per O.

Se FN taglia CD in O_1, poichè FN è parallela ad AE, quindi perpendicolare a CB nel suo punto di mezzo, sarà O_1 il centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC, di più si avrà $CO_1 = Cm + mO_1 = mH + HD = mD$, onde il diametro del cerchio O uguaglia il raggio del cerchio O_1.

II. Essendo le corde PN, FD, DE eguali al lato del quadrato inscritto nel cerchio O e PN la metà di AB, segue che il triangolo FDE, ortico di ABC ed ABH, è la metà del quadrato inscritto nel cerchio O; che la base AB comune a questi due triangoli è lato del quadrato inscritto nel cerchio O_1, come pure lato del quadrato inscritto nel cerchio O_2 circoscritto al triangolo ABH (cerchio che facilmente si vede essere uguale ad O_1); e gli angoli ACB, AHB sono l'uno di 45° e l'altro di 135°. Segue poi angolo $A = B = 67°.30'$.

S. Gatti.

Nota sulla Quistione 91ª — Si trova con lo sviluppo che, qualunque sia l'intero a, l'espressione:

$$\frac{a^7 - (a-1)^7 - 1}{a(a-1)+1}$$

rappresenta sempre un intero.

Vi sono infiniti altri numeri che sostituiti in luogo di 7 fanno acquistare alla formola medesima dei valori interi, per valori interi di a. Sia m uno di questi numeri; mi propongo di cercare la condizione perchè l'espressione:

$$(1) \qquad \frac{a^m - (a-1)^m - 1}{a(a-1)+1},$$

per valori interi di a, rappresenti un intero.

Mi servo del teorema di Moivre relativo all'innalzamento a potenza d'un numero complesso, e dei caratteri di divisibilità d'un polinomio intero in a per un divisore della forma $a - \alpha_1$, i quali si estendono anche al caso in cui α_1 sia un numero complesso.

Si ha:

$$a(a-1)+1 = [a - (\cos 60^0 + i \operatorname{sen} 60^0)]\,[a - (\cos 60^0 - i \operatorname{sen} 60^0)].$$

Nel numeratore dell'espressione (1) si ponga: $a = \cos 60^0 + i \operatorname{sen} 60^0$ e per conseguenza: $a - 1 = \cos 120^0 + i \operatorname{sen} 120^0$, e si avrà:

$$a^m - (a-1)^m - 1 = \cos m.60^0 + i \operatorname{sen} m.60^0 - (\cos m.120^0 + i \operatorname{sen} m.120^0) - 1.$$

Perchè questa espressione si annulli è necessario e sufficiente che sia:

$$(2) \qquad \cos m.60^0 - \cos m.120^0 - 1 = 0$$

$$(3) \qquad \operatorname{sen} m.60^0 - \operatorname{sen} m.120^0 = 0.$$

Ora affinchè due angoli abbiano il medesimo seno, è necessario e sufficiente o che la loro somma sia uguale ad un numero impari di mezzi giri, o che la loro differenza sia uguale ad un numero pari di mezzi giri; quindi detto k un numero intero qualunque, compreso lo zero, dalla (3) si ricava:

$$m \cdot 60^0 + m \cdot 120^0 = (2k + 1)\, 180^0,$$

ovvero:

$$m \cdot 120^0 - m \cdot 60^0 = 2k \cdot 180^0.$$

Nel 1° caso risulta: $m = 2k + 1$. Intanto la (2) può scriversi:

$$\text{sen}\, m \cdot 90^0 \; \text{sen}\, m \cdot 30^0 = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Ora m essendo dispari, potrà essere delle due forme: $4n + 1$ e $4n - 1$.

Ponendo nella (4) il primo valore di m, $\text{sen}\, m \cdot 90^0$ diventa uguale ad 1, e si ottiene: $\text{sen}\,(4n + 1)\, 30^0 = \frac{1}{2} = \text{sen}\, 30^0$, da cui:

$$(4n + 1)\, 30^0 = 2h \cdot 180^0 + 30^0 \tag{a}$$

oppure

$$(4n + 1)\, 30^0 = (2h + 1)\, 180^0 - 30^0 \tag{b}$$

dove h rappresenta un intero positivo o nullo.

Dalla (a) si trae $n = 3h$ e dalla (b) $n = 3h + 1$. In corrispondenza i valori di m saranno:

$$m = 12h + 1; \qquad m = 12h + 5.$$

Ponendo invece nella (4) il 2° valore di m, $\text{sen}\, m \cdot 90^0 = -1$, e risulterà: $\text{sen}\,(4n - 1)\, 30^0 = -\frac{1}{2} = \text{sen}\, 210^0$. E di qui si trae:

$$(4n - 1)\, 30^0 = 2h \cdot 180^0 + 210^0 \tag{c}$$
$$(4n - 1)\, 30^0 = (2h + 1)\, 180^0 - 210^0. \tag{d}$$

Dalla (c) si ha $n = 3h + 2$ e dalla (d) $n = 3h$, ed i corrispondenti valori di m saranno:

$$m = 12h + 7; \qquad m = 12h - 1.$$

In quest'ultimo valore trovato per m, h è per lo meno uguale ad 1, e quindi l'ultima formola può scriversi:

$$m = 12h + 11.$$

Consideriamo ora il 2° caso, nel quale nella equazione (3) la differenza dei due angoli sia un numero pari di mezzi giri, e si avrà: $m = 6k$. E allora: $\text{sen}\, m \cdot 90^0 = 0$ e la (4) ed anche la (2) si riducono a $0 = \frac{1}{2}$ che è assurda.

Quindi i valori trovati per m, ed essi soli, fanno divenire il numeratore della (1) divisibile per

$$a - (\cos 60^0 + i \operatorname{sen} 60^0).$$

Similmente si dimostra che per i medesimi valori di m, e per essi soltanto, il detto numeratore risulta divisibile per

$$a - (\cos 60^0 - i \operatorname{sen} 60^0).$$

Ciò del resto risulta anche dal fatto che se un polinomio reale in x si annulla per un valore complesso di x, si annulla anche per il valore complesso coniugato. Si può così enunciare il seguente

Teorema. L'espressione

$$\frac{a^m - (a-1)^m - 1}{a(a-1) + 1}$$

per valori interi di a si riduce ad un intero nei soli casi in cui m avrà una delle seguenti quattro forme:

$$12h + 1, \qquad 12h + 5, \qquad 12h + 7, \qquad 12h + 11,$$

(dove h rappresenta un intero positivo o nullo), ovvero per tutti i valori della serie naturale che si ottengono cancellandone una volta tre ed una volta uno, a cominciare dal numero 2, che sarebbe il primo ad essere cancellato.

Osservazione. Applicando i caratteri di divisibilità d'un polinomio intero in a per $(a - a_1)^2$, (G. Bellacchi, *Lezioni di algebra elementare*, vol. II, pag. 80–81), si trova che il numeratore della (1) è divisibile pel quadrato del suo denominatore per tutti i valori di m che sono della forma $6h + 1$, cioè che sono d'una delle due forme $12h + 1$ e $12h + 7$. Applicando poi i caratteri di divisibilità per $(a - a_1)^3$, (V. luogo cit.) si trova che non vi è nessun valore di m (eccetto 1) per il quale il numeratore della (1) risulti divisibile pel cubo del suo denominatore, o per ogni potenza più elevata.

Così si può concludere che la formola:

$$\frac{a^m - (a-1)^m - 1}{[a(a-1) + 1]^n}$$

per $n \geqq 3$, e per a intero, non rappresenterà mai un numero intero, eccetto il caso in cui sia $m = 1$, nel quale la formola dà zero, per tutti i valori di n.

Pietro Marano.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
95, 100, 101* e 103*

95. *Due recipienti* A *e* B *contengono quantità disuguali di uno stesso liquido, e propriamente* A *contiene* a *litri di più di quanti ne contiene* B. *Ora s'immagini che dal recipiente* A *sieno tolti gli* $\frac{r}{n}$ *del suo contenuto e versati in* B, *e poi tolti da* B *gli* $\frac{r}{n}$ *del suo nuovo contenuto e versati in* A; *indi tolti nuovamente dal recipiente* A *gli* $\frac{r}{n}$ *del suo nuovo contenuto e versati in* B, *e poi tolti da* B *gli* $\frac{r}{n}$ *del suo nuovo contenuto e versati in* A; *e così continuando fino a fare* p *volte la doppia operazione di versare gli* $\frac{r}{n}$ *del contenuto di* A *in* B *e gli* $\frac{r}{n}$ *del nuovo contenuto di* B *in* A. *Conoscendosi il rapporto* k *del contenuto di* A *al contenuto di* B *dopo le* p *coppie di operazioni accennate, determinare la quantità di liquido contenuta in ciascuno dei due recipienti* A *e* B *prima delle suddette operazioni.*

Indicando con x *il numero dei litri di liquido contenuti nel recipiente* B, *si deve trovare:*

$$x = \frac{[n^{2p} - (n-r)^{2p}](n-r)k - [n^{2p+1} + (n-r)^{2p+1}]}{[2n^{2p+1} - r(n-r)^{2p}] - [2n^{2p} + r(n-r)^{2p-1}](n-r)k} \cdot a.$$

Determinare inoltre fra quali limiti deve variare il rapporto k *per essere possibile il problema.* (D. Amanzio).

Soluzione del Sig. *E. Piccioli*, studente nella R. Università di Genova.

Indichiamo con $A_1, A_2, \ldots . A_m$ e con $B_1, B_2, \ldots . B_m$ ciò che diventano rispettivamente le quantità di liquido $a + x$ e x, contenute nei recipienti A e B prima di cominciare l'operazione, dopo 1, 2, ... m coppie di operazioni. Dopo la $(s-1)^a$ doppia operazione, A_{s-1} sarà la quantità di liquido che si trova nel recipiente A e quella che si trova in B sarà B_{s-1} ossia $a + 2x - A_{s-1}$, perchè la somma del contenuto dei due recipienti deve mantenersi sempre la stessa $= a + 2x$. Se da A_{s-1} leviamo gli $\frac{r}{n}$ e li aggiungiamo a B_{s-1}, nel recipiente A ve ne resteranno $\frac{n-r}{n} A_{s-1}$ e nel recipiente B verranno ad essercene $a + 2x - \frac{n-r}{n} A_{s-1}$. Da questo togliamo gli $\frac{r}{n}$ del nuovo contenuto e versiamoli in A. Ciò che resta in B è la quantità:

$$\frac{n-r}{n}(a + 2x) - \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 A_{s-1} = B_s \qquad (1)$$

e ciò che viene ad essere contenuto in A è la quantità:

$$\left(\frac{n-r}{n}\right)^2 A_{s-1} + \frac{r}{n}(a+2x) = A_s. \tag{2}$$

In quest'ultima formula poniamo successivamente $s = 1, 2, 3\ldots$ si ha allora:

$$A_1 = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 A_0 + \frac{r}{n}(a+2x) = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 (a+x) + \frac{r}{n}(a+2x), \text{ poichè } A_0 = a+x,$$

$$A_2 = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 A_1 + \frac{r}{n}(a+2x) = \left(\frac{n-r}{n}\right)^4 (a+x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^2 (a+2x) + \frac{r}{n}(a+2x),$$

$$A_3 = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 A_2 + \frac{r}{n}(a+2x) = \left(\frac{n-r}{n}\right)^6 (a+x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^4 (a+2x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^2 (a+2x) + \frac{r}{n}(a+2x),$$

. . . .

Per induzione si dovrebbe avere:

$$A_p = \left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p}(a+x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-1)}(a+2x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-2)}(a+2x) + \ldots\ldots + \frac{r}{n}(a+2x). \tag{3}$$

Per persuadersi che ciò è infatti supponiamo che sia:

$$A_{p-1} = \left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-1)}(a+x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-2)}(a+2x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-3)}(a+2x) + \ldots\ldots + \frac{r}{n}(a+2x). \tag{4}$$

La relazione (2) ci dà allora, ponendosi per A_{p-1} il valore dato dalla (4),

$$A_p = \left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p}(a+x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-1)}(a+2x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-2)}(a+2x) + \ldots\ldots + \frac{r}{n}(a+2x)$$

che è precisamente la (3). Questo valore di A_p può essere ulteriormente modificato come segue:

$$A_p = \left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p}(a+x) + \frac{r}{n}(a+2x)\left[\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-1)} + \left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-2)} + \ldots + 1\right]$$

$$= \left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p}(a+x) + \frac{r}{n}(a+2x)\frac{1-\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p}}{1-\left(\frac{n-r}{n}\right)^2} =$$

$$a\left[\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p} + \frac{r}{n}\frac{1-\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p}}{1-\left(\frac{n-r}{n}\right)^2}\right] + x\left[\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p} + 2\frac{r}{n}\frac{1-\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p}}{1-\left(\frac{n-r}{n}\right)^2}\right] =$$

$$a\,\frac{n^{2p+1}+(n-r)^{2p+1}}{(2n-r)\,n^{2p}} + x\,\frac{2\,n^{2p+1}-r\,(n-r)^{2p}}{(2n-r)\,n^{2p}} \tag{5}$$

Per la relazione (1) si avrà:

$$B_p = \frac{n-r}{n}(a+2x) - \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 \left[a\frac{n^{2p-1}+(n-r)^{2p-1}}{(2n-r)\,n^{2p-2}} + x\frac{2n^{2p-1}-r(n-r)^{2p-2}}{(2n-r)\,n^{2p-2}}\right] =$$

$$a\,(n-r)\,\frac{n^{2p}-(n-r)^{2p}}{(2n-r)\,n^{2p}} + x\,(n-r)\,\frac{2n^{2p}+r\,(n-r)^{2p-1}}{(2n-r)\,n^{2p}}.$$

Si conosce il rapporto k di A_p a B_p: l'equazione

$$\frac{a\,\dfrac{n^{2p+1}+(n-r)^{2p+1}}{(2n-r)\,n^{2p}} + x\,\dfrac{2n^{2p+1}-r\,(n-r)^{2p}}{(2n-r)\,n^{2p}}}{a\,\dfrac{n^{2p}-(n-r)^{2p}}{(2n-r)\,n^{2p}} + x\,\dfrac{2n^{2p}+r\,(n-r)^{2p-1}}{(2n-r)\,n^{2p}}} = (n-r)\,k,$$

ci dà:

$$\frac{a}{x} = \frac{[2n^{2p+1}-r\,(n-r)^{2p}] - [2n^{2p}+r\,(n-r)^{2p-1}]\,(n-r)\,k}{[n^{2p}-(n-r)^{2p}]\,(n-r)\,k - [n^{2p+1}+(n-r)^{2p+1}]},$$

da cui finalmente:

$$x = \frac{[n^{2p}-(n-r)^{2p}]\,(n-r)\,k - [n^{2p+1}+(n-r)^{2p+1}]}{[2n^{2p+1}-r\,(n-r)^{2p}] - [2n^{2p}+r\,(n-r)^{2p-1}]\,(n-r)\,k}\,a.$$

Questo è il contenuto del recipiente B prima dell'operazione. Per avere quello del recipiente A basta costruire $a+x$ e si ha:

$$a+x = a\,.\,n\,.\,\frac{n^{2p}-(n-r)^{2p} - [n^{2p-1}+(n-r)^{2p-1}]\,(n-r)\,k}{2n^{2p+1}-r\,(n-r)^{2p} - [2n^{2p}+r\,(n-r)^{2p-1}]\,(n-r)\,k}.$$

Per avere i limiti di k riguardanti la possibilità del problema, osserviamo che x deve essere sempre positivo e che quindi il numeratore e il denominatore della frazione che ci dà x devono essere dello stesso segno. Il rapporto k è dunque compreso fra

$$\frac{n^{2p+1}+(n-r)^{2p+1}}{(n-r)\,[n^{2p}-(n-r)^{2p}]} \quad \text{e} \quad \frac{2n^{2p+1}-r\,(n-r)^{2p}}{(n-r)\,[2n^{2p}+r\,(n-r)^{2p-1}]}.$$

Di questi rapporti il maggiore è il primo. Ne concludiamo che k deve soddisfare la diseguaglianza

$$\frac{n^{2p+1}+(n-r)^{2p+1}}{(n-r)\,[n^{2p}-(n-r)^{2p}]} > k > \frac{2n^{2p+1}-r\,(n-r)^{2p}}{(n-r)\,[2n^{2p}+r\,(n-r)^{2p-1}]}.$$

100. *Dimostrare che, quando* n *tende all'infinito, si ha:*

$$\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

D. Besso.

Dimostrazione del Sig. *F. Mariantoni,* studente nella R. Università di Roma.

Dalla trigonometria si ha:

$$\frac{\text{arco sen}\,(x+h) - \text{arco sen}\,x}{h} = \frac{\text{arco sen}\left[(x+h)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+h)^2}\right]}{h} =$$

$$\frac{\text{arco sen}\,H}{h} = \frac{\text{arco sen}\,H}{H} \cdot \frac{H}{h},$$

dove, come si vede, H tende a zero con h.

Passando al limite per $h = 0$, e quindi $H = 0$, risulta:

$$\lim_{h=0} \frac{\text{arco sen}\,(x+h) - \text{arco sen}\,x}{h} = \lim_{H=0} \frac{\text{arco sen}\,H}{H} \cdot \lim_{h=0} \frac{H}{h},$$

e poichè

$$\lim_{H=0} \frac{\text{arco sen}\,H}{H} = 1 \text{ e } \lim_{h=0} \frac{H}{h} = \lim_{h=0} \frac{(x+h)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+h)^2}}{h} =$$

$$\lim_{h=0} \frac{2x+h}{(x+h)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+h)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

potremo porre, quando h è abbastanza piccolo:

$$\frac{\text{arco sen}\,(x+h) - \text{arco sen}\,x}{h} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \varepsilon,$$

con ε infinitesimo tendente a zero con h, od anche supponendo $h = \frac{1}{n}$, con n sufficientemente grande:

$$\text{arco sen}\left(x + \frac{1}{n}\right) - \text{arco sen}\,x = \frac{1}{\sqrt{n^2 - n^2 x^2}} + \frac{\varepsilon}{n}.$$

In questa formola x è suscettibile di tutti i valori da zero (incluso) ad 1 (escluso). Facendo nella medesima successivamente $x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots\ldots \frac{n-1}{n}$, si ottiene la serie d'uguaglianze:

$$\begin{aligned}
&\text{arco sen}\,\frac{1}{n} &&= \frac{1}{n} &&+ \frac{\varepsilon}{n},\\
&\text{arco sen}\,\frac{2}{n} - \text{arco sen}\,\frac{1}{n} &&= \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} &&+ \frac{\varepsilon}{n},\\
&\text{arco sen}\,\frac{3}{n} - \text{arco sen}\,\frac{2}{n} &&= \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} &&+ \frac{\varepsilon}{n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\text{arco sen}\,\frac{n}{n} - \text{arco sen}\,\frac{n-1}{n} &&= \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} &&+ \frac{\varepsilon}{n},
\end{aligned}$$

da cui, sommando membro a membro, si trae:

$$\text{arco sen}\,1 = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} + \frac{1}{n} + \varepsilon,$$

ossia :

$$\frac{\pi}{2} - \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} \right\} = \frac{1}{n} + \varepsilon .$$

Ora se n cresce oltre ogni limite il secondo membro diviene minore di ogni quantità assegnabile perchè, come si è detto, ε decresce con $\frac{1}{n}$; così la differenza al primo membro potendo esser resa in valore assoluto minore di ogni quantità arbitrariamente piccola ha per limite zero al tendere di n all'infinito, per cui:

$$\lim \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} \right\} = \frac{\pi}{2} .$$

101*. *A quale relazione devono soddisfare i coefficienti* a, b, c *affinchè il polinomio* $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + m$ *si possa mettere nella forma* $\left(x^2 + \frac{a}{2}x + p\right)^2$?

E, nell'ipotesi che quella relazione sia soddisfatta, risolvere l'equazione

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (*).$$

(D.r Besso).

Risposta del Sig. *P. Marano*, studente a Catania.

I. Poichè si ha:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + p\right)^2 = x^4 + ax^3 + \left(\frac{a^2}{4} + 2p\right)x^2 + apx + p^2 ,$$

affinchè questo polinomio sia identico al dato, dovranno aversi le relazioni:

$$a^2 + 8p = 4b , \qquad ap = c , \qquad p^2 = m.$$

Eliminando p dalle due prime risulta:

$$a^3 - 4ab + 8c = 0 , \ldots\ldots\ldots [1]$$

che è la relazione cercata.

La [1] esprime la condizione necessaria perchè il polinomio $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + m$ possa mettersi sotto la forma $\left(x^2 + \frac{a}{2}x + p\right)^2$, ma non quella sufficiente.

Stando nel campo dei numeri reali, perchè la trasformazione abbia luogo, si richiede inoltre che m sia positivo ed uguale a $\frac{c^2}{a^2}$. Il segno di p dipenderà poi dai segni di a e c, perchè $p = \frac{c}{a}$.

Ad es. nel caso del polinomio (**)

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$$

(*) Un'equazione particolare di questa classe, cioè l'equazione

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x = 81600$$

è stata risolta da *Luca Paciòli*.

(**) *V.* quistione 92*.

la relazione [1] è soddisfatta ed inoltre il termine indipendente da x è uguale a $\frac{c^2}{a^2}$, onde $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$ è il quadrato di $x^2 + 2x - 3$.

II. Per risolvere ora l'equazione

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

nell'ipotesi che $a^3 - 4ab + 8c = 0$, si aggiunga ai due membri un numero k tale che sia $k + d = \frac{c^2}{a^2}$, cioè $k = \frac{c^2}{a^2} - d$. Allora essa diviene:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + \frac{c^2}{a^2} = k,$$

ovvero: $\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{c}{a}\right)^2 = k$, e però $x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{c}{a} \mp \sqrt{k} = 0$

e l'equazione proposta essendo stata ridotta a due equazioni quadratiche si può considerare come risoluta.

Ad es. trattandosi dell'equazione

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 81600 = 0,$$

poichè $\frac{c}{a} = 1$, risulta $k = 81601$. Aggiungendo k ai due membri si avrà:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 81601,$$

e quindi

$$x^2 + x + 1 \mp \sqrt{81601} = 0.$$

Discussione. — *a*). $$\frac{c^2}{a^2} - d < 0.$$

Le quattro radici della proposta saranno immaginarie.

b). $$\frac{c^2}{a^2} - d = 0.$$

Allora l'equazione si riduce ad $x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{c}{a} = 0$. Si avranno due radici doppie, cioè:

$$x = -\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a}}.$$

In tale ipotesi queste due radici doppie sono reali e distinte, se $\frac{a^2}{16} > \frac{c}{a}$; sono immaginarie se $\frac{a^2}{16} < \frac{c}{a}$; e sono reali e coincidenti se $\frac{a^2}{16} = \frac{c}{a}$.

Un esempio dell'ultimo caso ce l'offre l'equazione:

$$x^4 + x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x + \frac{1}{256} = 0,$$

che si può scrivere:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right)^2 = 0, \quad \text{oppure:} \quad \left(x + \frac{1}{4}\right)^4 = 0,$$

che ha la radice quadrupla $x = -\frac{1}{4}$.

c). $$\frac{c^2}{a^2} - d > 0.$$

Allora da $$x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{c}{a} \mp \sqrt{k} = 0,$$
si trae:
$$x = -\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} \pm \sqrt{k}}.$$

Se $\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} - \sqrt{k} = 0$, si avranno quattro radici reali due delle quali coincidenti.

» $\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} + \sqrt{k} > 0$, e $\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} - \sqrt{k} < 0$, si avranno due radici reali e due immaginarie.

Se $\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} + \sqrt{k} < 0$, si avranno quattro radici immaginarie.

» $\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} + \sqrt{k} = 0$, si avranno quattro radici, una reale doppia, le altre due immaginarie.

» $\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} - \sqrt{k} = 0$, si avranno quattro radici reali una delle quali doppia.

L'ipotesi $\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} + \sqrt{k} = 0$, $\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} - \sqrt{k} = 0$ non è ammissibile, perchè darebbe $\sqrt{k} = 0$. (*)

103*. *In un tetraedro, se i coseni delle facce d'un triedro sono proporzionali alle lunghezze degli spigoli opposti, le altezze del tetraedro passano per uno stesso punto: reciprocamente se le altezze d'un tetraedro passano per uno stesso punto, in ciascun triedro i coseni delle facce sono proporzionali agli spigoli opposti.* (G. Riboni).

Dimostrazione del Sig. *G. Trapani*, studente a Catania.

Nel tetraedro $ABCD$ chiaminsi con α, β, γ le facce CAD, BAD, CAB e con S, S', S'' le lunghezze degli spigoli AB, AC, AD opposti.

Dai vertici B e C conducansi le perpendicolari BF, BF' alla costola AD. Dai triangoli rettangoli ABF, ACF', si ha:
$$AF = AB \cos\beta = S.\cos\beta; \qquad AF' = S'.\cos\alpha.$$
Ma per dato $S : S' = \cos\alpha : \cos\beta$, ossia $S.\cos\beta = S'.\cos\alpha$, quindi $AF = AF'$ e i punti F, F' coincidono: per conseguenza la costola BC è perpendicolare alla AD. Adunque il tetraedro ha le costole opposte rispettivamente perpendicolari fra loro e perciò le altezze s'incontrano in un punto (Cfr. Baltzer: *Ster.* § 6, 10).

(*) Soluzioni meno diffuse di questa quistione pervennero dai Sigg. *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico Bari), *G. Candido* (R. Liceo Lecce), *A. Dal Buono Sidoli* (R. Istituto tecn. Reggio Emilia).

Reciprocamente: consideriamo le altezze BG, CH, condotte dai vertici B e C alle facce opposte, che si taglino in un punto. Il loro piano taglierà le facce ABD, ACD secondo le rette BF, CF, perpendicolari alla AD. Allora dai triangoli rettangoli ABF, ACF, si ha:

$$AF = S . \cos\beta\,; \qquad AF = S' . \cos\alpha\,,$$

sicchè

$$S\cos\beta = S'\cos\alpha\,, \qquad \text{ossia} \quad S : S' = \cos\alpha : \cos\beta\,.$$

Analogamente si dimostra che $S' : S'' = \cos\beta : \cos\gamma$, onde

$$S : S' : S'' = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma\,.$$

Sono pervenute inoltre le soluzioni seguenti: quistione **108***. dal Sig. *V. Columbo, G. Russi Raggi*; **109***. *A. Baldassarre, V. Columbo*; **112**. *F. Mariantoni*; **113**. *S. Catania, G. Rozzolino*; **114**. *G. Santacroce, U. Scarpis*; **115**. *U. Scarpis*; **119**. *S. Catania, F. Mariantoni, G. Santacroce*; **120***. *E. G. Ricci*; **121***. *E. Bellezza, G. Candido, A. Gandolfi, D. Pacilli, G. Polverini, E. G. Ricci, G. Trapani*; **122***. *D. Pacilli, G. Trapani*; **123***. *E. Bellezza, A. Gandolfi, G. Russi Raggi, G. Trapani*; **124***. *G. Russi Raggi, G. Trapani*; **125***. *E. Bellezza, G. Candido, A. Gandolfi, G. Polverini, G. Russi Raggi, G. Trapani*, oltre ad una generalizzazione di quest'ultima quistione dal signor prof. *G. Russo* — soluzioni alle quali verrà data evasione nei fascicoli venturi.

La Redazione.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

126. Résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2 + 2t^2.$$

E. Fauquembergue.

127. Dimostrare che il numero dei modi nei quali un intero M può ottenersi come differenza di due quadrati interi, è dato dalla formola

$$\frac{(-1)^M (m_1+1)(m_2+1)\ldots.(m_n+1)(m-1)-\alpha}{2},$$

dove α è l'unità quando M è quadrato perfetto, zero negli altri casi, m denota l'esponente del fattore 2 ed $m_1, m_2, \ldots m_n$ gli esponenti degli altri fattori primi di M.

A. Tagiuri.

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

128*. Divisa la corda AB di un arco in tre parti uguali $AI = IE = EB$ e condotti i raggi OIM, OEN, dimostrare che il coseno dell'angolo medio, cioè $\cos IOE = \frac{4+5\cos\alpha}{5+4\cos\alpha}$, essendo angolo $AOB = \alpha$ l'angolo al centro.

129*. Di un pentagono $ABCDE$ si conoscono i lati $AB = a$, $BC = CD = 2a$, $DE = 3a$, $EA = 4a$ e gli angoli $EAB = BCD = 120^\circ$, si calcolino gli altri elementi per la sola geometria.

G. Bellacchi.

130*. Senza valersi della teoria dell'equivalenza e senza sostituire ai segmenti i numeri che servono loro di misura, dimostrare il seguente teorema: Se si costruisce un triangolo rettangolo, che abbia per cateti la diagonale ed il lato di un quadrato, e poi se ne costruisce un altro che abbia per cateti il lato di quel quadrato e l'ipotenusa del primo triangolo, l'ipotenusa del secondo triangolo sarà eguale al doppio del lato di quel quadrato (*).

E. De Amicis.

131*. Le potenze di un intero a qualsivoglia, sono sempre esprimibili mediante la somma di a termini consecutivi della serie dei numeri dispari.

F. P. Paternò.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Elementi di Geometria, a uso delle Scuole Secondarie inferiori, di G. Riboni, corredati da una raccolta di circa seicento esercizi, per cura di D. Gambioli. — Bologna, Ditta Nicola Zanichelli, 1892. Prezzo: L. 2.

Gli elementi di Geometria del sig. Prof. G. Riboni, mi sembrano molto adattati per le scuole alle quali sono destinati. Ai medesimi accresce pregio la collezione numerosa di esercizi aggiuntivi per cura del Sig. Prof. D. Gambioli. Carettere precipuo del libro è l' indirizzo pratico a cui è informato, sia sotto il riguardo delle dimostrazioni, come rispetto alle applicazioni, che vi sono numerose, per modo che il medesimo ritengo riuscirà di facile lettura per i giovinetti delle scuole secondarie inferiori.

Il principio di anteporre la teoria della misura a quella delle proporzioni, quivi trattate coi numeri, è da lodarsi, siccome quello che vale ad appianare la

(*) L'alunno può giovarsi delle proporzioni fra grandezze geometriche.

maggiore delle difficoltà che presenta lo studio della geometria elementare. Del resto in un libro destinato a scuole inferiori nemmeno poteva balenare il pensiero di svolgere la teorica delle proporzioni tra grandezze altrimenti che con numeri.

Tanto la planimetria che la stereometria sono contenute nei presenti elementi in giusta misura, ma più questa che quella. Trovo ad es: la teoria delle parallele esposta con dettagli forse maggiori del necessario, i teoremi 4 e 7 a pag. 60 e 62, riguardanti i caratteri pei quali un quadrilatero è inscrittibile e circoscrittibile ad una circonferenza, superflui. Qualche dimostrazione sarebbe a mio giudizio da sostituire con altra più semplice; quella ad es. del 3 teo. a pag. 30, relativa al confronto di due triangoli aventi due lati uguali a due lati e disuguali gli angoli compresi, che coll' esposizione dell' A., riuscirà difficile se non a comprendere almeno a ritenere dai discenti. Da notarsi pure un certo abuso di postulati nei preliminari: per me i postulati 9° a pag. 5 e 7°, 8° e 9° a pag. 6 sarebbero da omettersi in un libro come il presente. L'amore di brevità ha condotto l' A. a dare talvolta dimostrazioni forse troppo succinte, ma potrà supplire a ciò l'insegnante. Alla proposizione enunciata a pag. 48, ossia « due segmenti circolari sono eguali quando sono eguali i loro archi », va aggiunto « ed i loro raggi ».

A taluno potrà parere difetto la numerazione non continua dei teoremi e il non richiamare con numeri i teoremi man mano invocati. Siccome il far ciò non avrebbe arrecato probabilmente inconvenienti alla compagine del libro, consiglierei l'A. in una prossima edizione, a render continua la numerazione, aggiungendo gli opportuni richiami.

Voglia l'egregio collega considerare questi pochi appunti al suo lavoro, come ispirati dal desiderio di veder reso ancora migliore un libro che sotto modesta apparenza racchiude non comuni pregi didattici ed è a parer mio destinato a non finire dimenticato nei polverosi scaffali delle librerie.

A. Lugli.

Dott. OSKAR SCHLÖMILCH. — *Elementi di geometria metrica.* Prima versione italiana dei Professori D. Gambioli e V. Bernardi. — Parte III. — Ditta G. B. Paravia e Comp., 1891. Prezzo: L. 4.

Già ho riferito sulla 2ª parte di quest'opera nel fas. III dell'anno 1891 di questo giornale e per dar esito alla promessa allora fatta, mi occupo qui della 3ª parte.

In questa, come nella parte precedente, riscontransi gli stessi caratteri di omissione dei particolari e concisione che permettono di avere, in un libro di mole relativamente piccola, lo sviluppo della *stereometria, trigonometria sferica* e *geometria descrittiva.* Il libro consta di 11 capitoli, oltre ad un'appendice dei traduttori, i cui titoli sono: — 1°. Rette e piani nello spazio — 2°. L'angolo solido — 3°. Corpi racchiusi da superficie piane — 4°. Confronto e misura dei poliedri — 5°. Generazione delle superficie e corpi rotondi — 6°. Le sezioni coniche — 7°. Misure dei corpi rotondi — 8°. Calcolo dei triangoli sferici — 9°. Applicazioni stereometriche della trigonometria sferica — 10°. Proiezione parallela — 11°. La proiezione prospettica.

Senza entrare in minuti dettagli, mi limiterò, per ciascuno di essi, ad accennare quegli argomenti che costituiscono a mio giudizio il principale pregio dell'opera.

Cap. 2°. — Molto semplice la dimostrazione del teorema che stabilisce la relazione fra le facce d'un triedro ed i diedri del triedro supplementare. Chi ha pratica della scuola sa che il teorema in discorso, come trovasi esposto nei più usitati manuali di geometria, riesce difficile ai discenti — Costruzione degli elementi incogniti del triedro in tutti i casi in cui son dati gli elementi che valgono a determinarlo.

Cap. 3°. — Nuova e facile dimostrazione del teorema d'Eulero relativo al numero dei vertici degli spigoli e delle facce di un poliedro — Le limitazioni pel numero degli spigoli e dei vertici, in funzione del numero delle facce, nei poliedri euleriani — La costruzione della piramide n^{gona} in due casi notevoli e le reti dei poliedri regolari.

Cap. 4°. e 7°. — Volume della piramide triangolare e della sfera con applicazione del principio espresso dalla relazione $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1^m+2^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}}=\frac{1}{m+1}$. — Volume del tronco di piramide a basi parallele sotto una nuova forma, oltre a quella ordinaria. — Volume del prismatoide.

Cap. 6°. — (Esso merita menzione speciale per la trattazione fuori dell'usuale con la quale sono sviluppate elementarmente le proprietà delle celebri curve che derivano dalla sezione del cono. Senza far confronti con manuali scolastici italiani, perchè pochi ve ne sono in cui siano considerate le sezioni coniche, come quelle che non fan parte dell'insegnamento elementare delle matematiche nei programmi delle nostre scuole, eccezione fatta pel IV° corso della sezione fisico matematica degli Istituti tecnici, e forse a torto, la trattazione dell'A. sembrami preferibile a quella di molti libri scolastici stranieri).

Genesi delle sezioni del cono circolare retto ottenute con un piano, comunque posto, rispetto all'asse e che sega l'asse, è parallelo ad una generatrice, o, sega le due generatrici di una sezione meridiana. — Le seguenti proprietà generali delle sezioni coniche: « per ogni punto d'una sezione conica il rapporto del suo raggio vettore alla sua distanza dalla direttrice è costante ed uguale alla caratteristica della sezione » e « la tangente ad un punto qualunque d'una sezione conica e la perpendicolare innalzata dal fuoco al corrispondente raggio vettore, passano per uno stesso punto della direttrice ». — « Qualunque sezione ellittica del cono può essere ottenuta da un determinato cilindro » — « Qualunque sezione iperbolica d'una superficie conica qualunque, si può trasportare in un nuovo cono determinato, in modo che il piano di sezione sia parallelo all'asse » — « Il parallelogrammo contenuto dalle distanze di un punto dell'iperbole, prese parallelamente agli assintoti, e dagli assintoti ha per area costante la metà del rettangolo dei semiassi » — Quadratura della parabola, dell'ellisse e dell'iperbole. — « I centri (vertici) di tutte le superficie coniche sulle quali si può trasportare una parabola data, si trovano su una seconda parabola, il cui piano è perpendicolare al piano della parabola data, il cui vertice è il fuoco ed il cui fuoco è il vertice della prima parabola; gli assi delle corrispondenti superficie coniche sono le tangenti alla seconda parabola » e teoremi analoghi per l'ellisse e per l'iperbole.

Cap. 8° — Espressioni di Cagnoli, Eulero e Lhuilier per l'eccesso sferico — Il teorema importante « Un piccolo triangolo sferico curvilineo può essere considerato come un triangolo piano, i cui lati hanno uguali lunghezze ed i cui angoli sono costruiti in modo che ogni angolo del triangolo sferico sia stato diminuito della terza parte dell'eccesso sferico ».

Cap. 9° — Volume del prisma triangolare espresso mediante le aree delle facce laterali e della base, e degli angoli diedri formati dalle prime fra loro e colla base — Espressioni dei raggi delle sfere inscritte e circoscritte ai singoli poliedri regolari e le aree ed i volumi di questi.

Cap. 10° — Rappresentazioni delle sezioni piane delle superficie coniche, cilindriche e di rivoluzione e di queste fra loro.

Tutto ciò per l'opera originale. Nell'appendice sono risoluti alcuni problemi di planimetria, stereometria e trigonometria ed altri vengono proposti allo studioso. Fra i problemi sviluppati, cosa ben fatta, è considerata la quistione: « dimostrare che se le bisettrici dei due angoli d'un triangolo sono uguali, esso è isoscele ». Ciascun capitolo è stato arricchito dai traduttori, con molta opportunità, d'una serie d'esercizi: peccato che non sempre essi siano bene coordinati agli argomenti sviluppati nel capitolo. Negli esercizi relativi al cap. 8° trovansi notati i valori di tutti gli elementi appartenenti a 17 triangoli sferici, ciò che fornisce soggetto di utilissima applicazione per lo studioso.

Qualcuno potrà muovere obbiezione riguardo al metodo a cui è informata questa, come le parti precedenti, della geometria elementare del dott. Schlömilch, che non è certo il sintetico, ma è un passo innanzi nel metodo analitico di trattare la geometria, iniziato dal Legendre. È perciò che prescindendo dal metodo innovatore al quale l'opera è informata, che pure ha trovato accoglimento favorevole nella patria d'Arminio, tanto da permettere alla I parte dell'opera di giungere alla 7ª edizione, alla II parte di giungere alla 6ª ed alla III di pervenire alla 3ª edizione, l'opera è consigliabile per gli alunni degli Istituti tecnici, più che per quelli dei Licei, ne' quali i metodi della pura geometria sono in qualche maniera prescritti anche dai programmi. Non dico poi che qualche appunto non fosse da muoversi alla medesima anche sotto il rispetto didattico, in quanto il desiderio d'innovare ha portato talvolta l'A. ad escogitare dimostrazioni meno dirette di quelle ordinarie e sopratutto è un ostacolo per la facile intelligenza del libro la rigidità dello stile.

Riguardo alla traduzione non posso passare sotto silenzio che vi si trovano frequentissimi gli errori di stampa e frequenti le imperfezioni e scorrezioni del periodo.

A. Lugli.

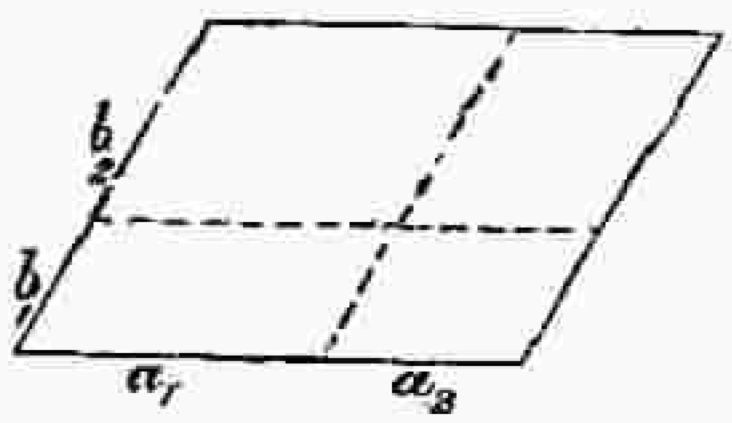
NB. L'elenco delle pubblicazioni ricevute, dalla chiusura del fasc. I, viene rimandato al fascicolo venturo.

Chiusura della redazione il dì 11 marzo 1892.

A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

Il chiarissimo dottor Gino Loria, che insegna l'alta geometria nell'università ligure e con pregevoli scritti alacremente ne cura il progresso, or sono tre anni pubblicò un suo bello studio sul *Periodo aureo della geometria greca*, il quale trovasi inserito fra le memorie della R. Accademia scientifica di Torino, serie II, tomo XL. Come i nordici abitatori dell'Europa lasciano le umide nebbie del loro clima, e vengono a ritemprare la salute al sereno e caldo cielo delle regioni meridionali, così il valente geometra abbandona per alcun tempo le moderne ricerche sugli spazi ad *n* dimensioni, sulle geometrie infinitesimali, proiettive e cinematiche per tornare alle pure sorgenti della scuola greco-alessandrina, e con dilettevole stile rinverdire l'antica sintesi di Euclide, di Archimede e di Apollonio. Dal commento di Teone apparisce esser vissuto Euclide tre secoli innanzi Cristo, aver unite ed ordinate le proprietà dello spazio scoperte da Talete, da Eudosso e dai Pitagorici. I suoi famosi elementi di geometria trattano delle figure poligone e poliedriche, delle grandezze commensurabili ed irrazionali; in virtù di alcuni semplici postulati per intersezioni di rette e circonferenze ivi si costruiscono le incognite dei problemi, e per una catena di sillogismi rigorosi dalle definizioni semplici e chiare deduconsi le relazioni di sito e di grandezza fra le varie parti delle figure. Sebbene Euclide non faccia parola del moto geometrico, considera la circonferenza generata per la rotazione dell'estremo di un segmento rettilineo che abbia fisso l'altro estremo sul piano, escludendo ogni istrumento meccanico. Nel dimostrare l'eguaglianza degli angoli alla base di un triangolo isoscele considera due triangoli non sovrapponibili per moto di scorrimento; perocchè sia necessario di far girare prima nello spazio uno dei triangoli attorno ad un suo lato, abbatterlo sopra la banda opposta, e poi trasferirlo a coincidere sul secondo. Le prove euclidee sopra i casi di eguaglianza dei triangoli e varie costruzioni dei quesiti si possono applicare alla sfera, purchè si sostituiscano circonferenze massime alle rette; valga ad esempio la regola per tracciare le tangenti ad un circolo da un punto esterno. La 47$^{\text{sima}}$ proposizione del I libro è la più attraente e feconda per le conseguenze: da essa discende il modo di costruire un quadrato equivalente al rettangolo descritto con i lati $a > b$ od alla somma e differenza di figure poligone: seguendo lo stesso metodo provasi l'equivalenza dei rettangoli che hanno per basi due lati di un triangolo qualunque e per altezze le proiezioni di ciascuno sull'altro; ricavandone le dirette dimostrazioni dei teoremi 12 e 13 del II libro. Introducendo le notazioni $(a, b)_\alpha$ per indicare il parallelogrammo disegnato con i lati a, b e l'angolo compreso α; $(a)_\alpha$, se abbiasi $a = b$, od il rombo che ha il lato a e l'angolo α; (a, b) il rettangolo descritto con i lati a, b ed infine (a) il quadrato costruito sul segmento a, col raziocinio delle prime proposizioni del II libro euclidiano trovansi le identità

$$(1) \quad (a, b)_\alpha + (a, c)_\alpha = (a, b + c)_\alpha; \; (a, 2b)_\alpha = 2\,(a, b)_\alpha; \; (2a, 2b)_\alpha = 2\,(a, 2b)_\alpha = 4\,(a, b)_\alpha.$$



Il parallelogrammo avente per lati le somme $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$, mediante le parallele condotte dagli estremi comuni ai segmenti si decompone in quattro parallelogrammi e quindi resulta l'identità

$$(2) \quad (a_1 + a_2, b_1 + b_2)_\alpha = (a_1, b_1)_\alpha + (a_2, b_1)_\alpha + (a_1, b_2)_\alpha + (a_2, b_2)_\alpha$$

simile all'aritmetica esprimente il prodotto di una somma per una somma ed estendibile al parallelogrammo costruito con i lati $a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_m, b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. La medesima figura o la (2) fornisce l'identità

$$(3) \quad (a_1 + a_2, b_1 + b_2)_\alpha - (a_1, b_1)_\alpha = (a_1, b_2)_\alpha + (a_2, b_1 + b_2)_\alpha.$$

In particolare facendo $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$ la (2) diviene

$$(4) \qquad (a_1 + a_2)_\alpha = (a_1)_\alpha + 2\,(a_2, a_1)_\alpha + (a_2)_\alpha,$$

che per $\alpha = 90°$ simboleggia il teorema 4° del secondo libro; e la (3) si riduce alla

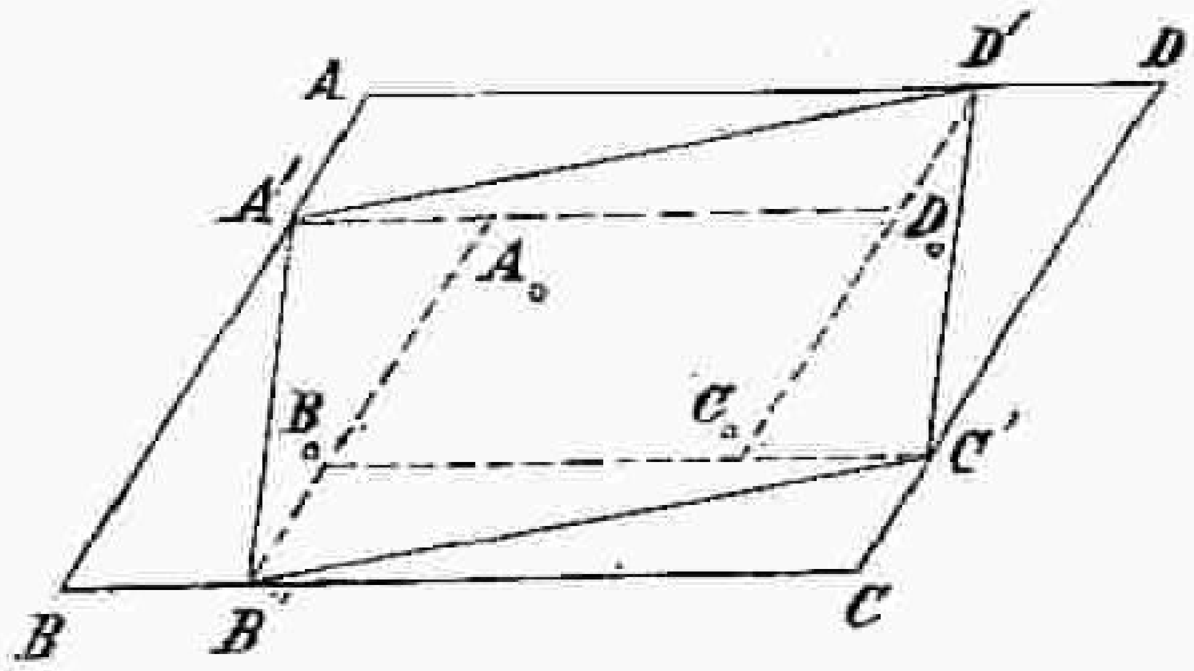
$$(a_1 + a_2)_\alpha - (a_1)_\alpha = (a_1, a_2)_\alpha + (a_2, a_1 + a_2)_\alpha = (2a_1 + a_2, a_2)_\alpha :$$

ovvero ponendo $a_2 = a - a_1$ si ottiene

$$(a)_\alpha - (a_1)_\alpha = (a + a_1, a - a_1)_\alpha ;$$

dunque la differenza di due rombi equiangoli si trasforma nel parallelogrammo avente per lati la somma e la differenza dei loro lati e con i medesimi angoli.

Il parallelogrammo $ABCD$ mediante due trasversali $A'C'$, $B'D'$ condotte per il suo centro è decomponibile in quattro triangoli a due a due congrui ($AA'D'$, $B'CC'$) ($BA'B'$, $D'DC'$) e nel parallelogrammo interno $A'B'C'D'$, di cui due lati sono i segmenti $A'B' =$



$D'C' = c_1$, $B'C' = A'D' = c_2$ inclinati secondo l'angolo $\omega = A'B'C'$: ponendo $BB' = a_1$, $B'C = a_2$, $BA' = b_1$, $A'A = b_2$, ed osservando che i detti triangoli formano due parallelogrammi, si ottiene l'identità geometrica

$$(a_1 + a_2, b_1 + b_2)_\alpha = (a_1, b_1)_\alpha + (a_2, b_2)_\alpha + (c_1, c_2)_\omega ,$$

e per i valori $b_2 = a_1$, $b_1 = a_2$ si riduce al rombo $(a_1 + a_2)_\alpha = 2(a_1, a_2)_\alpha + (c_1, c_2)_\omega$, e nel caso di $\alpha = 90°$ il rombo insieme al parallelogrammo interno divengono quadrati; onde la relazione $(a_1 + a_2) = 2(a_1, a_2) + (c_1)$ e togliendo il comune rettangolo $2(a_1, a_2)$ resulta $(a_1) + (a_2) = (c_1)$ significante il teorema pitagorico. In un rombo $ABCD$ sopposti i lati $A'B'$, $B'C'$ paralleli alle diagonali AC, BD si hanno $\omega = 90°$, $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$ e l'identità generale riducesi alla $(a_1 + a_2)_\alpha = (a_1)_\alpha + (a_2)_\alpha + (c_1, c_2)$, e quindi $2(a_1, a_2)_\alpha = (c_1, c_2)$.

Se nel surriferito parallelogrammo $ABCD$ si tirino per i punti A', B', C', D' le parallele ai suoi lati fino a segarsi fra loro, si ottengono cinque parallelogrammi equiangoli gli opposti congrui, e lo interno $A_0 B_0 C_0 D_0$ avente per lati $A_0 B_0 = b_1 - b_2$, $B_0 C_0 = a_2 - a_1$; onde l'identità

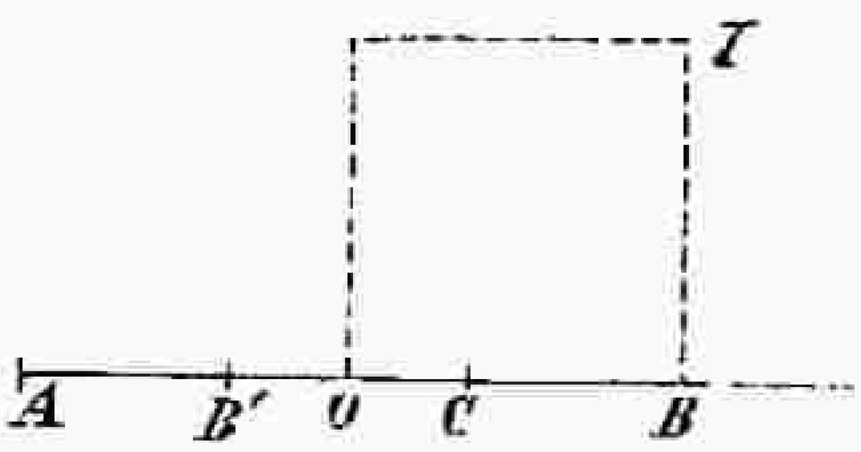
$$(a_1 + a_2, b_1 + b_2)\alpha = 2(a_1, b_1)\alpha + 2(a_2, b_2)\alpha + (a_2 - a_1, b_1 - b_2)\alpha$$

che per $b_1 = a_2$, $b_2 = a_1$ si riduce alla

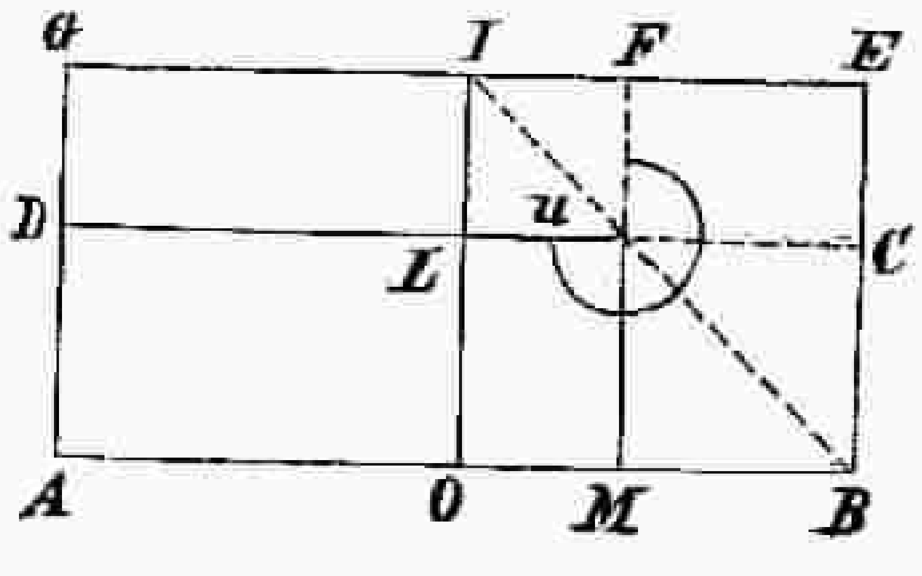
$$(a_1 + a_2)\alpha = 4(a_1, a_2)\alpha + (a_2 - a_1)\alpha$$

e per $\alpha = 90^\circ$ corrispondono a note identità algebriche.

Sia C un punto interno del segmento AB ed O il punto medio, ne risulta $(AO) - (OC) = (AO + OC, AO - OC) = (AC, CB)$, ovvero $(AO) = (AC, CB) + (OC)$ che è il teorema 5° del libro II: similmente per un punto esterno D si deduce $(OD) - (OB) = (AD, BD)$ significante il teorema 6°.



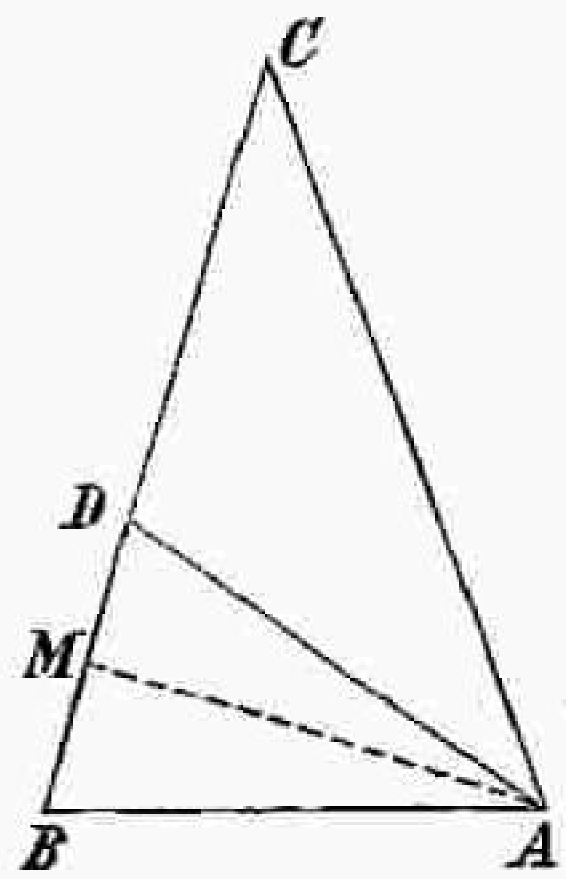
Rappresenti AC il segmento aureo di AB, cioè $(AC) = (AB, CB) = (AB, AB - AC)$, poichè $(AB) = (AB, AC) + (AB, AB - AC)$, a motivo dell'ipotesi precedente si ottiene $(AB) = (AB, AC) + (AC) = 2(AO, AC) + (AC)$, ed aggiungendovi il quadrato costruito sopra AO ne deriva $(AB) + (AO) = (AO + AC)$; il il primo membro di questa eguaglia il quadrato dell'ipotenusa AI, essendo AB e $BI = AO$ i cateti del triangolo rettangolo, onde $AI = AO + AC$, da cui $AC = AI - AO$ identica alla soluzione euclidea, prop: 2ª, libro II. Parimente dalla relazione $(AC) = (AB, CB) = (AC + CB, CB) = (AC, CB) + (CB)$ si deduce $(CB) = (AC) - (AC, CB) = (AC, AC - CB)$; quindi preso il punto B' simmetrico di B rispetto C, l'ultima equivale a $(B'C) = (AC, AC - B'C)$, onde $B'C$ è il segmento aureo di AC.



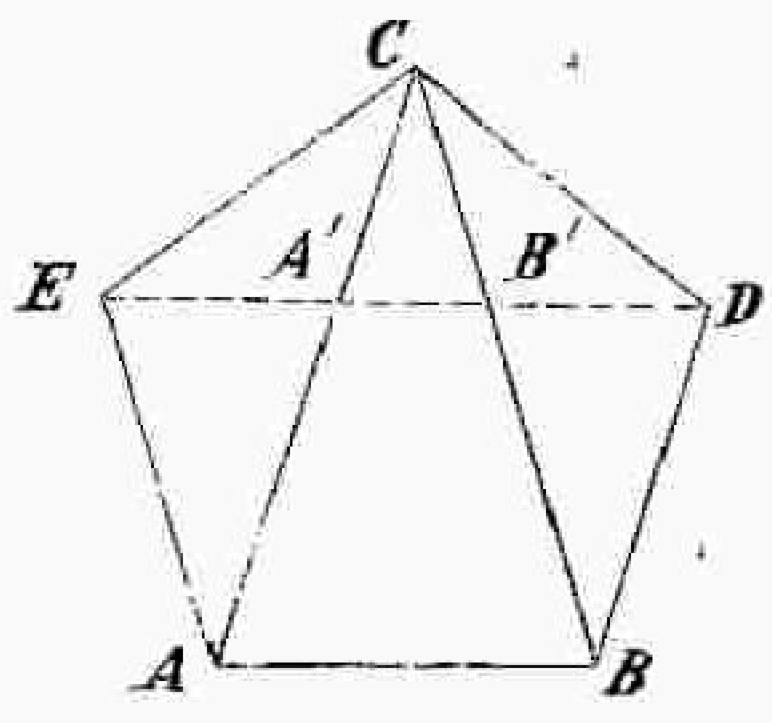
Disegnando i quadrati sulle parti eguali AO, OB ed il rettangolo $AMUD$ con le parti diseguali AM, MB, lo gnomone $ULOBEFU$ equivale al detto rettangolo e perciò questo è minore del quadrato descritto sopra AO metà del semiperimetro, dunque fra tutti i rettangoli isoperimetri il quadrato ha la massima superficie; proposizione simile alla 27^{sima} del VI libro.

Anche le relazioni fra i segmenti determinati dalle corde circolari segantisi dentro o fuori del cerchio, sono dedotte dall'equivalenza delle superficie indipendentemente dai numeri e dalle formole metriche.

Nel III° libro Euclide applica la sezione aurea a costruire il triangolo isoscele, di cui gli angoli alla base siano doppi dell'angolo al vertice, e sussiste pure la proposizione reciproca. Infatti nel triangolo isoscele ACB si suppongano gli angoli $A = B = 2\,C$; tirata la bisettrice AD dell'angolo CAB ne conseguono $BA = AD = DC$ e significando con M il mezzo di BD, si deduce $(AD) = (AM) + (MD)$, ovvero $(DC) + (MC) = (AM) + (MD) + (MC) = (AC) + (MD) = (BC) + (MD) = (BM + MC) + (MD) = (BM) + 2(BM,\ MC) + (MC) + (MD)$ e quindi resulta $(DC) = 2(BM) + 2(BM,\ MC) = (BD,\ BC)$; dunque *se un triangolo isoscele abbia gli angoli eguali dupli dell'angolo al vertice, la sua base pareggia il segmento aureo di ciascuno degli altri lati.*

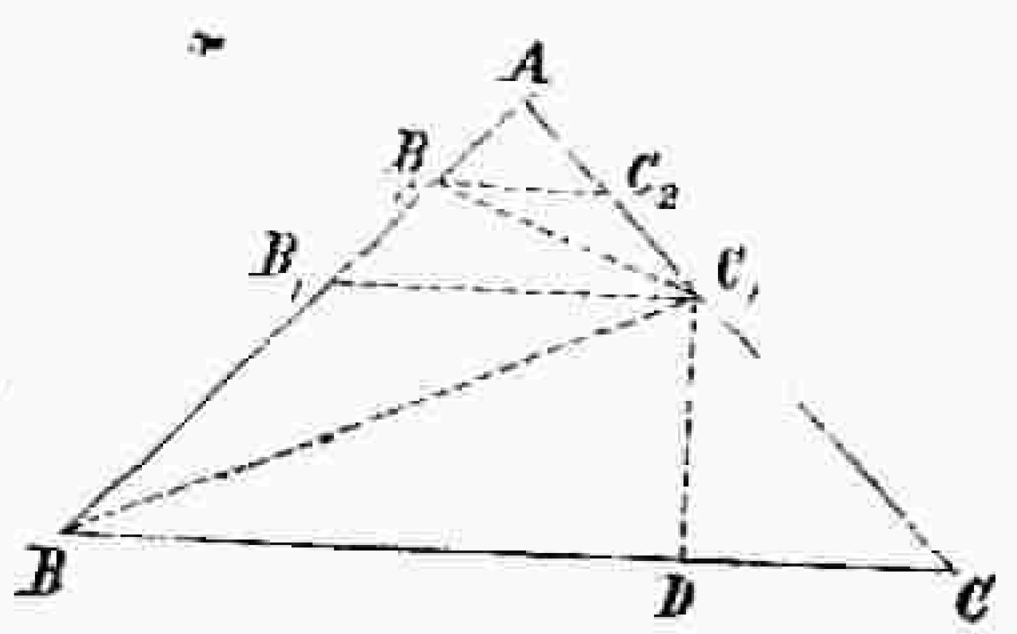


In questo triangolo ABC si prendano $AA' = BB' = AB$, e sulla $A'B'$ parallela ad AB si seghino le parti $A'E = B'D = A'C = B'C$, la figura $ECDBA$ sarà un pentagono regolare perchè $B'C$ è il segmento aureo di $BB' = AB$ e di EB' a motivo del triangolo ECB' avente gli angoli alla base doppi dell' angolo al vertice, onde $EB' = AB$ ecc. Dalle costruzioni del quadrato, del pentagono, e dell'esagono regolari Euclide concluse potersi dividere la circonferenza in archi eguali secondo i numeri 2^m, $2^m.3$, $2^m.5$, $2^m.3.5$ con m intero e positivo. - Il napoletano Alfonso Borelli, professore di matematica all'Università di Pisa nell'anno 1658 stampò



l'*Euclides restitutus* riformando l'ordine delle proposizioni e semplificando i ragionamenti; così dimostra un triangolo isoscele ABC esser pure isoangolo, costruendo il triangolo $A'B'C$ simmetrico del primo rispetto al vertice C e sovrapponendo l'angolo $B'CA'$ sull'eguale ACB mediante la coincidenza di $B'C$ con CA e di CA' con CB. La congruenza di due triangoli ABC, $A'B'C'$ aventi i tre lati rispettivamente eguali è da lui provata col situarli in posizioni simmetriche e coi lati AB, $A'B'$ coincidenti; condotta la retta CC' ricava per i triangoli isosceli ACC', BCC' l'eguaglianza degli angoli C, C'. Nella teorica delle parallele al postulato euclideo sostituì il principio *il luogo geometrico dell'estremo di un segmento rettilineo* l *costante e normale ad una retta* a, *dove giace l' altro estremo, comporsi di due rette* a', a'' *simmetriche ed ortogonali con* l. Le proprietà elementari del cerchio sono esposte dal Borelli nel 2° libro, vi determina il centro d'una circonferenza descritta per l'incontro delle normali bisecanti due corde aventi un estremo comune. Al termine di questo suo libro distingue le quantità commensurabili dalle irrazionali e premette il lemma euclideo *date due grandezze disuguali* $a > b$, *se dalla maggiore* a *si tolga la parte* $a' > \frac{a}{2}$ *e dal residuo* $a - a'$ *si tolga* $a'' > \frac{a - a'}{2}$ *e così da ciascun residuo più della sua metà, proseguendo si giungerà ad una grandezza minore della* b.

Considera un triangolo ABC avente l'angolo retto A ed i lati $CA = AB$, tirata la bisettrice BC_1 dell'angolo B fino a segare in C_1 il lato CA e da C_1 la perpendicolare C_1D a BC, a motivo di $BD = BA > \frac{BC}{2}$, si avrà $DC = BC - AB$ e $DC = C_1D = AC_1$; condotta



la parallela C_1B_1 a CB, nel triangolo rettangolo isoscele AC_1B_1 i cateti eguagliano il residuo DC, e la C_1B_2, bisettrice dell'angolo $B_1C_1A = C$, sega dal lato $AB_1 = DC$ il segmento $B_1B_2 > \frac{AB_1}{2}$ e così tirando B_2C_2 parallela a BC si ottiene il triangolo isoscele $A B_2 C_2$ ecc.; in ognuno di questi triangoli per la bisettrice dell'angolo acuto si sottrae da ciascun cateto più della sua metà; onde si giungerà ad un triangolo $A B_n C_n$ isoscele rettangolo e tale che i lati $C_n A = A B_n$ risulteranno minori di qualsivoglia piccolissimo segmento. Ora se $B C$ avesse una comune misura d col lato $A C$, sarebbero tanto $A C_1 = B C - A C$, quanto $B_1 C_1 = B C - 2 A C_1$ multipli di d; e così tutti i lati dei successivi triangoli isosceli e l'ultimo $A B_n$ verrebbero multipli della grandezza finita d; conclusione assurda perchè $A B_n$ può ridursi minore di d, dunque la diagonale $B C$ del quadrato è incommensurabile con il lato $A C$. Il Borelli inserisce i teoremi di Archimede sul circolo, ed applicando il metodo di esaustione prova esser il circolo equivalente al triangolo, che abbia la base eguale alla circonferenza e l'altezza pari al raggio. Dimostra la proposizione di Snellio essere il poligono regolare iscritto di $2n$ lati medio proporzionale fra i poligoni regolari iscritto e circoscritto di n lati, e vi aggiunge il teorema di Galileo *ogni circolo esser medio proporzionale fra due poligoni regolari simili, l'uno iscrittovi e l'altro isoperimetro con la circonferenza.* Il germe delle figure inverse contiensi in una osservazione del Borelli; che tirando una trasversale s per un punto A di una circonferenza ed indicati con M il secondo punto di sezione, con M' l'incontro di s con una retta fissa r prova l'esser costante il rettangolo $A M \times A M'$. Nella geometria dello spazio costruisce il triedro avente faccie date, disegnando in un cerchio col centro S e col raggio arbitrario $S A$ gli angoli piani $A S B$, $B S C$, $C S D$; condotte le corde $A M A'$, $D N D'$ normali alle rispettive rette $S B$, $S C$ e segantisi in P, innalza da questo al piano del cerchio la perpendicolare $P A_o$, il cui quadrato equivalga al rettangolo dei segmenti $A P$, $P A'$ o dei segmenti $D P$, $P D'$ ed i triangoli $A_o S M$, $A_o S N$ sono respettivamente eguali ai triangoli $A S M$, $D S N$. Il Borelli definì le superficie coniche e cilindriche, come luoghi delle rette congiungenti i punti di una curva piana ad un punto fisso esterno al piano, o parallele fra loro. Infine terminerò coll'accennare che nell'Euclide riformato l'autore prova l'equivalenza delle piramidi triangolari, che hanno la medesima altezza h e le basi di egual superficie, inscrivendo in ciascuna piramide prismi interni e circoscrivendo prismi esterni di altezza $\frac{h}{2^n}$, e la somma degl'interni mostra differire da quella degli esterni per il prisma costruito sulla base della prima piramide; quindi la differenza potersi ridurre minore di qualunque piccolissima grandezza.

(Continua). G. BELLACCHI.

DELL'ANALISI INDETERMINATA DI SECONDO GRADO

(Continuazione, V. pag. 49).

15. *Osservazioni.* — *a*) Nell'applicare il metodo dichiarato nel n. 13, invece di far uso di tutte le equazioni del sistema $[B]$, si potrebbe far uso di quelle soltanto che occupano posto pari. Infatti, ragionando come nel n. 13, facilmente si dimostra che, se (x_1, y_1) è soluzione, singolare o no, della proposta equazione, si ha:

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right) (\pm k + h \sqrt{D}),$$

essendo (k, h) una soluzione della 2ª equazione. Che inoltre, se (k, h) non è singolare,

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^3 (\pm k'' + h'' \sqrt{D}),$$

indicando con (k'', h'') una soluzione della 4ª equazione. E via così. Che insomma

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^{\lambda} (\pm x' + y' \sqrt{D}), \qquad [10]$$

λ essendo dispari ed (x', y') soluzione singolare dell'equazione $(\lambda + 1)^a$.

Derivando le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ dalla [10] per λ dispari, il che equivale a far uso del sistema $[B]$, dopo averne escluso le equazioni di posto impari, si ha il vantaggio di ottenere tutte le soluzioni dell'equazione proposta senza ripetizioni e, ove si voglia, ordinate per ragion di grandezza dalla minima in poi. Infatti le dette soluzioni cresceranno al crescere di λ e, per ogni particolar valore di λ, al crescere del valore algebrico della quantità $\pm x'$ (si tralascia per brevità la dimostrazione, già data per casi consimili nei n. 3, 6 e 10 di questo scritto).

Noteremo peraltro, a fine di giusticare l'uso dell'intero sistema [B], e conseguentemente della [10] per λ pari o dispari, che facendo uso delle sole equazioni di posto pari, epperò della [10] per λ dispari soltanto, la soluzione singolare dalla quale si deriva una certa soluzione (x_1, y_1) dell'equazione proposta, appartenendo a equazione di posto più avanzato nel sistema [B], potrebbe risultar maggiore, epperò più difficile a determinarsi, che non facendo uso di tutte le equazioni del sistema medesimo. È facile il verificarlo.

b) Dalla formola

$$y > \frac{m+\sqrt{D}}{m+\sqrt{D}+1} \cdot \frac{y'}{(\sqrt{D}-m)^{\lambda-1}},$$

dimostrata nel n. 14, risulta che, applicando il metodo alla determinazione delle soluzioni minori di Δ, limitazione assegnata alla y, il numero λ dei passaggi da equazione ad equazione del sistema [B] deve soddisfare la condizione

$$\Delta > \frac{m+\sqrt{D}}{m+\sqrt{D}+1} \cdot \frac{1}{(\sqrt{D}-m)^{\lambda-1}}.$$

Dalla quale si ottiene:

$$\lambda < \frac{\log \Delta + \log (m+\sqrt{D}+1) - \log n}{\log (m+\sqrt{D}) - \log n}.$$

Questa osservazione fa riscontro ad altra simile, contenuta nel n. 11, e, come quivi è detto, la limitazione Δ potrebbe esser quella che definisce le soluzioni fondamentali.

c) Chiamando δ il massimo comun divisore fra m ed n, sulle successive equazioni del sistema [B] non occorrerà provare che quei valori di y i quali rendono ny^2 divisibile per δ^2, meno che si tratti della 1ª e della 2ª equazione. (V. l'osservazione consimile nel n. 12).

16. Fu già osservato che i dichiarati metodi non si applicano soltanto alla ricerca delle soluzioni dell'equazione Pelliana e alla conseguente determinazione della α e della β contenute nella formola [4], ma benanche alla ricerca delle soluzioni fondamentali (K, H)

che figurano in essa. Se così non fosse, la formola [4], nella generalità dei casi, quando cioè le limitazioni $\alpha \sqrt{N}$, $\beta \sqrt{N}$ della K e della H fossero numeri grandi, avrebbe un'importanza puramente teoretica, a cagione del numero grande di tentativi che occorrerebbero per conoscere le soluzioni fondamentali. Un caso teoretico sarebbe, per esempio, quello dell'equazione

$$x^2 - 46y^2 = 210,$$

trattata da LAGRANGE nelle *Memorie di Berlino;* perchè, essendo (24335, 3588) la soluzione minima dell'equazione $x^2 - 46y^2 = 1$, come risulta dai n. 9 e 10, la relativa limitazione per H sarebbe $3588 \sqrt{210} = 51995,...$

Pertanto, per meglio mostrare l'efficacia dei metodi dianzi stabiliti, e come debbasi in generale procedere nell'applicarli, proponiamoci di risolvere di fondo la suddetta equazione.

Essendo $\sqrt{46}$ più vicina al suo valore a meno di un'unità in eccesso che non a quello in difetto, applicheremo il metodo stabilito nel n. 8; ed anzitutto alla ricerca della (α, β), indi a quella delle soluzioni fondamentali dell'equazione proposta. La prima ricerca fu già fatta nel n. 9, e si trovò che $\beta = 3588$, $\alpha = 24335$.

Passiamo dunque a ricercare le soluzioni fondamentali della proposta equazione, ossia quelle soluzioni nelle quali $y < 3588 \sqrt{210}$.

Anzitutto stabiliamo un limite superiore per il numero λ dei passaggi da equazione ad equazione del sistema [A]. Applicando l'ultima formola del n. 11, col porre in essa $D = 46$, $m = 6$, $n = 10$, $\Delta = 3588 \sqrt{210}$, si ottiene $\lambda \leq 7$. Facendo uso del sistema [A], all' intento di conoscere le sole soluzioni fondamentali della proposta equazione, si dovranno adunque fare 7 passaggi al più. Le equazioni da considerarsi saranno perciò le 8 seguenti:

$$\begin{aligned} x^2 - 46y^2 &= 210 \\ x^2 - 46y^2 &= 630 \\ x^2 - 46y^2 &= 1890 \\ x^2 - 46y^2 &= 5670 \\ x^2 - 46y^2 &= 17010 \\ x^2 - 46y^2 &= 51030 \\ x^2 - 46y^2 &= 153090 \\ x^2 - 46y^2 &= 459270. \end{aligned}$$

La limitazione per la y delle soluzioni singolari della 1ª equazione è 8, e si trova facilmente che l'equazione ammette la sola soluzione singolare [16, 1].

La limitazione della y è 14, per la 2ª equazione, e le relative soluzioni singolari sono (26, 1), (66, 9). Se ne derivano per l'equazione proposta le soluzioni [76, 11], [292, 43].

Passiamo alla 3ª equazione, con 25 limitazione della y, e (44, 1), (48, 3), (136, 19), soluzioni singolari. Di queste, la 2ª e la 3ª sono *spurie*, in quanto che non se ne derivano soluzioni intere per la proposta equazione. Ma dalla 1ª si deriva per l'equazione medesima la soluzione [536, 79].

Segue la 4ª equazione, con 43 limitazione della y, e (78, 3), (106, 11), (198, 27), (262, 37), soluzioni singolari; dalle due prime delle quali, che non sono spurie, come la 3ª e la 4ª, si derivano le soluzioni [4768, 703], [8756, 1291].

La limitazione per la y della 5ª equazione è 75, e (132, 3), (144, 9), (236, 29), (408, 57), (512, 73) le soluzioni singolari. Dalla prima e dall'ultima soltanto si derivano per l'equazione proposta soluzioni intere. Queste sono [33932, 5003] e [224312, 33073].

La limitazione per la y della 6ª equazione sarebbe 130, e altrettanti sarebbero i tentativi da farsi per ottenere le soluzioni singolari dell'equazione. Ma viene in buon punto una osservazione, mercè la quale i tentativi in proposito possono ridursi a 25 soltanto. Nel n. 11 si è dimostrato che

$$y \geq \frac{y'}{(m+1-\sqrt{D})^{\lambda}},$$

riferendosi y all'equazione proposta e y' ad una soluzione singolare ottenuta dopo λ passaggi. Dovendo pertanto essere $y < 3588\sqrt{210}$, si avrà, trattandosi della 6ª equazione,

$$3588\sqrt{210} > \frac{y'}{(7-\sqrt{46})^5}$$

e conseguentemente $y' < 25$. La 6ª equazione ammette due sole soluzioni singolari con y' non maggiore di 25. Esse sono (226, 1) e (234, 9); ma sono spurie per rispetto all'equazione proposta

La condizione

$$3588 \sqrt{210} > \frac{y'}{(7 - \sqrt{46})^6}$$

limita le soluzioni singolari della 7ª equazione. Da essa si ricava $y' \leq 5$. Ma nessuno dei valori 0, 1, 2, 3, 4, 5 della y soddisfa l'equazione. Si passerà dunque all' 8ª equazione.

Dalla condizione

$$3588 \sqrt{210} > \frac{y'}{(7 - \sqrt{46})^7}$$

si ricava $y' \leq 1$. Ma i valori 0 e 1 della y non soddisfanno l'equazione.

Essendosi fatti 7 passaggi, non occorre proceder oltre. Le soluzioni fondamentali dell'equazione $x^2 - 46y^2 = 210$ sono le otto che si ebbe cura di scrivere a mano a mano entro parentesi quadrate. L'equazione ammette dunque 8 formole di risoluzione, risultanti dai binomi

$$16 + \sqrt{46}\,; \quad 76 + 11\sqrt{46}\,; \quad 292 + 43\sqrt{46}\,;$$
$$536 + 79\sqrt{46}\,; \quad 4768 + 703\sqrt{46}\,; \quad 8756 + 1291\sqrt{46}\,;$$
$$33932 + 5003\sqrt{46}\,; \quad 224312 + 33073\sqrt{46}\,;$$

moltiplicati tutti per il fattore

$$(24335 + 3588\sqrt{46})^m. \ (*)$$

(*Continua*).

G. Frattini.

(*) Concedendo il segno ambiguo al termine irrazionale dei primi quattro binomi fondamentali, le trovate otto formole di risoluzione si riducono alle quattro seguenti:

$$(16 \pm \sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^m; \quad (76 \pm 11\sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^m;$$
$$(292 \pm 43\sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^m; \quad (536 \pm 79\sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^m.$$

Cosicchè non fa bisogno, per la risoluzione dell'equazione, di tutte ed otto le soluzioni fondamentali, ma della prima metà solamente. Questo fatto non è particolare per l'equazione sopra considerata, ma si verifica sempre (v. l'appendice): e la limitazione Δ, per la y delle soluzioni fondamentali che veramente abbisognano, è

$$\sqrt{\frac{N(\alpha - 1)}{2D}}\,;$$

la quale, per l'equazione $x^2 - 46y^2 = 210$, diviene $\sqrt{\frac{210 \,.\, 24334}{2 \,.\, 46}} = \sqrt{55545}$. Dall'ultima formola del n. 11, ponendovi $\Delta = \sqrt{55545}$, $D = 46$, $m = 6$, $n = 10$, risulta che $\lambda \leq 3$. Per risolvere l'equazione $x^2 - 46y^2 = 210$ sarebbero adunque bastati tre passaggi da un'equazione del relativo sistema alla susseguente. Le limitazioni superiori per la y delle quattro equazioni da considerarsi sarebbero state ordinatamente 8 e 14, per la 1ª e per la 2ª equazione; 25 e 43, per la 3ª e per la 4ª. Ma le ultime due, modificate secondo l'osservazione fatta verso la fine di questo numero, si sarebbero ridotte a 11 e 1. - Ciò dimostra che l'equazione si sarebbe potuta risolvere anche più sbrigativamente: anzi, se ben si osserva, con tale speditezza, *che avanza di molto quella del metodo classico relativo all'argomento.*

SULLA PARTIZIONE DEI NUMERI

1. Parlando in ciò che segue di soluzioni di equazioni intendiamo sempre quelle formate da numeri interi positivi o nulli; per l'equazione $y_0 + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{p-1} = m$ (m intero positivo) si considerano come soluzioni diverse quelle soltanto che differiscono *per due valori almeno delle* y. Le equazioni che qui studiamo si connettono colla partizione dei numeri e diamo pel numero delle loro soluzioni alcune proprietà che in casi particolari conducono alla sua determinazione effettiva.

Teorema I. — « Le equazioni

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_m = p \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots\ldots + m\lambda_m = n\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

dove m, p, n sono interi positivi, ed m non supera n, ammettono soluzioni comuni solo quando è $pm \geqq n$ ed il loro numero è uguale a quello delle soluzioni dell'equazione

$$y_0 + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{p-1} = n \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

in cui le y *non superano* m ».

Sia infatti $\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots\ldots, \lambda'_m$ una soluzione comune alle (α) e si consideri la serie dei numeri formata scrivendo tante volte lo zero quante unità sono in λ'_0, tante volte 1 quante sono in λ'_1, tante volte r ($r \leqq m$) quante unità sono in λ'_r: essendo verificate le (α) si otterrà così una serie di p numeri $y_0, y_1, \ldots\ldots, y_{p-1}$ (diversi o no da 0) pei quali sarà:

$$y_0 + y_1 + \ldots\ldots + y_{p-1} = \lambda'_1 + 2\lambda'_2 + \ldots\ldots + m\lambda'_m = n.$$

Così ad ogni soluzione delle (α) ne corrisponde una della (β) in cui le y non superano m, e poichè l'esistenza di tali soluzioni della (β), porta evidentemente $pm \geqq n$ così questa condizione è necessaria per l'esistenza di soluzioni delle (α).

Viceversa se la condizione $pm \geqq n$ è soddisfatta, sia y'_0, y'_1, $\ldots\ldots$, y'_{p-1} una soluzione della (β) in numeri non maggiori di m;

indicando con $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_m$ quante y'_r sono rispettivamente uguali a $0, 1, 2, \ldots\ldots, m$ si avrà:

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_m = p,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots\ldots + m\lambda_m = y'_0 + y'_1 + y'_2 + \ldots, + y'_{p-r} = n$$

e quindi da una soluzione della (β) si è dedotta una delle (α). E poichè risulta ancora che a soluzioni diverse delle (α) ne corrispondono diverse della (β) e viceversa, il teorema è completamente dimostrato.

Sotto le medesime condizioni del precedente e colla nuova $p \leq n$ si ha:

Teorema II. — « Il numero delle soluzioni comuni alle equazioni

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_m = p \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots\ldots + m\lambda_m = n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (\alpha)'$$

è uguale a quello delle soluzioni dell'equazione (β) in cui le y non superano m e *sono tutte differenti da zero* ».

La dimostrazione è del tutto analoga alla precedente.

Supponendo in particolare $n = m$ i teoremi dimostrati danno luogo ai seguenti:

Teorema III. — « Il numero delle soluzioni comuni alle due equazioni

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_m = p \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots\ldots + m\lambda_m = m \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

è uguale a quello delle soluzioni dell'equazione

$$y_0 + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{p-1} = m \text{ ».} \quad \ldots\ldots (2)$$

Teorema IV. — « Il numero delle soluzioni comuni alle equazioni

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_m = p \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots\ldots + m\lambda_m = m \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

è uguale a quello delle soluzioni dell'equazione (2) in cui *tutte le y sono diverse da zero* ».

2. Ci occuperemo delle equazioni (1) e (3) ossia, pel nostro fine, della (2) e indicheremo con $s_{m,p}$ il numero delle sue soluzioni formate da *elementi* positivi o zero corrispondenti alle (1), e con $s'_{m,p}$ il numero di quelle formate da elementi diversi da zero corrispondenti alle (3). Chiameremo anche soluzioni s o *partizioni* s del numero m in p elementi qualunque quelle della prima specie, e soluzioni s' o partizioni s' di m in p elementi diversi da zero quelle della seconda (*). Ciò posto si ha:

Teorema V. — « Le quantità $s_{m,p}$, $s'_{m,p}$ soddisfano rispettivamente le equazioni

$$(4) \qquad s_{m,p} = s_{m,p-1} + s_{m-p,p-1} + s_{m-2p,p-1} + s_{m-3p,p-1} + \ldots\ldots + s_{m-\left(\frac{m}{p}\right)p,\,p-1}$$

$$(4') \qquad s'_{m,p} = s'_{m-1,p-1} + s'_{m-p-1,p-1} + s'_{m-2p-1,p-1} + \ldots\ldots + s'_{m-\left[\left(\frac{m}{p}\right)-1\right]p-1,\,p-1}$$

dove $\left(\frac{m}{p}\right)$ denota il quoto intero della divisione di m per p ».

Infatti sia K diverso da zero, e denotiamo con $s_{(m,p)_K}$ il numero delle partizioni di m che hanno per elemento *minimo* K, o come diremo anche in seguito *appartenente a* K. Se $(K\,K_1 \ldots . K_{p-1})$ è una di tali partizioni, immaginiamo, come faremo sempre, i suoi elementi disposti in modo che uno qualunque sia non maggiore di quello che gli succede a destra; ora se in ciascuna delle $s_{(m,p)_K}$ partizioni definite si sottrae da ogni suo elemento un numero $l \leq K$, si otterranno evidentemente altrettante partizioni del numero $m - pl$ che appartengono a $K - l$. Nè oltre queste il numero $m - pl$ può averne altre appartenenti a $K - l$, perchè se ciò fosse aggiungendo in ciascuna e ad ogni suo elemento il numero l, si avrebbero altre partizioni di m appartenenti a K oltre le considerate, ciò che è assurdo; si conclude dunque

$$s_{(m,p)_K} = s_{(m-pl,\,p)_{K-l}}.$$

(*) Osserviamo che $s_{m,p}$ è sempre diverso da zero, mentre $s'_{m,p}$ è zero quando $p > m$.

Facendo $l = K$, $l = K - 1$ si ha:

$$s_{(m,p)_k} = s_{(m-pk,p)_0} \quad ; \quad s_{(m,p)_k} = s_{[m-p(k-1),p]_1}.$$

Osservando ora che ad ogni partizione di un numero N in p elementi appartenente a zero ne corrisponde una dello stesso numero in $p - 1$ elementi diversi o no da zero, e che ad ogni partizione di N appartenente a 1 ne corrisponde una di $N - 1$ in $p - 1$ elementi differenti da zero, e viceversa, nei due casi sarà:

$$s_{(m,p)_k} = s_{m-pk,p-1} \ , \ s_{(m,p)_k} = s'_{m-p(k-1)-1,p-1} \ . \ . \ . \ (j)$$

E poichè se $(x_0, x_1 \ldots\ldots x_{p-1})$ è una partizione di m, di elemento minimo x_0, segue $px_0 \leqq m$, $x_0 \leqq \left(\frac{m}{p}\right)$, e le partizioni che appartengono ad elementi diversi sono necessariamente diverse, potremo classificare tutte le $s_{m,p}$ partizioni s in $\left(\frac{m}{p}\right) + 1$ gruppi rispettivamente appartenenti a $0, 1, 2, \ldots\ldots \left(\frac{m}{p}\right)$, e tutte le $s'_{m,p}$ partizioni s' in $\left(\frac{m}{p}\right)$ gruppi appartenenti a $1, 2, \ldots\ldots \left(\frac{m}{p}\right)$ onde avremo:

$$\begin{aligned} s_{m,p} &= s_{(m,p)_0} + s_{(m,p)_1} + s_{(m,p)_2} \ldots\ldots + s_{(m,p)\left(\frac{m}{p}\right)} \\ s'_{m,p} &= \qquad\qquad\; s_{(m,p)_1} + s_{(m,p)_2} \ldots\ldots + s_{(m,p)\left(\frac{m}{p}\right)} \end{aligned}$$

che a causa delle precedenti formule (j) si riducono rispettivamente alle (4) e (4').

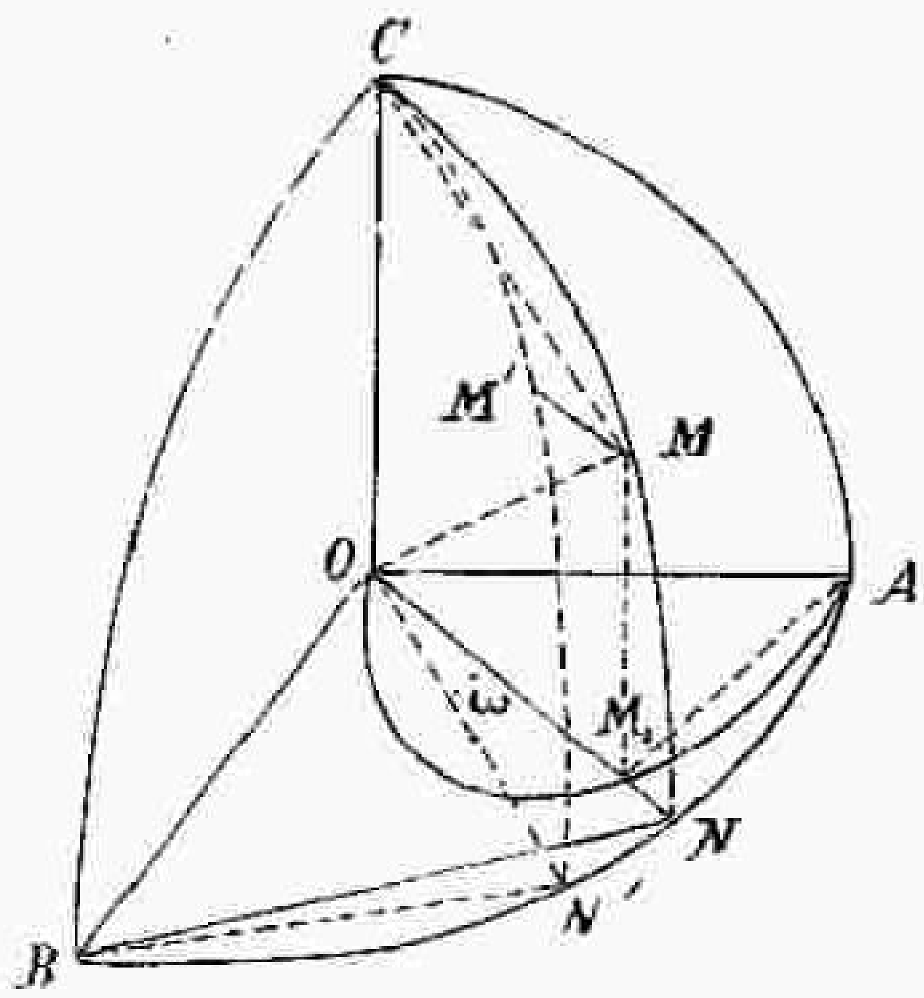
Osservazione (1). Dalle (j) risulta $s_{m-pk,p-1} = s'_{m-p(k-1)-1,p-1}$ che per $K = 1$ si riduce a

$$s'_{m,p} = s_{m-p,p} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

(Continua). ALBERTO TAGIURI.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Dimostrazione elementare del teorema di Viviani. (*Tidsskrift for Mathematik*). — Siano OA, OB, OC tre raggi di una sfera a due a due ortogonali. Sopra OA come diametro si descriva un semicerchio che sia nel piano AOB ed entro l'angolo AOB. Il teorema di Viviani si riduce a questo che la curva gobba in cui la sfera è tagliata dal cilindro avente per base il detto semicircolo ed OC per generatrice, taglia l' ottante sferico ABC in due parti le cui aree hanno delle espressioni semplici.



In ciò che segue supporremo il raggio OC verticale.

Sia ora M un punto della curva e M_1 la sua proiezione sul piano orizzontale AOB. L'angolo AOM_1 sia eguale a v e sia N l' intersezione del raggio OM_1 colla sfera. Sarà allora $\Delta\, OAM_1 \equiv OMM_1$, onde $< NOM = AON = v$, e $< COM = 90^0 - v = BON$. Da ciò segue poi $\Delta\, COM \equiv BON$ e anche $CM = BN$.

Si conduca ora per OCM un piano diametrale e inoltre per OC un nuovo piano ad esso infinitamente vicino, il quale seghi la curva nello spazio in M' e il piano ANB in N'. Sia ω l'angolo di questi due piani. L' area sferica MCM', che ha la forma di un settore, a meno di una quantità che è trascurabile rispetto ad essa, può calcolarsi come un settore di una calotta sferica limitato da un arco di circolo col centro in C e da due circoli massimi comprendenti fra loro l'angolo ω. Per un noto teorema sull'area di una calotta sferica, l'area della suddetta area elementare, sarà :

$$\frac{\omega}{2\pi}\, \pi\, \overline{CM}^2 = \frac{1}{2}\, \omega \,.\, \overline{CM}^2 = \frac{1}{2}\, \omega \,.\, \overline{BN}^2 .$$

Ma l'area NBN' di un elemento del circolo orizzontale limitato dall'arco NN' e dalle due corde BN e BN' vale, pure a meno di una quantità trascurabile di fronte alle precedenti, $\frac{1}{2}\, \overline{BN}^2 . \frac{\omega}{2} = \frac{1}{4}\, \omega \,.\, \overline{BN}^2$ per cui se ora si fa la somma tutti gli elementi di area NBN' attorno a B, si ottiene l'area d'un segmento circolare BN. Abbiamo quindi il seguente teorema :

Se si conduce per gli estremi del diametro verticale un cerchio qualunque che tagli il circolo orizzontale AB *in* N, *l'area di quella parte di ottante sferico limitata da una parte della curva gobba e da una parte dell'anzidetto circolo verticale, sarà doppia dell'area del segmento circolare* BN.

Se ora si vuole avere le due aree, in cui l'ottante è diviso dalla curva gobba, si faccia coincidere N con A, e si concluderà che una parte è eguale al doppio del segmento AB, l'altra al doppio del triangolo AOB ossia al quadrato del raggio della sfera. Questo è il teorema di Viviani nella sua solita forma (*).

C. Juel.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
97, 104*, 105, 106*, 107*, 108* e 109*

97. *Dimostrare che, se* p *è un numero primo e* g *radice primitiva mod.* p, *si ha*

$$2(1+g)^2(1+g^2)^2\ldots\ldots\left(1+g^{\frac{p-3}{2}}\right)^2 \equiv g^{\frac{p^2-1}{8}} \text{ mod. } p$$

ed anche

$$2(1-g)^2(1-g^2)^2\ldots\ldots\left(1-g^{\frac{p-3}{2}}\right)^2 \equiv g^{-\frac{p^2-1}{8}} \text{ mod. } p.$$

Dedurne i noti teoremi di Fermat, riguardanti il carattere quadratico di 2 *mod.* p. (G. Frattini) (**)

I $p-3$ numeri

$$(1)\begin{cases} 1+g; \quad 1+g^2; \quad \ldots.\, 1+g^{\frac{p-3}{2}}; \\ 1+g^{-1}; \quad 1+g^{-2}; \ldots.\, 1+g^{-\frac{p-3}{2}} \end{cases}$$

sono fra loro incongrui mod. p. Perciò rappresentano, mod. p, tutti i numeri della serie $0, 1, 2, \ldots\ldots p-1$, fatta eccezione di tre fra questi. È facile riconoscere che i tre numeri esclusi sono 0, 1 e 2. Perchè, mentre la congruenza $1+g^x \equiv 1$ è impossibile, dalle congruenze $1+g^x \equiv 0$; $1+g^x \equiv 2$, si deduce ordinatamente: $x \equiv \frac{p-1}{2}$; $x \equiv 0$ mod. $(p-1)$. Ora, i valori $\frac{p-1}{2}$ e 0, non si trovano come esponenti della g nei numeri (1). Dunque lo 0 e il 2 non sono compresi fra quei numeri.

(*) Una dimostrazione di questo teorema e dell'altro che ha tratto al volume dei due solidi che il cilindro considerato determina nella *sfera*, fondata sopra considerazioni geometriche e trigonometriche, può leggersi nel vol. II, pag. 278-281 delle *Lezioni d'algebra* del prof. G. Bellacchi.

(**) Una soluzione di questa quistione venne inviata dal Sig. Prof. *U. Scarpis.* Quella che si pubblica è dell'A. Sig. Prof. *G. Frattini*: ad essa si dà la preferenza, perchè *molto più breve*, quantunque fondata sui medesimi principî ai quali è informata la prima.

Applicando pertanto il teorema di Wilson, si avrà:

$$2\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{p-3}{2}}(1+g^{\lambda})(1+g^{-\lambda})\equiv-1 \quad \text{mod. } p.$$

Ma

$$1+g^{-\lambda}\equiv g^{-\lambda}(1+g^{\lambda});$$

dunque

$$2\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{p-3}{2}}g^{-\lambda}(1+g^{\lambda})^2\equiv-1 \quad \text{mod. } p;$$

ossia

$$2\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{p-3}{2}}(1+g^{\lambda})^2\equiv-g^{1+2+\ldots+\frac{p-3}{2}}\equiv-g^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}}\equiv$$

$$\equiv g^{\frac{p-1}{2}+\frac{(p-1)(p-3)}{8}}\equiv g^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Così è dimostrata la prima parte del teorema, e similmente si dimostrerebbe la seconda.

La formola

$$2\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{p-3}{2}}(1+g^{\lambda})^2\equiv g^{\frac{p^2-1}{8}}$$

rende manifesto che 2 è resto quadratico mod. p, quando $\frac{p^2-1}{8}$ è pari, e non è resto quando $\frac{p^2-1}{8}$ è dispari: che cioè il 2 è resto dei numeri primi della forma $8n\pm1$ e non resto di quelli della forma $8n\pm3$ (teoremi di Fermat).

104.* *Indicare la costruzione mediante la quale può dividersi un poligono convesso* ABCDE.... *in parti proporzionali a più segmenti dati* m, n, p,..., *in un verso assegnato, ad es.* ABC..., *mediante segmenti uscenti da un punto* O *interno al poligono, a partire da un segmento* OX *che termina ad un punto* X *di un lato, ad es.* AB. (A. Lugli).

Soluzione del sig. *G. Trapani*, alunno del R. Istituto nautico di Catania.

Si tiri XC e per B la BB' parallela ad XC finchè incontri il prolungamento di DC in B'; il poligono $AXB'DE....$ sarà equivalente ad $ABCDE....$ Si applichi al primo di questi la costruzione insegnata in questo *Periodico* a pag. 94, n. 3 dell'anno VI, per dividerlo in parti proporzionali ad $m, n, p, ...$, nel verso $ABC....$, con segmenti uscenti da O. Delle rette di divisione risulteranno giustamente collocate quelle che cadono nella parte di contorno $CDE....AX$. Per situare quelle i cui piedi cadono in BC, tirata BO e per X la XY parallela a BO, ad incontrare CB prolungata in Y, si trasformi il poligono dato (V. l. cit.)

in un triangolo equivalente di vertice O e la cui base abbia un termine in Y e cada nella direzione YBC; poi si divida tale triangolo in parti proporzionali ai dati segmenti, nel verso assegnato, con rette uscenti da O, e le rette di divisione che vanno a punti di BC saranno quelle cercate. Finalmente per mettere a posto i segmenti di divisione che finiscono a punti di XB, si trasformi il poligono dato in un triangolo equivalente, di vertice O e la cui base abbia un termine in X e la cui direzione coincida con XB, quindi si operi su questo triangolo come sul precedente. I segmenti relativi ad XB, se ve sono, e lo si sa a priori dopo le altre costruzioni effettuate, saranno così trovati.

105. *Determinare i triangoli ciascuno dei quali soddisfi alle seguenti condizioni: un vertice cada in un punto dato, i due vertici rimanenti cadano in due date rette, uno per ciascuna, e l'ortocentro sia un punto assegnato.*

(S. CATANIA).

Soluzione del Sig. Prof. *R. Bettazzi* (*).

Sia A il vertice dato, O l'ortocentro, e siano l_1 ed l_2 le due rette su cui devono trovarsi gli altri due vertici incogniti X ed Y.

1° Caso. — A ed O coincidenti.

Il triangolo dev'essere rettangolo in A, ed il problema è indeterminato, potendo in generale qualunque punto di l_1 essere preso come punto X.

2° Caso. — A ed O distinti.

Userò il linguaggio del *Calcolo geometrico* (**), prendendo le coordinate cartesiane, e per vettore di riferimento I il vettore $O-A$. La retta l_1 sarà nota quando sia dato un suo punto R ed un vettore $(h+ik)I$ a cui debba essere parallela. Il vettore $R-A$, che dev'essere noto, sia dato uguale a $(\alpha+i\beta)I$. I numeri dati h, k, α, β devono essere numeri reali.

Trascurando dapprima la condizione che Y sia su l_2, cerco il luogo dei punti Y quando X scorre su l_1. In tale ipotesi dovremo porre $X=R+t(h+ik)I$, dove t è un numero reale variabile con X, che prende qualunque valore.

Abbiamo ora:

$$(1)\qquad Y-A=(Y-X)+(X-R)+(R-A).$$

Poichè O è l'ortocentro, il lato XY è perpendicolare ad AO, e quindi il vettore $(Y-X)$ è di direzione perpendicolare al vettore $(O-A)$ e di lunghezza sconosciuta x: talchè essendosi preso $O-A=I$, sarà $Y-X=xiI$. Inoltre, per quanto si è visto $X-R=t(h+ik)I$, $R-A=(\alpha+i\beta)I$; dunque la (1) dà:

$$(2)\qquad \begin{aligned} Y&=A+xiI+thI+tkiI+\alpha I+i\beta I\\ &=A+(th+\alpha)I+(x+tk+\beta)iI, \end{aligned}$$

formula che ci darà il luogo di Y, quando sia determinata x.

(*) Un'altra soluzione, che si pubblicherà nel fas. venturo, venne inviata dal Sig. Prof. *F. Palatini.*

(**) V. PEANO. — *Calcolo geometrico* (Torino, Bocca 1888) — ed *Elementi di calcolo geometrico* (Torino, Candeletti 1891).

Si osservi che il lato AY dev'essere perpendicolare ad OX, e quindi che

$$Y - A = yi(O - X) \tag{3}$$

dove y è un numero reale conveniente, esso pure da determinarsi. Poichè $O - X = (O - A) - (R - A) - (X - R)$, tenendo conto di questi tre vettori già trovati, si ha: $O - X = I - (\alpha + i\beta)I - t(h + ik)I$: e quindi, sostituendo nella precedente formola (3),

$$\begin{aligned} Y &= A + yi(I - \alpha I - \beta i I - thI - tkiI) \\ &= A + y(\beta + tk)I + y(1 - \alpha - th)iI. \end{aligned} \tag{4}$$

La (2) e la (4) rappresentano entrambe Y, e quindi devono fornire per esso uguali coordinate, essendo lo stesso il punto di riferimento A; sarà dunque:

$$th + \alpha = y(\beta + tk), \qquad x + tk + \beta = y(1 - th - \alpha),$$

equazioni che ci danno x ed y in funzione di numeri dati e di t variabile. Ricavando la x si ha:

$$x = \frac{(th + \alpha)(1 - th - \alpha) - (tk + \beta)^2}{tk + \beta},$$

e questo valore di x posto nella (2) dà:

$$Y = A + (th + \alpha)I + \frac{(th + \alpha)(1 - th - \alpha)}{tk + \beta} iI. \tag{5}$$

Ponendo $A_1 = A + \alpha I$, punto noto, e sviluppando,

$$Y = A_1 + htI + \frac{-h^2t^2 + (1 - 2\alpha)ht + (\alpha - \alpha^2)}{tk + \beta} iI. \tag{6}$$

Questa relazione, facendo variare t, dà per Y un luogo di 2° ordine, che si vede facilmente essere un' iperbole, una parabola, o una retta.

Le intersezioni di tale luogo colla retta l_2 su cui deve trovarsi Y, danno le posizioni di questo vertice. Vi sono dunque in generale due e non più di due triangoli che soddisfano alle condizioni volute: eccetto se il luogo (6) è una retta che coincida con l_2, nel qual caso sono infiniti.

Osservazione. È facile vedere che il caso della parabola si ha quando la (6) assume la forma $Y = P + tI_1 + t^2 I_2$, con I_1 ed I_2 vettori non paralleli, r ed s numeri costanti, il che avviene per $k = 0$, cioè quando AO è parallela ad l_1. Il caso della retta si ha quando la (6) è del tipo $Y = Q + f(t)(rI + siI)$, con r ed s ancora costanti, per il che occorre: - 1° che il coefficiente di iI sia di 1° grado in t, e quindi sia il numeratore divisibile per il denominatore; ciò accade quando $\beta = \dfrac{(\alpha - 1)h}{k}$ nel qual caso il punto O è su l_1: — 2° o che sia $h = 0$, cioè che AO sia perpendicolare ad l_1. Ciò si ottiene con facilità anche direttamente.

106.* *Dimostrare che se* a *e* b *sono due interi qualunque primi tra loro ed* n *è pure un intero primo con* a, *le due serie*

$$\begin{array}{ccccc} a+b, & 2a+b, & 3a+b,\ldots, & na+b \\ 1, & 2, & 3,\ldots, & n \end{array}$$

contengono lo stesso numero di termini primi con n.

(U. Scarpis).

Dimostrazione del sig. *N. Bottini*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti.

Due numeri della prima serie divisi per n, non danno resti uguali; infatti se $ha+b$, $ka+b$, dessero resti uguali (essendo $0<h<k<n+1$), la loro differenza $(k-h)a$ sarebbe divisibile per n, e quindi, poichè a è primo con n, $k-h$ divisibile per n, il che è impossibile a motivo di $k-h<n$.

Perciò se i numeri della prima serie, divisi per n, danno rispettivamente i resti

$$r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$$

dovendo essere questi minori di n e a due a due disuguali, saranno i numeri

$$(1) \qquad 0, 1, 2, \ldots n-1.$$

Ora poichè r_h è resto della divisione di $ha+b$ per n, se $ha+b$ ed n sono primi fra loro, sono tali anche n ed r_h e reciprocamente, perchè i divisori comuni dell'una coppia di numeri sono anche i divisori dell'altra.

Perciò rimane dimostrato che tanti numeri primi con n si trovano nella prima serie quanti se ne trovano nella serie (I) e quindi anche in quella proposta.

Il sig. *G. Trapani*, alunno del R. Istituto nautico di Catania, ad una analoga soluzione, aggiunge la seguente osservazione. Poichè nella dimostrazione non si tien conto che a sia primo con b, la quistione proposta può enunciarsi più generalmente così: se a e b sono due interi ed a è primo con n, le due serie

$$\begin{array}{ccccc} a+b, & 2a+b, & 3a+b,\ldots, & na+b \\ 1, & 2, & 3,\ldots, & n \end{array}$$

contengono lo stesso numero di termini primi con n.

107*. *Se* n *è una potenza intera di* 2, *se cioè* $n=2^k$, *la somma delle prime* n *potenze di un numero qualsivoglia* a, *la potenza zero inclusavi, è data dal prodotto dei* k *fattori*

$$(1+a)(1+a^2)(1+a^{2^2})(1+a^{2^3})\ldots\ldots(1+a^{2^{k-1}}).$$

(F. P. Paternò).

Dimostrazione dei Sigg. *C. Chigiotti*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti; *G. Candido* e *D. de Blasi*, alunni del R. Liceo di Lecce; e *R. Palma*, studente nella R. Università di Napoli.

Moltiplicando membro a membro le seguenti identità:

$$\frac{1-a^2}{1-a}=1+a\,,\quad \frac{1-a^4}{1-a^2}=1+a^2\,,\,\ldots\ldots\frac{1-a^{2^k}}{1-a^{2^{k-1}}}=1+a^{2^{k-1}}\,,$$

e semplificando la frazione che si presenta al 1° membro, si ottiene:

$$\frac{1-a^{2^k}}{1-a}=(1+a)\,(1+a^2)\ldots\ldots(1+a^{2^{k-1}})\,,$$

e poichè il primo membro è anche eguale a

$$1+a+a^2+\ldots\ldots+a^{2^k-1}\,,$$

risulta così dimostrato il teorema (*).

108'. *Se in un quadrangolo, le cui diagonali sono perpendicolari l'una all'altra, è inscritto un quadrato coi lati paralleli a queste diagonali, il doppio del lato del quadrato è medio armonico fra le diagonali del quadrangolo.*

(A. Baldassarre).

Dimostrazione del Sig. *E. Colonna*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti.

Sieno d e d' le diagonali del quadrangolo, l il lato del quadrato iscritto; sia AB un lato del quadrangolo, e C il vertice del quadrato situato su questo lato. Da due coppie di triangoli simili nascono le proporzioni:

$$\frac{l}{d}=\frac{AC}{AB}\,,\qquad \frac{l}{d'}=\frac{CB}{AB}\,;$$

dalle quali, addizionando:

$$\frac{l}{d}+\frac{l}{d'}=\frac{AC+CB}{AB}=1\,;$$

e quindi

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d'}=\frac{2}{2l}\,,$$

la quale uguaglianza dimostra il teorema (**).

Nota della R. — Se il quadrangolo dato, $ABCD$, ha le diagonali uguali, il centro di AB è vertice del quadrato inscritto. Se invece le diagonali sono disuguali e si tagliano in O, ed è $DB > AC$ ed $AO < OD$, ciò che può sempre supporsi, si prenda su DB il segmento $DE = AC$, su OA il segmento $OF = OD$ e per F si conduca FG parallela a DB, a tagliare DA in G, GE sega AB nel punto che è vertice del quadrato inscritto.

Da questa semplice costruzione e dalla proprietà enunciata nella quistione, risulta una facile soluzione del problema: *Costruire il segmento medio armonico fra due segmenti dati.*

(*) Altre soluzioni pervennero dal Sig. *P. Marano*, studente a Catania e *G. Trapani*, alunno del R. Ist. nautico Catania.

(**) Soluzioni di questa quistione vennero pure inviate da *F. Columbo* (R. Istituto tec. Foggia), *E. G. Ricci* (R. Liceo Bari), *G. Russi Ruggi* (R. Istituto tec. Foggia), *G. Trapani* (R. Istituto nautico Catania).

109*. *Se dal vertice d'un triangolo si tirano alla base le due rette formanti con essa angoli uguali a quello al vertice, si hanno due triangoli simili fra loro e al dato: un poligono costruito sulla base sta alla somma dei poligoni simili e similmente descritti sugli altri due lati, come la base sta alla somma dei due lati dei due nuovi triangoli, che giacciono su di essa* (*).

(I. AMALDI).

Soluzioni analoghe da *G. Facciolli*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti; *G. Candido*, alunno del R. Liceo di Lecce; *V. Columbo* ed *E. G. Ricci*, alunni del R. Liceo di Bari; *G. Trapani*, alunno del R. Istituto nautico di Catania.

Sia il triangolo ABC: si costruisca in A l'angolo BAA_1 eguale a C, dalla stessa banda del triangolo rispetto alla retta AB; AA_1 incontrerà la BC nella direzione BC in un punto A_1; i due triangoli BAA_1, BCA sono equiangoli, quindi l'angolo AA_1B è eguale all'angolo BAC, ossia AA_1 è una delle rette delle quali parla il quesito. Dalla similitudine dei triangoli si ha:

$$BC : BA = BA : BA_1. \qquad (1)$$

Se con modo analogo si costruisce la seconda retta AA_2, la quale incontri in A_2 la BC, si conchiude che i triangoli CAA_2, CBA sono simili e

$$BC : AC = AC : A_2C. \qquad (2)$$

Sieno P, Q, R i poligoni simili costruiti su BC, BA, AC presi come lati omologhi.

Ora, poichè un poligono sta a un poligono simile come un lato del primo sta alla terza proporzionale dopo quel lato e il suo omologo, da (1) e (2) deducesi

$$P : Q = BC : BA_1 \quad , \quad P : R = BC : A_2C$$

o anche

$$\frac{Q}{P} = \frac{BA_1}{BC} \quad , \quad \frac{R}{P} = \frac{A_2C}{BC},$$

dalle quali addizionando

$$\frac{Q+R}{P} = \frac{BA_1 + A_2C}{BC},$$

che dimostra il teorema (**).

Sono pervenute inoltre le soluzioni seguenti: quistione **111**. dal Sig. *S. Catania*; **118**. *F. Palatini*; **120***. *L. Perrotti*; **121***. *F. Slerca*; **124***. *L. Perrotti*; **125***. *G. Onesti, A. Perrucci, F. Slerca*; **126**. *G. Santacroce*; **127**. *S. Catania*, *D....*, *F. Mariantoni, F. Palatini, G. Santacroce*; **128***. *G. Candido, V. Co-*

(*) Questa proposizione può considerarsi come una generalizzazione del teorema di Pitagora. Già una generalizzazione del teorema stesso trovasi in PAPPO, nel libro IV delle sue *Collezioni matematiche*. Questo teorema di Pappo viene riportato anche dal COMMANDINO nel suo *Euclide* in una nota alla prop. XXXI del VI libro. Vedi a questo proposito gli *Elementi di matematica* del BALTZER. Plan. § 9,7. (I. AMALDI)

(**) Un'altra soluzione venne inviata dal Sig. *A. Baldassarre*, studente nella R. Università di Napoli.

lumbo, E. de Vito, L. Perrotti, F. Restucci, E. G. Ricci, G. Russi Ruggi, G. Trapani ; **129***. G. Candido, E. de Vito, G. F. Farruggio, L. Perrotti, E. G. Ricci, G. Trapani*; **130***. E. de Vito*; **131***. G. Candido, V. Columbo, G. F. Farruggio, D. Pacilli, L. Perrotti, E. G. Ricci, G. Trapani* — soluzioni alle quali verrà data evasione nei fascicoli venturi.

La Redazione.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

132. Risolvere l'equazione

$$x^7 - 7(x-1)^2 \cdot x \cdot (x+1)^2 = a.$$

F. GIUDICE.

133. Se il triangolo ABC ruota attorno ad un punto K del suo piano ed è $A'B'C'$ una nuova sua posizione, e se inoltre α, β, γ sono i punti d'incontro rispettivamente di BC con $B'C'$, di CA con $C'A'$ e di AB con $A'B'$, si ha che:

1° se K è il punto di Lemoine (o punto d'incontro delle simediane) del triangolo ABC, è anche il baricentro del triangolo $\alpha\beta\gamma$;

2° se K è un punto di Brocard del triangolo ABC, è pure un punto di Brocard del triangolo $\alpha\beta\gamma$, il quale è simile ad ABC.

G. RIBONI.

134*. Eliminare u e v dalle tre equazioni

$$\frac{z\sqrt{2}}{1-z^4} = \frac{1}{u}\sqrt{1-\sqrt{1-u^4}}$$

$$\frac{u\sqrt{2}}{1-u^4} = \frac{1}{v}\sqrt{1-\sqrt{1-v^4}}$$

$$v^2 + z^2 + v^2 z^2 = 1.$$

D. BESSO.

135*. Se in un triangolo rettangolo si descrive un cerchio che sia tangente all'ipotenusa e sottenda un cateto, il triangolo che ha per vertice un punto qualunque del cerchio e per base il cateto sotteso, è equivalente al triangolo che ha per vertici le proiezioni del medesimo punto sui tre lati del triangolo rettangolo (**).

P. MORINO.

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

(**) Vedi a proposito di questa questione il tema n. 5 a pag. 137 del *Periodico*, An. VI, 1891.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

G. Z. REGGIO. — *Complementi di Geometria* proposti come libro di testo pel secondo biennio degli Istituti tecnici e come avviamento ai corsi superiori ai giovani licenziandi dei Licei e degli Istituti. — Treviso, L. Zoppelli, 1891. L. 3.

Da molto tempo si sentiva il bisogno di avere un libro come questo, che raccogliesse cioè da molti libri le varie teorie complementari di geometria prescritte dai programmi dei nostri Istituti tecnici (2° biennio); e perciò quando l' A. promise questa pubblicazione, tutti l'attesero con vivo interesse.

E innanzi tutto osservo che la compilazione di un tal libro presenta serie difficoltà, sia per svolgere i programmi vigenti senza invadere troppo il campo dell' insegnamento universitario, sia per dare una certa unità di metodo a un libro che tratta così disparati argomenti. Con tutto ciò il ch°. A. ha saputo svolgere con giusta misura e abilmente condurre il lavoro, allargando talvolta opportunamente i limiti imposti dai programmi. Per es. tutto il libro 1° « Relazioni segmentarie » tratta di argomenti estranei ai programmi, ma che compendiano nozioni elementari assai utili come introduzione allo studio della geometria projettiva che i giovani dovranno fare all'Università. Vi trovo infatti il « Principio dei segni » relativi ai segmenti di una stessa retta, e in seguito i teoremi di Menelao, di Ceva e quello di Desargues sui triangoli prospettivi, non che il concetto di forma armonica, il quale è esposto nel § 3 « Rapporto armonico »; in questo stesso § trovo anche un cenno del rapporto anarmonico di 4 punti qualunque di una retta, cenno che poteva essere forse sviluppato maggiormente, visto che l'A. ha ricavato la dimostrazione che qualunque projezione di una forma armonica è una forma armonica, dal carattere projettivo del rapporto anarmonico. Il § 4 « Trasversali nel cerchio – Asse radicale » quantunque non abbia nesso coi §§ precedenti, è opportuno; anzi sarebbe stato desiderabile avesse avuto più ampio sviluppo mettendo in evidenza i fasci e le reti di cerchi. Perchè poi l'A. a proposito di relazioni segmentarie non ha dato anche il fecondo teorema di Stewart? Noto però con piacere che i molti esercizi relativi a questo libro suppliscono in gran parte alle lacune che vi si possono trovare.

Il libro 2° « Figure eguali, simmetriche, simili, prospettive e inverse » quanto agli argomenti risponde ampiamente ai programmi, i quali non richiederebbero lo studio della prospettività e dell' inversione; però non so comprendere perchè nella teoria dell'eguaglianza delle figure piane l'A. abbia considerato le figure inversamente eguali soltanto nel caso della simmetria rispetto ad una retta. Mi spiego invece perchè l'A. abbia dovuto accennare appena all'eguaglianza delle figure nello spazio, osservando che questa teoria richiede quella dell'eguaglianza delle figure sferiche, la quale, secondo il piano dell'opera, non poteva trovar posto che nel libro 4°. La similitudine nel piano (specialmente la diretta e il suo caso particolare l'omotetia) è trattata abbastanza diffusamente e con belle applicazioni; mentre, per la solita ragione, la similitudine nello spazio è limitata al caso dell'omotetia. Il § 5 « Figure prospettive » è una preparazione alla teoria delle coniche e alla geometria descrittiva. E a proposito della geometria descrittiva noto che l'A. non ha creduto di svolgere le poche nozioni richieste dai programmi; il che è da deplorarsi, anche perchè, a parer mio, manca un trattatello opportuno su questa materia, essendo ormai i Manuali Hoepli dell' Aschieri e i « Primi Elementi di Geometria projettiva e descrittiva » del Murer non conformi agli ultimi programmi. Ritornando al libro 2°, debbo lodare l'A. per aver trattato delle « Figure inverse » tanto utili nella risoluzione di molti ed importanti problemi.

Il libro 3° « Descrizione di coniche » mi sembra nella sua brevità pienamente rispondente alle poche esigenze dei programmi: i due ultimi §§ di questo libro « Coniche simili » e « Curvatura di una linea piana » sono forse superflui.

Il libro 4° « Figure sferiche » svolge il comma 2° del programma di geometria della IV classe; vi è di superfluo il § 10 « Concetto di curvatura di una linea sferica » e forse fuori posto il § 11 « Piano radicale ».

L' A. non ha creduto di svolgere i comma 3° (aree e volumi di figure sferiche) e 4° (poliedri) del programma di geometria della IV classe, forse perchè si trovano sviluppati negli ordinari trattati di geometria elementare.

Il volume termina con una raccolta di 56 esercizi, che sono bellissimi ed un necessario complemento alle teorie trattate; però avrei desiderato che questi fossero stati distribuiti per libri, onde facilitare all' insegnante la loro scelta appropriata alla materia svolta. Se gli esercizi sulle coniche, in numero di due, potranno parere scarsi, io non sarei per farne appunto all'A., perchè l'argomento è di secondaria importanza negli Istituti tecnici, e la stessa trattazione elementare limita grandemente le quistioni che si possono proporre su questo soggetto.

In previsione di una 2ª edizione di questi bei *Complementi di Geometria*, credo far cosa grata al chº. A. richiamando la sua attenzione sopra alcune lievi dimenticanze incorse nell'enunciato di qualche esercizio. Per es. nell'esercizio 8 non è detto espressamente ciò che s' intende per polo e polare rispetto ad un cerchio; e nell'esercizio 16 non è detto che il punto m deve stare sulla retta dei segmenti dati, ciò che è necessario per la validità del teorema (*).

(*) L'esercizio cui accenno è il seguente: « Quando sono dati su una retta tre segmenti aa', bb', cc' e i loro punti di mezzo, che rispettivamente indicheremo con α, β, γ, indicando con m un punto si avrà la relazione

$$ma.ma'.\beta\gamma + mb.mb'.\gamma\alpha + mc.mc'.\alpha\beta = \text{cost.}, \text{ ecc.} » \quad \ldots\ (1)$$

Ora questa relazione è valida se m è sulla retta dei segmenti, tenuto conto beninteso dei segni di ma, ma' ecc.. Se m fosse qualunque, la relazione da sostituirsi alla (1), e di cui la (1) è un caso particolare, sarebbe

$$ma.ma'.\cos ama'.\beta\gamma + mb.mb'.\cos bmb'.\gamma\alpha + mc.mc'.\cos cmc'.\alpha\beta = \text{cost.}, \quad \ldots\ (2)$$

che si ricava facilmente dal teorema di Stewart applicato ai punti α, β, γ, m e dalle relazioni $\overline{m\alpha}^2 = \frac{\overline{aa'}^2}{4} + ma.ma'.\cos ama'$ e simili.

Se le (1) e (2) potessero coesistere per qualunque posizione di m, si dovrebbe avere anche $ma.ma'.\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}ama'.\beta\gamma + mb.mb'.\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}bmb'.\gamma\alpha + mc.mc'.\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}cmc'.\alpha\beta = \text{cost.}$; ma facendo $b \equiv b'$, $c \equiv c'$, si avrebbe

$$ma.ma'.\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}ama'.\beta\gamma = \text{cost.};$$

relazione manifestamente assurda, giacchè per $ama' = 0$, si trova cost. $= 0$, ciò che non può essere per ama' diverso da 0. Dunque la (1) non sussiste per una posizione arbitraria di m nello spazio.

Credo che gli Egregi Professori dei nostri Istituti tecnici, adottando questo libro come testo, troveranno molto agevolato il loro compito.

G. ROZZOLINO.

DOTT. UMBERTO SCARPIS. — *Il problema della divisione della circonferenza esposto elementarmente.* — Savona, Tip. Bertolotto, 1891.

In questo lavoro il Dott. Scarpis si è proposto di svolgere in modo elementare e di rendere quindi accessibile alle menti dei giovani studiosi il problema della divisione della circonferenza in parti eguali, problema che forma uno dei capitoli più interessanti ed originali delle *Disquisitiones Arithmeticae* di Gauss e che è sviluppato ampiamente anche dal Bachmann nella sua opera *Die Lehre von der Kreistheilung.*

Lodevole invero è lo scopo propostosi dall'autore tanto più se si riflette che un tal problema va annoverato fra i più interessanti nella storia della matematica, come uno di quelli che misero maggiormente in luce la potenza dell'analisi nello studio di questioni geometriche.

Se l'autore sia completamente riuscito nel suo intento, non crederei di poterlo con sicurezza affermare, tanto più che il lavoro contiene frequenti errori di stampa e risente alquanto i difetti di una frettolosa compilazione; certo però è meritevole di elogio e conforme alle intenzioni sue, quella prima parte del lavoro, in cui si prepara il materiale per la risoluzione dell'equazione binomia $x^p = 1$, essendo p un numero primo.

Il lavoro si compone di quattro capitoli esposti in 72 pagine, e di questi sono particolarmente notevoli i primi due e parte del 3°; inquantochè i risultati contenuti in essi, benchè noti quasi tutti, sono spesso ottenuti con metodo originale.

Nel primo capitolo, stabilite le proprietà delle somme di potenze e dei prodotti ad r ad r dei numeri

$$(1) \qquad 1,\ 2,\ 3, \ldots . p-1$$

dove p denota sempre un numero primo, l'autore arriva all' importante conclusione che il più piccolo esponente n pel quale le potenze n^{me} dei numeri (1) sono congrue all'unità (mod. p) è precisamente $p-1$. I teoremi di Wilson e quello di Fermat sono dedotti come casi particolari di tali somme e prodotti.

Nel secondo capitolo – Congruenze binomie – l'autore fondandosi sulle somme di potenze studiate nel capitolo precedente, dimostra con metodo semplice ed ingegnoso che la congruenza $x^n \equiv 1$ (mod. p) ha δ radici incongrue essendo δ il *M. C. D.* di n e $p-1$, e che i differenti residui delle potenze 1^n, 2^n, 3^n ..... $(p-1)^n$, divise per p, sono in numero di $\frac{p-1}{\delta}$ e costituiscono le radici della congruenza $x^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1$ (mod. p). A questi residui estende le proprietà delle somme di potenze e dei prodotti ad r ad r già stabilite per i numeri della serie (1).

È ancor degna di nota in questo capitolo la forma della funzione $\varphi(n)$ di Gauss, stabilita coll'aiuto delle radici primitive della congruenza $x^n \equiv 1$ (mod. p); limitata dapprima al caso di n divisore di $p-1$ e poi estesa nel capitolo successivo ad un intero n qualunque.

Nel capitolo terzo – Equazioni binomie – l'autore studia le proprietà dei numeri complessi z_k ($k = 1, 2, 3, \ldots v$) definiti dall'eguaglianza

$$z_k = \cos k \frac{2\pi}{v} + i \operatorname{sen} k \frac{2\pi}{v},$$

e, stabilite anche per essi proprietà analoghe a quelle trovate per i residui di potenze, dimostra che l'equazione $z^v = 1$, qualunque sia il suo esponente, ammette sempre v e v sole radici rappresentate dai numeri complessi z_k.

È notevole in questo capitolo il perfetto parallelismo stabilito fra la teoria delle congruenze binomie e quella delle equazioni binomie sia riguardo al modo di risoluzione, come al numero delle loro radici ed in particolare a quello delle radici primitive.

Il capitolo secondo e la prima metà del terzo costituiscono il pregio principale del lavoro; in essi si scorge la cura dell'autore di arrivare con metodi semplici a risultati importanti; le dimostrazioni sono rigorose.

Nella seconda metà del capitolo terzo l'autore espone il metodo di Gauss per la risoluzione dell'equazione binomia $x^p = 1$; nel riassunto, forse troppo conciso, egli segue fedelmente alcuni capitoli dell'opera citata del Bachmann, e lo dichiara esplicitamente in una nota; credo quindi, tanto per il metodo seguito, quanto per le applicazioni ad alcuni casi particolari della divisione del cerchio in parti eguali (per es. in 17 parti), che formano l'oggetto dell'ultimo capitolo, di potermi dispensare dai commenti, essendo l'opera del Bachmann troppo nota agli studiosi di questo argomento.

Io mi auguro che il professore Scarpis, continuando i suoi studii su questo interessante soggetto, sappia apportare anche nella risoluzione dell'equazione $x^p = 1$, quella semplicità, di cui ha dato prova nei primi capitoli del suo lavoro.

F. Panizza.

GIOVANNI GARBIERI. *Trattato di aritmetica razionale*, 2ª edizione. — Padova, tip. Sacchetto, 1891. Prezzo: L. 2.

Il libro del prof. Garbieri, è senza dubbio uno dei migliori del genere pubblicati in Italia negli ultimi tempi. È diviso in due parti; nella prima è svolta la teoria dei numeri interi, nella seconda quella dei numeri frazionari.

Notevolissimo il primo capitolo della prima parte, nel quale, con molta chiarezza, con precisione e con rigore l'A. dà ed estende il concetto di numero, che è considerato dapprima come la esatta espressione della quantità delle cose di una collezione (e l'A. persiste a chiamarlo *numero concreto*), poi come *ente ideale (numero astratto)*. In seguito, considerando il numero come risultamento della misura di una grandezza (la quale è definita così: *tutto ciò che si può misurare*), l'A. passa agevolmente dal concetto di numero intero a quello di numero frazionario; ed infine, osservando giustamente che in pratica non si presenta altro concetto di numero all'infuori di quello acquistato con la operazione naturale del contare, cioè di numero intero e frazionario, perviene al concetto puramente teoretico di numero irrazionale.

Chiude il capitolo affermando che *il calcolo aritmetico comprende quattro*

operazioni** fondamentali, due di composizione*, ADDIZIONE *e* MOLTIPLICAZIONE, *e* ***due di scomposizione, SOTTRAZIONE *e* DIVISIONE; non si comprende bene adunque perchè nello svolgere la teoria e le proprietà delle quattro operazioni non abbia seguito l'ordine col quale ce le ha presentate, o non abbia fatto almeno cenno della corrispondenza di quelle proprietà.

Nella addizione molto logicamente ed opportunamente fa precedere la definizione di addizione da quella di somma; perchè non ha fatto analoga cosa per le altre operazioni?

Seguendo il metodo sintetico, enuncia e non dimostra la proprietà commutativa e quella associativa della somma (che impropriamente dice proprietà della addizione). Nella sottrazione ammette come *assioma* il teorema: *se due numeri sono decomposti in parti tali che quelle del maggiore non sieno inferiori alle corrispondenti del minore, la differenza dei due numeri potrà ottenersi sommando le differenze delle parti corrispondenti;* poi l'altro: *la differenza di due numeri non cambia aumentando l' uno e l'altro egualmente*, asserendo, forse troppo arbitrariamente, che *anche questo principio appartiene a quelli che si renderebbero meno chiari cercando di spiegarli*. Considera i teoremi relativi alla sottrazione di somme come *intuitivi* e finalmente dà la dimostrazione del teorema relativo alla sottrazione di una differenza da un numero.

L'A. dimostra la proprietà commutativa del prodotto servendosi della proprietà distributiva, e, dopo alcune nozioni sulle potenze, introduce l'uso delle lettere.

Nella divisione afferma, e non dimostra, che il resto è minore del divisore e che se è $a = b \times q + r$ e $r < b$, q ed r sono rispettivamente quoto e resto della divisione di a per b. La regola di questa operazione non è abbastanza rigorosamente spiegata.

Il capitolo terzo contiene la teoria dei divisori e multipli, esposta con chiarezza, ordine e parsimonia di dimostrazioni, tutte semplici e brevi, e talvolta anche originali, come quella relativa al modo di ottenere speditamente il resto della divisione, per un numero qualunque, di un prodotto di due o più fattori.

Nel § primo della seconda parte dà molto opportunamente la definizione *simbolica* di frazione e ne mostra la coincidenza colla definizione data nella prima parte mediante la considerazione delle grandezze. Questo primo paragrafo, dato dall'A. come saggio del metodo analitico, è una novità nelle aritmetiche elementari. Rappresentando con $\frac{1}{b} \cdot a$ la frazione che ha per numeratore a e per denominatore b, l'A. deduce con facilità, con rigore e con evidenza conseguenze importanti; come la estensione del concetto di somma e differenza, di multiplo e summultiplo ai numeri frazionari; e non ommette di far vedere come $\frac{1}{b} \cdot a$ rappresenti il quoto della divisione di a per b.

La teoria della trasformazione delle frazioni e quella dei numeri periodici sono seguite da brevi nozioni sui limiti, che avrebbero trovato più acconciamente il loro posto nella appendice. L' A. dimostra, e fa cosa ottima, l'eguaglianza $7.\overline{42} = 7 + 0.\overline{42}$, poi estende ai numeri periodici il concetto di somma, differenza, prodotto e quoto, e infine prova che ciascun numero è il limite di un numero decimale periodico.

Le regole per l'estrazione di radice dai quadrati e dai cubi sono dimostrate in modo così elementare e chiaro, e insieme rigoroso, da rendere più vivo il desiderio che questa importante parte della aritmetica sia di nuovo introdotta nei programmi pei ginnasi.

Il libro si chiude con una appendice di cinque §§ relativi ai numeri irrazionali, dei quali è appena fatto un cenno, ai numeri proporzionali (?), alle grandezze proporzionali (dove l'A. non considera che rapporti interi o frazionari), alla legge delle inverse e ai vari sistemi di numerazione; colla legge delle inverse dimostra anche il seguente principio: *Si facciano su un soggetto tutte le ipotesi possibili che conducano ad altrettante proprietà distinte fra loro e dalle ipotesi; si potranno così formare altrettanti teoremi. Tutti questi teoremi potranno essere invertiti.*

Le diverse teorie sono seguite da numerosi esercizi, quasi sempre buoni, se non nuovi.

Qua e là possono scoprirsi facilmente delle mende di sostanza, di forma e di distribuzione della materia, che per la piccola loro importanza non mette conto citare; non pertanto il libro del Garbieri è buono, per ordine, per chiarezza, per precisione e per la semplicità delle dimostrazioni, e diverrà ottimo se l'A. avrà la pazienza di riempire qualche lacuna, di curare meglio lo sviluppo di alcune dimostrazioni, come ad es. quella del primo teorema fondamentale per la ricerca del m. c. d. di due numeri, quella relativa alla ricerca del m. c. m. di due numeri mediante il loro m. c. d., e, per chiudere come si è principiato, il libro stesso, va considerato, a mio giudizio, come una delle migliori aritmetiche ultimamente apparse.

Roma, 20 febbraio 1892.

A. Massa.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques, publié par G. Eneström. Nouvelle série. 6. N. 1. — Stockholm, 1892.

Bulletin scientifique, rédigé par M. E. Lebon. Sixième année. N. 4, 5, 6, 7. A. Colin et C., éditeurs. — Paris, 1892.

El Progreso matemático, periódico de matemáticas puras y applicadas. Director D. Zoel G. de Galdeano. Año II. N. 13, 14, 15, 16; Enero, Febrero, Marzo, Avril de 1892. — Zaragoza.

Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Vol. XXIX. Novembre-Dicembre 1891. Vol. XXX. Gennaio-Febbraio 1892. — Napoli, B. Pellerano.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. de Longchamps. 4e Série, XVI année. N. 1, 2, 3, 4; Janvier Février, Mars, Avril 1892. — Paris, Librairie Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. 16e année. Nombres 7-15. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles, 1892.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. Mansion et J. Neuberg. Deuxième série. Tome II. Janvier, Février, Mars, Avril 1892. — Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo VI, Fasc. I e II. Gennaio-Febbraio e Marzo-Aprile 1892.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. (Sezione della Società reale di Napoli). Serie 2ª. Vol. V, Fasc. 9° a 12°, Settembre a Dicembre 1891; Vol. VI, Fasc. 1° a 3°, Gennaio a Marzo 1892.

Revue de mathématiques spéciales, rédigée par M. B. NIEWENGLOWSKI. 2ᵉ année. N. 4, 5, 6, 7. Janvier à Avril 1892. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles.

Rivista di matematica, diretta dal Prof. G. PEANO, Fasc. 1° e 2°. Gennaio e Febbraio 1892. — Torino, Fratelli Bocca.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. HOFFMANN. XXII Jahrgang: 8 Heft, 1891; XXIII Jahrgang: 1. Heft, 1892.

BARDELLI (G.) — Dell'uso delle coordinate obliquangole nella teoria dei momenti d'inerzia (Rend. R. Istituto Lombardo, Serie II, Vol. XXV, Fasc. VI).

BERTACCHI (C.) — Vade-mecum dello studente: Memoriale scientifico. — Ditta G. B. Paravia e C., 1890. — Prezzo: L. 2.50.

BROCARD (H.) — Le trifolium (Journal de mathématiques spéciales, 1891).

CASTRILLI (C.) — Proiezione stereografica orizzontale di un emisfero terrestre, metodo di costruzione (Gior. di Battaglini, Vol. XXX, 1892).

CERTO (L.) — *Teoria elementare dei numeri reali* (litog.). — Palermo 1891.

CESÀRO (E.) — Costruzioni baricentriche (Rivista di matematica, Anno 1892).

FONTANA (R.) — Saggio sul riordinamento delle matematiche. — Genova, Stab. tipo-lit. forense, 1890.

FRATTINI (G.) — Due proposizioni della teoria dei numeri e loro interpretazione geometrica (Rend. R. Acc. Lincei, Vol 1°, 1892).

LONGCHAMPS (G. DE) — Développements sur les paraboles de M. Artzt (El Progreso matemático. 1891) — Exposition de la théorie des intégrateurs (id. id.). — Le calcul des séries convergentes (id. id, 1892). — Les sommets dans les courbes planes (Assoc. p. l'avancement des Sciences, Congrès de Marseille, 1891).

MANSION (P.) — Bibliographie: *Traité de Géométrie* par E. ROCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE. (Revue des questions scientifiques, 2ᵉ Série, T. I, 1892).

MATTEUCCI (A.) — Appunti di trigonometria piana, ad uso degli alunni dei Licei e degli Istituti tecnici del Regno. — G. B. Paravia e Comp., 1892. — Prezzo: L. 1.

MILLOSEVICH (E.) — Osservazioni astronomiche, riduzioni relative e calcoli fatti negli anni 1886-87 nel R. Osservatorio Astronomico del Collegio Romano (Ann. Uff. Cent. Meteorologia e Geodinamica. Parte V, Vol. IX, 1887) — Orbita ellittica del pianetino (303) Josephina, dedotta dalle osservazioni della prima opposizione (Memorie Società Spettroscopisti ita., Vol. XX, 1891).

— e CERULLI (V.) — Catalogo di 1291 stelle australi fino a 9.3 inclusivo (Memorie R. Oss. Collegio Romano, Vol. I, Serie III, 1892).

MOSNAT (E.) — Problèmes de Géométrie analytique. Tome II: Géométrie à deux dimensions. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles.

OGNISSANTI (A.) — La scienza è dolore. Conferenza tenuta nel R. Liceo Cirillo di Bari il 13 giugno 1891. — Bari, Tip. Cannone.

PALATINI (F.) — Saggio di un metodo utile per lo studio delle trasformazioni geometriche. — Palermo, 1892.

TESTI (G. M.) — Corso di matematiche: Vol. II, Algebra elementare con molti esercizi. — Livorno, Tip. R. Giusti, 1892. — Prezzo: L. 5.

VERONESE (G.) — A proposito di una Lettera del Prof. Peano (Rend. Circolo mat. Palermo, Tomo VI. 1892.

Chiusura della redazione il dì 10 maggio 1892.

A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

(Continuazione, V. pag. 81).

II.

Il Prof. Loria (*) con grande amore ha meditate le opere critiche degli alemanni Hankel, Heiberg e Cantor, del britanno Allman, del francese Tannery...., che dopo i nostri Commandino, Tartaglia, Flauti, corressero gli errori degli arabici volgarizzamenti, restituirono le proposizioni all'originale purezza e sottilmente indagarono l'architettura del multisecolare edificio. Eudosso di Cnido, astronomo e matematico, anteriore ad Euclide, si occupò di paragonare le grandezze omogenee e di stabilire generali relazioni fra i segmenti lineari, le superficie ed i volumi dei solidi: egli scoprì i prismi e i cilindri esser tripli delle piramidi o dei coni descritti con le medesime basi ed altezze; ideò la stupenda teorica delle proporzioni da Euclide nel V libro distesa ed alle figure geometriche applicata nei libri ulteriori. Di quella teorica Galileo, nell'estreme giornate di sua vita, ai discepoli dilucidava i passi oscuri, dettando graziosi dialoghi all'affezionatissimo Torricelli, ed illustrando le acute argomentazioni con rettangoli e cerchi, e con esempi tratti dall'equabile moto.

L'addizione delle m grandezze identiche ad a genera il moltiplice $a.m$, e la somma delle n grandezze pari alla b è il moltiplice $b.n$; dove m, n significano interi positivi. La somma $a.m+a'.m+a''.m+\ldots$ è multipla della somma $a+a'+a''+\ldots$ secondo m. Le coppie dei molteplici $a.m$, $a'.m$, $a.n$, $a'.n$, $a.p$, $a'.p$, ... aggiunte rispettivamente, forniscono le grandezze $a.(m+n+p+\ldots.)$, $a'.(m+n+p+\ldots.)$ multiple delle

(*) L'indefesso cultore di storia delle matematiche Dott. Gino Loria recentemente ha pubblicato negli Atti della R. Università di Genova una preziosa Memoria sopra *Nicola Fergola e la Scuola dei matematici che lo ebbe a duce*; ancor commendevole per il patriottico pensiero di far conoscere agli studiosi dell'Italia superiore e centrale i progressi dei geometri napoletani nel periodo 1791-1850; tanto per le ricerche di analisi moderna, quanto per l'invenzione dei metodi sintetici

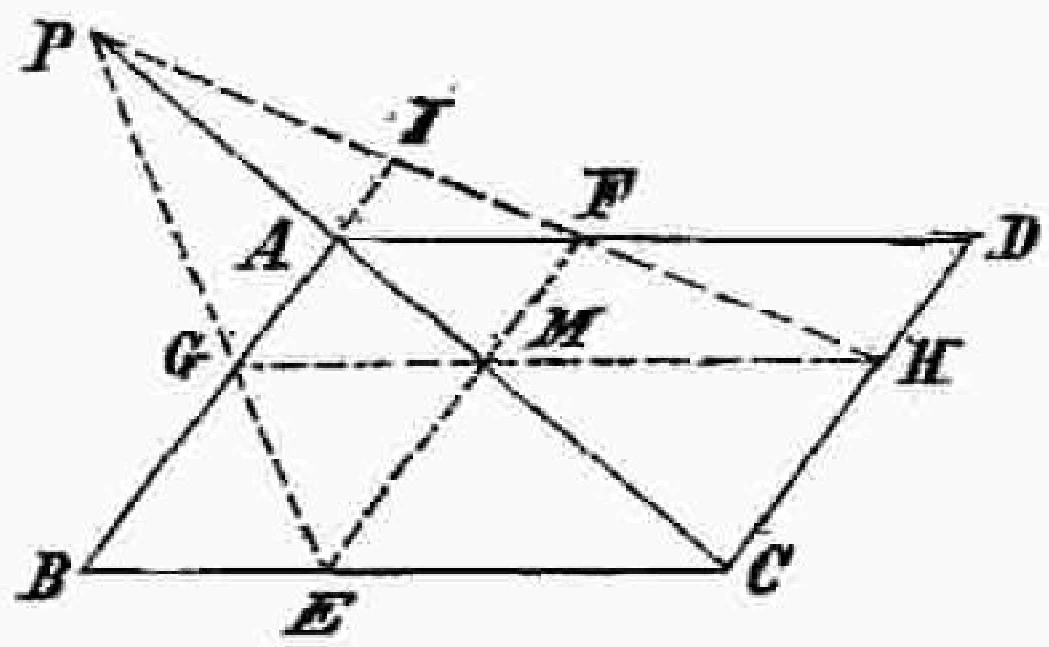
a, a' secondo $m + n + p + \ldots$; e se tutte le h coppie siano identiche alla prima risulta, le molteplici delle $a.m$, $a'.m$ secondo h esser equimultiple delle a, a' secondo $m.h$. Così pure la differenza fra le $a.m$, $a'.m$ eguaglia la differenza fra le a, a' moltiplicata per m.

Nel cercare la ragione delle grandezze geometriche a, a' Euclide non adoperava le lor parti aliquote o summultiple, attesochè, ad eccezione dei segmenti rettilinei, non sempre si possono costruire per intersezioni di rette e cerchi; onde per l'elemento a di una figura determinò solamente il summultiplo $\frac{a}{2^n}$, perchè il suo metodo logico era fondato nel provare l'esistenza del subietto innanzi di svolgerne le varie deduzioni. La ragione delle grandezze omogenee a, a' disse eguale a quella delle omogenee b, b' quando prese le coppie equimultiple $a.m$, $b.m$ delle antecedenti e le $a'.n$, $b'.n$ delle conseguenti, sussistano le concordi relazioni $a.m > a'.n$, $b.m > b'.n$, oppure $a.m < a'.n$, $b.m < b'.n$, ovvero $a.m = a'.n$, $b.m = b'.n$, con gl'interi m, n diversi o identici. In virtù di questa definizione dimostra nel VI libro i parallelogrammi $(a, b)_\alpha$, $(a, b')_\alpha$ aver la ragione dei lati b, b', ed i settori circolari descritti con lo stesso raggio esser proporzionali agli archi intercetti. Indicando con d la diagonale del quadrato costruito sul segmento a, per le diseguaglianze $(a, d).m > (a).m$, $d.m > a.m$ si conchiude la proporzione $(a, d) : (a) = d : a$, mentre si dichiara assurda l'eguaglianza $d.m = a.n$, essendo a, d irrazionali fra loro. Dalla proporzione $a : c = b : c$ si trae $a = b$, perchè ammettendo $a > b$ esisterebbe la grandezza $a.m - b.m$ multipla di $a - b$ e maggiore della c, quindi $b.m + c < a.m$: e rappresentando con $c.(n-1)$ l'ultima delle molteplici di c non superanti $b.m$ si troverebbe $b.m < c.n < a.m$ diseguaglianze contrarie all'ipotesi delle eguali ragioni.

Se fra i multipli delle grandezze qualunque a, a', b, b' si abbiano le relazioni discordanti $a.m > a'.n$, $b.m \leq b'.n$ le grandezze sono sproporzionali, e la ragione $a : a'$ supera $b : b'$; infatti queste differiscono fra loro a motivo delle relazioni supposte, ed inoltre se $a : a'$ fosse minore di $b : b'$ si porrebbe $a : a' = b - h : b'$ con $h < b$, e dovrebbero sussistere le $a . m > a' . n$, $(b - h) . m > b' . n$ relazioni contrarie all'ipotesi, a motivo di $(b - h) . m < b . m \leq b' . n$; il qual principio di Galileo prova esser $a : c > a' : c$ nel caso di $a > a'$ e c qualunque.

La 2ª proposizione del VI libro, dovuta a Talete, dimostra la parallela ad un lato di un triangolo segare gli altri lati in parti proporzionali, e dà origine alla similitudine, che è un metodo universale per l'analisi geometrica, e il più antico di derivazione per l'inventiva delle proprietà metriche e descrittive delle figure.

Così tirando in un parallelogrammo da un punto M della diagonale AC le rette EF, GH parallele ai lati AB, BC e ponendo $BE = a_1$, $EC = a_2$, $BG = b_1$, $GA = b_2$ si ottiene la serie $b_2 : b_1 = AM : MC = a_1 : a_2$; cioè i parallelogrammi equivalenti $(a_1, b_1)_\alpha$, $(a_2, b_2)_\alpha$ hanno i lati reciprocamente proporzionali: viceversa la proporzione $a_1 : a_2 = b_2 : b_1$ conduce all'equivalenza dei due parallelogrammi equiangoli $(a_1, b_1)_\alpha$, $(a_2, b_2)_\alpha$. In particolare alla proporzione $a : b = b : a - b$ corrisponde



l'eguaglianza dei rettangoli $(b) = (a, \ a - b)$, ovvero b è il segmento aureo di a. La congiungente FH seghi in I il lato AB ed in P la diagonale AC, ne risultano $AI : HD = AF : FD = a_1 : a_2 = b_2 : b_1$ e siccome $HD = b_2$ si dirà AI terza proporzionale in ordine a BG, GA; inoltre avendosi $AI : MF = GA : EM$ le diagonali HF, EG dei surriferiti parallelogrammi concorrono in uno stesso punto P della CA, le GF, EH sono parallele a BD, e si deduce la proporzione continua $PA : PM = PM : PC$. Dei quattro termini $CB : CE = EF : BG$, supposto CB il maggiore, sarà BG il minore, e per i triangoli simili AGM, MEC si ricava $MG > GA$, ai quali aggiungendo $CE + BG$ si ottiene $CB + BG > CE + EF$; dunque in ogni proporzione la somma dei due termini massimo e minimo supera quella dei rimanenti.

Il parallelogrammo $(a', b')_\alpha$ è trasformabile in un altro equiangolo e con un lato eguale al segmento b, poichè essendo $BC = a'$, $CH = b'$, ang. $BCH = \alpha$, sulla CH si prenda $CD = b$, e costruiti i parallelogrammi $BCDA$, $BCHG$, dal punto M comune alle AC, GH tirando EF parallela a CD si avrà $ECDF$ equivalente a $BCHG$, ovvero $(a', b')_\alpha = (a'', b)_\alpha$ in cui $a'' = EC$; ne conseguono le proporzioni $(a, b)_\alpha : (a', b')_\alpha = a : a''$, $b : b' = a' : a''$. Ora è la ragione $a : a'' = (a : a')\,(a' : a'') = (a : a')\,(b : b')$; dunque i parallelogrammi equiangoli stanno in ragion composta delle ragioni dei loro lati, che è il teorema 23$^{\text{esimo}}$ del VI libro; quando poi sussista la proporzione $a : a' = b : b'$ i parallelogrammi divengono simili e stanno nella ragione $(a : a')^2$, o duplicata dei lati omologhi.

L'artificio degli antichi geometri per determinare le incognite si fondava su certe trasformate delle proporzioni; così dalla ipotesi $a : b = a' : b'$ Euclide ricava le seguenti $b : a = b' : a'$ (convertendo), $a : a' = b : b'$ (permutando), $a - b : b = a' - b' : b'$ (dividendo), $a + b : b = a' + b' : b'$ (componendo) e in generale dalla serie $a : b = a' : b' = a'' : b'' = \ldots.$ deduce $a + a' + a'' + \ldots. : b + b' + b'' \ldots. = a : b$. Le proposizioni 28, 29 del VI libro hanno per oggetto « con un punto interno (od esterno) dividere il segmento $2a$ nelle parti $a + x$, $a - x$ (od $x - a$), tali che il parallelogrammo $(a - x, y)_\alpha$ sia simile ad $(a, b)_\alpha$ e l'altro $(a + x, y)_\alpha$ equivalga al dato $(c, b)_\alpha$ »: dalle proporzioni corrispondenti $a - x : a = y : b$, $c : a + x = y : b$, si ricava $a - x : a = c : a + x$; a cui corrisponde $(a, c)_\alpha = (a + x, a - x)_\alpha = (a)_\alpha - (x)_\alpha$ per un teorema già veduto; si deduce $(x)_\alpha = (a)_\alpha - (a, c)_\alpha = (a, a - c)_\alpha$ e quindi la proporzione $a : x = x : a - c$, cioè l'ignoto x medio proporzionale fra i segmenti a, $a - c$, come il Torricelli costruì nella sua sintetica soluzione che si legge nell'Euclide commentato dal Viviani, e da questo geometra edito a Firenze l'anno 1718 (*).

(*) Alla pagina 87 del precedente fascicolo mi sfuggì lo avvertire, come l'osservazione del Borelli sul principio delle figure inverse fosse tolta dal 1° libro dei luoghi piani di Apollonio. Anche la prova della congruenza dei triangoli aventi i tre lati eguali si riferisce ad autori più antichi del Borelli, e dal Clavio si attribuiva alla scuola di Philone. È da ricordarsi il *Commento di Pietro Antonio Cataldi ai primi dieci libri di Euclide*, stampato a Bologna negli anni 1620-21; vi si trova costruita la media proporzionale fra due segmenti rettilinei per i tre modi che s'insegnano dai moderni trattati; pure si dimostra come la somma degli angoli esterni (di un poligono convesso pareggi quattro retti, e la somma degli angoli interni di un pentagono stellato equivalga a due retti; la qual proposizione sembra doversi al Campano di Novara, che da un testo arabo tradusse l'Euclide e vi aggiunse un suo pregevolissimo commento pubblicato per la prima volta a Venezia nel 1482 e poi nel 1509 dal Pacioli con proprie spiegazioni.

Si noti con (a, b, c) il parallelepipedo descritto con gli spigoli eguali ai segmenti a, b, c ed inclinati fra loro secondo gli angoli piani $a, b = \alpha,\ b, c = \beta,\ c, a = \gamma$; per la proposizione 25$^{\text{esima}}$ dello XI libro si hanno le identità $(na, b, c) = n(a, b, c)$, $(na, n_1 b, n_2 c) = n\, n_1\, n_2 (a, b, c)$ essendo n, n_1, n_2 interi positivi; è pur facile osservare che $(a_1 + a_2,\ b_1 + b_2,\ c_1 + c_2)$ eguaglia la somma di otto solidi ad esso equiangoli (a_1, b_1, c_1), (a_1, b_2, c_1), ...

Il parallelepipedo (a', b', c') si trasforma in un altro avente gli stessi angoli e con due spigoli dati b, c; poichè riducendo la base $(a', b')_\alpha$ all'equivalente $(a'', b)_\alpha$ sussisterà la proporzione (1) $b : b' = a' : a''$; nel nuovo solido (a'', b, c') eguale in volume al primo, per il teorema 31$^{\text{esimo}}$ del libro XI, presa per base la faccia $(a'', c')_\gamma$ e ridotta all'equivalente $(a''', c)_\gamma$, si avrà la proporzione (2) $c : c' = a'' : a'''$ ed il parallelepipedo (a''', b, c) conserverà il volume del primo; ne risulta $(a, b, c) : (a', b', c') = a : a''' = (a : a')\,(a' : a'')\,(a'' : a''') = (a : a')\,(b : b')\,(c : c')$ a motivo delle (1), (2): dunque **due parallelepipedi equiangoli stanno in ragion composta delle ragioni** degli spigoli, e quando si abbia la serie $a : a' = b : b' = c : c'$ i solidi sono simili e stanno nella ragione $(a : a')^3$, o triplicata di $a : a'$. Rispetto a due parallelepipedi qualunque (a, b, c), (a_1, b_1, c_1) si assumano per basi le faccie $B = (a, b)_\alpha$, $B_1 = (a_1, b_1)_{\alpha_1}$, e siano h, h_1 le rispettive altezze; trasformando B nel parallelogrammo $(a, b_2)_{\alpha_1}$, si costruisca il parallelepipedo (a, b_2, c_2) equiangolo ad (a_1, b_1, c_1) e con lo spigolo c_2 determinato dalla proporzione $h_1 : h = c_1 : c_2$; i due solidi (a, b, c), (a, b_2, c_2) hanno lo stesso volume e quindi $(a, b, c) : (a_1, b_1, c_1) = (a, b_2, c_2) : (a_1, b_1, c_1) = (a : a_1)\,(b_2 : b_1)\,(c_2 : c_1) = (B : B_1)\,(h : h_1)$; ovvero due parallelepipedi qualunque stanno in ragion composta delle ragioni delle loro basi ed altezze.

In virtù della proposizione 28$^{\text{esima}}$ dell' XI libro il piano condotto per gli spigoli opposti di un parallelepipedo in due prismi triangolari equivalenti lo decompone, congrui se è retto, altrimenti riducibili a due congrui con i medesimi spigoli laterali dei prismi obliqui e con le basi eguali alle lor sezioni rette. E questo secondo caso non fu considerato dagli antichi, ma introdotto da Adriano Maria

Legendre nei suoi *éléments de géométrie*, Paris 1794, originandone la teoria delle figure simmetriche nello spazio. Indicando con B la base di un prisma e con l un suo spigolo laterale in grandezza e direzione, si può notare il prisma col simbolo (B, l) e sono evidenti le identità $(B_1, l) + (B_2, l) + (B_3, l) + \ldots = (B_1 + B_2 + B_3 + \ldots, l)$, $(B, nl) = (nB, l) = n(B, l)$, $\frac{1}{n}(B, l) = \left(\frac{B}{n}, l\right) = \left(B, \frac{l}{n}\right)$ ecc., dove n rappresenta un'intero positivo.

Simboleggino t_i e p_i il tetraedro e il prisma aventi la stessa base ed un medesimo spigolo laterale in grandezza e direzione, dal teorema 3° del XII libro si traggono (1) $t = 2t_1 + 2p_1$, $t_1 < \frac{t}{4}$; operando la stessa decomposizione per t_1 si ottengono (2) $t_1 = 2t_2 + 2p_2$, $t_2 < \frac{t_1}{4} < \frac{t}{4^2}$; parimenti proseguendo (3) $t_2 = 2t_3 + 2p_3$, $t_3 < \frac{t_2}{4} < \frac{t}{4^3}$, ... $t_{n-1} = 2t_n + 2p_n$, $t_n < \frac{t}{4^n}$. Col moltiplicare la (2) per 2, la (3) per 2^2, ... e l'ultima per 2^{n-1}, risulta $t = 2p_1 + 2^2 p_2 + 2^3 p_3 + \ldots + 2^n p_n + \varepsilon_n$, dove $\varepsilon_n = 2^n t_n < \frac{t}{2^n}$ diviene piccolissimo se n continuamente cresca e superi qualunque numero finito. Per la similitudine delle basi dei prismi p_i, chiamando θ la base ABC del tetraedro $ABCD = t$ ed l lo spigolo laterale AD si deducono $p_1 = \left(\frac{\theta}{4}, \frac{l}{2}\right)$ $p_2 = \left(\frac{\theta}{4^2}, \frac{l}{2^2}\right)$ ..... $p_n = \left(\frac{\theta}{4^n}, \frac{l}{2^n}\right)$ e la precedente somma, per l'identità $n(B, l) = (B, nl)$, diviene $t = \left(\frac{\theta}{4}, l\right) + \left(\frac{\theta}{4^2}, l\right) + \ldots + \left(\frac{\theta}{4^n}, l\right) + \varepsilon_n = \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\theta}{4^2} + \ldots + \frac{\theta}{4^n}, l\right) + \varepsilon_n$; per $n = \infty$ si trova $t = \left(\frac{\theta}{3}, l\right)$. Infatti nel triangolo ABC siano A_1, B_1, C_1 i punti medi dei suoi lati BC, CA, AB, A_2, B_2, C_2 quelli del triangolo AB_1C_1, A_3, B_3, C_3 i mezzi dei lati di AB_2C_2 ecc., la superficie θ è la somma dei quattro triangoli eguali ad $A_1B_1C_1$, oppure del trapezio $BCB_1C_1 = \frac{3\theta}{4}$ e del triangolo AB_1C_1; decomponendo questo nel trapezio $C_1B_1C_2B_2 = \frac{3\theta}{4^2}$ e nel triangolo AB_2C_2 e così successivamente seguitando si giunge all'identità $\frac{3\theta}{4} + \frac{3\theta}{4^2} + \ldots + \frac{3\theta}{4^n} + \frac{\theta}{4^{n+1}} = \theta$; da cui $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3.4^{n+1}} = \frac{1}{3}$.

(Continua)

G. Bellacchi.

DELL'ANALISI INDETERMINATA DI SECONDO GRADO

(Continuazione, V. pag. 88).

17. A compimento della trattazione, e mirando all'uso pratico della [7], che è la formola risolutiva dell'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$, accenneremo sommariamente due metodi per la ricerca delle soluzioni di questa equazione: inquantochè i due metodi, come quelli esposti nei numeri 8 e 13, applicati alla determinazione delle soluzioni fondamentali dell'equazione, forniscono tutte le coppie di valori per le incognite H e K che compariscono nella [7]. Come nel caso della equazione $x^2 - Dy^2 = N$, il primo dei due metodi vuol esser preferito quando $\sqrt{D}$ è più prossima ad $m+1$, suo valore a meno di un'unità in eccesso, che non ad m; l'altro nel caso contrario.

Quando $\sqrt{D}$ sarà più vicina ad $m+1$ che non ad m, considereremo il sistema

$$\begin{aligned} x^2 - Dy^2 &= -N \\ x^2 - Dy^2 &= -N(2m+1-n) \\ x^2 - Dy^2 &= -N(2m+1-n)^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad [C]$$

E poichè, detta in generale (x, y) una soluzione di qualsivoglia equazione del sistema, si ha $x < (m+1)y$, diremo che la soluzione è *singolare* quando, oltre alla condizione precedente, si verificherà l'altra: $x \leq my$.

Affinchè la soluzione (x, y) sia singolare, è necessario e sufficiente che y non superi la radice del secondo membro della relativa equazione, positivamente preso e diviso per n.

Sia (x_1, y_1) una soluzione della prima equazione del sistema [C], ossia dell'equazione proposta. Se (x_1, y_1) non è singolare, si ponga: $x_1 = (m+1)y_1 - h$ (h positiva); e si avrà:

$$y_1 = \frac{h(m+1) \pm k}{2m+1-n},$$

denotando con (k, h) una soluzione della seconda equazione del sistema $[C]$. Se (k, h) non sarà singolare, il segno — davanti alla k della precedente formola dovrà rifiutarsi. Perchè dalle uguaglianze

$$x_1 = (m + 1)\, y_1 - h\,; \;\; y_1 = \frac{h\,(m + 1) - k}{2\,m + 1 - n}$$

si ricaverebbe

$$(x_1 - m\, y_1) + (k - m\, h) = (n - 2\,m)\, y_1 \,.$$

Il primo membro di quest'ultima eguaglianza è positivo, perchè $x_1 > m\, y_1$ e $k > m\, h$, per ipotesi. Dunque sarebbe positivo anche il secondo. Invece questo è negativo o nullo, perchè $2\,m + 1 - n > 0$, e conseguentemente $n - 2\,m \leq 0$. Si avrà dunque, qualora (k, h) non sia singolare,

$$x_1 = (m + 1)\, y_1 - h\,; \;\; y_1 = \frac{h\,(m + 1) + k}{2\,m + 1 - n}.$$

Conseguentemente

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + 1 + \sqrt{D}}{2\,m + 1 - n}\right) (k + h \sqrt{D}).$$

Stabilito questo principio, si può applicare senza difficoltà il solito ragionamento e concludere che, detta (x, y) una soluzione qualsiasi dell'equazione $x^2 - D\, y^2 = -N$ e detta (x', y') una soluzione singolare della $(\lambda + 1)^a$ equazione del sistema $[C]$,

$$x + y \sqrt{D} = \left(\frac{m + 1 + \sqrt{D}}{2\,m + 1 - n}\right)^{\lambda} (\pm\, x' + y' \sqrt{D}). \;\; (*)$$

18. Un ragionamento analogo a quello fatto nel n. 14 dimostrerà che, se la soluzione singolare (x', y') dalla quale si deriva una certa soluzione (x, y) dell'equazione proposta sarà stata ottenuta dopo λ passaggi $(\lambda > 0)$ da un equazione del sistema $[C]$ alla succedanea, il rapporto $y : y'$ risulterà maggiore dell'unità. Inoltre che

$$y > \frac{m + \sqrt{D}}{m + \sqrt{D} + 1} \cdot \frac{y'}{(m + 1 - \sqrt{D})^{\lambda - 1}} \,.$$

Essendo $m + 1 - \sqrt{D} < \frac{1}{2}$, il rapporto $y : y'$ crescerà rapidamente al crescer di λ: la qual cosa, come al solito, dimostra la

(*) Supponendo $D = a^2 - 1$ e conseguentemente $m = a - 1$, $n = 2\,(a - 1)$, $2\,m + 1 - n = 1$, si ritrova quanto si disse nel n. 4 relativamente all'equazione $x^2 - (a^2 - 1)\, y^2 = -N$.

convenienza di derivare le soluzioni della proposta equazione dalle soluzioni singolari delle successive equazioni del sistema [C].

Non ci dilungheremo in deduzioni ed osservazioni che il lettore può fare da sè, tenendo conto dei casi più distesamente trattati nei n. 8 e 13.

19. Volendo risolvere l'equazione $x^2 - Dy^2 = - N$ con metodo più conveniente al caso in cui $\sqrt{D}$ sia più vicina ad m che non ad $m + 1$, basterà considerare il sistema

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - Dy^2 = - N \\ x^2 - Dy^2 = Nn \\ x^2 - Dy^2 = - Nn^2 \\ x^2 - Dy^2 = Nn^3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \qquad [D]$$

e chiamare *singolari* le soluzioni (x, y) delle equazioni ond'esso è composto, quando, trattandosi di equazioni di posto dispari, si verifichino nel medesimo tempo le condizioni $x < (m + 1)\, y$, $x \leq m\, y$; e le condizioni $x > my$, $x \geq (m + 1)\, y$, trattandosi di equazioni di posto pari.

Per la singolarità di una soluzione occorrerà che in essa il valore della y non superi la radice del secondo membro diviso per n e positivamente preso, se la relativa equazione occuperà posto dispari; oppure la radice del secondo membro diviso per $2\, m + 1 - n$, se l'equazione occuperà posto pari.

Con dimostrazione in tutto simile a quella che si legge nel n. 13, si proverà che

$$x + y\sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^{\lambda} (\pm\, x' + y' \sqrt{D}),$$

significando (x, y) una soluzione qualsiasi della 1ª equazione del sistema [D], ed (x', y') una certa soluzione singolare della $(\lambda + 1)^a$ equazione del sistema medesimo. Dalla dimostrazione risulterà ancora che, per λ dispari, bisogna rifiutare il segno negativo davanti alla x' della precedente formola. Di più, ragionando come nel n. 13, si concluderà che, se per trovare (x', y') saranno occorsi λ passaggi

($\lambda > 0$) da equazione ad equazione del sistema $[D]$, il rapporto $y : y'$ sarà maggiore dell'unità; e che inoltre tale rapporto cresce rapidamente al crescer di λ, avendosi

$$y > \frac{m + \sqrt{D}}{m + \sqrt{D} + 1} \cdot \frac{y'}{(\sqrt{D} - m)^{\lambda - 1}} .$$

II.

Alcune conseguenze teoretiche.

20. Non ci dilungheremo in altre applicazioni numeriche dei metodi sopra assegnati (n. 8, 13, 17, 19) per la risoluzione della equazione $x^2 - D y^2 = \pm N$, nei quattro casi: a) il secondo membro positivo, e $\sqrt{D}$ più prossima ad $m + 1$ che non ad m; b) il secondo membro positivo, e $\sqrt{D}$ più prossima ad m che non ad $m + 1$; c) il secondo membro negativo, e $\sqrt{D}$ più prossima ad $m + 1$ che non ad m; d) il secondo membro negativo, e $\sqrt{D}$ più prossima ad m che non ad $m + 1$. Dette applicazioni non sono indispensabili, potendo servire di modello per tutte l'esempio trattato nel n. 16. Quanto alle conseguenze teoretiche delle cose dette, e specialmente delle formole [4] e [7], esse sarebbero parecchie e svariate: ci limiteremo a due soltanto. La prima è il teorema di Tchebicheff, enunciato nell'esordio di questo scritto. La seconda si riferisce al noto principio di Eulero: *se* (x_0, y_0) *è una soluzione dell'equazione* $x^2 - D y^2 = \pm N$ *in numeri interi (positivi o no), e se* (μ, ν) *è una soluzione intera dell'equazione* $x^2 - D y^2 = 1$, *la* X *e la* Y *fornite dall'eguaglianza*

$$X + Y \sqrt{D} = (x_0 + y_0 \sqrt{D}) \; (\mu + \nu \sqrt{D})$$

daranno una nuova soluzione intera della prima equazione (*).

Pertanto il teorema di Eulero dà nascita alla questione: *quali soluzioni dell'equazione* $x^2 - D y^2 = \pm N$ *conviene combinare con tutte le soluzioni dell'equazione* $x^2 - D y^2 = 1$, *e come la combinazione dev'essere regolata per rispetto ai segni dei valori delle incognite, affinchè la regola di* Eulero *possa fornire, senza ripetizione alcuna, tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione*

(*) È facile verificare.

$x^2 - Dy^2 = \pm N$? Una risposta a tale domanda è data dai due teoremi che chiudono il presente lavoro.

21. *Teorema di* TCHEBICHEFF. — *Se* (α, β) *indica la soluzione minima* (*) *dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = 1$, ed (x_0, y_0) *la soluzione minima dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = \pm N$, *sarà*

$$x_0 \leq \sqrt{\frac{N(\alpha \pm 1)}{2}} \quad ; \quad y_0 \leq \sqrt{\frac{N(\alpha \pm 1)}{2D}} .$$

Risulta infatti dal n. 5 che, se l'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$ è possibile, essa deve ammettere alcune soluzioni con y non maggiore di $\sqrt{\frac{N(\alpha+1)}{2D}}$, tali essendo le soluzioni fondamentali relative ad (α, β). Fra esse sarà compresa la soluzione minima (x_0, y_0) dell'equazione. Perciò

$$y_0 \leq \sqrt{\frac{N(\alpha+1)}{2D}} \text{ e conseguentemente } x_0 \leq \sqrt{\frac{N(\alpha-1)}{2}} .$$

Dimostrato così il teorema per l'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$, passiamo a dimostrarlo per l'equazione $x^2 - Dy^2 = N$. A tal fine consideriamo dapprima l'equazione $x^2 - (a^2 - 1)\,y^2 = N$. Risulta dal n. 1 che fra le soluzioni di essa ve n'ha alcune (le soluzioni fondamentali) nelle quali il valore della y è minore di $\sqrt{N}$. Se dunque (x'_0, y'_0) è la soluzione minima dell'equazione, si avrà $y'_0 < \sqrt{N}$. Ora, poichè

$$x_0'^2 - a^2 y_0'^2 = N - y_0'^2,$$

potremo porre $x'_0 = a y'_0 + h$ (h positiva). Dal n. 1 risulta ancora che h è valore della y in una certa soluzione dell'equazione. Conseguentemente, poichè il minimo valore della y è y'_0, dovrà aversi $h \geq y'_0$. Da questa disuguaglianza e dall'uguaglianza $x'_0 = a y'_0 + h$ si ricava: $x'_0 \geq (a+1)\,y'_0$, e perciò

$$y'_0 \leq \sqrt{\frac{N}{2(a+1)}} .$$

Ponendo l'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ sotto la forma

$$(\beta x)^2 - (\alpha^2 - 1)\,y^2 = N\beta^2$$

e applicando la conclusione precedente, si avrà

$$y_0 \leq \sqrt{\frac{N\beta^2}{2(\alpha+1)}} = \sqrt{\frac{N(\alpha-1)}{2D}} ,$$

(*) Diversa, beninteso, dalla soluzione evidente (1, 0).

e conseguentemente

$$x_0 \leq \sqrt{\frac{N(\alpha + 1)}{2}}.$$

È poi facile verificare che il teorema di Tchebicheff, tanto nel caso dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$, quanto in quello dell'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$, si può compendiare nell'unica disuguaglianza

$$x_0 + y_0 \sqrt{D} \leq \sqrt{N} \sqrt{\alpha + \beta \sqrt{D}}.$$

(La fine al prossimo fascicolo). G. Frattini.

SULLA PARTIZIONE DEI NUMERI

(Continuazione e fine, V. pag. 93).

3. Per giungere ora a due altre relazioni a cui soddisfano rispettivamente le quantità $s_{m,p}$, $s'_{m,p}$ osserviamo che poichè le partizioni s' non sono altro che quelle tra le s che non appartengono all'elemento zero si avrà:

$$s'_{m,p} = s_{m,p} - s_{(m,p)_0} \quad \text{ovvero} \quad s'_{m,p} = s_{m,p} - s_{m,p-1}$$

dalla quale, attribuendo a p successivamente i valori 1, 2, 3, ... p e sommando, si ricava:

$$s_{m,p} = s'_{m,1} + s'_{m,2} + \ldots\ldots + s'_{m,p} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

D'altra parte operando nello stesso modo sulla (5) si ricava

$$s'_{m,1} + s'_{m,2} + \ldots\ldots + s'_{m,p} = s_{m-1,1} + s_{m-2,2} + \ldots\ldots + s_{m-p,p}$$

onde

$$s_{m,p} = s_{m-1,1} + s_{m-2,2} + \ldots\ldots + s_{m-p,p} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Confrontando invece la (6) con la (5) si ha:

$$s'_{m+p,p} = s'_{m,1} + s'_{m,2} + \ldots\ldots + s'_{m,p} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

alla quale può darsi la forma

$$s'_{n,p} = s'_{n-p,1} + s'_{n-p,2} + \ldots\ldots + s'_{n-p,p} \; (^*) \quad \ldots \quad (7')$$

Le (7) (7') sono le relazioni cercate.

(*) Questa proprietà del numero delle soluzioni comuni alle equazioni del tipo (3) è stata data per altra via dal Prof. E. Sadun nella sua nota: *Sulla risoluzione in numeri positivi*, ecc. (V. Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XV, pag. 209).

4. Se nella (8) si pone $p = m$ si ha, avendo riguardo alla prima delle (j):

$$s'_{2m,m} = s'_{(2m,m)_1} + s'_{(2m,m)_2} = s'_{2m-1,m-1} + 1 = s'_{m,1} + s'_{m,2} + s'_{m,3} + \ldots\ldots + s'_{m,m}$$

e quindi osservando ora l'ultima espressione si avrà:

« Il numero dei modi nei quali un intero m può essere formato di parti intere uguali o disuguali (diverse da zero) è uguale a quello dei modi nei quali $2m - 1$ può essere formato di $m - 1$ parti uguali o disuguali (diverse da zero) più uno —, ed è uguale anche a quello dei modi nei quali $2m$ può essere formato di m parti » (*).

Dalla (8) invece si ha:

« Vi sono tanti modi di formare un numero m con somme di $1, 2, \ldots\ldots p$ $(p < m)$ termini quanti di formare $m + p$ con somme di p termini ».

5. Passiamo ora a considerare quelle partizioni dell'intero m, formate da elementi non maggiori di un dato numero $n < m$. Indichiamone con S_m^n il numero, e per mostrare la connessione che esse hanno colle altre specie di partizioni studiate premettiamo il seguente lemma:

« Il numero delle soluzioni dell'equazione

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots\ldots + nx_n = m \qquad (n < m)$$

è uguale a quello delle soluzioni dell'equazione

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots\ldots + nx_n = n + m$$

in cui x_n *è diverso da zero* ».

Infatti se $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ è una soluzione qualunque della prima si verifica subito che $x'_1, x'_2, \ldots (x'_n + 1)$ è una soluzione della seconda con $x'_n + 1$ diverso da zero: viceversa se $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ è una soluzione della seconda con $y'_n = z + 1$ diverso da zero, si verifica che $y'_1, y'_2, \ldots, (y'_n - 1)$ è soluzione della prima. E poichè risulta anche che a soluzioni diverse di una delle due corrispondono diverse per l'altra, la proprietà resta dimostrata.

(*) Uguali o disuguali e diverse da zero.

Ciò essendo stabilito, si ha da un noto teorema (*) che il numero delle soluzioni considerate dell'equazione $1 \, . \, x_1 + 2\,x_2 + \ldots\ldots + n\,x_n = n + m$ è uguale a quello delle soluzioni comuni alle (3) quando si cangi p in n ed m in $m + n$; ne consegue (teorema IV) che:

« Il numero delle soluzioni dell'equazione

$$1 \, . \, x_1 + 2\,x_1 + \ldots\ldots + n\,x_n = m \qquad (n < m)$$

è uguale a quello delle soluzioni dell'equazione

$$y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_n = n + m$$

in numeri diversi da zero ».

Aggiungiamo ora che il numero delle soluzioni della penultima equazione altro non rappresenta che il numero delle partizioni di m in parti non maggiori di n, quindi il teorema che precede dà luogo al seguente di Eulero (**):

« Il numero dei modi nei quali un intiero m può generarsi per somma di termini uguali o disuguali non maggiori di n, è uguale a quello dei modi nei quali il numero $n + m$ può generarsi per somma di m termini uguali o disuguali ».

Osservazione. Da quanto precede risulta la formola

$$S_m^n = s'_{n+m,\,n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

6. Chiuderemo queste considerazioni generali accennando brevemente ad un'altra classe di partizioni dell'intero m in p elementi, e precisamente a quelle formate da elementi diversi tra loro e da zero (***). Le diremo partizioni s'' e denoteremo con $s''_{m,p}$ il loro numero. Fissato p è evidente che il minor numero che ammetta cotali partizioni è $\frac{p\,(p+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + p$. Quindi è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza delle s'' pel numero m che sia $m \geqq \frac{p\,(p+1)}{2}$. Ne segue in ogni caso $m > \frac{p\,(p-1)}{2}$; ciò verificato si determineranno le partizioni s' del numero $m - \frac{p\,(p-1)}{2}$, indi dopo avere di-

(*) V. SADUN. — Nota citata, pag. 213

(**) V. EULERO. — *Introductio in Analysin infinitorum.* — « *De partitione numerorum* ».

(***) La ricerca delle partizioni di un numero in elementi diversi tra loro, non escluso lo zero, non differisce sostanzialmente da questa.

sposto gli elementi di ciascuna in ordine crescente si aggiungerà 1 al *secondo* elemento, 2 al terzo, ecc., $p - 1$ all'ultimo; si otterranno, come si vede subito, *tutte* le partizioni s'' del numero m in p elementi disuguali ed avremo quindi:

$$s''_{m,p} = s'_{m - \frac{p(p-1)}{2}, p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

onde:

Il numero dei modi nei quali un intero m può generarsi per somme di p termini *disuguali* è uguale a quello dei modi nei quali $m - \frac{p(p-1)}{2}$ può generarsi per somma di p termini *eguali e disuguali* ». (Teorema di Eulero. V. Opera citata).

Le partizioni s'' di m in p elementi possono anche dedursi così: Si determinino le partizioni s del numero $m - \frac{p(p+1)}{2}$, indi, dopo avere disposto gli elementi nel solito modo, si aggiunga 1 al *primo* termine, 2 al secondo, ecc. e p all'ultimo. Sarà analogamente:

$$s_{m - \frac{p(p+1)}{2}, p} = s''_{m,p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10')$$

Da queste formole e da tutto quanto precede si comprende che si potrà facilmente trovare per la quantità $s''_{m,p}$ relazioni e proprietà analoghe a quelle stabilite per le $s_{m,p}$ ed $s'_{m,p}$.

Le applicazioni annunciate in principio relativamente alla determinazione effettiva del numero delle soluzioni di alcune particolari equazioni saranno date in una prossima nota.

Roma, dicembre 1891.

Alberto Tagiuri.

SULLA DIVISIONE DEI POLINOMI INTERI

Stanno a base delle seguenti considerazioni gli stessi teoremi esposti nel n.° 1 della Nota precedente (*), dei quali riportiamo qui gli enunciati, perchè si ha necessità di richiamarli. Essi sono:

Teor. I. - *Il resto della divisione d'una somma di polinomi*

(*) Anno VI, pag. 123.

per un altro polinomio D, *è uguale alla somma dei resti ottenuti dividendone per* D *i singoli termini.*

Teor. II. - *Il resto della divisione per* D *d'un prodotto di polinomi, è uguale al resto della divisione per* D *del prodotto dei resti trovati col dividerne per* D *i singoli fattori.*

1.

Sia

$$P^{(n)} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$$

il dividendo, e, supposto $r \leq n$, sia

$$D^{(r)} = x^r - b_1 x^{r-1} - b_2 x^{r-2} - \ldots\ldots - b_{r-1} x - b_r$$

il divisore (**).

Una potenza x^s, di grado $s < r$, divisa per $D^{(r)}$ dà evidentemente per resto la potenza stessa: se $s = r$, il resto è invece

$$b_1 x^{r-1} + b_2 x^{r-2} + \ldots\ldots + b_{r-1} x + b_r:$$

e se infine si ha $s > r$ e precisamente

$$s = t r + s' \qquad (s' < r),$$

ponendo

$$x^s = (x^r)^t \cdot x^{s'}$$

il resto della divisione di x^s per $D^{(r)}$ è quello stesso (teor. II) che vien dato dal prodotto

$$(b_1 x^{r-1} + b_2 x^{r-2} + \ldots\ldots + b_{r-1} x + b_r)^t \cdot x^{s'}$$

diviso per $D^{(r)}$. Ora, questo polinomio è del grado $t(r-1) + s'$, inferiore ad s di t unità, e non v' ha dubbio (a causa dei teoremi I e II) che si potrà applicare lo stesso procedimento per abbassare il grado di ognuno dei suoi termini quando esso è maggiore di r, fino a che si ottenga un polinomio di grado inferiore ad r, che sarà il

---

(**) Il caso più generale in cui si ha

$$D = B_0 x^r + B_1 x^{r-1} + \ldots + B_{r-1} x + B_r$$

può essere sempre ridotto a questo; giacchè dall'essere

$$P = DQ + R = \frac{D}{B_0}(B_0 Q) + R$$

si deduce che: *Se invece di dividere un polinomio* P *per* D, *si divide per* $\frac{D}{B_0}$, *il resto* R *non si altera e il quoziente* Q *viene moltiplicato per* B_0.

resto della divisione di x^s per $D^{(r)}$. Questo metodo che in sostanza si riduce a successivi sviluppi di potenze d'un polinomio, rende conto segnatamente della *specie* e del *valore* dei coefficienti *numerici* che debbonsi ritrovare preposti a quelli *letterali* delle singole potenze della x, quando si determini in altri modi il resto della divisione di $P^{(n)}$ per $D^{(r)}$.

Volendo, per esempio, trovare il resto della divisione di

$$P^{(4)} = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

per

$$D^{(2)} = x^2 - b_1 x - b_2 ,$$

osservato che $b_1 x + b_2$ è il resto della divisione di x^2 per $D^{(2)}$, se ne deduce che $x^3 = x^2 . x$ diviso per $D^{(2)}$ dà lo stesso resto di

$$(b_1 x + b_2) x = b_1 x^2 + b_2 x$$

e che questo resto è

$$b_1 (b_1 x + b_2) + b_2 x = (b_1^2 + b_2) x + b_1 b_2 .$$

Così pure avendosi $x^4 = (x^2)^2$, x^4 diviso per $D^{(2)}$ darà un resto uguale a quello che trovasi dividendo per $D^{(2)}$

$$(b_1 x + b_2)^2 = b_1^2 x^2 + 2 b_1 b_2 x + b_2^2 .$$

Ma questo resto altro non è che

$$b_1^2 (b_1 x + b_2) + 2 b_1 b_2 x + b_2^2 = (b_1^3 + 2 b_1 b_2) x + (b_1^2 b_2 + b_2^2)$$

e si conclude perciò (teor. II e I) che $P^{(4)}$ diviso per $D^{(2)}$ dà per resto

$$\begin{gathered} a_0 [(b_1^3 + 2 b_1 b_2) x + (b_1^2 b_2 + b_2^2)] + a_1 [(b_1^2 + b_2) x + b_1 b_2] + \\ a_2 (b_1 x + b_2) + a_3 x + a_4 = \\ [a_0 (b_1^3 + 2 b_1 b_2) + a_1 (b_1^2 + b_2) + a_2 b_1 + a_3] x + \\ [a_0 (b_1^2 b_2 + b_2^2) + a_1 b_1 b_2 + a_2 b_2 + a_4] . \end{gathered}$$

Se, in generale, indichiamo con

$$(1) \qquad b_1^{(h)} x^{r-1} + b_2^{(h)} x^{r-2} + \dots + b_{r-1}^{(h)} x + b_r^{(h)}$$

il resto della divisione di x^{r+h} per $D^{(r)}$, dimodochè, essendo n il grado del polinomio da dividersi, il resto di x^n sia espresso da

$$b_1^{(n-r)} x^{r-1} + b_2^{(n-r)} x^{r-2} + \dots + b_{r-1}^{(n-r)} x + b_r^{(n-r)} ,$$

il resto della divisione di $P^{(n)}$ per $D^{(r)}$ sarà:

$$R = a_0(b_1^{(n-r)} x^{r-1} + \dots + b_r^{(n-r)}) +$$
$$a_1(b_1^{(n-r-1)} x^{r-1} + \dots + b_r^{(n-r-1)}) + \dots\dots +$$
$$a_{n-r-1}(b_1^{(1)} x^{r-1} + \dots + b_{r-1}^{(1)}) + a_{n-r}(b_1 x^{r-1} + \dots + b_r) +$$
$$a_{n-r+1} x^{r-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n ,$$

oppure:

$$(2)\qquad R = \begin{array}{l|l|l|l}
a_0\, b_1^{(n-r)} & x^{r-1} + a_0\, b_2^{(n-r)} & x^{r-2} + \dots + a_0\, b_{r-1}^{(n-r)} & x + a_0\, b_r^{(n-r)} \\
+ a_1 b_1^{(n-r-1)} & + a_1 b_2^{(n-r-1)} & + a_1\, b_{r-1}^{(n-r-1)} & + a_1 b_r^{(n-r-1)} \\
+ \dots & + \dots & + \dots & + \dots \\
+ a_{n-r-1}\, b_1^{(1)} & + a_{n-r-1} b_2^{(1)} & + a_{n-r-1}\, b_{r-1}^{(1)} & + a_{n-r-1} b_r^{(1)} \\
+ a_{n-r}\, b_1 & + a_{n-r}\, b_2 & + a_{n-r}\, b_{r-1} & + a_{n-r}\, b_r \\
+ a_{n-r+1} & + a_{n-r+2} & + a_{n-1} & + a_n
\end{array}$$

volendolo ridotto alla forma ordinaria di

$$c_0 x^{r-1} + c_1 x^{r-2} + \dots + c_{r-2} x + c_{r-1} .$$

2.

Sebbene col metodo ora esposto possa trovarsi il resto della divisione per $D^{(r)}$ di una potenza qualsiasi x^{r+h}, non è superfluo tuttavia stabilire le relazioni mediante le quali i suoi coefficienti $b_1^{(h)}$, $b_2^{(h)}$, ... $b_r^{(h)}$ si deducono dai coefficienti $b_1^{(h-1)}$, $b_2^{(h-1)}$, ..., $b_r^{(h-1)}$ del resto relativo alla potenza precedente x^{r+h-1}; tanto più che tali relazioni riescono opportune per calcolare i coefficienti del resto (2), indicati con c_0, c_1, ... c_{r-1}, quando sono espressi in numeri i valori di n, di r e dei coefficienti di $P^{(n)}$ e di $D^{(r)}$, e per ottenere altresì la forma generale di R corrispondente a valori numerici assegnati di n e di r, quando non si voglia ricorrere agli sviluppi di potenze d'un polinomio, di cui è parola nel numero precedente.

Osserviamo, a tal effetto, che se r_m è il resto della divisione di x^m per $D^{(r)}$, e si pone $x^{m+1} = x^m . x$, il resto r_{m+1} che si ottiene dividendo x^{m+1} per $D^{(r)}$, sarà uguale (teor. II) al resto della divisione per $D^{(r)}$ del prodotto $r_m x$.

Ciò premesso, se s'indica il resto della divisione di x^{r+h-1} per $D^{(r)}$ con

$$b_1^{(h-1)} x^{r-1} + b_2^{(h-1)} x^{r-2} + \ldots . + b_{r-1}^{(h-1)} x + b_r^{(h-1)},$$

moltiplicando questo resto per x, il polinomio

$$(3) \qquad b_1^{(h-1)} x^r + b_2^{(h-1)} x^{r-1} + \ldots . + b_{r-1}^{(h-1)} x^2 + b_r^{(h-1)} x$$

e la potenza x^{r+h} divisi per $D^{(r)}$ danno lo stesso resto. Ma, da quanto è stato stabilito nel numero precedente, il resto della divisione del polinomio (3) per $D^{(r)}$ è

$$(4) \qquad b_1^{(h-1)} (b_1 x^{r-1} + b_2 x^{r-2} + \ldots . + b_{r-1} x + b_r) + \\ b_2^{(h-1)} x^{r-1} + \ldots . + b_{r-1}^{(h-1)} x^2 + b_r^{(h-1)} x$$

per cui anche il resto di x^{r+h} diviso per $D^{(r)}$ è dato dal polinomio (4), o, sotto altra forma, da

$$(b_1^{(h-1)} b_1 + b_2^{(h-1)}) x^{r-1} + (b_1^{(h-1)} b_2 + b_3^{(h-1)}) x^{r-2} + \\ \ldots . + (b_1^{(h-1)} b_{r-1} + b_r^{(h-1)}) x + b_1^{(h-1)} b_r .$$

I suoi coefficienti, già indicati nella (1) con $b_1^{(h)}$, $b_2^{(h)}$, ..., $b_{r-1}^{(h)}$, $b_r^{(h)}$, sono dunque collegati ai coefficienti $b_1^{(h-1)}$, $b_2^{(h-1)}$, ..., $b_r^{(h-1)}$ del resto di x^{r+h-1}, dalle relazioni:

$$(5) \quad b_1^{(h)} = b_1^{(h-1)} b_1 + b_2^{(h-1)}, \quad b_2^{(h)} = b_1^{(h-1)} b_2 + b_3^{(h-1)}, \ldots ., \\ b_{r-1}^{(h)} = b_1^{(h-1)} b_{r-1} + b_r^{(h-1)}, \quad b_r^{(h)} = b_1^{(h-1)} b_r .$$

Da queste, facendo $h = 1$ e sostituendo al simbolo $b_s^{(0)}$ il suo valore b_s, si hanno i coefficienti del resto che si ottiene dividendo la potenza x^{r+1} per $D^{(r)}$, espressi dalle formule

$$(6) \qquad b_1^{(1)} = b_1 b_1 + b_2, \qquad b_2^{(1)} = b_1 b_2 + b_3, \quad \ldots .., \\ b_{r-1}^{(1)} = b_1 b_{r-1} + b_r, \qquad b_r^{(1)} = b_1 b_r .$$

Successivamente poi, posto $h = 2, 3, \ldots ..$, si possono avere dalle (5) i coefficienti dei resti di x^{r+2}, x^{r+3}, ..., finchè per $h = n - r$ (donde $r + h = n$) vi si traggono i coefficienti

$$(7) \quad b_1^{(n-r)} = b_1^{(n-r-1)} b_1 + b_2^{(n-r-1)}, \quad b_2^{(n-r)} = b_1^{(n-r-1)} b_2 + b_3^{(n-r-1)},$$
$$\ldots\ldots, \quad b_{r-1}^{(n-r)} = b_1^{(n-r-1)} b_{r-1} + b_r^{(n-r-1)}, \quad b_r^{(n-r)} = b_1^{(n-r-1)} b_r$$

che appartengono al resto di x^n.

Così si hanno gli elementi per la tabella

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} b_1 & b_2 & \ldots\ldots & b_{r-1} & b_r \\ b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & \ldots\ldots & b_{r-1}^{(1)} & b_r^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ b_1^{(n-r-1)} & b_2^{(n-r-1)} & \ldots\ldots & b_{r-1}^{(n-r-1)} & b_r^{(n-r-1)} \\ b_1^{(n-r)} & b_2^{(n-r)} & \ldots\ldots & b_{r-1}^{(n-r)} & b_r^{(n-r)} \end{array} \right.$$

e moltiplicando tutti i termini dell'ultima linea per a_0, quelli della penultima per a_1 ecc., quelli della seconda e prima per a_{n-r-1} e a_{n-r} rispettivamente; sommando poi per colonne, cominciando da sinistra e dal basso, ed aggiungendo alla prima somma il coefficiente a_{n-r+1}, alla seconda a_{n-r+2} ecc., alla penultima a_{n-1} ed all'ultima a_n, si ritrovano i coefficienti c_0, c_1, ..., c_{r-2}, c_{r-1} in quella forma ch' è loro assegnata nella espressione (2).

Tutte queste operazioni per effettuare il calcolo delle c_s vengono immediatamente chiarite osservando la (2) e completando la tabella (8) nel modo seguente:

$$(9) \quad \begin{array}{l|lllll|} & a_{n-r+1} & a_{n-r+2} & \ldots\ldots & a_{n-1} & a_n \\ \hline a_{n-r} & b_1 & b_2 & \ldots\ldots & b_{r-1} & b_r \\ a_{n-r-1} & b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & \ldots\ldots & b_{r-1}^{(1)} & b_r^{(1)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & b_1^{(n-r-1)} & b_2^{(n-r-1)} & \ldots\ldots & b_{r-1}^{(n-r-1)} & b_r^{(n-r-1)} \\ a_0 & b_1^{(n-r)} & b_2^{(n-r)} & \ldots\ldots & b_{r-1}^{(n-r)} & b_r^{(n-r)} \\ \hline & c_0 & c_1 & \ldots\ldots & c_{r-2} & c_{r-1} \end{array}$$

(*Continua*). E. SADUN.

UN TEOREMA SULLE CONICHE E COROLLARI RELATIVI

1. Fissato un triangolo ABC ed un punto O fuori dei suoi lati, se consideriamo p. es. i raggi AO, AB, AC, esiste un raggio ed uno solo del fascio col centro in A, che coi tre raggi fissati, presi in un ordine stabilito, determini un rapporto anarmonico dato, e questo raggio taglia BC in un punto N, e la retta ON taglia i lati AB, AC rispettivamente nei punti L, M, i quali con O, N determinano, presi nell'ordine voluto, un rapporto anarmonico eguale a quello determinato dai rispettivi raggi del fascio (A). Di qui si vede che dato un triangolo e un punto fuori dei suoi lati, per questo punto O si può guidare una ed una sola retta, tale che su essa O ed i punti d'incontro coi lati del triangolo, presi in un ordine stabilito, determinino un rapporto anarmonico dato.

Fissato un triangolo ABC ed un punto O del suo piano, e condotta una trasversale OM, si costruisca il punto X che con quelli d'incontro della retta coi lati del triangolo, presi in un dato ordine, determina un rapporto anarmonico dato. Al variare di OM intorno ad O, il punto X descrive un luogo che ha in O (per le considerazioni svolte sopra) un solo punto, quindi è un luogo del secondo ordine. Questo luogo passa evidentemente per i vertici del triangolo dato, e la retta che passando per O taglia i lati del triangolo in tre punti che con O, presi nell'ordine stabilito, determinano il dato rapporto anarmonico, è la tangente alla conica in O.

Sia data una conica K e su essa cinque punti A, B, C, O, S. Tirata la OS, essa incontra i lati del triangolo ABC nei punti L, M, N, e sia $(LMNS) = m$. Tutti i punti X che sulle rette uscenti da O determinano coi punti d'intersezione dei lati del triangolo ABC, presi nell'ordine considerato sopra, un rapporto anarmonico eguale ad m, sono in una conica passante per A, B, C, O, S, cioè sulla K. Dunque: *Sopra ogni retta uscente da un punto* O *di una conica il secondo punto d'incontro con la curva ed i tre punti d'incontro coi lati di un triangolo inscritto nella curva,* *presi in un ordine fisso, determinano un rapporto anarmonico costante.*

Dualmente: *Per ogni punto d'una tangente di una conica, la seconda tangente alla curva ed i tre raggi che lo congiungono coi vertici di un triangolo circoscritto alla conica, presi in un ordine fisso, determinano un rapporto anarmonico costante.*

Questi due teoremi ci indicano un modo di costruzione di una conica, dati cinque punti, e delle tangenti nei punti della curva, come pure di un inviluppo della seconda classe, date cinque tangenti, e dei punti di contatto delle rette inviluppanti.

2. Se la conica data è un'iperbole, e se il triangolo inscritto ha un lato all'infinito, possiamo dire: *Sopra ogni raggio uscente da un punto qualunque di un'iperbole, il secondo punto d'incontro con la curva e i due punti d'incontro con due rette fisse uscenti da un punto della conica parallelamente agli assintoti, presi in un ordine fisso, determinano due segmenti di rapporto costante.*

3. Fissato un triangolo inscritto in una conica, possiamo proporci il problema di determinare quel punto O della curva, tale che i raggi uscenti da esso taglino ognuno i lati del triangolo e ulteriormente la conica in quattro punti, i quali, presi in un ordine stabilito, determinino un rapporto anarmonico dato. Perciò prendiamo ad arbitrio sulla curva un punto M, per il quale conduciamo (n. 1) quel raggio che taglia i lati del triangolo in tre punti, i quali con M, presi nell'ordine voluto, determinano il rapporto anarmonico dato, raggio che incontrerà ulteriormente la curva nel punto O cercato. Di qui discende: *Dato un fascio di coniche a punti base distinti, i punti* O *delle medesime tali che rispetto ad un triangolo inscritto comune le rette da essi uscenti tagliano i lati del triangolo e le rispettive curve in quadruple di punti che presi in un ordine fisso determinino sempre lo stesso rapporto anarmonico, sono in una retta passante per il quarto punto base* M *del fascio.*

4. Indichiamo con a, b, c, p (con accenti ed indici quando occorra) i punti in cui una retta uscente da un punto O di una conica taglia i lati di un triangolo inscritto ed ulteriormente la curva.

Fissiamo ora una corda BC della conica e dal punto O si tiri un raggio che tagli BC in N. Fissato sulla curva un punto X, si tiri BX; allora si avrà un raggio BY tale che sia

$$(BC,\ BY,\ BX,\ BP) = m$$

essendo P l'ulteriore punto d'incontro di ON con la curva. Il raggio BY taglia ON in un punto R e la CR taglia ancora la conica in un punto X_1. Siccome ad ogni punto X corrisponde un punto X_1 e viceversa, così si hanno due coincidenze. Ma quando il punto X cade in P anche Y e quindi anche X_1 cade in P, perciò essendo reale una delle due coincidenze, dev'essere reale pure l'altra. Ma la coincidenza P va naturalmente esclusa dalle nostre considerazioni dipendendo unicamente dalla speciale posizione della trasversale arbitraria ON, per cui possiamo concludere: *Sopra ogni corda di una conica si può, fissato un punto* O *della curva, costruire un triangolo, tale da avere* $(a\,b\,c\,p) = m$. Analogamente un triangolo esisterà sopra BC tale da avere $(abpc) = m$, ecc. Dunque: *Fissato un punto* O *di una conica vi sono* ∞^2 *triangoli inscritti, insistenti 6 a 6 sulle* ∞^2 *corde della curva, tali che i rapporti anarmonici determinati sopra ogni trasversale passante per* O *dai punti d'incontro coi lati di ognuno di essi e con la curva, hanno gli stessi valori dei rapporti anarmonici determinati allo stesso modo da qualunque altro di essi.*

Siano ora sopra una corda AB due triangoli ABC, ABC_1 tali da avere rispettivamente

$$(a\,b\,c\,p) = m,\quad (b_1\,a_1\,c\,p) = m.$$

Si conduca quella trasversale che unisce O col punto d'incontro di AC, BC_1, per cui sarà $b \equiv a_1$ e perciò $(b_1\,b\,c\,p) = m$ e quindi $a \equiv b_1$, cioè la considerata trasversale passa anche per il punto d'incontro di BC, AC_1. Altrettanto dicasi per la coppia di triangoli $(a\,c\,b\,p) = m$, $(a\,c\,p\,b) = m$, come pure per la coppia $(a\,p\,b\,c) = m$, $(a\,p\,c\,b) = m$. Dunque: *I sei triangoli insistenti sopra una corda di una conica, appartenenti all'infinità doppia considerata nell'ultimo teorema, sono divisi in tre coppie tali, che i due punti d'in-*

contro dei lati di due triangoli di una coppia sono allineati con O. I rapporti anarmonici relativi a due triangoli di una coppia, presi nello stesso senso, sono l'uno reciproco dell'altro.

Abbiansi ora due triangoli inscritti qualunque tali che sia $(abcp) = m$, $(a_1 b_1 c_1 p) = m$. Supponiamo che i punti $(BC, B_1 C_1)$, $(AC, A_1 C_1)$ siano in linea retta con O, per cui per quella retta si ha $a \equiv a_1$, $b \equiv b_1$, quindi $(abc_1 p) = m$ e perciò $c \equiv c_1$. Dunque: *Se due qualunque degli ∞^2 triangoli inscritti considerati nel penultimo teorema sono tali che due coppie di lati omologhi s'incontrino in due punti allineati col punto O, anche il punto comune alla terza coppia si trova sulla medesima retta.*

5. Abbiamo visto (n. 3) che fissato un triangolo inscritto in una conica, un solo punto O esiste sulla curva tale che ogni trasversale uscente da esso tagli i lati del triangolo ed ulteriormente la curva in quattro punti a, b, c, p che, presi in un ordine stabilito, determinino un rapporto anarmonico di valore assegnato m. Mantenendo fisso l'ordine dei punti a, b, c, p, e prendendo successivamente come valore del rapporto anarmonico da essi determinato $\frac{1}{m}$, $1 - m$, $\frac{1}{1-m}$, $\frac{m}{m-1}$, $\frac{m-1}{m}$., otteniamo corrispondentemente altri cinque punti O, per cui possiamo concludere: *Fissato un triangolo inscritto in una conica, esistono sulla curva sei punti O, i quali sono tali, che ogni retta uscente da uno di essi taglia i lati del triangolo e la curva in quattro punti, i cui sei rapporti anarmonici sono uguali a quelli determinati dai punti in cui la curva ed i lati del triangolo sono tagliati da ogni retta uscente da qualunque altro di quei punti O.*

Fra le proprietà note che derivano immediatamente dal nostro teorema fondamentale abbiamo questa: *Se due triangoli sono inscritti in una conica, essi sono circoscritti ad un'altra conica.*

Palermo, 1892.

Prof. PALATINI FRANCESCO.

TEMI DI MATEMATICA

per la licenza nei Licei di Francia

(Sessione di luglio 1891).

1. Risolvere un triangolo conoscendo un lato, l'angolo opposto A e la superficie S. Si daranno le formule che permettono di calcolare le incognite b e c, poi B, C.

Si effettuerà il calcolo prendendo $a = 613^m, 57$, $A = 60°$, $S = 133074^{mq}$.

(Algeri).

2. 1°. Un circolo avente per centro O e per raggio $OA = R$, è tangente esternamente ad un altro circolo O' di raggio $O'A = r$. Per il punto di contatto A è condotta una secante AM che incontra il cerchio O' in M e tale che l'angolo $MAO' = \alpha$. Si conduca inoltre dal punto A una perpendicolare ad AM che incontri il cerchio O in N, e si indichi con P il punto in cui la retta MN incontra la linea dei centri OO'.

Trovare in funzione dei dati (R, r, α), le lunghezze PA, PM, PN. Enunciare sotto forma di teorema la proprietà che risulta dal calcolo di PA.

2°. Applicazione numerica al caso di $R = 2$, $r = 1$, $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$.

3°. Supponendo che nella questione proposta R ed r siano le sole incognite, determinare l'angolo α in modo che PA sia media proporzionale fra PM e PN.

(Besançon).

3. Due circonferenze O ed O', di raggi r ed r', hanno per corda comune AA'. Per l'estremità A di questa corda comune si conduca una retta qualunque e si indichino con B e B' gli altri due punti in cui essa incontra le circoferenze O ed O'. Pongasi inoltre ang. $A'AB = \psi$.

1° Si forma il triangolo $A'BB'$ e si domanda di quali proprietà gode questo triangolo quando si fa variare l'angolo ψ da 0 a 2π.

2°. Condotti pel punto A i diametri AD, AD' dei due cerchi e prolungati rispettivamente fino ai punti C', C in cui ciascuno di essi incontra l'altra circonferenza, dedurre, da ciò che precede, la relazione esistente fra le lunghezze dei due archi AC ed AC'.

3°. Trovare l'espressione della superficie del triangolo $A'BB'$ in funzione dell'angolo variabile ψ, dei due raggi r ed r' e degli angoli α e α' che fanno con OO' i due raggi OA ed $O'A$. Semplificare l'espressione di quest'area e trovare per quale valore di ψ essa è la maggiore possibile. Trovare ancora i valori di ψ pei quali area $A'BB'$ = area OAO'.

La soluzione di quest'ultima quistione non poteva essere preveduta senza calcolo?

(Besançon).

4. È dato un semicerchio AMB di raggio $OA = a$. Per le estremità A e B del diametro AB, si innalzano sul piano del semicerchio due perpendicolari sulle quali si prendono le lunghezze $AP = 2a$, $BQ = a$. Determinare sul semicerchio un punto M, mediante la lunghezza $AM = x$ della corda AM, in modo che il prodotto delle distanze del punto M ai punti P e Q abbia un valore dato k^2.

Mostrare che il problema è possibile solo se k^2 è compreso fra $2\sqrt{2}\,a^2$ e $\frac{9}{2}a^2$.

Determinare in particolare i punti M rispondenti all'ipotesi $k^2 = \frac{9}{2}a^2$, $k^2 = 2\sqrt{5}\,a^2$, $k^2 = 2\sqrt{2}\,a^2$. (*Besançon*).

5. In un trapezio si indicano con $2a$ e $2b$ le lunghezze dei due lati paralleli e con h l'altezza. Si domanda di dividere l'area del trapezio in due parti equivalenti con una parallela ai due lati $2a$ e $2b$. Interpretare le soluzioni che si presentano. (*Besançon*).

6. A, B, C essendo i vertici d'un triangolo dato, in quale rapporto debbono essere le masse che bisogna applicare in questi punti affinchè il centro di gravità coincida: 1° con il punto d' incontro delle altezze del triangolo; 2° con il centro del cerchio inscritto nel triangolo. (*Bordeaux*).

7. Sopra una circonferenza di cerchio, di cui il raggio è uguale all'unità e di cui il centro è il punto O, si prenda un arco AB di 22 gradi e mezzo; si conduca la tangente AT al cerchio, si prolunghi il raggio AO al di là del centro, d'una lunghezza OC doppia del raggio, e si tiri la retta CB fino al suo incontro in M colla tangente AT. Calcolare, con tutta l'esattezza che comporta l'uso delle tavole, la lunghezza AM; dare un limite superiore dell'errore relativo che si commetterebbe prendendo questa lunghezza per quella dell'arco AB. (*Caen*).

8. È dato un cerchio di centro O, di raggio R e di cui uno dei diametri è AB; sul raggio OB si porta una lunghezza $OS = h$, poi per S si conduce una perpendicolare SX su AB. Sia MON un diametro qualunque e si conducano le rette AM ed AN che tagliano rispettivamente SX in P e Q. Si domanda: 1° di determinare l' angolo $\varphi = MOB$ in modo che si abbia $MP.\,NQ = 2l^2$, l essendo noto. Discussione; 2° d'esaminare il caso particolare in cui $h = 2R$, $l^2 = \frac{5R^2\sqrt{3}}{2}$, e di calcolare in questo caso i lati e le diagonali del quadrilatero $MNPQ$; 3° di dimostrare che il quadrilatero $MNPQ$ è inscrittibile e che il cerchio circoscritto a questo quadrilatero taglia la retta AB in due punti fissi. (*Clermont*).

9. Sapendo che si ha

$$x + y + z = a\,, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = b^2\,; \qquad x^3 + y^3 + z^3 = c^3,$$

si domanda di calcolare il prodotto xyz. (*Digione*).

10. È data una circonferenza di raggio r e di centro O, ed una retta D che non incontra la circonferenza. Si domanda di trovare sulla perpendicolare abbassata dal punto O sulla retta D un punto C tale che la circonferenza descritta su OC come diametro tagli la retta D e la circonferenza O in due punti A e B tali che la retta AB sia parallela ad OC.

S' indicherà con a la distanza data OI del punto O alla retta D. (*Digione*).

11. Un quadrilatero $ABCD$ è inscritto in un semicerchio il cui diametro dato $AD = 2R$; è noto il lato $BC = a$ che ha i suoi due vertici fuori del diametro e la somma $AB + CD = 2a$. Si domandano i due lati AB e CD, che si potranno rappresentare con $a - x$ ed $a + x$. Cos' è necessario affinchè il quadrilatero esista con questi dati? (*Grenoble*).

12. Calcolare i raggi delle due basi di un tronco di cono conoscendo l'apotema a e sapendo: 1° che la superficie totale uguaglia m volte quella di un cerchio di raggio $\frac{a}{2}$; 2° che l'apotema fa colla base maggiore un angolo di 60°.

Discussione supponendo che m riceva diversi valori. (*Grenoble*).

13. In un parallelogrammo $ABCD$ è dato l'angolo acuto $A = \alpha$ e le lunghezze $DE = a$, $EC = b$ delle rette congiungenti i vertici D e C al centro E di AB; si domandano i lati del parallelogrammo. Quanti parallelogrammi vi sono che rispondono alla quistione e che cosa è necessario affinchè esistano?

Applicazione al caso particolare: $A = 60^\circ$, $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $CE = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

(*Grenoble*).

14. Due mobili partono nello stesso istante da due punti A e B camminando sulla retta AB nel senso AB. Gli spazi percorsi dal primo mobile nei successivi tempi sono di metri a, $a + \alpha, \dots\ a + (n-1)\alpha$, quelli percorsi dal secondo b, $b + \beta, \dots\ b + (n-1)\beta$. Si domanda dopo quanti secondi i due mobili s'incontreranno, sapendo che la distanza $AB = p$.

Si discuterà la soluzione trovata. In particolare, il problema è sempre possibile? Qual significato può attribuirsi alle soluzioni negative? A quale relazione debbono soddisfare a, α, b, β e p perchè il problema non ammetta che una soluzione?

Applicazione. — Si calcolerà il numero dei secondi e la distanza AD del punto d'incontro D dal punto A, sapendo che $a = 1^m$, $\alpha = 2^m$, $b = 3^m$, $\beta = 1^m$, $p = 75^m$. (*Lione*).

15. È dato un triangolo isoscele ABC nel quale i lati uguali sono AB e AC; sia M il centro di BC, I il centro di BM. Si domanda di determinare la parallela PQ al lato BC, che incontra AB in P ed AC in Q, in modo che la somma $\overline{IP}^2 + \overline{IQ}^2$ uguagli una quantità data m^2.

Si rappresenterà con $4a$ la lunghezza del lato BC, con h l'altezza AM del triangolo, e si discuterà la posizione del punto P rispetto ad A e B. — Prendere per incognita la distanza x di BC e PQ. (*Montpellier*).

16. Risolvere l'equazione

$$\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\sqrt[3]{(a-x)^2} = 5\sqrt[3]{a^2 - x^2} \qquad (\textit{Nancy}).$$

17. Un triangolo rettangolo isoscele ABC nel quale $AB = AC = b$, ruota intorno ad un asse Bx situato nel suo piano, passante pel vertice B e che non attraversa la superficie del triangolo. Calcolare il volume generato da questo triangolo in funzione dell'angolo α che l'ipotenusa BC fa con l'asse Bx.

Determinare α in modo da rendere questo volume massimo. (*Parigi*).

18. In un triangolo ABC è data la base $BC = a$ e l'altezza h condotta da A. Si conduca la retta $B'C'$, parallela a BC, ad una distanza x da BC, e si congiungano i punti B' e C' ad un punto A' di BC. Si domanda di calcolare il volume V generato dal triangolo $A'B'C'$ ruotando intorno a BC. — Massimo di V. (*Parigi*).

19. Dati due punti A e B, studiare la variazione dell'angolo AMB sotto il quale è veduto da un punto M il segmento AB, quando questo punto M si sposta sopra una retta DD' data, perpendicolare ad AB, che incontra AB in C. È dato $AC = a$, $BC = b$; si prenderà $MC = x$ come variabile.

(*Parigi*).

20. Tagliare una sfera con un piano P in modo che il volume di uno dei segmenti ad una base così ottenuti abbia un rapporto dato m al volume del cilindro avente la stessa base e la stessa altezza del segmento. (*Parigi*).

21. Su di una retta indefinita sono dati due punti A, B separati dalla distanza c. Un'altra retta indefinita xy si sposta parallelamente a se stessa, facendo colla prima un angolo dato θ, e, in ciascuna delle sue posizioni, si abbassano su di essa, dai punti A e B, le perpendicolari $AA' = \alpha$, $BB' = \beta$. Indicando con a e b due coefficienti positivi costanti, si domanda:

1° di determinare il punto d'intersezione O delle due rette in modo che sia

$$a\alpha^2 + b\beta^2 = (a+b)m^2;$$

2° di trovare il valor minimo della quantità $a\alpha^2 + b\beta^2$ e la posizione corrispondente del punto O;

3° quale sarà allora la definizione geometrica di questo punto?

(*Rennes*).

Risposte.

1. $$b = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{a^2 \operatorname{sen} A + 4S(\cos A + 1)}{\operatorname{sen} A}} + \sqrt{\frac{a^2 \operatorname{sen} A + 4S(\cos A - 1)}{\operatorname{sen} A}}\right\}$$

$$c = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{a^2 \operatorname{sen} A + 4S(\cos A + 1)}{\operatorname{sen} A}} - \sqrt{\frac{a^2 \operatorname{sen} A + 4S(\cos A - 1)}{\operatorname{sen} A}}\right\}.$$

2. 1°) $PA = \dfrac{2Rr}{R-r}$, $\quad PM = \dfrac{2r\sqrt{R^2 \operatorname{sen}^2\alpha + r^2\cos^2\alpha}}{R-r}$,

$PN = \dfrac{2R\sqrt{R^2 \operatorname{sen}^2\alpha + r^2\cos^2\alpha}}{R-r}$; 2°) $PA = 4$, $\quad PM = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$,

$PN = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$; $\quad \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{r}{R+r}}$.

3. 1°) Il triangolo $A'BB'$ si conserva costantemente simile al triangolo AOO'.

2°) Gli archi AC ed AC' sono proporzionali ai raggi r ed r'.

3°) $S = 2rr' \operatorname{sen}(\alpha + \alpha') \cdot \operatorname{sen}^2\psi$. Il massimo di S si ha per $\psi = 90°$ e $270°$. Area $S = AOO'$ quando $\psi = \pm 30°$ o $\pm 150°$.

4. L'equazione del problema è $x^4 - a^2x^2 + h^4 - 20a^4 = 0$.

5. La lunghezza della retta che divide il trapezio nel modo richiesto è espressa da $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$.

6. 1°) Le masse debbono essere proporzionali alle tangenti degli angoli corrispondenti; 2°) Le masse debbono essere proporzionali ai lati opposti.

7. $AM = 3 . \tan 7^{\circ} . 27' . 59'', 3 = 0{,}39264$. Limite superiore $\frac{2}{10000}$.

8. 1°) L'equazione del problema è $R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \pm l^2 \operatorname{sen} \varphi + h^2 - R^2 = 0$; 2°) $\varphi = 60^{\circ}$, $MP = R\sqrt{3}$, $NQ = 5R$, $PQ = 4R\sqrt{3}$, $MQ = R\sqrt{39}$, $NP = R\sqrt{13}$.

9. $xyz = \frac{2c^3 - 3ab^2 + a^3}{6}$. **10.** $-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2}$.

11. $x = \sqrt{\frac{a^3 + 3a^2R - 4R^3}{a - 2R}}$. Perchè il quadrilatero esista è necessario che sia $\frac{2R}{\sqrt{5}} < a \leqq R$.

12. Le equazioni del problema sono $x - y = \frac{a}{2}$, $8y^2 + 12ay - (m-3)a^2 = 0$, dev'essere $m \geqq 3$.

13. $\sqrt{\frac{(b^2 + a^2)\cos^2\alpha \pm \sqrt{(b^2 + a^2)^2 \cos^4\alpha - (b^2 - a^2)^2 \cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha}}$. Vi sono due parallelogrammi se $b \geqq a \geqq b \tan\frac{\alpha}{2}$. Applicazione: $2, \frac{1}{2}$; $1, 1$.

14. Detto x il numero dei secondi cercato; x è radice di $(\alpha - \beta)x^2 + (\beta - \alpha + 2a - 2b)x - 2p = 0$. Il problema ammette una soluzione unica quando $p = \frac{(\beta - \alpha + 2a - 2b)^2}{8(\beta - \alpha)}$. Applicazione: $x' = -10$, $AD' = -100^m$; $x'' = 15$, $AD'' = 225^m$.

15. L'equazione del problema è $2(4a^2 + h^2)x^2 - 16a^2hx + h^2(10a^2 - m^2) = 0$.

16. 0 o $\frac{63a}{65}$. **17.** $\frac{\pi}{3}\frac{b^3}{\sqrt{2}}(\cos\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha)$; massimo per $\alpha = \operatorname{ang}\left(\operatorname{sen} = \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$: nel caso in cui BC cada entro l'angolo ABx. E $\frac{\pi}{3}\frac{b^3}{\sqrt{2}}(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$, col massimo per $\alpha = 45^{\circ}$, qualora AB cada entro l'angolo CBx. **18.** $V = \frac{2\pi}{3} . \frac{a}{h} x^2 (h - x)$. Massimo: $\frac{8}{81}\pi a h^2$.

19. Equazione $\operatorname{sen}^2\alpha . x^4 + [(a^2 + b^2)\operatorname{sen}^2\alpha - (a - b)^2]x^2 + a^2b^2\operatorname{sen}^2\alpha = 0$; $\operatorname{sen}\alpha \leqq \frac{a - b}{a + b}$. **20.** Altezza segmento $= \frac{3R(2m - 1)}{3m - 1}$.

21. 1°) Posto $AO = x$, si ha $(a + b)\operatorname{sen}^2\theta . x^2 - 2bc\operatorname{sen}^2\theta . x + bc^2\operatorname{sen}^2\theta - (a + b)m^2 = 0$; 2°) Minimo $= \frac{abc^2\operatorname{sen}^2\theta}{a + b}$; 3°) $AO : OB = b : a$.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Variazioni e limiti dei triangoli isobaricentrici e iscritti in un dato cerchio. — 1. Dato un cerchio K, di centro O e raggio R, e dato un punto G nel suo interno, si hanno infiniti triangoli aventi in G il comune baricentro, e iscritti nel cerchio K. I punti medi dei lati di questi triangoli giacciono in una circonferenza L, di centro N, che passa pure per i piedi delle altezze dei triangoli medesimi, ed è la circonferenza dei nove punti comune a quei triangoli, ed anche la figura omotetica inversa di K rispetto al centro di omotetia G, e la figura omotetica diretta di K rispetto al punto H, ortocentro comune di tutti quei triangoli (*). Di guisachè assegnato in K un punto A_1, e condotte le rette A_1H, A_1G, queste taglieranno L rispettivamente nei punti A'_1, M_1, e la retta A'_1M_1 taglierà K in due punti B_1, C_1, e sarà $A_1B_1C_1$ un triangolo iscritto in K, e avente in G il baricentro (**).

Mi propongo di studiare la variazione ed i massimi ed i minimi del triangolo $A_1B_1C_1$, quando A_1 si muove nella circonferenza K, senza ricorrere però al calcolo differenziale, del quale, a primo aspetto, pare che non si possa fare a meno, trattandosi, come più sotto si vedrà, di una funzione di 3° grado. E coglierò, a questo proposito, l'occasione di far conoscere ai giovani studenti che in questo giornale fanno le loro prime armi, un teorema da essi forse ignorato, e che è molto utile nello studio della variazione delle grandezze, specialmente in certe quistioni di geometria, in cui i metodi ordinarii sono poco adatti.

2. Se il cerchio L non taglia K, cioè è tutto interno a K, la precedente costruzione dà due triangoli isosceli isobaricentrici iscritti, ABC, $A'B'C'$ (***).

Ponendo $OG = m$, si ha $OH = 3m$, $ON = \frac{3m}{2}$, $OM = MN - ON = \frac{1}{2}(R - 3m)$, $MG = OM + OG = \frac{1}{2}(R - m)$, $AM = 3MG = \frac{3}{2}(R - m)$, quindi $\overline{MB}^2 = R^2 - \overline{OM}^2 = \frac{3}{4}(R - m)(R + 3m)$, e

$$16(\Delta ABC)^2 = 27(R - m)^3(R + 3m).$$

Similmente si trova

$$16(\Delta A'B'C')^2 = 27(R + m)^3(R - 3m),$$

onde

$$(\Delta ABC)^2 - (\Delta A'B'C')^2 = 27Rm^3,$$

cioè il triangolo ABC è maggiore del triangolo $A'B'C'$.

(*) BALTZER. — *Planim.* § 12,8.

(**) Le rette A_1H, A_1G tagliano K in quattro punti; ma è facile verificare che una sola delle rette che congiungono questi quattro punti soddisfa alla quistione.

(***) Il lettore è pregato di farsi le figure. In queste figure io suppongo che G sia al disotto di O, che A sia il termine più basso del diametro OG, e A' il termine opposto. I lati BC, $B'C'$ risultano perpendicolari ad OG, ed è $BC > B'C'$. In queste figure M ed M' sono rispettivamente i punti medi dei lati BC, $B'C'$, N è il centro del cerchio L, il quale centro è il punto medio di OH.

Se il cerchio L taglia il cerchio K, il triangolo $A'B'C'$ non esisterà più; e se risulta tangente, il triangolo $A'B'C'$ avrà i vertici B', C' coincidenti.

3. Considero ora un triangolo qualunque $A_1 B_1 C_1$ iscritto in K, e avente in G il suo baricentro. Dico a_1, b_1, c_1 i numeri che misurano i suoi lati, S_1 la sua area. Si hanno le equazioni:

$$a_1 b_1 c_1 = 4RS_1\,, \qquad m^2 = R^2 - \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{9}\,,$$
$$16\,S_1^2 = 4\,b_1^2 c_1^2 - (b_1^2 + c_1^2 - a_1^2)^2.$$

Eliminando b_1 e c_1, dopo brevi riduzioni, si ha:

$$4S_1 = \frac{a_1\,[9\,(R^2 - m^2) - 2\,a_1^2]}{\sqrt{4R^2 - a_1^2}}\,;$$

ovvero, essendo $a_1 = 2R$ sen A_1:

$$4\,S_1 = 4R^2 \operatorname{sen} 2A_1 + (R^2 - 9m^2) \operatorname{tg} A_1.$$

Si può notare che se nella formola ora scritta si suppone $b_1 = c_1$, si deduce quella ricavata per altra via nel numero precedente.

4. Suppongo $\frac{R}{2} < ON < \frac{3R}{2}$, cioè (2): $\frac{R}{3} < m < R$. Allora i cerchi K ed L si taglieranno in due punti, A_2, A_3, il primo alla sinistra di AA', il secondo alla destra. Le rette A_2G, A_3G tagliano di nuovo K nei punti C_2, C_3 rispettivamente, e se si pone $A_2 \equiv B_2$, $A_3 \equiv B_3$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ si dovranno riguardare come due triangoli isobaricentrici iscritti di area nulla. I punti C_2, C_3 determinano l'arco C_3C_2 (*), in cui non cadono vertici degli infiniti triangoli isobaricentrici iscritti (**).

Se ora A_1 cade nell'arco AA_2, B_1 cadrà nell'arco A_2C_1 e C_1 nell'arco C_2B (B è alla destra di C); e se A_1 cade nell'arco A_2C, B_1 cadrà nell'arco AA_2, e C_1 nell'arco C_2B. Se A_1 cade nell'arco CC_3, avviene nell'arco BA_3A ciò che accadeva nell'arco AA_2C. Basterà quindi studiare la variazione del triangolo $A_1B_1C_1$, quando A_1 varia nell'intervallo AA_2. Ora si noti che il punto M in questo caso cade fra O ed A, perchè dall'essere $R < 3m$, risulta $3R - 3m < 2R$, cioè $\frac{3}{2}(R - m) < R$, cioè ancora (2), $AM < R$. E allora B_1C_1, che taglia L in M_1 ed A'_1, sarà minore di BC, perchè è $OM_1 > OM$, ed M_1 è il punto medio di B_1C_1. Inoltre è manifestamente $A_1A'_1 < AM$, e quindi il triangolo $A_1B_1C_1$ è minore del triangolo ABC. Di più, siccome avvicinandosi A_1 ad A_2, anche B_1 si avvicina ad A_2, segue che variando A_1 da A ad A_2, il triangolo $A_1B_1C_1$ decresce fino a zero, per poi crescere di nuovo, quando A_1 oltrepassa il punto A_2. Ove si noti infine che nel passaggio del punto A_1 per il punto A_2 l'area del triangolo $A_1B_1C_1$ cambia di segno, si può enunciare il seguente teorema:

(*) Seguo la consuetudine di leggere un arco in modo che dal termine primo letto al secondo si proceda nel senso del movimento delle lancette dell'orologio.

(**) Si intende dei triangoli reali.

Se il punto A_1 *si muove nella circonferenza* K, *partendo da* C_2, *l'area del triangolo* $A_1B_1C_1$, *dapprincipio nulla, acquista un valore, che io suppongo positivo, e cresce. Nel punto* B *quell'area tocca un massimo, rappresentato dall'area del triangolo isoscele* ABC, *e poi decresce, fino ad annullarsi di nuovo nel punto* A_3. *Quivi cambia di segno, e algebricamente decresce fino al punto* A, *in cui ripiglia il valore dell'area del triangolo* ABC, *che va attualmente riguardato come un minimo. Da* A *algebricamente cresce fino ad annullarsi nel punto* A_2, *dove di nuovo cambia di segno, cresce fino in* C, *dove raggiunge il primitivo massimo, e infine decresce sino a zero nel punto* C_3.

Si può in particolare enunciare il seguente teorema:

Se di tutti i triangoli isobaricentrici e iscritti in un dato cerchio, ve ne è un solo isoscele, questo avrà l'area massima.

5. Se $ON = \frac{R}{2}$, se cioè (2), $R = 3m$, i cerchi L e K risulteranno tangenti internamente. In questo caso la costruzione indicata nel n. 1 mostra che tutti i triangoli isobaricentrici iscritti sono rettangoli, e il vertice dell'angolo retto cade per ciascuno nel punto $H \equiv A$. In quest'ipotesi si ha perciò:

Se A_1 *si muove* da A′ verso B, $A_1B_1C_1$ *cresce, toccando un massimo in* B; *poi decresce fino a zero in* A; *quivi cambia di segno, e in valore assoluto cresce fino in* C, *d'onde poi, sempre in valore assoluto, decresce fino a ritornare a zero nel punto* A′.

6. Se $m < \frac{R}{3}$, il cerchio L sarà tutto interno al cerchio K. In questo caso non riesce agevole, col metodo precedente, studiare la variazione di S_1. Adoprerò il metodo indicato in principio, che è fondato sul seguente teorema:

« Se Y è una funzione continua, in un dato intervallo, della variabile in-
« dipendente x, e che può essere messa sotto la forma d'una somma o d'una
« differenza di due funzioni U, V della x stessa, le quali restino positive in
« quell'intervallo, allora, se, nel primo caso, per un accrescimento positivo h
« di x, l'una delle funzioni aumenta di k, e l'altra diminuisce di l, e se, nel
« secondo caso U e V prendono gli accrescimenti k ed l, vi sarà accrescimento
« o diminuzione di Y secondochè il limite del rapporto $\frac{k}{l}$, per $h = 0$, sarà
« più grande o più piccolo di 1; e i massimi e i minimi della funzione avranno
« luogo quando il limite di quel rapporto sarà eguale all'unità (*) ».

Ciò posto considero l'area del triangolo $A_1B_1C_1$ sotto la forma (3)

$$4S_1 = 4R^2 \text{ sen } 2A_1 + (R^2 - 9m^2) \text{ tg } A_1.$$

Ora dei tre angoli del triangolo $A_1B_1C_1$ uno almeno sarà maggiore di 45°, e questo sia A_1. Allora $2A_1$ sarà maggiore di 90°, e crescendo A_1, $4R^2 \text{ sen } 2A_1$ decrescerà. Inoltre, come è facile verificare, i triangoli isobaricentrici iscritti in questo caso risultano tutti acutangoli, e tang A_1 sarà positiva. Così $4S_1$ è messa sotto la forma d'una somma di due funzioni della variabile A_1, le quali ri-

(*) Desboves. — *Questions de Géométrie élémentaire.* — Troisième édition, Paris, 1880. Pag. 117.

mangono positive nel totale movimento di A_1. Di queste due funzioni, quando A_1 prende un accrescimento positivo, la prima diminuisce e la seconda cresce, onde è il caso di applicare il teorema rammentato (*).

A questo scopo pongo $A_1 + h$ invece di A_1. Allora $(R^2 - 9m^2) \operatorname{tg} A_1$ aumenta di

$$(R^2 - 9m^2)\,[\operatorname{tg}(A_1 + h) - \operatorname{tg} A_1] = \frac{(R^2 - 9m^2)\operatorname{sen} h}{\cos(A_1 + h)\cos A_1}$$

e $4R^2 \operatorname{sen} 2A_1$ diminuisce di

$$4R^2\,[\operatorname{sen} 2A_1 - \operatorname{sen}(2A_1 + 2h)] = -\,8R^2 \operatorname{sen} h \cos(2A_1 + h).$$

Il rapporto fra l'aumento e la diminuzione sarà:

$$-\frac{R^2 - 9m^2}{8R^2}\cdot\frac{1}{\cos(A_1 + h)\cos A_1 \cos(2A_1 + h)},$$

il cui limite, per $h = 0$, è

$$\frac{9m^2 - R^2}{8R^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 A_1 \cos 2A_1}.$$

Eguagliando questo limite ad 1, si ottengono i valori di A_1 che rendono massima o minima l'area S_1. Si ha l'equazione

$$2\cos^4 A_1 - \cos^2 A_1 - \frac{9m^2 - R^2}{8R^2} = 0,$$

da cui

$$\cos^2 A_1 = \frac{R \pm 3m}{4R}.$$

Prendendo $\cos^2 A_1 = \dfrac{R + 3m}{4R}$, si avrà, dopo alcune riduzioni:

$$\operatorname{sen}^2 2A_1 = \frac{3(R - m)(R + 3m)}{4R^2}, \qquad \operatorname{tg}^2 A_1 = \frac{3(R - m)}{R + 3m}$$

$$16S_1^2 = 27(R - m)^3(R + 3m) = 16(\Delta\,.\,ABC)^2.$$

Prendendo $\cos^2 A_1 = \dfrac{R - 3m}{4R}$, risulta:

$$16S_2^2 = 27(R + m)^3(R - 3m) = 16(\Delta\,.\,A'B'C')^2.$$

E si sa dal n. 2 che $ABC > A'B'C'$. Se si osserva inoltre che il detto limite per $A_1 = B$ diviene (2) $\dfrac{R^2 - 9m^2}{8R^2}\cdot\dfrac{16R^2}{R^2 - 9m^2} = 2$, il che significa che quando il punto A_1 si muove, in un senso o nell'altro, ed è prossimo a B, l'area del triangolo $A_1B_1C_1$ cresce, e quindi decresce nel caso contrario, e che

(*) Con A_1 ora indico un punto, ed ora un angolo. Con ciò però non viene ad ingenerarsi confusione alcuna.

una simile osservazione si faccia in B' ed in A, osservazione che si ommetta per brevità, si deduce il seguente teorema:

Se di tutti i triangoli isobaricentrici iscritti in un dato cerchio ve ne sono due isosceli, e questi sieno ABC, $A'B'C'$, *l'area d'un qualsivoglia triangolo isobaricentrico iscritto* $A_1B_1C_1$, *quando un suo vertice* A_1 *si muove nella circonferenza del dato cerchio, varierà in modo continuo, mantenendosi sempre del medesimo segno, e passerà, in un intero giro del punto* A_1, *tre volte per un massimo, e ciò avverrà quando* A_1 *coinciderà con* B, A, C, *e tre volte per un minimo, e ciò avverrà, quando* A_1 *coinciderà con* B', C', A'. *I tre massimi sono uguali fra loro, e sono rappresentati dal triangolo* ABC, *i tre minimi sono pure eguali fra loro, e rappresentati dal triangolo* $A'B'C'$.

Si ha anche:

Se dei triangoli isobaricentrici iscritti in un cerchio ve ne sono due isosceli, di essi uno è massimo, ed è quello che ha la base maggiore, e l'altro è minimo.

Prof. Seb. Catania.

Nota sulla Quistione 105. — La quistione 105 (*), della quale, nel fascicolo precedente di questo Periodico, si dà una soluzione analitica, offre un bell'esempio dell'eleganza che spesso si raggiunge coi metodi di geometria pura.

Dinotino A e B' rispettivamente il vertice e l'ortocentro dati, l_1 ed l_2 le due rette date ed R il punto ove esse si tagliano. Se A_1 ed A_2 sono gli altri due vertici del triangolo cercato, cioè quei vertici che appartengono ordinatamente alle rette l_1 ed l_2, è chiaro che il lato A_1A_2 è perpendicolare ad AB', ed A_2B' è perpendicolare ad AA_1. E viceversa: se AA_1A_2 è un triangolo nel quale A_1A_2 è perpendicolare ad AB' ed A_2B' è perpendicolare ad AA_1, esso risolve il problema.

Inoltre, se X è il punto d'incontro delle rette AA_1 ed A_2B', noto X, il triangolo AA_1A_2 si può facilmente costruire; quindi il problema si può ridurre alla ricerca del punto X.

Omettendo nel problema la condizione che A_2B' sia perpendicolare ad AA_1 e tenendo ferme le altre, il triangolo non è determinato. E poichè evidentemente, al variare di esso, i vertici A_1 ed A_2 segnano sulle rette l_1 ed l_2 due punteggiate proiettive, i fasci, che proiettano queste punteggiate da A e da B' ordinatamente, sono proiettivi e determinano sulla circonferenza di diametro AB' due serie proiettive di punti; ed i punti uniti di queste serie sono chiaramente le posizioni del punto cercato X.

Per costruire con facilità tre coppie di punti corrispondenti delle due serie proiettive sulla circonferenza, si conducano ad essa le tangenti in A e B' e sieno P_1, P_2; Q_1, Q_2 i punti d'incontro di ciascuna delle tangenti con le rette l_1, l_2 ordinatamente, e si disegnino le rette AR e $B'R$. È facile vedere che nei fasci

(*) Cioè: *Determinare i triangoli ciascuno dei quali soddisfi alle seguenti condizioni: un vertice cada in un punto dato, i due vertici rimanenti cadano in due date rette, uno per ciascuna, e l'ortocentro sia un punto assegnato.*

proiettivi di centri A e B' sono corrispondenti i raggi: AP_1 e $B'P_2$, AQ_1 e $B'Q_2$, AR e $B'R$, dai quali raggi si deducono le coppie di punti corrispondenti delle due serie e da questi punti si deduce la retta che taglia la circonferenza nei punti cercati X.

È utile osservare che quest'ultima retta, nel caso che A, B' ed R sono per diritto, è la $P_1 Q_2$, e quindi il problema in questo caso si costruisce con grandissima semplicità.

Napoli, giugno 1892. T. Fuortes.

Alcuni teoremi affini di geometria. — *Se due corde d'un angolo, segantisi sulla bisettrice dell'angolo, sono uguali, esse sono ugualmente inclinate a questa bisettrice.*

Sia $ACB = 2\alpha$ l'angolo, CO la sua bisettrice, AOD una corda dell'angolo e pongasi $CO = c$, $AO = a$, $OD = a'$, ang. $COA = \beta$.

Dalla trigonometria si ha subito

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}[\pi - (\beta + \alpha)]} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\beta + \alpha)},$$

$$\frac{a'}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}[\pi - (\pi - \beta + \alpha)]} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)},$$

onde

$$[1] \qquad m = a + a' = c \operatorname{sen}\alpha \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\beta + \alpha)} + \frac{1}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)} \right).$$

Riducendo a forma intera si ottiene successivamente:

$$c \operatorname{sen}\alpha\, [\operatorname{sen}(\beta + \alpha) + \operatorname{sen}(\beta - \alpha)] - m \operatorname{sen}(\beta + \alpha) \operatorname{sen}(\beta - \alpha) = 0$$

$$2c \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \operatorname{sen}\beta - m (\operatorname{sen}^2\beta \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\beta) = 0$$

$$\operatorname{sen}^2\beta - \frac{2c \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{m} \operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}^2\alpha = 0,$$

equazione di 2° grado rispetto a sen β. Osservando che le sue radici sono reali, avremo dunque:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{c \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{m} + \sqrt{\frac{c^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha}{m^2} + \operatorname{sen}^2\alpha},$$

dove si è preso il solo segno $+$ pel radicale essendo da considerare $\beta < \pi$ e positivo.

Quando c ed m sono assegnati, così che il 2° membro della precedente eguaglianza non superi l'unità, il valore che può avere sen β è dunque unico e i due valori dell'angolo, corrispondenti, sono: $\beta \left(\leq \frac{\pi}{2} \right)$ e $\pi - \beta$, ossia « se due corde passanti per lo stesso punto della bisettrice di un angolo hanno la stessa lunghezza m e non coincidono, gli angoli che esse formano colla bisettrice (nello stesso senso) saranno supplementari » (*).

Corollario. — *Se in un triangolo due bisettrici sono uguali, il triangolo è isoscele, con uguali i lati su cui cadono queste bisettrici.*

Nel triangolo ABC siano uguali le bisettrici AD, BE degli angoli A e B e chiamisi O il punto d'incontro di AD, BE, per O passa la bisettrice dell'angolo C. Il teorema precedente ci permette di concludere che saranno pure uguali gli angoli AOC, COB e perciò uguali i triangoli AOC, COB, ossia $AC = CB$ c. d. d..

M. Sacchi.

Teorema. *Se un triangolo ha due angoli disuguali, la bisettrice dell'angolo maggiore è minore della bisettrice dell'angolo minore.*

Nel triangolo ABC (fig. 1ª e 2ª) sia l'angolo C maggiore dell'angolo B e siano CH e BD rispettivamente le loro bisettrici. Suppongasi dapprima (fig. 1ª) l'angolo A non minore dell'angolo B e facciasi l'angolo BCE

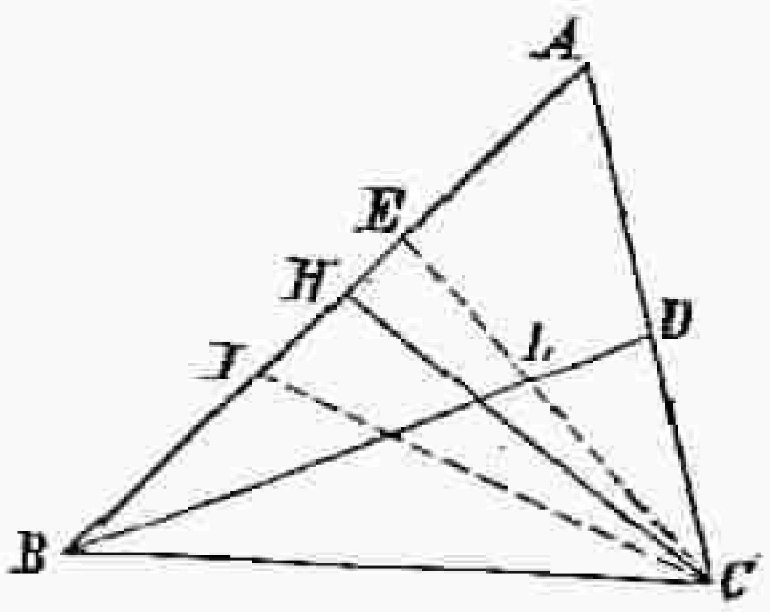


Fig. 1.

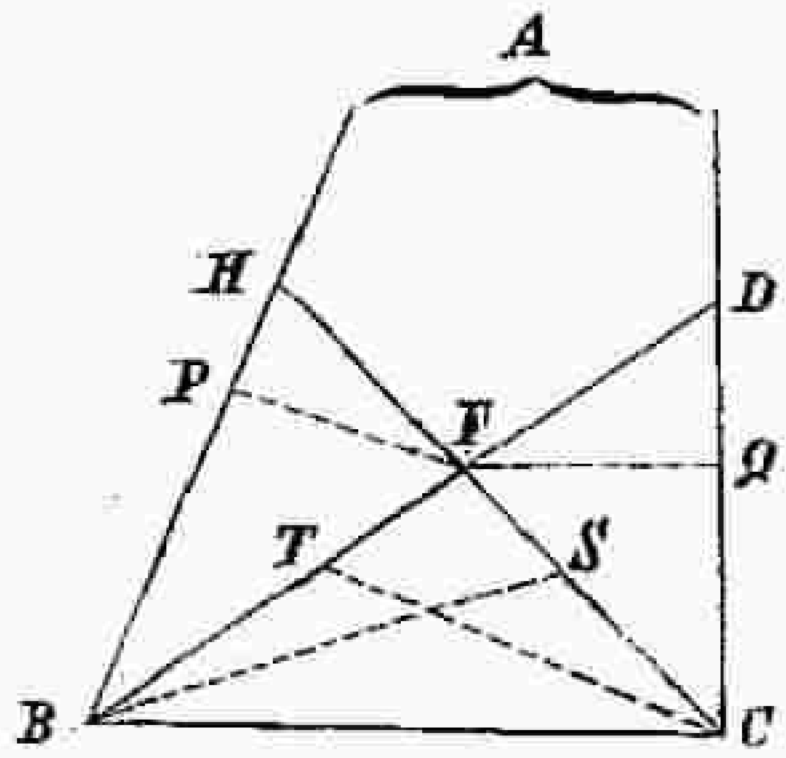


Fig. 2.

uguale all'angolo B e conducasi la bisettrice CI dell'angolo BCE, sarà $CI = BL$, perchè il triangolo EBC è isoscele. Nel triangolo HIC sarà poi: ang. $HIC = B + \frac{B}{2}$ ed ang. $IHC = A + \frac{C}{2}$ e quindi: ang. $IHC >$ ang. HIC e $CI > CH$, $BL > CH$ e $BD > CH$.

Suppongasi ora (fig. 2ª) l'angolo A minore dell'angolo B. Si avrà: ang. $BHC = A + \frac{C}{2}$ ed ang. $BDC = A + \frac{B}{2}$ e quindi: ang. $BHC >$ ang. BDC; inoltre questi due angoli sono acuti. Infatti, facciasi ang. $SBC =$ ang. $TCB = A$; ne risulteranno internamente al triangolo ABC i due trian-

(*) Osservando che la [1] può anche scriversi

$$m = \frac{2c \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{c \operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen}\beta - \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\beta}}$$

si deduce che dato c, m può variare dal valor minimo $2c \tan\alpha$ all'infinito. Infatti per $\beta = \frac{\pi}{2}$ $\operatorname{sen}\beta$ ha il massimo valore e $\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$ il minimo, onde m assume il valor minimo.

goli HBS e TCD isosceli sui lati HS e TD rispettivamente perchè è: ang. $HSB = A + \frac{C}{2} = BHS$ ed ang. $DTC = A + \frac{B}{2} = CDT$. Si conducano ora dal punto F d'intersezione delle bisettrici le perpendicolari FP ad AB ed FQ ad AC, si otterranno i due triangoli rettangoli FPH ed FQD cogli angoli acuti BHC e BDC. In questi triangoli rettangoli per essere ang. $PHF >$ ang. FDQ ed $FP = FQ$ sarà $FD > FH$; nel triangolo FBC è poi $BF > CF$ per essere ang. $FCB >$ ang. FBC. Onde infine: $BF + FD > CF + FH$, ossia $BD > CH$.

Corollario. Si deduce per assurdo che « se un triangolo ha due bisettrici uguali, gli angoli corrispondenti sono uguali e perciò il triangolo è isoscele ».

V. Carpaneto.

Teorema. *In ogni triangolo al lato maggiore è opposta bisettrice minore.*

1ª Dimostrazione. Nel triangolo ABC, siano BD, CE le bisettrici degli angoli B e C, dico che se $AB > AC$, sarà $CE < BD$.

Per un noto teorema si ha $AB : BC :: AD : DC$ e $AC : BC :: AE : EB$ e componendo:

$$AB + BC : BC :: AC : DC \quad , \quad AC + BC : BC :: AB : BE,$$

da cui uguagliando i valori di BC

$$\frac{(AB + BC) . DC}{AC} = \frac{(AC + BC) . BE}{AB} .$$

Ora essendo per ipotesi $AB + BC > AC + BC$ ed $AC < AB$ segue $\frac{AB + BC}{AC} > \frac{AC + BC}{AB}$, sicchè dall'eguaglianza precedente deducesi $DC < BE$.

Dalle stesse proporzioni si ricava poi

$$AB . BC : \overline{BC}^2 :: AD . DC : \overline{DC}^2 \quad \text{e} \quad AC . BC : \overline{BC}^2 :: AE . EB : \overline{EB}^2$$

ed avendosi per un altro teorema noto

$$AB . BC = \overline{BD}^2 + AD . DC \quad \text{e} \quad AC . BC = \overline{CE}^2 + AE . EB ,$$

sostituendo nelle ultime proporzioni, consegue

$$\overline{BD}^2 : \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2 :: AB . BC : \overline{BC}^2 :: AB : BC$$

e

$$\overline{CE}^2 : \overline{BC}^2 - \overline{BE}^2 :: AC : BC$$

e finalmente dividendo termine a termine

$$\frac{\overline{BD}^2}{\overline{CE}^2} = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2}{\overline{BC}^2 - \overline{BE}^2} \cdot \frac{AB}{AC} .$$

Ma si è dimostrato $DC < BE$ e per ipotesi si ha $AB > AC$, quindi

$$\frac{\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2}{\overline{BC}^2 - \overline{BE}^2} > 1 \quad , \quad \frac{AB}{AC} > 1$$

dunque finalmente $\overline{BD}^2 > \overline{CE}^2$ e $BD > CE$, c. d. d..

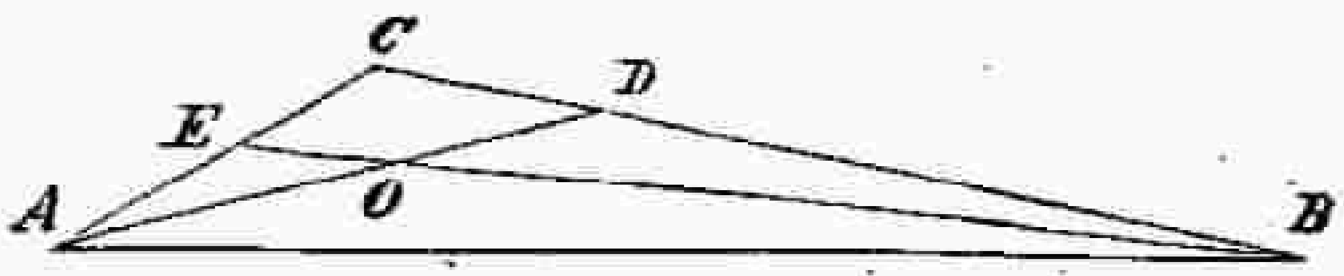
A. Lugli.

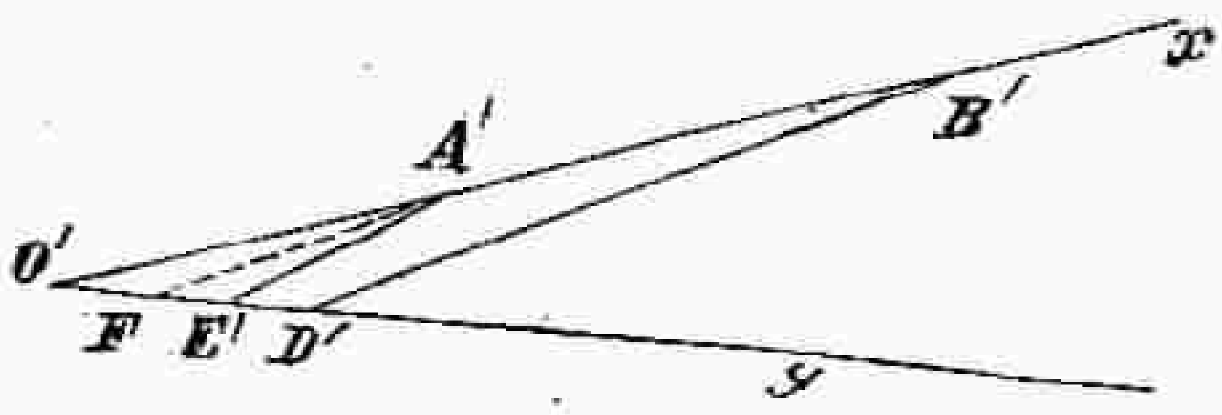
2ª Dimostrazione. Sia il triangolo ABC, nel quale il lato BC è maggiore di AC; dico che la bisettrice BE dell'angolo B supera la bisettrice AD dell'angolo A.

Essendo O il punto d'incontro delle bisettrici, bisogna dimostrare la relazione

$$BO + OE > AO + OD. \qquad [1]$$

In causa di $BO > AO$, quest'eguaglianza sarebbe evidente quando si avesse $OE > OD$. Supponiamo dunque che si verifichi il contrario.





Sui lati d'un angolo $xO'y$ uguale a BOD, prendiamo $O'A' = OA$, $O'B' = OB$, $O'D' = OD$, $O'E' = OE$, e tiriamo le rette $A'E'$, $B'D'$. Gli angoli $A'E'y$, $B'D'y$, rispettivamente uguali a BEC, ADC, hanno per valori $A'E'y = A + \frac{1}{2}B$, $B'D'y = B + \frac{1}{2}A$, dunque

$$A'E'y > B'D'y. \qquad [2]$$

D'altro lato, a motivo di 2 Retti $> A + B$, si ha 2 Retti $- B - \frac{1}{2}A > \frac{1}{2}A$ ed a più forte ragione 2 Retti $- B - \frac{1}{2}A > \frac{1}{2}B$. Conseguentemente

$$O'B' > O'D'. \qquad [3]$$

Conduciamo $A'F$ parallela a $B'D'$; l'ineguaglianza [2] prova che il punto F è situato fra i punti O' ed E'; ma in causa dell'ineguaglianza [3], si ha ancora, com'è facile riconoscere, $A'B' > FD'$, dunque a maggior ragione $A'B' > D'E'$ o $O'B' - O'A' > O'D' - O'E'$, ciò che equivale all'ineguaglianza [1] (*).

Corollario. A delle bisettrici uguali sono opposti dei lati uguali.

Teorema. *Se le bisettrici di due angoli d'un triangolo sono uguali esso è isoscele.*

Nel triangolo ABC siano α e β le bisettrici degli angoli A e B. Si ha, com'è noto:

$$\alpha^2 = \frac{bc\,(b + c - a)\,(a + b + c)}{(b + c)^2} \quad , \quad \beta^2 = \frac{ca\,(c + a - b)\,(a + b + c)}{(c + a)^2}.$$

(*) Questa dimostrazione è presa letteralmente dall'opera: E. Catalan. *Théorèmes et Problèmes de Géométrie Élémentaire.* 5ᵉ édition. Paris, Dunod éditeur, 1872. Abbiamo stimato opportuno aggiungerla per l'interesse che presenta la proposizione alla quale si riferisce.

V. un'altra dimostrazione nel Baltzer, *Plan.* p. 99 della 3ª ediz..

Nel venturo fascicolo verranno pubblicate ancora altre dimostrazioni di questa proposizione o del teorema seguente.

Supponga si ora $\alpha = \beta$, sarà:

$$bc\,(b + c - a)\,(c + a)^2 = ca\,(c + a - b)\,(b + c)^2\,,$$

ossia sviluppando e raccogliendo:

$$(a - b)\,[c^3 + (a + b)\,c^2 + 3\,abc + (a + b)\,ab] = 0\,,$$

e poichè il secondo fattore di questo prodotto è una quantità essenzialmente diversa da zero e positiva, così per l'annullarsi del prodotto stesso dev'essere $a - b = 0$, ovvero $a = b$ (*).

Tema di matematica per la licenza dagli Istituti tecnici. — *Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo* ABC *incontrino i lati* BC, CA, AB *rispettivamente nei punti* A', B', C'. *Supposti conosciuti i lati* BC = a, CA = b, AB = c, *trovare i valori dei segmenti* BA', A'C, CB', B'A, AC', C'B *e il rapporto fra le aree dei triangoli* ABC, A'B'C'.

Dalla notissima proprietà espressa dalla proporzione $CB' : B'A = a : c$, si ha $CB' = \dfrac{ab}{a + c}$, $B'A = \dfrac{bc}{a + c}$ e permutando circolarmente:

$$AC' = \frac{bc}{b + a}\,, \quad C'B = \frac{ca}{b + a}\,; \qquad BA' = \frac{ca}{c + b}\,, \quad A'C = \frac{ab}{c + b}\,.$$

Osservando che i triangoli ABC, $AB'C'$ hanno un angolo eguale, si deduce che $\Delta ABC : \Delta AB'C' = bc : \dfrac{bc}{b + a} \cdot \dfrac{bc}{a + c} = \dfrac{(a + c)\,(b + a)}{bc}$, onde

$$\Delta AB'C' = \frac{bc\,.\,\Delta}{(a + c)\,(b + a)}\,,$$

indicando con Δ il triangolo ABC. Similmente

$$\Delta BC'A' = \frac{ca\,.\,\Delta}{(b + a)\,(c + b)}\quad, \qquad \Delta CA'B' = \frac{ab\,.\,\Delta}{(c + b)\,(a + c)}\,.$$

Dopo ciò si ha

$$\Delta A'B'C' = \Delta\left(1 - \frac{bc}{(a+c)\,(b+a)} - \frac{ca}{(b+a)\,(c+b)} - \frac{ab}{(c+b)\,(a+c)}\right) = \frac{2\,abc}{(a + b)\,(b + c)\,(c + a)}$$

e conseguentemente

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} = \frac{(a + b)\,(b + c)\,(c + a)}{2\,abc}\,.$$

(*) La presente dimostrazione può anche leggersi nell'*Appendice* dei Sigg. Prof. D. Gambioli e V. Bernardi all'edizione italiana della Geometria dello Schlömilch.

Due dimostrazioni sintetiche, però soltanto apparentemente dirette, di questo teorema possono leggersi a p. 138 e 311 del t. I, 1841, dei *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Non vengono riportate per il poco interesse didattico che presentano.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI

96, 105, 110*, 120*, 121*, 122*, 123*, 124* e 125*

96. *Dimostrare che, se la congruenza generale di 2° grado e di modulo primo* p

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \equiv 0 \qquad \textit{mod. } p$$

non è parabolica, se cioè $b^2 - 4ac$ *non è* 0, *mod.* p, *essa, in generale, cioè quando* $ae^2 + cd^2 + fb^2 - bde - 4acf$ *non è* 0 *mod.* p, *ha* $p - 1$ *soluzioni se è iperbolica, se cioè* $b^2 - 4ac$ *è resto quadratico mod.* p, *e ne ha* $p + 1$ *se è ellittica.* (G. Frattini).

Dimostrazione del Sig. Prof. *U. Scarpis.*

Una congruenza generale di 2° grado e di modulo primo p si può sempre porre sotto la forma

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c \equiv 0. \tag{1}$$

Riferite a quest'ultima congruenza, le condizioni espresse nella enunciazione del teorema che si deve dimostrare diventano:

$$\Delta = abc + 2ghf - af^2 - bg^2 - ch^2 \mathrel{\overset{1}{\underset{1}{\equiv}}} 0$$
$$C = ab - h^2 \mathrel{\overset{1}{\underset{1}{\equiv}}} 0.$$

Se ora si pone

$$G = fh - bg \; ; \qquad F = gh - af,$$

e si chiama $f(x, y)$ il primo membro della (1), si avrà l'identità (D'Ovidio — *Le pro. fond. d. curve di 2° ordine*, n. 4)

$$bCf(x, y) = C(hx + by + f)^2 + (Cx - G)^2 + \Delta b. \tag{2}$$

Non essendo C multiplo di p, e supponendo per ora che non lo sia neppure b, alla (1) potrà dunque sostituirsi l'equivalente

$$X^2 - (h^2 - ab)\, Y^2 \equiv -\Delta b \tag{3}$$

(si è posto $Cx - G = X$ ed $hx + by + f = Y$). Per la quistione 84 (fasc. 1°, 1891) si trova che, non imponendo alcuna condizione ai segni, la (3) ammette $p - 1$ soluzioni, a due a due eguali ed opposte, se $h^2 - ab$ è residuo quadratico mod. p, e ne ammette $p + 1$ nel caso opposto.

Ciò premesso, essendo C e b diverse da 0 mod. p, le formole

$$Cx - G = X \; ; \qquad hx + by + f = Y$$

mostrano che ad ogni soluzione (X, Y) della (3) ne corrisponde una ed una sola per la (1), e a soluzioni diverse della (3) soluzioni diverse per la (1). E poichè è vera anche la reciproca, si conclude che la (1), al pari della (2), ammette $p-1$ soluzioni, se h^2-ab è residuo quadratico, e $p+1$ nel caso contrario.

Se fosse $b\equiv 0$, invece dell'identità (2) si considererebbe l'altra

$$aCf(x, y)\equiv(ax+hy+g)^2+(Cy-F)^2+\Delta a$$

e, ragionando come sopra, si concluderebbe che la proposta congruenza ha $p-1$ radici, per essere in questo caso $h^2-ab\equiv h^2$ un residuo quadratico.

Rimane a discutersi il caso $a\equiv b\equiv 0$, ossia il caso della congruenza

$$2(hy+g)x+2fy+c\equiv 0$$

per h diversa da 0 mod. p, tale dovendo essere h^2-ab. La condizione $\Delta \overset{1}{\underset{1}{\equiv}} 0$, divisa per h, dà l'altra

$$ch-2gf\overset{1}{\underset{1}{\equiv}} 0.$$

Dando alla y tutti i valori $0, 1, 2, \ldots\ldots p-1$ (escluso quello per il quale $hy+g\equiv 0$, perchè dalle condizioni $hy+g\equiv 0$ e $2fy+c\equiv 0$ seguirebbe l'altra $ch-2gf\equiv 0$, contraria all'ipotesi) i $p-1$ corrispondenti valori per la x dovranno risultare fra loro diversi. Infatti, se si avesse

$$2hxy+2gx+2fy+c\equiv 0$$
$$2hxy'+2gx+2fy'+c\equiv 0,$$

si dedurrebbe, eliminando x, $ch-2gf\equiv 0$, contro l'ipotesi. Nel caso che si considera la proposta congruenza (manifestamente iperbolica, perchè $h^2-ab\equiv h^2$ è residuo) ammette adunque $p-1$ soluzioni.

105. *Determinare i triangoli ciascuno dei quali soddisfi alle seguenti condizioni: un vertice cada in un punto dato, i due vertici rimanenti cadano in due date rette, uno per ciascuna, e l'ortocentro sia un punto assegnato.*

(S. Catania).

Soluzione del Sig. Prof. *F. Palatini.*

Siano A il vertice, O l'ortocentro dati. Se fissiamo uno degli altri due vertici, B, il terzo vertice, C, sarà il punto d'incontro delle perpendicolari abbassate da A e da O rispettivamente sulle OB, AB. Dopo di che è chiaro che quando B varia sopra una retta g i due raggi uscenti da O e da A, i quali determinano il corrispondente C, descrivono due fasci proiettivi che generano una conica G (in generale un'iperbole) passante per A, O e per i punti P, Q all'infinito delle direzioni perpendicolari alla OA e alla g, corrispondenti l'uno al punto (g, AO), l'altro al punto all'infinito di g. Ora date due rette g, g_1, la G corrispondente alla g incontra g_1 in due punti C, C_1, i quali con la costruzione sopra indicata determinano due punti B, B_1 della g tali che i triangoli ABC, AB_1C_1 soddisfano al problema proposto. Evidentemente poi la G_1 corrispondente alla g_1 taglia g nei punti B, B_1 ora considerati. Così si vede intanto che il problema ammette in generale due soluzioni le quali possono essere tutt'e due reali o immaginarie ed anche coincidenti, ed è pure dato il modo di ottenerle mediante note costruzioni.

La corrispondenza ora considerata fra i punti B. C determina una trasformazione quadratica; i punti fondamentali della rete di coniche G corrispondente alla rete di rette g del piano, sono A, O, P. Al fascio di rette g parallele alla AO corrisponde un fascio di parabole: ad ogni retta passante per A (per O) corrisponde una conica formata dalla AP (OP) e dalla perpendicolare alla data retta passante per O (A); ad ogni retta passante per P corrisponde la conica formata dalla retta stessa e dalla AO. È chiaro ancora che quando B è sulla circonferenza H che ha per diametro AO, il corrispondente C coincide con B. Da queste considerazioni che si ricavano dal modo di costruzione di C, dato B, risultano facilmente i seguenti casi particolari principali, nei quali inoltre si possono avere costruzioni più semplici che nel caso generale.

Quando g, g_1 s'incontrano in un punto M di H, si ha soltanto una soluzione (perchè le G, G_1 incontrano le due rette in M), tranne quando le due rette passano per di più per A, O, chè allora vi sono infinite soluzioni, perchè soddisfano alla quistione tutti quei triangoli i cui vertici B, C sono i due punti d'incontro di g, g_1 con una perpendicolare ad AO. Una sola soluzione (propria) si ha pure quando le due rette passano comunque ambedue per A o per O, ed ancora quando g_1 si prende parallela ad un assintoto della G che corrisponde a g, cioè se passa per P o se è perpendicolare a g (senza essere un assintoto). Non si ha poi alcuna soluzione (propria) se le due rette passano comunque rispettivamente per A, O, oppure tutt'e due per P, oppure se g_1 è un assintoto di G.

Infine può darsi che le due soluzioni siano coincidenti, il che avviene quando g_1 si prende tangente a G (ed allora anche G_1 riesce tangente a g). Fissata una g esistono ∞^1 g_1 (tutte quelle che inviluppano G) tali che per ogni coppia g, g_1 le due soluzioni sono coincidenti; vi sono dunque ∞^3 coppie di rette per le quali le due soluzioni coincidono.

110*. *Posto*

$$b_n = 2^n + \binom{n-1}{1} \cdot 2^{n-2} + \binom{n-2}{2} \cdot 2^{n-4} + \ldots\ldots$$

dove il 2° membro finisce col termine 1 *se* n *è pari e con* $\frac{n+1}{2} \cdot 2$ *se* n *è dispari, dimostrare che si ha:*

$$\sqrt{2} = \lim_{n=\infty} \frac{b_{n-1} + b_n}{b_n}.$$

(F. Giudice).

Dimostrazione del Sig. *E. de Vito*, licenziato dall'Istituto tecnico di Roma.

Dimostro prima che si ha

$$2 b_{n-1} + b_{n-2} = b_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

Sia n pari: il 1° membro della [1] diviene

$$2\left[2^{n-1}+\binom{n-2}{1}2^{n-3}+\ldots\ldots+\binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-1}2\right]+$$

$$+\left[2^{n-2}+\binom{n-3}{1}2^{n-4}+\ldots\ldots+\binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-2}2^2+1\right]=$$

$$=2^n+\left\{\binom{n-2}{1}+1\right\}2^{n-2}+\left\{\binom{n-3}{2}+\binom{n-3}{1}\right\}2^{n-4}+\ldots\ldots$$

$$+\left\{\binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-1}+\binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-2}\right\}2^2+1=$$

$$=2^n+\binom{n-1}{1}2^{n-2}+\binom{n-2}{2}2^{n-4}+\ldots\ldots+\binom{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}-1}2^2+1=b_n,$$

a motivo della relazione generale $\binom{m}{i+1}+\binom{m}{i}=\binom{m+1}{i+1}$.

Se n è dispari lo stesso 1° membro diventa

$$2\left[2^{n-1}+\binom{n-2}{1}2^{n-3}+\ldots\ldots+\binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-3}{2}}2^2+1\right]+$$

$$+\left[2^{n-2}+\binom{n-3}{1}2^{n-4}+\ldots\ldots+\binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-5}{2}}2^2+\binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-3}{2}}.2\right]=$$

$$=2^n+\left\{\binom{n-2}{1}+1\right\}2^{n-2}+\ldots\ldots+\left\{\binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-3}{2}}+1\right\}2=$$

$$=2^n+\binom{n-1}{1}2^{n-2}+\ldots\ldots+\frac{n+1}{2}.2=b_n.$$

Posto ciò, osservo che

$$\frac{b_{n-1}+b_n}{b_n}=1+\frac{1}{\frac{b_n}{b_{n-1}}}=1+\frac{1}{\frac{2b_{n-1}+b_{n-2}}{b_{n-1}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}}}=$$

$$=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{2b_{n-2}+b_{n-3}}{b_{n-2}}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{b_{n-2}}{b_{n-3}}}}}$$

e così di seguito.

Per n convergente all'infinito il 2° membro si riduce alla frazione continua indefinita $1 + \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \ldots\ldots$, che, com'è noto, equivale a $\sqrt{2}$, dunque

$$\lim_{n=\infty} \frac{b_{n-1} + b_n}{b_n} = 1 + \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \ldots\ldots = \sqrt{2}.$$

120*. *Nel piano d'un cerchio è dato un punto* C. *Dimostrare che vi sono, in generale, quattro triangoli equilateri* ABC, *ciascuno dei quali ha il lato* AB *tangente in* B *al dato cerchio, e costruirli. I quattro vertici* A *sono per diritto.*

(S. Catania).

Risposta del Sig. *E. G. Ricci*, alunno del R. Liceo di Bari (*).

Poichè l'angolo CBA è formato dalla tangente BA e dalla segante BC al cerchio dato O ed è uguale alla terza parte di 2 retti, l'arco intercetto sarà la terza parte della circonferenza e per conseguenza BC sarà tangente al cerchio concentrico ad O di raggio $BO:2$. Inoltre poichè $AB = AC$ il punto A si troverà sull'asse radicale del punto C e del cerchio O.

Per costruire i triangoli che soddisfanno alla quistione si descriva un cerchio concentrico ad O di raggio uguale alla metà del raggio del cerchio dato, quindi conducansi le tangenti BCB_1, B_2CB_3 o BB_1C, B_2B_3C, secondo che C è interno od esterno ad O. Descritti su BC, CB_1, B_2C, CB_3 altrettanti triangoli equilateri BAC, B_1A_1C, B_2A_2C, B_3A_3C questi avranno i loro lati BA, B_1A_1, B_2A_2, B_3A_3 tangenti ad O ed i loro vertici A, A_1, A_2, A_3 in linea retta perchè situati, come si è osservato, sull'asse radicale del punto C e del cerchio O.

È chiaro che se C cade entro il cerchio minore il problema non ha alcuna soluzione, mentre ne ha due se C cade in questo cerchio e quattro in ogni altro caso.

121*. *Risolvere l'equazione*

$$x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 5x + 1 = 0.$$

(F. Giudice).

Risoluzione dei Sigg. *D. Pacilli*, alunno del R. Istituto tecnico di Foggia ed *A. Gandolfi*, alunno del R. Istituto tecnico di Piacenza (**).

Si vede facilmente che l'equazione data è soddisfatta da $x = -1$, quindi -1 è una sua radice, e per un noto teorema, la proposta è divisibile per $x + 1$. Eseguendo la divisione e ponendo a zero il quoziente, si ha l'altra equazione

$$x^4 + 4x^3 - 14x^2 + 4x + 1 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

che fornirà le altre quattro radici della data.

(*) Altre dimostrazioni, meno dirette, pervennero dai Sigg. *E. de Vito* (alunno del R. Ist. tec. Roma) e *L. Perrotti* (R. Ist. tec. Aquila)

(**) Soluzioni analoghe pervennero da *E. Bellezza* (alunno del R. Ist. tec. Foggia), *G. Polverini* (R. Ist. tec. Girgenti), *E. G. Ricci* (R Liceo Bari), *F. Sterca* (R. Ist. tec. Lodi), *G. Trapani* (R. Ist. nautico Catania).

Osserviamo che la [1] può scriversi nel modo seguente:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-14=0,$$

e ponendo

$$x+\frac{1}{x}=z, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [2]$$

diventa

$$z^2+4z-16=0.$$

Quest'ultima dà per z i due valori

$$z=-2\pm 2\sqrt{5}.$$

Dalla [2] si ha

$$x^2-zx+1=0,$$

da cui, sostituendo a z i valori ottenuti e risolvendo, si hanno i corrispondenti valori di x che, uniti a quello ottenuto da principio, dànno le cinque radici dell'equazione proposta, che sono le seguenti:

$$x=-1,\ x=-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{5-2\sqrt{5}},\ x=-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Il Sig. *G. Candido*, alunno del R. Liceo di Lecce, che inviò pure una risposta alla quistione, aggiunge la seguente osservazione, riguardo alla risoluzione dell'equazione [1].

• Si consideri l'equazione completa di 4° grado

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

in cui [α] $d=\dfrac{c^2}{a^2}$, e pongasi il 1° membro uguale a

$$\left(x^2+px+\frac{c}{a}\right)\left(x^2+qx+\frac{c}{a}\right).$$

Sviluppando e confrontando i coefficienti si trova

$$p+q=a, \qquad pq=\frac{ab-2c}{a},$$

da cui segue che i valori di p e q sono le radici di

$$y^2-ay+\frac{ab-2c}{a}=0.$$

Tutte le volte adunque in cui sussiste la relazione [α] l'equazione considerata di 4° grado è riducibile al 2°. Nel caso dell'equazione [1] la condizione [α] è soddisfatta e si ottiene $p=2(\sqrt{5}+1)$, $q=-2(\sqrt{5}-1)$, onde le quattro radici della [1] sono le due coppie di radici delle equazioni

$$x^2+2(\sqrt{5}+1)x+1=0, \qquad x^2-2(\sqrt{5}-1)x+1=0,$$

conformemente a quanto è stato trovato sopra.

122'. *Costruito sopra un raggio* AB *di un cerchio un triangolo equilatero* ABC *e condotta la congiungente dei punti di mezzo dei lati* AC, BC, *questa determina sull'arco* BC *un arco* BM; *trovare con quale approssimazione quest'arco rappresenta un quattordicesimo della circonferenza.*

(F. PALATINI).

Soluzione del Sig. *G. Trapani*, alunno del R. Istituto nautico di Catania.

Dai punti C ed M si conducano le perpendicolari CH, MN sul raggio AB. Posto ang. $MAB = \alpha$, si ha evidentemente $MN = \frac{CH}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB$, onde: $\operatorname{sen} \alpha = \frac{MN}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}4330127$ a meno di $\frac{1}{10^7}$. Di qui si ricava, servendosi delle tavole trigonometriche,

$$\alpha = 25^\circ.\ 39'.\ 32''$$

a meno di un secondo per difetto.

D'altra parte l'angolo al centro α' corrispondente all'arco uguale alla quattordicesima parte della circonferenza è $\alpha' = \frac{360^\circ}{14} = 25^\circ.\ 42'.\ 51''$ a meno di un secondo per difetto. La differenza $\alpha' - \alpha = 3'.\ 19''$ pure a meno di un secondo. L'arco BM rappresenterà quindi la quattordicesima parte della circonferenza a meno di $3'.\ 20'' = 200'' = \frac{1}{6480}$ della circonferenza stessa (*).

123'. *Sull'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, esternamente ad esso, è costruito un quadrato. Se l'intera figura ruota intorno ad un cateto del triangolo, dimostrare che il volume generato dal quadrato è equivalente ad un cilindro retto avente per raggio di base l'ipotenusa e per altezza la somma dei cateti.*

(V. CORRENTI).

Dimostrazione del Sig. *G. Russi Ruggi*, alunno del R. Istit. tecnico di Foggia.

Chiamasi ABC il triangolo rettangolo, $BCDE$ il quadrato costruito sull'ipotenusa BC e sia AB il cateto intorno al quale ruota l'intera figura. Abbassate dai vertici D, E le perpendicolari DD', EE' su AB e condotta BD, è chiaro che il volume generato dal quadrato, nella rotazione dell'intera figura intorno ad AB, si può considerare come la somma dei volumi generati dai due triangoli CBD, BDE, allorchè ruotano intorno alla medesima retta. Ora per noti teoremi si ha:

$$\text{Vol. } CBD = \frac{1}{3} BC \,.\, \text{sup } CD = \frac{1}{3} BC \,.\, \pi (AC + DD') \,.\, CD$$

$$\text{Vol. } BDE = \frac{1}{3} BE \,.\, \text{sup } DE = \frac{1}{3} BE \,.\, \pi (DD' + EE') \,.\, DE.$$

(*) Un'altra soluzione venne inviata dal Sig. *D. Pacilli*, alunno del R. Istituto tec. di Foggia. Il Sig. *Pacilli* trova per limite dell'errore $\frac{1}{1000}$ del quadrante: dunque un valore più grande del necessario.

Ma, com'è facile vedere tirando per E una parallela ad AB ad incontrare DD' in D'' ed osservando che i triangoli CAB, $BE'E$, $DD''E$ sono uguali, $EE' = D'E' = AB$ e $DD' = AC + AB$, $AD' = BD' + D'E' = BE' = AC$, onde sostituendo

$$\text{Vol. } CBD = \frac{\pi}{3} . BC(2AC + AB) . BC, \quad \text{Vol. } BDE = \frac{\pi}{3} BC(AC + 2AB) . BC.$$

Sommando ricavasi

$$\text{Vol. quad. } BCDE = \frac{\pi}{3} \overline{BC}^2 (3\,AC + 3\,AB) = \pi \overline{BC}^2 (AB + AC)$$

che è quanto d. d. (*).

124*. *Dato un cerchio, siano* A, B, C, D, E, F *i punti che lo dividono in sei parti uguali. Una retta* AM *ruoti nel piano del cerchio, intorno al punto* A, *incontrandolo in un punto variabile* H. *Dimostrare che tirata la corda* HE, *che incontra il diametro* AD *in* I, *e per* I *la perpendicolare* IL *a questo diametro, il luogo dei punti in cui* IL *incontra* AM *è la segante* CD.

(S. Gatti).

Dimostrazione del Sig. *G. Russi Ruggi*, alunno del R. Istituto tecnico di Foggia (**).

Chiamando L il punto in cui AM incontra CD od i suoi prolungamenti, la quistione si riduce a dimostrare che LI è perpendicolare ad AD.

Tirisi DH, e suppongasi che L ed I giacciano dalla medesima banda di HD; è facile vedere in questo caso che gli angoli HLD e DIH sono uguali perchè i loro lati intercettano sulla circonferenza archi rispettivamente uguali. Che se invece L ed I si trovano da bande opposte di HD, considerando gli archi che essi angoli HLD e DIH intercettano sulla circonferenza, è agevole riconoscere che gli angoli stessi sono supplementari. Dunque in ogni caso il quadrangolo i cui vertici sono D, I, L, H è inscrittibile, talchè sarà ang. LID uguale o supplementare di LHD e poichè quest'ultimo è retto tale sarà anche l'angolo LID c. v. d..

125*. *Siano* AD, AE *le rette che dividono l'angolo retto di un triangolo rettangolo* ABC *in tre parti uguali, incontrando l'ipotenusa in* D, E, *dimostrare che si ha:*

$$BE . DC = 3BD . EC.$$

(S. Gatti).

Dimostrazione dei Sigg. *G. Russi Ruggi*, alunno del R. Istituto tecnico di Foggia, e *A. Perrucci*, alunno del R. Istituto tecnico di Napoli (***).

(*) Soluzioni analoghe a questa, vennero inviate dai Sigg. *E. Bellezza* (R. Ist. tec. Foggia), *A. Gandolfi* (R. Ist. tec. Piacenza), *E. De Vito* (R. Ist. tec. Roma), *G. Trapani* (R. Ist. nautico Catania).

(**) Altre soluzione, più diffuse, furono inviate dai Sigg. *E. De Vito* (R. Ist. tec. Roma), *L. Perrotti* (R. Ist. tec. Aquila) e *G. Trapani* (R. Ist. nautico Catania).

(***) Altre soluzioni pervennero dai Sigg. *E. Bellezza* (R. Ist. tec. Foggia), *E. de Vito* (R. Ist. tec. Roma), *A. Gandolfi* (R. Ist. tec. Piacenza), *G. Polverini* (R. Ist. tec. Girgenti), *F. Sterca* (R. Ist. tec. Lodi).

Condotta EF perpendicolare ad AC, dai triangoli simili BAC, EFC, segue

$$BC : EC :: AB : EF.$$

Dal triangolo AEB, in cui AD è bisettrice dell'angolo A, si ha

$$DE : BD :: AE : AB.$$

Se ora si osservi che nel triangolo rettangolo EAF, l'angolo EAF è la terza parte di un retto e quindi $EF = AE : 2$, moltiplicando le precedenti proporzioni termine a termine, risulta

$$DE.BC : BD.EC :: AE.AB : AB.EF :: AE : EF :: 2 : 1,$$

onde

$$DE.BC = 2BD.EC \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

Ma $DE = DC - EC$, $BC = BE + EC$, talchè $DE.BC = DC.BE - EC.BE + DC.EC - EC.EC = BE.DC - EC.BC + DC.EC = BE.DC - (BC - DC).EC = BE.DC - BD.EC$, cosicchè, sostituendo in [1], si ricava infine

$$BE.DC = 3BD.EC \qquad \text{c. d. d..}$$

Dimostrazione dei Sigg. *G. Candido*, alunno del R. Liceo di Lecce, e *G. Onesti*, alunno del R. Istituto tecnico di Lodi.

Considerando successivamente i triangoli ABE, ADC, ABD, AEC, si ha

$$BE = \frac{AE.\operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} B},\ DC = \frac{AD.\operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} C},\ BD = \frac{AD.\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} B},\ EC = \frac{AE.\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} C},$$

e quindi

$$BE.DC = \frac{AE.AD.\operatorname{sen}^2 60^\circ}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} = \frac{3AE.AD}{4 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C};$$

$$BD.EC = \frac{AE.AD.\operatorname{sen}^2 30^\circ}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} = \frac{AE.AD}{4 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C},$$

donde si vede che il primo prodotto è triplo del secondo.

Il Sig. *G. Trapani*, alunno del R. Istituto nautico di Catania, che inviò pure una soluzione di questa quistione, osserva che se l'angolo BAC non è retto e AD, AE sono le rette che lo trisecano, si avrà:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB.AD \operatorname{sen} \frac{1}{3} A}{AD.AC \operatorname{sen} \frac{2}{3} A} = \frac{AB}{2AC \cos \frac{1}{3} A},$$

$$\frac{EC}{BE} = \frac{AC.AE \operatorname{sen} \frac{1}{3} A}{AB.AE \operatorname{sen} \frac{2}{3} A} = \frac{AC}{2AB \cos \frac{1}{3} A}$$

onde

$$BE.DC = 4BD.EC \cos^2 \frac{A}{3},$$

il che corrisponde ad una generalizzazione del teorema. Inoltre siccome $A < 180°$, sarà $\frac{A}{3} < 60°$, e perchè si abbia $4 \cos^2 \frac{A}{3} = 3$, dovrà essere $A = 30°$.

Di qui si trae che è vero anche il teorema reciproco di quello proposto, ossia se la relazione $BE \,.\, DC = 3 BD \,.\, EC$ è soddisfatta e AD, AE sono le rette che trisecano l'angolo BAC, questo sarà retto.

Un'altra generalizzazione della quistione ci viene comunicata dal Sig. Prof. G. *Russo*, nei seguenti termini:

Se dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo ABC *si conducono le rette* AD, AE *(entrambe interne, o entrambe esterne, od una interna e l'altra esterna al triangolo), in modo che l'angolo* $BAD = CAE = \alpha$, *dimostrare che si ha:*

$$BE \,.\, DC = \cot^2 \alpha \,.\, BD \,.\, EC.$$

QUISTIONI PROPOSTE (*)

136. Se due gruppi di n numeri tutti differenti fra loro e da zero si possono porre in corrispondenza univoca di proporzionalità al più in m modi $(m > 1)$, m sarà un divisore di n, e i numeri dei due gruppi potranno essere tutti reali soltanto per $m = 2$.

G. Sforza.

137*. Risolvere un triangolo dati un angolo A, la bisettrice interna α e l'inclinazione i di questa sul lato a. Qual dev'essere il valore di i affinchè il triangolo abbia la ragione m col quadrato di α?

G. Bellacchi.

138*. Per quali valori razionali di n l'espressione

$$\frac{(n+5)(n+6)}{6n}$$

si riduce a un intero positivo?

S. Catania.

139*. Inscrivere in un cerchio dato un quadrangolo, dati due lati contigui e tale che due suoi lati opposti siano inversamente proporzionali agli altri due.

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

Dimostrare poi che conducendo da un punto fuori del cerchio le sei perpendicolari ai quattro lati e alle due diagonali di sifatto quadrangolo, la somma dei due rettangoli delle perpendicolari condotte a due lati opposti ed ai rimanenti è equivalente al doppio rettangolo delle perpendicolari tirate alle diagonali.

S. GATTI.

140*. Essendo $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ numeri interi dati, indichino $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ rispettivamente i minimi multipli comuni alle coppie (a_1, a_2), (m_1, a_3), (m_2, a_4), $\ldots (m_{n-2}, a_n)$, e $d_1, d_2, d_3, \ldots d_{n-1}$ i massimi comuni divisori di queste coppie. Dimostrare che il prodotto $d_1 d_2 \ldots d_{n-1}$ si mantiene costante variando l'ordine dei numeri dati.

A. TAGIURI.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

ING. G. DELITALA. — *Ricerche di Stereometria.* — Monografie tecniche utili per le Scuole e nella pratica. — Sassari, G. Dessì, 1890 - L. 3.

Scopo dell'A. è quello della ricerca di formole pratiche per il calcolo dei volumi dei solidi prismatici o cilindrici limitati da basi a superficie piana o rigata-sghemba; l'A. ha svolto questi argomenti in quattro Note raccolte poi nella monografia che sto esaminando. Noto subito che mi asterrò dal pronunziare giudizi sul valore tecnico o pratico dei risultati del signor Delitala, giudizi che devono essere riservati alle persone competenti nell'arte; analizzerò semplicemente il libro dal punto di vista della geometria teorica.

NOTA I.

Del tronco di prisma e del prismoide quadrilatero.

Premesse alcune nozioni elementari sul prisma e sul tronco di prisma triangolare retto ed obliquo, l'A. passa ad occuparsi particolarmente del tronco di prisma retto ed obliquo a sezione qudrilatera e ne trova il volume espresso per mezzo delle aree delle sezioni normali dei tronchi di prismi triangolari, in cui si decompone il tronco dato con l'uno o con l'altro dei suoi due piani diagonali e per mezzo delle lunghezze degli spigoli laterali. Il duplice modo col quale si perviene così al volume del tronco di prisma quadrilatero gli permette di trovare una relazione tra i detti spigoli laterali e le sezioni normali dei detti tronchi di prismi triangolari, relazione espressa dalla formola

$$S_1 (a'' + a''' + a'''') + S_3 (a'''' + a' + a'') = S_2 (a''' + a'''' + a') + S_4 (a' + a'' + a'''), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

dalla quale l'A. ricava erroneamente la seguente:

$$\frac{a' + a'''}{a'' + a''''} = \frac{a' S_3 + a''' S_1}{a'' S_4 + a'''' S_2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4')$$

mentre, tenendo conto della $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$, la (4) dà luogo invece alla più semplice relazione

$$S_2 a'' + S_4 a'''' = S_1 a' + S_3 a''' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Però questa piccola inavvertenza non ha influenza su ciò che segue. L'A. introduce poi nel calcolo i mutui segmenti delle diagonali della sezione normale, e trova la (4) sotto altre forme (5), (5'), nelle quali non entrano più le aree S_1, ..., e prende occasione dalla (5'), la quale può dedursi immediatamente dalla (α), per enunciare un teorema, il quale, almeno dal punto di vista della geometria teorica, non mi sembra che meritasse di essere rilevato. L'A. mostra in seguito come si possa giungere alla stessa (5') anche col sussidio della geometria analitica, e nella (6) ci presenta la (5') come equivalente all'annullarsi di un determinante del 4° ordine. Modifica poi le formole (1) e (2) introducendo l'area S della sezione normale e i mutui segmenti delle diagonali, giungendo così a due nuove formole (7) e (8) che dànno sempre lo stesso volume, e da queste finalmente ricava, per via di semisomma, una terza espressione (9) del vol. V simmetrica rispetto agli elementi del tronco di prisma. Ponendo poi le (7), (8) e (9) sotto la forma $V = SZ$, le stesse (7), (8) e (9) gli offrono tre espressioni diverse, (11), (12) e (13), per Z; e poichè, come osserva lo stesso A., è noto (Baltzer, *Ster.* § 11, 19) che il volume di un tronco di prisma è equivalente al prodotto della sezione normale S per il corrispondente spigolo baricentrico, così le tre espressioni di Z dànno appunto la lunghezza dello spigolo baricentrico del tronco di prisma quadrilatero a mezzo degli elementi di questo. Se il tronco di prisma è retto, Z può essere considerata come la terza coordinata cartesiana del detto c. g.; l'A., mostra poi come si possano trovare anche le altre due coordinate X, Y supponendo di prendere per assi delle x e delle y le due diagonali della sezione normale di base. A questo proposito l'A. soggiunge un'osservazione per la ricerca geometrica del c. g. di un quadrilatero piano, la quale nel caso generale è erronea. Invero l'A. indica con O il punto d'incontro delle diagonali del quadrilatero piano, con M ed N i loro punti di mezzo, con G il c. g. dell'area del quadrilatero, ed asserisce che $OG = \frac{2}{3} MN$. Ora ciò è falso, se l'angolo MON non è retto; infatti G è anche il c. g. del triangolo OHK, i cui lati OH, OK sono doppi di OM, ON e nelle stesse direzioni (cfr. Baltzer, *Ster.* § 11, 11; e Cremona, *Cal. gra.* Art. 137); sicchè detto I il punto medio di HK, si ha $OG = \frac{2}{3} OI$. Se fosse $OG = \frac{2}{3} MN = \frac{1}{3} HK$, sarebbe $2OI = HK$, e quindi l'angolo MON sarebbe retto.

L'A. continua queste sue discussioni passando dal prisma quadrilatero generale (che, non so per quale ragione, chiama *forma geometrica primitiva*) ai casi più particolari del prisma-trapezio, parallelogramma, triangolare, e trova le formole (14), (15), (16), (16'), (17), (14') e (15') per il volume del tronco di prisma-trapezio (a sezione normale trapezia) e la (19) e la (22) rispettivamente per il tronco-parallelogramma e il triangolare. Notiamo specialmente la (17), la quale è una conferma della nota regola di Newton per il calcolo del volume di un segmento solido compreso fra facce parallele per mezzo di tre sezioni parallele ad uguali intervalli fra loro (cfr. Baltzer, *Ster.*, § 9, 10). Dalle (14') e (15') ricava poi la relazione di condizione (18) fra gli spigoli laterali del tronco di prisma-trapezio e il rapporto dei lati paralleli del trapezio sezione normale, relazione ch'egli traduce in parole osservando che il detto rapporto è il medesimo anche per una sezione non normale. Pel tronco di prisma-parallelogramma la condizione esposta si semplifica e si riduce ad esprimere la proprietà che la somma di due spigoli opposti è uguale alla somma degli altri due. Infine l'A. osserva che per il tronco di prisma-triangolare la relazione, cui debbono soddisfare gli spigoli laterali, prende la forma

$$\frac{b}{a' - a''} = \frac{0}{0}\,; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

dove b sia il lato della sezione normale opposto allo spigolo a''' e a', a'' siano i rimanenti due spigoli laterali. Egli ne conclude che: « Nel tronco di prisma triangolare la scelta degli elementi che lo determinano è affatto arbitraria », conclusione di cui non so vedere l'importanza. Non posso tralasciare di dichiarare che l'osservazione a piè della pag. 11, che l'A. aggiunge a complemento della sua teoria del tronco di prisma, è estremamente inesatta ed indeterminata.

Prismoide. — Secondo l'A. è un tronco di prisma quadrilatero retto, in cui una base è sostituita da un quadrilatero sghembo paraboloidico, o più generalmente è una porzione di prisma quadrilatero limitata da due quadrilateri paraboloidici. La determinazione di questo volume nel primo caso è fatta nel seguente modo. Si osservi che il tetraedro, che ha per vertici i quattro vertici del quadrilatero paraboloidico, è diviso per metà dal detto quadrangolo paraboloidico (Baltzer, *Ster.*, § 9, 5 in nota), e quindi il prismoide risulta in un modo dalla somma di due tronchi di prismi triangolari T_1, T_3 aumentata della metà del detto tetraedro e in un altro modo dalla somma di due altri tronchi di prismi triangolari T_2, T_4 diminuita della metà del detto tetraedro. Il prismoide perciò eguaglia $\frac{1}{2}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4)$. L'A. nell'esporre questo ragionamento cade in qualche inesattezza, come per esempio quella che $T_1 + T_3$ eguagli un tronco di prisma quadrilatero avente gli stessi spigoli del prismoide e la stessa sezione normale, tronco che non esiste; perciò l'interpretazione che dà alla formola finale (pag. 13) è falsa. Non posso poi non deplorare la mancanza di sobrietà sia nell'uso di vocaboli nuovi non necessari (p. es. *tetraedro risultante*), sia nelle considerazioni che conducono ai risultati. Questi ed altri difetti s'incontrano anche più innanzi in questa Nota, ed io li citerò come avvertimento all'A., senza discuterli. P. es. la (24') poteva essere sostituita dalla più semplice

$$R = \frac{1}{3} (S_2 a'' + S_4 a'''' - S_1 a' - S_3 a''');$$

inutile l'osservazione che *gli elementi comunque dati pel prismoide non soddisfano in generale la relazione* (4) *ossia la* (5'); — il significato dato a Z nella (26), che dà il volume del prismoide a due basi sghembe, non è in nessun modo giustificato, e quindi il preteso teorema conseguente che cioè « il volume del prismoide è eguale al prodotto dell'area del quadrilatero sezione normale per la distanza dei centri di gravità delle due basi ossia dei segmenti di superficie sghemba che comprende il solido » rimane indimostrato; — nella considerazione delle *forme geometriche derivate* (!) del prismoide quadrilatero, cioè del *prismoide-trapezio*, del *prismoide-parallelogrammo* e del *prismoide-triangolare*, trovo ripetuta a pag. 16 la formola errata $OG = \frac{2}{3} MN$ relativa al c. g. dell'area di un quadrilatero piano, errore però che non ha influenza sul resto; subito dopo noto l'errore di stampa $\frac{g}{m} = \frac{3}{4}$ invece che $\frac{g}{m} = \frac{4}{3}$; — a pag. 17 comma 3° attribuisce a $\frac{Z' + Z''}{2}$ il significato di distanza fra i c. g. delle due basi sghembe, significato che, come già si è osservato, resta sempre a provarsi; — la dimostrazione che L (punto d'incontro delle rette che uniscono i punti medi dei lati opposti del tetraedro *risultante*) è il c. g. del tetraedro poteva omettersi essendo notoria; — nell'esposizione delle proprietà principali del paraboloide iperbolico noto un linguaggio che non mi sembra del tutto esatto, p. es. *assintoti* per generatrici orizzontali, ecc.; — noto ancora che la descrizione non è sempre completa, p. es. le sezioni che sono parabole si possono ottenere non solamente con piani passanti per l'asse ma anche con piani paralleli all'asse, ecc.

L'A. chiude la Nota con considerazioni intorno all'applicazione del concetto di numero alle grandezze geometriche (*volumi*), le quali difficilmente fanno indovinare il suo pensiero e che in ogni modo mi sembrano fuori posto.

L'A. collega infine le sue ricerche coi teoremi di Torricelli, Cavalieri, Newton ed altri sulla cubatura approssimativa dei segmenti compresi fra due piani paralleli, ed osserva che la ricerca del volume del prismoide si può far dipendere da quella del volume dei solidi terminati da una superficie rigata-sghemba compresa fra due piani paralleli, il che non è per me evidente; e soggiunge: « Il prismoide nello studio dei solidi si può riguardare come anello di congiunzione fra i corpi terminati da facce piane e quelli terminati da superficie curve », conclusione di significato troppo indeterminato.

A schiarimento l'A. ha dato in fondo alla Nota un esempio numerico.

Nota II.

Dei tronchi prismatici e cilindrici.

L'A. determina in questa Nota il volume del tronco di cilindro (o di prisma) a sezione normale qualunque, e divide perciò il tronco con una serie di $n+1$ piani paralleli alla generatrice del cilindro, paralleli fra loro ed equidistanti, per modo che il volume gli risulta dalla somma di n solidi elementari compresi tra il primo e l'ultimo piano dividente, i quali, per n abbastanza grande, si possono considerare come altrettanti tronchi di prisma-trapezi.

In un primo modo, applicando a ciascuno di questi tronchi-trapezi la (16) della Nota I e sommando i risultati, ottiene una formola, la (4), pel volume richiesto. In un secondo modo suppone anzitutto che n sia pari, e considera gli $\frac{n}{2}$ segmenti solidi elementari compresi fra sezioni di posto dispari consecutive, di ciascuno dei quali calcola il volume con la regola di Cavalieri (secondo il Baltzer di Newton) per mezzo delle sezioni estreme e della intermedia, regola che l'A. aveva già data colla formola (17) della Nota I; sommando questi volumi elementari, ottiene pel volume richiesto la (8).

L'A. soggiunge che la (8) è più esatta della (4) quando *i segmenti intercetti sulle due linee di base* (dai due piani dividenti di posto dispari) *sono curvilinei e tendono a confondersi con archi parabolici* appartenenti (soggiungerei io) a parabole di asse parallelo ai piani dividenti. Infatti solo quando questa condizione fosse adempiuta esattamente, ogni segmento solido elementare soddisferebbe alla condizione voluta per l'esattezza della regola di Newton, poichè si prova facilmente che una sezione fatta in uno di essi con un piano parallelo alle basi avrebbe allora un'area funzione di terzo grado della distanza di esso piano da una delle basi.

L'A. approfitta poi di queste sue formole per dare due espressioni, (10) e (11), approssimate della lunghezza L dello spigolo baricentrico, osservando che, se S è la sezione normale del tronco e V è il suo volume, si ha anche $V = SL$. Infine si occupa del volume dello spicchio cilindrico retto simmetrico, a cui applica la (4); e siccome è conosciuta un'altra espressione del volume di questo solido, nella quale entra una delle coordinate del c. g. della sezione normale del solido, così egli ha opportunità di determinare questa coordinata; con semplici scambi di lettere determina poi l'altra coordinata. Per tal modo ottiene un'espressione approssimata del c. g. di un'area piana racchiusa da un arco di curva arbitrario e degli assi coordinati.

Debbo porre in avvertenza l'A. che nella (18) fu scritto per errore di stampa $\frac{l}{d}$ invece di $\frac{d}{l}$. Inoltre non posso tacere della forma poco esatta con cui nell'ultimo capoverso della pag. 32 si accenna al metodo pratico, che si usa comunemente dagli ingegneri, per la ricerca del c. g. di una figura piana qualunque. Infine nella tabella a pag. 34 si trovano alcune cifre inesatte.

Francamente debbo dire che questa Nota non mi pare troppo interessante dal punto di vista teorico.

Non mi occuperò della Nota III « sulla misura della capacità dei serbatoi naturali », nè della Nota IV « Dei solidi cilindrici, lo spicchio ed il cuneo cilindrico », perchè d'indole assolutamente pratica.

Spero che l'egregio A. vorrà accogliere benevolmente le osservazioni che mi son permesso di fare alla sua Monografia, la quale, ritoccata qua e là, condensata in minor numero di pagine e indirizzata agli studiosi di matematiche applicate, potrà certamente trovare favore.

G. Rozzolino.

AVERARDO MATTEUCCI. — *Appunti di trigonometria* ad uso degli alunni dei Licei e degli Istituti tecnici. — G. B. Paravia e Comp. — Prezzo L. 1.

Questo piccolo libro scritto senza pretensioni, con chiarezza di stile, parmi che sia una buona guida per i giovani candidati alla licenza liceale. Le materie del programma di trigonometria del 3° corso di Liceo vi si trovano svolte per intero ed accompagnate da opportuni esempi. L'A. ha seguito nella sua esposizione il classico libro del Serret sulla stessa materia, discostandovisi qua e là e anche con discernimento. Così ad es. le formule pel seno e coseno della somma e differenza di due archi sono ricavate appoggiandosi al teorema di Tolomeo e fra le applicazioni sono studiate due quistioni d'indole fisica.

Da elogiarsi una tavola in cui sono raccolte, con disposizione molto chiara, le variazioni delle funzioni trigonometriche al cambiare dell'arco.

Quantunque l'A. noti nella prefazione e anche in seguito come il libro sia piuttosto destinato agli studenti di Liceo che a quelli degli Istituti tecnici, pure siccome il titolo lo indirizza agli uni ed agli altri, non sarà fuor di luogo notare che per questi ultimi esso non risponde che incompletamente per la ristrettezza della materia sviluppata e maggiormente per l'assenza di esercizi a risolvere.

Nelle applicazioni avrei preferito l'uso dei logaritmi a 5 decimali anzichè a 7.

A. Lugli.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico (*)

Antomari (X.) — *Leçons de cinématique et de dynamique, suivies de la détermination des centres de gravité* à l'usage des candidats a l'École polytechnique. — Paris, Libraire Nony et C., 17, rue des Écoles. — Prix: 4 fs.

Bettazzi (R.) — Il concetto di lunghezza e la retta (Ann. di Mat. pura ed app.; Serie 2ª, t. XX).

— — Sui punti di discontinuità delle funzioni di variabile reale (Rend. Circolo mat. Palermo; t. VI, 1892).

(*) Per deficienza di spazio si rimanda al fascicolo venturo l'elenco delle pubblicazioni periodiche ricevute.

DEL RE (A.) — Considerazioni nel gruppo delle similitudini sul piano reale (Riv. di mat.; vol. II, 1892).

DE MARCHI (L.) — I cicloni atlantici e le recenti intemperie (Rend. R. Ist. Lom.; Serie 2ª, vol. XXV, f. IX, 1892).

FRATTINI (G.) — A complemento di alcuni teoremi del sig. Tchebicheff (Rend. R. Acc. dei Lincei; Serie 5ª, vol. I, 2° sem., 1892).

GARBIERI (G.) — *Elementi di aritmetica pratica* con numerosi esercizi e problemi e con tavole di ragguaglio, libro di testo per le Scuole secondarie inferiori. 6ª edizione. — Padova, Tip. Sacchetto, 1892. — Prezzo: L. 2.

— — Introduzione a una teorica dell'eliminazione (Gior. di Mat. di Battaglini; vol. XXX, 1892.

GIUDICE (F.) — Dott. G. Petersen: Teoria delle equazioni algebriche. Vol. II (Riv. di mat.; vol. II, 1892).

— — Sulla risolvente di Malfatti (Atti R. Acc. delle Scienze Torino; volume XXVII, 1892).

— — Sopra un criterio del sig. Petersen per calcolare un limite superiore alle radici d'un'equazione numerica. — Subfiniti e transfiniti dal punto di vista di Cantor (Rend. Circolo mat. Palermo; t. VI, 1892).

GIULIANI (G.) — Sulle funzioni di n variabili reali (Gior. di Mat. di Battaglini, vol. XXIX, 1891).

LORIA (G.) — Nicola Fergola e la scuola dei matematici che lo ebbe a duce. Pagine 144 con 4 tav. lit. (Atti della R. Univ. di Genova, 1892).

— — Sulla teoria della curvatura delle superficie (Riv. di mat., vol. II, 1892).

MARTONE (M.) — Introduzione alla teoria delle Serie. Parte II — Il problema universale del Wronski e la risoluzione algebrica delle equazioni. Catanzaro. Stab. tip. V. Asturi e figli, 1892.

MARCOLONGO (R.) — Alcune applicazioni delle funzioni ellittiche alla teoria dell'equilibrio dei fili flessibili. Nota 1ª e 2ª (Rend. R. Acc. Scienze fisiche e mat., Napoli. Serie 2ª, vol. VI, 1892).

— — Risoluzione di due problemi relativi alla deformazione di una sfera omogenea isotropa (Rend. R. Acc. dei Lincei; Serie 5ª, vol. I, 1° sem., 1892).

MAROTTA (G.) — *Interesse e sconto semplici.* Lezioni teorico-pratiche esposte nella R. Scuola tecnica di Acireale. — Acireale, S. Donzuso, 1892.

MILLOSEVICH (E) — Nuovi elementi ellittici di Unitas (306), in base a tutto l'intervallo di tempo delle osservazioni della prima opposizione (Mem. Società Spettroscopisti italiani, vol. XXI, 1892).

NICITA (F.) — *Descrizione del cerchio.* Raccolta di 527 problemi di Geometria elementare colle relative soluzioni. Ragusa, tip. Piccitto e Antoci, 1892. — Prezzo: L. 3.

PASANISI (F. M.) — *Atlante pel disegno cartografico.* Opera ad uso delle Scuole secondarie tecniche e classiche, degl' Istituti tecnici, dei Collegi militari e delle Scuole normali. Parte 1ª, con 26 fig. ed 8 carte. Fr. M. Pasanisi, editore, Roma, 1892. — Prezzo: L. 2.

PEANO (G.) — Generalizzazione della formula di Simpson. (Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXVII, 1892).

VERONESE (G.) — Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale (Rend. Circolo mat. Palermo, t. VI, 1892).

Chiusura della redazione il dì 10 settembre 1892.

A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

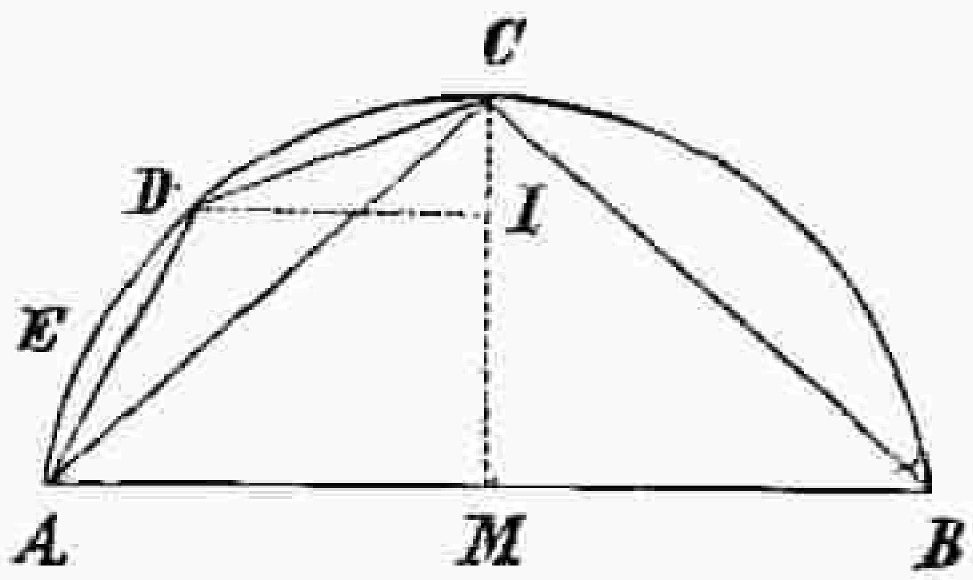
(Continuazione, V. pag. 113).

Ma nella greca geometria si escludevano i concetti di limite e di serie con un' infinità di termini, velandoli sotto l'apparenza del metodo di esaurimento, e da ogni dubbio rimovendo l'intelletto con la prova della riduzione all'assurdo. Nel 1° teorema del XII libro Euclide mostra i poligoni simili iscritti nei cerchi esser proporzionali ai quadrati dei diametri di questi e coi suddetti metodi lo estende ai circoli. Il triangolo massimo iscritto in un segmento circolare non maggiore di un semicerchio supera la metà del segmento, e perciò simboleggiando c la superficie del circolo, a il quadrato iscrittovi, s il segmento di c insistente sopra ogni lato di a, t il triangolo massimo iscrittovi, dall'identità $c = a + 4s$ a motivo di $a > \frac{c}{2}$ si rileva $s < \frac{c}{2^3}$; parimenti indicando a_1 la superficie $a + 4t$ dell'ottagono regolare, s_1 il segmento di c insistente sopra ciascun lato di a_1 e t_1 il triangolo massimo iscrittovi, a motivo di $s = t + 2s_1$ e $t > \frac{s}{2}$ si deduce $s_1 < \frac{s}{2^2} < \frac{c}{2^5}$, e $c = a + 4t + 2^3 s_1 = a_1 + 2^3 s_1$; in generale simboleggiando a_{m-2} la superficie del poligono di 2^m lati, s_{m-2} il segmento circolare, che insiste sopra ogni lato di a_{m-2} e t_{m-2} il triangolo massimo iscrittovi, si avranno $c = a_{m-2} + 2^m s_{m-2}$, $s_{m-3} = t_{m-3} + 2s_{m-2}$; ora poichè risulta $t_{m-3} > \frac{1}{2} s_{m-3}$, si ricava $s_{m-2} < \frac{1}{4} s_{m-3} < \frac{s}{4^{m-2}}$ e per conseguenza $2^m s_{m-2} < \frac{s}{2^{m-4}} < \frac{c}{2^{m-1}}$ diviene piccolissimo per m crescente; dunque la differenza $c - a_{m-2}$ può ridursi ad esser minore di un qualunque spazio finito ε. Due circoli descritti coi raggi r, r' differiranno dai poligoni simili iscritti a_n, a'_n delle quantità ε_n, ε'_n minime per n grandissimo e dalla proporzione $c - \varepsilon_n : c' - \varepsilon'_n = (r) : (r')$ mediante i limiti si dedurrebbe $c : c' = (r) : (r')$. Invece Euclide esamina l'ipotesi $(r) : (r') = c : x'$ indicando x' una superficie diversa da c'; prima supponendo $x' < c'$ iscrive in c' il poligono $a'_n > x'$ col prendere $c' - a'_n < c' - x'$ e poi iscrive in c il poligono a_n simile ad a'_n: or dalla nota proporzione

$(r):(r') = a_n : a'_n$ paragonata alla supposta deduce $a_n : a'_n = c : x'$, e siccome a'_n supera x', dovrebbe aversi $a_n > c$, il che è assurdo. In secondo luogo considera l'ipotesi di $x' > c'$ e convertendo la proporzione deduce $(r') : (r) = x' : c$, in cui facendo $x' : c = c' : y$ ne conseguirebbero $y < c'$ ed $(r') : (r) = c' : y$, dimostrate impossibili nella prima supposizione.

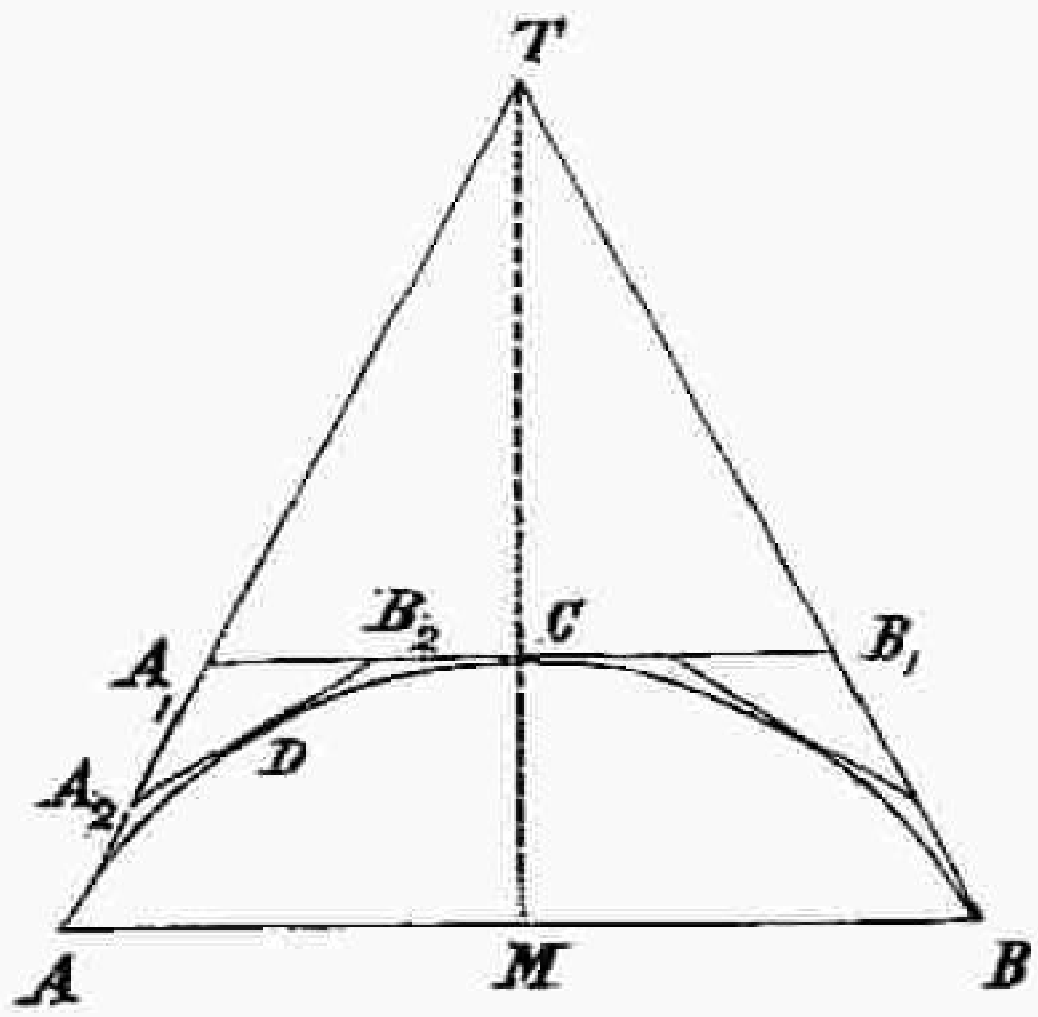
Un metodo antico per il calcolo di $\pi = c : (r)$ consiste nel cercare i valori approssimati della ragione $a_n : (r)$ per n continuamente duplicante; si abbrevierebbe questo computo mercè i seguenti lemmi di Huygens:

1.° Il segmento circolare non maggiore di un semicerchio supera i $\frac{4}{3}$ del triangolo isoscele iscrittovi. Infatti siano C, D i mezzi degli archi sottesi dalle corde AB, AC e CM, CI le rispettive saette; a motivo di $AC < 2CD$ sostituendo alla ragione dei quadrati costruiti sulle corde AC, DC quella delle lor proiezioni CM, CI sul diametro condotto per C si trova $CM < 4.CI$; e poichè i triangoli $ABC = t$, $ACD = t_1$ stanno in ragion composta delle rispettive basi ed altezze, dalle ragioni $AC : AB > \frac{1}{2}$, $CI : CM > \frac{1}{4}$ si ricava $t_1 > \frac{1}{8} t$; parimente dal triangolo isoscele $AED = t_2$ resulta $t_2 > \frac{t_1}{8} > \frac{t}{8^2}$, e così proseguendo si ha: segmento $ABC > t + 2t_1 + 2^2 t_2 + 2^3 t_3 + \ldots > t\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right) = \frac{4}{3} t$.



2.° Un segmento circolare minore di un semicerchio vale meno di $\frac{2}{3}$ del triangolo circoscritto. Poichè tirando per il punto medio C dell'arco ACB la retta A_1B_1 parallela alla corda AB e compresa fra le tangenti AT, TB, a motivo di $AA_1 = A_1C < A_1T$, si ha $A_1B_1 : AB > \frac{1}{2}$, $CT : MC > 1$ e quindi triangolo $A_1TB_1 > \frac{1}{2} ACB$. Similmente conducendo le tangenti ai punti medi degli archi AC, CB, la tangente A_2B_2 si avrà pure $2A_2B_2A_1 > 2 . \frac{ADC}{2}$, in simil modo condotta la tangente $A_3 B_3$ all'arco AD per il suo punto medio E resulta fra i triangoli $A_3 A_2 B_3$, AED la relazione $2^2 . A_3 A_2 B_3 > 2^2 . \frac{AED}{2}$, ... e così scritte le successive disuguaglianze, con l'aggiungerle si trova che la superficie $ACBT$ racchiusa fra le tangenti AT, TB e l'arco AC supera la metà del segmento circolare ACB, e quindi $ATB > \frac{3}{2}$ segmento ACB.

Il poligono regolare di n lati abbia il perimetro p_n, la superficie s_n ed r il raggio del circolo circoscritto, per la nota proposizione $s_{2n} = \left(\frac{1}{2} p_n, r\right)$; fatto $r = 1$ si ha $s_{12} = 3$, e poichè $p_{12} = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ resulta $s_{24} - s_{12} = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2} - 1)$ somma dei triangoli isosceli iscritti nei segmenti circolari che insistono sui lati del dodecagono regolare; onde la somma di questi segmenti per il 1° lemma di Huygens è maggiore di $4(\sqrt{6} - \sqrt{2} - 1)$, cui aggiungendo la superficie 3 del dodecagono si trae $\pi > 4(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - 1 = 3{,}1411044....$



E simboleggiando con P_n ed S_n il perimetro e la superficie del poligono regolare circoscritto di n lati, dalla relazione $S_n = \left(\frac{1}{2} P_n, r\right)$, a motivo di $r = 1$ e $P_{12} = 24(2 - \sqrt{3})$ si ha $S_{12} = 12(2 - \sqrt{3})$, quindi $21 - 12\sqrt{3}$ eguaglia la differenza fra i due dodecagoni regolari circoscritto ed iscritto e per il 2° lemma surriferito la somma dei segmenti circolari che insistono sui lati del dodecagono iscritto è minore di $\frac{2}{3}(21 - 12\sqrt{3})$; aggiuntovi la superficie 3 del medesimo poligono si conchiude $\pi < 17 - 8\sqrt{3} = 3{,}1435936....$; dunque $3{,}14 = 3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{7}}$ è il valor approssimato di π a meno di $\frac{1}{100}$.

(*Continua*).

G. Bellacchi.

DELL'ANALISI INDETERMINATA DI SECONDO GRADO

(*Continuazione e fine, V. pag. 119*).

22. Teorema. — *Dicasi* (p, q) *una soluzione qualunque, e* (p_1, q_1) *la soluzione minima dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = 1$. *Sia inoltre* (k, h) *una soluzione dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = N$, *scelta in tutti i modi possibili fra quelle nelle quali* $h < q_1 \sqrt{N}$ *e conseguentemente* $k < p_1 \sqrt{N}$. *Tutte le soluzioni intere e positive dell' equazione* $x^2 - Dy^2 = N$ *saranno date, e ciascuna una volta sola, dalla formola*

$$x + y\sqrt{D} = (k + h\sqrt{D})(p + q\sqrt{D}),$$

qualora si uguaglino le parti razionali e i coefficienti di $\sqrt{D}$ *de' suoi due membri.*

Per la dimostrazione basta ricordare quanto si disse nei n. 1, 2 e 3, in proposito della risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$, aggiungendo la seguente considerazione. Se si applica la [4] alla risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = 1$, scegliendo per (α, β) la (p_1, q_1), essa diverrà:

$$x + y\sqrt{D} = (K + H\sqrt{D})(p_1 + q_1\sqrt{D})^m,$$

con le condizioni $H < q_1$, $K < p_1$ per H e per K, le quali, nel caso speciale che si considera, saranno valori della y e della x relativi a soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = 1$. Ma poichè la soluzione minima di questa equazione è (p_1, q_1), la quale vien subito dopo la soluzione evidente $(1, 0)$, dovrà essere: $H = 0$, $K = 1$. Pertanto la precedente eguaglianza diverrà:

$$p + q\sqrt{D} = (p_1 + q_1\sqrt{D})^m. \qquad (*)$$

Relativamente all'equazione $x^2 - Dy^2 = N$, avendosi

$$x + y\sqrt{D} = (k + h\sqrt{D})(p_1 + q_1\sqrt{D})^m,$$

(*) Si ottiene così, come caso particolare, la nota formola di risoluzione dell'equazione di Pell; (V. p. 88. Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 85).

con $k^2 - Dh^2 = N$, $h < q_1 \sqrt{N}$, $k < p_1 \sqrt{N}$, si avrà pure

$$x + y\sqrt{D} = (k + h\sqrt{D})(p + q\sqrt{D}),$$

con $h < q_1 \sqrt{N}$, $k < p_1 \sqrt{N}$, come bisognava dimostrare.

Teorema. — *Dicasi* (p, q) *una soluzione qualunque, e* (p_1, q_1) *la soluzione minima dell' equazione* $x^2 - Dy^2 = 1$. *Sia inoltre* (k, h) *una soluzione dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = -N$, *scelta in tutti i modi possibili fra quelle nelle quali*

$$h \leq \sqrt{\frac{N(p_1+1)}{2D}}$$

e conseguentemente

$$k \leq \sqrt{\frac{N(p_1-1)}{2}}.$$

Tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$ *saranno date, e ciascuna una volta sola,* (*) *dalla formola*

$$x + y\sqrt{D} = (\pm k + h\sqrt{D})(p + q\sqrt{D}),$$

qualora si eguaglino le parti razionali e i coefficienti di $\sqrt{D}$ *de' suoi due membri.*

Ricordato quanto fu detto nei n. 4, 5 e 6, in proposito della risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$, la dimostrazione procede come quella del teorema precedente.

APPENDICE.

Per risolvere l'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ in numeri interi e positivi fu assegnata la formola

$$x + y\sqrt{D} = (k + h\sqrt{D})(\alpha + \beta\sqrt{D})^m,$$

nella quale α e β denotano due numeri interi e positivi, fissi, diversi da zero e legati dalla relazione $\alpha^2 - D\beta^2 = 1$; mentre k ed h significano i valori della x e della y relativi a tutte le soluzioni fondamentali, ossia a quelle soluzioni dell'equazione proposta, per le quali si ha

$$h < \beta\sqrt{N} \text{ e conseguentemente } k < \alpha\sqrt{N}.$$

(*) Salvo il caso in cui le limitazioni stesse della h e della k forniscono una soluzione dell'equazione. In questo caso talune soluzioni si ripetono; (V. l'osservazione del n 6).

È importante osservare che la precedente formola equivale alla seguente:

$$x + y\sqrt{D} = (k' \pm h'\sqrt{D})\,(\alpha + \beta\sqrt{D})^m,$$

ove per k' ed h' s'intendano i valori di x e di y relativi a tutte quelle soluzioni della proposta equazione, per le quali si verifica la condizione

$$h' \leq \sqrt{\frac{N(\alpha - 1)}{2D}}$$

e la conseguente

$$k' \leq \sqrt{\frac{N(\alpha + 1)}{2}}.$$

Si ha così per l'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ una regola di risoluzione analoga a quella che fu data per l'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$. Inoltre, essendo la sopraddetta limitazione di h' minore della limitazione di h, com'è facile verificare, la risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ riesce più sbrigativa adottando la seconda formola (*) invece della prima (v. al n. 16 la nota a pie' di pagina).

La formola

$$x + y\sqrt{D} = (k' \pm h'\sqrt{D})\,(\alpha + \beta\sqrt{D})^m$$

si deduce dall'altra

$$x + y\sqrt{D} = (k + h\sqrt{D})\,(\alpha + \beta\sqrt{D})^m$$

distinguendo le soluzioni fondamentali (k, h) in quelle per le quali h è compresa fra 0 e $\sqrt{\frac{N(\alpha-1)}{2D}}$ e in quelle per le quali h è compresa fra questa seconda limitazione e $\beta\sqrt{N}$. Tra le soluzioni dei due gruppi esiste una corrispondenza definita dalle formole reciproche di sè stesse

$$Y = \beta x - \alpha y$$
$$X = \alpha x - D\beta y,$$

per le quali ad una soluzione (x, y) appartenente ad uno dei due gruppi corrisponde una soluzione (X, Y) appartenente all'altro, e a questa la prima (**). Ciò posto, si consideri la formola

$$x + y\sqrt{D} = (k + h\sqrt{D})\,(\alpha + \beta\sqrt{D})^m.$$

(*) Se di questa seconda formola, come di alcuni altri risultati, non si è fatto cenno fin dal principio di questo lavoro, ciò è avvenuto perchè tali risultati furono ottenuti quando il lavoro era già in parte pubblicato.

(**) Per la dimostrazione di questo principio vedasi la mia Nota: « *A complemento di alcuni teoremi del Sig.* TCHEBICHEFF » pubblicata nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 1892.

In essa k ed h indicano i valori della x e della y relativi alle soluzioni così del primo come del secondo dei menzionati due gruppi. Ora, se (k, h) è soluzione del secondo gruppo, dovrà aversi, pel ricordato principio,

$$h = \beta k' - \alpha h'$$
$$k = \alpha k' - D\beta h',$$

ossia

$$k + h\sqrt{D} = (k' - h'\sqrt{D})\,(\alpha + \beta\sqrt{D}),$$

essendo k' ed h' i valori della x e della y relativi a una soluzione del primo gruppo. Da ciò facilmente si deduce che l'uso della formola

$$x + y\sqrt{D} = (k + h\sqrt{D})\,(\alpha + \beta\sqrt{D})^m$$

estesa a tutte le soluzioni (k, h) dei due gruppi, equivale all'uso della formola

$$x + y\sqrt{D} = (k' \pm h'\sqrt{D})\,(\alpha + \beta\sqrt{D})^m$$

estesa alle sole soluzioni (k', h') del primo gruppo, cioè a quelle soluzioni nelle quali

$$h' \leq \sqrt{\frac{N(\alpha - 1)}{2D}}.$$

Per $m = 0$ bisognerà rifiutare il segno — davanti alla h'. L'ultima formola fornisce poi, senza ripetizioni, tutte le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$, eccettuato il caso in cui le limitazioni di h' e di k' sono numeri interi. Quando ciò avviene, la soluzione massima fra quelle relative ad un certo valore di m coincide con la soluzione minima fra quelle relative al valore susseguente della stessa m, come nella formola di risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$.

NOTE.

a) L'argomento fu studiato dai geometri fin da tempo antichissimo. Così le formole che nel n. 20 sono attribuite ad Eulero, erano già note agl'Indiani, quattro secoli avanti Leonardo Pisano. (V. la Memoria del prof. Marcolongo: « *Sull'analisi indeterminata di 2° grado* » nel Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, a. 1888, pag. 84-85). Ma il problema della risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$, e in generale di qualsivoglia equazione di secondo grado a due incognite e a coefficienti razionali, in numeri interi, fu risoluto la prima volta da Lagrange, in tutta la sua generalità e con tutto il rigore che si può desiderare. (V. la Memoria di Lagrange: « *Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré* » e l'altra: « *Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers*).

b) Nella prefazione alla prima delle citate sue Memorie, Lagrange, riferendosi ai suoi metodi, dice: « *Je les crois d'autant plus dignes de l'attention des Mathématiciens qu'elles laissent encore un vast champ à leurs recherches* ». Se non che il problema Lagrangiano fu ben presto incorporato in più alto e difficile argomento; intendo dire nella dottrina delle forme quadratiche: minore perciò forse la copia di nuove ricerche, condotte con metodo diretto ed elementare, quali dovettero essere vagheggiate dall'antecessore di Gauss e di Dirichlet.

c) Credo nuovo il metodo, e nuova una gran parte dei risultati contenuti in questo lavoro. Di molte cose ho taciuto, per amore di brevità, che pure mi sembrano importanti: e segnatamente delle formole e del metodo per la risoluzione dell'equazione

$$a x^2 + 2 b x y + c y^2 = n$$

in numeri interi, quando $b^2 - ac$ è quantità positiva. Tanto le une quanto l'altro si dedurrebbero dal metodo e dalle formole date in questo lavoro per la risoluzione dell'equazione $x^2 - D y^2 = \pm N$.

d) Il metodo che ho stabilito per la risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$ consiste sostanzialmente nella determinazione di alcune soluzioni comprese fra 0 e un certo limite positivo della y, epperò in numero finito, dalle quali, mediante conveniente formola, si deducono tutte le altre. Esso è accompagnato da altro metodo, che serve a giudicare se l'equazione è possibile, e quando è tale, a trovare quelle soluzioni dalle quali tutte le altre si derivano. Tanto il primo quanto l'altro dei due metodi non dipendono affatto dalla teorica delle frazioni continue. Invece il metodo di Lagrange riposa essenzialmente su questa teoria, e sulla ipotesi che la N e la y sieno numeri primi fra loro. Una tale ipotesi fa sì che l'equazione si decomponga in tante equazioni parziali quanti sono i fattori quadrati contenuti in N. Talchè, quando N decomposto in fattori primi risulta dotato di un gran numero di fattori quadrati, il metodo di Lagrange, diviene, al dire dello stesso Autore, pressochè impraticabile. « *La méthode* (così Lagrange nella seconda delle Memorie citate di sopra, riferendosi all'equazione $A = p^2 - Bq^2$) *pour le cas où* B *est un nombre positif et où* p *et* q *doivent être des nombres entiers, est à la vérité un peu longue et compliquée, et j'avoue même qu'elle l'est à un point qui la rend difficile à suivre; mais je crois que cette difficulté ne doit être imputée qu'à la nature de la matière, et au grand nombre de cas auxquels il faut avoir égard quand on veut la traiter d'une manière aussi directe et aussi rigoureuse que nous l'avons fait* ». E pur supponendo N ed y primi fra loro, il metodo di Lagrange (nonostante le semplificazioni apportate ad esso dall'Autore nella Memoria testé ricordata) non cessa di essere lungo, perchè intralciato da decomposizioni e riduzioni che debbono precedere l'algoritmo delle frazioni continue: sia che si segua il primo oppure il secondo dei procedimenti indicati dall'Autore nelle sue aggiunte all'algebra di Eulero, § VII.

Il metodo stabilito in questo lavoro è semplicissimo, e non obbliga a dividere e suddividere la trattazione: e quanto alla difficoltà della ricerca di quelle soluzioni dalle quali tutte le altre si derivano, essa non dipende dal numero dei fattori quadrati contenuti in N, epperò dalla composizione di N mediante i suoi fattori primi, ma solo dalla grandezza della stessa N. Applicando il detto metodo agli esempi trattati da Lagrange nelle sue Memorie, o ad altri, si può verificare che esso è assai più sbrigativo di quello di Lagrange, come ho accennato nel n. 16, trattando l'equazione $x^2 - 46y^2 = 210$. Finalmente l'unità e la semplicità ond'è dotato, rendono evidenti molte proprietà notabili, che difficilmente emergerebbero d'altronde, e dalla stessa teoria delle forme quadratiche.

e) A prima vista potrebbe sembrare che i metodi stabiliti nei n. 8, 13, 17 e 19 per la ricerca delle soluzioni fondamentali, e più generalmente di tutte le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$ comprese fra lo zero e un certo limite superiore della y, non siano se non una generalizzazione dell'algoritmo stabilito da Eulero (*Éléments d'Algèbre*, T. II, Ch. VII) per risolvere la celebre equazione di Pell: ma ciò non è. Perchè quei metodi, a differenza dall'algoritmo di Eulero, riposano essenzialmente sulla nozione di *soluzione singolare*, da me introdotta; ed applicati all'equazione di Pell, richiedono un calcolo per tentativi, che non è quello richiesto dal metodo di Eulero, come il lettore può facilmente verificare.

f) L'algoritmo di Eulero, che perfezionato ed elevato a teoria da Lagrange diede nascita all'applicazione delle frazioni continue alla risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$, non riguarda direttamente se non il caso il cui N è minore di $\sqrt{D}$ (V. p. e. Legendre, *Théorie des nombres*, T. I, § VI); mentre i metodi da me stabiliti sono valevoli qualunque sia N. Se questo vantaggio fosse mancato, sarebbe stato mestieri procedere per via di riduzioni a casi già noti, come col metodo di Lagrange: molto probabilmente a discapito dell'unità e della naturalezza.

g) Lagrange ha osservato che non basta, in generale, combinare una sola soluzione (x_0, y_0) dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$ con le soluzioni (p, q) dell'equazione $x^2 - Dy^2 = 1$, perchè tutte le altre soluzioni della prima equazione divengano note, mediante la regola di Eulero. D'onde la questione che si accampa nel n. 20 di questo lavoro, e alla quale rispondono in una maniera semplice e precisa i teoremi del n. 22. Se poi si tien conto di ciò che ho dimostrato nell'appendice, il primo di essi diviene analogo al secondo, e più comodo per gli usi pratici.

h) Nella Memoria del Sig. Tchebicheff, citata in principio di questo scritto, il teorema al n. 21 è dimostrato per via così indiretta, che non è facile scorgerne la capitale importanza nella risoluzione dell'equazione indeterminata trattata finora. D'altra parte esso è quivi applicato soltanto ad alcune ricerche relative ai numeri primi. L'averlo qui dedotto da considerazioni dirette, e più appropriate all'indole sua, mi ha permesso di generalizzarlo e d'interpretarlo geometricamente nella mia Nota: « *Due proposizioni della teoria dei numeri e loro interpretazione geometrica* » e nell'altra: « *A complemento di alcuni teoremi del Sig. Tchebicheff* » (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1892).

G. Frattini.

SULLA DIVISIONE DEI POLINOMI INTERI

(*Continuazione e fine, V. pag. 127*).

3.

Mediante gli elementi della prima colonna della tabella (8), escluso l'ultimo, si possono formare dapprima i quozienti della divisione delle potenze di x per $D^{(r)}$, e successivamente il quoziente di $P^{(n)}$ diviso per lo stesso divisore.

Infatti, si riconosce facilmente che se q_m è il quoziente ed r_m il resto ottenuto dividendo x^m per $D^{(r)}$, sarà $q_{m+1} = q_m x + q'_m$ il quoziente della divisione di x^{m+1} per $D^{(r)}$, indicando con q'_m il quoziente di $r_m x$ diviso per $D^{(r)}$. Ma per $m = r + h$ si ha $q'_m = b_1^{(h)}$; per $m = r$ si ha $q'_m = b_1$, $q_m = 1$, e perciò si può stabilire il sistema delle eguaglianze

$$(10) \quad \begin{cases} q_{r+1} = x + b_1 \\ q_{r+h} = q_{r+h-1}\, x + b_1^{(h-1)} \qquad [h = 2, 3, \ldots . (n-r)] \end{cases}$$

da cui, moltiplicando la penultima per x, l'antipenultima per x^2 ecc., la prima per x^{n-r-1}, sommando e riducendo si trae:

$$q_n = x^{n-r} + b_1 x^{n-r-1} + b_1^{(1)} x^{n-r-2} + \ldots . + b_1^{(n-r-2)} x + b_1^{(n-r-1)}.$$

In modo analogo tralasciando l'ultima delle (10) si calcola il valore di q_{n-1}, poi quello di q_{n-2} ecc., cosicchè i quozienti di x^n, x^{n-1}, ... x^{r+1}, x^r divisi per $D^{(r)}$ sono rispettivamente rappresentati da:

$$(11) \begin{cases} q_n = x^{n-r} + b_1 x^{n-r-1} + b_1^{(1)} x^{n-r-2} + \ldots + b_1^{(n-r-2)} x + b_1^{(n-r-1)} \\ q_{n-1} = \qquad x^{n-r-1} + b_1\, x^{n-r-2} + \ldots . + b_1^{(n-r-3)} x + b_1^{(n-r-2)} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ q_{r+1} = \qquad\qquad\qquad\qquad x + b_1 \\ q_r = \qquad\qquad\qquad\qquad 1 \end{cases}$$

Laonde se si moltiplicano ordinatamente la prima delle (11) per a_0, la seconda per a_1 ecc., la penultima per a_{n-r-1}, l'ultima per a_{n-r}, e si addizionano i resultati, si avrà il quoziente Q della divisione di $P^{(n)}$ per $D^{(r)}$ espresso da:

$$
(12) \qquad Q = a_0 x^{n-r} + \begin{array}{l|} a_0 b_1 \\ +a_1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\; x^{n-r-1} + \begin{array}{l|} a_0 b_1^{(1)} \\ +a_1 b_1 \\ +a_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}\; x^{n-r-2} + \ldots + \begin{array}{l|} a_0 b_1^{(n-r-2)} \\ +a_1 b_1^{(n-r-3)} \\ + \ldots\ldots \\ +a_{n-r-2} b_1 \\ +a_{n-r-1} \\ \\ \end{array}\; x + \begin{array}{l} a_0 b_1^{(n-r-1)} \\ +a_1 b_1^{(n-r-2)} \\ + \ldots\ldots \\ +a_{n-r-2} b_1^{(1)} \\ +a_{n-r-1} b_1 \\ +a_{n-r}\,. \end{array}
$$

È appena necessario l'avvertire che questo modo di dedurre dalle (11) l'espressione di Q, ha la sua spiegazione nelle forme che si trovano appartenere ai quozienti, quando si dimostrano i teoremi I e II.

Notiamo infine che, determinati i valori delle $b_1^{(1)}, b_1^{(2)}, \ldots . b_1^{(n-r-1)}$, al calcolo dei coefficienti del quoziente Q, indicati per semplicità con $a_0, B_1, B_2, \ldots . B_{n-r}$, potrà essere data la seguente disposizione

$$
(13) \qquad \begin{array}{l|llllll}
 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_{n-r-1} & a_{n-r} \\
b_1 & & a_0 b_1 & a_1 b_1 & \ldots\ldots & a_{n-r-2} b_1 & a_{n-r-1} b_1 \\
b_1^{(1)} & & & a_0 b_1^{(1)} & \ldots\ldots & a_{n-r-3} b_1^{(1)} & a_{n-r-2} b_1^{(1)} \\
\ldots\ldots & & & & & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & & & & & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
b_1^{(n-r-2)} & & & & & a_0 b_1^{(n-r-2)} & a_1 b_1^{(n-r-2)} \\
b_1^{(n-r-1)} & & & & & & a_0 b_1^{(n-r-1)} \\
\hline
 & a_0 & B_1 & B_2 & \ldots\ldots & B_{n-r-1} & B_{n-r}
\end{array}
$$

spiegata manifestamente dall'osservazione della (12).

4.

Un algoritmo, abbastanza spedito, per trovare i valori delle $b_1^{(h)}$ che compariscono nella (12), quando i coefficienti del divisore sono numerici, è indicato nello schema seguente:

$$
(14)\left\{\begin{array}{llllllllll}
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots\ldots & b_r & & & & \\
 & b_1b_1 & b_1b_2 & b_1b_3 & \ldots\ldots & b_1b_{r-1} & b_1b_r & & & \\
 & \overline{b_1^{(1)}} & b_1^{(1)}b_1 & b_1^{(1)}b_2 & \ldots\ldots & b_1^{(1)}b_{r-2} & b_1^{(1)}b_{r-1} & b_1^{(1)}b_r & & \\
 & & \overline{b_1^{(2)}} & b_1^{(2)}b_1 & \ldots\ldots & b_1^{(2)}b_{r-3} & b_1^{(2)}b_{r-2} & b_1^{(2)}b_{r-1} & b_1^{(2)}b_r & \\
 & & & \overline{b_1^{(3)}} & \ldots\ldots & b_1^{(3)}b_{r-4} & b_1^{(3)}b_{r-3} & b_1^{(3)}b_{r-2} & b_1^{(3)}b_{r-1} & b_1^{(3)}b_r \\
 & & & & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}\right.
$$

Esso è formato scrivendo in una linea orizzontale i coefficienti di $D^{(r)}$ e in una seconda linea orizzontale, al disotto di essi, il prodotto dei medesimi coefficienti per b_1, coll'avvertenza di collocare il primo prodotto $b_1\, b_1$ sotto a b_2. La somma di questi due termini, com'è noto dalla prima delle formule (6), è il valore di $b_1^{(1)}$. A destra di esso, nella terza orizzontale, sono scritti i prodotti di $b_1^{(1)}$ per tutti i termini della prima linea; e la somma dei termini b_3, $b_1\, b_2$, $b_1^{(1)}\, b_1$ che vengonsi a trovare sulla terza verticale è, come deducesi facilmente dalle formule (5), il valore di $b_1^{(2)}$. Scritti successivamente a destra di esso i prodotti di $b_1^{(2)}$ per i termini della prima linea, la somma dei termini della quarta verticale dà il valore di $b_1^{(3)}$. Ecc., ecc.

Se poi nello schema (14) si sopprimono i valori delle somme $b_1^{(1)}$, $b_1^{(2)}$, $b_1^{(3)}$ ..... insieme col primo termine di ogni linea, ossia b_1, $b_1 b_1$, $b_1^{(1)} b_1$, $b_1^{(2)} b_1$, ... riducendolo alla forma

$$
(15)\left\{\begin{array}{lllllll}
b_2 & b_3 & b_4 & \ldots\ldots\ldots & b_r & & \\
 & b_1b_2 & b_1b_3 & \ldots\ldots\ldots & b_1b_{r-1} & b_1b_r & \\
 & & b_1^{(1)}b_2 & \ldots\ldots\ldots & b_1^{(1)}b_{r-2} & b_1^{(1)}b_{r-1} & b_1^{(1)}b_r \\
 & & & \ldots\ldots\ldots & b_1^{(2)}b_{r-3} & b_1^{(2)}b_{r-2} & b_1^{(2)}b_{r-1} \quad b_1^{(2)}b_r \\
 & & & & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.
$$

si prova agevolmente, mediante le stesse formule (5), che sommando per colonne i termini rimanenti si ottengono i valori di b_2, $b_2^{(1)}$, $b_2^{(2)}$, ... quelli cioè che si trovano nella seconda colonna della tabella (8). Se si sopprime poi nello schema (15) il primo termine di ogni linea, cioè b_2, $b_1\, b_2$, $b_1^{(1)}\, b_2$, ... e si sommano per colonne i rimanenti, si hanno i valori di b_8, $b_8^{(1)}$, ... ossia quelli della terza colonna della tabella (8). E seguitando col sopprimere ordinatamente i primi termini di ogni linea dello schema (15), successivamente semplificato, si ottengono tutte le colonne della tabella (8), l'ultima delle quali ha per elementi b_r, $b_1 b_r$, $b_1^{(1)} b_r$, $b_1^{(2)} b_r$, ...

Resulta dunque che *dagli elementi preparati per il calcolo dei coefficienti del quoziente, si hanno immediatamente altresì quelli che servono al calcolo dei coefficienti del resto.*

È da notare che, nella pratica, dai valori particolari di n e di r si dedurrà facilmente tanto il numero delle linee dello schema (14), quanto il numero delle colonne di cui basterà trovare le somme per comporre le tabelle (13) e (9) ove sono compendiati i calcoli da fare per ottenere i coefficienti del quoziente e del resto della divisione di $P^{(n)}$ per $D^{(r)}$.

Per applicare la teoria svolta ad un esempio, si supponga $r = 7$ e

$$D^{(7)} = x^7 - 2x^6 + 4x^5 - 7x^3 + 12x^2 - x + 1.$$

Riserbandoci di assegnare poi al dividendo una forma speciale, stabiliamo soltanto che il suo grado debba essere $n = 11$. Così, essendo $n - r = 4$, è sufficiente limitare lo schema (14) alle seguenti cinque linee:

$$(14)' \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{2} & -4 & 0 & 7 & -12 & 1 & -1 & & & & \\
 & 4 & -8 & 0 & 14 & -24 & 2 & -2 & & & \\
 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & \mathbf{-8} & -16 & 32 & 0 & -56 & 96 & -8 & 8 & \\
 & & & \mathbf{-9} & -18 & 36 & 0 & -63 & 108 & -9 & 9 \\
 & & & & \mathbf{16} & & & & & &
\end{array} \right.$$

La tabella (8) si comporrà, nel nostro caso, di cinque linee contenenti ordinatamente i coefficienti dei resti della divisione per $D^{(7)}$ delle potenze x^7, x^8, x^9, x^{10}, x^{11}, e nella sua prima colonna si troveranno appunto i numeri 2, 0, -8, -9, 16 ora determinati. Di questi cinque numeri, soltanto i primi quattro 2, 0, -8, -9 sono necessari, come apparisce dalla (13), al calcolo dei coefficienti del quoziente.

Lo schema (15), dedotto dal precedente, ha la forma:

$$
(15)' \quad \left\{ \begin{array}{cccccccccc}
-4 & 0 & 7 & -12 & 1 & -1 & & & & \\
 & -8 & 0 & 14 & -24 & 2 & -2 & & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & 32 & 0 & -56 & 96 & -8 & 8 & \\
 & & & & 36 & 0 & -63 & 108 & -9 & 9
\end{array} \right.
$$

e come la somma delle prime *cinque* colonne fornisce i termini -4, -8, 7, 34, 13 che costituiscono la seconda colonna della tabella (8), così sopprimendo successivamente i primi termini di ogni linea e sommando ogni volta le sole prime *cinque* delle colonne rimanenti si otterranno tutte le colonne della tabella (8) che viene ad essere composta nel modo seguente:

$$
(8)' \quad \left\{ \begin{array}{rrrrrrr}
2 & -4 & 0 & 7 & -12 & 1 & -1 \\
0 & -8 & 7 & 2 & -23 & 1 & -2 \\
-8 & 7 & 2 & -23 & 1 & -2 & 0 \\
-9 & 34 & -23 & -55 & 94 & -8 & 8 \\
16 & 13 & -55 & 31 & 100 & -1 & 9
\end{array} \right.
$$

Fissando ora che il dividendo sia il polinomio speciale

$$P^{(11)} = 3x^{11} + 4x^{10} - x^9 + 3x^8 - 2x^7 + 5x^6 + x^5 - 9x^4 - 8x^3 + x^2 - x + 10,$$

mediante i suoi primi cinque coefficienti 3, 4, -1, 3, -2 e i quattro termini 2, 0, -8, -9 della prima colonna della tabella (8)' si compone senza difficoltà la (13) per il calcolo dei coefficienti del quoziente. Essa è in tal caso:

$$
(13)' \quad \begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & 4 & -1 & 3 & -2 \\
2 & & 6 & 8 & -2 & 6 \\
0 & & & 0 & 0 & 0 \\
-8 & & & & -24 & -32 \\
-9 & & & & & -27 \\
\hline
 & \mathbf{3} & \mathbf{10} & \mathbf{7} & \mathbf{-23} & \mathbf{-55}
\end{array}
$$

e se ne deduce che

$$Q = 3x^4 + 10x^3 + 7x^2 - 23x - 55.$$

Infine con tutti i coefficienti del dividendo e colla tabella (8)′ si può comporre la (9) in questa guisa:

		5	1	-9	-8	1	-1	10
	-2	2	-4	0	7	-12	1	-1
	3	0	-8	7	2	-23	1	-2
(9)′	-1	-8	7	2	-23	1	-2	0
	4	-9	34	-23	-55	94	-8	8
	3	16	13	-55	31	100	-1	9
		21	**153**	**-247**	**-120**	**631**	**-33**	**65**

e concludere che

$$R = 21\,x^6 + 153\,x^5 - 247\,x^4 - 120\,x^3 + 631\,x^2 - 33\,x + 65.$$

Non vogliamo trascurare qui l'osservazione, che se questo metodo fa apparire laboriosa la ricerca del quoziente e del resto in casi particolari, esso presenta *sempre* il vantaggio di potere, ad un certo punto, calcolare i coefficienti del quoziente e del resto indipendentemente l'uno dall'altro; ciò che riuscirà utile in talune ricerche. Così, nell'esempio considerato, alla domanda se il polinomio $P^{(11)}$ è divisibile per $D^{(7)}$, si risponde negativamente appena che dalle prime quattro colonne dello schema (14)′ si sono avuti i numeri 2, 0, -8, -9, e che dalla tabella (13)′, la quale immediatamente ne deriva, si è ottenuto -55 per valore dell'ultimo coefficiente del quoziente. Così pure volendo sapere qual valore dovrebbe sostituirsi al coefficiente -2 di x^7 nel polinomio $P^{(11)}$ affinchè *potesse* essere divisibile per $D^{(7)}$, basterà nell'ultima colonna della (13)′ sostituire a -2 l'indeterminata α e stabilire l'eguaglianza

$$\alpha + 6 - 32 - 27 = 10$$

da cui si ha $\alpha = 63$. Se tale fosse stato il coefficiente di x^7 nel polinomio $P^{(11)}$, il criterio or applicato per riconoscere la divisibilità di $P^{(11)}$ per $D^{(7)}$ non sarebbe stato decisivo; ma ognun vede che colla sostituzione di 63 a -2 nella tabella (9)′ il primo coefficiente del resto, invece di annullarsi, viene ad acquistare un valore maggiore di 21, il che *basta* per affermare che neppure in quel caso il polinomio $P^{(11)}$ sarebbe stato divisibile per $D^{(7)}$.

Notiamo inoltre che, *purchè rimanga inalterato il divisore* $D^{(7)}$, la tabella (8)', preparata nell'ipotesi che il grado del dividendo sia $n = 11$, potrà evidentemente essere utilizzata per i dividendi di grado minore, colla semplice soppressione di una o più delle ultime linee; e per i dividendi di grado maggiore coll'aggiunta di nuove linee che seguano l'ultima.

5.

Quanto semplici resultano le forme (12) e (2) del quoziente e del resto, e facile il passaggio dalla prima alla seconda, se si adottano i coefficienti simbolici $b_s^{(h)}$, altrettanto l'una e l'altra si complicano quando si vogliano esprimere coi coefficienti effettivi del divisore. Un esempio n'è già stato dato (n.° 1) nella forma esplicita trovata per il resto della divisione del polinomio $P^{(4)}$ per $D^{(2)}$. Tuttavia, per quel che concerne l'espressione del quoziente (e conseguentemente quella del resto), deducendosi dalle (5), o dalla sola ispezione dello schema (14), la relazione

$$(16) \quad b_1^{(h)} = b_1\, b_1^{(h-1)} + b_2\, b_1^{(h-2)} + b_3\, b_1^{(h-3)} + \ldots\ldots + b_h\, b_1 + b_{h+1}$$

si potrà, se h non è molto grande, valersi di questa per calcolare successivamente i valori delle $b_1^{(h)}$. Così, per esempio, dando ad h i valori di 1, 2, 3, 4, e sostituendo al simbolo $b_1^{(0)}$ il suo valore b_1, si trova:

$$b_1^{(1)} = b_1^2 + b_2$$
$$b_1^{(2)} = b_1^3 + 2\, b_1\, b_2 + b_3$$
$$b_1^{(3)} = b_1^4 + 3\, b_1^2\, b_2 + 2\, b_1\, b_3 + b_2^2 + b_4$$
$$b_1^{(4)} = b_1^5 + 4\, b_1^3\, b_2 + 3\, b_1^2\, b_3 + 3\, b_1\, b_2^2 + 2\, b_1\, b_4 + 2\, b_2\, b_3 + b_5,$$

e, come si riconosce subito, questi valori sono sufficienti per istabilire le forme complete del quoziente e del resto della divisione di un polinomio

$$P^{(11)} = a_0 x^{11} + a_1 x^{10} + \ldots\ldots + a_{10} x + a_{11}$$

per

$$D^{(7)} = x^7 - b_1 x^6 - \ldots\ldots - b_6 x - b_7.$$

In generale, le $b_1^{(h)}$ dipendendo razionalmente dai coefficienti del divisore $D^{(r)}$, sono funzioni simmetriche delle radici dell'equazione $D^{(r)} = 0$; e conviene ricorrere alla teoria di queste funzioni per rendersi conto *a priori* della forma semplificata che compete a *una qualunque* di esse espressa mediante i coefficienti di $D^{(r)}$. Già è stato riconosciuto che le $b_1^{(h)}$, quali funzioni delle radici dell'equazione $D^{(r)} = 0$, s'identificano colle cosidette funzioni *omogenee complete* (o *simmetriche complete*) di r elementi, e ne sono state dimostrate molte importanti proprietà valendosi all'uopo delle feconde teoriche dei determinanti e delle equazioni differenziali.

Nonpertanto, come forse proveremo in un'altra occasione, le prime proprietà fondamentali di quelle funzioni possono essere dimostrate anche più elementarmente col sussidio della formula (16) sopra stabilita e di qualche altro teorema relativo alla divisione algebrica.

E. Sadun.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Notarella di aritmetica. — 1. Dei numeri decimali periodici semplici $0,[a]$; $0,[b]$; $0,[c]$; $0,[d]$; ..... sieno i periodi

(1) . . . . $a, \quad b, \quad c, \quad d, \ldots\ldots$

composti rispettivamente di

(2) . . . . $m, \quad n, \quad p, \quad q, \ldots\ldots$

cifre. Dai numeri (1) se ne formino altrettanti, ciascuno di $mnpq\ldots\ldots$ cifre, scrivendo consecutivamente quante volte occorra ciascun periodo. (In casi determinati il numero $mnpq\ldots\ldots$ può essere il minimo comune multiplo degli altri (2)). Sieno così fatti numeri indicati rispettivamente con

(3) . . . . $e, \quad h, \quad k, \quad l, \ldots\ldots$;

allora le generatrici dei periodici dati, saranno:

$$(4) \ldots\ldots \quad \frac{e}{99\ldots9}, \quad \frac{h}{99\ldots9}, \quad \frac{k}{99\ldots9}, \quad \frac{l}{99\ldots9}, \ldots\ldots$$

e la somma di queste sarà:

$$\frac{e+h+k+l+\ldots\ldots}{99\ldots9},$$

ritenendo in tutte codeste frazioni il denominatore costituito da $mnpq\ldots\ldots$ cifre eguali a 9. Se il numero $e+h+k+l+\ldots\ldots$ abbia più di $mnpq\ldots\ldots$ cifre, si indichi con s quello formato dalle $mnpq\ldots\ldots$ prime cifre a destra e con r l'altro costituito dalle rimanenti a sinistra, rispetto a chi legge. Si può quindi porre:

$$\frac{e+h+k+l+\ldots\ldots}{99\ldots9}=\frac{r\,.\,10^{mnpq\ldots\ldots}+s}{99\ldots9}=r+\frac{s+r}{99\ldots9}\,.$$

Se anche il numero $s+r$ abbia più di $mnpq\ldots\ldots$ cifre, scomponendolo in due analoghe parti $r_1\,.\,10^{mnpq\ldots\ldots}$ ed s_1, si potrà porre

$$\frac{e+h+k+l+\ldots\ldots}{99\ldots9}=r+r_1+\frac{s_1+r_1}{99\ldots9}\,.$$

Così continuando, prima o poi si giungerà ad un numero s_x+r_x di sole $mnpq\ldots\ldots$ cifre; avendo così:

$$(\alpha)\qquad \frac{e+h+k+l+\ldots\ldots}{99\ldots9}=r+r_1+r_2+\ldots\ldots+r_x+\frac{s_x+r_x}{99\ldots9}\,.$$

Se ne conclude che il numero *somma* dei periodici dati ha la parte intera $r+r_1+r_2+\ldots\ldots+r_x$ ed il periodo s_x+r_x.

Nota. Il periodo potrebbe risultare di un numero minore di cifre; ed allora s_x+r_x è formato da quello ripetuto alcune volte.

2. Si considerino ora i numeri periodici semplici $x,[a]$; $y,[b]$; $z,[c]$; $u,[d]$. Ritenendo le notazioni precedenti, di leggeri si riscontra essere le generatrici loro rispettivamente

$$x+\frac{e}{99\ldots9}\,;\quad y+\frac{h}{99\ldots9}\,;\quad z+\frac{k}{99\ldots9}\,;\quad u+\frac{l}{99\ldots9}\,.$$

La somma dunque dei numeri decimali proposti sarà:

$$S=x+y+z+u+r+\frac{s+r}{99\ldots9}\,;$$

e quando si ponga $x+y+z+u+r=w$, anche si avrà:

$$(\beta)\ \ldots\ldots\ldots\ S=w+\frac{s+w-(x+y+z+u)}{99\ldots9}\,.$$

Le formule (α) e (β) esprimono due regole *pratiche* per calcolare la somma di quanti si vogliano numeri decimali periodici semplici, senza aver ricorso alle loro generatrici. Anche ne consegue la regola per moltiplicare un numero periodico semplice per un intero qualunque.

Esempi:

1° $0,[924]+0,[87]+0,[6]$; calcolata la somma $924924+878787+666666=2470377$ e l'altra $470377+2=470379$, si conclude essere $0,[924]+0,[87]+0,[6]=2,[470379]$.

2° $0,[43]\times 348$; calcolato il prodotto $43\times 348=14964$ e la somma $149+64=213$ e l'altra $2+13=15$, il prodotto cercato sarà $0,[43]\times 348=(149+2),[15]=151,[15]$.

Corollario. Il prodotto di un periodico semplice per 10^m è un altro periodico semplice la cui parte intera si ha spostando la virgola nel dato di m posti a destra, ed il cui periodo si ottiene scrivendo di seguito alle rimanenti cifre del periodo quelle che colla virgola ne furono separate. Cioè

$$8,[7562] \times 10^3 = 8756,[2756].$$

3. Con un semplice cambiamento di unità si può dedurre dalla regola precedente quella per calcolare la somma di periodici misti, quando l'antiperiodo sia costituito in tutti dallo stesso numero di cifre. Ed invero se nei periodici $0,x[a]$; $0,y[b]$; $0,z[c]$; $0,u[d]$, sieno gli antiperiodi costituiti da m cifre, essi riferiti all' unità $\frac{1}{10^m}$ saranno rappresentati da:

$$x,[a]; \quad y,[b]; \quad z,[c]; \quad u,[d].$$

Di questi allora calcolata la somma

$$S = w,[s + w - x - y - z - u]$$

si avrà quella dei numeri dati ritornando dall'unità $\frac{1}{10^m}$ all' intera.

G. Ingrami.

Alcuni teoremi affini di geometria. (*Continuazione,* *v. p. 147*). — Teorema. *Se in un triangolo due angoli sono diseguali, la bisettrice dell' angolo maggiore divide il lato opposto in due segmenti tali che il rettangolo da essi contenuto è maggiore del rettangolo contenuto dai segmenti determinati dalla bisettrice dell'angolo minore sul lato opposto.*

Sia ABC il dato triangolo e vi si supponga l'angolo ACB maggiore di CAB e conseguentemente $AB > BC$. Posto, come il solito, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, s'indichino con c_1 e c_2 le lunghezze dei segmenti AD, DB in cui il lato AB è diviso dalla bisettrice CD, e con a_1 e a_2 le lunghezze dei segmenti BE, EC determinati dalla bisettrice AE sul lato BC.

È ben noto che $c_1 = \frac{bc}{a+b}$, $c_2 = \frac{ac}{a+b}$ e che perciò $c_1 c_2 = \frac{abc^2}{(a+b)^2}$.

Analogamente si trova $a_1 a_2 = \frac{cba^2}{(c+b)^2}$, e se ne deduce che

$$\frac{c_1 c_2}{a_1 a_2} = \frac{c(c+b)^2}{a(a+b)^2}.$$

Ma dall'essere $c > a$, resulta $c(c+b)^2 > a(a+b)^2$ e quindi è anche

(1) . . . . $c_1 c_2 > a_1 a_2$ c. d. d..

Corollario 1. *La bisettrice dell'angolo maggiore è minore della bisettrice dell'angolo minore.*

Indicando con β_1 e β_3 rispettivamente le lunghezze delle bisettrici AE, CD si sa che

$$cb = \beta_1^2 + a_1 a_2 \quad , \quad ab = \beta_3^2 + c_1 c_2 ;$$

e poichè insieme con $c > a$, si ha $cb > ab$, sussisterà la diseguaglianza

$$\beta_1^2 + a_1 a_2 > \beta_3^2 + c_1 c_2 ,$$

e, a causa della (1), sarà pure

$$\beta_1^2 > \beta_3^2 \qquad \text{e} \qquad \beta_1 > \beta_3 .$$

Corollario II. *Se le bisettrici di due angoli di un triangolo sono uguali, il triangolo è isoscele.*

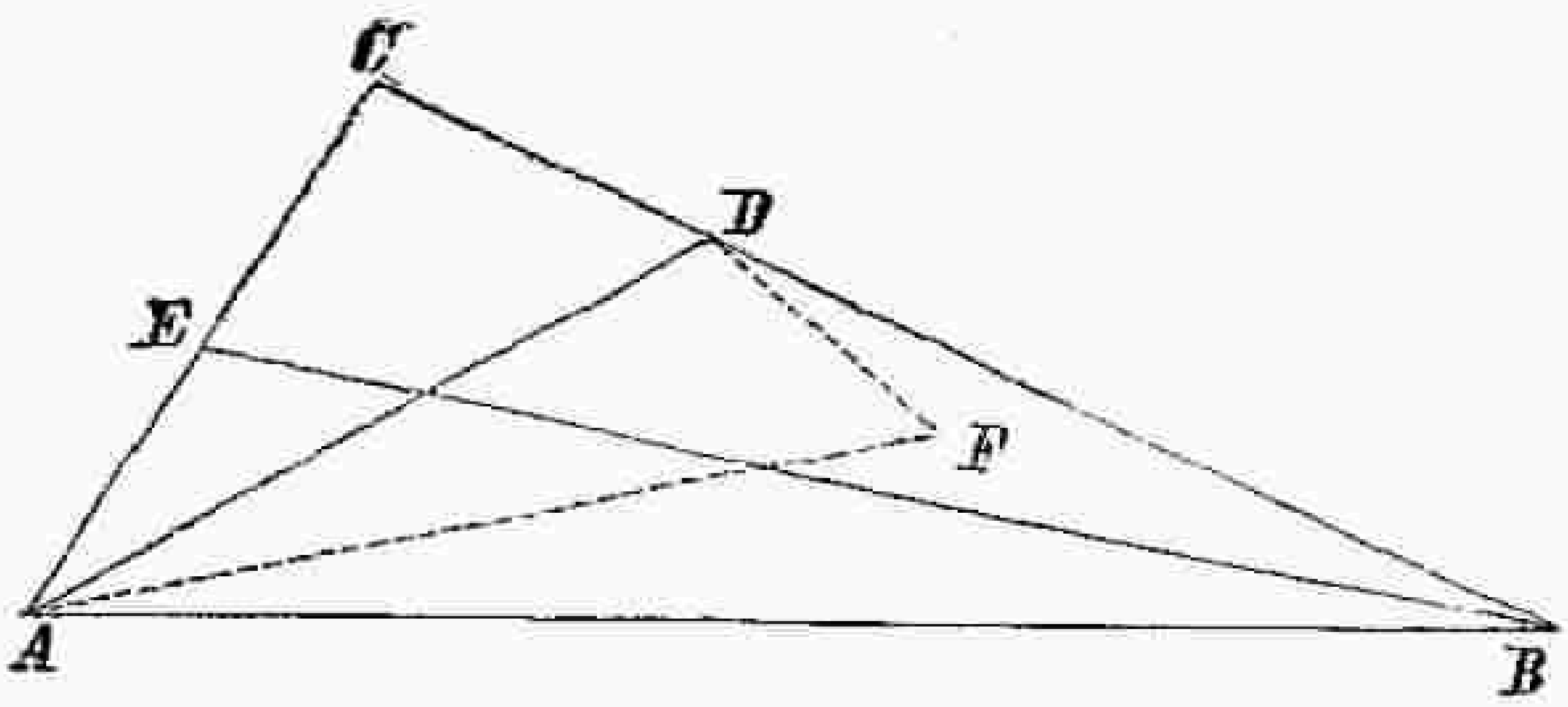
E. Sadun.

Teorema 1°. *Se due triangoli aventi la base comune ed il terzo vertice dell'uno situato nell'interno dell'altro, sono tali che la somma degli angoli opposti alla base comune è minore di due retti, dei lati non comuni che vanno ad uno stesso vertice, e che appartengono ai due diversi triangoli, è maggiore quello che appartiene al triangolo esterno.*

Sieno ACB, ADB i due triangoli dati e D cada nell'interno del triangolo ACB: si unisca C con D. Se fosse $AD \geqq AC$, sarebbe ang. $ACD \geqq ADC$ e quindi ang. $ACB > ADC$, perchè è ang. $ACB > ACD$. Ma essendo ang. $ADC + ADB + CDB = 4$ Retti e ang. $CDB < 2$ Retti, deve essere ang. $ADC + ADB > 2$ Retti. Dunque se fosse $AD \geqq AC$ sarebbe ang. $ACB + ADB > 2$ Retti contro l'ipotesi, e deve perciò aversi $AD < AC$ e analogamente $DB < CB$.

Teorema 2°. *Se due angoli di un triangolo sono disuguali, la bisettrice dell'angolo maggiore è minore della bisettrice dell'angolo minore.*

Sia ABC il triangolo dato avente l'angolo CAB maggiore dell'angolo CBA, e sieno AD, BE rispettivamente le bisettrici di questi angoli. Avremo ang. $CAD = DAB > CBE = EBA$, e poichè ang. $AEB = ACB + CBE$ e ang. $BDA = ACB + CAD$ sarà ang. $AEB < BDA$. Costruiscasi l'angolo DAF eguale all' angolo EBA



e l'angolo ADF eguale all'angolo AEB. Risulterà l'angolo AFD eguale all' angolo CAB. Il triangolo ADF avrà la base comune col triangolo ABD ed il vertice F nell'interno di questo triangolo, e poichè ang. $CAB + DBA <$ 2 Retti sarà anche $AFD + DBA <$ 2 Retti e pel teorema precedente dovrà aversi $AF < AB$.

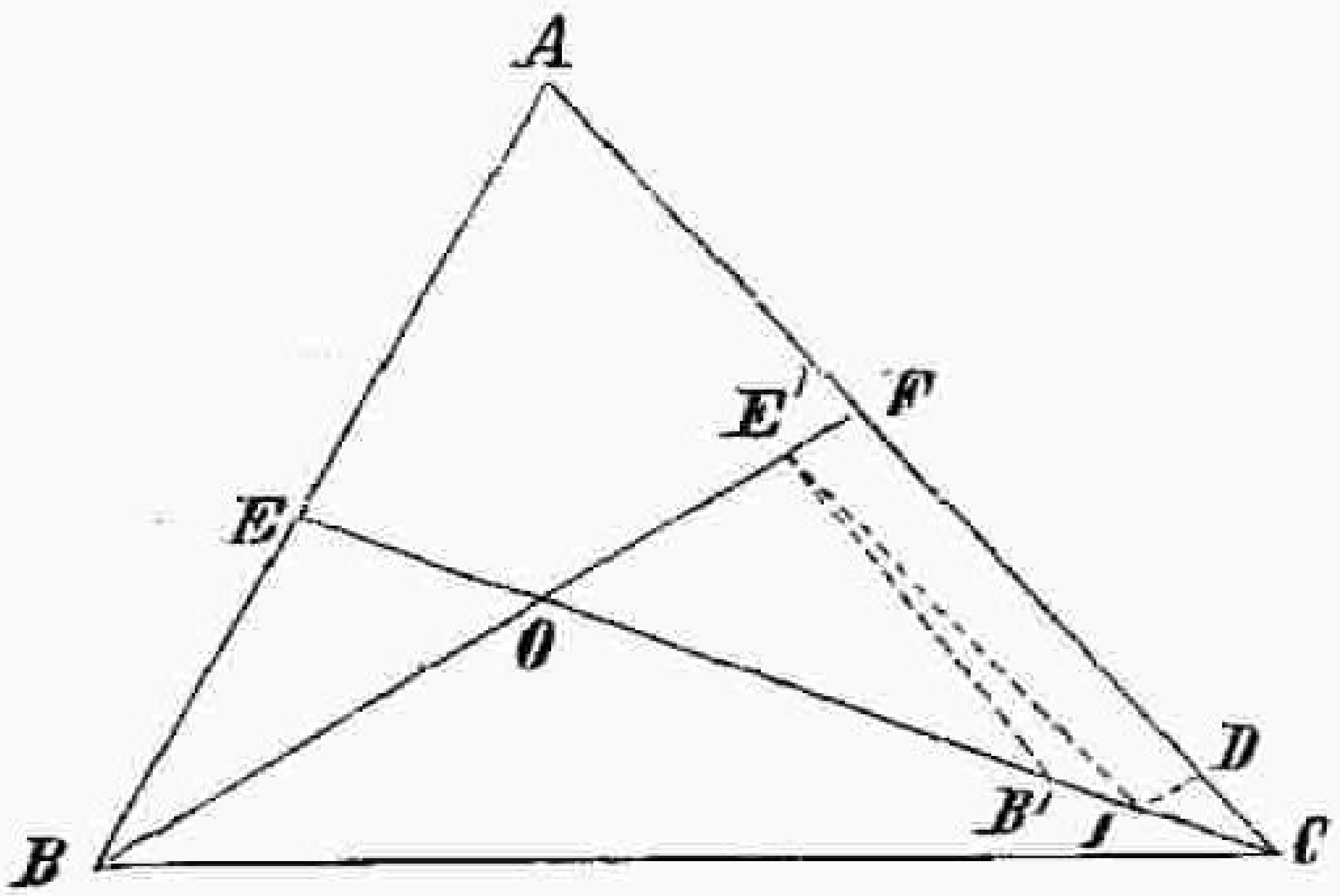
Ma AF ed AB sono due lati omologhi dei triangoli simili AFD, AEB e perciò per gli altri due lati omologhi AD, EB si avrà pure $AD < EB$; cioè la bisettrice dell'angolo maggiore è minore di quella dell'angolo minore.

Corollario. — *Se un triangolo ha eguali le bisettrici di due suoi angoli, il triangolo è isoscele.* C. Soschino.

Teorema. *Se i segmenti* BF *e* CE *delle bisettrici degli angoli* ABC *e* ACB *sono eguali, anche gli angoli* ABC *e* ACB *saranno eguali ed il triangolo* ABC *è isoscele.*

Pongo ang. $OBC = \alpha$, ang. $BCO = \beta$, ang. $OEB = r$, ang. $CFO = r'$.

Dico essere $BO = OC$. Se ciò non fosse sul segmento maggiore OC prendo, a partire da O, $OB' = OB$, ed analogamente sul segmento $OF > OE$ prendo $OE' = OE$ e tiro la $E'B'$. Poichè $OC > OB$ sarà $\alpha > \beta$, e nei due triangoli BEO ed OFC sarà $r < r'$, perchè ang. $EOB = FOC$. Per la costruzione precedentemente fatta, i due triangoli BEO ed $OE'B'$ sono eguali e quindi $r = OE'B'$, ma $r < r'$ dunque ang. $OE'B' < r'$. Da ciò si conchiude che se da E' si conduce la parallela ad AC essa cade nell'interno del quadrilatero $E'FCB'$, ossia come si vede disegnata nella figura. Se da I si conduce la parallela ad $E'F$ si otterrà il parallelogrammo $E'IDF$ e quindi $ID = E'F$, ma poichè $BE' = EB'$ sarà $E'F = B'C$ ossia $IC < ID$; ed allora considerando il triangolo IDC sarà $\beta >$ ang. IDC ma ang. $IDC = r'$ dunque $\beta > r'$, e siccome $\alpha > \beta$ a più forte ragione $\alpha > r'$, risultato evidentemente assurdo perchè r' è angolo esterno del triangolo BAF, dunque $BO = OC$, ossia $\alpha = \beta$ ovvero ang. $ABC = ACB$ c. b. d.. A. Martone.



Nota della Red. — Del teorema « Se in un triangolo due bisettrici sono uguali, il triangolo è isoscele », possono leggersi delle dimostrazioni, fondate sui primi tre libri d' Euclide, alle pag. 147-149 dell'anno 3°, 1889, del *Bulletin Scientifique* redatto dal Sig. Prof. E. Lebon. — Risalendo ad epoca più remota, giova ricordare che il teorema ora citato fu nel 1840 proposto a Steiner dal Lehmus, professore a Berlino, colla preghiera di averne una dimostrazione sintetica: donde il nome di *teorema di Lehmus* sotto cui è noto. Negli anni 1840-55 nei periodici tedeschi, francesi ed inglesi ne apparvero tante dimostrazioni che il Clausen diceva che quella proposizione possedeva una letteratura sua propria come il teorema di Pitagora e la teoria delle parallele. Nel solo *Archiv* di Grunert si trovano 13 dimostrazioni; un'altra fu data dal Reuschle (*Programmabhandlung* von 1850), altre tre si leggono nelle *Mathematische Unterhaltung* del D.r Riecke (I Heft 1867 p. 38, II Heft 1868 p. 48). Essa venne poi generalizzata dallo Zech (*Archiv* cit. XVI), sostituendo alle bisettrici le rette che dividono due angoli nello stesso rapporto.

Tema di matematica per la licenza dagli Istituti tecnici (Sessione d'ottobre). — *Dal vertice* A *di un rettangolo* ABCD *si abbassi la perpendicolare* AM *sulla diagonale* BD, *e dal piede* M *si conducano le perpendicolari* MP, MQ *sui lati* CB, CD. *Posto* $BD = d$, $MP = p$, $MQ = q$, *dimostrare che* $p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{2}{3}}$.

Prolunghisi PM ad incontrare AD in H, dal triangolo rettangolo AMD, si ha:

$$\overline{DM}^2 = AD\,.\,DH = BC\,.\,q \quad , \quad \overline{MH}^2 = \overline{DQ}^2 = AH\,.\,HD = BP\,.\,q. \quad [1]$$

Dai triangoli simili BDC, BMP, MDQ segue poi: $BC : q = d : MD$, $BP : q = p : QD$, da cui ricavasi $BC = \dfrac{qd}{MD}$, $BP = \dfrac{qp}{QD}$. Sostituendo rispettivamente in [1], si ottiene subito $\overline{DM}^3 = q^2\,.\,d$, $\overline{DQ}^3 = q^2\,.\,p$ e quindi:

$$DM = \sqrt[3]{q^2\,.\,d}\,, \qquad DQ = \sqrt[3]{q^2\,.\,p}\,, \qquad MQ = \sqrt[3]{q^2\,.\,q}\,.$$

Applicando ora il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo MDQ, si ha:

$$\left(\sqrt[3]{q^2\,.\,d}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{q^2\,.\,p}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{q^2\,.\,q}\right)^2$$

da cui, eliminando il fattor comune $\left(\sqrt[3]{q^2}\right)^2$, segue la relazione richiesta.

Osservazione. — Prolungata pure QM, ad incontrare AB in L, e posto $MH = x$, $ML = y$, dai triangoli rettangoli AMB, DMA si ha: $p = y^2 : x$, $q = x^2 : y$ e la relazione proposta diviene $y\sqrt[3]{y : x^2} + x\sqrt[3]{x : y^2} = \sqrt[3]{d^2}$ la quale rappresenta, in coordinate ortogonali x e y, il luogo dei piedi delle perpendicolari condotte dall'origine sopra un segmento di lunghezza costante d che si muove mantenendo i suoi estremi sugli assi coordinati.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 111, 113, 128*, 129* e 131*.

111. *Posto*

$$\alpha_n = (2a)^n + (n-1)(2a)^{n-2}\,.\,b + \frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}(2a)^{n-4}\,.\,b^2 + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}(2a)^{n-6}\,.\,b^3 + \ldots\ldots,$$

con $a > 0$ *e* $b > 0$, *dove il secondo membro deve finire col termine* $b^{\frac{n}{2}}$ *se* n *è pari e col termine* $\dfrac{n+1}{2}\,.\,2a\,.\,b^{\frac{n-1}{2}}$ *se* n *è dispari, si ha:*

$$\sqrt{a^2+b} = a - 1 + \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n + b\,.\,\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$$

e la differenza tra $\sqrt{a^2+b}$ *ed* $a - 1 + \dfrac{\alpha_n + b\,\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$ *è minore di* $\dfrac{b^n}{\alpha_{n-1}\,.\,\alpha_n}$.

(F. GIUDICE).

Soluzione del Sig. Prof. *S. Catania.*

Moltiplicando α_n per $2a$ ed α_{n-1} per b, poi addizionando, sia n pari o dispari, con un procedimento analogo a quello che si legge a pag. 154, 155 di questo giornale, si ritrova

$$2a\,.\,\alpha_n + b\,.\,\alpha_{n-1} = \alpha_{n+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

Posto ciò, ricorrendo alla trasformazione di $\sqrt{a^2+b}$ in frazione continua, si ha, com'è noto:

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [2]$$

Le prime ridotte di questa continua sono:

$$\frac{a}{1},\quad \frac{a\,.\,2a+b}{2a},\quad \frac{a[(2a)^2+b]+2a\,.\,b}{(2a)^2+b},\quad \frac{a[(2a)^3+2(2a)\,.\,b]+b[(2a)^2+b]}{(2a)^3+2(2a)\,.\,b},$$

ed hanno la forma:

$$\frac{a\alpha_0 + b\,.\,0}{\alpha_0},\quad \frac{a\,.\,\alpha_1 + b\,.\,\alpha_0}{\alpha_1},\quad \frac{a\,.\,\alpha_2 + b\,.\,\alpha_1}{\alpha_2},\quad \frac{a\alpha_3 + b\alpha_2}{\alpha_3},$$

dove ad α_k è da attribuirsi il significato che ha nell'enunciato della quistione proposta; dimostrerò che ciò vale per tutte. Infatti per la legge di formazione delle ridotte delle frazioni continue della forma [2], posto che le ridotte k^{esima} e $(k+1)^{\text{esima}}$ siano $\dfrac{a\,.\,\alpha_{k-1}+b\,.\,\alpha_{k-2}}{\alpha_{k-1}}$ e $\dfrac{a\,.\,\alpha_k+b\,.\,\alpha_{k-1}}{\alpha_k}$, la ridotta $(k+2)^{\text{esima}}$ sarà:

$$\frac{2a[a\,.\,\alpha_k + b\,.\,\alpha_{k-1}] + b[a\,.\,\alpha_{k-1} + b\,.\,\alpha_{k-2}]}{2a\,.\,\alpha_k + b\alpha_{k-1}} =$$

$$\frac{a[2a\,.\,\alpha_k + b\,.\,\alpha_{k-1}] + b[2a\,.\,\alpha_{k-1} + b\,.\,\alpha_{k-2}]}{2a\,.\,\alpha_k + b\,.\,\alpha_{k-1}}.$$

E questa espressione, in virtù della [1], può scriversi $\dfrac{a\,.\,\alpha_{k+1}+b\,.\,\alpha_k}{\alpha_{k+1}}$.

Adunque:

$$\sqrt{a^2+b} = \lim_{n=\infty} \frac{a\,.\,\alpha_n + b\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = \lim_{n=\infty}\left(a - 1 + \frac{\alpha_n + b\,.\,\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right) =$$

$$a - 1 + \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n + b\,.\,\alpha_{n-1}}{\alpha_n}.$$

Per dimostrare la seconda parte del teorema proposto, si rammenti che se si ha la frazione continua

$$\cfrac{\beta_1}{\gamma_1 + \cfrac{\beta_2}{\gamma_2 + \ldots\ldots}}$$

la differenza fra le ridotte di ordine n ed $n-1$ è una frazione ordinaria il cui numeratore in valore assoluto è $\beta_1\,.\,\beta_2\,.\ldots.\,\beta_n$, e il denominatore è uguale al prodotto dei denominatori delle due ridotte. Nel caso nostro, essendo $\beta_1 = \beta_2 = \ldots\ldots = \beta_n = b$, la differenza fra la ridotta $\frac{a \cdot \alpha_n + b \cdot \alpha_{n-1}}{\alpha_n}$ e la precedente è $\frac{b^n}{\alpha_{n-1} \cdot \alpha_n}$, e quindi $\sqrt{a^2+b}$, che è compresa fra le medesime ridotte, differirà da $\frac{a \cdot \alpha_n + b \cdot \alpha_{n-1}}{\alpha_n}$, cioè da $a - 1 + \frac{\alpha_n + b \cdot \alpha_{n-1}}{\alpha_n}$, per meno di $\frac{b^n}{\alpha_{n-1} \cdot \alpha_n}$.

Osservazione. — Se $a = 1$, $b = 1$, si ha:

$$\sqrt{2} = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}}{\alpha_n},$$

che rappresenta il teorema 110°.

113. *Dimostrare che l'equazione*

$$A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0,$$

in cui è

$$\begin{aligned}
A_4 &= m^5 - l m^3 n + m^2 l^4, \\
A_3 &= 4 m^4 n - 3 l m^2 n^2 - 11 m^3 l^3 + 2 m n l^4, \\
A_2 &= 6 m^3 n^2 - 3 m n^3 l + 64 m^4 l^2 - 49 l^3 n m^2 + n^2 l^4, \\
A_1 &= 4 m^2 n^3 - n^4 l + 128 m^3 n l^2 - 65 m n^2 l^3, \\
A_0 &= m n^4 + 64 m^2 n^2 l^2 - 27 l^3 n^3,
\end{aligned}$$

ha due radici eguali, ed esprimere queste e l'altre radici in funzione di l, m, n.

(D. Besso).

Dimostrazione del Sig. Prof. *G. Rozzolino.*

Pongasi

$$f(x) = A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0.$$

La prima derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = 4 A_4 x^3 + 3 A_3 x^2 + 2 A_2 x + A_1,$$

e se $f(x) = 0$ ha una radice doppia, α, si dovrà avere

$$\frac{A_0}{A_4} = \alpha^2 \beta \gamma,$$

dove β e γ sono le rimanenti due radici di $f(x) = 0$; inoltre sappiamo che α dovrà essere radice semplice di $f'(x) = 0$, e quindi sarà

$$\frac{A_1}{4 A_4} = -\alpha \delta \varepsilon,$$

dove δ ed ε sono le rimanenti radici di $f'(x) = 0$.

Ora si ha:

$$\begin{aligned}
A_0 &= n^2 (m n^2 + 64 m^2 l^2 - 27 l^3 n) = n^2 A_0', \\
A_1 &= n (4 m^2 n^2 - n^3 l + 128 m^3 l^2 - 65 m n l^3) = n A_1', \\
A_4 &= m^2 (m^3 - l m n + l^4) = m^2 A_4',
\end{aligned}$$

ove manifestamente nessun fattore (razionale) di $\frac{A_1'}{4mA_4'}$, può essere fattore quadratico (razionale) di $\frac{A_0'}{A_4'}$. Perciò si deve avere:

$$\alpha = \pm \frac{n}{m}.$$

La scelta del segno si può fare con un caso particolare; per es. ponendo $l = m = n = 1$, si trova $\alpha = -1$, e quindi in generale dev'essere $\alpha = -\frac{n}{m}$.

È facilissimo verificare che effettivamente si ha:

$$f\left(-\frac{n}{m}\right) = 0 \quad , \quad f'\left(-\frac{n}{m}\right) = 0,$$

e che quindi $-\frac{n}{m}$ è radice doppia di $f(x) = 0$.

Le rimanenti radici β e γ soddisferanno un'equazione di 2.° grado $ax^2 + bx + c = 0$, che si potrà determinare ponendo identicamente

$$f(x) = (mx + n)^2 (ax^2 + bx + c);$$

il che dà:

$$\begin{array}{rcl} am^2 = A_4 & \text{donde} & a = m^3 - lmn + l^4; \\ 2amn + bm^2 = A_3 & \text{donde} & b = 2m^2n - ln^2 - 11 l^3 m; \\ cn^2 = A_0 & \text{donde} & c = mn^2 + 64 l^2 m^2 - 27 l^3 n. \end{array}$$

Un'ulteriore ricerca sarebbe inutile, perchè β e γ sono certamente irrazionali in l, m ed n; infatti è evidente che nè a nè c sono decomponibili in fattori razionali.

Dimostrazione del Sig. Prof. *S. Catania.*

L'equazione proposta si può scrivere nel seguente modo:

$$mn^4 \left[\left(\frac{mx}{n}\right)^4 + 4\left(\frac{mx}{n}\right)^3 + 6\left(\frac{mx}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{mx}{n}\right) + 1\right]$$
$$- ln^4x \left[\left(\frac{mx}{n}\right)^3 + 3\left(\frac{mx}{n}\right)^2 + 3\left(\frac{mx}{n}\right) + 1\right]$$
$$+ l^4n^2x^2 \left[\left(\frac{mx}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{mx}{n}\right) + 1\right] + 64 l^2m^2n^2 \left[\left(\frac{mx}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{mx}{n}\right) + 1\right]$$
$$- l^3n^3 \left[49\left(\frac{mx}{n}\right)^2 + 27 + 11\left(\frac{mx}{n}\right)^3 + 65\left(\frac{mx}{n}\right)\right] = 0;$$

ovvero:

$$mn^4\left(\frac{mx}{n} + 1\right)^4 - ln^4x\left(\frac{mx}{n} + 1\right)^3 + \left(l^4n^2x^2 + 64 l^2m^2n^2\right)\left(\frac{mx}{n} + 1\right)^2$$
$$- l^3n^3\left[49\left(\frac{mx}{n}\right)^2 + 27 + 11\left(\frac{mx}{n}\right)^3 + 65\left(\frac{mx}{n}\right)\right] = 0.$$

La quantità chiusa nell'ultima parentesi quadra si può scrivere successivamente:

$$11\left(\frac{mx}{n}\right)^3+22\left(\frac{mx}{n}\right)^2+11\left(\frac{mx}{n}\right)+27\left(\frac{mx}{n}\right)^2+54\left(\frac{mx}{n}\right)+27$$
$$=11\,\frac{mx}{n}\left(\frac{mx}{n}+1\right)^2+27\left(\frac{mx}{n}+1\right)^2=\left(11\,\frac{mx}{n}+27\right)\left(\frac{mx}{n}+1\right)^2.$$

Sostituendo, mettendo in evidenza il fattor comune $\left(\frac{mx}{n}+1\right)^2$, riducendo e ordinando, si ha:

$$\left(\frac{mx}{n}+1\right)^2[(m^3-lmn+l^4)x^2+(2m^2n-11l^3m-ln^2)x+64l^2m^2+mn^2-27l^2n]=0.$$

Sotto questa forma si scorge subito che l'equazione proposta ammette la radice doppia $x=-\frac{n}{m}$, e le altre due saranno espresse da:

$$\frac{A\pm l\sqrt{B}}{2C},$$

in cui è:

$$A=-2m^2n+11l^3m+ln^2,$$
$$B=-256m^5+320m^3ln^2-135m^2l^4-90ml^2n^2+n^4+108l^5n,$$
$$C=m^3-mln+l^4.$$

128*. *Divisa la corda* AB *di un arco in tre parti uguali* AI = IE = EB *e condotti i raggi* **OIM, OEN,** *dimostrare che il coseno dell'angolo medio, cioè* $\cos \mathrm{IOE}=\frac{4+5\cos\alpha}{5+4\cos\alpha}$, *essendo angolo* AOB = α *l'angolo al centro.*

(G. Bellacchi).

Dimostrazione dei Sigg. *G. Candido*, licenziato dal R. Liceo di Lecce; *V. Columbo*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari; *E. G. Ricci*, alunno del R. Liceo di Bari; *G. Russi Ruggi*, alunno del R. Istituto tecnico di Foggia (*).

Condotta da O la perpendicolare OH alla corda AB, dai triangoli rettangoli OHA, OHI si ha $AH=3.IH=OH\tan\frac{\alpha}{2}$, $IH=OH\tan\frac{IOE}{2}$.

Eliminando OH da queste due relazioni, si ricava:

$$3\tan\frac{IOE}{2}=\tan\frac{\alpha}{2}\;\ldots\ldots\ldots\;[1]$$

che sotto forma diversa da quella richiesta è la relazione domandata. Per ridurla alla forma voluta si rammenti che $\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, per cui quadrando [1] si ha:

$$9\,\frac{1-\cos IOE}{1+\cos IOE}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

(*) Soluzioni meno dirette pervennero dai Sigg. *E. de Vito* (licenziato dal R. Ist. tec. Roma), *L. Perrotti* (R. Ist. tec. Aquila), *F. Restucci* (R. Ist. tec. Napoli), *G. Trapani* (licenziato dal R. Ist. nautico Catania).

e, riducendo a forma intera, e, semplificando:

$$4 + 5\cos\alpha - 5\cos IOE - 4\cos\alpha \,.\, \cos IOE = 0\,,$$

da cui, ricavando $\cos IOE$, risulta:

$$\cos IOE = \frac{4 + 5\cos\alpha}{5 + 4\cos 4}\,.$$

129' *Di un pentagono* ABCDE *si conoscono i lati* AB = a, BC = CD = 2 a, DE = 3 a, EA = 4 a *e gli angoli* EAB = BCD = 120°, *si calcolino gli altri elementi per la sola geometria.* (G. Bellacchi).

Risposta dei Sigg. *V. Columbo*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari, ed *E. G. Ricci*, alunno del R. Liceo di Bari (*).

Condotta da E la EF perpendicolare ad AB, a tagliare il prolungamento di BA in F, essendo l'angolo EAB di 120°, l'angolo FAE sarà di 60° onde $FA = EA : 2 = 2a$, $EF = 2a\sqrt{3}$ ed $FB = FA + AB = 3a$. Se poi si osservi che la diagonale DB è il lato di un triangolo equilatero inscritto in un cerchio di raggio $BC = CD = 2a$, risulta $DB = 2a\sqrt{3}$. Così il quadrilatero $EFBD$ ha i lati opposti uguali e l'angolo EFB retto, quindi esso è rettangolo, ossia DB è perpendicolare ad AB e DE. Dopo ciò è evidente che angolo $ABC = CDE = 120°$ e angolo $DEA = 60°$.

I Sigg. *E. de Vito*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Roma e *G. Trapani*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Catania, nel rispondere a questa quistione, calcolano pure le lunghezze delle diagonali trovando oltrechè $BD = 2a\sqrt{3}$, $BE = a\sqrt{21}$, $AD = a\sqrt{13}$, $AC = a\sqrt{7}$, $EC = a\sqrt{19}$.

Come genesi della figura il Sig. *G. Candido*, allievo del R. Liceo di Lecce, fa osservare ch'essa poteva ottenersi da un parallelogrammo di lati a e $4a$ ed angolo compreso di 60°, sopra di un lato maggiore del quale sia costruito un semiesagono regolare, il Sig. *G. F. Farruggio*, alunno del R. Istituto nautico di Catania, nota che il pentagono considerato può ottenersi da un triangolo equilatero di lato $5a$ da un angolo del quale sia staccato un triangolo simile di lato $2a$ e da un altro angolo un triangolo equilatero di lato a, finalmente il Sig. *E de Vito* nota che si origina la stessa figura costruendo un parallelogrammo di lati $4a$ e $3a$ ed angolo compreso di 60°, poi staccando da un angolo acuto un triangolo equilatero di lato $2a$.

131' *Le potenze di un intero* a *qualsivoglia, sono sempre esprimibili mediante la somma di* a *termini consecutivi della serie dei numeri dispari.*

(F. P. Paternò).

Dimostrazione del Sig. *G. Candido*, licenziato dal R. Liceo di Lecce.

(*) Altre risposte vennero inviate dai Sigg. *G. Candido*, *E. De Vito*, *G. F. Farruggio*, *L. Perrotti* (R. Ist. tec. Aquila), *G. Trapani*.

È noto che la somma dei primi n numeri dispari è uguale ad n^2, cioè:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(2i-1)=n^2.$$

Ora si ha:

$$n^2=\sum_{i=1}^{i=n}(2i-1)=\sum_{1}^{k}(2i-1)+\sum_{k+1}^{n}(2i-1)=k^2+\sum_{k+1}^{n}(2i-1),$$

quindi:

$$\sum_{i=k+1}^{i=n}(2i-1)=n^2-k^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

la quale uguaglianza dimostra che la differenza dei quadrati di due interi n, k è esprimibile mediante la somma di $n-k$ termini consecutivi della serie dei numeri dispari a partire dal $(k+1)^{\text{esimo}}$ numero dispari.

Ciò posto si ha identicamente:

$$\left(\frac{a^{m-1}+a}{2}\right)^2-\left(\frac{a^{m-1}-a}{2}\right)^2=a^m;$$

epperò per la [1] possiamo conchiudere che a^m è la somma di $\dfrac{a^{m-1}+a}{2}-\dfrac{a^{m-1}-a}{2}$, ossia di a termini consecutivi, della serie dei numeri dispari, a partire dal termine d'ordine $\dfrac{a^{m-1}-a}{2}+1$.

Dimostrazione dei Sigg. *G. F. Farruggio*, alunno del R. Istituto nautico di Catania; *E. de Vito*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Roma; *E. G. Ricci*, alunno del R. Liceo di Bari; *G. Trapani*, licenziato dal R. Istituto nautico di Catania (*).

Pongasi

$$a^m=x+(x+2)+\ldots.+(x+2\,[a-1]);$$

dimostrando che questa relazione, qualunque sia a, è sempre soddisfatta per un valore dispari di x, la quistione proposta resta provata.

La somma al secondo membro è anche uguale ad $ax+\dfrac{a(a-1).2}{2}$, onde uguagliandola ad a^m e semplificando, risulta:

$$a^{m-1}=x+a-1 \qquad \text{donde} \qquad x=a^{m-1}-a+1.$$

Ora quando a sia tanto pari che dispari la differenza $a^{m-1}-a$ è numero pari per cui x è sempre dispari, c. d. p..

(*) Altre dimostrazioni di questa quistione pervennero dai Sigg. *F. Columbo* (R. Ist. tec. Bari) e *D. Pasillo* (R. Ist. tec. Foggia).

QUISTIONI PROPOSTE (*)

141*. Se p è un numero primo maggiore di 3 ed a un numero intero qualunque, dimostrare che la differenza $a^p - a$, è sempre divisibile per $6p$.

F. Giudice.

142*. Nel piano d'un cerchio di diametro AB sia dato un punto M, e coi diametri MA, MB si descrivano due cerchi K ed L, e concentricamente al cerchio AB si descriva un altro cerchio H. Dimostrare che i cerchi K ed L tagliano il cerchio H in quattro punti, vertici d'un quadrangolo completo di cui un punto diagonale è M e un altro cade nella retta AB.

S. Catania.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

E. SADUN e C. SOSCHINO — *Lezioni di aritmetica;* — Elementi della teoria dei numeri interi e frazionari. Ditta G. B. Paravia, 1893 — Prezzo: L. 2,50.

La tessitura di queste lezioni non è la solita dei trattati d'aritmetica razionale, ma vi si discosta in più luoghi dando all'opera un certo carattere d'originalità. E realmente scorrendo con attenzione il libro dei Sigg. Prof. Sadun e Soschino, mentre lo si riconosce subito per un lavoro pensato, fatto con grande cura e lodevolissimo rigore, vi si riscontrano in pari tempo parecchie differenze dai metodi usuali di trattazione che cercherò di porre in rilievo.

Partendo dal concetto che per definire le operazioni sui numeri e dimostrare le principali proprietà di essi, non è necessario di saperli rappresentare con pochi segni o cifre, ma si possono indicare con lettere dell'alfabeto, l'esposizione di un sistema di numerazione, anzichè formare oggetto, come d'ordinario, dei preliminari, è rimandata a più tardi col duplice vantaggio di poter sviluppare una trattazione più generale e di non dover far uso tacitamente fin dal principio, a scapito del rigore, di proprietà da svolgersi dopo.

In seguito a ciò gli aa. limitando i preliminari (Cap. I) a sviluppare il concetto di numero e di numeri consecutivi, ciò che è fatto con grande chiarezza, passano a studiare, nei Cap. II e III, le proprietà fondamentali della somma e differenza, chiarendone prima con esattezza la natura. Le dimostrazioni dei due teoremi simbolicamente espressi dalle uguaglianze $a+(b+c) = (a+b)+c$ e $a+b = b+a$, in base alla data definizione di somma, come più difficili, sono date in due note poste in fine del Cap. II.

Seguono nei capitoli IV e V i teoremi fondamentali relativi ai prodotti ed ai quozienti (esatti). E quivi appoggiandosi ad una corrispondenza che non si può disconoscere e che fu altra volta sviluppata in questo giornale (**), i Sigg. Pro-

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

(**) F. Amodeo. Correlazione fra i teoremi delle operazioni sui numeri interi. *Periodico*, III, pp. 69, 103.

fessori Sadun e Soschino hanno dimostrato soltanto alcuni teoremi sui prodotti, omettendo le dimostrazioni degli altri teoremi e di quelli relativi ai quozienti esatti, facendo però notare in qual modo possono dedursi da quelle dei corrispondenti teoremi dell'addizione e della sottrazione. Nei Cap. VI e VII sono svolti i principali teoremi sulle somme e differenze combinate con prodotti e quozienti e sull'elevamento a potenza. Uniformandosi alla correlatività sopra notata osservano opportunamente gli aa., alla fine del Cap. VII, che alcuni dei teoremi sulle potenze possono farsi corrispondere ad altri dei Cap. IV e VI relativi ai prodotti ed alla combinazione delle somme e differenze con prodotti e quozienti e notano pure per quale motivo questa corrispondenza non possa essere generale.

Il Cap. VIII riguarda i quozienti approssimati. Vi sono considerate talune proprietà dei resti, spesso taciute nei manuali d'aritmetica e che trovano nondimeno frequenti applicazioni. Le distinte trattazioni in due capitoli delle proprietà dei quozienti esatti e di quelle che derivano dai quozienti appossimati è da lodarsi in quantochè il riunirle lascia spesso nella mente dei giovani qualche dubbio sulla bontà della definizione di divisione.

Nel Cap. IX sono studiati i sistemi di numerazione con particolare considerazione al sistema decimale, nel Cap. X vengono esposte, colle opportune dilucidazioni, le regole per eseguire le quattro operazioni e nei Cap. XI e XII le proprietà dei resti della divisione per 2, 5, 4, 25, 8, 125, 3, 9, 11, 33, 99 e le prove delle operazioni.

I Cap. XIII a XVI rispondono ai seguenti titoli – numeri primi e composti – tavola dei numeri primi; metodo per verificare se un numero dato è primo o no; decomposizione in fattori primi – divisori di un numero; numeri primi fra loro - divisori e multipli comuni a più numeri. Le proprietà principali dei numeri primi sono fondate sul teorema « Il prodotto di due numeri più piccoli di un dato numero primo non è divisibile per questo numero primo ». Le teorie del massimo comune divisore e del minimo comune multiplo sono basate dagli aa. sulla teoria dei numeri primi e svolte in modo da porre in evidenza la corrispondenza fra le proprietà principali delle due teorie. Il Cap. XVI termina poi con una nota nella quale sono indicate le modificazioni che dovrebbero apportarsi al testo per svolgere le teorie del m. c. d. e del m. c. m. indipendentemente dalla teoria dei numeri primi, e per trattare quest'ultima in base a quella del m. c. d. senza ricorrere al teorema sopra riportato. È doveroso notare come gli aa. abbiano conservato anche in questi capitoli stretto rigore ed abbiano date opportune amplificazioni a dimostrazioni e proprietà talvolta esposte poco esattamente o incompletamente nei trattati d'aritmetica. Citerò ad es. nel Cap. XIII il teo. V in cui l'univocità della scomposizione di un numero in fattori primi è presentata nella forma seguente « Se le due serie di numeri primi (diversi da uno) $a, b, c, d...,$ $p, q, r, s...,$ sono tali che i prodotti $a\,b\,c\,d...,$ $p\,q\,r\,s...$ hanno uno stesso valore m, ad ogni termine di una delle serie deve corrisponderne uno eguale nell'altra » e il metodo a seguire per la formazione di una tavola di numeri primi, nel Cap. XIV il metodo per verificare se un dato numero è primo o no, finalmente nel Cap. XVI il teo: (II) « Affinchè un divisore comune di più numeri sia il loro m. c. d., è necessario e sufficiente che i quozienti di questi numeri per il divisore comune, sieno numeri primi fra loro », il teo: (V) « Due numeri hanno lo stesso m. c. d. del minore di essi e della differenza fra un multiplo qualunque di questo, ed il maggiore » ed il corrispondente del primo di questi teoremi nella teoria del m. c. m..

Ai numeri frazionari sono dedicati dagli aa. 12 capitoli. Nel Cap. I, introdotti i numeri frazionari, vengono estese alle frazioni di uguale denominatore le definizioni ed i teoremi relativi alla somma dei numeri interi. Il concetto di uguaglianza, sul quale si basano le proprietà fondamentali delle frazioni, è stabilito nei seguenti termini « Due frazioni sono eguali, quando sono eguali i prodotti del numeratore dell'una per il denominatore dell'altra ». Vengono appresso nei capitoli dal II al IV le definizioni e proprietà della somma e differenza, del prodotto e del quoziente delle frazioni, nel Cap. V le proprietà delle somme e differenze combinate con prodotti e quozienti, nel Cap. VI i teoremi sulle potenze, nel Cap. VII infine viene mostrato come possano estendersi alle frazioni a termini frazionari le proprietà delle frazioni a termini interi. Da notarsi come i Cap. II a VI relativi ai numeri frazionari siano i corrispondenti non soltanto nel titolo ma nella sostanza di quelli sui numeri interi segnati II a VII.

Nel Cap. VIII è dato il concetto di valore approssimato di una frazione ed è mostrato come dal valore approssimato $\frac{q}{k}$ di $\frac{a}{b}$, per difetto, a meno di $\frac{1}{k}$, in seguito all'eguaglianza $\frac{a}{b} = \frac{q}{k} + \frac{1}{k} \cdot \frac{r}{b}$ $(r < b)$, dal valore approssimato $\frac{q_1}{m}$ di $\frac{r}{b}$, a meno di $\frac{1}{m}$, in seguito all'eguaglianza $\frac{r}{b} = \frac{q_1}{m} + \frac{1}{m} \cdot \frac{r_1}{b}$ $(r_1 < b)$, ecc., possa dedursi il valore approssimato di $\frac{a}{b}$ a meno di $\frac{1}{km \dots}$. I Cap. IX e X riguardano le frazioni ed i numeri decimali e le quattro operazioni con numeri decimali. Finalmente i Cap. XI e XII trattano della trasformazione delle frazioni ordinarie in decimali e viceversa. Il problema della trasformazione di una frazione decimale in ordinaria (Cap. XII), è risoluto, senza ricorrere al concetto di limite, valendosi dei seguenti tre teoremi « Affinchè una frazione ordinaria sia eguale ad un numero decimale, con m cifre nella parte decimale, è necessario e sufficiente che il denominatore della frazione irriducibile eguale alla data, contenga i soli fattori primi 2 e 5 elevati ad esponenti il maggiore dei quali sia eguale ad m », « Affinchè una frazione ordinaria generi una frazione periodica semplice, è necessario e sufficiente che il denominatore della frazione irriducibile eguale alla data sia un numero primo con 10 », « Affinchè una frazione ordinaria generi una frazione decimale periodica mista con h cifre di antiperiodo, è necessario e sufficiente che il denominatore della frazione irriducibile eguale alla data contenga fattori primi diversi da 2 e 5, che non sia primo con 10, ma contenga i fattori primi 2 e 5 elevati ad esponenti il maggiore dei quali sia eguale ad h », dimostrati nel Cap. XI.

Chiude l'opera una raccolta di 125 esercizi sui numeri interi e di 41 sui numeri frazionari, in cui si contemperano opportunamente la parte teorica e la parte pratica.

Terminerò con una parola di sincero elogio ai giovani autori per queste ottime lezioni, esprimendo la speranza che il largo uso dei simboli non riesca di ostacolo ai discenti per l'intelligenza del libro, al quale auguro quella larga fortuna che merita.

A. Lugli.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques, publié par G. Eneström. Nouvelle série. 6. N. 2, 3. — Stockholm, 1892.

Bulletin scientifique, rédigé par M. E. Lebon. Sixième année. N. 8, 9 et 10. A. Colin et C., éditeurs. Paris, 1892. — Septième année. N. 1. Félix Alcan, éditeur. Paris, 1892.