Indice Articoli Anno 1891

CONSIDERAZIONI SUL CONCETTO DI PROBABILITÀ

per E. CESÀRO

. . . . . . souvenez-vous de nos conventions: si vous n'êtes qu'un pédant, ce n'est pas la peine de me lire. (*)

La misura della probabilità mediante il rapporto fra il numero n dei casi favorevoli ad un avvenimento ed il numero totale N dei casi possibili, supposti tutti *egualmente possibili,* non esaurisce il contenuto del concetto di probabilità, ma basta appena ad eseguirne una parzialissima rappresentazione. Con questa scambiano taluni lo stesso concetto quando affermano che in certi casi la parola *probabilità* non ha più senso, mentre è la definizione matematica datane che, nei termini in cui vien formulata, diventa insufficiente ad accogliere un più vasto contenuto. Occorre allora risalire all'intimo concetto per tentare di estrinsecarlo sotto più ampie forme, tendendo così a crearne una rappresentazione completa. Altri non cadono nell'accennata confusione, ma vogliono *tutto* definire prima di procedere. Come i *geometri* di Pascal, essi « hanno lo spirito retto purchè loro si spieghi bene ogni cosa per definizioni e principii; altrimenti sono falsi ed insopportabili, in quanto sono retti solo su principii bene assodati » (**). Conseguenti alla circospezione impostasi, quei puri geometri rifiutano di varcare i confini d'un certo campo, entro il quale pretendono aver racchiuso tutto ciò che nel calcolo delle probabilità può esser portato a precisione matematica. Così, accettando le idee poste a fondamento d'una recente pubblicazione, (***) non sembra che si possa accordare serietà di scienza allo studio degli avvenimenti non assimilabili alla solita estrazione di palle dall'urna. È vero che

(*) ROUSSEAU. *Émile ou de l'éducation,* (livre II).
(**) PASCAL. *De l'esprit géometrique.*
(***) BERTRAND. *Calcul des probabilités,* (Paris, 1890).

in tale angusta cerchia resta sufficiente l'ordinaria definizione della probabilità; ma è lecito domandare che cosa in essa intendesi per casi *ugualmente possibili?* Sospendano i geometri ogni loro studio finchè non abbiano definito anche questo, a meno che non si persuadano dell'assoluta necessità di mescolare alla pura logica dei loro ragionamenti l'inevitabile *dato sperimentale*, che nel calcolo delle probabilità suole assumere una forma per così dire subiettiva. Dai più semplici giuochi di azzardo alle questioni di probabilità geometrica, da queste alla teoria degli errori, alle leggi della statistica, allo studio matematico delle men precise questioni economiche e giudiziarie, l'elemento morale, che non manca mai, si va sempre più imponendo, ed è vana l'opera di quelli che tentano separarlo dal puro elemento logico. Eliminarlo non si può: solo a circoscriverlo può esser diretta l'opera del matematico, a fin di render minimo il necessario intervento degli apprezzamenti personali, massima l'efficacia delle deduzioni puramente logiche. Vano è per conseguenza ogni sforzo tendente ad isolare in un campo limitato quelle leggi del *caso*, che si credono sole suscettibili di venir trattate matematicamente. A quale *dose* di elemento morale vorrà fermarsi il geometra intollerante? Quel campo conviene che sia nullo o infinito, nullo con ogni altro campo di ricerche, non escluso quello della pura geometria, (*) o infinito quale noi lo vogliamo, sconfinato e libero. Bene ha detto Cesare Lombroso che « il progresso cesserebbe il giorno in cui non si lasciasse più errare o anche divagare la scienza in piena libertà ».

La meno seria obbiezione mossa contro il naturale esplicamento del concetto di probabilità concerne gli avvenimenti suscettibili di infinite manifestazioni. Allora, si dice, i numeri n ed N sono generalmente infiniti, il loro rapporto è indeterminato. Ma si ammette forse che quei numeri possano immaginarsi infiniti? Nulla si oppone allora a che si concepisca ben determinato anche il loro rapporto. Respinta la possibilità del numero *attualmente* infinito si vuole invece dire soltanto che i numeri stessi sono grandi a piacere, ma ognora finiti? In tal caso il loro rapporto, che non cessa mai di misurare

(*) Fintantochè non avranno i puri matematici definito la linea retta o dimostrato il postulato di Euclide la probabilità secondo l'ordinaria definizione, è costantemente determinato, e se col crescere di N tende ad un limite p, questo rappresenterà ad ogni mente sana la probabilità dell'avvenimento considerato, nel senso che, immaginato l'avvenimento come possibile in N modi, essendo *N finito sempre,* benchè arbitrariamente grande, la probabilità è misurata da un numero che *non è p,* ma che da p differisce tanto poco quanto si vuole. Molti, mentre ammettono che l'infinito come numero non ha senso, vengono poi a riconoscergliene implicitamente uno quando *distinguono* il numero finito dall'infinito. Appunto perchè questa distinzione non ha ragione di essere, non esitiamo ad affermare che il criterio per la misura della probabilità sussiste intatto, all'indefinito crescere del numero dei casi, e che, a prescindere da impossibilità puramente analitiche, conduce a risultati ben determinati. A dir vero, perchè si possa ritenere senza ulteriori schiarimenti che l'ordinaria definizione della probabilità non soffre mutamenti quando il numero dei casi cresce oltre ogni limite, fa d'uopo ancora che questi casi restino numerabili e separabili, come avviene comunemente. Ben s'intende poi che, accettata l'impossibilità del numero attualmente infinito, gli infiniti casi non possono considerarsi nel loro insieme, ma occorre che l'enunciato della questione lasci scorgere il modo più naturale di farne indefinitamente crescere il numero, e la probabilità richiesta, come già si è detto, si presenta allora come limite d'una probabilità variabile, nè può fallirne la determinazione se non nel caso che quella probabilità variabile non tenda ad un limite determinato. Ciò avviene in casi eccezionali, che non bastano a consigliare l'abbandono d'una teoria dotata di risorse preziose ed innumerevoli, tanto più che a quei casi ancora si può provvedere ricorrendo a più larghi criterii per l'apprezzamento della probabilità, sia svolgendo nuove parti dell'intimo concetto, sia estendendo la nozione stessa di limite.

Può anche darsi che il valore della probabilità, calcolato come limite, varii con l'ordine di successione degli eventi; ma ciò non ha nulla di strano se quell'*ordine* è per se stesso una circostanza di fatto, della quale bisogna pure tener conto. Nella storia della teoria delle serie si riscontra alcunchè di analogo alla presente ostruzione promossa dai puritani della matematica nel calcolo delle probabilità. Quella teoria è forse stata abbandonata sol perchè esistono serie che hanno somma variabile a seconda dell'ordine in cui ne vengono scritti i termini? Tali serie vengono oggidì sottoposte con tutto rigore al calcolo, ed altrettanto avverrà per le stesse serie indeterminate. Già qualcuno scrive

$$(1-1+1-1+\ldots)^2 = 1-2+3-4+\ldots\ldots,$$

asserendo che ciascun membro è uguale ad $\frac{1}{4}$. Si noti poi che in certe questioni, specialmente di probabilità geometrica, gli infiniti casi sembrano presentarsi simultaneamente, per così dire, proprio come *a posteriori* si è riconosciuto lecito per i termini delle serie assolutamente convergenti. Invece in altre questioni, per esempio quando si dice che $\frac{1}{2}$ è la probabilità di incontrare un termine negativo in una serie semplicemente convergente, i cui termini vanno decrescendo in valore assoluto, quel valore della probabilità è subordinato alla condizione che i segni si vadano esaminando nell'ordine in cui si trovano scritti, e ciò, ripetiamo, non deve sorprendere, dal momento che quella condizione è un dato di fatto, che necessariamente influisce sul valore della probabilità. Il lavoro di paziente analisi eseguito per le serie si andrà ripetendo per la teoria delle probabilità, le cui difficoltà vanno affrontate e risolute, non lasciate in disparte. Ad esse rivolgano i giovani matematici tutta la loro attenzione, rifuggendo dalle ingombranti e sterili sottigliezze.

È ben vero che i casi sembrano diventare non enumerabili, non separabili, quando il loro numero cresce oltre ogni limite; ma ci soccorre allora il concetto di *densità*, del quale non può sconoscere la spontaneità e la necessità logica chi non intenda ritornare puramente e semplicemente alle conclusioni del dilemma di d'Alembert. Un nostro corrispondente ha osato dire che la densità è « un elemento introdotto arbitrariamente » ed in questa convinzione ci ha voluto mostrare come si possa, mediante opportune rappresentazioni e trasformazioni geometriche, far sì che n riesca superiore ad N. Il paradossale risultato avrebbe dovuto far nascere qualche sospetto nell'animo del nostro egregio amico circa la validità delle considerazioni adoperate; ma egli, sicuro di sè, non esita a versare tutta la colpa su N infinito, e non nutre il menomo dubbio sull'*arbitrarietà* delle sue trasformazioni, nè si accorge che queste implicano la miracolosa possibilità di *casi favorevoli non compresi fra i possibili!* Invece di perder tempo a confutare opinioni che il più elementare buon senso condanna, passiamo a mostrare, mediante alcuni esempii, che l'indeterminazione di certi risultati è realmente dovuta ad erronei apprezzamenti della densità, e notiamo fin d'ora che, se la facilità di simili errori è accresciuta dal fatto di N infinito, non è tuttavia da considerarsi come nulla quando N è finito. Valga per tutti l'esempio che ci porge lo stesso Bertrand nel terzo paragrafo del suo libro.

Negli enunciati delle questioni di probabilità si trovano nominate grandezze *prese ad arbitrio*, che per necessità variano in campi identici ed ugualmente densi, e non bisogna, come alcuni pretendono, che queste condizioni compariscano esplicite nell'enunciato. Un simile enunciato sarebbe scientificamente ed esteticamente difettoso. Quando si cerca la probabilità che $x^2 - yz$ riesca positivo per valori reali di x, y, z, *presi ad arbitrio*, è tacitamente imposto che i campi di variazione di x, y, z siano identici in tutto, e solo se ciò *non* dovesse essere si avrebbe l'obbligo di introdurne l'esplicita dichiarazione nell'enunciato. Quando invece di $x^2 - yz$ si considera $\frac{1}{4}x^2 - yz$, a qualcuno sembra che non si dovrebbe trovare un altro valore della probabilità, perchè $\frac{1}{2}x$ è, come x, una quantità variabile da $-\infty$ a $+\infty$. Ma l'identità dei campi di variazione di x ed $\frac{1}{2}x$, apparentemente vera in *estensione*, è insussistente per l'*intensità*. Scrivere $\frac{1}{4}x^2 - yz$ invece di $x^2 - yz$ equivale appunto a porre nel primo enunciato l'esplicita dichiarazione che x debba variare in un campo due volte più denso degli altri due. Fintantochè questa condizione non viene imposta, non si ha veruna ragione di non trattare equamente le diverse variabili, assolutamente arbitrarie e non vincolate fra loro. Del resto è facile persuadersi che la probabilità di ottenere per $kx^2 - yz$ un valore positivo, quando x, y, z sono, per esempio, numeri positivi presi ad arbitrio, è variabile con k, perchè quella probabilità, manifestamente nulla per $k = 0$, tende a convertirsi in certezza quando k cresce all'infinito. L'errore sta nel credere che il processo seguito nel formare l'espressione $x^2 - y z$, benchè chiaramente indicato dall'arbitrarietà e dalla mutua indipendenza di x, y, z, non sia una condizione essenziale del problema, della quale debbasi per assoluta necessità tener conto nella soluzione. Se l'enunciato dice che x deve prendersi ad arbitrio, perchè permettersi di prendere arbitrariamente kx e dividerlo poi per k? Similmente, prendere ad arbitrio x fra 0 ed 1 non equivale a prendere arbitrariamente x^2 nello stesso intervallo, assumendo poi la radice quadrata del risultato come valore di x. La probabilità che x riesca superiore ad $\frac{1}{2}$ è $\frac{1}{2}$ nel primo caso, $\frac{3}{4}$ nel secondo; ma i due risultati rispondono a questioni essenzialmente diverse, ed è strano che il Bertrand affermi invece che « i due problemi sono identici » (*). Nel primo di essi la densità non dipende da x, nel secondo è proporzionale ad x. Se, chiamati ad operare sopra un *cilindro*, si comincia dal trasformarlo in un *cono*, si perde il diritto di riferire al cilindro il risultato dell'operazione. Il mezzo di evitare simili errori è semplicissimo: consiste nel rispettare scrupolosamente la formazione delle grandezze, quale si trova prescritta dagli enunciati.

Tutte a difettosi apprezzamenti della densità son dovute le apparenti indeterminazioni segnalate dal Bertrand nel primo capitolo del suo trattato. La probabilità che *un piano preso ad arbitrio* nello spazio faccia coll'orizzonte un angolo minore di 45° è proprio $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e non $\frac{1}{2}$, come sembra suggerire un falso buon senso. È infatti *il piano* che si deve prendere ad arbitrio, non *l'angolo*. Il primo risultato suppone una equa distribuzione in orientamento dei piani dello spazio, e però risponde alla questione proposta. Questa non è « mal posée » come afferma il Bertrand, ma è « mal résolue » e le risposte contraddittorie provano soltanto che uno almeno dei risultati è falso. Ed è certamente falso il secondo, ottenuto attribuendo uguale frequenza a tutti gli angoli, mentre per un punto si possono condurre *infiniti* piani verti-

(*) *loc. cit.*, p. 4.

cali, *un solo* orizzontale. Si può precisare asserendo che la densità dell'angolo x è sen x. La probabilità che, preso ad arbitrio il piano, questo faccia con l'orizzonte un angolo inferiore a 45° è

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x \, dx = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

e l'*angolo probabile* non è 45°, bensì

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x \, dx = 1,$$

cioè 57° 17′ 44″, 8. Il confronto fra il risultato del calcolo e quello che l'osservazione ha fornito per gli angoli che l'eclittica fa con le orbite delle comete, sembra svelare nelle comete stesse una tendenza ad avvicinarsi al piano dell'eclittica. Questa conclusione è respinta con orrore dai *geometri* di Pascal. Eppure nessuno pretende aver constatato indiscutibilmente quella tendenza. Si è voluto semplicemente dire: — abbiamo qualche ragione di pensare che una tendenza esiste in un senso piuttostochè nell'altro. La *ragione* che di ciò si presenta viene abbandonata all'apprezzamento individuale, quanto al grado di certezza morale che può indurre negli animi. Nè si vorrà negare che se altre ragioni dello stesso genere si andassero accumulando concordi, quel sospetto d'una tendenza ingigantirebbe sempre più, beninteso senza giungere mai ad aver forza di certezza matematica. E se qualche moderno scienziato non sa che farsi degli indizii così apprestati dalla teoria delle probabilità, non dimentichi che nella mente d'un Laplace essi possono diventare strumenti potentissimi di scientifica indagine.

Ancora si prenda in esame il problema della corda iscritta ad arbitrio in una circonferenza. Dice il Bertrand che la probabilità di veder riuscire la lunghezza della corda inferiore a quella del lato del triangolo equilatero iscritto può essere $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ecc. Ma per ottenere la vera soluzione bisogna anzitutto immaginare una equa distribuzione di quelle rette del piano che incontrano la circonferenza. Tale distribuzione si ottiene facendo uniformemente ruotare nel piano un sistema di parallele equidistanti. Quando si fissa un estremo della corda, o di questa si prende ad arbitrio il punto medio, si viene a turbare l'equità della distribuzione, attribuendo a ciascuna retta un coefficiente di frequenza non consentito dall'enunciato. La densità del rapporto fra la corda ed il diametro, intorno al valore x, è rappresentata, per le tre distribuzioni considerate, da

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad 2x,$$

rispettivamente, e la probabilità richiesta prende i valori

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3}, \quad 2\int_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}^1 x\,dx = \frac{1}{4},$$

che *rispondono a problemi differenti.* Similmente i numeri

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi}, \quad 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3},$$

rappresentano i valori probabili di x in tre diversi problemi, e si può rigorosamente dire: — 1° la corda che ogni circonferenza stacca da una *secante presa ad arbitrio* nel piano ha per lunghezza probabile il quarto della circonferenza stessa; — 2° la distanza probabile di due *punti presi ad arbitrio* sopra una circonferenza è uguale al diametro moltiplicato per $\frac{2}{\pi}$; ecc. Come si vede, l'indeterminazione esiste solo nell'immaginazione dei critici frettolosi. Similmente, quando si vogliono considerare le infinite *forme* di triangoli, le quantità da prendere ad arbitrio sono *gli angoli*, ed il risultato $\frac{1}{4}$ ottenuto per misurare la probabilità che un triangolo preso ad arbitrio sia acutangolo è perfettamente esatto, checchè ne dicano certuni, ed è falso l'altro $1-\frac{\pi}{4}$, che misura invece la probabilità di veder riuscire acutangolo un triangolo, *i cui lati son presi ad arbitrio.* Le condizioni dei due problemi sono sostanzialmente diverse, ed è naturale che il processo prescritto per la costruzione del triangolo influisca sul valore della probabilità.

Altrettanto dicasi delle questioni relative alla distribuzione delle stelle sulla volta celeste. « Prendere ad arbitrio due punti sulla superficie d'una sfera » è indicazione sufficiente perchè si giunga a trovare un valore determinato per la probabilità che la distanza angolare di quei punti sia, per esempio, inferiore a 10′. Fissare un circolo massimo, come fa il Bertrand, ed immobilizzarne un punto, significa compiere illecite deformazioni di densità, significa cambiare a capriccio le condizioni del problema, ed è questo il caso di esclamare: « les réponses contradictoires en sont la preuve ». Tanto varrebbe sostenere che un corpo dato ha il centro di gravità in uno qualunque dei suoi punti, adducendo a prova che la materia di cui quel corpo è composto si può addensare e diradare in modo da conseguire la voluta distribuzione di massa. È proprio questa la maniera nuovissima di argomentare, adoperata dal Bertrand e dai suoi celeri seguaci. Adottandola ci faremmo forti di provare che un'equazione di primo grado ammette tutte le radici di questo mondo, ed altre ancora. Del resto si noti che la soluzione del Bertrand implica l'assimilazione della superficie sferica ad un fascio di circoli massimi, implica dunque l'esclusione d'una infinità di archi, fra i quali sono manifestamente più numerosi gli archi più grandi. Attribuendo così maggiore importanza alle *piccole* distanze angolari è naturale che si ottenga un risultato centinaia di volte più forte del vero.

Quanto all'ingegnosa applicazione che del problema precedente è stata fatta dal Mitchell, le critiche del Bertrand hanno per unico fondamento il partito preso di osteggiare tutto ciò che non è riducibile ad arido meccanismo matematico, come se il servirsi della forma matematica per condurre a maggior precisione ed evidenza le proprie idee non costituisse un potente mezzo di progresso scientifico. Così non si *compromette* ma si *promuove* la matematica, cui il pensatore ama chiedere indizii, che pur non avendo per lui il valore di prove inoppugnabili, valgono nondimeno ad illuminarne la mente ed a mostrargli talvolta la via della verità. L'osservazione del Mitchell, ancorchè sia ben lungi dal rendere incontestabile l'esistenza di legami naturali fra gli astri, colpisce nonpertanto, e potrebbe forse condurre ad ulteriori riflessioni, delle quali non è possibile prevedere l'importanza. Certo è notevole che il numero delle stelle doppie sia, in diverse regioni del cielo, centinaia di volte più grande di quello che risulterebbe da una distribuzione veramente arbitraria degli astri, e nessuno vorrà negare che, se *tutte* le stelle si sdoppiassero al telescopio, questo fatto non avrebbe cessato di tormentare migliaia di generazioni, che dall'una all'altra si sarebbero trasmessa la certezza morale che l'apparente coincidere di tanti astri fosse dovuto a qualche causa misteriosa. Ora si faccia crescere da 0 ad 1 il rapporto fra il numero delle stelle doppie ed il numero totale delle stelle visibili ad occhio nudo, e si dica: — quando bisogna fermarsi perchè il sospetto dell'esistenza di legami fisici fra gli astri cominci a diventare legittimo? — Via dunque gli ostacoli, si lasci ognuno libero di pensare e condurre l'indagine scientifica a suo talento, e tutto l'acume dei critici puristi si volga al perfezionamento degli strumenti di calcolo.

Un'altra singolare obbiezione ci è stata mossa sotto la seguente forma: — « la probabilità che il *peso* specifico d'una sostanza ignota stia fra 7 ed 8, o fra 8 e 9, è la stessa; ma invece è diversa la probabilità che il suo *volume* specifico stia fra $\frac{1}{7}$ ed $\frac{1}{8}$, o fra $\frac{1}{8}$ ed $\frac{1}{9}$ ». Grave difficoltà! Anzitutto chi ci assicura che la distribuzione dei pesi specifici sia, come gratuitamente si asserisce nell'enunciato, regolare o equamente densa? Suppongasi che nella materia non si trovino pesi specifici superiori ad un certo valore, e questo si assuma ad unità. Sia $\varphi(x)\,dx$ la probabilità che il peso specifico d'un corpo preso ad arbitrio cada fra x e $x + dx$, dimodochè il numero

$$p = \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

rappresenti la probabilità che il detto peso cada nell'intervallo (a, b). Il problema è obbiettivamente determinato, e non dà luogo ad alcuna difficoltà, perchè nel campo di variazione dei volumi specifici la densità non è $\varphi(x)$, ma $\frac{1}{x^2}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, e però la probabilità che il *volume* specifico d'un corpo preso ad arbitrio cada nell'intervallo $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ è

$$\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2} = \int_a^b \varphi(x)\,dx = p,$$

coincide cioè con la probabilità che il *peso* specifico del medesimo corpo sia compreso nell'intervallo (a, b). Solo per una specialissima ipotesi le densità dei pesi e dei volumi specifici potrebbero seguire la medesima legge, quando cioè si avesse

$$\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,.\,x^{1+\log x}}.$$

Nella questione a noi rivolta è tacitamente supposto $\varphi(x) = 1$, ciò che non è; ma quando ciò fosse, nulla vedremmo di strano nell'ineguale frequenza dei volumi specifici, poichè si tratta di due grandezze, non solo *vincolate* fra loro, ma *non arbitrarie*, e quindi non varianti in campi necessariamente omogenei. L'arbitrario, nel problema attuale, è il *corpo*, non il peso o il volume, e se si ammette che i pesi specifici della materia siano equamente distribuiti sulla scala delle grandezze, non deve recar meraviglia che altrettanto non possa dirsi dei volumi specifici. È chiaro pertanto che, delle due affermazioni contenute nell'enunciato dell'obbiezione, una è *arbitraria*, l'altra *inesatta*.

Adunque, riassumendo, i criterii per la misura della probabilità sussistono intatti e conducono a risultati determinati qualora si abbia cura di scegliere le variabili che dall'enunciato della questione emergono come veramente arbitrarie, quindi si concedano soltanto ad esse campi omogenei di variazione, identici fra loro per estensione ed intensità quando le variabili sono della stessa natura, e finalmente si sappiano apprezzare in densità i campi pertinenti alle variabili che dalle prime dipendono. Per dare un esempio del modo di procedere a siffatte valutazioni riprendiamo la ricerca della probabilità che, assunti ad arbitrio i numeri positivi x, y, z, risulti $x^2 - yz > 0$. Dire che il campo di variazione di x si estende da 0 a $+\infty$ non può significare altro se non questo: — il campo è $(0, a)$, ed a è grande quanto si vuole. Mantenendo fermo per un istante a, è dunque $(0, a)$ il comune campo di variazione di x, y, z, giacchè l'enunciato non autorizza a trattare in differenti modi quei tre numeri. Ora ad ogni altra variabile compete un campo di variazione ben determinato per estensione e densità, e non è lecito abbandonarsi ad arbitrarie definizioni dei campi stessi, come usano i soliti critici. Così le variabili x^2 ed yz percorrono entrambe l'intervallo $(0, a^2)$, ma le loro densità, che devono soddisfare alle condizioni

$$\int_0^{a^2} \varphi(x)\, dx = 1, \quad \int_0^{a^2} \psi(x)\, dx = 1,$$

sono

$$\varphi(x) = \frac{1}{2a\sqrt{x}}, \quad \psi(x) = \frac{2\log a - \log x}{a^2}.$$

Ciò posto, qualunque siano φ e ψ, la probabilità di vedere x^2 superare yz è data evidentemente da ognuna di queste formole:

$$p = \int_0^{a^2} \Psi(x)\, \varphi(x)\, dx, \quad 1 - p = \int_0^{a^2} \Phi(x)\, \psi(x)\, dx.$$

Le funzioni

$$\Phi(x) = \int_0^{x} \varphi(x)\, dx, \quad \Psi(x) = \int_0^{x} \psi(x)\, dx$$

sono, nel caso attuale,

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{x}}{a}, \quad \Psi(x) = (1 + 2\log a - \log x)\,\frac{x}{a^2}.$$

Dunque

$$p = \int_0^{a^2} (1 + 2\log a - \log x)\,\frac{\sqrt{x}\, dx}{2a^3} = \frac{5}{9}.$$

Se qualcuno trova $p \gtrless \frac{5}{9}$ può liberamente imputar ciò, non all'imperfezione della teoria, ma alla propria inabilità.

Più generalmente, presi ad arbitrio i numeri $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ nell'intervallo $(0, a)$, osservando che le densità di x^n e di $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ sono

$$\varphi(x) = \frac{1}{n a x^{1-\frac{1}{n}}}, \quad \psi(x) = \frac{\left(\log \frac{a^n}{x}\right)^{n-1}}{(n-1)!\, a^n},$$

si ottiene, per la probabilità di trovare $x^n > x_1 x_2 \ldots x_n$,

$$p = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

e però la probabilità che la n^{esima} potenza d'un numero positivo arbitrario non superi il prodotto di altri n numeri positivi, presi ad arbitrio, è vicinissima ad $\frac{1}{e}$ quando n è molto grande. Allo stesso risultato si perviene in modo più semplice osservando che, se u_0 è il valore probabile d'una funzione del campo $(0, a)$, variabile in questo campo, il rapporto $\frac{u_0}{a}$ misura la probabilità di vedere u superare un numero arbitrario del campo stesso. Ora, prendendo

$$u = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}\,,$$

si trova che la densità di u in $(0, a)$ è

$$\frac{n^n x^{n-1}}{(n-1)!\, a^n} \left(\log \frac{a}{x}\right)^{n-1},$$

e però

$$u_0 = \frac{n^n}{(n-1)!} \int_0^a \left(\log \frac{a}{x}\right)^{n-1} \left(\frac{x}{a}\right)^n dx = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n a.$$

È dunque $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$ la probabilità che la *media geometrica* di n numeri positivi arbitrarii superi un altro numero positivo, preso ad arbitrio. Invece per la *media aritmetica* si trova sempre $\frac{1}{2}$.

(Continua).

SUI SISTEMI DI NUMERAZIONE PER I NUMERI REALI

1. Quando si convenga, come suol sempre farsi, di indicare i numeri interi con segni differenti, sia ricorrendo a lettere diverse, sia servendosi di un sistema di numerazione, tutte le frazioni si possono rappresentare con simboli, dei quali ciascuno è composto soltanto di due dei segni proposti per i numeri interi (numeratore e denominatore) e del segno — di divisione.

Lo scopo della nostra ricerca è quello di riconoscere se qualcosa di simile possa farsi per i numeri irrazionali, e quindi per tutti i numeri reali.

Ci proponiamo perciò la domanda:

« È possibile esprimere tutti i numeri reali con un sistema di nu-
« merazione che, per ciascuno di essi, impieghi un numero *finito* di
« segni (non necessariamente uguale per tutti) scelti fra quelli di un
« gruppo finito od infinito?

« In particolare è possibile questo, se il gruppo di segni da usarsi
« comprende quelli dei numeri interi, e quelli di certe operazioni, che
« siano in numero finito, o, se sono infinite, siano tali da potersi nu-
« merare (cioè da potersi indicare una dopo l'altra in modo da giun-
« gere, spingendosi in là sufficientemente, a indicare quella che si
« vuole)? ».

Per rispondere alla domanda fatta, incominceremo col dimostrare un teorema sui gruppi di punti o di numeri.

2. Richiamiamo anzitutto per chiarezza alcune definizioni relative ai gruppi di punti ed alla loro corrispondenza (Cantor. *Acta Mathematica,* vol. II, fasc. IV).

Due gruppi di punti o di numeri si dicono *equivalenti* o di *ugual* *potenza*, quando si possono far corrispondere univocamente i loro elementi. Se ciò non è possibile in nessun modo, si dice di *potenza maggiore* quello dei due gruppi in cui, tentando di stabilire tale corrispondenza, avanzano dei punti.

La potenza più piccola di gruppi infiniti è quella del gruppo dei numeri interi, e si dice *prima potenza*. I gruppi che hanno la 1ª potenza sono detti anche *numerabili*, per il fatto che, essendo corrispondenti i loro termini uno ad uno coi numeri interi, si può ad essi termini assegnare un posto determinato, in modo da contarli, da numerarli tutti.

Il continuo lineare (cioè l'insieme di tutti i numeri reali, considerati anche in un tratto limitato), ha potenza maggiore della prima. Non è ancora provato (almeno, che io sappia) se fra la 1ª potenza e quella del continuo ve ne siano altre; ma è molto probabile che non ve ne siano, e che quindi quella del continuo sia la 2ª potenza.

Un gruppo somma di più gruppi di 1ª potenza, che siano in numero finito od anche in numero infinito, purchè in questo ultimo caso costituiscano un gruppo numerabile di gruppi, è della 1ª potenza esso pure. Se dunque da un gruppo di potenza superiore alla prima si sottrae un gruppo di 1ª potenza, il residuo non può essere di 1ª potenza.

I numeri razionali formano un gruppo numerabile; l'insieme di tutti i numeri reali è invece, come si è detto, di potenza superiore alla 1ª. Il gruppo dei numeri irrazionali, ottenuto sottraendo da quello dei numeri reali quello dei razionali, è quindi di potenza superiore alla prima.

3. Teorema. — « Dato un gruppo numerabile di enti differenti « fra loro, se si dice *simbolo* un gruppo qualunque di questi enti e si « considerano diversi simboli ottenuti prendendo gli enti in tutti i « modi possibili quanto al loro ordine ed al loro numero (purchè finito) « ed ammettendo che in uno stesso simbolo il medesimo ente si possa « considerare anche più di una volta, l'insieme di questi simboli è di « 1ª potenza (numerabile) rispetto ai simboli, considerati come suoi « elementi ».

Il gruppo cercato, che chiameremo G, sarà costituito dall'insieme dei seguenti gruppi $g_1, g_2, g_3, \ldots\ldots g_n, \ldots\ldots$

$$G = \text{somma di} \begin{cases} g_1 = \text{gruppo di tutti i simboli di } \textit{un} \text{ ente } \textit{solo} \\ g_2 = \text{gruppo di tutti i simboli di } \textit{due} \text{ enti} \\ g_3 = \text{gruppo di tutti i simboli di } \textit{tre} \text{ enti} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_n = \text{gruppo di tutti i simboli di } n \text{ enti} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots , \end{cases}$$

dove i gruppi $g_1, g_2, g_3, \dots. g_n, \dots$ sono tanti quanti gli enti, e quindi costituiscono per dato una serie numerabile.

Il gruppo g_1, coincidendo con quello degli enti dati, è numerabile.

Per i gruppi $g_2, g_3, \dots. g_n, \dots$ si dimostra in generale, che se g_n è numerabile, dev'esser tale anche g_{n+1}, qualunque sia n. E infatti g_n contiene tutti i simboli con n enti, g_{n+1} tutti quelli con $n+1$. Se in un simbolo di g_{n+1} si sopprime un ente qualunque, il simbolo si trasforma in una di quelli di g_n: talchè se a tutti i simboli di g_n si aggiunge in tutte le posizioni possibili ciascuno degli enti, si ottengono tutti i simboli di g_{n+1} e ciascuno più di una volta, potendosi un medesimo simbolo di g_{n+1} ottenere da $n+1$ di quelli di g_n (almeno quando è composto di enti tutti disuguali) coll'aggiunta di ciascuno dei suoi $n+1$ enti a uno conveniente dei simboli di n enti. Se dunque si dimostra numerabile l'insieme dei simboli che così si ottengono da g_n, sarà tale *a fortiori* anche il gruppo g_{n+1}. Ora si osservi che ad un simbolo di g_n si può aggiungere un ente determinato in $n+1$ modi (rispetto all'ordine) e ciò può farsi infinite volte, una cioè per ogni ente che si può aggiungere: si ottiene così una serie somma di $n+1$ serie tutte numerabili, che è numerabile essa pure. Ogni simbolo di g_n genera dunque un gruppo numerabile di simboli: l'insieme di tutti quelli ottenuti da tutti i simboli di g_n, che sono infiniti ma numerabili, sarà dunque numerabile.

Così è dimostrato che g_{n+1} è numerabile. Essendo già stato dimostrato numerabile il gruppo g_1, tale sarà quindi g_2, e perciò anche g_3 ecc. e quindi sono numerabili tutti i gruppi che compongono G. E siccome i gruppi di G formano un gruppo numerabile, così si conclude che è numerabile anche G, c. d. d..

4. Venendo ora alla nostra questione, si vede che le combinazioni di segni destinati a rappresentare i numeri in un sistema di numera-

zione com'è indicato nel § 1, e che potremo dire *simboli numerici*, devono esser tanti quanti i numeri reali, e, più propriamente, trattandosi di enti in numero infinito, devono uno ad uno corrispondere ai numeri reali. Il gruppo che ha per enti questi simboli numerici e quello dei numeri reali devono quindi essere della stessa potenza.

Il gruppo dei segni dato per cavarne il sistema di numerazione, sia ora finito, o infinito di 1^a potenza. L'insieme di tutti i simboli numerici ottenuti da esso e differenti fra loro per la qualità, per il numero e per l'ordine dei segni, costituisce un gruppo simile al gruppo G del teorema precedente, ed è quindi un gruppo numerabile. Esso non è dunque della medesima potenza del gruppo dei numeri reali, e neppure del gruppo degli irrazionali: talchè con esso è impossibile lo stabilire un sistema di numerazione.

Possiamo quindi rispondere così ad una parte della questione che ci eravamo proposti:

« È impossibile un sistema di numerazione col quale si rappresen-
« tino i numeri reali tutti od i soli irrazionali, il quale si serva per
« ognuno di essi soltanto di un numero finito di segni scelti in un
« gruppo infinito, ma numerabile. »

Se si toglie la condizione che i numeri reali si debbano indicare con un numero *finito* di segni, allora un sistema di numerazione è possibile. Uno semplice già esiste, solo che si usino i segni dei numeri razionali e gli altri:

$$(,)\ ,\ \lim,$$

giacchè ogni numero (razionale od irrazionale) è limite di serie convergenti di numeri razionali: e se questi sono $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ si scrive;

$$\lim (a_1, a_2, \dots a_n, \dots).$$

5. Si vede dalle cose precedenti (come del resto già si sa per altre vie) che i numeri irrazionali non possono essere tutti radicali, giacchè i simboli $\sqrt[n]{a}$ (con a, n numeri razionali) abbisognano di 3 soli segni, cioè:

$$a,\ n,\ \sqrt{\ }$$

scelti nel gruppo numerabile di segni composto del segno $\sqrt{\ }$ e di quelli dei numeri razionali. Così pure non ci danno tutti i numeri irrazionali nè ciascuna delle formule

$$\log_n a,\ \log_n \sqrt[p]{a},\ \log_n^{(p)} a = \overset{1}{\log_n} \overset{2}{\log_n} \ldots\ldots \overset{p}{\log_n} a \ldots\ldots$$

nè il loro insieme ecc.

È caso particolare del teorema del § precedente quello del Cantor, che i numeri algebrici reali non sono tutti i numeri reali, costituendo un gruppo numerabile. Infatti si osservi che, intendendosi per numero algebrico reale ogni radice reale di un'equazione non identica

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

dove n, a_1, a_2, a_3, ... a_n, sono numeri interi, e tale equazione avendo al più n radici reali differenti, possiamo indicare ogni numero algebrico reale col simbolo stesso della sua equazione, aggiuntovi uno dei numeri 1, 2, 3, ... n che stia a distinguerlo dalle altre radici dell'equazione, scrivendo così:

$$(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0)_r.$$

Ora i simboli numerici che così si ottengono discendono dalla serie di segni

$$0, 1, 2, 3, \ldots.\ n, \ldots., +, =, x, (,),$$

di cui solo un numero finito si usa per ogni simbolo. La serie precedente essendo evidentemente numerabile, si conclude che con essa non possono indicarsi tutti i numeri reali; dunque i numeri reali algebrici, che con essa si indicano, non sono tutti i numeri reali.

Si sa infatti che π non è un numero algebrico reale (Lindemann).

6. Se si volesse in qualche modo ideare un sistema di numerazione per tutti i numeri reali, il quale facesse uso per ogni simbolo di un numero finito di segni, esso, per quello che si è detto, dovrebbe essere attinto ad un gruppo di segni non numerabile, cioè di potenza superiore alla prima. Dunque si conclude, rispondendo alla questione del § 1:

« Per fare un sistema di numerazione per tutti i numeri reali

« 1. o, per alcuni numeri reali si usano infiniti segni,

« 2. o, usandone un numero finito per ogni numero, i segni che « occorrono costituiscono una serie non numerabile, i cui elementi « non sono quindi descrivibili ad uno ad uno, e non si possono esporre « sistematicamente uno dopo l'altro, in modo da poterci in questa « enumerazione spingere fino a quel segno che ci piace, come si fa per « i numeri interi ».

La serie dei segni necessari nel 2° caso deve quindi esser di potenza superiore alla 1ª. Se è vera l'idea del Cantor, che cioè la potenza del continuo lineare sia quella che immediatamente segue la potenza del gruppo dei numeri interi, allora un gruppo di segni con cui potere esprimere tutti i numeri reali dovrebbe essere di potenza uguale a quella dei numeri stessi che si vogliono esprimere, e conterrebbe quindi tanti segni quanti sono i numeri reali. Il sistema di numerazione più semplice sarebbe quindi quello che consistesse nel far corrispondere un diverso segno ad ogni numero reale, e si vede che neppure esso recherebbe vantaggio alcuno dal punto di vista della numerazione. Altrettanto *a fortiori* dicasi di un sistema nel quale i numeri fossero indicati con simboli composti di più di uno dei segni ora detti.

Del resto al concetto del sistema di numerazione più semplice a cui ora si accennava risponde l'Algebra (Aritmetica generale), la quale indica ogni numero con una lettera differente, almeno con l'intenzione; giacchè i segni di cui può disporre effettivamente a questo scopo sono le lettere e gli indici e gli apici, e non sono che un gruppo numerabile.

7. Fermiamoci un momento in particolare ai sistemi di numerazione fondati sugli ordinari concetti, e nei quali, a somiglianza di quello che si fa pei numeri frazionarii, si usi soltanto un numero finito di segni, scelti fra quelli dei numeri interi e di opportune operazioni in numero finito od infinito.

Le operazioni fra i numeri si indicano in generale con un segno (p. es.: —, +, log, $\sqrt{}$,) alcune si indicano senza segno sempre (p. es.: la potenza ecc.) altre talora col segno, talora no (p. es.: la moltiplicazione). Ma per il nostro scopo, quando l'indicazione di un'operazione fra numeri consista nello scrivere in un determinato modo questi numeri senza per altro far uso di nessun segno speciale, per maggior chiarezza intenderemo supplire introducendo un apposito segno, per tener conto anche di quell'operazione come delle altre.

Non occorrerà introdurre o scrivere *effettivamente* questo segno: basterà che esso stia nella nostra mente a rappresentare quell'operazione. Così p. es.: nell'espressione $(a\,b)^c$, avremo, secondo questa convenzione, 7 segni, cioè: 3 numeri a, b, c, le due parentesi, il segno della moltiplicazione e quello dell'elevazione a potenza. Per il nostro scopo, se si prende $\times$ per segno della moltiplicazione e $|$ per quello di potenza, l'espressione precedente è da considerarsi così:

$$(a \times b) \mid c$$

Per semplicità, diciamo indistintamente *enti* od *elementi numerici* tanto i segni dei numeri interi, quanto quelli delle operazioni che si vogliono usare, ed il gruppo di tutti gli elementi numerici si dica *gruppo S*.

Dal gruppo S presi n elementi numerici, con essi non si può fare che un numero finito di simboli numerici aventi significato di numero, vale a dire tanti *al più* quanti sono quelli che si possono ottenere da uno di tali simboli cambiando l'ordine degli elementi, tanti al più dunque quante sono le permutazioni P_n di n oggetti. Si è detto *al più*, giacchè alcuni dei simboli così ottenuti possono non rappresentar nessun numero. Così, p. es.: se si prosegue ad usare il segno $|$ interposto fra due numeri per indicare la potenza che ha per base il 1° numero e per esponente il secondo, dal simbolo $a \mid b$, in cui a e b sono numeri interi, si rilevano 6 permutazioni, che sono:

$$a|b,\ \ a\,b|,\ \ b\,a|,\ \ b|a,\ \ |a\,b,\ \ |b\,a,$$

delle quali solo la 1ª e la 4ª rappresentano numeri, mentre le altre sono prive di significato. Il numero dei simboli numerici fatto con n determinati segni ed aventi significato di numero, è quindi finito, ed è $\leqq P_n$. — Simboli numerici di due segni aventi significato di numero non ne esistono, giacchè un simbolo composto di un numero e di un segno di operazione o di due segni di operazione non vuol dir niente, e i simboli che contengono due soli numeri devono contenere un segno d'operazione espresso o sottinteso, talchè si raggiunga il numero di 3 segni.

Si vede dunque che i simboli numerici che possono utilmente servire in un sistema di numerazione sono non più (potremmo anzi senz'altro dir *meno*) di quelli che si ottengono dal gruppo S aggruppandone gli elementi in tutti i modi possibili quanto al loro ordine ed al loro numero. Ora se il gruppo dei segni di operazione proposti è infinito ma numerabile, tale sarà il gruppo S degli elementi numerici: quindi, applicando le conclusioni tratte in generale al § 4, si conclude che:

« È impossibile un sistema di numerazione col quale si rappresen-
« tino i numeri reali tutti, quando esso si giovi per ogni numero sol-
« tanto di un numero finito di segni scelti fra quelli dei numeri interi
« e quelli di operazioni, le quali siano solo finite o in numero infinito
« ma costituenti allora un gruppo numerabile, cioè segni di operazione
« indicabili coi numeri progressivi 1, 2, 3, ... — in modo da potere,
« contando, arrivare fino a quello che più ci piace ».

Si può osservare che lo stesso risultato negativo si otterrebbe se si tentasse un sistema di numerazione usando anche i segni delle frazioni oltre quelli dei numeri interi, giacchè tutti i numeri razionali (interi o frazionari) formano essi pure un gruppo di 1ª potenza, e quindi il gruppo S risulta pure numerabile e si giunge alla stessa conclusione precedente. Oltre a ciò, le frazioni stesse s'indicano appunto coi numeri interi o col segno d'operazione —, cosicchè rientrano fra i numeri che si ottengono colle considerazioni precedenti, se fra i segni di operazioni scelti v'era il segno —, e quindi non aggiungono nulla al sistema di numerazione.

8. Le conclusioni ottenute mostrano come sia inutile al nostro scopo lo studiare di estendere il numero d'operazioni note, quand'anche si facesse divenire infinito (purchè numerabile) come sarebbe il caso in cui si indicasse il mezzo di ottenere da ogni operazione un'altra nuova, nel modo stesso che dall'addizione si fa discendere la moltiplicazione, da questa la potenza, giacchè il modo stesso di generazione di queste operazioni fa sì che sono prodotte una alla volta insieme colle loro inverse, ed esse vengono quindi naturalmente a costituire un gruppo numerabile.

Si capisce anche come il metodo analitico di introduzione dei numeri (*) limitato alla sua forma più pura, non possa mai condurre al pieno concetto di tutti i numeri reali. Infatti, in quel metodo si generano i numeri colle operazioni, e queste, anche generalizzate successivamente, si è visto ora che sono impotenti ad esaurirli tutti. È questa la ragione per cui nel metodo analitico si nota quella specie di lacuna e di cambiamento di procedimento nel passaggio al numero irrazionale.

Il metodo sintetico d'introdurre i numeri presenta su quello analitico un notevole vantaggio, offrendo una maggiore omogeneità. Il perchè è facile a vedersi, e si desume dalle considerazioni del § 6. Infatti, il metodo analitico per la sua natura dispone solo di enti in numero infinito, ma di 1ª potenza, mentre il sintetico parte da classi di grandezze già costituite e che sono della potenza del continuo lineare, e quindi posseggono già tanti elementi quanti sono i numeri reali, sufficienti ad introdurli tutti contemporaneamente.

9. Concludendo, nello stato attuale della scienza si può senz'altro enunciare l'impossibilità di una numerazione per gli irrazionali, fondata sugli ordinari concetti. Potrebbe nascere speranza di qualche risultato, solo se si potesse dimostrare che fra la potenza del continuo e quella dei numeri interi ve ne sono altre, giacchè i gruppi di segni aventi una di queste potenze intermedie potrebbero *forse* servire a fondare un sistema di numerazione. Se si dimostra invece che ciò non è, allora la numerazione cogli ordinari concetti è impossibile affatto.

Per gli irrazionali non resta dunque che ricorrere ad indicarli con infiniti numeri razionali, e col concetto di limite, quello stesso che li genera, deviando pertanto dall'indole e dallo scopo della numerazione, che è quello di indicare i numeri con espressioni finite.

10. Ci piace, prima di terminare, di togliere un dubbio.

Potrebbe sembrare di risolvere la questione della numerazione con un numero finito di segni anche per gli irrazionali, usando, per indicare gli infiniti numeri razionali della serie convergente che ha per limite l'irrazionale, un segno unico generale a_r, dove a_r sia poi definito come funzione del numero r che percorre la serie dei valori 1, 2,

(*) Cfr. Il mio articolo: *Sul concetto di numero*. Periodico di Matematica. Anno II, fasc. IV e V.

3, ecc. Il numero sarebbe allora propriamente da indicarsi così:

$$\lim_{a_r = f(r)} (a_r),$$

dove si usano, oltre quelli dei numeri interi, solo i segni

$$\lim\,,\ =\,,\ a_r\,,\ (,)\,,$$

e quelli necessari per indicare la forma della funzione.

Si osservi peraltro che questa funzione serve a darci tutti i numeri razionali che definiscono un irrazionale, e quindi deve differire da un numero irrazionale ad un altro; le diverse funzioni $f(r)$ devono perciò esser tante quante i numeri irrazionali da rappresentare. Ora queste funzioni possibili sono in numero infinito, ma numerabile. Infatti se si vuole che si prestino ad un sistema di numerazione, devono indicare ciascuna un numero finito di operazioni da farsi su un numero finito di numeri (razionali), e i segni di cui constano sono da scegliersi fra tutti quelli dei numeri razionali (in numero infinito, gruppo numerabile) e fra i segni di operazione in numero finito, o, se infinito, numerabile, per evitare l'inutilità dell'introduzione di segni formanti gruppi di potenza superiore alla 1ª rilevata già al § 6. I segni di cui si può disporre essendo quindi in numero finito per ogni funzione, o da scegliersi in un gruppo numerabile di segni, ci conducono per il Teorema del § 3, ad un gruppo di funzioni solamente numerabile, che è quindi insufficiente allo scopo che ci proponiamo.

Pisa, ottobre 1890.

RODOLFO BETTAZZI.

ALCUNI TEOREMI

DELLA RECENTE GEOMETRIA DEL TRIANGOLO

I notevoli progressi fatti dalla geometria del triangolo negli ultimi tempi hanno dato origine presso le colte nazioni d'oltralpe a monografie più o meno complete sull'argomento. In Italia, per quanto ci consta, il soggetto non è stato ancora svolto in modo sistematico, così che il lettore digiuno delle nuove teoriche possa procurarsene adeguato concetto.

A noi parve che in questo Periodico, meglio che altrove, avesse a trovar sede un'esposizione siffatta. Se imperiose ragioni di spazio non l'avessero impedito avremmo procurato di pubblicare la traduzione dall'inglese dell'eccellente lavoro del Sig. J. Casey che ha per titolo *Geometria elementare recente,* di cui esiste anche un'edizione francese; ma ciò non potendo avvenire ci siamo proposti di esporre in alcuni brevi articoli i teoremi *elementari* più notevoli di queste nuove teorie. Quello che ora pubblichiamo comprende i primissimi teoremi, ai quali poi devesi l'origine della recente geometria, e, eccezion fatta dal n. 9, esso riposa sulle nozioni più ovvie della Planimetria.

Nella redazione di questo scritto oltre alla citata opera del Professor Casey ci siamo valsi delle pubblicazioni: A. I. G. T.: *A Syllabus of modern plane geometry* e D.r A. Emmerich: *Der Brocardsche Winkel des Dreiecks.*

1. Se nel triangolo ABC (Tav. I, fig. 1ª) da un punto qualunque C_1 di AB si tira una retta C_1B_1, a tagliare AC in B_1, cosicchè sia ang. $AC_1B_1 =$ ang. BCA, C_1B_1 chiamasi *antiparallela* a BC. I triangoli AB_1C_1, ABC sono simili e i quattro punti B, C, B_1, C_1 sono nella medesima circonferenza o conciclici.

Se per A conducesi la tangente PN al circolo O circoscritto ad ABC, ang. $BAP = BCA = AC_1B_1$, onde, PN è parallela a C_1B_1 e determina colla propria direzione quella delle antiparallele a BC. Segue poi che il raggio OA è perpendicolare a C_1B_1.

I lati del triangolo *ortico* di ABC, ossia del triangolo che ha per vertici i piedi delle altezze, sono rette antiparallele ai lati di ABC.

2. Sia ora MNP il triangolo formato dalle tre tangenti al cerchio ABC nei vertici del triangolo primitivo e conducasi per M una parallela a PN fino ad incontrare i lati AB, AC in C_2, B_2; C_2B_2 sarà antiparallela al lato BC e si avrà evidentemente $C_2M = MB = MC = MB_2$, onde AM biseca le antiparallele a BC. Similmente BN, CP bisecano le antiparallele a CA, AB. Le rette AM, BN, CP

chiamansi *simediane* del triangolo ABC rispetto ai lati BC, CA, AB rispettivamente.

Poichè $MB = MC$, $NC = NA$, $PA = PB$, pel teorema di Ceva, risulta subito che le tre simediane d'un triangolo passano per uno stesso punto K. Questo punto nomasi punto o centro delle simediane o *punto di Lemoine*.

Così se A', B', C' sono i punti medî dei lati del triangolo ABC, le parallele a questi lati sono bisecate dalle mediane AA', BB', CC' (che concorrono nel baricentro G), mentre le antiparallele sono bisecate dalle simediane AM, BN, CP (che concorrono in K). Le proposizioni reciproche sono anche vere.

3. Le congiungenti K e G ai vertici di ABC sono ugualmente inclinate alle bisettrici degli angoli interni. Infatti dalla similitudine dei triangoli ABC, AB_2C_2, deducesi $AB : AB_2 = BA' : B_2M$ talchè anche i triangoli ABA', AB_2M sono simili e si ha ang. $A'AB = B_2AM$.

Rette che formano angoli uguali colla bisettrice dell'angolo interno d'un triangolo son chiamate *coniugate isogonali* rispetto a quest'angolo e coppie di punti come G e K, che sono intersezioni di rette isogonali, denominansi coniugati isogonali.

4. Se nel triangolo ABC (fig. 2ª) le rette AX, AY siano coniugate isogonali, condotte da due punti qualunque X ed Y di esse le perpendicolari XM, YN ad AC e le perpendicolari XP, YQ a BA, si ha che il triangolo AXM è simile ad AYQ e il triangolo AXP simile ad AYN, onde

$$AX : XM = AY : YQ, \qquad XP : AX = YN : AY;$$

moltiplicando segue $XP : XM = YN : YQ$ ovvero $XP \,.\, YQ = XM \,.\, YN$. La proposizione reciproca è pure vera, poichè avendosi $XP : YN = XM : YQ$, i quadrilateri $APXM$, $ANYQ$ sono simili (inversamente) e le rette omologhe AX, AY formano angoli uguali coi lati omologhi AM, AQ.

Risulta da ciò che se AX, BX, CX sono tre trasversali del triangolo ABC, passanti per lo stesso punto X, e AY, BY, CY le loro coniugate isogonali, pure queste passano per uno stesso punto Y.

I rettangoli delle perpendicolari calate da G e K ai lati del triangolo ABC sono fra loro uguali.

5. Il punto K ha dai tre lati distanze proporzionali ai lati medesimi. Invero indicando con x, y, z queste distanze e calando dal punto A' di BC (fig. 3ª), intersezione di BC con AG, le perpendicolari $A'E$, $A'D$ ad AB, AC, si ha (4): $A'E \,.\, z = A'D \,.\, y$, ma $A'E \,.\, AB = A'D \,.\, AC$, onde, dividendo $\frac{z}{c} = \frac{y}{b}$ eguale anche ad $\frac{x}{a} = \frac{2\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}$.

6. La somma dei quadrati delle distanze di K ai lati di ABC è minima, poichè se x, y, z indicano le distanze di un punto qualunque del piano del triangolo dai lati, partendo dall'identità

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (ax + by + cz)^2 = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$$

ed avendosi $ax + by + cz = 2\Delta$ e $a^2 + b^2 + c^2$ costante, $x^2 + y^2 + z^2$ diverrà minima quando il 2° membro ha il minor valore possibile, ciò che avviene per $x : a = y : b = z : c$.

7. Rette congiungenti punti dei lati d'un triangolo equidistanti dalle estremità, col vertice opposto, son chiamate *coniugate isotomiche*. Se siano Aa', Bb', Cc' (fig. 4ª) tre trasversali d'un triangolo passanti per uno stesso punto O', Aa'', Bb'', Cc'' le loro coniugate isotomiche, risulta subito, pel teorema di Ceva, che pure queste si tagliano in uno stesso punto O''. Punti come O', O'' denominansi *isotomici* rispetto al triangolo ABC od anche *reciproci*.

8. Se in un triangolo ABC (fig. 5ª) si descrive per C un cerchio O tangente ad AB e in esso si tira la corda AD parallela a BC, BD taglia questo circolo in un punto Ω, pel quale si ha evidentemente ang. $\Omega BC = \Omega CA = \Omega AB$. Ciascuno di questi angoli è chiamato *angolo di Brocard* del triangolo ed è denotato con ω.

L'angolo di Brocard è lo stesso per tutti i triangoli simili. Infatti se sia $A'B'C'$ un triangolo simile ad ABC, O' il centro del cerchio tangente ad $A'B'$, passante per C', e D' il punto in cui la parallela a $B'C'$ taglia questo cerchio, si ha che i due triangoli AOC, $A'O'C'$ sono simili, come pure sono simili i triangoli AOD, $A'O'D'$. Segue da ciò che $AB : A'B' = AD : A'D'$ onde anche i triangoli DAB, $D'A'B'$ sono simili e quindi ang. $B'D'A' = BDA = \omega$.

Se il cerchio O taglia BC in C_1, l'angolo ω di Brocard pel triangolo ABC_1, simile ad ABC, è evidentemente uguale a quello del triangolo ABC.

9. Dai triangoli ΩBC, ΩCA, ΩAB, si ha

$$\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}(C-\omega)} = \frac{\Omega C}{\Omega B}, \quad \frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}(A-\omega)} = \frac{\Omega A}{\Omega C}, \quad \frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}(B-\omega)} = \frac{\Omega B}{\Omega A},$$

onde

$$\operatorname{sen}^3\omega = \operatorname{sen}(C-\omega)\operatorname{sen}(A-\omega)\operatorname{sen}(B-\omega)$$

e sviluppando

$$\begin{gathered}\operatorname{sen}^3\omega = \\ (\operatorname{sen}C\cos\omega - \operatorname{sen}\omega\cos C)(\operatorname{sen}A\cos\omega - \operatorname{sen}\omega\cos A)(\operatorname{sen}B\cos\omega - \operatorname{sen}\omega\cos B) \\ = \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C\cos^3\omega - \\ (\cos A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \cos B\operatorname{sen}C\operatorname{sen}A + \cos C\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B)\cos^2\omega\operatorname{sen}\omega \\ + (\cos A\cos B\operatorname{sen}C + \cos B\cos C\operatorname{sen}A + \cos C\cos A\operatorname{sen}B)\cos\omega\operatorname{sen}^2\omega \\ - \cos A\cos B\cos C\operatorname{sen}^3\omega.\end{gathered}$$

Ma dalla Trigonometria si ha che

$$\begin{gathered}\sum\cos A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C = 1 + \cos A\cos B\cos C, \\ \sum\operatorname{sen}A\cos B\cos C = \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C,\end{gathered}$$

per cui

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^3\omega = {}& \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C\cos^3\omega - (1+\cos A\cos B\cos C)\cos^2\omega\operatorname{sen}\omega \\ & + \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C\cos\omega\operatorname{sen}^2\omega - \cos A\cos B\cos C\operatorname{sen}^3\omega.\end{aligned}$$

Trasportando tutto in un membro e raccogliendo, risulta

$$\begin{gathered}\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C\cos\omega(\cos^2\omega + \operatorname{sen}^2\omega) - \\ (1+\cos A\cos B\cos C)\operatorname{sen}\omega(\cos^2\omega + \operatorname{sen}^2\omega) = 0\end{gathered}$$

e quindi

$$\begin{gathered}\cot\omega = \frac{1+\cos A\cos B\cos C}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C} = \\ \frac{\cos A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C + \cos B\operatorname{sen}C\operatorname{sen}A + \cos C\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C} = \\ \cot A + \cot B + \cot C.\end{gathered}$$

È facile esprimere $\cot\omega$ anche in funzione dei lati del triangolo. Si ha invero

$$\cot\omega = \frac{2\,b\,c\,.\cos A}{2\,b\,c\,.\,\text{sen}\,A} + \frac{2\,c\,a\,.\cos B}{2\,c\,a\,.\,\text{sen}\,B} + \frac{2\,a\,b\,.\cos C}{2\,a\,b\,.\,\text{sen}\,C} =$$
$$\frac{(c^2+b^2-a^2)+(a^2+c^2-b^2)+(b^2+a^2-c^2)}{4\,\Delta} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\,\Delta}$$

e poichè si è già trovato che la distanza x del punto di Lemoine dal lato $a \equiv BC$, soddisfa alla relazione $\frac{x}{a} = \frac{2\,\Delta}{a^2+b^2+c^2}$, si può assumere anche per definizione dell'angolo di Brocard l'espressione $\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\,\text{tang}\,\omega$. — Notisi che $\text{sen}\,\omega = \frac{2\,\Delta}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$.

La relazione $\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$, ora trovata, conferma che l'angolo di Brocard dipende esclusivamente dalla forma del triangolo.

Mostreremo ora come quest'angolo ha 30° per suo valore massimo. Si ha

$$0 \leqq (b^2-c^2)^2 + (c^2-a^2)^2 + (a^2-b^2)^2,$$

ovvero sviluppando, dividendo per 2 e trasportando:

$$-a^4 - b^4 - c^4 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \leqq 0,$$

quindi

$$-a^4 - b^4 - c^4 + 2\,b^2c^2 + 2\,c^2a^2 + 2\,a^2b^2 \leqq b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2$$
$$16\,\Delta^2 \leqq b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2$$

e introducendo il valore notato di $\text{sen}\,\omega$

$$\text{sen}\,\omega \leqq \frac{1}{2} \qquad \text{c. d. d.}.$$

Il valor massimo 30° di ω, si ha quando il triangolo ABC è equilatero.

10. Il punto Ω è chiamato il punto *positivo* di Brocard. Il punto *negativo* di Brocard Ω' (fig. 8ª) è quello pel quale ang. $\Omega' CB = \Omega' AC = \Omega' BA = \omega$.

I punti Ω, Ω' sono coniugati isogonali, conseguentemente il rettangolo delle perpendicolari condotte da essi a ciascun lato è il medesimo (4). Si ha inoltre ang. $B\Omega C = 180^\circ - C = C\Omega' A$, ang. $C\Omega A = 180^\circ - A = A\Omega' B$, ang. $A\Omega B = 180^\circ - B = B\Omega' C$.

11. Nel triangolo ABC, pel punto K delle simediane, conducansi le $F'KE$, $D'KF$, $E'KD$ parallele ai lati (fig. 6ª), dimostreremo intanto che i sei punti D, D', E, E', F, F' sono in un circolo che chiamasi *circolo di Lemoine*.

Tirisi FE'; il quadrilatero $AFKE'$ è un parallelogrammo, onde AK biseca FE', la quale per ciò (2) è antiparallela a BC nel triangolo ABC. Similmente DF' è antiparallela a CA, ED' ad AB. Sarà dunque ang. $AFE' = BCA = BF'D$, onde il trapezio $F'DE'F$ è isoscele, ossia $E'F = F'D$: analogamente $F'D = D'E$. Ora sia O il centro del cerchio circoscritto ad ABC, sarà OA perpendicolare ad FE' (1), sicchè la congiungente i punti medii di FE' e KO risulta perpendicolare ad FE' ed uguale alla metà del raggio del circumcircolo. Le FE', DF', ED' oltrechè uguali sono anche equidistanti dal punto medio σ di KO, per cui le loro estremità D, D', E, E', F, F' giaciono nella circonferenza di un circolo il cui centro è σ.

L'esagono che ha per vertici questi punti chiamasi poi *esagono di Lemoine*.

12. Dai triangoli simili ABC, KDD' le cui altezze, rispetto alle basi sovrapposte, siano AH, KP, si ha. $DD' : KP = BC : AH = a^2 : a.AH$, onde $DD' = \frac{a^2 . KP}{2\Delta} = \frac{a^2 . x}{2\Delta}$, ma si è trovato (5): $\frac{x}{a} = \frac{2\Delta}{a^2+b^2+c^2}$ quindi anche $DD' = \frac{a^3}{a^2+b^2+c^2}$. Similmente $EE' = \frac{b^3}{a^2+b^2+c^2}$; $FF' = \frac{c^3}{a^2+b^2+c^2}$, per cui $DD' : EE' : FF' = a^3 : b^3 : c^3$. In causa di questa proprietà il cerchio di Lemoine è nominato anche *cerchio di rapporto triplo*.

13. Avendosi evidentemente $AF : FE' = AC : CB$, $F'B : DF' = CB : AC$ ed osservando che $FE' = DF'$, segue, per divisione, $AF : F'B = b^2 : a^2$. Ma si ha ancora $FF' : AE' = AB : AC$, $AE' : AF = AB : AC$ onde $FF' : AF = c^2 : b^2$, sicchè $AF : FF' : F'B = b^2 : c^2 : a^2$. Analogamente risulta: $BD : DD' : D'C = c^2 : a^2 : b^2$, $CE : EE' : E'A = a^2 : b^2 : c^2$, per cui i lati del triangolo ABC sono divisi simmetricamente dal cerchio di Lemoine.

14. Il trapezio $F'DE''F$ essendo isoscele (11), consegue $FD = F''E'$. Analogamente potrà concludersi $DE = D'F'$, $EF = E'D'$: i triangoli FDE, $E'F'D'$ sono perciò uguali. Ma essendo inscrittibile l'esagono $DD'EE'FF'$ è ang. $DEF = DE'F = AFE' = BCA$, ed ang. $EFD = EF'D = BDF' = CAB$ onde il triangolo FDE, e quindi anche $E'F'D'$, è simile ad ABC. Confrontando FDE con ABC, sono vertici omologhi F ad A, D a B, E a C, confrontando invece $E'F'D'$ con ABC sono vertici omologhi E' ad A, F' a B, D' a C.

15. Se Ω, Ω' sono punti di Brocard del triangolo ABC, Ω, K sono i punti di Brocard del triangolo FDE e K, Ω' quelli del triangolo $E'F'D'$.

Per dimostrare la prima parte, si descrivano le circonferenze BDF, CED, AFE; queste si tagliano in un punto determinato Q (fig. 6ª e 7ª) che coincide con Ω: infatti detto Q (fig. 6ª) il punto d'intersezione delle prime due, si ha ang. $CQB = DQB + CQD = DFB + CED = (180° - ABC - BDF) + (180° - BCA - EDC) = (180° - BDF - EDC) + (180° - ABC - BCA) = FDE + CAB$, ma ang. $FQE = 360° - EQC - BQF - CQB = 360° - EDC - BDF - FDE - CAB = 180° - CAB$, onde la terza circonferenza passa pure per Q (*). Dall'eguaglianza $CQB = FDE + CAB$, sapendo che ang. $FDE = ABC$ (14) segue poi ang. $CQB = ABC + CAB = 180° - C$. In modo analogo si prova che $AQC = 180° - A$ onde (10) Q coincide con Ω. Ora poi si ha evidentemente (fig. 6ª): $\omega = \Omega CE = \Omega DE = \Omega BD = \Omega FD = \Omega AF = \Omega EF$, talchè Ω è punto positivo di Brocard del triangolo FDE. Per essere $F'E$ parellela a BC consegue ang. $DEK = DEF' = EDD' = EFD' = EFK = FEE' = FDE' = FDK$ talchè K è punto negativo di Brocard dello stesso triangolo. — In modo consimile si dimostra che K, Ω' sono i punti positivo e negativo di Brocard del triangolo $E'F'D'$.

Può utilmente osservarsi che le tre circonferenze BDF, CED, AFE sono rispettivamente tangenti ai lati DE, EF, FD del trian-

(*) Questa proprietà sussiste comunque si scelgano i punti F, D, E.

golo FDE (14), e le tre altre $BD'F'$, $CE'D'$, $AF'E'$, che si tagliano in Ω', sono tangenti ai lati $F'E'$, $D'F'$, $E'D'$ del triangolo $E'F'D'$.

16. Se K è il punto di Lemoine e O il centro del circolo circoscritto al triangolo ABC (fig. 8ª), descrivendo sopra OK come diametro un circolo, il cui centro σ coincide col centro del circolo di Lemoine (11), quel circolo chiamasi *circolo di Brocard.*

Se per O si conducono le perpendicolari OX, OY, OZ ai lati di ABC e si denotano con A', B', C' i punti in cui queste incontrano il circolo di Brocard, A', B', C' saranno evidentemente sulle parallele $F'E$, $D'F$, $E'D$ ai lati di ABC, condotte per K. Risulta da ciò che $A'X$, $B'Y$, $C'Z$ sono le distanze del punto K dai lati, quindi proporzionali a questi lati (5). Condotte $A'B$, $B'C$, $C'A$ e detto Ω il punto d'intersezione di $A'B$ con $B'C$, i triangoli BXA', CYB', AZC' risultano simili, poichè X, Y, Z sono i punti medî di BC, CA, AB, e perciò è l'ang. $XA'B = OA'\Omega = YB'C = \Omega B'O$. I punti A', B', O, Ω sono dunque sulla circonferenza del circolo di Brocard e le BA', CB' si tagliano su questa circonferenza. Analogamente CB' ed AC' si tagliano sulla medesima circonferenza, cosicchè le rette BA', CB', AC' concorrono in uno stesso punto il quale non è altro che il punto positivo Ω di Brocard del triangolo ABC.

In modo consimile si prova che le rette AB', BC', CA' si tagliano sul circolo di Brocard nel punto negativo Ω' di Brocard.

È chiaro che ang. $\Omega\sigma K = 2\Omega A'K = 2\Omega BC = 2ABC' = 2KC'\Omega' = K\sigma\Omega' = 2\omega$.

Per essere ang. $C'OA' = ABC = C'B'A'$, ang. $A'OB' = BCA = A'C'B'$, risulta poi che il triangolo $A'B'C'$ è inversamente simile ad ABC.

17. Se pel punto K delle simediane (fig. 9ª), si tirano le antiparallele fKe', dKf', eKd' a BC, CA, AB rispettivamente, dimostreremo che i sei punti d, d', e, e', f, f' sono tutti nello stesso circolo chiamato *secondo circolo di Lemoine.*

Considerando il triangolo fKf', si ha ang. $BCA = Kf'f = Kff'$, onde $Kf = Kf'$, similmente risulta $Kd' = Kd$ e poichè K biseca fe', df', ed' (2), segue $fK = Ke' = eK = Kd' = dK = Kf'$, ciò che v. d.. — Ciascuna delle figure come $def'd'$ è poi un rettangolo, talchè i triangoli inscritti fde, $e'f'd'$ hanno i loro lati perpendicolari a quelli del triangolo ABC.

Notisi che $\frac{dd'}{d'e} = \cos A$, $\frac{ee'}{ed'} = \cos B$, $\frac{ff'}{fe'} = \cos C$, e poichè $d'e = fe'$ i segmenti che questo circolo intercetta sui lati di ABC sono proporzionali ai coseni degli angoli, onde il nome di *circolo del coseno* datogli dagli inglesi.

18. Se A', B', C' sono i vertici del triangolo ortico di ABC (fig. 9ª) ed α, β, γ i punti medî di $A'B'C'$ e se $\beta\gamma$ taglia CA, AB in N', H, $\gamma\alpha$ taglia AB, BC in H', M, $\alpha\beta$ taglia BC, CA in M', N rispettivamente, i sei punti H, H', M, M', N, N', sono tutti nella circonferenza del circolo nominato *circolo di Taylor* il cui centro è nel centro del circolo inscritto al triangolo $\alpha\beta\gamma$.

Infatti, poichè $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ sono parallele rispettivamente a $C'B'$, $A'C'$ e quindi antiparallele a BC, CA (1), (2). sarà ang. $H'H\gamma = BCA = \gamma H'H$, per cui $H\gamma = \gamma H'$. Similmente $M\alpha = \alpha M'$, $N\beta = \beta N'$. Per essere poi γ un punto della simediana KC ed HN' parallela ad fe', MH' parallela a df', segue $Kd : Ke' = \gamma M : \gamma N'$, ed avendosi (17) $Kd = Ke'$, si deduce che $\gamma M = \gamma N'$ e che $N'M$ è parallela ad AB e per conseguenzaanti parallela ad $M'N$ nel triangolo CNM'. I punti M', M, N', N sono dunque conciclici (1). Ma com'è $\gamma M = \gamma N'$ così è $\alpha N = \alpha H'$, $\beta H = \beta M'$, onde $NM' = HN' = MH'$ e la circonferenza $M'MN'N$ passa per H' e H.

È chiaro poi che questa circonferenza ha il suo centro nelle bisettrici degli angoli interni del triangolo $\alpha\beta\gamma$, poichè sono isosceli i triangoli $\alpha M'M$, $\beta N'N$, $\gamma H'H$, dunque nel centro del cerchio inscritto a questo triangolo.

Se poi si osserva che per essere $\gamma N'$ parallela a Ke', $\gamma A'$ a Kd', e K, γ punti della medesima retta, $Kd' : \gamma A' = Ke' : \gamma N'$, talchè $A'N'$ risulta parallela a $d'e'$, e che quest'ultima retta è perpendicolare a CA (17), il punto N' è la proiezione di A' su CA. Analogamente N è la proiezione di C' su CA. A motivo di questa proprietà si definisce anche il circolo di Taylor, come quello la cui circonferenza passa per le proiezioni dei vertici del triangolo ortico sui lati di ABC che non passano per essi.

19. Indicando con T_1, T_2, T_3 i circoli di Taylor dei triangoli COB, AOC, BOA, dove O è l'ortocentro di ABC, si ha la proprietà che i centri di questi circoli coincidono coi centri dei cerchi ex-inscritti al triangolo $\alpha\beta\gamma$.

Infatti nel triangolo COB della fig. 9ª supponendo cambiata la lettera O in A e nel triangolo ABC la lettera A in O (fig. 10ª), sarà O l'ortocentro di ABC e i triangoli $A'B'C'$, $\alpha\beta\gamma$ saranno gli stessi, salvo la diversa denominazione dei vertici. Avendosi ora qui come precedentemente (18), $\alpha M = \alpha M'$, $\beta N = \beta N'$, $\gamma H = \gamma H'$ è chiaro che il cerchio Taylor T_1 relativo al triangolo COB della fig. 9ª od ABC della fig. 10ª, avrà il suo centro nella bisettrice dell'angolo interno α e nelle bisettrici degli angoli esterni β e γ del triangolo $\alpha\beta\gamma$, quindi nel centro del cerchio ex-inscritto a questo triangolo relativo al lato $\beta\gamma$. Altrettanto vale per i cerchi di Taylor T_2, T_3 relativi ai triangoli AOC, BOA della fig. 9ª.

20. Se K è il punto delle simediane del triangolo ABC (fig. 11ª) e sopra KA, KB, KC si prendono i punti A', B', C' cosicchè $KA' : KA = KB' : KB = KC' : KC =$ rapporto costante e $B'C'$ taglia i lati CA, AB in E, F', $C'A'$ taglia AB, BC in F, D', $A'B'$ taglia BC, CA in D, E', i sei punti D, D', E, E', F, F' sono sulla circonferenza d'un circolo nominato *circolo di Tucker* il cui centro biseca la distanza dei centri O, O' dei circoli circoscritti ad ABC, $A'B'C'$.

Tirata KO e trovato quel punto O' di essa pel quale $KO' : KO = KA' : KA$, poi condotte $A'O'$, $B'O'$, $C'O'$; AO, BO, CO, si ha subito $A'O' : AO = B'O' : BO = C'O' : CO$, quindi $A'O' = B'O' = C'O'$ talchè O' è centro del circumcircolo di $A'B'C'$. Ed ora ragionando come al n. 11 segue che l'esagono $DD'EE'FF'$ è inscrivibile.

Con ragionamento analogo a quello del n. 14 si dimostra poi che i triangoli FDE, $E'F'D'$ sono eguali fra loro e simili ad ABC.

21. I circoli circoscritti e di Lemoine, il secondo circolo di Lemoine e il circolo di Taylor sono tutti casi particolari dei circoli di Tucker.

Il circolo circoscritto è il circolo di Tucker che risulta dal supporre ridotti ad un punto i lati FE', DF', ED', dell'esagono inscrittibile, antiparalleli ai lati di ABC.

Il primo circolo di Lemoine è il circolo di Tucker che si ottiene immaginando che il triangolo $A'B'C'$, si riduca al punto K.

Il secondo circolo di Lemoine è il circolo di Tucker che si ha supponendo le antiparallele FE', DF', ED', ai lati di ABC, passanti pel punto K.

Finalmente poichè dalla fig. 9ª, essendo i punti H', H, M', M, N', N conciclici ed MH' antiparallela ad AC e NM' antiparallela ad AB nel triangolo ABC, si ha ang. $MNH = MH'H = BCA$, ang. $NHM = NM'M = CAB$, risulta che il triangolo HMN è simile ad ABC: il suo cerchio circoscritto è perciò uno dei cerchi del sistema di Tucker.

A. Lugli.

ALCUNI TEMI DI MATEMATICA

PROPOSTI

PER LA LICENZA NEI LICEI DI FRANCIA

1. Algeri. 29 aprile 1889. — Due mobili M ed N, soggetti alla sola azione della gravità, discendono lungo due piani inclinati OP, OQ formanti gli angoli α e β coll'orizzonte. Essi partono senza velocità iniziale, l'uno dal punto A di OP, l'altro dal punto B di OQ. Si dà $OA = a$, $OB = b$. Calcolare dopo quanto tempo la retta MN che congiunge i due mobili sarà orizzontale. Dare le condizioni di possibilità del problema. — Applicazione numerica senza l'uso dei logaritmi: $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $a = 40^m$, $b = 10^m$.

Si adotterà per la misura dell'accelerazione dovuta alla gravità $g = 9^m, 81$.

2. Bordeaux. 29 aprile 1889. — 1.° È dato un cerchio O, di raggio r; sul raggio OA prolungato, si prenda un punto P e da questo punto si conducano le tangenti PM, PN alla circonferenza O. Queste tangenti tagliano in R ed S la tangente al cerchio condotta pel punto A.

Studiare la variazione del rapporto della superficie del triangolo PRS alla superficie del triangolo PMN allorchè il punto P si muove sulla retta OA.

2.° Siano, in un piano, OA, OB, OC tre rette tali che si abbia angolo $COA =$ ang. $AOB = 60°$; si abbassino da un punto P, situato nell'angolo AOB, le perpendicolari PQ, PR, PS rispettivamente su OA, OB, OC. Mostrare che si ha, qualunque sia il punto P, $PQ + PR = PS$.

3. Caen. 29 aprile 1889. — 1.° Conoscendo il lato d'un poligono regolare di $2n$ lati inscritto in un cerchio dato, calcolare il lato del poligono regolare

di n lati inscritto nello stesso cerchio. Determinare, col mezzo della formola trovata, il lato del pentagono regolare in funzione del raggio del cerchio circoscritto.

2.° Calcolare gli angoli B e C d'un triangolo $A\,B\,C$, sapendo che l'angolo A è uguale a $45°$ e che il lato a è doppio della differenza $b - c$.

— 1 maggio 1889. — 1.° Trovare un numero intero x, tale che il doppio del suo logaritmo volgare superi d'una unità il logaritmo del numero $x + \frac{11}{10}$.

2.° Risolvere un triangolo rettangolo conoscendo la lunghezza dell'ipotenusa e quella della bisettrice dell'angolo retto.

3.° Un raggio luminoso $A\,B$ si riflette in B sopra uno specchio M, secondo $B\,C$, poi secondo $C\,D$ sopra un secondo specchio M'. Chiamando O il punto di intersezione di $A\,B$, $C\,D$ si domanda di determinare l'angolo di deviazione $D\,O\,A = C\,O\,B$, conoscendo l'angolo α che fanno i due specchi.

4. Clermont. 29 aprile 1889. — 1.° Volume generato da un segmento di cerchio nel ruotare intorno ad un diametro del cerchio che non attraversa il segmento.

2.° È dato un triangolo $A\,B\,C$, rettangolo in A; per A si conduce un cerchio di centro F tangente in B all'ipotenusa; si conduce un secondo cerchio di centro G passante per A e tangente in C all'ipotenusa. Si domanda: — a) di dimostrare che questi due cerchi sono tangenti; — b) i lati del triangolo $A\,B\,C$ essendo dati, di calcolare i raggi dei cerchi F e G e i segmenti $A\,D$, $A\,E$ determinati da questi cerchi sui lati $A\,C$, $A\,B$ prolungati; — c) il lato $B\,C = a$ essendo soltanto conosciuto, di determinare gli altri due lati $A\,B$, $A\,C$, in modo che si abbia $C\,D + B\,E = m$.

— 1 maggio 1889. — M è un punto del primo quadrante d'una circonferenza. Quale dev'essere la posizione del punto M perchè la superficie totale del cilindro generato da $M\,Q\,O\,P$ uguagli $\pi\,a^2$? Massimo di questa superficie totale e calcolo numerico dei valori di $O\,P$ ed $O\,Q$ a meno di $\frac{1}{10000}$, prendendo il raggio per unità.

5. Digione. 30 aprile 1889. — Risolvere le equazioni

$$x^4 + y^4 = b^4, \qquad x - y = a;$$

x ed y indicando le incognite, a e b delle quantità date.

— 2 maggio 1889. — Qual valore bisogna attribuire ad a perchè quello dei valori positivi di x che rende massima o minima l'espressione $\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{x}{2} - 1$ sia precisamente uguale a questo massimo o minimo?

6. Grenoble. 29 aprile 1889. — 1.° Si danno i raggi R ed r dei cerchi inscritto e circoscritto ad un triangolo isoscele. Trovare la distanza dei centri di questi cerchi e la base di questo triangolo.

2.° Una sfera pesante M è lanciata dal basso in alto secondo la linea di maggior pendenza $A\,X$ d'un piano inclinato di $30°$ sull'orizzonte. Quale dev'essere la velocità iniziale V_0, diretta secondo $A\,X$, perchè il mobile si arresti alla fine di 10 secondi per ridiscendere. Calcolare allora la velocità del mobile quando passerà, sia salendo, sia discendendo, in un punto M, tale che $AM = 183^m, 75$. Si trascurerà l'attrito e si prenderà $g = 9{,}8$.

7. Lilla. 29 aprile 1889. — Sono dati un cerchio O, di raggio R, e due diametri rettangolari OA, OB. Determinare su OA un punto M esterno al cerchio tale che se si conduce da questo punto la tangente MP al cerchio, l'area del triangolo OPM sia all'area del triangolo OPB in un rapporto dato m^2. — Discussione.

8. Lione. 29 aprile 1889. — In un triangolo rettilineo, si danno gli angoli $A = 81^\circ.\ 47'.\ 12'', 5$; $B = 38^\circ.\ 12'.\ 47'', 5$ ed il raggio del cerchio inscritto $r = 1518^m, 2$. Si domanda di calcolare i lati a, b, c a meno d'un decimetro e la superficie in centiare.

— 30 aprile 1889. — È dato un triangolo ABC e si domanda di condurre una parallela MN alla base AB in modo che il trapezio $AMNB$ sia uguale ai due terzi del triangolo MCN.

Dati numerici $AB = 53^m, 40$, ang. $BAC = 50^\circ.\ 25'.\ 25''$, ang. $ABC = 62^\circ.\ 40'.\ 50''$.

9. Marsiglia. 29 aprile 1889. — Dato un cono ABC, lo si tagli con un piano parallelo alla base, si domanda: — 1.° di valutare il volume del cono $A'B'C'$ che ha per base la sezione $B'\ C'$ e per vertice il centro A' della base del primo cono; — 2°. come dev'essere condotto il piano secante $B'\ C'$ perchè il volume $A'B'C'$ sia massimo; — 3.° operando sul cono $A'\ B'\ C'$ come sul primo, si ottiene un terzo cono $A''\ B''\ C''$ sul quale si continua la stessa costruzione, e così di seguito, in modo che l'altezza di ciascuno di questi coni sia a quella del cono che lo precede come l'altezza di $A'\ B'\ C'$ sta a quella di ABC.

Trovare la somma dei volumi di questi coni il cui numero cresce indefinitamente.

— 1 maggio 1889. — Trasformare il numero $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ in una somma di due radicali semplici.

— 3 maggio 1889. — È dato un esagono regolare. I vertici incontrati percorrendo il perimetro in un senso determinato sono successivamente $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6$. Al vertice A_1 si ponga un peso di 1^{kg}; al vertice A_2 un peso di 2^{kg}; al vertice A_3 un peso di 3^{kg}, e così di seguito fino al vertice A_6, in cui si pone un peso di 6^{kg}. Dimostrare che il centro di gravità di questi sei pesi è situato nella linea $A_2\ A_5$ ad una distanza da A_5 uguale ai $\frac{5}{7}$ del lato dell'esagono.

10. Montpellier. 29 aprile 1889. — È dato un circolo di centro O e raggio R. Si prendano sul cerchio due punti A, B e si dia l'angolo AOB, che si chiamerà θ.

Ciò posto si domanda d'inscrivere nel cerchio un trapezio d'area data i cui lati paralleli passino rispettivamente pei punti A e B.

Discutere il problema e dimostrare che fra i trapezi considerati, quello pel quale l'area è massima è un rettangolo.

— 1 maggio 1889. — Due cerchi tangenti esternamente hanno per raggi R ed R'. Calcolare: 1.° — i lati; 2.° — la superficie; 3.° — gli angoli del triangolo formato dalle tangenti comuni ai due cerchi.

Cercare quale dev'essere il rapporto dei raggi perchè questo triangolo sia rettangolo.

— 3 maggio 1889. — Risolvere il sistema d'equazioni

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a; \quad \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^3 y = 8a^3.$$

Trovare fra quali limiti dev'essere compreso il numero a perchè il sistema ammetta soluzioni. Trovare la condizione necessaria e sufficiente perchè queste equazioni ammettano un sistema di soluzioni formato da due archi complementari.

— 8 maggio 1889. — Determinare gli angoli A e B posto che

$$\operatorname{tang} A \operatorname{tang} B = m, \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} B = n,$$

dove m ed n sono dati. (Si potrà prendere per incognita $\operatorname{tang} \frac{1}{2} A$ e $\operatorname{tang} \frac{1}{2} B$).

11. Nancy. 29 aprile 1889. — 1.° Essendo data una sfera solida, si domanda: — a) di determinare il suo raggio; — b) di far passare un cerchio massimo per due punti dati della superficie di questa sfera; — c) di far passare un cerchio minore per tre punti dati di questa superficie.

2.° Esprimere $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ in funzione di $\operatorname{tg} \varphi$. Indicare i segni della formola a trovare, secondo che φ è compresa fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, fra $\frac{\pi}{2}$ e π, fra π e $\frac{3\pi}{2}$ e fra $\frac{3\pi}{2}$ e 2π.

3.° Si fa arrivare sulla faccia 1 d'un prisma un raggio radente questa faccia; questo raggio sorte per la faccia 2, facendo colla normale a questa faccia un angolo α. Sia φ l'angolo del prisma e n il suo indice, dimostrare che si ha

$$\sqrt{n^2 - 1} = \frac{\cos \varphi + \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \varphi}.$$

— 1 maggio 1889. — 1.° Spiegare la conversione delle frazioni ordinarie in frazioni decimali e i differenti casi che possono presentarsi.

2.° A quali condizioni deve soddisfare l'angolo α perchè, qualunque sia il valore reale attribuito ad x, il trinomio $x^2 + x + \operatorname{tg} \alpha$ sia superiore a $\frac{3}{4}$?

12. Parigi. 29 aprile 1889. — 1.° Essendo dato un cerchio di raggio R ed una tangente fissa AB, trovare sulla circonferenza un punto M tale che abbassando da questo punto la perpendicolare MP sulla tangente AB, si abbia $MP + AP = a$, a indicando una lunghezza data. Discussione.

2.° Volume generato da un segmento di cerchio ABC ruotante intorno ad un diametro DD' esterno al segmento. Dimostrazione.

— 1 maggio 1889. — È dato un cerchio ed uno de' suoi diametri AOB.

Si domanda di condurre un secondo diametro COC' in modo che facendo ruotare i segmenti circolari AMC ed $AM'C'$ intorno ad AB, il volume V' generato dal secondo segmento sia il triplo del volume V generato dal primo. Si calcolerà il coseno dell'angolo AOC.

13. Rennes. 29 aprile 1889. — Dimostrare che il prodotto dei valori di x pei quali $\frac{x^2-2}{x^2+px+q}$ è massima o minima è costante ed uguale a 2.

— 30 aprile 1889. — Un punto A, posto alla distanza $OA = a$ dal centro O d'una circonferenza data, di raggio r, e interno ad essa, è il vertice di un angolo MAN la cui misura 2α è data. Calcolare l'inclinazione della bisettrice dell'angolo MAN sulla OA, in modo che il rapporto delle due corde MAM', NAN' sia uguale ad un numero dato k.

— 2 maggio 1889. — A e B essendo due punti fissi ed Ox la proiezione su di un piano P (orizzontale per esempio) della retta OAB che li congiunge e incontra questo piano in O, si tracci nel piano P una linea OI inclinata rispetto ad Ox dell'angolo α. Trovare su questa linea un punto M tale che la somma dei quadrati delle sue distanze da A e B abbia il valore s^2: $MA^2 + MB^2 = s^2$.

Minimo di questa somma e posizione corrispondente di M. Come cambierà questo punto M pel quale s è minima quando si farà variare α?

Dati: ang. $xOA = \beta$, $OA = a$, $OB = b$.

TEMI DI MATEMATICA

PER LA LICENZA NEL R. LICEO DI BOLOGNA

1. Si costruisca un triangolo di cui sono date le tre altezze.

2. Si determini l'equazione di condizione che deve vincolare i coefficienti delle due equazioni:

$$x^2 + px + q = 0, \quad y^2 + p'y + q' = 0$$

affinchè una delle due radici di una di esse sia reciproca di una delle due radici dell'altra.

(Sessione di luglio, 1890).

1. Si abbassi di grado l'equazione

$$4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 6x + 18 = 0$$

sapendosi che ha una coppia di radici uguali.

2. Si calcoli la somma delle quinte potenze delle radici dell'equazione

$$x^2 + px + q = 0.$$

3. Si calcoli la somma delle perpendicolari condotte da un punto qualunque interno d'un esagono regolare ai lati di esso, noto essendone il perimetro.

4. Noto il diametro della sfera che circoscrive un esaedro regolare, si determini la somma delle perpendicolari condotte da un punto qualunque interno di esso esaedro alle sue facce.

(Sessione d'ottobre, 1890).

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 66*, 67, 68 e 71*

66*. *Trovare una formola pel termine* n.° *della serie* a, b, a, b, ...

(D. Besso).

Soluzione di *P. P. Rizzuti*, allievo del R. Liceo di Catanzaro, e di *G. M. Nobile*, allievo del R. Istituto tecnico di Chieti.

La formola chiesta è:

$$\frac{(a+b)-(-1)^n(a-b)}{2}.$$

Infatti, se n è dispari $(-1)^n = -1$ e quindi la formola diviene:

$$\frac{(a+b)+(a-b)}{2} = \frac{2a}{2} = a;$$

se n è pari $(-1)^n = 1$ e la formola diviene:

$$\frac{(a+b)-(a-b)}{2} = \frac{2b}{2} = b.$$

c. d. d.

Soluzione di *O. Manfredi*, allievo del R. Istituto tecnico di Reggio Emilia.

Il termine n.° avrà la forma $a^x b^y$ dove sarà $x = 1$ per n dispari ed $x = 0$ per n pari. L'opposto accadrà per y. Ne segue che si potrà porre

$$x = \operatorname{sen}^2\left(n\frac{\pi}{2}\right); = y \quad \cos^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

od anche

$$x = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right); \quad y = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right).$$

67. *Trovare una formola pel termine* n.° *della serie* $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_m, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_m, \ldots\ldots\ldots$

(D. Besso),

Soluzione del Prof. *F. Viaggi*.

Pongo

$$S_h = 1 + \cos\frac{2h\pi}{m} + \cos\frac{4h\pi}{m} + \ldots + \cos\frac{2(m-1)h\pi}{m}.$$

Nella identità

$$2\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi}{m}\,.\,\cos\frac{2(l-1)h\pi}{m} = \mathrm{sen}\,\frac{(2l-1)h\pi}{m} - \mathrm{sen}\,\frac{(2l-3)h\pi}{m}$$

fo successivamente $l = 2, 3, \ldots, m$, addiziono le eguaglianze risultanti e dopo semplificazioni ottengo:

$$2\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi}{m}\left[\cos\frac{2h\pi}{m} + \cos\frac{4h\pi}{m} + \ldots + \cos\frac{2(m-1)h\pi}{m}\right] = \mathrm{sen}\,\frac{(2m-1)h\pi}{m} - \mathrm{sen}\,\frac{h\pi}{m}$$

il 2^0 membro è identicamente eguale a $-2\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi}{m}$, perciò trasportando tutto a 1^0 membro e dividendo per 2, ho:

$$\mathrm{sen}\,\frac{h\pi}{m}\,.\,S_h = 0.$$

Dalla quale risulta che se h non è multiplo di m, e quindi $\mathrm{sen}\,\frac{h\pi}{m}$ non è zero, è $S_h = 0$; se è poi h multiplo di m dalla definizione di S_h si vede che $S_h = m$.

Perciò il termine $n.^0$ della serie proposta è fornito dalla espressione

$$\frac{1}{m}\left(S_{n-1}\,a_1 + S_{n-2}\,a_2 + \ldots + S_{n-m}\,a_m\right).$$

Osservazione. — S_h è anchè la somma delle potenze h^{esimo} delle radici dell'equazione $x^m - 1 = 0$.

Soluzione del Prof. *R. Bettazzi*.

Si ha (Genocchi, Peano - *Calcolo Differenziale*) che la posizione

$$F(x) = \lim_{t=\infty}\frac{(1+\mathrm{sen}\,\pi x)^t - 1}{(1+\mathrm{sen}\,\pi x)^t + 1}$$

ha il valore 0 per x intero, il valore ± 1 per x non intero, la funzione

$$f(x) = 1 - \left[F(x)\right]^2$$

avrà quindi il valore 1 per x intero e il valore 0 per x non intero.

Allora

$$\varphi(n,m) = a_1 f\left(\frac{n-1}{m}\right) + a_2 f\left(\frac{n-2}{m}\right) + \ldots + a_m f\left(\frac{n-m}{m}\right)$$

è un' espressione per il termine $n.^{\circ}$ della serie $a_1, a_2, \ldots a_m, a_1, a_2, \ldots a_m, \ldots$ poichè $\varphi(n, m) = a_r$ quando $n \equiv r \pmod{m}$ (*).

68. *Se il punto d' incontro degli archi bisettori degli angoli d' un triangolo sferico coincide col punto d' incontro degli archi mediani dei lati, è necessario che il triangolo sia equilatero?* (D. BESSO).

Soluzione del Prof. *F. Viaggi* (*).

Sia ABC un triangolo sferico, A_1 il punto antipodo di A, M il punto medio di BC. Suppongo AB, AC supplementari. Perciò AB, AC sono rispettivamente eguali a CA_1, BA_1; onde i triangoli conseguenti ABC, A_1CB hanno i tre lati eguali ai tre lati e se ne conchiude l'eguaglianza degli angoli ABC, A_1CB: ed ora i triangoli ABM, A_1CM vengono ad avere due lati eguali a due lati ed eguali gli angoli compresi, se ne deduce l'eguaglianza degli angoli BAM, MA_1C e quindi anche di BAM, MAC. Ossia: « Se due lati d'un triangolo « sferico sono supplementari (e quindi tali anche gli angoli opposti), l'arco biset- « tore e il mediano, che partono dal loro vertice comune, coincidono (e sono eguali « a un quadrante) ». Agevolmente si dimostra la reciproca: « Se l'arco biset- « tore e il mediano, che partono da un vertice di un triangolo, coincidono, e « i lati che passano per lo stesso vertice non sono eguali, questi sono supple- « mentari ».

Premessi i quali teoremi, si vede che i triangoli e i soli che soddisfano alle condizioni del problema, sono quelli in cui due lati sono supplementi del terzo: questo terzo è evidentemente minore di 120°.

71*. *a). Il massimo comun divisore di due numeri è 24. Facendone la ricerca col metodo delle divisioni, si trovano i numeri 3, 4, 5 e 6 come quozienti delle successive divisioni che occorre fare. Quali sono i due numeri?*

b). Generalizzare il problema ed il metodo per risolverlo.

(G. FRATTINI).

Soluzione del Sig. *C. Aiello*, allievo del R. Liceo V. E. di Napoli (***).

a). Chiamo con A e B i due numeri il cui m. c. d. è 24 e, supponendo $A > B$, fo il solito quadro per trovare il m. c. d. col metodo delle divisioni successive:

	3	4	5	6
A	B	a	b	24
a	b	24	0	

Come si vede da questo quadro noi conosciamo tutto fuorchè A e B ed i resti successivi a e b. Ora $b = 6 \,.\, 24$ ed $a = 5b + 24 = 5 \,.\, 6 \,.\, 24 + 24 =$

(*) Un' altra soluzione venne inviata dal Sig. Prof. *L. Carlini*.

(**) Un' altra soluzione venne inviata dal Sig. Prof. *S. Catania*.

(***) Altre soluzioni pervennero da *R. Bencivenga* (Collegio militare Roma), *S. Lopriore* (Regio Liceo Bari), *A. Restifa* (R. Liceo Acireale).

31 . 24. Cogniti a e b, si conoscono anche A e B, perchè $B = 4a + b$ e $A = 3B + a$, onde $B = 3120$ e $A = 10104$.

b). Sieno x e y due numeri il cui m. c. d. è m ed i quozienti successivi $a, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$. Ecco il quadro per le operazioni:

	a	a_1	a_2	a_3			a_n
x	y	β	β_1	β_2	β_3		m
β	β_1	β_2	β_3			0	

Da questo quadro si ricava

$$\frac{x}{y} = a + \frac{\beta}{y} = a + \frac{1}{\frac{y}{\beta}}:$$

ma $\frac{y}{\beta} = a_1 + \frac{\beta_1}{\beta} = a_1 + \frac{1}{\frac{\beta}{\beta_1}}$, quindi:

$$\frac{x}{y} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\frac{\beta}{\beta_1}}}.$$

Seguitando così si giunge a trovare:

$$\frac{x}{y} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots\cdots \atop \cdots\cdots\cdots\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

la quale frazione continua si può mettere nella forma $\frac{p}{q}$ in cui p e q sono primi fra loro, e allora sarà $x = mp$, $y = mq$.

Si dichiara inoltre ricevimento delle soluzioni seguenti: quistione **75.**^{bis} dal Sig. *S. Catania, A. de Zolt, G. Fumanti, L. Mariscotti, F. Viaggi*; **76**^{bis}. *R. Catani, S. Catania, A. de Falco, G. Fumanti, S. Gatti, L. Mariscotti, F. Viaggi*; **77**'. *G. Calvitti, R. Catani, G. Ezio, F. Marantoni, A. Mucci, A. Ognissanti, G. Paoli, P. P. Rizzuti, G. Trapani*; **79**'. *A. Baldassarre, M. Canci, R. Catani, A. Dal Buono, G. Fumanti, P. Marano, F. Marantoni, G. Paoli, A. Perna, G. Trapani* — soluzioni alle quali si darà evasione nei venturi fascicoli.

La Redazione.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

80. Risolvere l'equazione

$$x^6 + 4x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = 0.$$

81*. Verificare l'eguaglianza

$$tang\, 20^\circ \, tang\, 30^\circ \, tang\, 40^\circ = tang\, 10^\circ.$$

82*. Dimostrare che *log* 2 (base 10) è compreso fra $\frac{3}{10}$ e $\frac{4}{13}$. Trovare, mediante queste limitazioni, il numero delle cifre della potenza 64ª di 2.

D. BESSO.

83. Dimostrare che, se $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_n$ sono funzioni lineari a coefficienti interi delle n incognite $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$; e se le lettere a, le b, le μ e le A significano numeri interi, dei quali μ_1 è primo con A_1, μ_2 primo con A_2, ecc., il sistema delle n congruenze di 1° grado con n incognite:

$$\begin{array}{c} a_1\varphi_1 \equiv b_1 - \mu_1 x_1 \ (\text{mod. } A_1) \\ a_2\varphi_2 \equiv b_2 - \mu_2 x_2 \ (\text{mod. } A_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\varphi_n \equiv b_n - \mu_n x_n \ (\text{mod. } A_n) \end{array}$$

è sempre risolubile quando una potenza di a_1 sia divisibile per A_1; una potenza di a_2 sia divisibile per A_2; e via così.

84. Dimostrare che, se p è un numero primo, e se D e λ sono due numeri interi non divisibili per p, la congruenza

$$x^2 - Dy^2 \equiv \lambda \ (\text{mod. } p)$$

ammette $\frac{p-1}{2}$ soluzioni quando la congruenza

$$z^2 \equiv D \ (\text{mod. } p)$$

è risolubile, e ne ammette $\frac{p+1}{2}$ nel caso contrario.

(*) Le quistioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre Scuole.

Avvertenza. — Una soluzione ($x = \alpha$, $y = \beta$) si consideri come identica all'altra ($x = -\alpha$, $y = -\beta$); epperò due soluzioni siffatte si contino per una sola.

G. Frattini.

85. Determinare i numeri di due cifre tali che i loro valori siano multipli del prodotto delle loro rispettive cifre.

S. Gatti.

86*. Dimostrare che esistono due soli triangoli isosceli tali che il punto medio della retta che congiunge il vertice del triangolo col punto di concorso delle altezze ed i piedi delle medesime, sono i vertici d'un quadrato.

G. Russo.

87*. Si assegnino in modo generale i due limiti del numero delle cifre del quoziente di $a\,b\,c \ldots . l$ per $a'\,b'\,c' \ldots . l'$, n ed n' essendo il numero dei fattori di ciascun prodotto, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \lambda$ ed $\alpha', \beta', \gamma' \ldots . \lambda'$ i numeri delle cifre dei differenti fattori.

B. Carrara.

88*. In un cerchio di raggio R si tiri un diametro AB, sul quale si prenda un punto H in modo che sia $HA = \frac{1}{3} AB$. Da H si conduca la corda CD perpendicolare ad AB, e dal punto medio G di HD tirisi la corda EF perpendicolare a CD. Calcolare le diagonali e l'area del quadrangolo convesso $CEDF$, e dimostrare che i lati FC, ED sono i cateti d'un triangolo rettangolo di cui l'ipotenusa è il diametro.

S. Catania.

89. Dimostrare la disuguaglianza

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right\} > \left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}-1\right)+\left(\sqrt[n+1]{\frac{n+2}{n+1}}-1\right)+\ldots\ldots > \frac{1}{n}.$$

F. Giudice.

90*. Se A, B, C, D, E sono punti d'una circonferenza e con centri rispettivamente in B, C, D, E e raggi BA, CA, DA, EA si descrivono altrettante circonferenze, dimostrare che i punti in cui queste s'intersecano sono tre a tre in linea retta.

A. Lugli.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Prof. S. PINCHERLE. — *Gli elementi dell'aritmetica a uso delle Scuole secondarie inferiori.* Bologna, N. Zanichelli, 1891. — Prezzo: L. 2.

Questo libro elementare scritto dal prof. Pincherle, riputatissimo fra i cultori delle discipline matematiche, non deve passare inosservato tra coloro cui stanno a cuore la buona biblioteca e i buoni metodi delle nostre scuole. Dirne a lungo i pregi sarebbe un fuor d'opera. L'esposizione dei vari argomenti procede per vie semplici e naturali, sempre informata a criterio scientifico; conseguentemente risulta assai ordinata e chiara. Nella trattazione degli argomenti medesimi niente manca di essenziale, ma niente sovrabbonda; così che, mentre si fa la debita stima dell'opera del maestro, il quale nella scuola deve pur esserci per qualche cosa, si concentra il molto in piccola mole, ciò che conferisce assaissimo a rendere il libro scolastico accetto agli studiosi, come i maestri ben sanno. Pur di non venir meno al rigore scientifico che s'è imposto, l'autore non è schivo di savie concessioni all'opportunità didattica. Così egli non allude neppur lontanamente alla ricerca aprioristica della generatrice d'una frazione decimale periodica: invece, posta la generatrice, dimostra ch'essa è veramente tale. Non si poteva far meglio, considerato l'ordine delle scuole alle quali il prof. Pincherle destina il proprio libro. Non già ch'io reputi il libro stesso scevro d'ogni difetto. Che anzi tra le osservazioni di cose men buone che leggendolo m'è avvenuto di fare, voglio qui riportarne una, che m'è sembrata di qualche conto. Premetto tuttavia che essendo essa, come le altre, d'indole didascalica, non senza esitazione m'induco a farne parola: perchè so bene, che muovendo la critica didascalica da criteri nella massima parte soggettivi, potrebbe esser pregio d'un libro di scuola quello che a taluno parve difetto.

È comune opinione che l'insegnamento dell'aritmetica debba mirare a due fini principali. Primo di questi l'agile maneggio delle proprietà algoritmiche dei numeri, in quanto è mezzo a conteggiare correttamente e *per le vie più spicce.* L'altro è lo studio delle proprietà *chimiche* dei numeri interi, e voglio dire di quelle proprietà, più recondite, che metton capo ai fattori primi dei numeri medesimi. Non v'ha quasi compenetrazione fra le due serie di proprietà: che anzi la chimica dei numeri non feconda punto il campo dell'algoritmo. Se non che, mentre lo studio delle proprietà chimiche dei numeri, per l'artificio ond'è rivestito e per altre ragioni, riesce difficilissimo ai principianti, le regole dell'algoritmo, che in sostanza non sono se non quelle del volgare buon senso tradotte in cifre, si possono insegnare e dimostrare, non solamente con poca difficoltà, ma altresì con diletto dei giovanetti studiosi. Sembra adunque che nelle scuole secondarie inferiori si debba dare una grande importanza allo studio sia ragionato sia pratico dell'algoritmo, come a quello che, mentre è ordinato ad un fine di somma utilità, meglio si adatta alla capacità dei giovinetti che frequentano le dette scuole. La mescolanza di questa parte dell'aritmetica con quella che tratta la chimica dei numeri, mescolanza che non giova allo scopo algoritmico, come ho detto di sopra, metterà sempre a dura prova, e fors'anche sterile, nelle scuole inferiori, maestri ed alunni. A questo ha certo pensato il prof. Pincherle: e lo dimostra il fatto che solamente nelle note in fondo del libro, egli tratta di alcuni teoremi i quali, a mio credere e suo, debbono essere riservati alle scuole superiori. Tuttavia ho notato che qualche volta nel corso dell'opera essi vengono richiamati, esplicitamente o tacitamente (*), per ricavarne qualche conseguenza, e questo, a dir vero, non mi piace. So benissimo che gli alunni non dovrebbero imparare che il solo enunciato di quei teoremi. Ma ne comprenderanno il significato e lo spirito? Ne dubito. Se io dico ad un ragazzo che il risultato della scomposizione d'un numero in fattori primi è indipendente dal metodo che si tiene per eseguirla, egli troverà la cosa naturalissima, e quasi si meraviglierà che cervelli matematici abbiano potuto pensare alla dimostrazione di una simile inezia!! Gli è che lo spirito e l'importanza di quel teorema vuol essere chiarita agli studiosi di lunga mano, dal confronto con ciò che avviene quando si tratti di fattori non primi, e dalle conseguenze più assai che dai termini del teorema stesso. Confido pertanto che il prof. Pincherle, ristampando il libro, il che certamente avverrà presto, vorrà spogliarlo di quei richiami all'aritmetica superiore che vi si riscontrano, e rafforzarne la compagine algoritmica (**), corroborandola con opportuni esercizi per la scuola. Le note in fondo costituiranno sempre un bel complemento, utilissimo per le scuole superiori.

Queste mie osservazioni, spero, faranno apparire agli occhi del chiaro autore più sincera e veritiera la lode che fin dal principio ho tributato al suo libro, al quale do il benvenuto nelle scuole, augurandogli lunga vita e prospera fortuna.

GIOVANNI FRATTINI.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm: n. 4, 1890.

Giornale di Matematiche, pubblicato per cura del Prof. G. BATTAGLINI. Volume XXVIII. Settembre-Ottobre 1890.

Sommario: — A. DEL RE: Escursioni matematiche diverse. — F. GIUDICE: Sulle serie a termini positivi. — F. GIUDICE: Prodotti infiniti – An-

(*) Al § 81 si espone per via dimostrativa la condizione di divisibilità di due numeri interi e vi si asserisce che $2^5 \times 5^3 \times 7$ non è divisibile per $2^6 \times 5^2 \times 7$, perciocchè questo numero ammette 2^6 come fattore e l'altro no. Questa asserzione non implica un richiamo al teorema citato al § 80, che cioè: « qualunque sia il metodo che si tiene per scomporre un numero in un prodotto di fattori primi, la scomposizione dà sempre il medesimo risultato? »

(**) Fra le regole che riguardano il calcolo delle potenze si fa menzione soltanto di quelle relative alla moltiplicazione e alla divisione di due potenze d'egual base. Perchè di queste e non delle altre?

nunzio bibliografico. — O. Tognoli: Intorno alla risoluzione algebrica delle equazioni.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. de Longchamps. 3e Série, XIV année. N. 11, 12. Novembre, Décembre, 1890. Paris, librairie Ch. Delagrave.

Table des matières: — N. 11: — L. Bénézech: Équation de la sphère circonscrite au tétraèdre de référence (coordonnées barycentriques). — A. Morel: Étude sur la Géométrie des sections coniques. — G. de Longchamps: Sur les triangles caractérisés. — Bibliographie. — Solutions de questions. — Questions proposées. = N. 12: — E. Lauvernay: Sur un problème de géométrie. — A. Morel: Étude sur la Géométrie élémentaire des sections coniques. — Correspondance. — Questions d'examen. — Agrégation de l'enseignement secondaire spécial (Énoncés). — Solution de la question 318. — Questions proposées.

Journal des Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. 15e année. N. 3, 4, 5 e 6. Paris, M. Nony et C., 17 rue des Écoles, 1890.

Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Vol. IX, n. 6. Coimbra 1890.

Sommario: — M. D'Ocagne: Sur le développement de $\sin n\varphi$ et de $\cos n\varphi$ suivant les puissances de $\cos\varphi$. — G. Teixeira: Note sur l'integration des équations aux derivées partielles du second ordre. — J. A. Martins da Silva: Sur trois formules de la théorie des fonction élliptiques. — Bibliographie: — Extraitos das publicações recentes.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. Mansion et J. Neuberg. Tome X. Novembre, Décembre, 1890. Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Sommaire: — Novembre: — E. Catalan. Sur l'analyse indéterminée du premier degré. — Ed. Lucas. Sur les differents systèmes de numération. — Bibliographie. — A. Poulain. Sur quelques séries de points remarquables dans le plan du triangle. — Notes mathématiques. — Solutions de questions proposées. — Question d'examen. — Questions proposées. = Décembre: — Lac de Bosredon. Détermination des foyers, des directrices et des axes dans les coniques. — E. Catalan. Sur l'analyse indeterminée du premier degré. — Bibliographie. — Solutions de questions proposées. — Questions d'examen. — Questions proposées.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo IV, Fasc. VI. Novembre, Dicembre 1890.

Sommario: — Gebbia: Su certe funzioni potenziali di masse diffuse in tutto lo spazio infinito. — Jung: Delle famiglie associate di sistemi lineari e delle superficie univocamente rappresentabili sul piano. — Vivanti: Alcune formole relative all'operazione Ω. — Venturi: Sopra un caso generale di compensazione angolare. — Alagna: Intorno ad alcuni casi di multiplicità delle radici dell'equazione d'ottavo ordine. — Noether: Extraits de une lettre adressée a M. G. B. Guccia.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2a, Vol. IV. Fasc. 9o, 10o, 11o; 1890.

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par M. B. Niewenglowski. N. 1, 2, 3. Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles.

Sommaire: — N. 1: — Concours de 1890: École polytechnique, École centrale (1re session), Agrégation des sciences mathématiques. — Questions posées aux examens oraux. — Questions proposées. = N. 2: — G. Papelier: Sur les expressions indéterminées qui sont fonctions algébriques irrationnelles de la variable. — Concours de 1890: École navale, École normale supérieure, École des ponts et chaussées. — Algèbre. — Géométrie analytique. — Questions posées aux examens oraux. — Questions proposées. = N. 3:

Concours de 1890: École centrale, Concours général de mathématiques spéciales. — Physique. — Algèbre. — Questions posées aux examens oraux. — Questions proposées.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. XXI Jahrgang. 7, 8 Heft. Leipzig, B. G. Teubner

Inhaltsverzeichnis. — 7 Heft. — Ad. Jos. Pick: Sternwarten und Lehrerbildung. — Kleinere Mitteilungen. — Sprech - und Diskussions Saal. — Zum Aufgaben - Repertorium: *A*) Auflösungen; *B*) Neue Aufgaben; *C*) Aufgaben aus nichtdeutschen Fachzeitschriften. — Litterarische Berichte. — Pädagogische Zeitung etc.. = 8 Heft. — Der Kongress von Lehrern der Mathematik und Naturwissenschaften an höheren Lehranstalten Deutschlands zu Jena vom 25. bis. 28. Sept. 1890. — Kleinere Mitteilungen. — Sprech - und Diskussions Saal — Zum Aufgaben - Repertorium: *A*) Auflösungen; *B*) Neue Aufgaben. — Litterarische Berichte. — Pädagogische Zeitung etc.

Agamennone (G.) — Il terremoto a Roma del 23 febbraio 1890 ed il sismometrografo Brassart (Annali Uff. Cent. Meteorologia e Geodinamica. - Parte IV, Vol. X. 1888).

Arzelà (C). — Trattato di algebra elementare ad uso dei Licei. 2ª edizione. Firenze, Successori Le Monnier, 1890.

Biffignandi (A.) — Dimostrazione d'un teorema di Dupin e sua applicazione. (Giornale di Battaglini, Vol. XXVIII, 1890).

Chistoni (C). — Teoria del metodo di Lloyd per la misura dell'intensità magnetica. (Mem. della Società degli Spettroscopisti italiani, Vol. XIX, 1890).

De Marchi (L.) — Sulla dinamica dei temporali. (Rend. R. Istituto Lombardo, Serie II, Vol. XXIII).

Giudice (F.) — Sulle serie a termini positivi. — Prodotti infiniti. — (Giornale di Battaglini, Vol. XXVIII, 1890).

Loria (G.) — Sulla classificazione delle trasformazioni razionali dello spazio, in particolare sulle trasformazioni di genere zero (Rend. R. Istituto Lombardo, Serie II, Vol. XXIII).

Macé de Lépinay (A.) — Compléments d'algèbre et notions de Géométrie analitique. Premier fascicule: Compléments d'algèbre. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles, 1891.

Mosnat (E.) = Problèmes de Géométrie analytique. Tome premier. Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Ecoles, 1891.

Padova (E.) — Estensione del problema di De St. Venant. (Rend. della Regia Accademia dei Lincei, 1890). — Sulla teoria generale delle superficie. (Mem. della R. Acc. di Bologna, 1890).

Riccardi (P.) — Intorno al trattato di Prosdocimo de' Beldomandi sull'Astrolabio (Bibliotheca Mathematica di G. Eneström, 1890).

Rozzolino (G.) — Una proprietà metrica fra poli e polari in una conica dotata di centro.

Schlömilch (O.) — Elementi di Geometria metrica. Prima versione italiana dei professori D. Gambioli e V. Bernardi. — Parte 1ª planimetria: L. 2,40; parte 2ª: trigonometria piana: L. 2. — Ditta G. B. Paravia e Comp., 1891.

Vivanti (G.) — Luoghi geometrici del baricentro del triangolo nel manovellismo di spinta rotativa. (L'ingegneria civile e le arti industriali, 1890).

Chiusura della redazione il dì 15 gennaio 1891.

CONSIDERAZIONI SUL CONCETTO DI PROBABILITÀ

per E. CESÀRO

(Continuazione e fine).

. . . . . . souvenez-vous de nos conventions: si vous n'êtes qu'un pédant, ce n'est pas la peine de me lire. (*)

Dalle ultime considerazioni risulta chiara l'utilità di scrivere un nuovo capitolo, interessantissimo, nella teoria delle probabilità. Suo scopo esser dovrebbe la *composizione delle densità*, vale a dire il calcolo della densità di qualunque funzione composta con altre arbitrarie o vincolate, quando sian date le densità delle funzioni componenti. Nel caso di due sole variabili, legate dalla relazione

$$f(x, y) = 0,$$

le densità sono evidentemente in ragione inversa delle variazioni infinitesime delle rispettive variabili, purchè ciascuna di queste varii sempre in un senso determinato, in modo da non dar luogo a *sovrapposizioni* di valori. Allora fra le densità φ e ψ esiste il vincolo

$$\frac{1}{\varphi(x)} \frac{\partial f}{\partial x} = \pm \frac{1}{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ne risulta che, se u e v sono funzioni inverse, dimodochè

$$u\left(v(x)\right) = x,$$

e se $\varphi(x)$ è la densità di x, quelle di u e v sono, a prescindere dal segno,

$$\varphi(v) \frac{dv}{dx}, \quad \varphi(u) \frac{du}{dx}.$$

Per esempio, le densità di

$$kx, \quad \frac{1}{x}, \quad \log x, \quad e^x \quad \sqrt{x}, \quad \ldots\ldots$$

(*) ROUSSEAU. *Émile ou de l'éducation*, (livre II).

sono rispettivamente

$$\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{x}{k}\right),\quad \frac{1}{x^2}\varphi\left(\frac{1}{x}\right),\quad e^x\varphi(e^x),\quad \frac{1}{x}\varphi(\log x),\quad \pm 2x\varphi(x^2),\quad \ldots\ldots$$

Quando avvengano sovrapposizioni di valori, si sovrappongono anche le densità relative ai diversi valori reali della funzione inversa. Così, osservando che la funzione inversa di x^2 ha i valori $\pm\sqrt{x}$, si vede subito che *la densità di* x^2 *è*

$$\frac{\varphi(\sqrt{x})+\varphi(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

per $x > 0$, ed è nulla per $x < 0$. Similmente *la densità di* sen x *è*

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left[(-1)^n \operatorname{arc\,sen} x + n\pi\right].$$

Passando al caso di tre variabili sarebbe anzitutto utile cercare la densità delle più semplici funzioni delle variabili u e v, supposte fra loro indipendenti, conoscendo le densità φ e ψ delle variabili stesse. Così, per determinare la *densità della somma* $u+v$, basta osservare che la probabilità $\chi(x)\,dx$ di vedere $u+v$ cadere nell'intervallo $(x, x+dx)$ è

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x-u}^{x-u+dx}\varphi(u)\,\psi(v)\,du\,dv.$$

La densità cercata è dunque rappresentata dalla funzione

$$\chi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-t)\,\psi(t)\,dt.$$

Invece la *densità della differenza* $u-v$ è

$$\chi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+t)\,\psi(t)\,dt.$$

Similmente, per esprimere la *densità del prodotto* uv si ha, in generale, la formola

$$\chi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \psi(t) \frac{dt}{t},$$

e, per la *densità del quoziente* $\frac{u}{v}$,

$$\chi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(tx)\ \psi(t)\ t\ dt.$$

Dall'una all'altra di queste formole si passa agevolmente mercè le regole date in principio. Per esempio, supponendo nota la densità di uv, se si vuol trovare quella di $u+v$, si consideri il prodotto $e^u . e^v$, i cui fattori hanno le densità

$$\frac{1}{x}\ \varphi(\log x), \quad \frac{1}{x}\ \psi(\log x).$$

Applicando la formola per la moltiplicazione si ottiene, come densità di e^{u+v},

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \varphi\left(\log\frac{x}{t}\right) \psi(\log t) \frac{dt}{t} = \frac{1}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\log x - t)\ \psi(t)\ dt,$$

e però la densità di $u+v$ è

$$\chi(x) = e^x f(e^x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - t)\ \psi(t)\ dt.$$

Per fare un esercizio sul calcolo delle densità si riprenda l'espressione $x^2 - yz$, formata con numeri arbitrarii del campo $(0, a)$. Poichè $\frac{1}{a}$ è la densità delle tre variabili, la densità di x^2 è

$$\varphi(x) = \frac{1}{2a\sqrt{x}},$$

e quella di yz si deduce dalla formola per la moltiplicazione limitando il variare di t e quello di $\frac{x}{t}$ al campo $(0, a)$. Si ottiene subito

$$\psi(x) = \frac{1}{a^2} \int_{\frac{x}{a}}^{a} \frac{dt}{t} = \frac{2 \log a - \log x}{a^2}.$$

Ora la densità di $x^2 - yz$ intorno ad un valore negativo si deduce nello stesso modo dalla formola per la sottrazione, limitando al campo $(0, a^2)$ le variazioni di t e di $x + t$. Si ha

$$\chi(x) = \frac{1}{2a^3} \int_{-x}^{a^2} (2 \log a - \log t) \frac{dt}{\sqrt{x+t}} = \frac{1}{a^3} \int_0^{a^2+x} \frac{\sqrt{t}\, dt}{t-x},$$

cioè

$$\chi(x) = \frac{2}{a^3}\left(\sqrt{a^2+x} - \sqrt{-x} \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{a^2+x}{x}}\right) = \frac{2}{a^2}(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta),$$

dopo aver posto $x = -a^2 \cos^2 \theta$. Per esempio, se p è la probabilità di vedere x^2 superare yz, si ha

$$1 - p = \int_{-a^2}^{0} \chi(x)\, dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta) \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta;$$

quindi, ancora una volta,

$$p = 1 - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta = \frac{5}{9}.$$

Inoltre, se si vuole la media dei valori positivi di $yz - x^2$, basta calcolare l'integrale

$$-\int_{-a^2}^{0} x\, \chi(x)\, dx = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta) \operatorname{sen}\theta \cos^3\theta\, d\theta,$$

che si riduce subito a

$$\frac{a^2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\, d\theta = \frac{8a^2}{75},$$

ed il valore probabile del radicale $+\sqrt{yz - x^2}$, supposto reale, è dato dall' integrale

$$\int_{-a^2}^{0}\sqrt{-x}\,\chi(x)\,dx = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\, d\theta,$$

che si riduce a

$$\frac{a}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta = \frac{\pi a}{16}.$$

Come si vede, le poche regole da noi date già permettono di guidare con sicurezza il calcolo, fra varie complicazioni di densità, a risultati ben determinati, rispondenti a svariati problemi. Segnalare queste regole ci sembra opera ben più utile che non sia il « mettere in guardia » i calcolatori inesperti contro le immaginarie indeterminazioni dei problemi di probabilità in cui è infinito il numero dei casi.

Analogamente, applicando una dopo l'altra le regole per l'elevazione al quadrato, l'addizione e l'estrazione di radice quadrata, si trova, dopo una facile trasformazione, che *la densità di* $\sqrt{u^2 + v^2}$ *è*, per $x > 0$,

$$\chi(x) = x\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\varphi(x\operatorname{sen}\theta) + \varphi(-x\operatorname{sen}\theta)][\psi(x\cos\theta) + \psi(-x\cos\theta)]\,d\theta.$$

Così, per esempio, nel tiro al bersaglio, supponendo le deviazioni ugualmente facili in tutte le direzioni, la densità dei colpi alla distanza x dal centro è

$$\chi(x) = 4x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x\operatorname{sen}\theta)\,\varphi(x\cos\theta)\,d\theta,$$

dove $\varphi(x)\,dx$ rappresenta la probabilità che il projettile colpisca, sopra un raggio *dato*, l'intervallo $(x, x + dx)$. Ammessa la legge

$$\varphi(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 x^2}$$

si perviene subito al risultato notissimo (*)

$$\chi(x) = 2 k^2 x e^{-k^2 x^2}.$$

Similmente, quando con velocità data si lancia un corpo nello spazio, in un determinato piano verticale, e si rappresenta con $\varphi(x)\,dx$ la probabilità che, sulla traccia orizzontale del detto piano, il projettile cada nell'intervallo $(x, x + dx)$, si ha la prima delle seguenti uguaglianze

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{4\sqrt{1 - |x|}},$$

supponendo che si assuma ad unità il massimo valore di x: la seconda uguaglianza risponde all'ipotesi che l'angolo della verticale con la velocità iniziale abbia una densità uguale al proprio seno. Dunque la densità dei colpi sull'orizzonte, alla distanza x dal punto di partenza, ha una di queste forme:

$$\chi(x) = \frac{4x}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - x^2 \operatorname{sen}^2\theta)(1 - x^2 \cos^2\theta)}},$$

$$\chi(x) = \frac{x}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - x \operatorname{sen}\theta)(1 - x \cos\theta)}}.$$

La prima forma definisce la distribuzione dei colpi sull'orizzonte, supponendo il projettile lanciato, con data velocità, in un piano verticale arbitrario. Diversa è la distribuzione nel caso di projettili *lanciati ad arbitrio nello spazio*, ed è facile accorgersene osservando che, in questa ipotesi, la direzione verticale è possibile in un modo solo, mentre nel primo caso si presenta infinite volte. Nel

(*) BERTRAND, *loc. cit.*, pag. 237.

secondo problema è la seconda forma della densità che bisogna adottare. Si ha così un altro esempio di risultati diversi, riferentisi apparentemente ad uno stesso problema, ma che non saranno mai scambiati fra loro da chi sa rettamente interpretare gli enunciati delle questioni proposte.

Quando, nel caso di infinite possibilità, viene a mancare l'ordinaria misura della probabilità mediante il limite d'una probabilità variabile, vi si supplisce considerando il *valore probabile* del limite stesso. Si è in tal modo condotti a sostituire al limite d'una successiono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ il valor medio dei suoi termini, cioè, detta $\varphi(x)\,dx$ la probabilità che un termine, preso ad arbitrio, cada nell'intervallo $(x, x + dx)$ si assume

$$\mathcal{M}\, a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \varphi(x)\, dx$$

come ampliata misura del limite, osservando che si ha

$$\mathcal{M}\, a_n = \lim_{n=\infty} .\, a_n$$

quando esiste il secondo membro. Le proprietà dei limiti sussistono generalmente sotto forme più vaste; ma alcune conservano la forma attuale. Per esempio, se si vuole il medio valore di $f(a_n)$, si ha in virtù della definizione, e richiamando un'osservazione precedente,

$$\mathcal{M}\, f(a_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \varphi(g(x))\, d\, g(x),$$

dove $g(x)$ rappresenta la funzione inversa di $f(x)$: assumendola a variabile indipendente si ottiene

$$\mathcal{M}\, f(a_n) = \int f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

fra limiti convenienti, e prescindendo sempre da eventuali restrizioni sulla natura della funzione. L'ultima eguaglianza non è che l'estensione dell'altra

$$\lim f(a_n) = f(\lim a_n),$$

ma non è subordinata, come questa, alla continuità di $f(x)$, intesa nel senso attuale. Se $\psi(x)$ è la densità dei termini di un'altra successione $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots$, si ha

$$\mathfrak{M}(a_n + b_n) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x + y)\, \varphi(x)\, \psi(y)\, dx\, dy,$$

quindi

$$\mathfrak{M}(a_n + b_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x + \mathfrak{M}\, b_n)\, \varphi(x)\, dx = \mathfrak{M}\, a_n + \mathfrak{M}\, b_n.$$

Analogamente, osservando che

$$\mathfrak{M}\, a_n b_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, y\, \varphi(x)\, \psi(y)\, dx\, dy,$$

si ottiene subito

$$\mathfrak{M}\, a_n b_n = \mathfrak{M}\, a_n \cdot \mathfrak{M}\, b_n.$$

Ciò che si è detto per le funzioni di variabile intera sussiste in generale per tutte le funzioni. Così, dette φ e ψ le densità di u e v, i valori medii di queste funzioni sono

$$u_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \varphi(x)\, dx, \qquad v_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \psi(x)\, dx,$$

ed il valore medio di $w = u + v$ è

$$w_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \chi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, \varphi(x - t)\, \psi(t)\, dx\, dt.$$

Ora si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, \varphi(x - t)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x + t)\, \varphi(x)\, dx = u_0 + t,$$

e però .

$$w_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0 + t)\,\psi(t)\,dt = u_0 + v_0.$$

Similmente, il valore medio di $w = uv$ è

$$w_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\chi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{t}\,\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\psi(t)\,dx\,dt\,,$$

ed essendo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{t}\,\varphi\left(\frac{x}{t}\right) dx = t\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varphi(x)\,dx = tu_0,$$

si ha pure

$$w_0 = u_0 \int_{-\infty}^{+\infty} t\,\psi(t)\,dt = u_0\,v_0.$$

Adunque le uguaglianze

$$\lim\,(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n, \quad \lim a_n\,b_n = \lim a_n\,.\,\lim b_n$$

sussistono intatte, purchè non interceda alcun vincolo fra a_n e b_n. Ed anche rimane vera la nota proprietà

$$\lim \frac{1}{n}\,(a_1 + a_2 + \ldots . + a_n) = \lim a_n$$

quando, almeno nel secondo membro, al simbolo *lim* si sostituisce $\mathfrak{M}$. Invece l'altra

$$\lim \sqrt[n]{a_1\,a_2\,a_3\,\ldots .\,a_n} = \lim a_n$$

prende una forma più generale. Si ha infatti, se i termini son tutti positivi,

$$\mathfrak{M}\sqrt[n]{a_1\,a_2\,a_3\,\ldots .\,a_n} = e^{\int_0^\infty \varphi(x)\log x\,dx}.$$

Ne segue che la prima delle uguaglianze

$$\mathfrak{M}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\int_0^\infty x\,\varphi(x)\,dx,\quad \log\mathfrak{M}\sqrt[n]{u_n}=\int_0^\infty \varphi(x)\log x\,dx$$

trae seco la seconda. Osservando poi la disuguaglianza

$$\int_0^\infty \varphi(x)\log x\,dx<\int_0^\infty (x-1)\,\varphi(x)\,dx=\int_0^\infty x\,\varphi(x)\,dx-1,$$

si vede che, se il primo valor medio è inferiore all'unità, altrettanto può dirsi del secondo. Ora sarebbe interessante esaminare se in questi casi la serie $u_1+u_2+u_3+\ldots$ è convergente nel senso lato, se cioè esiste il numero $\mathfrak{M}(u_1+u_2+\ldots+u_n)$. Ad analogo esame bisognerebbe sottoporre i varii criterii di convergenza, ed in particolare sarebbe utile indagare se il significato del simbolo $\mathfrak{M}$ si può talmente ampliare da rendere la condizione

$$\mathfrak{M}\,n\,u_n=0$$

necessaria per la convergenza, intesa nel senso più stretto. Qui si noti che, se $\varphi(x)$ è la densità di nu_n,

$$\mathfrak{M}\,|n\,v_n|=\int_0^\infty [\varphi(x)+\varphi(-x)]\,x\,dx:$$

il contegno di $\varphi(x)$ intorno allo zero può dunque influire sul convergere assoluto o semplice. È d'altronde naturale che per l'assoluta convergenza diventi necessario imporre a $\varphi(x)$ condizioni non richieste per la convergenza semplice, dal momento che a questa basta l'eguaglianza fra gli integrali

$$\int_0^\infty x\,\varphi(x)\,dx,\quad \int_0^\infty x\,\varphi(-x)\,dx,$$

mentre per quella si richiede inoltre l'annullamento simultaneo degli integrali stessi (*). Dalle considerazioni sinora svolte si scorge abbastanza come l'uso del concetto di probabilità nelle questioni di pura analisi valga a temperare con una giusta elasticità di vedute la soverchia rigidità matematica, e tenda inoltre a provocare il totale esplicamento dei concetti di *limite* e di *probabilità*. Infatti la più larga interpretazione data al criterio per la misura della probabilità, introdotta nella già ampliata nozione di limite, vi apporta una seconda estensione, da cui deriva novello impulso alla nozione di probabilità, e così le due generalizzazioni, aiutandosi a vicenda, progrediscono e parallelamente progredisce l'analisi tutta, grazie alle successive estensioni che ne ricevono i concetti di *integrabilità, continuità, derivabilità,* ecc.

Le considerazioni precedenti ci sono state suggerite da una corrispondenza tenuta a proposito di alcuni articoli, recentemente comparsi in questo periodico (**). Esse risolvono, in linea generale le difficoltà sollevate per l'indefinito crescere di N; ma, da un altro punto di vista, una nuova obbiezione ci è stata mossa dal sig. Vivanti nei seguenti termini: — « la teoria delle probabilità è nata da problemi pratici, ed i suoi risultati sono confermati dall'esperienza. Or che cosa ci dice l'esperienza riguardo ai problemi in cui il numero delle possibilità è infinito? Il ponte di passaggio fra la probabilità teorica e la pratica è costituito dalla *legge dei grandi numeri* di Poisson, la quale asserisce che, quando il numero delle prove sia assai grande, tutte le possibilità si presentano un numero pressochè uguale di volte; ma bisogna intendere questo enunciato nel senso che il numero delle prove sia assai grande *relativamente al numero dei casi possibili*. È dunque chiaro che la legge di Poisson non può applicarsi a problemi in cui il numero dei casi è infinito, giacchè, per quanto grande sia il numero delle prove, esso sarà sempre finito e quindi infinitamente più piccolo del numero delle possibilità ». Per noi l'obbiezione è oziosa, attesochè non riusciamo ad immaginarci alcun problema nel quale possa *non* essere

(*) Questa osservazione potrebbe fornire una troppo facile risposta a certe mal ponderate critiche del sig. Pringsheim (*Mathematische Annalen*, XXXV B., p. 348), le cui rimanenti esigenze si riducono in sostanza a ben poco, a volere cioè che gli avverbii, *difficilmente, eccezionalmente, semplicemente, comunemente*, ecc., si riferiscano, non al patrimonio matematico acquisito, ma a quello che esiste anche fuori delle nostre attuali conoscenze, come se nell'*esporre* una ricerca non fosse lecito usare i vocaboli nel loro più *intelligibile* significato.

(**) Articoli dei signori *Maurer, Rindi, Frattini, Giudice* (1889, p. 161; 1890, pp. 41, 72, 73) finito il *numero* delle possibilità, e d'altra parte il valore della probabilità, cui si riferisce la legge di Poisson, non è mai il numero p, misura della probabilità limite, ma un numero che da p differisce tanto poco quanto si vuole, e quindi anche meno di quantità inaccessibili alla misura sperimentale. Del resto il numero delle prove si può sempre supporre arbitrariamente grande, ed alla legge di Poisson, considerata teoricamente, non importa che le prove siano effettive, basta che siano possibili. Considerata poi praticamente, quella legge non è da riguardarsi come richiedente una sanzione sperimentale cui debba per necessità sottoporsi la teoria, ma vuole al contrario esser presa come una garanzia del calcolo contro eventuali esperimenti, in quanto indica la condizione cui va soggetto il risultato dell'esperienza perchè valga a scuotere la fiducia nel corrispondente risultato teorico. D'altronde, dal punto di vista sperimentale, perchè sia lecito impiantare una determinata teoria è sufficiente che questa non urti i risultati dell'esperienza, ma non è necessario che da essi riceva una diretta ed effettiva conferma. Se così non fosse, occorrerebbe respingere *a priori* tutte le teorie della fisica matematica, ed in ispecie quelle, tanto utili e così attraenti, che concernono l'intimo giuoco delle molecole. Occorrerebbe dunque condannare la teoria delle probabilità, nel caso di N infinito, sol perchè non è possibile, secondo il sig. Vivanti, sottoporla ad esperimento, e ciò in omaggio alla legge di Poisson, mentre questa ci avverte che bisogna eventualmente negar fiducia ai risultati delle prove, non a quelli del calcolo, che andrebbero soggetti al solo controllo della pura logica qualora fra questa e l'esperienza venisse a a mancare il « ponte di passaggio » indicato dal sig. Vivanti. Ma, si rassicurino tutti, questo *ponte* non manca mai.

Ed è appunto la legge dei grandi numeri che garantisce dai sarcasmi del Bertrand e dalle invettive di Stuart Mill le più ardite applicazioni del calcolo delle probabilità. Quasi tutte le piacevolezze critiche dell'illustre matematico francese riposano infatti sull'*isolamento* di qualche caso, val quanto dire su violazioni più o meno aperte della legge di Poisson. Così, in una possibile applicazione delle matematiche alla ricerca delle leggi storiche, è facile mettere in ridicolo chi dalla teoria cerca trarre indizii sulla probabilità d'un avvenimento, non suscettibile di ripetersi identicamente; ma prima il critico noti che, nel computo delle possibilità *a priori*, il calcolatore non tiene presente quell'unico fatto, ma lo schiera fra moltissimi altri già compiuti, assimilabili all'avvenimento aspettato per analogia di circostanze, di persone, di ragioni determinanti, di eventi precursori, ecc. Un tal calcolo si compie ogni giorno nella mente dello statista, ed il successo arride a chi, osservando inconsciamente la legge di Poisson, sa più giudiziosamente far tesoro d'un maggior numero di riflessioni sugli eventi del passato. Propizia è la sorte a chi pensa col Bertrand che « le hasard est sans vertu » e che « impuissant dans les grandes affaires, il ne trouble que les petites ». Simili calcoli mentali di probabilità sono comuni e frequenti. Senza dubbio è grande l'ardire di chi tenta dar loro forma matematica, poichè facilmente si erra in problemi dominati da una grande mobilità di condizioni e da una confusa abbondanza di dati, che in gran parte sfuggono all'analisi minuziosa e meglio si prestano ad essere con rapida intuizione sintetizzati. Ma chi può vantarsi di esser giunto a scoprire qualche verità fondamentale senza aver attraversato selve di errori? Prorompano dunque libere e svelte le applicazioni della matematica per tutte le vie che trovansi aperte all'indagine scientifica, ed allo scherno dei critici si risponda, con un geniale poeta: « .... puissiez-vous trouver, quand vous en voudrez rire, — à dépecer nos vers le plaisir qu'ils nous font! — Qu'importe leur valeur? La muse est toujours belle, — même pour l'insensé, même pour l'impuissant; — car sa beauté pour nous c'est notre amour pour elle » (*).

Avvertenza. — In questo ed in altri (**) lavori sulle applicazioni puramente matematiche del calcolo delle probabilità abbiamo sempre dato il nome di *valore probabile* di x alla media aritmetica di tutti i possibili valori di x, fondandoci sulla considerazione che questa media, quando x rappresenta una somma eventuale, misura l'*importanza* della somma stessa, ed è in qualche modo il valore che *si spera* (e sembra quindi probabile) veder prendere ad x. Ma alla medesima denominazione si attribuisce un significato ben diverso nella teoria degli errori,

---

(*) A. de Musset. *Namouna* (Chant deuxième).

(**) « *Sui canoni del calcolo degli addensamenti e su alcune loro applicazioni* ». Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 1891.

nelle questioni di mortalità, ecc., e ci sembra perciò più conveniente lasciare al numero $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varphi(x)\,dx$ il nome di *media* dei valori di x, cui si può anche, nella teoria generale, dare il nome di *valor medio* di x, benchè queste ultime denominazioni non abbiano, nella particolare teoria degli errori, ugual significato. Il valore probabile α sarà invece definito dall'eguaglianza

$$\int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2};$$

esso è appunto ciò che Poisson ed altri chiamano impropriamente valor medio. In ulteriori lavori avremo cura di adottare le denominazioni generalmente adoperate.

SUI LIMITI

1. Per la ricerca di limiti si conoscono molti particolari artifici che possono essere utilmente impiegati da chi ha pratica di calcolo (*). La seguente osservazione può riuscire di gran giovamento in molti casi: Se s'incontrano difficoltà per la determinazione del limite d'una somma, o d'un prodotto, si tenti una conveniente scomposizione in somme, o prodotti, parziali con opportune trasformazioni.

Sia proposto ad esempio

$$\lim_{x=\infty} \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{hx}\right]$$

Essendo

$$l\,\frac{x+p+1}{x+p} = l\left(1+\frac{1}{x+p}\right) = \frac{1}{x+p} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x+p}\right)^2 + \ldots\ldots$$

(*) V. p. es. *Uebungsbuch zum studium der Höheren Analysis* von Dr. Oskar Schlömilch. Leipzig, 1888.

possiamo porre

$$l\,\frac{x+p+1}{x+p}=\frac{1}{x+p}-\frac{\lambda(p)}{(x+p)^2}\qquad 0<\lambda(p)<\frac{1}{2}$$

epperò:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\dots\dots+\frac{1}{hx}$$

$$=l\,\frac{x+2}{x+1}+l\,\frac{x+3}{x+2}+\dots+l\,\frac{hx+1}{hx}+\frac{\lambda(1)}{(x+1)^2}+\frac{\lambda(2)}{(x+2)^2}+\dots+\frac{\lambda(hx-x)}{h^2x^2}$$

$$=l\,\frac{hx+1}{x+1}+\frac{\lambda(1)}{(x+1)^2}+\frac{\lambda(2)}{(x+2)^2}+\dots\dots+\frac{\lambda(hx-x)}{h^2x^2}$$

ma è

$$\lim_{x=\infty} l\,\frac{hx+1}{x+1}=l\,h$$

ed, essendo $\qquad 0<\lambda(p)<\frac{1}{2},\qquad$ è:

$$0<\frac{\lambda(1)}{(x+1)^2}+\dots\dots+\frac{\lambda(hx-x)}{h^2x^2}<\frac{1}{2}\,\frac{(h-1)x}{(x+1)^2}<\frac{h-1}{2x}$$

per cui è

$$\lim_{x=\infty}\left[\frac{\lambda(1)}{(x+1)^2}+\dots\dots+\frac{\lambda(hx-x)}{h^2x^2}\right]=0$$

$$\lim_{x=\infty}\left[\frac{1}{x+1}+\dots\dots+\frac{1}{hx}\right]=l\,h.$$

Sia ora proposto

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+1}\right)\cdot\left(1+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+2}\right)\cdot\dots\dots\left(1+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{hx}\right).$$

Essendo

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+p}=\frac{1}{x+p}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{x+p}\right)^3+\dots\dots$$

possiamo porre

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+p}=\frac{1}{x+p}-\frac{\mu(p)}{(x+p)^3}\qquad 0<\mu(p)<\frac{1}{3}.$$

Avremo così:

$$1+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+p}=\frac{x+p+1}{x+p}-\frac{\mu(p)}{(x+p)^3}=\frac{x+p+1}{x+p}\cdot\left(1-\frac{\mu(p)}{(x+p)^2(x+p+1)}\right)$$

$$\left(1 + \text{arc tg}\frac{1}{x+1}\right)\cdot\left(1 + \text{arc tg}\frac{1}{x+2}\right)\cdot \ldots\ldots \cdot\left(1 + \text{arc tg}\frac{1}{kx}\right)$$

$$= \frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{x+3}{x+2}\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\frac{kx+1}{kx}\cdot\left(1 - \frac{\mu(1)}{(x+1)^2(x+2)}\right)$$

$$\cdot\left(1 - \frac{\mu(2)}{(x+2)^2(x+3)}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\left(1 - \frac{\mu(kx-x)}{k^2x^2(kx+1)}\right)$$

$$= \frac{kx+1}{x+1}\cdot\left(1 - \frac{\mu(1)}{(x+1)^2(x+2)}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(1 - \frac{\mu(kx-x)}{k^2x^2(kx+1)}\right)$$

ma è

$$\lim_{x=\infty} \frac{kx+1}{x+1} = k$$

ed, essendo $\qquad 0 < \mu(p) < \frac{1}{3}, \qquad$ è:

$$1 > \left(1 - \frac{\mu(1)}{(x+1)^2(x+2)}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(1 - \frac{\mu(hx-x)}{h^2x^2(hx+1)}\right)$$

$$> \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(1 - \frac{1}{k^2x^2}\right) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{(hx-1)(hx+1)}{h^2x^2}$$

$$= \frac{x}{x+1}\cdot\frac{kx+1}{kx}$$

per cui è

$$\lim_{x=\infty}\left(1 - \frac{\mu(1)}{(x+1)^2(x+2)}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\left(1 - \frac{\mu(kx-x)}{k^2x^2(kx+1)}\right) = 1$$

$$\lim_{x=\infty}\left(1 + \text{arc tg}\frac{1}{x+1}\right)\cdot\left(1 + \text{arc tg}\frac{1}{x+2}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(1 + \text{arc tg}\frac{1}{kx}\right) = k.$$

(Continua).

F. GIUDICE.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Somma degli angoli di un poligono piano. — Negli *Elemente der Geometrie der Ebene* del Sig. KRUSE trovasi esposta questa teoria in modo che parmi non intieramente esatto. Credo perciò opportuno trattare l'argomento interessante con quelle modificazioni che mi son parse necessarie.

L'A. considera un n–gono qualunque come generato da rotazioni di una retta e da un punto mobile su di essa, in modo che ciascuno dei due movimenti avvenga sempre in uno stesso senso; e poichè la retta compie un numero intero r di *giri* (bene inteso nell'ipotesi euclidea), si avrà, indicando con S_n la somma degli angoli descritti dalla retta, $S_n = 4rR$, dove $1 \leq r \leq n - 1$. Inoltre la somma dell'ang. descritto dalla retta e dell'ang. ad esso adiacente (intendendosi sempre per ang. adiacente ad un dato la rotazione positiva che deve descrivere la direzione positiva del secondo lato per soprapporsi alla direzione negativa del primo) è $2R$ o $6R$, secondochè la retta ruota di un ang. convesso ($< 2R$) o di un ang. concavo ($> 2R$). Ora sia P_n la somma di tutti gli angoli adiacenti suddetti, cioè degli angoli su di una stessa banda dell'n-gono, dei quali p concavi; avremo

$$P_n + S_n = 6pR + 2(n-p)R = 2(n+2p)R$$

ovvero

$$P_n = 2[n + 2(p-r)]R = P_{n(p,r)}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad [1]$$

cioè P_n dipende da n, p ed r. Sia r' il numero dei giri corrispondenti agli angoli sull'altra banda; su questa ci sono invece $n - p$ angoli concavi, e quindi

$$P_{n(n-p,r')} = 4nR - 2[n + 2(p-r)]R = 2[n + 2(n-p) - 2r']R,$$

donde $r' = n - r$ (come è facile vedere anche direttamente), e quindi

$$P_{n(n-p,\,n-r)} = 2[n + 2(r-p)]R = P_{n(r,p)}, \text{ cioè:}$$

Se nell'espressione della somma degli angoli su di una banda dell' n*-gono si permutano* p *ed* r, *si ha la somma degli angoli sull'altra banda.*

Dalla limitazione evidente $p(2R) < P_{n(p,r)} < (n-p)(2R) + p(4R)$, si ricava per la [1]

$$\frac{p}{2} < r < \frac{p+n}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad [2]$$

Tuttavia *non si può supporre* $p = r = 1$. Infatti (*), sia $A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ un n-gono pel quale, se è possibile, $p = r = 1$, e $A_0 X_0, A_1 X_1, \ldots, A_{n-1} X_{n-1}$ i prolungamenti dei suoi lati $A_{n-1} A_0, A_0 A_1, \ldots, A_{n-2} A_{n-1}$ nelle direzioni positive. Sia A_1 l'ang. concavo, e per $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$ si conducano le direzioni $A_1 Z_1, A_2 Z_2, \ldots, A_{n-2} Z_{n-2}$ parallele ad $A_0 X_0$ e nello stesso verso. La direzione $A_1 A_2 X_2$ cadrà nell'ang. convesso $A_0 A_1 Z_1$, poichè l'ang. $A_0 A_1 A_2$ è concavo e la somma delle due rotazioni in A_0 e A_1 dev'essere p. i. $< 4R$. La direzione $A_2 A_3 X_3$ cadrà nell'ang. convesso $X_2 A_2 Z_2$, poichè la somma delle tre rotazioni in A_0, A_1, A_2 dev'essere p. i. $< 4R$; per ciò stesso la direzione $A_3 A_4 X_4$ cadrà nell'ang. convesso $X_3 A_3 Z_3$, e così via. Adunque tutti i vertici $A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ cadranno dalla stessa banda della retta $A_0 A_1 X_1$ e proprio in quella ove cade $A_0 X_0$; il che è assurdo, dovendo A_{n-1} cadere necessariamente dall'altra banda.

Considereremo della *stessa specie* quegli n-goni pei quali sull'una o sull'altra banda p ed r sono i medesimi. Allora per contare queste specie basterà degli

---

(*) In questa dimostrazione e nelle seguenti mi distacco interamente dall'A.

$n+1$ valori di p $(0, 1, \ldots, n)$ considerare soltanto quelli $\leq \frac{n}{2}$, perchè gli altri appartengono agli stessi n–goni presi dall'altra banda. Ciò posto, sia n *pari*. — La limitazione [2] dà allora per p *pari* $\frac{n}{2}-1$ valori di r, e per p *dispari* ne dà $\frac{n}{2}$. Ora, se $\frac{n}{2}$ è *pari* il numero dei valori dispari di p è $\frac{n}{4}$, e quindi avremo in tutto $\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)+\frac{n}{4}$ coppie di valori di p ed r. Ma per $p=\frac{n}{2}$ i corrispondenti valori di r sono

$$\frac{n}{4}+1,\ \frac{n}{4}+2, \ldots\ldots, \frac{n}{2}, \ldots\ldots, \frac{n}{4}+\frac{n}{2}-1,$$

e in questa serie la somma di due termini equidistanti dal medio $\frac{n}{2}$ è uguale ad n; perciò le r di ognuna di queste coppie corrispondono alle due bande dello stesso n–gono, essendochè in questo caso p è il medesimo per le due bande. Così per $p=\frac{n}{2}$ possono intanto trascurarsi $\frac{n}{4}-1$ coppie di valori di p ed r; e poichè non può essere $p=r=1$, si possono anzi trascurare $\frac{n}{4}$ di tali coppie. Si ottengono perciò in questo caso *al più*

$$\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)$$

specie di n–goni. Se invece $\frac{n}{2}$ è *dispari*, il numero dei valori dispari di p è $\dfrac{\frac{n}{2}-1}{2}+1=\frac{n+2}{4}$, e quindi avremo in tutto $\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)+\frac{n+2}{4}$ coppie di valori di p ed r. Per $p=\frac{n}{2}$ i corrispondenti valori di r sono

$$\frac{n+2}{4},\ \frac{n+2}{4}+1, \ldots\ldots, \frac{n}{2}, \ldots\ldots \frac{n+2}{4}+\frac{n-2}{2},$$

cioè in numero di $\frac{n}{2}$. Anche qui la somma di due termini equidistanti dal medio $\frac{n}{2}$ è uguale ad n, e perciò con lo stesso ragionamento fatto sopra si vede che per $p=\frac{n}{2}$ sono qui da trascurare $\frac{n-2}{4}$ coppie di valori di p ed r; trascurando inoltre $p=r=1$, si ottengono di nuovo al più

$$\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)$$

specie di n–goni.

Sia poi n *dispari*. — La limitazione [2] dà allora per ogni valore di p $\frac{n-1}{2}$ valori di r. Si hanno così in tutto $\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$ coppie di valori di p ed r, e trascurando anche qui $p=r=1$, si ottengono al più $\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$ — 1 specie di n-goni. Resta così provato che *in tutti i casi, diminuendo di* 1 *il prodotto del numero dei numeri pari per quello dei numeri dispari nella serie dei numeri naturali da* 1 *a* n, *si ottiene un risultato non minore del numero delle specie di* n*-goni* (*).

I poligoni in cui $r-p=0$ diconsi *rovesciabili* (*überschlagen*), perchè hanno eguali le somme degli angoli dalle due bande. I poligoni, che da quella banda per la quale $p \leq \frac{n}{2}$ dànno $r-p=1$, diconsi *comuni;* sono comuni p. e. tutti i poligoni a contorno non intrecciato, ma non inversamente.

Oltre alla questione fatta nella nota (*) propongo al lettore la seguente:

Da quali caratteri del contorno del poligono si può desumere direttamente il valore di r?

Foggia, gennaio 1891. G. Rozzolino.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
69*, 70*, 72*, 76, 75bis, 76bis

69*. *In un quadrilatero qualunque circoscritto ad un cerchio, la differenza dei rettangoli dei lati opposti è uguale al rettangolo della somma e della differenza delle congiungenti i punti medi dei lati opposti.*

(U. Dainelli).

Soluzione del Sig. *G. M. Nobile*, allievo del R. Istituto tecnico di Chieti.

Sia $ABCD$ un quadrangolo circoscritto a un cerchio e sieno M, N, P, Q i punti medî dei lati AB, BC, CD, DA; MP, NQ, per nota proprietà di un quadrangolo qualunque, si dimezzano scambievolmente in un punto O.

Essendo OM, OP mediane dei triangoli AOB, COD si hanno le eguaglianze:

$$\frac{1}{2}\overline{AB}^2+2\,.\,\overline{OM}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2,\quad \frac{1}{2}\overline{CD}^2+2\,.\,\overline{OP}^2=\overline{OC}^2+\overline{OD}^2$$

dalle quali, sommando e ricordando che $OM=OP=\frac{1}{2}MP$, si deduce:

(*) Secondo l'A. questo risultato è proprio il numero delle specie di n-goni; ma, secondo me, resta a provare che per ciascuna delle coppie di valori di p ed r ammissibili esiste effettivamente un n-gono.

$$\frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2\right) + \overline{MP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2;$$

analogamente:

$$\frac{1}{2}\left(\overline{BC}^2 + \overline{DA}^2\right) + \overline{NQ}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2$$

e dal confronto delle ultime due eguaglianze:

$$\frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2 + \overline{CD}\right)^2 + \overline{MP}^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{BC}^2 + \overline{DA}^2\right) + \overline{NQ}^2 \ldots\ldots (\alpha)$$

Ora, essendo il quadrangolo circoscritto a un cerchio, è:

$$AB + CD = BC + DA;$$

quadrando, dividendo per 2 e sottraendo da (α):

$$\overline{MP}^2 - AB \,.\, CD = \overline{NQ}^2 - BC \,.\, DA.$$

Donde

$$AB \,.\, CD - BC \,.\, DA = (MP - NQ)(MP + NQ)$$

che dimostra il teorema (*).

70'. *Sommando la serie finita*

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots\ldots + nx^{n-1}$$

e facendo poi $x = \frac{n+1}{n}$, *si ottiene l'identità:*

$$1 + 2\left(\frac{n+1}{n}\right) + 3\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + \ldots\ldots + n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = n^2.$$

(U. Dainelli).

Soluzione del Sig. *P. Marano* studente privato a Catania (**).

La serie proposta può scriversi nel seguente modo:

$$\begin{array}{r} 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1} \\ + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + x^{n-2} + x^{n-1} \\ + x^{n-1} \end{array}$$

I termini d'ogni riga costituiscono una progressione geometrica il cui quoziente è x. Sommando perciò queste progressioni ed addizionando le somme ottenute, si ha:

(*) Inviarono soluzioni sostanzialmente analoghe i Sigg. *C. Aiello* (R. Liceo V. E. Napoli), *R. Bencivenga* (Collegio militare Roma), *O. Manfredi* (R. Istituto tecnico Reggio Emilia).

(**) Analoghe soluzioni pervennero dai Sigg. *C. Aiello* (R. Liceo V. E. Napoli), *R. Bencivenga* (Collegio militare Roma), *G. Bitonti* (Istituto tecnico Catanzaro), *S. Lopriore* (R. Liceo Bari), *G. M. Nobile* (R. Istituto tecnico Chieti).

$$\frac{n x^n - \left\{ 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1} \right\}}{x - 1}$$

che si riduce ad $\dfrac{x^n \left\{ xn - n - 1 \right\} + 1}{(x-1)^2}$. Ponendo qui $x = \dfrac{n+1}{n}$ si ottiene, fatta ogni riduzione, n^2.

Così resta dimostrato che:

$$1 + 2\left(\frac{n+1}{n}\right) + 3\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + \ldots\ldots + n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = n^2.$$

72*. *Pei centri* A *e* B *di due circoli eguali e tangenti esternamente in* F, *e dalla stessa parte di* AB, *si conducono i raggi* AC, BD *paralleli fra loro; su* CD, *come diametro, si descrive un mezzo cerchio esternamente ai cerchi dati, si ottiene così una figura (drepanoide) formata dal suddetto mezzo cerchio e dagli archi* FC, FD. *Mostrare che il raggio* ρ *del cerchio inscritto nel drepanoide è legato al raggio* r *dei cerchi dati ed all'angolo* $ABD = \alpha$, *dalla relazione*

$$\rho = \frac{2r \operatorname{sen}^2 \alpha}{4 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$$ (G. Russo).

Soluzione del Sig. *R. Bencivenga*, allievo del Collegio militare di Roma (*).

Sia O il centro del cerchio inscritto nel drepanoide. Essendo $OA = OB$, sarà OF perpendicolare ad AB. Inoltre se si chiama H il centro del mezzo cerchio descritto su CD come diametro, HO passerà pel punto di contatto di quest'ultimo semicerchio col cerchio inscritto O. — Ciò posto dal triangolo OFH, si ha:

$$\overline{OH}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{FH}^2 - 2\, OF \,.\, FH \cos OFH,$$

ma $OH = (r - \rho)$, $OF = \sqrt{\overline{OB}^2 - r^2} = \sqrt{\rho^2 + 2r\rho}$, $FH = r$, $\cos OFH = \operatorname{sen} HFB = \operatorname{sen} \alpha$, talchè sostituendo risulta:

$$(r-\rho)^2 = \rho^2 + 2r\rho + r^2 - 2r\sqrt{\rho^2 + 2r\rho} \,.\, \operatorname{sen}\alpha$$

e, riducendo:

$$2\rho = \operatorname{sen}\alpha \sqrt{\rho^2 + 2r\rho}.$$

Da questa equazione, quadrando e risolvendo rispetto a ρ, si ottiene:

$$\rho = \frac{2r \operatorname{sen}^2 \alpha}{4 - \operatorname{sen}^2 \alpha}.$$

(*) Inviarono soluzioni di questa questione pure *C. Aiello* (R. Liceo V. E. Napoli), *G. M. Nobile* (R. Istituto tecnico Chieti).

76. *Trovare una relazione tra i coseni degli angoli* A'AB, B'BC, C'CA *che le rette* AA', BB', CC', *fra loro parallele e situate da una stessa banda del piano* ABC, *formano coi lati* AB, BC, CA *del triangolo* ABC, *supposto equilatero.* (D. Besso).

Soluzione del Sig. Prof. *R. Bettazzi.*

Proponiamoci il problema nel caso più generale in cui il triangolo ABC sia qualunque. Sieno A, B, C gli angoli di questo, P, Q, R rispettivamente i tre angoli $B'BC$, $C'CA$, $A'AB$ indicati nell'enunciato; α, β, γ i diedri colle costole rispettive BC, CA, AB, formati ciascuno dal semipiano contenente il triangolo ABC, e da quello delle due relative semiparallele date.

In A si avrà un triedro le cui facce sono $R, A, \pi - Q$ ed in cui il diedro opposto ad R è β: in C un altro triedro colle facce $Q, C, \pi - P$, in cui il diedro opposto a $\pi - P$ è pure β. Le note formole fondamentali della Trigonometria Sferica danno in questi due triedri:

$$\cos R = \cos A \cos(\pi - Q) + \operatorname{sen} A \operatorname{sen}(\pi - Q) \cos\beta$$
$$\cos(\pi - P) = \cos C \cos Q + \operatorname{sen} C \operatorname{sen} Q \cos\beta$$

ossia, riducendo,

$$\cos R = - \cos A \cos Q + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} Q \cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad [1]$$
$$-\cos P = \cos C \cos Q + \operatorname{sen} C \operatorname{sen} Q \cos\beta. \quad \ldots\ldots\ldots \quad [2]$$

Moltiplicando [1] per sen C, [2] per sen A, sottraendo, e riducendo coll'osservare che $\operatorname{sen}(A + C) = \operatorname{sen}(180^\circ - B) = \operatorname{sen} B$, si ha:

$$\cos R \operatorname{sen} C + \cos P \operatorname{sen} A = - \cos Q \operatorname{sen} \beta$$

da cui

$$\operatorname{sen} A \cos P + \operatorname{sen} B \cos Q + \operatorname{sen} C \cos R = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad [3]$$

che è la relazione cercata; essa, per uno stesso triangolo e qualunque sia la direzione delle parallele, può indicarsi così:

$$p \cos P + q \cos Q + r \cos R = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [4]$$

dove p, q, r sono tre costanti proporzionali a sen A, sen B, sen C.

Nel caso speciale del triangolo equilatero, sarà $A = B = C$, e quindi $p = q = r$, e la [3] e la [4] diverranno:

$$\cos P + \cos Q + \cos R = 0$$

Osservazione. — Nella [4] in luogo di p, q, r si possono porre i tre lati a, b, c del triangolo ABC, che sono appunto proporzionali a sen A, sen B, sen C: allora la [4] diviene:

$$a \cos P + b \cos Q + c \cos R = 0$$

ed esprime che « la somma delle proiezioni dei lati del triangolo dato su quella « delle parallele con cui concorre a formare l'angolo indicato nel problema, è « nulla, quando si considerino di segno opposto le proiezioni che stanno da « parti opposte del piano » giacchè tali proiezioni sono da un lato o dall'altro, secondochè l'angolo relativo P, Q, R è acuto od ottuso.

Soluzione del Sig. Prof. *G. Riboni.*

1.° Sieno ang. $A'AB = \alpha_1$, $B'BC = \alpha_2$, $C'CA = \alpha_3$. Se si considera il triedro in A (le cui facce sono $CAA' = \pi - \alpha_3$, $A'AB = \alpha_1$, $BAC = \frac{\pi}{3}$), per la nota relazione fra tre facce ed un diedro, si ha:

$$\cos(\pi - \alpha_3) = \cos\alpha_1 \cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cos\overline{AB}$$

($\overline{AB}$ è il diedro opposto alla faccia $\pi - \alpha_3$). Similmente dal triedro in B (le cui facce sono $ABB' = \pi - \alpha_1$, $B'BC = \alpha_2$, $CBA = \frac{\pi}{3}$) si ha:

$$\cos\alpha_2 = \cos(\pi - \alpha_1)\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}(\pi - \alpha_1)\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\overline{AB}.$$

Eliminando $\cos\overline{AB}$ dalle due relazioni e riducendo si ha:

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 = 0.$$

2.° Si consideri ora un poligono regolare $ABCD \ldots H$ di n lati e si conducano le AA', BB', ... HH' parallele e nella stessa direzione e sieno ang. $A'AB = \alpha_1$, $B'BC = \alpha_2$, $C'CD = \alpha_3$ ..... $H'HA = \alpha_n$.

Dai triedri in A ed in B, analogamente a quanto si è fatto più sopra, coll'eliminazione di $\cos\overline{AB}$ si ottiene:

$$\cos\alpha_n + 2\cos\frac{n-2}{n}\pi\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 = 0,$$

dai triedri in B ed in C, eliminando $\cos\overline{BC}$, si ha:

$$\cos\alpha_1 + 2\cos\frac{n-2}{n}\pi\cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 = 0$$

e così di seguito fino a considerare i triedri in H ed in A, da cui si otterrà:

$$\cos\alpha_{n-1} + 2\cos\frac{n-2}{n}\pi\cos\alpha_n + \cos\alpha_1 = 0.$$

Sommando le relazioni ottenute e riducendo si ha:

$$2\left(1 + \cos\frac{n-2}{n}\pi\right)(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n) = 0$$

e poichè $1 + \cos\frac{n-2}{n}\pi$ non può essere nullo, dovrà essere:

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots\ldots + \cos\alpha_n = 0$$

ossia la relazione più sopra trovata si estende al caso di un poligono regolare qualunque.

Osservazione. — Se AA', BB', ... HH' sono gli spigoli laterali di un prisma e si immagina che un osservatore percorrendo il contorno della base in un dato senso proietti ciascuno spigolo laterale sul corrispondente lato della base, la somma di queste proiezioni (detta s la lunghezza di uno spigolo) è data da:

$$s(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n)$$

che, in causa della relazione già trovata, è nulla (*).

75bis. *Dimostrare che, se ciascun lato d'un triangolo sferico viene diviso in due segmenti in modo che il prodotto dei coseni di tre segmenti non consecutivi sia eguale al prodotto dei coseni degli altri tre, i circoli massimi perpendicolari ai tre lati condotti pei rispettivi punti di divisione passano per gli estremi di uno stesso diametro.* (D. Besso).

Dimostrazione del Sig. Prof. *F. Viaggi* (**).

Sia il triangolo sferico ABC i cui lati AB, BC, CA sieno divisi nei punti C', A', B' in modo che

$$\frac{\cos AC'}{\cos BC'} \cdot \frac{\cos BA'}{\cos CA'} \cdot \frac{\cos CB'}{\cos AB'} = 1 \quad \ldots\ldots \quad [\alpha]$$

Sui lati AB, BC, CA si prendano i punti C_1, A_1, B_1 tali che $C'C_1$, $A'A_1$, $B'B_1$ sieno quadranti; si ha

$$AC' = AC_1 - C'C_1 \qquad BC' = BC_1 - C'C_1$$

donde

$$\cos AC' = \operatorname{sen} C'C_1 \,.\, \operatorname{sen} AC_1 \qquad \cos BC' = \operatorname{sen} C'C_1 \,.\, \operatorname{sen} BC_1$$

e quindi

$$\frac{\cos AC'}{\cos BC'} = \frac{\operatorname{sen} AC_1}{\operatorname{sen} BC_1}.$$

In virtù della ultima uguaglianza e delle analoghe la condizione $[\alpha]$ si trasforma nella seguente

$$\frac{\operatorname{sen} AC_1}{\operatorname{sen} BC_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} BA_1}{\operatorname{sen} CA_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} CB_1}{\operatorname{sen} AB_1} = 1$$

la quale prova (cf. *Trig.* del Baltzer § 7, 6) che A_1, B_1, C_1 sono su un circolo massimo; perciò i circoli massimi di cui A_1, B_1, C_1 sono poli, e che sono quindi perpendicolari in A', B', C' ai lati del triangolo dato, passano pei poli del circolo $A_1 B_1 C_1$.

76bis. *Dimostrare che, se in un esagono convesso equilatero sono eguali fra loro le congiungenti le coppie di vertici opposti, queste congiungenti devono passare per uno stesso punto.* (D. Besso).

Dimostrazione del Sig. Prof. *S. Gatti.*

Osservo primieramente che si può giungere ancora a questa conclusione restringendo in parte l'ipotesi del teorema. — Infatti nell'esagono convesso $ABCDEF$,

---

(*) Soluzioni di questa quistione vennero pure inviate dai Sigg. Prof. *S. Catania, L. Mariscotti, F. Palatini, F. Viaggi.*

(**) Altre dimostrazioni furono inviate dai Prof. *S. Catania, A. de Zolt, L. Mariscotti* e dall'alunno *G. Fumanti* del R. Istituto tecnico di Roma.

siano ordinatamente uguali i lati opposti AF, CD, le congiungenti AD, CF le coppie di vertici opposti A, D; C, F ed i lati AB, BC, concorrenti in B, non che i lati FE, ED, concorrenti nel vertice F, opposto a B: dico che la congiungente BE passa pel punto d'intersezione O delle diagonali AD, CF.

Conducendo AC, BO, OF e considerando le coppie di triangoli ACF, ACD; AOB, BOC; FOE, EOD, la prima coppia, per essere $AF = CD$, $FC = DA$ e lato AC comune, mostra che ang. $ACF = CAD$ e per conseguenza che $AO = OC$, $OD = OF$. La seconda e terza coppia, costituite dopo ciò da triangoli coi lati eguali, conducono alla conseguenza che BO, EO sono bisettrici degli angoli opposti al vertice COA, FOD, e così le congiungenti i vertici opposti dell'esagono considerato passano per uno stesso punto.

Osservazioni. — 1.° Nel caso che si avverino tutte le condizioni espresse nella quistione proposta, dalla dimostrazione precedente, discende che CF è bisettrice degli angoli DOB, AOE e che quindi gli angoli in O sono tutti eguali all'angolo del triangolo equilatero, come pure che le tre diagonali sono bisettrici degli angoli dell'esagono ai cui vertici hanno termine. Sono poi eguali i sei triangoli AOB, BOC, ..., eguali gli angoli dell'esagono di posto dispari e quelli di posto pari ed eguali le distanze da O dei tre vertici di posto dispari e quelle dei vertici di posto pari.

2.° La costruzione dell'esagono considerato nell'enunciato, dati che siano il lato e la congiungente di due vertici opposti, dipende evidentemente, dopo ciò che si è detto, da quella del noto problema: costruire un triangolo conoscendone un angolo, il lato opposto e la somma degli altri due.

3.° Emerge pure dalle considerazioni precedenti che se un esagono convesso equilatero ha uguali gli angoli di posto dispari ed uguali gli altri tre, le congiungenti le coppie di vertici opposti devono essere uguali e passare per uno stesso punto.

I Sigg. Prof. *S. Catania* e *F. Viaggi*, che pure inviarono soluzioni di questa questione, osservano che i due triangoli ACE, DFB sono omotetici inversi rispetto al centro O (*).

Si dichiara inoltre ricevimento delle soluzioni seguenti: quistione **80.** dal Sig. *A. Baldassarre, S. Catania, A. Ceci, A. Giuffra, L. Mariscotti, A. Ognissanti, F. Palatini, A. Perna, G. Riboni, G. Rozzolino, G. Russo, G. Santorelli, D. Taverna, F. Viaggi*; **81*.** *G. Calvitti, A. Ceci, C. Lavarello, A. Longo, P. Marano, S. Marvasi, A. Ognissanti, A. Perna, G. Santorelli, G. Trapani*; **82*.** *G. Calvitti, A. Ceci, A. Dal Buono Sidoli, G. Federici, A. Longo, A. Ognissanti, A. Perna*; **83.** *U. Scarpis*; **84.** *U. Scarpis, F. Viaggi*; **85.** *G. Calvitti, S. Catania, A. Ceci, F. Palatini, A. Perna, G. Riboni, G. Russo, F. Viaggi*; **86*.** *A. Baldassarre, G. Calvitti, A. Ceci, C. Chigiotti, A. Dal Buono Sidoli,*

(*) Altre soluzioni pervennero dai Sigg. Prof. *L. Mariscotti, R. Catani* e *G. Fumanti* (alunni del R. Istituto tecnico Roma), *A. de Fulco* (alunno R. Istituto tecnico Napoli).

A. de Falco, C. Ghetti, E. Goti, E. La Fianza, A. Longo, P. Marano, A. Ognissanti, G. Paoli, A. Perna, P. Viscidi; **87*.** *M. Appugliese, A. Baldassarre, A. Ceci, A. Longo, A. Perna;* **88*.** *A. Baldassarre, N. Bottini, G. Calvitti, A. Ceci, A. Dal Buono Sidoli, A. Gandolfi, E. Goti, E. La Fianza, N. Leo, A. Longo, P. Marano, A. Mucci, A. Ognissanti, G. Paoli, A. Perna, T. Rebollo, G. Roccheth, G. Santorelli, O. Scilla, D. Taverna, G. Trapani, P. Viscidi;* **89.** *G. Riboni, F. Viaggi;* **90*.** *G. Calvitti, A. Ceci, C. Lavarello, A. Longo, C. Magretti, A. Ognissanti, L. Pece* — soluzioni alle quali verrà data evasione nei venturi fascicoli.

La Redazione.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

91*. Dimostrare che $13453^7 - 13452^7 - 1$ è divisibile per 180969757.

92*. Risolvere l'equazione

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0.$$

D. Besso.

93*. Se A, B, C indicano gli angoli d'un triangolo, m, m', m'' le sue mediane, e si pone $\tang A : \tang B : \tang C = p : q : r$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{t}$, dimostrare che si ha:

$$m^2 : m'^2 : m''^2 = \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{p}\right) : \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{q}\right) : \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{r}\right).$$

A. Lugli.

94. Se nel piano di una conica di centro O sono dati due punti M ed N, e P e Q sono rispettivamente i punti d'incontro delle polari di M ed N coi diametri NO ed MO, i triangoli MOP ed NOQ sono equivalenti.

G. Rozzolino.

95. Due recipienti A e B contengono quantità disuguali di uno stesso liquido, e propriamente A contiene a litri di più di quanti ne contiene B. Ora s'immagini che dal recipiente A sieno tolti gli $\frac{r}{n}$

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

del suo contenuto e versati in B, e poi tolti da B gli $\frac{r}{n}$ del suo nuovo contenuto e versati in A; indi tolti nuovamente dal recipiente A gli $\frac{r}{n}$ del suo nuovo contenuto e versati in B, e poi tolti da B gli $\frac{r}{n}$ del suo nuovo contenuto e versati in A; e così continuando fino a fare p volte la doppia operazione di versare gli $\frac{r}{n}$ del contenuto di A in B e gli $\frac{r}{n}$ del nuovo contenuto di B in A. Conoscendosi il rapporto k del contenuto di A al contenuto di B dopo le p coppie di operazioni accennate, determinare la quantità di liquido contenuta in ciascuno dei due recipienti A e B prima delle suddette operazioni.

Indicando con x il numero dei litri di liquido contenuti nel recipiente B, si deve trovare:

$$x = \frac{[n^{2p} - (n-r)^{2p}]\,(n-r)\,k - [n^{2p+1} + (n-r)^{2p+1}]}{[2\,n^{2p+1} - r\,(n-r)^{2p}] - [2\,n^{2p} + r\,(n-r)^{2p-1}]\,(n-r)\,k} \,.\, a.$$

Determinare inoltre fra quali limiti deve variare il rapporto k per essere possibile il problema.

D. AMANZIO.

96. Dimostrare che, se la congruenza generale di 2° grado e di modulo primo p

$$a x^2 + b x y + c y^2 + d x + e y + f = 0 \quad \text{mod. } p$$

non è parabolica, se cioè $b^2 - 4ac$ non è 0, mod. p, essa, in generale, cioè quando $ae^2 + cd^2 + fb^2 - bde - 4acf$ non è 0 mod. p, ha $p-1$ soluzioni se è iperbolica, se cioè $b^2 - 4ac$ è resto quadratico mod. p, e ne ha $p+1$ se è ellittica.

97. Dimostrare che, se p è un numero primo e g radice primitiva, mod. p, si ha:

$$2\,(1+g)^2\,(1+g^2)^2\,(1+g^3)^2 \ldots \left(1+g^{\frac{p-3}{2}}\right)^2 \equiv g^{\frac{p^2-1}{8}} \text{ mod. } p$$

ed anche

$$2\,(1-g)^2\,(1-g^2)^2\,(1-g^3)^2 \ldots . \left(1-g^{\frac{p-3}{2}}\right)^2 \equiv g^{-\frac{p^2-1}{8}} \text{ mod. } p.$$

Dedurne i noti teoremi di *Fermat*, riguardanti il carattere quadratico di 2, mod. p.

98*. Verificare che ponendo

$$x = \frac{m}{2}(m^2 + 3) \qquad y = \frac{1}{2}(m^2 + 1)$$

si soddisfa all' equazione

$$x^2 - (m^2 + 4)\, y^2 = -1 \ (*).$$

99*. Verificare che ponendo

$$x = \frac{m^2 - m + 2}{2} \qquad y = \frac{m - 1}{2}$$

si soddisfa all' equazione

$$x^2 - (m^2 + 4)\, y^2 = m \ (*).$$

G. Frattini.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

FERDINANDO DEL CHICCA, professore di matematica, scienze fisiche e naturali, nella R. Scuola normale femminile superiore di Venezia. — *Elementi di aritmetica teorico-pratica ad uso delle scuole preparatorie, normali, tecniche e ginnasiali.* Venezia, Ferrari Carlo ed., 1890. Prezzo L. 2. 50.

Tutti gli insegnanti, specialmente delle scuole normali femminili, sanno come me, quanta difficoltà e noia provano la maggior parte delle adolescenti (sic) *nello studio dell'aritmetica, giudicandolo non altro che intellettuale tortura.* — Così l'autore nella prefazione. Il resto s'indovina. Scopo del libro il recar un qualche sollievo a quelle poverette, vagliando, facilitando, allettando, ricreando.

Non si può negare che l'esperienza dell'autore sarebbe un buon argomento a suffragio della lamentata tortura, se frutto dell'esperienza medesima dovesse credersi il libro che ha fatto. Ma che per aver lode d'un' opera, ch' era meglio non pubblicare, siasi invocata la testimonianza di tutti gl'insegnanti, e, fra questi, dei professori di matematica, gente alla buona, mite, e che avrebbe a sdegno il farsi ministra di tortura, per lo meno quanto il dire una bugia per far piacere all'autore, m'è sembrato ingenuità, per non dir altro.

Vengo al libro. Non isciuperò tempo e fatica in lunghi commenti. Poche citazioni testuali diranno il tutto nel migliore dei modi.

(*) Supponendo m intero e dispari, si ottiene una soluzione dell'equazione in numeri interi.

A pag. 41. — *La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Essa serve a rendere un numero chiamato dividendo un certo numero di volte più piccolo di un altro chiamato divisore.* (*)

A pag. 72. — (Si pretende di dimostrare che un numero non si può decomporre in più maniere in fattori primi). — *Supponiamo il numero non primo* N = a × b × c (??) *e lo stesso numero* N = a' × b' × c' (?). *Avremo :*

$$a \times b \times c = a' \times b' \times c'.$$

Il fattore primo a *divide il prodotto* a × b × c *e* (sic) *divide l'altro* a' × b' × c'; *il fattore* a' *divide il prodotto* a' × b' × c' *e* (sic) *l'altro* a × b × c; *dunque* a = a' (!!!). — Ecc..

A pag. 73. — (Cito, come saggio di chiarezza): — *Perchè due numeri siano divisibili l'uno per l'altro è necessario e sufficiente che il dividendo contenga tutti i fattori primi del divisore elevati ad un esponente per lo meno eguale. — Infatti l'eguaglianza* N = a × q *(!) mostra che il divisore* a *deve soddisfare alle condizioni dell'enunciato, altrimenti vi sarebbero due maniere per scomporre un numero in fattori primi.* (Detto questo, l'autore passa ai corollari).

A pag. 80. — *La grandezza di una frazione dipende dalla grandezza del suo numeratore e dalla piccolezza del suo denominatore.*

A pag. 82. — (Si pretende di dimostrare che $\frac{8}{7}$ è uguale al quoziente 8 : 7). *Se* $\frac{8}{7}$ *sarà il quoziente della divisione di 8 per 7, avremo:*

$$8 = 7 \times \frac{8}{7}.$$

Ed eliminando (sic) *nel secondo membro 7, che moltiplica e divide* (!!) *nello stesso tempo, otteniamo realmente il dividendo.* — (Petizioni di principio, come questa, pullulano di tratto in tratto e sono quasi l'abito del libro).

A pag. 84, 85. — *Quando si moltiplica il denominatore d'una frazione per un numero qualunque, la frazione resta divisa per questo numero. — Si moltiplichi per 3 il denominatore della frazione* $\frac{6}{9}$, ecc. Conclusione: *Dunque* $\frac{6}{9}$ *è maggiore* (dico maggiore, e non 3 volte maggiore) *di* $\frac{6}{27}$. — (Questo qui pro quo del § 233, ritorna, mutatis mutandis, ai § 234 e 235, e suggella le petizioni di principio contenute in tutti e tre i paragrafi).

A pag. 86, 87. — (Subito dopo il titolo generale): *Questo ultimo teorema* (quale?) *ci fa vedere che una stessa grandezza può essere espressa da un numero infinito di frazioni differenti di forma e che i termini di ciascuna* (!!) *di esse siano* (sic) *equimultipli dei termini delle altre.*

A pag. 109 — (Una promozione a teorema!). — Teorema. *Le cifre successive collocate alla destra dell'unità principale esprimono decimi, centesimi, millesimi* ecc. (Evidentemente si tratta della scrittura dei decimali).

(*) Per debito di giustizia soggiungo che, nell'*errata corrige*, ho trovato quest'altra versione: *Essa serve a rendere un numero chiamato dividendo un certo numero di volte più piccolo, cioè* (sic) *quante sono le unità di un altro chiamato divisore.*

A pag. 131. — *Certi corpi hanno una forma irregolare perchè* (sic) *se ne possa geometricamente determinare il volume, altri sono troppo voluminosi per essere pesati, per cui la densità ha per oggetto di rimediare a questi inconvenienti* (?!). E poi: *Supponiamo di voler determinare il peso di un pezzo di marmo di Çarrara* ecc. *Sapendo che un dm^3* (sic) *di questo marmo ha per densità Kg. 2,717* (!!!), ecc.

A pag. 143. — (Brano di scrittura in formole, a mosaico di controsensi):

$$14^\circ\, 19' = (14^\circ \times 60) + 19 = 859'$$

$$3^h\, 4^m\, 45^s = \frac{11085}{3600}.$$

Seguita il mosaico a pag. 144 e 145).

A pag. 149. — *Si chiama radice quadrata di un numero quel numero che elevato al quadrato riproduce questo numero.* — Passi, salvo la forma. Ma a pag. 150 si legge: *la radice di 45 è 5 più una frazione* (!), *e quindi 45 non* (!!) *è un quadrato perfetto, perchè la sua radice innalzata al quadrato non riproduce 45* (!!!).

Mi pare che basti. Peraltro è d'uopo riconoscere che, se l'autore mancò d'altro, le buone intenzioni non gli vennero meno. Ma queste, purtroppo, non bastano: anzi sovente guastano, ed eccone qualche prova.

L'autore, volendo porgere alle *adolescenti* materia di studio succulenta e ricreativa provocandone ad un tempo istesso la natural curiosità, mette loro questa pulce nell'orecchio: se $3 + 4$ sia eguale a $4 + 3$, e più generalmente, se cangi la somma di più numeri interi al cangiare dell'ordine delle parti. Qualcuno potrebbe lodarnelo: ma nessuno gli menerebbe buona la seguente dimostrazione, che si legge a pag. 16, pel caso di due numeri.

$$3 + 4 = 4 + 3.$$

Infatti

$$3 + 4 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$$
$$4 + 3 = 4 + 1 + 1 + 1 = 7.$$

Ora, i secondi membri di queste eguaglianze essendo identici, si ha: $3 + 4 = 4 + 3$. — Lo stesso deve dirsi dell'uso delle parentesi, del quale l'autore s'occupa, anzi si preoccupa, tanto, da inaugurare pei numeri un vero regime cellulare. Si legge infatti a pag. 16: *Allorquando vogliamo esprimere la somma di due numeri, per esempio di 8 e di 6, e conservarne sempre le parti che la formano* (?), *scriveremo così:*

$$(8 + 6)$$

E a pag. 31:

$$(9 \times 4) - (6 \times 4)$$

invece di

$$9 \times 4 - 6 \times 4.$$

E fin qui, niente di male. Il male comincia a pag. 95, dove le mansuete cifre, tanto mortificate per l'innanzi, rompono i gusci e prendono il largo. Ivi si legge, e per ben tre volte:

$$8+\frac{3}{4}-5+\frac{2}{7}$$

invece di

$$\left(8+\frac{3}{4}\right)-\left(5+\frac{2}{7}\right).$$

Quei numeri all'aperto mi fanno sentire il bisogno d'un po di svago. E faccio punto.

GIOVANNI FRATTINI.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico

Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del Prof. G. BATTAGLINI. Vol. XXVIII, Novembre-Dicembre, 1890. Napoli, B. Pellerano, editore.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. DE LONGCHAMPS. 3ª Série, XV année. N. 1, 2, Janvier, Février 1891. Paris, librairie Ch. Delagrave.

Table des matières: — N. 1: — L. BÉNEZECH: Coordonnées quadripolaires. — C. A. LAISANT: Sur l'évaluation des moyennes. — E. VIGARIÉ: Les progrés de la géométrie du triangle, en 1890. — Variétés: HUMBERT: Essai sur un programme de mathématiques à l'usage de la classe de mathématiques élémentaires. — Correspondance. — Bibliographie. — Solutions de questions. — Questions proposées. — N. 2: — L. BÉNEZECH: Coordonnées quadripolaires. — E. VIGARIÉ: Les progrés de la géométrie du triangle, en 1890. — Variétés: HUMBERT: Essai sur un programme de mathématiques de la classe de mathématiques élémentaires. — LORMEAU: Des coordonnées angulaires. — Solutions de la question 356. — Questions proposées.

Journal des Mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT, 15ª année. N. 7, 8, 9, 10 e 11. Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles, 1891.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. MANSION et J. NEUBERG. Deuxième série. Tome I. Janvier, Février, 1891. Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Sommaire: — Janvier: — Préface. — ED. LUCAS: Sur les théorèmes énoncés par Fermat, Euler, Wilson, Staudt et Clausen. — Nécrologie. J. Casey — Madame PRIM: Questions de géométrie. — Bibliographie. — D'OCAGNE: Sur le terme complémentaire de la série de Taylor — Solutions de questions proposées. — Question d'examen. — Questions proposées. = Février: — J. NEUBERG: Sur les quadrangles complets. — P. M.: Questions d'enseignement. — P. M.: Bibliographie. — Solutions de questions proposées. — Questions d'examens. — Questions proposées. — E. CESÀRO: Étude intrinsèque des coniques et des cassinoïdes.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª, Vol. IV, Fasc. 12º, 1890. — Vol. V, Fasc. 1º, 1891.

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par M. B. NIEWENGLOWSKI. N. 4, 5, 6. Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles.

Sommaire: — N. 4: — Algèbre. — Géométrie analytique. — Chimie: Concours général de mathématiques spéciales (1890). — Questions posées aux examens oraux: Ecole polytechnique (1890). — Concours de 1890: École normale supérieure, École polytechnique — Questions proposées. = N. 5: — Algèbre. — Géométrie analytique. — Questions posées aux examens oraux: École polytechnique (1890). — Concours de 1890: Ecole centrale, Bourses de licence. — Question proposée. = N. 6: Algèbre. — Géométrie analytique. — Géométrie descriptive. — Questions proposées.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. HOFFMANN. XXII Jahrgang. 1, Heft. Leipzig, B. G. Teubner, 1891.

Inhaltsverzeichnis: — H. GERLACH: Zur Definition des Winkels — Kleinere Mitteilungen. — Sprech - und Diskussions Saal. — Zum Aufgaben - Repertorium: *A*) Auflösungen; *B*) Neue Aufgaben; *C*) Aufgaben aus nichtdeutschen Fachzeitschriften. — Litterarische Berichte. — Pädagogische Zeitung etc..

Rivista di matematica diretta da G. PEANO. Fasc. 1º, 2º e 3º. Gennaio, Febbraio, Marzo, 1891. Torino, Fratelli Bocca.

Sommario: — Fasc. 1º: — G. PEANO: Principii di Logica Matematica. — (P.) Sommario dei Libri VII, VIII e IX d' Euclide. — E. NOVARESE: Sulla velocità di un punto. — Recensioni. = Fasc. 2º e 3º: Recensioni. — E. NOVARESE: Necrologia, Sofia Kowalevscki. — E. BERTINI: Dimostrazione di un teorema sulla trasformazione delle curve algebriche. — G. PEANO: Formole di Logica Matematica. — C. BURALI-FORTI: La risoluzione dei problemi d'aritmetica. — C. SEGRE: Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche.

BERNARDI (L.) — Euclide. Libro primo con numerosi esercizi e relativi indirizzi alle soluzioni dei medesimi. *Appendice* sui metodi di dimostrazione e soluzione dei teoremi e problemi. Udine, tip. Bardusco, 1891. Prezzo L. 1. 25.

CAPELLI (A.) — Sulla teoria delle funzioni algebriche di più variabili.

CESÀRO (E) — Sui canoni del calcolo degli addensamenti e su alcune loro applicazioni (Rendiconti R. Istituto Lombardo, serie II, vol. XXIV).

LE PAIGE (C). — Un astronome belge du XVII siècle. - *Godefroid Wendelin* (Bullettin de l'Acad. roy. de Belgique, 3ᵉ sér., t. XX).

LORIA (G.) — Le trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale di terz'ordine. (Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, Volume XXVI).

MACÈ DE LÉPINAY (A.) — Compléments d'Algèbre et notions de Géométrie analitique. Second fascicule: Notions de Géométrie analytique. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles, 1891.

MANSION (P.) — Notes sur la géométrie euclidienne et sur la géométrie non euclidienne. (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. XV).

MOLLO (C.) — Sui sistemi di due cubiche binarie. (Giornale di Battaglini, Volume XXVIII).

NIEWENGLOWSKI (B.) — Cours d'algèbre à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et des candidats à l'École normale supérieure et à l'École polytechnique. Paris, A. Colin et C., Éditeurs. — Prix: 12 francs.

PALATINI (F.) — Sopra i triangoli formati coi lati dell'esagrammo di Pascal i quali possono ridursi ad un punto — Palmi, tip. G. Lopresti, 1891.

PASTORE (G.) — Avviamento alla risoluzione delle questioni geometriche. — Bologna, Stab. G. Civelli, 1891. — Prezzo L. 3.

RICCARDI (P.) — Commemorazione del prof. Felice Storchi. (Memorie R. Acc. Scienze, Lettere ed Arti. Modena, vol. VIII, serie II, 1891).

SCHLÖMILCH (O.) — Elementi di Geometria metrica. Prima versione italiana dei professori D. Gambioli e V. Bernardi. — Parte 3ª: Stereometria, trigonometria sferica e geometria descrittiva — Ditta G. B. Paravia e Comp., 1891. Prezzo: L. 4.

TANO (F.) — Sur quelques théorèmes de Dirichlet (Journal für reine u. angewandte Mathematik, Band 105). — Sur quelques points de la théorie des nombres. (Bulletin des Sciences math:, 2ᵉ série, t. XIV).

Chiusura della redazione il dì 22 marzo 1891.

SUI LIMITI

(*Continuazione: Vedi pagina 60*).

2. Molte questioni interessanti sui limiti si trattano con facilità e speditezza per mezzo delle seguenti proposizioni.

Indicheremo, per comodo, con $M(a, b, c, \ldots)$ un numero medio tra $a\ b\ c \ldots\ldots$, cioè più piccolo del maggiore e più grande del minore se questi numeri non sono tutti eguali tra loro ed eguale a ciascuno di essi se hanno tutti lo stesso valore.

Teorema I. *Se* A B k *sono numeri aritmetici, razionali od irrazionali, si ha*

$$\frac{A^k - B^k}{A - B} = M(k A^{k-1}, k B^{k-1}).$$

Dimostrazione. Se $p\ q\ a\ b$ sono interi aritmetici ed è $p > q$ $a > b$, si ha dall'algebra elementare che sussiste la relazione

$$q \cdot a^{q-1} > \frac{a^q - b^q}{a - b} > q \cdot b^{q-1}$$

per cui, essendo

$$(p-q) \cdot a^{p-q} > b \cdot (a^{p-q-1} + a^{p-q-2}\, b + \ldots\ldots + a\, b^{p-q-2} + b^{p-q-1})$$
$$= b \cdot \frac{a^{p-q} - b^{p-q}}{a - b}$$
$$(p-q) \cdot b^{p-q} < a \cdot \frac{a^{p-q} - b^{p-q}}{a - b}$$

sarà pure

$$(p-q)\, a^{p-q} \cdot \frac{a^q - b^q}{a - b} > q\, b^q \cdot \frac{a^{p-q} - b^{p-q}}{a - b}$$
$$(p-q)\, b^{p-q} \cdot \frac{a^q - b^q}{a - b} < q\, a^q \cdot \frac{a^{p-q} - b^{p-q}}{a - b}$$

da cui si ricava

$$\frac{p}{q}\, a^{p-q} > \frac{a^p - b^p}{a^q - b^q} > \frac{p}{q}\, b^{p-q}.$$

Da queste, facendo $a^q = x$ $b^q = y$, si ottiene

$$\frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} > \frac{x^{\frac{p}{q}} - y^{\frac{p}{q}}}{x - y} > \frac{p}{q} \cdot y^{\frac{p}{q}-1}$$

e, facendo $a^p = u$ $b^p = v$, si ottiene

$$\frac{q}{p} \cdot u^{\frac{q}{p}-1} < \frac{u^{\frac{q}{p}} - v^{\frac{q}{p}}}{u - v} < \frac{q}{p} \cdot v^{\frac{q}{p}-1}.$$

Resta così dimostrato che: se A B k sono numeri aritmetici e k è razionale, si ha

$$\frac{A^k - B^k}{A - B} = M\,(k\,A^{k-1},\ k\,B^{k-1}).$$

Pensando che k percorra una successione di valori razionali tendenti ad un limite irrazionale e ricordando le più elementari proposizioni sui limiti, si riconosce che l'ultima relazione sussiste anche se k è irrazionale.

Teorema II. *Se due frazioni con denominatori dello stesso segno sono diseguali, dividendo la somma dei loro numeratori per quella dei loro denominatori s' ottiene una frazione minore della più grande e maggiore della più piccola di quelle.*

Dimostrazione. Siano m n due numeri dello stesso segno e la frazione $\frac{a}{m}$ sia maggiore dell'altra $\frac{b}{n}$, per cui sarà:

$$m \cdot n > 0 \qquad a \cdot n - b \cdot m > 0.$$

Si ha così:

$$\frac{a}{m} - \frac{a+b}{m+n} = \frac{an - bm}{m^2 + mn} > 0 \qquad \frac{a+b}{m+n} - \frac{b}{n} = \frac{an - bm}{n^2 + mn} > 0$$

epperò

$$\frac{a}{m} > \frac{a+b}{m+n} > \frac{b}{n}.$$

Corollario I. Se più frazioni hanno i denominatori dello stesso segno, dividendo la somma dei loro numeratori per quella dei loro denominatori s'ottiene una frazione media tra quelle.

Teorema III. *Se due radicali con radicandi aritmetici ed indici d'egual segno sono diseguali, il radicale che ha per radicando il* *prodotto dei loro radicandi e per indice la somma dei loro indici è minore del più grande e maggiore del più piccolo di quelli.*

DIMOSTRAZIONE. Potremmo ricavare questo teorema dal precedente ma preferiamo darne dimostrazione diretta.

Siano m n due numeri d'egual segno; m b siano numeri aritmetici o sia $\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{b}$, per cui sarà

$$m \, . \, n > 0 \qquad a^n > b^m.$$

Si ha:

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m+n]{a \, . \, b} = \sqrt[m^2+mn]{a^n : b^m} > 1$$
$$\sqrt[m+n]{a \, . \, b} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n^2+mn]{a^n : b^m} > 1$$

per cui, trattandosi di valori aritmetici, è

$$\sqrt[m]{a} > \sqrt[m+n]{a\, b} > \sqrt[n]{b}.$$

COROLLARIO II. Se più radicali hanno radicandi aritmetici ed indici d'egual segno, il radicale che ha per radicando il prodotto dei loro radicandi e per indice la somma dei loro indici è medio tra quelli.

Teorema IV. *Se* a_n b_n $\frac{1}{c_n}$ *non crescono indefinitamente ed è*

$$\lim_{n=\infty} . \, a_n = a \quad \lim . \, b_n = b \quad \lim . \, c_n = c \quad \lim . \, (c_1 + c_2 + \ldots + c_n) = \infty$$

è pure

$$\lim_{n=\infty} . \, \frac{a_1\, b_n + a_2\, b_{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}\, b_2 + a_n\, b_1}{c_1 + c_2 + \ldots\ldots + c_{n-1} + c_n} = \frac{a\, b}{c}.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\frac{a_1\, b_n + \ldots . + a_n \, . \, b_1}{c_1 + \ldots . + c_n} = \frac{a_1\, b_n + \ldots . + a_k\, b_{n-k+1} + a_{n-k+1}\, b_k + \ldots . + a_n \, . \, b_1}{c_1 + c_2 + \ldots\ldots + c_n}$$
$$+ \frac{a_{k+1}\, b_{n-k} + a_{k+2}\, b_{n-k-1} + \ldots\ldots + a_{n-k-1}\, b_{k+2} + a_{n-k}\, b_{k+1}}{c_{2k+1} + c_{2k+2} + \ldots\ldots + c_{n-1} + c_n}$$
$$. \, \frac{c_{2k+1} + \ldots\ldots + c_n}{c_1 + \ldots\ldots + c_n}.$$

Se k è numero fisso, crescono indefinitamente con n anche $n - 1$, $n - 2 \ldots\ldots n - k$ per cui essendo

$$\lim . a_n = a \quad \lim . b_n = b \quad \lim . (c_1 + \ldots\ldots + c_n) = \infty,$$

è:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{a_1 b_n + \ldots\ldots + a_k b_{n-k+1} + a_{n-k+1} b_k + \ldots\ldots + a_n b_1}{c_1 + \ldots . + c_n}$$

$$= \lim . \frac{(a_1 + \ldots . + a_k) . b + (b_k + \ldots\ldots + b_1) . a}{c_1 + \ldots\ldots + c_n} = 0$$

$$\lim_{n=\infty} . \frac{c_{2k+1} + \ldots . + c_n}{c_1 + \ldots\ldots + c_n} = \lim . \left(1 - \frac{c_1 + \ldots\ldots + c_{2k}}{c_1 + \ldots . + c_n}\right) = 1$$

per cui, supponendo k abbastanza grande perchè $c_{2k+1}\ c_{2k+2} \ldots\ldots$ siano tutte del segno del limite c, si ha pel corollario I:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{a_1 b_n + \ldots\ldots + a_n b_1}{c_1 + \ldots\ldots + c_n}$$

$$= M\left(\frac{a_{k+1} b_{n-k}}{c_{2k+1}}, \frac{a_{k+2} b_{n-k-1}}{c_{2k+2}}, \ldots\ldots, \frac{a_{n-k} b_{k+1}}{c_n}\right)$$

dove k può venir fissato arbitrariamente grande cosicchè, facendolo crescere indefinitamente, si riconosce appunto essere (*)

$$\lim_{n=\infty} . \frac{a_1 b_n + \ldots\ldots + a_n . b_1}{c_1 + \ldots\ldots + c_n} = \frac{a\, b}{c}.$$

Corollario III. Facendo

$$a_n = f_n - f_{n-1} \quad f_0 = 0 \quad c_n = \varphi_n - \varphi_{n-1} \quad \varphi_0 = 0 \quad b_n = 1$$

si trova che:

Se esiste $\lim . (f_n - f_{n-1}) : (\varphi_n - \varphi_{n-1})$ ed è $\lim . \varphi_n = \infty$, esiste anche $\lim . f_n : \varphi_n$ ed è precisamente:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{f_n}{\varphi_n} = \lim . \frac{f_n - f_{n-1}}{\varphi_n - \varphi_{n-1}}$$

e se si fa $\varphi_n = n$ si trova che (**):

Se esiste $\lim . (f_n - f_{n-1})$, è:

$$\lim . \frac{1}{n} f_n = \lim . (f_n - f_{n-1}).$$

Si riconosce subito che può esistere $\lim . \frac{1}{n} f_n$ senza che esista $\lim . (f_n - f_{n-1})$ perchè se è, p. es.,

---

(*) Facendo $c_n = 1$ si ottiene un teorema dimostrato recentemente dal prof. Cesàro che se ne servì per dimostrare molto semplicemente il teorema d'Abel sulla moltiplicazione delle serie. — *Bulletin des sciences mathématiques*. Maggio 1890.

(**) Cauchy. *Analyse algébrique*.

$$\lim . \frac{1}{n} f_n = \lim . (f_n - f_{n-1}) = \lambda$$

si scelga α_n in modo che non tenda ad alcun limite $\alpha_n - \alpha_{n-1}$ e sia invece $\lim . \frac{1}{n} \alpha_n = 0$, ciò che si può ottenere, p. es., prendendo capricciosamente tutti i numeri $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ .... in un assegnato intervallo finito; facendo $f_n + \alpha_n = \varphi_n$ si avrà così $\lim . \frac{1}{n} \varphi_n = \lambda$ mentre non tenderà ad alcun limite $\varphi_n - \varphi_{n-1}$.

(Continua). F. Giudice.

SULLA RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $x^2 - (a^2 + 1) y^2 = \pm N$ IN NUMERI INTERI

Qui appresso, parlando di soluzioni dell'equazione

$$x^2 - (a^2 + 1) y^2 = \pm N,$$

nella quale a ed N denotano due numeri interi e positivi qualunque, diversi da 0, si allude sempre a soluzioni in numeri interi e positivi. I valori della x e della y in tali soluzioni crescono o decrescono insieme, qualunque sia il segno del 2° membro dell'equazione. I valori minimi della x e della y che soddisfano all'equazione medesima ne costituiscono la così detta *soluzione minima*.

La ricerca della soluzione minima dell'una o dell'altra delle equazioni

$$x^2 - (a^2 + 1) y^2 = N \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [1]$$
$$x^2 - (a^2 + 1) y^2 = -N \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [2]$$

dipende da un teorema assai semplice, che è argomento di questa Nota. In essa si stabiliscono ancora le formole che danno tutte le soluzioni dell'equazioni suddette per mezzo di quelle soluzioni dell'equa-

L'insegnamento, che verrebbe press' a poco diviso in due parti eguali, si potrebbe impartire così:

Primo anno. — Generalità - Uguaglianze e disuguaglianze - Relazioni di posizione.

Secondo anno. — Teoria dell'equivalenza, delle proporzioni e della misura (*).

Quest'idea, che non è del tutto mia ma che in parte dividono persone d'autorità non dubbia, mi pare sia pratica ed utile.

Qualunque sia il suo valore, vorrei che ci fosse chi la meditasse e discutesse, specialmente fra quelli (e confesso che non so chi sieno) che sono incaricati di modificare, ahi! troppo spesso, i nostri programmi.

Torino, aprile 1891.

RODOLFO BETTAZZI.

SULLA TEORIA DELLE PROBABILITÀ

BREVE RISPOSTA AL SIGNOR *GIULIO VIVANTI*

Mi giunge aperta, pel tramite della *Rivista di matematica* (1891, p. 69), una lettera del signor Giulio Vivanti, relativa alle considerazioni da me svolte in questo *Periodico* (1891, p. 1 e 49) sul concetto di probabilità. Raccolgo subito, in fondo alla lettera, questa dichiarazione: *presentandosi un problema qualsiasi, è possibile porre tal cura nel formularne l'enunciato, che il modo più naturale di cercarne la soluzione apparisca in ogni caso senza equivoco.* Siccome questo, e non altro, ho sostenuto nelle predette *considerazioni,* potrei dispensarmi dal rispondere al signor Vivanti, ed accettare la sua lettera come un atto di adesione alle critiche da me rivolte al signor Giuseppe Bertrand, nelle quali critiche io mi sono appunto occupato

(*) Se si credesse essere opportuno l'insegnamento della geometria nel ginnasio, allora converrebbe, nel mio modo di vedere, portare nel ginnasio superiore tutta la geometria, che nel presente scritto è assegnata al primo anno del liceo, e la restante dividere fra il primo ed il secondo anno.

degli enunciati matematici delle questioni e non dei legami esistenti fra essi e le quistioni *date in fatto*. La determinazione di questi legami è affidata all'acume ed al senso pratico di colui che si propone di studiare una questione, in quanto che il passaggio dal *fatto* all'enunciato matematico delle circostanze che lo caratterizzano non si compie per via di logica, ma è opera del *sentimento*, di quel sentimento che Buffon chiama *un ragionamento implicito, meno chiaro, ma spesso più sottile, e sempre più sicuro dell'immediato prodotto della ragione.* Or come fa il signor Vivanti ad *esigere* che, non solo l'enunciato della questione, ma *la sua stessa essenza* lasci scorgere il modo più naturale di trattarla matematicamente? Una questione di fatto bisogna prenderla come si offre, e nulla si può per mutarne l'essenza. E se accade che osservatori, variamente dotati di quel sentimento della realtà delle cose, di cui parla Buffon, pervengano ad interpretazioni sostanzialmente diverse, ciò non toglie che *una* soltanto di esse possa corrispondere al fatto osservato. E però quando il signor Vivanti, dopo aver citato due questioni, che comportano due soluzioni differenti, domanda il perchè della diversità dei risultati in problemi *che ogni persona non prevenuta giudicherebbe identici*, io rispondo che basta la diversità dei risultati per *prevenire* la persona che così giudica, ed ammonirla che le condizioni nelle quali ci si pone per compiere un esperimento non sono senza influenza sul risultato di esso. Domanda il signor Vivanti: *Se si tirasse a capriccio un milione di corde, o si segnasse ad arbitrio un milione di coppie di punti sulla circonferenza, il numero delle corde non maggiori del lato del triangolo equilatero iscritto risulterebbe vicino a 500000 od a 666666?* È facile rispondere: a 500000 nel primo caso, a 666666 nel secondo, purchè ogni volta si sperimenti nelle precise condizioni imposte dagli enunciati. Suppongasi, per esempio, che, *dopo* aver tirato a capriccio milioni di rette in un piano, si tracci una circonferenza che ne incontra un milione. Si può predire che da circa 500000 rette la circonferenza staccherà corde inferiori al lato del triangolo equilatero iscritto. Immaginando poi che la circonferenza si sposti nel piano in modo continuo, si ha il mezzo di *compiere infinite prove*, eludendo così l'obiezione fondata dal signor Vivanti sulla legge di Poisson. Suppongasi invece che si divida in n parti uguali una circonferenza, e si numerino i punti di divisione. Si proceda poi ad un'estrazione di coppie di numeri da un'urna che racchiude i primi n numeri interi. Tracciando le corde corrispondenti alle varie estrazioni si compie l'esperimento nelle condizioni volute dal secondo enunciato, e si è per questo in diritto di aspettarsi che circa un terzo delle corde riescano superiori al lato del triangolo equilatero iscritto. Ogni sabato l'estrazione del lotto ci dà occasione di tracciare *quaranta* corde: le due cifre di ciascun numero estratto individuano una corda, che riesce superiore al lato del triangolo equilatero iscritto quando la differenza assoluta fra le dette cifre è 4, 5 o 6. Il calcolo predice che *dodici* numeri sui quaranta estratti debbono trovarsi nelle condizioni accennate, e l'estrazione del ***23 maggio*** ultimo ne ha forniti *tredici*. Un esperimento analogo si può fare esaminando, negli *Annuarii* delle Università, i numeri delle abitazioni del personale: le corde individuate dalle ultime due cifre sono, per l'Università di Palermo, *centosessanta*, e *quarantanove* di esse, invece delle *quarantotto* indicate dalla teoria, sono superiori al lato del triangolo equilatero iscritto. Non vale il dire che qui non si è più nel caso di infinite possibilità: facendo, infatti, crescere n, è possibile avvicinarsi quanto si vuole alla probabilità $\frac{1}{3}$, e, d'altra parte, non esiste un valore di n, a partire dal quale cessi l'accordo fra il risultato dell'esperienza e quello del calcolo. È vero che il numero delle prove necessarie dovrà anch'esso andare crescendo; ma in quel campo pratico, che serve di sostegno alla critica del signor Vivanti, chi è che conosce l'*infinito?* Sopra una circonferenza lunga un metro nessuno saprebbe contare più di poche migliaia di punti, e solo ricorrendo alla teoria delle interferenze si può giungere ai *sette milioni*. Così, adoperando i più delicati mezzi di misura, la probabilità di trovare una corda superiore al lato del triangolo equilatero iscritto è inferiore ad $\frac{1}{3}$ appena di $\frac{1}{21000000}$, quantità sperimentalmente trascurabile. Questa osservazione non differisce, in sostanza, da quella che lo stesso signor Vivanti fa a proposito del *problema dell'ago*, tranne che io la ritengo applicabile sempre, e non a quel solo problema. Non nego, tuttavia, la possibilità di problemi pratici, che difficilmente lascino scorgere il modo di fissarne le circostanze caratteristiche in un enunciato matematicamente fedele e preciso; ma da ciò non deriva la necessità di abbandonare lo studio *generale* di simili questioni, sì bene quella di sviluppare ed acuire negli studiosi le peculiari qualità intellettive che si richiedono per tali studî. Al quale scopo io ritengo sommamente utile la teoria delle probabilità geometriche, e deploro sinceramente che un ingegno come quello del Vivanti *non sappia* accordarle alcun valore. Non io vado soggetto a diplopia, come sembra credere il signor Vivanti, ma siamo tutti più o meno affetti da una specie di *bertrandismo* o daltonismo intellettuale, a curare il quale nulla è tanto efficace quanto lo studio della teoria delle probabilità geometriche, perchè, come ben dice A. Quètelet, *les variations de la probabilité sont pour l'entendement ce que les nuances des couleurs sont pour un oeil exercé, ou ce que l'échelle diatonique serait pour l'oreille qui pourrait en apprécier tous les degrés.*

E. Cesàro.

SOPRA UN PROBLEMA DELLA TEORIA DEI NUMERI

1. Diremo che un gruppo di numeri interi è primo o non primo con un numero intero k, secondo che il massimo comun divisore dei numeri del gruppo è primo o no con k.

Premesso ciò, consideriamo i k numeri successivi

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ k;$$

se immaginiamo scritta questa serie n volte, formeremo dei gruppi contenenti ciascuno n numeri, prendendo in tutti i modi possibili un numero in ogni serie. I gruppi che così si otterranno saranno diversi gli uni dagli altri o per i numeri che li costituiscono o per l'ordine di questi; il numero di tali gruppi è evidentemente uguale a k^n.

Si tratta di determinare quanti sono i gruppi primi con k. Il numero cercato si otterrà quindi levando da k^n il numero dei gruppi non primi con k.

2. È chiaro intanto che se k è un numero primo, esisterà un sol gruppo non primo con k, quello cioè formato di numeri tutti uguali a k; il numero dei gruppi primi con k è quindi in tal caso

$$k^n - 1.$$

3. Supponiamo k non primo e siano $a_1, a_2, \ldots, a_m$ i suoi divisori primi; indichiamo con d_{rs} un divisore di k formato dal prodotto di s di questi divisori primi, sicchè per ogni valore di $s = 1, 2, 3, \ldots, m$, il numero di tali divisori è uguale ad $\binom{m}{s}$.

Posto

$$k = k_{rs} d_{rs}$$

e formando colla serie

$$d_{rs}, 2d_{rs}, 3d_{rs}, \ldots\ldots, k_{rs}d_{rs} \ldots\ldots \quad [1]$$

nel modo prima dichiarato, i gruppi contenenti n di tali numeri, otterremo k_{rs}^n gruppi non primi con k.

Ad ogni valore di s corrisponde un sistema di gruppi non primi con k; sicchè otterremo in tutto m sistemi che diremo *primo*, *secondo*, ecc.

Consideriamo uno qualunque di questi sistemi, per esempio l'*essesimo*. Per formare tutti i gruppi appartenenti a questo sistema, dovremo operare nel modo detto, separatamente sopra ciascuna delle $\binom{m}{s}$ serie che si deducono dalla [1] variando r da 1 ad $\binom{m}{s}$; quindi l'*essesimo* sistema conterrà

$$k_{1s}^n + k_{2s}^n + k_{3s}^n + \ldots\ldots = S_s \ldots\ldots \quad [2]$$

gruppi. Ogni serie fornirà gruppi tutti diversi o per i numeri che li costituiscono o per l'ordine di questi; ma uno stesso gruppo potrà esser generato da due o più serie ed appartenere anche a due o più sistemi.

Supponiamo infatti che il massimo comun divisore dei numeri d'un gruppo appartenente all'essesimo sistema abbia μ fattori semplici diversi comuni col numero k, essendo $\mu > s$. Con questi fattori si potranno formare $\binom{\mu}{s}$ delle serie originanti l'essesimo sistema, e poichè tutti i numeri del gruppo considerato sono multipli dei $\binom{\mu}{s}$

numeri che si hanno moltiplicando s ad s in tutti i modi possibili i μ fattori semplici, segue che fra i gruppi originati da ciascuna di queste serie, si troverà anche il nostro gruppo, il quale pertanto nell'essesimo sistema si troverà ripetuto $\binom{\mu}{s}$ volte. Dunque nel primo sistema il gruppo si troverà ripetuto μ volte, nel secondo $\binom{\mu}{2}$ volte, ecc. nel μ^{mo} una sol volta.

Da quanto precede risulta che al nostro gruppo corrispondono μ unità di S_1, $\binom{\mu}{2}$ unità di S_2, ecc., un'unità di S_μ. Osservando poi che si ha sempre

$$\mu - \binom{\mu}{2} + \binom{\mu}{3} - \ldots\ldots \pm 1 = 1,$$

si scorge che al gruppo considerato corrisponde una sola unità dell'espressione

$$S_1 - S_2 + S_3 - \ldots\ldots\ldots,$$

la quale pertanto rappresenta il numero dei gruppi diversi non primi con k.

Quindi, indicando col simbolo $\varphi\binom{k}{n}$ il numero dei gruppi primi con k, si avrà in base alle [2]

$$\begin{aligned}\varphi\binom{k}{n} = k^n &- [k_{11}^n + k_{21}^n + k_{31}^n + \ldots\ldots] \\ &+ [k_{12}^n + k_{22}^n + k_{32}^n + \ldots\ldots] \\ &- [k_{13}^n + k_{23}^n + k_{33}^n + \ldots\ldots] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

da cui, osservando che $k_{rs} = \frac{k}{d_{rs}}$ e riducendo, si ricava infine

$$\varphi\binom{k}{n} = k^n\left(1 - \frac{1}{a_1^n}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2^n}\right)\ldots\ldots\left(1 - \frac{1}{a_m^n}\right).$$

Quest'uguaglianza nel caso di $n = 1$ esprime il noto teorema d'Eulero. Infatti per $n = 1$ il simbolo $\varphi\binom{k}{n}$ equivale al simbolo $\varphi(k)$ introdotto nella scienza dei numeri da Gauss, per indicare il numero dei numeri inferiori a k e primi con esso. (*)

4. Se è $k = a \,.\, b \,.\, c \ldots\ldots$, essendo a, b, c, ecc. numeri primi

(*) Dirichlet, *Zahlentheorie* § 11.

fra loro due a due, una prima proprietà della funzione $\varphi\binom{k}{n}$ è espressa dall'uguaglianza

$$\varphi\binom{k}{n} = \varphi\binom{a}{n}\,\varphi\binom{b}{n}\,\varphi\binom{c}{n}\,\ldots\ldots$$

5. In secondo luogo, per brevità, diremo *divisore d'un gruppo* un divisore comune a tutti i numeri del gruppo.

Indichiamo con δ un divisore qualunque di k; nella serie 1, 2, 3 .... k si avranno i numeri δ, 2δ .... $\Delta\delta$, $\left(\Delta = \frac{k}{\delta}\right)$ e solo questi divisibili per δ. Il numero dei gruppi aventi con k il massimo comun divisore δ, coincide col numero dei gruppi primi con Δ, ottenuti colla serie 1, 2, ..., Δ. Quindi $\varphi\binom{\Delta}{n}$ indica il numero dei gruppi che hanno con k il massimo comun divisore δ.

Se δ', δ'', δ''', ... sono tutti i divisori di k, posto

$$k = \Delta'\delta' = \Delta''\delta'' = \Delta'''\delta''' = \ldots\ldots$$

i simboli $\varphi\binom{\Delta'}{n}$, $\varphi\binom{\Delta''}{n}$, ecc., rappresenteranno rispettivamente il numero dei gruppi aventi con k per massimo comun divisore δ', δ'', ecc. In riguardo a ciò i k^n gruppi che si deducono dalla serie 1, 2, ..., k, possono raccogliersi in *classi*, ed è chiaro che ciascun gruppo prenderà posto in una classe ed in una soltanto. Quindi, osservando che i numeri Δ', Δ'', ecc., sono i divisori di k, si ricava il seguente teorema: *Se Δ assume successivamente tutti i valori dei divisori di* k, *è*

$$\Sigma\,\varphi\binom{\Delta}{n} = k^n.$$

Siano, per esempio, $k = 20$ ed $n = 2$; i divisori di 20 sono 1, 2, 4, 5, 10, 20. Ora si ha

$$\varphi\binom{1}{2} = 1,\quad \varphi\binom{2}{2} = 3,\quad \varphi\binom{4}{2} = 12,\quad \varphi\binom{5}{2} = 24,$$
$$\varphi\binom{10}{2} = 72,\quad \varphi\binom{20}{2} = 288$$

e la somma di tutti questi numeri è effettivamente $= 20^2$.

Lendinara, gennaio 1891.

Prof. Luigi Carlini.

SULLA DIVISIBILITÀ DEI POLINOMI PER IL BINOMIO $x^r - a^r$ e per il polinomio $x^m + a x^{m-1} + a^2 x^{m-2} + \ldots\ldots + a^{m-1} x + a^m$

Il metodo da me seguito altra volta per trovare le forme dei quozienti e dei resti che si ottengono dividendo un polinomio per $x - a$, o per $x^r - a^r$ (*), fu fondato sull'estensione ai polinomi interi di uno dei principali teoremi relativi alla divisibilità dei numeri (*V.* appresso n. 1, teor. II). Ma poichè agli stessi polinomi si può estendere anche un altro teorema fondamentale della divisibilità (n. 1, teor. I), non sarà discaro ai lettori di questo periodico il vedere (n. 2) la notevole semplificazione che dall'unione dei due teoremi viene arrecata alla ricerca dei resti e dei quozienti nella divisione di un polinomio per $x^r - a^r$ ($r \geqq 1$), e le deduzioni che se ne possono trarre (n. 3 e 4) circa la divisibilità dei polinomi per un divisore della forma $x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + \ldots\ldots + a^{m-1}x + a^m$.

Mi riserbo di pubblicare in un'altra Nota i resultati a cui son giunto considerando il caso generale della divisione di due polinomi interi.

1.

Intendendo che tutti i polinomi i quali vengono in considerazione siano interi e ordinati per le potenze decrescenti della x, si stabiliscono facilmente i due teoremi:

I. *Il resto della divisione d'una somma di polinomi per un altro polinomio* D, *è uguale alla somma dei resti ottenuti dividendone per* D *i singoli termini.*

II. *Il resto della divisione per* D *d'un prodotto di polinomi, è uguale al resto della divisione per* D *del prodotto dei resti trovati col dividerne per* D *i singoli fattori.*

Per la dimostrazione del primo di questi teoremi basta osservare che se si ha

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_m$$

(*) *V.* le due Note inserite in questo periodico (Anno II, fasc. VI e anno III, fasc. V).

e se

$$P_s = DQ_s + R_s, \quad (s = 1, 2, \ldots . m),$$

troveremo sostituendo:

$$P = D(Q_1 + Q_2 + \ldots . + Q_m) + (R_1 + R_2 + \ldots . + R_m);$$

e poichè per essere singolarmente le R_s di grado inferiore a D, tale è anche la loro somma, avremo, denotando con Q ed R il quoziente ed il resto della divisione di P per D:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots . + Q_m$$
$$R = R_1 + R_2 + \ldots . + R_m.$$

La dimostrazione del secondo teorema, in cui si suppone $P = P_1 P_2 \ldots . P_m$, è altrettanto facile e può qui essere omessa per brevità. (*)

2.

Applichiamo simultaneamente questi due teoremi ai casi particolari di $D = x - a$, $D = x^r - a^r$.

1.° $D = x - a$. Supposto

$$P^{(n)} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots .. + a_{n-1} x + a_n,$$

uno qualunque dei suoi termini $a_{n-s} x^s$ altro non è che il prodotto della quantità a_{n-s}, indipendente dalla x, per la potenza x^s, e questa, alla sua volta, è il prodotto di s fattori uguali ad x. Ora, poichè x diviso per $x - a$ dà di resto a, avremo, per il teorema II, che x^s diviso per $x - a$ darà di resto a^s; che $a_{n-s} x^s$ darà il resto $a_{n-s} a^s$, e infine, pel teorema I, che $P^{(n)}$ diviso per $x - a$ darà il notissimo resto:

$$R = a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \ldots . + a_{n-1} a + a_n.$$

2.° $D = x^r - a^r$. Il fattore x^s di un termine $a_{n-s} x^s$ in cui sia $s < r$, diviso per $x^r - a^r$ dà di resto il fattore stesso. Se $s = r$ la divisione di x^r per $x^r - a^r$ dà per resto a^r, e se finalmente $s > r$ allora posto

$$s = tr + s' \quad (s' < r)$$

(*) Cfr. la mia Nota: *Su alcuni teoremi relativi alla divisione algebrica* » (Anno II, fasc. VI).

resulterà:

$$x^s = x^{tr+s'} = (x^r)^t \cdot x^{s'}$$

e, per il teorema II, il resto della divisione di x^s per $x^r - a^r$ sarà:

$$(a^r)^t \cdot x^{s'} = a^{tr} x^{s'}.$$

Ciò rende evidente che il resto della divisione del polinomio $P^{(n)} = a_0 x^n + \dots + a_n$ per $x^r - a^r$ dev'essere:

$$\begin{aligned} R = & (a_{n-kr+1} a^{(k-1)r} + a_{n-(k-1)r+1} a^{(k-2)r} + \dots\dots + a_{n\ 2r+1} a^r + a_{n-r+1}) x^{r-1} \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + (a_{n-kr-1} a^{kr} + a_{n-(k-1)r-1} a^{(k-1)r} + \dots + a_{n-r-1} a^r + a_{n-1}) x \\ & + (a_{n-kr} a^{kr} + a_{n-(k-1)r} a^{(k-1)r} + \dots + a_{n-r} a^r + a_n), \end{aligned}$$

dove tra $n, k, r,$ ha luogo la relazione

$$n = kr + h \quad (h < r).$$

Essendo poi

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m$$

si possono avere con facilità in ambedue i casi anche le forme dei quozienti. (*)

(Continua). E. SADUN.

SUI LIMITI

(Continuazione e fine: Vedi pagina 81).

Teorema V. *Se* a_n b_n $\frac{1}{c_n}$ *non crescono indefinitamente ed* a_n *prende soli valori aritmetici, ed è*

$$\lim . a_n = a \quad \lim . b_n = b \quad \lim . c_n = c \quad \lim . (c_1 + \dots\dots + c_n) = \infty$$

si ha:

$$\lim_{n=\infty} . \sqrt[c_1 + \dots + c_n]{a_1^{b_n} . a_2^{b_{n-1}} . \dots\dots . a_n^{b_1}} = \sqrt[c]{a^b}.$$

(*) V. la mia Nota: *Condizioni di divisibilità d'un polinomio per un binomio della forma* $x^r - a^r$ (Anno III, fasc. V).

Dimostrazione. È:

$$\lim_{n=\infty} . \sqrt[c_1 + \ldots\ldots + c_n]{a_1^{b_n} . \ldots\ldots . a_n^{b_1}}$$

$$= \lim . \sqrt[c_1 + \ldots\ldots\ldots + c_n]{(a_1 . \ldots\ldots . a_k)^b . (b_k . \ldots\ldots . b_1)^a}$$

$$\times \left[\sqrt[c_{2k+1} + \ldots\ldots + c_n]{a_{k+1}^{b_{n-k}} . \ldots\ldots . a_{n-k}^{b_{k+1}}}\right]^{\frac{c_{2k+1} + \ldots\ldots + c_n}{c_1 + \ldots\ldots + c_n}}$$

$$= \lim . (a_1 . \ldots\ldots . a_k)^{\frac{b}{c_1 + \ldots\ldots + c_n}} \times (b_k . \ldots\ldots . b_1)^{\frac{a}{c_1 + \ldots . + c_n}}$$

$$\times \sqrt[c_{2k+1} + \ldots\ldots c_n]{a_{k+1}^{b_{n-k}} . \ldots\ldots . a_{n-k}^{b_{k+1}}}$$

per cui, essendo

$$\lim . b : (c_1 + \ldots\ldots + c_n) = \lim . a : (c_1 + \ldots\ldots + c_n) = 0$$

supposto k abbastanza grande perchè $c_{2k+1}\ c_{2k+2} \ldots\ldots$ abbiano tutte il segno del limite c, si ha pel corollario II

$$\lim . \sqrt[c_1 + \ldots\ldots + c_n]{a_1^{b_n} . \ldots\ldots\ldots . a_n^{b_1}}$$

$$= M\left(\sqrt[c_{2k+1}]{a_{k+1}^{b_{n-k}}}, \ldots\ldots\ldots, \sqrt[c_n]{a_{n-k}^{b_{k+1}}}\right)$$

dove k può essere fissato arbitrariamente grande cosicchè, facendolo crescere indefinitamente, si riconosce appunto essere (*)

$$\lim_{n=\infty} . \sqrt[c_1 + \ldots\ldots + c_n]{a_1^{b_n} . \ldots\ldots . a_n^{b_1}} = \sqrt[c]{a^b}$$

Corollario IV. Facendo

$$c_n = \psi_n - \psi_{n-1} \quad \psi_0 = 0 \quad a_n = f_n : f_{n+1} \quad f_1 = 1 \quad b_n = 1$$

si trova che:

Se esiste

$$\lim . \sqrt[\psi_n - \psi_{n-1}]{f_n : f_{n-1}}$$

(*) Facendo $c_n = b_n = 1$ si ottiene un teorema di Cauchy.

ed è $\lim . \psi_n = \infty$, esiste ancora

$$\lim \sqrt[\psi_n]{f_n}$$

ed è precisamente

$$\lim . \sqrt[\psi_n]{f_n} = \lim . \sqrt[\psi_n - \psi_{n-1}]{f_n : f_{n-1}}$$

e se si fa $\psi_n = n \quad f_n = u_n$ si trova che:

Se esiste $\lim . u_n : u_{n-1}$, si ha:

$$\lim . \sqrt[n]{u_n} = \lim . \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

Si riconosce facilmente che può esistere $\lim . \sqrt[n]{u_n}$ senza che esista (*) $\lim . u_n : u_{n-1}$ perchè se, p. es., fosse

$$\lim . \sqrt[n]{u_n} = \lim . u_n : u_{n-1} = \lambda$$

si potrebbe scegliere α_n in modo che $\alpha_n : \alpha_{n-1}$ non tenda ad alcun limite e sia $\lim . \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$; facendo $u_n . \alpha_n = v_n$ si avrebbe così

$$\lim . \sqrt[n]{v_n} = \lambda$$

mentre $v_n : v_{n-1}$ non tenderebbe ad alcun limite: si potrebbe, p. es., fare α_n eguale al numero dei divisori di n.

Credo tuttavia opportuno far osservare che l'importanza dell'espressione $\sqrt[n]{u_n}$ relativamente all'altra $u_n : u_{n-1}$, come carattere di convergenza e divergenza delle serie numeriche a termini positivi, non è che apparente perchè se si ha

$$\lim . \sqrt[n]{u_n} < \lambda < 1$$

essendo $\lim . \sqrt[n]{n^2} = 1$ si finirà per avere sempre

$$u_n < \frac{1}{n^2}$$

(*) V. Rend. Circ. Mat. di Palermo. — Adananza 13 luglio 1890. = CAUCHY: *Analyse algébrique.*

per cui si potrà riconoscere immediatamente la convergenza della

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots$$

confrontandola colla serie convergente

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots\dots$$

Può quindi restar dubbio sulla convergenza solamente se $\sqrt[n]{u_n}$ finisce per non esser mai maggiore di 1, ma ha questo numero per limite almeno quando n cresca indefinitamente percorrendo opportune successioni.

APPLICAZIONI.

1. Se nel teorema I si fa

$$A = 1 + x \qquad B = 1$$

si riconosce essere

$$\lim_{x=0} . \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k.$$

2. Se nel corollario III si fa

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots\dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \varphi_n = \sqrt{n}$$

si trova (*):

$$\lim_{n=\infty} . \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \dots\dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \lim . \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \lim . \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = 2.$$

3. Facendo nel corollario III

$$f_n = a_1^k + a_2^k + \dots\dots\dots + a_n^k \qquad \varphi_n = a_n^{k+1}$$

si trova, ricorrendo anche al teorema I, che:

(*) D. Besso. *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario.* - Gennaio-Febbraio 1890.

Se è

$$\lim . \, a_n = \infty \qquad \lim . \, a_n : a_{n-1} = 1 \qquad \lim . \, (a_n - a_{n-1}) = \alpha$$

si ha:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{a_1^k + a_2^k + \ldots\ldots + a_n^k}{a_n^{k+1}} = \frac{1}{(k+1)\,\alpha}$$

e se si fa $a_n = n$ epperò $\alpha = 1$, si trova una relazione, di cui si è fatto grande uso nelle integrazioni definite che precedettero la scoperta del calcolo differenziale (*).

4. Facendo nel corollario IV

$$f_n = n^k \qquad \psi_n = n$$

si trova essere

$$\lim . \sqrt[n]{n^k} = 1.$$

5. Facendo nel corollario IV

$$f_n = \frac{1}{n^n} \cdot (a+b)\,(a+2\,b) \ldots\ldots (a+n\,b) \qquad \psi_n = n$$

e ponendo, come s'usa,

$$\lim . \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

si trova

$$\lim . \frac{1}{n} . \sqrt[n]{(a+b)\,(a+2\,b) \ldots . (a+n\,b)} = \frac{b}{e}$$

da cui si deduce

$$\lim . \frac{1}{n} . \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}.$$

6. Ponendo nel corollario IV

$$f_n = n!\,(a-1) . (\sqrt{a} - 1) . (\sqrt[3]{a} - 1) \ldots . (\sqrt[n]{a} - 1)$$
$$\psi_n = n \qquad a > 1$$

(*) *V.* Nota in fine.

e ricordando essere (*)

$$\lim . n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=l\, a$$

si trova, mediante facili trasformazioni,

$$\lim . \frac{1}{n}\sqrt[n]{\left(1+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)\ldots\ldots\left(1+a^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{2}{n}}+\ldots+a^{\frac{n-1}{n}}\right)}$$
$$=\frac{a-1}{l\,a}\cdot\frac{1}{e}.$$

Da questa, facendo tendere a ad 1 ed osservando essere

$$\lim_{a=1} . \frac{a-1}{l\,a}=1,$$

come si riconosce immediatamente dallo sviluppo in serie di $l\,(1+x)$, si trova di nuovo

$$\lim . \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}=\frac{1}{e}.$$

Nota. Le origini del teorema espresso dalla

$$\lim_{m=\infty} . \frac{1^n+2^n+\ldots.+m^n}{m^{n+1}}=\frac{1}{n+1}$$

si trovano in Archimede, nel libro: *De Lineis spiralibus*. Cavalieri, nelle sue *Exercitationes geometricae*, lo enuncia per n intero positivo. Wallis, nella sua *Arithmetica infinitorum*, considera particolarmente l'espressione

$$\lim_{m=\infty} . \frac{0^n+1^n+2^n+\ldots.+m^n}{m^n+m^n+m^n+\ldots.+m^n}=\lim . \frac{1^n+2^n+\ldots.+m^n}{(m+1)\,.\,m^n}$$

che per $n>0$ non differisce, sostanzialmente, dalla precedente: dimostra che tal limite è $\frac{1}{n+1}$ per $n=1, 2, \ldots, 6$ (V. Johannis Wallis; *Opera Mathematica*, Oxoniae, MDCXCV); procedendo per induzione afferma successivamente, senza darne dimostrazione, che ciò sussiste per qualsiasi valore positivo intero, frazionario od anche irrazionale dell'esponente; osserva che per $n=-1$ il denominatore, $n+1$, divien zero e quel limite infinito; per $n<-1$ osserva che il denominatore discende sotto zero ed egli, intuendo sempre giustamente, afferma che allora il detto limite è più che infinito. Pascal ha dimostrata, rigorosamente, quella relazione per n intero positivo qualunque.

(*) V. Lagrange. *Théorie des fonctions analytiques.* — Pag. 48.

Il Dr. R. Marcolongo, nel Giornale di Battaglini 1887, la dimostra per $n = \frac{1}{m}$ con m intero positivo qualunque. Osserva poi essere

$$\lim . \frac{1^n + 2^n + \ldots . + m^n}{m^{n+1}} = \int_0^1 x^n . dx = \frac{1}{n+1}$$

e dice d'aver così dimostrata quella relazione per n qualunque, escluso $n = -1$, e forse intendeva escludere tutti gli esponenti negativi a principiar da -1 perchè lo stesso integrale ciò rende manifesto, essendo

$$\int_0^1 x^n . dx = \frac{1}{n+1} - \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}$$

$$\lim_{x=0} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \infty \text{ per } n < -1.$$

Col presente lavoro resta nuovamente dimostrata elementarmente la relazione, di cui ci occupiamo, per tutti i valori di n maggiori di -1, cioè per tutti i casi in cui sussiste perchè il corollario III appunto è applicabile con questa condizione, essendo

$$\lim . n^{k+1} = \begin{matrix} \infty & \text{per} & k > -1 \\ 1 & » & k = -1 \\ 0 & » & k < -1 \end{matrix}$$

Essendo convergente la serie

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots . .$$

per $k > 1$, si riconosce subito che $\frac{1}{m^{n+1}} . (1^n + 2^n + \ldots . + m^n)$, per $n = -k$ $k > 1$, diviene infinito dell'ordine $k - 1$ relativamente ad m.

Voghera, settembre 1890.

F. GIUDICE.

ALCUNI TEOREMI SULLE CONICHE

(Continuazione e fine. *V. pag. 91**).*

3. Dopo le considerazioni svolte fin qui siamo ancora autorizzati ad enunciare il teorema seguente: *Condotta una trasversale qualunque* MN *ad una conica data, e tirate quante si vogliono secanti* b, b_1, b_2, ..., *parallele alla tangente in* N, *le quali in-*

contreranno M N *nei punti* S, S_1, S_2, ..., *e congiunto* S_k *coi punti d'incontro della* b_h *con la curva e tirata la congiungente delle due nuove intersezioni della conica con le due rette che così si ottengono, la qual congiungente incontrerà la* b_k *in un punto* O_k, *si ha che tutti i punti* O_k *che così risultano sono in linea retta, e precisamente sulla tangente in* M *alla curva.*

Si può di qui dedurre un modo per costruire, senza ingombrare la figura, la tangente in qualsivoglia punto di una conica, nota la tangente in uno dei punti della medesima. Infatti sia data la retta a tangente in N e vogliasi la tangente in un punto M qualunque. Tiro due secanti qualunque b, c parallele ad a e congiungo A, B, punti d'intersezione di c con la conica, col punto S in cui MN taglia b e si otterranno così due nuovi punti d'intersezione C, D. Conduco poi CD che incontrerà b in un punto O ed OM sarà la cercata tangente. Come si vede, le sole rette che è necessario segnare sono le b, c una volta per sempre.

4. È un'immediata conseguenza del teorema fondamentale quest'altro: *Se due poligoni completi inscritti in una conica sono prospettivi, i punti diagonali omologhi sono in linea retta col centro di prospettiva.*

Questo teorema si potrebbe utilmente applicare alla costruzione di poligoni soggetti a certe condizioni. Si tratti per esempio di dover costruire un pentagono completo, i cui 15 punti diagonali si trovino sulle 15 rette che uniscono un punto dato coi punti diagonali di un pentagono completo dato. Basta costruire la conica determinata dai vertici del pentagono dato; le rette che uniscono questi vertici col punto dato incontrano la conica nei vertici del pentagono domandato. Se si lascia indeterminato il punto col quale devono due a due trovarsi allineati i punti diagonali dei due pentagoni, allora si può assoggettare il pentagono che si vuole costruire ad un'altra condizione, p. es. ad avere due vertici sopra una retta data, punti i quali vengono determinati dalla conica circoscritta al pentagono dato. Se questi due punti sono reali e distinti, allora esistono 20 soluzioni del problema, a seconda della coppia di vertici del pentagono dato a cui si fanno corrispondere i due punti considerati. Se i due punti sono coincidenti, il pentagono cercato si riduce ad un punto, se sono immaginarii non esiste alcuna soluzione reale. Anche nel pentagono dato si potrebbe lasciare qualche indeterminazione, ed allora si potrebbe assoggettare ad altre condizioni il poligono cercato. Come si vede, si potrebbero moltiplicare gli esempi, e non solo per i pentagoni ma anche per qualunque altra specie di poligoni.

Si potrebbero poi avere le costruzioni duali, mediante l'applicazione del teorema duale: *Se due multilateri completi circoscritti ad una conica sono omologici, le rette diagonali omologhe concorrono sull'asse di omologia.*

Un caso particolare del teorema enunciato al principio di questo numero, è: Dati due quadrangoli completi $A\ B\ C\ D$, $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$ inscritti in una conica, e tali che le rette $A\ A_1$, $B\ B_1$, $C\ C_1$, $D\ D_1$ concorrano in un punto S, i punti diagonali L, L_1; M, M_1; N, N_1 sono due a due allineati con S. Se poi la conica si scompone per esempio nelle rette $B\ A$, $C\ D$, il teorema stesso si enuncia così: Dato un quadrangolo completo, se si proiettano sopra un lato da un punto S qualunque i due vertici situati sul lato opposto ed i vertici di questo sul primo, si ottiene un nuovo quadrangolo; i due quadrangoli hanno i quattro punti diagonali non comuni posti due a due in due rette passanti per S. Questo teorema si generalizza evidentemente in quest'altro: *Dato un quadrangolo completo, unendone tutti i vertici con un punto dato* S, *e tagliando le congiungenti coi sei lati, si ottengono 12 punti, i quali determinano tre quadrangoli completi tali, che ognuno ha un punto diagonale in comune col dato; quindi abbiamo 9 punti diagonali liberi, i quali sono posti tre a tre sopra tre rette passanti per* S.

Si potrebbero dalle considerazioni fatte dedurre le già note proprietà dei quadrangoli inscritti e di quelli circoscritti ad una conica, ecc. ecc., ma non è opportuno di consumare lo spazio concesso in questo Periodico, per dedurre delle proprietà già conosciute.

Palmi, 18 febbraio 1891.

Prof. PALATINI FRANCESCO.

TEMI DI MATEMATICA

PER LA LICENZA D'ISTITUTO TECNICO

NELLA SEZIONE *FISICO-MATEMATICA*

ESTATE 1891, I). — *Si ha un cilindro circolare retto chiuso dalle due parti da due mezze sfere e si sa che in questo solido la superficie esterna è* s, *e che la sezione ottenuta tagliandolo con un piano condotto per l'asse ha per perimetro* 2 p. *Trovare il raggio* r *e l'altezza* h *della parte cilindrica del solido, e discutere i risultati.*

Le equazioni del problema sono evidentemente

$$4\pi r^2 + 2\pi r h = s, \quad 2\pi r + 2h = 2p.$$

Ricavando h dalla seconda e sostituendo il valore ottenuto nella prima, fatte le debite trasformazioni, si giunge all'equazione di 2° grado in r:

$$2\pi(\pi - 2) \, . \, r^2 - 2\pi p \, . \, r + s = 0,$$

in cui è da osservare che il coefficiente di r^2 è positivo, avendosi $\pi > 2$. Di qui segue

$$r = \frac{\pi p \pm \sqrt{\pi^2 p^2 - 2\pi(\pi - 2) \, . \, s}}{2\pi(\pi - 2)}.$$

Ora perchè r sia reale, conviene che sia $\pi p^2 \geqq 2s(\pi - 2)$, od anche $p^2 \geqq s \, . \, 0{,}72\ldots$, dopo di che si hanno per r due valori positivi, conformi perciò alla natura del quesito, dei quali si vedrà appresso che uno solo è accettabile.

Sostituendo nel valore di h, ricavato dalla seconda delle equazioni fondamentali del problema, il precedente valore di r, si ha

$$h = p - \pi r = \frac{-(4 - \pi) p \mp \sqrt{\pi^2 p^2 - 2\pi(\pi - 2) \, . \, s}}{2(\pi - 2)}$$

dei quali due valori quello che si ha prendendo il segno — del radicale è da rifiutare non potendosi supporre negativa l'altezza h, onde resta a scegliere il valore certamente reale di

$$h = \frac{\sqrt{\pi^2 p^2 - 2\pi(\pi - 2) \, . \, s} - (4 - \pi) \, . \, p}{2(\pi - 2)},$$

dietro l'ipotesi che sia $\pi^2 p^2 - 2\pi(\pi - 2) \, . \, s > (4 - \pi)^2 \, . \, p^2$ o $p^2 > \frac{\pi}{4} \, . \, s$, equivalente a $p^2 > s \, . \, 0{,}78\ldots$, non essendo il caso di prendere $h = 0$, perchè allora uno degli elementi dati dall'enunciato sarebbe superfluo.

Dopo ciò il raggio r e l'altezza h della parte cilindrica del solido sono dati da

$$r = \frac{\pi p - \sqrt{\pi^2 p^2 - 2\pi(\pi - 2) \cdot s}}{2\pi(\pi - 2)},$$

$$h = \frac{\sqrt{\pi^2 p^2 - 2\pi(\pi - 2) \cdot s} - (4 - \pi) \cdot p}{2(\pi - 2)},$$

con l'unica condizione $p^2 > \frac{\pi}{4} \cdot s$.

È opportuno osservare che dato p non esiste valor massimo per s e data s non si ha minimo per p.

Estate 1891, II). — *Dal vertice* A *di un triangolo* ABC, *i cui lati sono dati, condurre al lato opposto* BC *una retta* AD, *in modo che il quadrato di* AD *sia equivalente al rettangolo dei segmenti* BD, DC *del lato* BC. *Calcolare uno dei segmenti, e discutere i dati e il risultato.*

Soluzione algebrica. — Conducasi da A l'altezza AH relativa al lato BC. Supposto che D sia un punto interno a BC dai due triangoli ABD, ADC, si ha:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \mp 2BD \cdot DH, \quad \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 \pm 2DC \cdot DH.$$

Moltiplicando i due membri della prima uguaglianza per DC, quelli della seconda per BD, poi addizionando segue:

$$\overline{AB}^2 \cdot DC + \overline{AC}^2 \cdot BD = \overline{AD}^2(BD + DC) + BD \cdot DC(BD + DC),$$

$$\overline{AB}^2 \cdot DC + \overline{AC}^2 \cdot BD = BC(\overline{AD}^2 + BD \cdot DC) \quad \ldots\ldots [1]$$

Che se poi fosse D esterno a BC, si avrebbe invece:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \mp 2BD \cdot DH, \quad \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 \mp 2DC \cdot DH.$$

Moltiplicando, come dianzi, i due membri della prima uguaglianza per DC e quelli della seconda per BD, poi sottraendo, ricavasi infine:

$$\overline{AB}^2 \cdot DC - \overline{AC}^2 \cdot BD = \pm BC(AD^2 - BD \cdot DC) \; (^*) \ldots . [2]$$

Posto ciò, sia $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ e si assuma come incognito il segmento $BD = x$. Dovendo essere, per dato, $\overline{AD}^2 = BD \cdot DC$, dalla [1] si deduce immediatamente l'equazione di 2° grado

$c^2(a - x) + b^2 x = 2ax(a - x)$ ovvero $2ax^2 + (b^2 - c^2 - 2a^2)x + ac^2 = 0$.

Risolvendo rispetto ad x, si trova, dopo facili trasformazioni

$$x = \frac{2a^2 + c^2 - b^2 \pm \sqrt{[(\sqrt{2} \cdot a + c)^2 - b^2]\,[(\sqrt{2} \cdot a - c)^2 - b^2]}}{4a}.$$

Avendosi necessariamente $\sqrt{2} \cdot a + c > b$, poichè $a + c > b$, perchè x sia reale conviene che sia $\sqrt{2} \cdot a - c$ numericamente maggiore di b od uguale a b. Quando questa condizione è verificata i valori della x risultano poi positivi:

(*) Le relazioni [1] e [2] esprimono precisamente il teorema di Stewart. — V. Baltzer: *Planimetria*, § 14,22. — Bellacchi: *Algebra*, vol. I, p. 102. — Thiry: *Applications remarq. du Théorème de Stewart*, p. 5 et 6.

Si può osservare che la [2] è deducibile dalla [1] cambiando segno ai segmenti BD o BC.

ed invero in tal caso $(\sqrt{2}\,.\,a - c)^2 \geq b^2$ e quindi $2\,a^2 + c^2 > b^2$: il problema ammette così due soluzioni a cui corrispondono due punti interni a $B\,C$.

Ricorrendo alla relazione [2], questa fornisce l'equazione

$$c^2\,(x \mp a) - b^2\,x = 0 \text{ donde } x = \frac{\pm\, a\,c^2}{c^2 - b^2}.$$

Dei due segni per x è da scegliere il $+$ se $c > b$, il $-$ se $c < b$. Nel 1.° caso D è dalla parte di C, nel 2.° dalla parte di B. Esiste dunque un punto esterno a $B\,C$ ed uno soltanto soddisfacente al problema, a meno che non sia $b = c$.

Osservazione. — Il problema ammette in generale tre soluzioni: due corrispondenti a punti interni di $B\,C$, una ad un punto esterno. Le soluzioni possono ridursi a due, ad una soltanto o a nessuna. Sono due quando $b = c$ e $\sqrt{2}\,.\,a - c$ è in valore assoluto maggiore di b, oppure quando $b \gtrless c$ e $\sqrt{2}\,.\,a - c = 0$, una se $b \lesseqgtr c$ e $\sqrt{2}\,.\,a - c$ è in valore assoluto minore di b, oppure quando $b = c$ e $\sqrt{2}\,.\,a - c = 0$, finalmente nessuna se $b = c$ e $\sqrt{2}\,.\,a - c$ è numericamente inferiore a b.

Soluzione geometrica. — Circoscrivasi un cerchio al triangolo $A\,B\,C$ e da A conducasi una tangente al medesimo ad incontrare $B\,C$ in D, il punto così determinato, esterno a $B\,C$, soddisfa al problema, ed invero si ha evidentemente $\overline{A\,D}^2 = B\,D\,.\,C\,D$. Per trovare poi i punti interni a $B\,C$ che risolvono il quesito, detto O il centro del cerchio $A\,B\,C$ e descritto il cerchio avente per diametro $A\,O$, i punti in cui questo incontra $B\,C$ sono quelli richiesti. È chiaro infatti che il cerchio $A\,O$ è la figura omotetica al cerchio $A\,B\,C$ con centro di similitudine esterna nel punto A e col rapporto di similitudine $1 : 2$, talchè le due corde del cerchio maggiore che passano per A e pei punti d'intersezione rimangono divise da questi punti per metà ed il quadrato dei segmenti che da A vanno a questi punti è equivalente al rettangolo dei segmenti in cui i medesimi dividono ordinatamente $B\,C$.

La tangente per A al cerchio $A\,B\,C$ è parallela a $B\,C$ quando $A\,B = A\,C$. Il problema ha poi due soluzioni, una o nessuna riguardo al cerchio $A\,O$, secondo che questo taglia, è tangente, od esterno a $B\,C$.

A. Lugli.

ALCUNI TEMI DI MATEMATICA
PROPOSTI PER LA LICENZA LICEALE (*)

1. Inscrivere in un cerchio dato un triangolo di cui son dati un angolo e la lunghezza della bisettrice di quest'angolo.

2. Dimostrare che, affinchè le due equazioni

$$x^3 + px + q = 0, \quad x^3 + p'x + q' = 0$$

(*) La redazione del *Periodico* sarà grata a quei Signori Presidi e Professori di Liceo che vorranno inviarle i temi di matematica proposti per la licenza, per rendere la presente collezione la più completa possibile.

ammettano una radice di comune, è necessario e sufficiente che fra i coefficienti p, q, p', q' abbia luogo la relazione

$$(q-q')^3=(p-p')^2(pq'-p'q);$$

e quindi risolvere le seguenti due equazioni

$$x^3-19a^2x+30a^3=0, \quad x^3-39a^2x+70a^3=0.$$

3. Costruire un triangolo tale che un suo lato e la bisettrice dell'angolo opposto a questo lato siano eguali a due segmenti dati, e che il rapporto degli altri due lati sia eguale a quello di altri due segmenti dati.

4. Si è costruito un tronco di cono circolare retto avente per altezza e per raggi delle sue basi (fra loro parallele) i raggi dei cerchi ex-inscritti corrispondenti rispettivamente all'ipotenusa ed ai due cateti di un triangolo rettangolo. Essendo S l'area di questo triangolo, ed m il rapporto tra il volume del nominato tronco di cono ed il cubo della sua altezza, calcolare i raggi del cerchio inscritto e dei cerchi ex-inscritti al triangolo rettangolo di area S.

Prof. S. Gatti.

5. Se in un triangolo rettangolo si descrivono i due archi che sono tangenti all'ipotenusa e sottendono i cateti, essi archi sono fra loro tangenti e le proiezioni d'un punto qualunque dei medesimi sui tre lati sono vertici d'un altro triangolo rettangolo.

6. La somma dei perimetri d'un quadrato e d'un triangolo equilatero è a m. e la somma dei quadrati degli apotemi dei medesimi è b mq.. Calcolare i lati del quadrato e del triangolo.

7. Costruire un trapezio che abbia l'altezza, le due diagonali e la differenza delle basi eguali, rispettivamente, a quattro segmenti dati.

8. Due sfere dividono il segmento che unisce i loro centri in parti proporzionali ai numeri 6, 9, 11 e la somma delle loro superficie è eguale a quella d'un cerchio che ha raggio di a m.. Calcolare i raggi delle due sfere.

Prof. F. Giudice.

9. Formare una equazione di 2° grado le cui radici siano sestuple di quelle della equazione

$$x^2-\frac{9}{2}x+2=0.$$

10. In una progressione aritmetica il 12° termine è 40 ed il 22° è 70. Trovare il primo termine, la ragione e la somma dei primi 12 termini.

11. Sia un triangolo equilatero ABC: si divida il lato AB in tre parti eguali AD, DE, EB, il lato BC in tre parti eguali BF, FG, GC, il lato CA pure in tre parti eguali CH, HK, KA, e si tirino DK, HG, FE. Dimostrare che l'esagono $DEFGHK$ è regolare.

12. Sia un triangolo BAC: si divida il lato BC in due parti BD, DC la prima delle quali sia doppia della seconda; si tiri AD e si divida anche AD

in due parti DE, EA la prima delle quali sia doppia della seconda; infine si conduca la retta CE e la parallela ad essa pel punto D e siano F, G i punti in cui queste rette incontrano il lato AB. Dimostrare che dei segmenti BG, GF, FA ciascuno è doppio del seguente.

(*Continua*). Prof. L. Bosi.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Un teorema sul triangolo. — Sia ABC un triangolo qualunque, O il suo ortocentro, A' e B' due punti del suo piano. La perpendicolare ad OB' condotta da A', e la perpendicolare condotta da B' ad OA' si taglieranno in un punto C' e sarà $A'B'C'$ un triangolo che avrà lo stesso ortocentro del triangolo ABC.

Come si vede, di questi triangoli ne esistono infiniti, e si deduce molto facilmente che il loro numero deve essere finito, se un vertice è assegnato, e gli altri due devono cadere in due rette date, uno per ciascuna.

Mi propongo, in questo breve lavoro, di determinare quelli di tali triangoli che sono iscritti nel dato triangolo, e di ciascun de' quali un vertice cada nel punto A', piede dell'altezza AA'.

In tali triangoli il lato $B'C'$ risulterà necessariamente perpendicolare ad AA', e taglierà AA' in un punto H, che io suppongo rispetto ad A' situato dalla banda opposta a quella in cui si trova A.

Pongo

$$HB' = x, \quad HA' = y, \quad HC' = z;$$
$$\text{ang. } B'A'H = \beta = \text{ang. } OC'H; \quad \text{ang. } C'A'H = \gamma = \text{ang. } OB'H;$$
$$\text{ang. } CAA' = \alpha, \quad \text{ang. } A'AB = \alpha'; \quad AA' = h, \quad OA' = m.$$

Allora si ha:

$$x = y \operatorname{tg} \beta, \quad y + m = z \operatorname{tg} \beta,$$

da cui

$$\frac{x}{y+m} = \frac{y}{z};$$

inoltre

$$x = (y+h) \operatorname{tg} \alpha; \quad z = (y+h) \operatorname{tg} \alpha'.$$

Da queste tre ultime equazioni si deduce:

$$(\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' - 1)\, y^2 + (2\, h \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' - m)\, y + h^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = 0.$$

Trasformo questa equazione. Si ha, indicando con R il raggio del cerchio circoscritto al triangolo ABC:

$$OA = 2\, R \cos A, \quad OA' = m = 2\, R \cos B \cos C, \quad h = 2\, R \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C;$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A'C}{h} = \frac{b \cos C}{h}, \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{c \cos B}{h}, \quad \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = \frac{bc \cos B \cos C}{h^2}.$$

Sostituendo si ottiene:

$$\left(\frac{b\,c\cos B\cos C}{h^2}-1\right)y^2+\left(\frac{2\,b\,c\cos B\cos C}{h}-2\,R\cos B\cos C\right)y+$$
$$b\,c\cos B\cos C=0.$$

Inoltre

$$b=2\,R\,\mathrm{sen}\,B,\quad c=2\,R\,\mathrm{sen}\,C$$
$$\frac{b\,c\cos B\cos C}{h^2}-1=\frac{\cos A}{\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,C}$$
$$\frac{2\,b\,c\cos B\cos C}{h}-2\,R\cos B\cos C=2\,R\cos B\cos C.$$

Sostituendo e riducendo risulta

$$\begin{aligned}&\cos A\,.\,y^2-2\,R\cos B\cos C\,\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,C\,.\,y\\&-4\,R^2\,\mathrm{sen}^2 B\,\mathrm{sen}^2 C\cos B\cos C=0\end{aligned}\quad\ldots\ldots\ldots\ [1]$$

Questa equazione dà due valori per y, ai quali corrispondono due valori per x e due per z. Così in generale per ogni triangolo ABC esistono due triangoli iscritti ed iso-ortocentrici col triangolo dato, per ciascun dei quali un vertice cade nel piede A' dell'altezza AA'. Li dirò *i due triangoli iso-ortocentrici iscritti.*

Cerco in quali casi le due soluzioni ora indicate esistono realmente.

La condizione di realtà delle radici della [1] è:

$$\cos B\cos C\,(\cos B\cos C+4\cos A)\geq 0\ \ldots\ldots\ldots\ [2]$$

$A=90°$.

In questo caso il coefficiente di y^2 si annulla; una delle radici diventa infinita, e l'altra si riduce a

$$-2\,R\,\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,C=-h,$$

cioè i due triangoli iso-ortocentrici iscritti si riducono al triangolo dato e ad un altro triangolo che ha due vertici all'infinito. Così si ha:

Non esiste alcun triangolo iso-ortocentrico con un dato triangolo rettangolo e iscritto in esso, per il quale un vertice cada nel piede dell' altezza relativa all'ipotenusa.

$A<90°$.

Se B e C sono angoli acuti, la condizione [2] si riduce a

$$\cos B\cos C+4\cos A\geq 0.$$

Come inequazione essa è sempre soddisfatta, come equazione è impossibile. Si ha così:

Per ogni triangolo acutangolo i due triangoli iso-ortocentrici iscritti esistono sempre, e sono distinti. I lati B' C' di questi due triangoli sono sempre da bande opposte rispetto al lato B C.

Quest'ultima proprietà risulta da ciò che in questo caso le due radici della [1] sono di segni contrari.

Se uno degli angoli B o C è ottuso, e questo sia p. es l'angolo B, posto $B = 180 - B'$, la [2] diviene

$$\cos B' \cos C \,(4 \cos A - \cos B' \cos C) \leq 0,$$

cioè

$$4 \cos A - \cos B' \cos C \leq 0,$$

oppure

$$3 \cos B' \cos C + 4 \,\mathrm{sen}\, B' \,\mathrm{sen}\, C \leq 0$$

che è impossibile.

Se B è retto si perviene alla medesima conclusione.

Si ha perciò:

Per nessun triangolo rettangolo od ottusangolo esistono i due triangoli iso-ortocentrici iscritti, quando il vertice fisso debba cadere nel piede di una delle altezze condotte dai vertici degli angoli acuti.

$A > 90°$.

In questo caso gli angoli B e C essendo necessariamente acuti, la condizione [2] potrà scriversi:

$$\cos B \cos C + 4 \cos A \geq 0,$$

che si riduce a

$$\mathrm{tg}\, B \,\mathrm{tg}\, C \geq \frac{3}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [3]$$

Pongo

$$B + C = M, \quad \mathrm{tg}\, B = u, \quad \mathrm{tg}\, M = p.$$

La condizione [3] diviene

$$\frac{pu - u^2}{1 + pu} \geq \frac{3}{4},$$

da cui

$$4u^2 - pu + 3 \leq 0,$$

che si può scrivere

$$\left(u - \frac{p + \sqrt{p^2 - 48}}{8}\right)\left(u - \frac{p - \sqrt{p^2 - 48}}{8}\right) \leq 0 \quad \ldots\ldots \quad [4]$$

Considero la [4] come equazione. Intanto i due valori di y saranno eguali. Se $p = 4\sqrt{3}$, si avrà

$$u = \frac{p}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \mathrm{tg}\, B$$

e risulterà pure $\mathrm{tg}\, C = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, cioè:

$$B = C = \text{ang. tg}\ \frac{1}{2}\sqrt{3} = 40° \, 53' \, 36'' \ldots$$

ed $y = -\frac{12\,R}{7}$. Dunque:

Di tutti i triangoli isosceli ottusangoli ve ne ha un solo per il quale i due triangoli iso-ortocentrici iscritti, aventi il vertice fisso nel punto medio della *base, sono reali e coincidenti, e tale triangolo è quello per il quale la tangente trigonometrica di uno degli angoli alla base sia* $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Se è $p > 4\sqrt{3}$, cioè $\operatorname{tg}(B+C) > 4\sqrt{3}$, cioè ancora $B + C > 81° \, 47' \, 12''$, la [4], che si sta considerando come equazione, dà:

$$\operatorname{tg} B_1 = \frac{\operatorname{tg} M + \sqrt{\operatorname{tg}^2 M - 48}}{8}, \quad \operatorname{tg} B_2 = \frac{\operatorname{tg} M - \sqrt{\operatorname{tg}^2 M - 48}}{8}.$$

Calcolando i corrispondenti valori di C si ha:

$$\operatorname{tg} C_1 = \operatorname{tg} B_2, \quad \operatorname{tg} C_2 = \operatorname{tg} B_1.$$

Dunque:

Di tutti i triangoli ottusangoli per i quali sia $B + C > ang.\ tg\ 4\sqrt{3}$, *assegnata la somma* $B + C$, *ve ne sono due soltanto per i quali i due triangoli iso-ortocentrici iscritti risultano reali e coincidenti.*

Per valore di y si avrà in questo caso

$$y = \frac{R \cos B \cos C \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\cos A} = \frac{R \operatorname{sen} 2B \operatorname{sen} 2C}{4 \cos A}.$$

Considero ora la [4] come inequazione.

La condizione $p^2 > 48$ è necessaria. Se essa è verificata, la [4] dà per $\operatorname{tg} B$ la seguente limitazione:

$$\frac{\operatorname{tg} M + \sqrt{\operatorname{tg}^2 M - 48}}{8} > \operatorname{tg} B > \frac{\operatorname{tg} M - \sqrt{\operatorname{tg}^2 M - 48}}{8}.$$

Assegnando a $\operatorname{tg} M$ un valore superiore a $4\sqrt{3}$, cioè all' angolo $B + C$ un valore maggiore di $81° \, 47' \, 12''$, la precedente limitazione dà due limiti fra i quali deve essere compreso l'angolo B. Cioè:

Per tutti i triangoli ottusangoli per i quali sia $B + C < ang.\ tg\ 4\sqrt{3}$, *i due triangoli iso-ortocentrici iscritti non esistono.*

Vi sono infiniti triangoli ottusangoli per i quali essendo $B + C > ang.\ tg\ 4\sqrt{3}$, *uno di tali angoli si può scegliere ad arbitrio fra due determinati limiti, e per ciascuno di questi triangoli i due triangoli iso-ortocentrici iscritti esistono e sono distinti fra loro.*

Raccogliendo quanto fin qui si è detto si ha:

$A = 90°$ . . . . Nessun triangolo.

$A < 90°$ $\begin{cases} B < 90°,\ C < 90° \text{ . . . . Due triangoli.} \\ B \text{ o } C \gtreqless 90° \text{ . . . . Nessun triangolo.} \end{cases}$

$$A > 90° \begin{cases} B = C = \text{ang. tg } \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ . . . . Un triangolo} \\ B + C < \text{ang tg } 4\sqrt{3} \text{ . . . . Nessun triangolo.} \\ B + C = M > \text{ang. tg } 4\sqrt{3} \begin{cases} \operatorname{tg} B = \dfrac{\operatorname{tg} M \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 M - 48}}{8} \text{ Un triangolo.} \\ \dfrac{\operatorname{tg} M + \sqrt{\operatorname{tg}^2 M - 48}}{8} > \operatorname{tg} B > \\ \dfrac{\operatorname{tg} M - \sqrt{\operatorname{tg}^2 M - 48}}{8} \text{ Due triangoli.} \end{cases} \end{cases}$$

Osservazione. — Se il triangolo ABC è equilatero, l'equazione in y diviene:

$$2y^2 - hy - h^2 = 0$$

che ha per radici $+h$ e $-\frac{h}{2}$. Si può così notare il seguente caso particolare:

Per ogni triangolo equilatero i due triangoli iso-ortocentrici iscritti esistono e sono distinti. Questi due triangoli sono il triangolo ortico, e l'altro ha il lato B′ C′ *distante da* B C *di quanto* A *dista da* B C *stesso, ma dalla parte opposta.*

S. CATANIA.

E. LUCAS. — **Sur les théorémes énoncés par Fermat, Euler, Wilson, Staudt et Clausen.** (*Mathesis*. Janvier 1891).

Osserva che, se $a\ b\ c \ldots.$ sono numeri primi diversi ed $\alpha\ \beta\ \gamma \ldots.$ interi ed è

$$q = a^{\alpha} \,.\, b^{\beta} \,.\, c^{\gamma} \ldots. \qquad \lambda = \alpha + \beta + \gamma + \ldots.$$

il prodotto

$$x^{\lambda} \,.\, \left(x^{\varphi(q)} - 1\right)$$

è divisibile per q tutte le volte che x è intero, $\varphi(q)$ indicando il numero dei numeri primi con q ed inferiori a q. Valendosi di questa sua generalizzazione ulteriore del teorema di Fermat generalizzato da Eulero, dimostra che se è

$$n - \lambda = h \,.\, \varphi(q) + r$$

sussiste la

$$x^n \equiv x^{r+\lambda} \pmod{q}$$

per cui analoghe relazioni sussistono tra le differenze, in particolare la

$$\Delta^{q-1} x^n \equiv \Delta^{q-1} x^{r+\lambda} \pmod{q}.$$

Con questa relazione, valendosi anche della nota formola

$$\Delta^{p-1}\, 0^{p-1} = (p-1)^{p-1} - C^1_{p-1} \,.\, (p-2)^{p-1} + \ldots. - C^{p-2}_{p-1} \,.\, 1^{p-1} + 0^{p-1}$$

dove p è numero primo, dimostra il teorema di Wilson.

Mediante la stessa relazione, valendosi anche della formola conosciuta

$$B_n = -\frac{\Delta_1}{2} + \frac{\Delta_2}{3} - \frac{\Delta_3}{4} + \ldots. + (-1)^n \,.\, \frac{\Delta_n}{n+1}$$

dove è $\Delta_q = \Delta^q\, 0^n$, dimostra la relazione di Staudt e Clausen

$$B_n = A_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \ldots. - \frac{1}{l}$$

dove n deve prendere il valore 1 e tutti i valori, positivi, pari cioè tutti i valori per i quali è diverso da zero B_n, numero n^{mo} di Bernoulli; 2 b c .... l sono tutti i numeri primi che diminuiti di 1 danno divisori di n. E A_n è un intero.

F. GIUDICE.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
80, 81*, 82*, 83, 85, 86*, 87*, 88*, 89 e 90*

80. *Risolvere l'equazione*

$$x^6 + 4x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = 0.$$

(D. BESSO).

Soluzione del Sig. Prof. *E. Sadun.*

Poichè la somma algebrica dei coefficienti nel polimonio $P^{(6)}$, che ne costituisce il primo membro, è uguale a zero, $P^{(6)}$ è divisibile per $x - 1$. Ma si può riconoscere facilmente se il polimonio stesso è divisibile per $x^2 - 1$, $x^3 - 1$, ecc.. (*V.* la mia nota: *Condizioni di divisibilità......* Periodico: Anno III, pag. 129).

Se si dispongono i coefficienti su due linee, come appresso, scrivendoli ordinatamente in colonne contenenti due termini

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -4 & -2 \\ 4 & -4 & -4 & 3 \end{array}$$

dall'osservare che la somma algebrica dei coefficienti di ciascuna linea è *diversa da zero*, si conclude che $P^{(6)}$ non è divisibile per $x^2 - 1$ (ciò che potrebbe dedursi anche dal notare che il polimonio non è divisibile per $x + 1$). Disponendo invece i coefficienti su tre linee nel modo seguente

$$\begin{array}{ccc} 1 & -4 & 3 \\ 4 & -4 & . \\ 2 & -2 & . \end{array}$$

si verifica che la somma algebrica dei coefficienti di ogni linea è *zero* e questo prova che $P^{(6)}$ *è divisibile* per $x^3 - 1$. Fatta la divisione risulta

$$P^{(6)} = (x^3 - 1)(x^3 + 4x^2 + 2x - 3).$$

Osservando poi che $x^3 + 4x^2 + 2x - 3$, ammette il divisore $x + 3$, si ha infine

$$P^{(6)} = (x^3 - 1)(x + 3)(x^2 + x - 1) = (x - 1)(x + 3)(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1).$$

Le radici dell'equazione proposta sono in conseguenza

$$1, \quad -3, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Soluzione del Sig. Prof. *G. Rozzolino.*

Poichè la somma dei coefficienti è 0, l'equazione ammette la radice 1. Dividendo per $x - 1$, si ha

$$x^5 + 5x^4 + 7x^3 - 3x^2 - x - 3 = 0.$$

Evidentemente questa non ammette per radice 1 nè -1, come si vede facilmente cambiando x in $-x$. Perciò le sole radici razionali da provare sono ± 3. Provando $+3$, si ha successivamente $-3 : 3 = -1$, $-1 - 1 = -2$, che non essendo divisibile per 3, prova che $+3$ non è radice; tentando con -3, si ha lo schema

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 5 & 7 & 3 & -1 & -3 \\
-1 & -2 & -1 & 0 & +1 & \\
\hline
0 & 3 & 6 & 3 & 0 & -3
\end{array},$$

donde si vede che -3 è radice, e che l'equazione che rimane a risolvere è

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 1 = 0.$$

Facciamo sparire da quest'ultima, come si usa, il 2º termine, ponendo $x = y - 0{,}5$. Col metodo di Horner si ha il seguente schema

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\
 & -0{,}5 & -0{,}75 & -0{,}125 & 0{,}0625 \\
\hline
1 & 1{,}5 & 0{,}25 & -0{,}125 & \mathbf{-0{,}9375} \\
 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}125 & \\
\hline
1 & 1 & -0{,}25 & \mathbf{0} & \\
 & -0{,}5 & -0{,}25 & & \\
\hline
1 & 0{,}5 & \mathbf{-0{,}5} & & \\
 & -0{,}5 & & & \\
\hline
1 & \mathbf{0} & & &
\end{array}$$

donde l'equazione $y^4 - 0{,}5y^2 - 0{,}9375 = 0$, ovvero

$$16y^4 - 8y^2 - 15 = 0,$$

il cui discriminante è $8^2 + 4 \,.\, 16 \,.\, 15 = 16^2 \,.\, 4$, e perciò $y = \pm \sqrt{\frac{8 \pm 16 \,.\, 2}{32}}$ $= \pm \frac{\sqrt{1 \pm 4}}{2}$. Così si ha infine $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

Si vede di qui che il 1° membro dell'equazione proposta è decomponibile nei quattro fattori razionali $x-1$, $x+3$, x^2+x+1, x^2+x-1 (*).

Soluzione del Sig. *G. Santorelli*, alunno del R. Istituto tecnico di Napoli.

Il primo membro della proposta equazione può successivamente trasformarsi nel modo seguente:

$$x^7+3x^6+x^5+3x^4-x^4-3x^3-x^3-3x^2-x^2-3x+x+x+3=$$
$$x^6(x+3)+x^4(x+3)-x^3(x+3)-x^2(x+3)-x(x+3)+x+3=$$
$$(x+3)(x^6+x^4-x^3-x^2-x+1)=(x+3)[x^3(x^3+x-1)-(x^2+x-1)]=$$
$$(x+3)(x^3-1)(x^2+x-1)=(x+3)(x-1)(x^2+x+1)(x^2+x-1):$$

perciò l'equazione stessa si scinde nelle altre:

$$x+3=0, \quad x-1=0, \quad x^2+x+1=0, \quad x^2+x\,1-=0,$$

le cui radici sono rispettivamente

$$-3, \quad 1, \quad \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \text{ (**)}.$$

81*. *Verificare l'eguaglianza*

$$\text{tang } 20^\circ \,.\, \text{tang } 30^\circ \,.\, \text{tang } 40^\circ = \text{tang } 10^\circ.$$

(D. Besso).

Dimostrazione del Sig. *A. Ognissanti*, alunno del R. Liceo di Bari.

Si ha:

$$\text{tang } 20^\circ \,.\, \text{tang } 40^\circ = \frac{2 \text{ sen } 20^\circ \,.\, \text{sen } 40^\circ}{2 \cos 20^\circ \,.\, \cos 40^\circ} = \frac{\cos 20^\circ - \cos 60^\circ}{\cos 20^\circ + \cos 60^\circ} = \frac{2\cos 20^\circ - 1}{2 \cos 20^\circ + 1},$$

si ha perciò:

$$\text{tang } 20^\circ \,.\, \text{tang } 30^\circ \,.\, \text{tang } 40^\circ = \frac{\text{sen } 30^\circ}{\cos 30^\circ} \cdot \frac{2\cos 20^\circ - 1}{2\cos 20^\circ + 1} =$$
$$\frac{2 \text{ sen } 30^\circ \cos 20^\circ - \text{sen } 30^\circ}{2 \cos 30^\circ \cos 20^\circ + \cos 30^\circ} = \frac{\text{sen } 50^\circ + \text{sen } 10^\circ - \text{sen } 30^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 10^\circ + \cos 30^\circ} =$$
$$\frac{\text{sen } 10^\circ + 2 \text{ sen } 10^\circ \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ + 2\cos 10^\circ \cos 40^\circ} = \frac{\text{sen } 10^\circ (1 + 2 \cos 40^\circ)}{\cos 10^\circ (1 + 2\cos 40^\circ)} = \text{tang } 10^\circ.$$

Dimostrazione del Sig. *S. Marcasi*, allievo della R. Accademia Navale di Livorno.

(*) Soluzioni di questa questione pervennero anche dai Sigg. Prof. *S. Catania*, *A. Giuffra*, *L. Mariscotti*, *P. Palatini*, *G. Riboni*, *G. Russo*, *P. Viaggi*.

(**) Soluzioni sostanzialmente analoghe vennero inviate da *A. Baldassarre* (alunno del R. Ist. tec. Bari), *A. Ceci* e *A. Perna* (R. Ist. tec. Napoli), *F. Mariantoni* (R. Università Roma), *A. Ognissanti* (R. Liceo Bari), *D. Taverna* (R. Liceo Catanzaro).

zione [2] nelle quali il valore della y non supera $\sqrt{N}$, *soluzioni fondamentali*.

TEOREMA. — *Il valore di* y *nella soluzione minima dell'equazioni* [1] *e* [2] *non supera il limite* $\sqrt{N}$.

L'applicazione che di questo teorema può farsi alla risoluzione dell'equazione [1] è evidente. Si daranno alla y dell'equazione i successivi valori 0, 1, 2, 3, ecc., non superando $\sqrt{N}$. Se uno di tali valori renderà $(a^2+1)y^2+N$ quadrato perfetto, e sarà il primo che soddisferà a questa condizione, si avrà in esso il valor di y per la soluzione minima della [1]. Se no, si concluderà che l'equazione è impossibile in numeri interi. Similmente dicasi per l'equazione [2].

Ecco pertanto la dimostrazione del teorema. — Sia (x_0, y_0) la soluzione minima dell'equazione [1]. Evidentemente, $x_0 > a y_0$; ed è facile verificare che il valore positivo $Y_0 = x_0 - a y_0$ conviene, come valore di y, all'equazione [2]. Si distinguano pertanto i due casi:

$$x_0 \geq (a+1)\, y_0; \quad x_0 < (a+1)\, y_0.$$

Nel primo caso si avrà: $y_0 \leq \sqrt{\frac{N}{2a}}$. Nel secondo caso si può dimostrare che Y_0, valore di y per l'equazione [2], non supera il limite $\sqrt{N}$ e che, per conseguenza, il valore di y nella soluzione minima dell'equazione [2] non oltrepassa il limite medesimo. Infatti, se Y_0 superasse $\sqrt{N}$, detta (X_0, Y_0) quella soluzione dell'equazione [2] nella quale $y = Y_0$, sarebbe $X_0 > a\, Y_0$, perchè questa condizione equivale all'altra: $Y_0 > \sqrt{N}$. Per conseguenza $X_0 - a\, Y_0$ sarebbe quantità positiva. Ma, com'è facile verificare, essa è anche valore di y in una soluzione della [1]. D'altra parte, $X_0 < (a+1)\, Y_0$, perchè questa disuguaglianza si traduce nell'altra: $(a+1)^2\, Y_0^2 + N > (a^2+1)\, Y_0^2$, evidentemente vera. Perciò $X_0 - a\, Y_0$, quantità minore di Y_0, sarebbe valore di y in una soluzione della [1]. Quest'equazione ammetterebbe dunque un valore di y minore di Y_0, cioè minore di $x_0 - a y_0$. Ma, per ipotesi, $x_0 - a y_0 < y_0$. Per conseguenza, quel valore di y sarebbe anche minore di y_0. Dunque l'equazione [1] avrebbe una soluzione nella quale il valore di y sarebbe minore di y_0, e perciò (x_0, y_0) non ne costituirebbe la soluzione minima, contro l'ipotesi.

Rimane così dimostrato che, quando il valore di y nella soluzione minima della [1] supera il limite $\sqrt{\frac{N}{2a}}$, il valore di y nella soluzione minima della [2] non supera $\sqrt{N}$.

Intanto ne risulta che, in ogni caso, il valore di y nella soluzione minima dell'equazione [1] non supera $\sqrt{N}$. Infatti ciò è evidente quando il detto valore non supera $\sqrt{\frac{N}{2a}}$. Supposto ch'esso superi questo limite, dicasi (x'_0, y'_0) la soluzione minima della [2]. Si è già dimostrato che $y'_0 \leq \sqrt{N}$. Si consideri pertanto la formola $ay'_0 - x'_0$. È facile verificare che, per essere $y'_0 \leq \sqrt{N}$, essa rappresenta un numero positivo o nullo, e che inoltre questo numero è valore della y in una soluzione dell'equazione [1]. Ora:

$$a y'_0 - x'_0 < \sqrt{N},$$

perchè questa disuguaglianza si traduce nella

$$y'^2_0 + 2 x'_0 \sqrt{N} > 0,$$

evidentemente vera. Si è adunque accertato che il valore di y nella soluzione minima della [1] non supera mai $\sqrt{N}$.

Resta a dimostrare che anche il valore di y nella soluzione minima della [2] non supera $\sqrt{N}$.

Sia (x_0, y_0) la soluzione minima della [1]. Il numero positivo $x_0 - a y_0$, valore di y in una soluzione dell'equazione [2], non supera $\sqrt{N}$. Perchè la condizione

$$x_0 - a y_0 \leq \sqrt{N}$$

equivale all'altra:

$$y_0^2 \leq 2 a y_0 \sqrt{N},$$

la quale è soddisfatta, perchè $y_0 \leq \sqrt{N}$, come fu già dimostrato.

Per ciò che concerne le formole generali di risoluzione delle equazioni [1] e [2], occorre premettere le seguenti osservazioni.

1.° *I valori della* y *appartenenti a soluzioni dell'equazione* [1] *si derivano dalle soluzioni* (x', y') *della* [2] *mediante la formola* $y = a y' \pm x'$, *se* y' *non supera* $\sqrt{N}$, *e mediante la formola* $y = a y' + x'$, *se* y' *supera* $\sqrt{N}$.

Sia infatti (x_1, y_1) una soluzione dell'equazione [1]. Si ponga: $x_1 = ay_1 + h$, essendo h positivo, perchè $x_1 > ay_1$. Sarà identicamente:

$$(a y_1 + h)^2 - (a^2 + 1) y_1^2 = N.$$

Dalla quale:

$$y_1 = ah \pm \sqrt{(a^2 + 1) h^2 - N}.$$

Essendo y_1 un numero intero, la quantità sotto radice dovrà essere un quadrato intero k^2. Perciò

$$y_1 = ah \pm k,$$

detta (k, h) una soluzione dell'equazione [2]. Naturalmente, dovendo y_1 risultar positiva, se k supererà ah, se cioè sarà $h > \sqrt{N}$, farà mestieri scegliere il segno positivo pel secondo termine. Ma se k non supererà ah, se cioè sarà $h \leq \sqrt{N}$, o che si scelga il segno positivo o il negativo, la formola $ah \pm k$ darà sempre il valore di y in una soluzione della [1].

2.° *I valori* y' *della* y, *appartenenti a soluzioni* (x', y') *della equazione* [2], *e per i quali* $x' \geq a y'$, *si derivano dalle soluzioni* (x_1, y_1) *della* [1] *mediante la formola*

$$y' = a y_1 + x_1.$$

Si tralascia la dimostrazione, perchè analoga a quella che valse a stabilire il principio precedente.

Teorema. — *Intendendo per* (x_1', y_1') *una soluzione fondamentale qualunque dell'equazione* [2], *ossia una soluzione nella quale* y_1' *non supera* $\sqrt{N}$, *e per* k *un intero positivo o nullo, tutte le soluzioni* (x, y) *dell'equazione* [1] *saranno date dall'eguaglianza*

$$y \sqrt{a^2 + 1} + x = (y_1' \sqrt{a^2 + 1} \pm x_1') (\sqrt{a^2 + 1} + a)^{2k+1},$$

quando si uguaglino fra loro le parti razionali e i coefficienti di $\sqrt{a^2 + 1}$ *de' suoi due membri.*

Sia infatti (x_1, y_1) una soluzione qualunque dell'equazione [1]. Per la prima delle osservazioni fatte dianzi, si potrà porre: $y_1 = a y' \pm x'$, essendo (x', y') soluzione della [2]. Ciò premesso, è facile ricavare quest'altra uguaglianza:

$$y_1 \sqrt{a^2 + 1} + x_1 = (y' \sqrt{a^2 + 1} \pm x') (\sqrt{a^2 + 1} + a).$$

Pertanto, se x' non supera ay', se cioè y' non supera $\sqrt{N}$, il teorema è dimostrato. Nel caso contrario, non si dovrà porre il segno negativo innanzi alla x' del secondo membro, perchè y_1 non potrà avere la forma $ay' - x'$. Di più, per la seconda delle osservazioni che furono premesse, si avrà: $y' = a y_2 + x_2$, essendo (y_2, x_2) soluzione della [1]. E conseguentemente:

$$y' \sqrt{a^2+1} + x' = (y_2 \sqrt{a^2+1} + x_2)(\sqrt{a^2+1} + a).$$

D'altra parte, per la prima osservazione, $y_2 = a y'_1 \pm x'_1$, ovvero:

$$y_2 \sqrt{a^2+1} + x_2 = (y'_1 \sqrt{a^2+1} \pm x'_1)(\sqrt{a^2+1} + a),$$

essendo (x'_1, y'_1) soluzione della [2]. Dunque:

$$y_1 \sqrt{a^2+1} + x_1 = (y'_1 \sqrt{a^2+1} \pm x'_1)(\sqrt{a^2+1} + a)^3.$$

Se x'_1 non supera $a y'_1$, il teorema è dimostrato, perchè $y'_1 \leq \sqrt{N}$. Nel caso contrario, si dedurrà ancora che

$$y_1 \sqrt{a^2+1} + x_1 = (y'_2 \sqrt{a^2+1} \pm x'_2)(\sqrt{a^2+1} + a)^5,$$

essendo (x'_2, y'_2) soluzione della [2]. Ecc.. — La potenza dispari di $\sqrt{a^2+1} + a$, moltiplicatrice nel secondo membro, non potendo crescere indefinitamente, perchè il primo membro è finito, dovrà finalmente aversi:

$$y_1 \sqrt{a^2+1} + x_1 = (y'_i \sqrt{a^2+1} \pm x'_i)(\sqrt{a^2+1} + a)^{2k+1},$$

essendo (x'_i, y'_i) tal soluzione della [2], nella quale $x'_i \leq a y'_i$ o, ciò ch'è lo stesso, $y'_i \leq \sqrt{N}$ (*).

Osservazione. — Siano

$$(x'_1, y'_1) \;\; (x'_2, y'_2) \;\ldots\ldots\; (x'_m, y'_m)$$

le soluzioni fondamentali dell'equazione [2], disposte in ordine crescente per rispetto ai valori della x e della y. Per ottenere le successive soluzioni dell'equazione [1] disposte in ordine crescente, nella

(*) Che poi la x_1 e la y_1 fornite da questa uguaglianza costituiscano una soluzione dell'equazione [1], si dimostra col noto espediente di moltiplicare l'eguaglianza stessa per quella che se ne deriva cambiando il segno del radicale.

formola

$$y\sqrt{a^2+1}+x=(y'_i\sqrt{a^2+1}\pm x'_i)(\sqrt{a^2+1}+a)^{2k+1}$$

si porrà prima $k=0$ e si daranno successivamente alla i i valori $m, m-1, m-2, \ldots. 1$, *calcolando col segno* — *davanti alla* x'_1. Poscia si daranno alla i i successivi valori $1, 2, 3, \ldots. m$, *calcolando col segno* + *davanti alla* x'_i. Si porrà in seguito $k=1$, e quanto alla i, si seguirà la stessa norma che per $k=0$. Ecc.

Esempio. — Debbasi risolvere l'equazione

$$x^2-26y^2=209.$$

Le soluzioni fondamentali dell'equazione

$$x^2-26y^2=-209,$$

quelle cioè per le quali $y \leq \sqrt{209}$, sono (5, 3) e (21, 5). Pertanto le soluzioni dell'equazione proposta, disposte in ordine crescente per rispetto ai valori delle incognite, verranno date dalle formole

$$(5\sqrt{26}-21)(\sqrt{26}+5)^{2k+1};\ (3\sqrt{26}-5)(\sqrt{26}+5)^{2k+1}$$
$$(3\sqrt{26}+5)(\sqrt{26}+5)^{2k+1};\ (5\sqrt{26}+21)(\sqrt{26}+5)^{2k+1},$$

facendo in esse successivamente $k=0, 1, 2$, ecc.. Saranno adunque:

(25, 4) (53, 10) (103, 20) (235, 46) (2315, 454) ecc.

Teorema. — *Intendendo per* (x'_i, y'_i) *una soluzione fondamentale qualunque dell'equazione* [2] *e per* k *un intero positivo o nullo, tutte le soluzioni* (X, Y) *dell'equazione* [2] *si ricaveranno per mezzo dell'eguaglianza*

$$Y\sqrt{a^2+1}+X=(y'_i\sqrt{a^2+1}\pm x'_i)(\sqrt{a^2+1}+a)^{2k}.$$

Questo teorema è una conseguenza immediata del precedente. Perchè tra le soluzioni (x, y) dell'equazione [1] e le soluzioni (X, Y) della [2] esiste la relazione:

$$y\sqrt{a^2+1}+x=(Y\sqrt{a^2+1}+X)(\sqrt{a^2+1}+a),$$

com'è facile verificare.

G. Frattini.

ALCUNI TEOREMI SULLE CONICHE

1. Teorema: *Data una conica e due fasci di raggi coi centri rispettivi nei punti* O, S, *se congiungiamo i punti, in cui ciascun raggio di uno dei fasci* (p. e. di quello col centro in O) *incontra la conica, col centro* (S) *dell'altro, ed uniamo fra loro i secondi punti d'incontro della curva con ogni coppia di raggi che così si ottiene, risulta un altro fascio di raggi che ha il centro* O' *situato sulla retta* SO *e che è prospettivo al fascio che ha il centro in* O.

Dimostrazione. — Sia PQ un raggio del fascio O, RT il raggio da esso dedotto mediante la costruzione indicata nell'enunciato del teorema; questi due raggi, per un notissimo teorema, si incontrano in un punto M della polare HK del punto S rispetto alla data conica. Tiriamo MS e consideriamo i quattro raggi MP, MK, MR, MS. Se si pensa ora che RQ, PT s'incontrano in un punto G di HK e si tien presente la costruzione ordinaria, per la quale, dato un raggio di un fascio, si determina il raggio che è da quello armonicamente separato mediante due altri raggi, si vede tosto che MP, MK, MR, MS formano un gruppo armonico. Ne viene che, fissato un punto O della PQ, facendo ruotare intorno ad esso questa retta, quella che le corrisponde in base alla nostra costruzione incontra SO costantemente nel punto O', che è separato armonicamente da O mediante il punto S ed il punto in cui SO incontra la polare di S, cioè descrive un fascio col centro in O'. È poi evidente che i fasci O, O' sono prospettivi.

Per dualità abbiamo: *Se da un punto qualunque* X *si conducono le due tangenti ad una conica e se dai due punti in cui esse tagliano una retta assegnata* s *si tirano le tangenti ancora possibili alla conica data, queste s'incontrano in un punto* Y *che, al variare di* X *sopra una retta* o, *ha per luogo una retta passante per* os.

2. Immaginiamo ora, riferendoci al primo teorema, di fissare la retta SO, che sia una segante della data conica in A, A', e sopra di essa fissiamo il punto S e vediamo come varia O' al variare di O sulla SO. Intanto quando O è in A, O' è in A' e viceversa. Allontanandosi O dalla curva sul raggio $A\,\infty$, se QN è un diametro conjugato alla SO, quando O arriva in B, punto in cui SO è tagliata dalla tangente in M, che è il secondo punto di incontro della SN con la conica, allora O' cade all'infinito. Infatti tirando il raggio BM, considerato come un raggio uscente da O, in M cadono i suoi punti d'intersezione con la curva, e tirando poi la SM, questa vale per i due raggi del fascio S corrispondenti al raggio BM del fascio O, quindi in N coincidono i secondi punti d'incontro di quei due raggi con la conica. Ne segue che O' è sulla tangente in N, la quale è parallela ad SO, quindi O' cade all'infinito.

Se poi si tira per B la seconda tangente BP, allora la SP incontrerà la curva in Q. Difatti per la ragione esposta sopra, la tangente nel secondo punto d'incontro della curva con la SP deve contenere O'; ma questo è il punto all'infinito della SO e perciò il secondo punto d'incontro della curva con la SP deve cadere precisamente in Q.

Queste considerazioni ci forniscono adunque il teorema: *Se nei punti d'incontro di una conica con una segante* MN *si conducono le tangenti, ad una delle quali* (p. e. a quella che tocca la curva in N) *si guida la parallela da un punto* S *qualunque della segante, e se dal punto* B *d'incontro di questa parallela con l'altra tangente si conduce la seconda tangente* BP, *la* SP *passa per il secondo estremo del diametro determinato da* N, *il quale è conjugato alla* SB.

Se poi da S conduciamo anche la parallela alla tangente in M, facendo le stesse costruzioni indicate dal teorema precedente, chiamando C il punto in cui l'ultima parallela taglia la tangente in N e D il punto d'incontro delle due tangenti in M, N, abbiamo quest'altro teorema: *Dato un parallelogrammo* BDCS *con due lati* DB, CD *tangenti ad una conica in* M, N *ed il vertice* S *nella*

M N, *tirando da* B, C *le due tangenti ancora possibili* B P, C T, *ed unendo i due punti di contatto con* S, *si ottengono sulla conica due punti* Q, R, *i quali con* M, N *formano i vertici di un parallelogrammo, le cui diagonali sono conjugate alle coppie di lati del parallelogrammo dato.*

Generalizzando mediante projezione della figura data dall'ultimo teorema, da un punto qualunque dello spazio in un piano qualunque, abbiamo:

Se un quadrilatero completo ha due coppie di vertici opposti conjugati rispetto ad una conica che tocca i lati uscenti da uno di questi quattro vertici, i punti di contatto dei lati uscenti da tale vertice coi punti che vengono determinati sulla conica dalle rette che congiungono il vertice opposto coi punti nei quali la curva è toccata dalle due tangenti che ancora si possono condurre per la terza coppia di vertici opposti, formano due coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo, i vertici della terza coppia del quale sono conjugati rispetto alla conica e posti sulla retta che unisce la seconda coppia di vertici conjugati del quadrilatero dato, e le coppie di lati uscenti da questi ultimi due vertici del quadrilatero dato sono conjugate alle diagonali di quel quadrangolo semplice appartenente al quadrilatero derivato, il quale è inscritto nella conica.

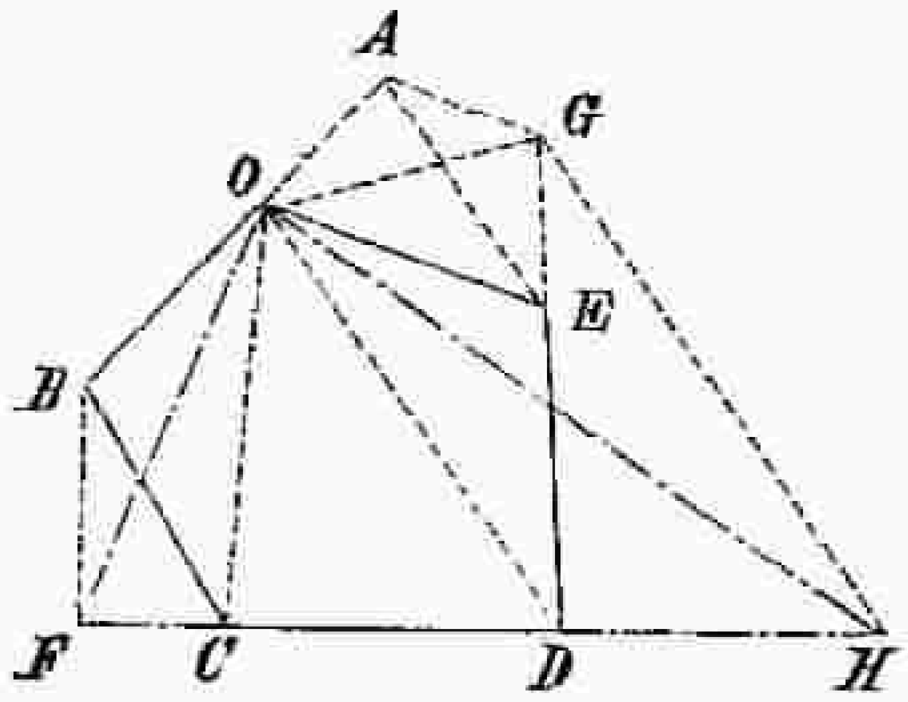
Lasciamo alla cura del lettore il ricavare il teorema duale.

Palmi, 18 febbraio 1891.

(Continua). Prof. PALATINI FRANCESCO.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Alcuni problemi relativi alla divisione d'un poligono convesso in parti proporzionali a più segmenti dati, da far parte di un corso di disegno geometrico. — **1.** Sia $ABCDE$ un poligono convesso, O un punto del lato AB e proponiamoci di trasformare il poligono dato in un triangolo equivalente di vertice O e base nel lato CD, cosicchè la parte di esso che rimane a sinistra della trasversale OC sia equivalente ad OCB e quella che rimane a destra di OD sia equivalente ad $ODEA$. Si tirino OC, OD, OE quindi $BF \parallel OC$, a tagliare CD in F, $AG \parallel OE$, a tagliare DE in G, $GH \parallel OD$, a tagliare CD in H, sarà evidentemente OFH il triangolo richiesto.

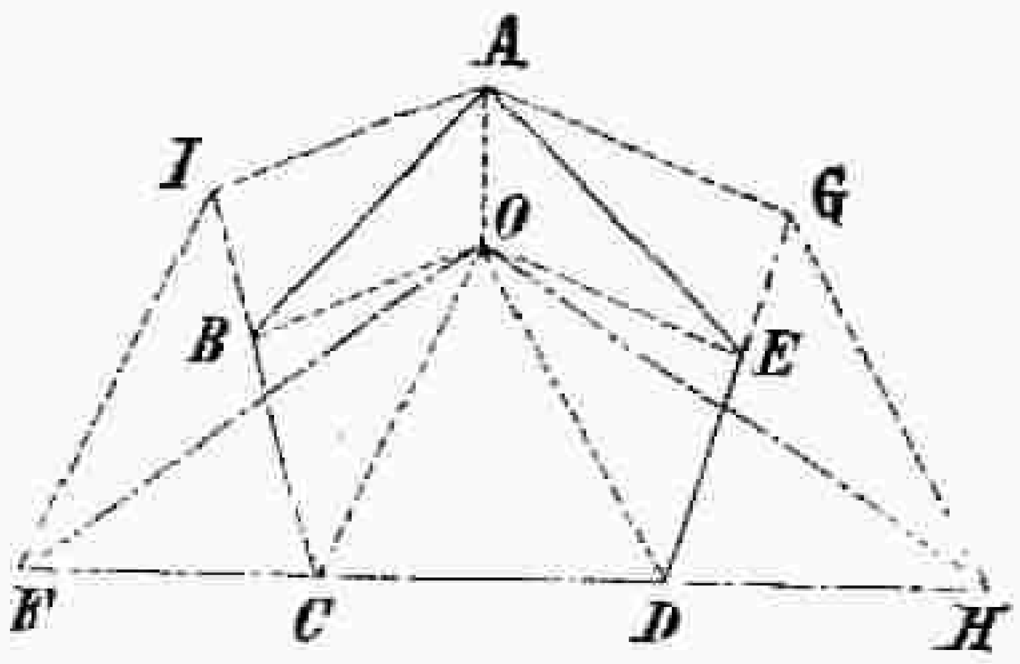


2. Posto ciò vogliasi *dividere il poligono dato, mediante corde uscenti da* O, *in parti proporzionali a più segmenti dati* m, n, p, ... *e in un verso prestabilito.* Dividendo FH nel senso assegnato in parti che stiano fra loro come $m : n : p : \ldots..$, se i punti di divisione cadono in C e D o nell'interno di CD, le congiungenti O con questi punti risolvono il problema, altrimenti resteranno giustamente collocate soltanto quelle corde uscenti da O che finiscono a punti di CD. Per completare la soluzione in questo caso e posto che qualche punto di divisione cada nell'interno di FC e qualche altro entro DH, basterà trasformare il poligono $ABCDE$ prima in un triangolo equivalente di vertice O e base BCI, quindi operare sulla base di questo come si fece su FH, e si troveranno le corde che risolvono il problema relative a BC, e in appresso trasformare ancora il poligono dato in due altri triangoli equivalenti pel primo de' quali la base cada nel lato DE, nel modo stesso come si è fatto per CD, e per l'altro la base sia LEA ed effettuare su questi le operazioni di divisione eseguite per i due precedenti e si troveranno così le corde che risolvono il problema rispetto ai lati DE, EA.

Come ognuno vede questo metodo di soluzione è generale cosicchè il problema propostoci può considerarsi completamente risoluto.

3. Trattisi ora dello stesso problema, scegliendo per origine dei segmenti che devono dividere il poligono convesso $ABCDE$, ed in senso prestabilito, in parti proporzionali a più segmenti dati $m, n, p, \ldots..$, un punto O interno al poligono dato, con la condizione che la divisione debba effettuarsi partendo dal segmento OA.

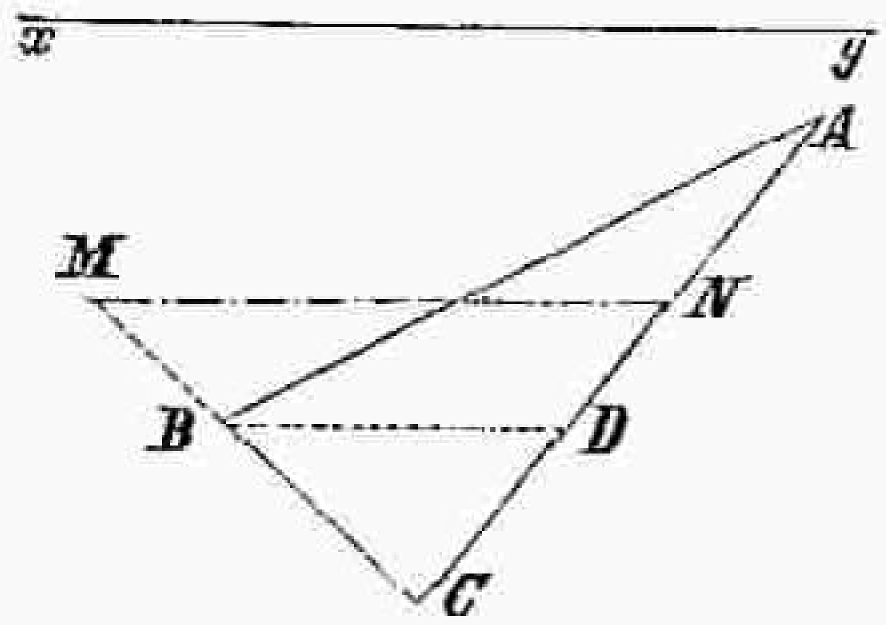
Basterà indicare la costruzione colla quale il poligono stesso può trasformarsi in un triangolo equivalente di vertice O e base nella direzione di un lato qualunque, ad es. CD, sempre in modo che la parte del triangolo richiesto che rimane a sinistra di OCD sia equivalente ad $OCBA$ e quella a destra ad $ODEA$, non restando poi ad applicare che un processo analogo a quello esposto nel numero precedente.



Conducansi le OA, OB, OC, OD, OE e per A la $AG \parallel OE$ ad incontrare DE in G e per G la $GH \parallel OD$ ad incontrare CD in H. Similmente nel verso opposto tirisi $AI \parallel OB$ ad incontrare CB in I e per I la $IF \parallel OC$ a tagliare DC in F, sarà evidentemente OFH un triangolo equivalente al poligono dato e soddisfacente alla posta condizione. Si divida ora FH nel senso stabilito in parti proporzionali ai dati segmenti e congiungendo i punti di divisione che cadono in CD con O, si avranno i segmenti che risolvono il problema rispetto al lato CD. Ripetendo la costruzione accennata, prendendo per base dei triangoli equivalenti ad $ABCDE$ gli altri singoli lati del poligono, si troveranno i segmenti uscenti da O relativi a questi altri lati che completano la divisione richiesta, e così resta interamente risoluto anche il problema: *Dividere un poligono convesso in parti proporzionali a più segmenti dati* m, n, p, ..., *in senso prestabilito, con segmenti uscenti da un punto* O *interno al poligono.*

4. Proponiamoci ora di dividere un triangolo ABC in parti proporzionali a più segmenti dati in un ordine assegnato, con rette di data direzione (parallele ad xy).

Indicheremo la costruzione a farsi per trasformare il dato triangolo in altro a lui equivalente con un angolo in comune ad un angolo di ABC, ad es. quello di vertice C, e avente la base parallela ad xy.



Dei rimanenti vertici di ABC sia C quello più distante da xy, ed allora tirisi per esso $BD \parallel xy$. Chiamata MN la retta che risolve il problema si avrà per teoremi noti $MC : BC = NC : DC$, $MC \,.\, CN = BC \,.\, AC$, da cui $\overline{NC}^2 = AC \,.\, DC$, sicchè il segmento NC è facilmente costruibile. Ed ora, seguendo un processo che trovasi svolto in quasi tutti i manuali di geometria elementare, si potrà dividere il triangolo NMC in parti proporzionali ai segmenti dati e nell'ordine stabilito con rette parallele ad MN quindi anche ad xy.

Queste risolveranno interamente il problema se tutte partono da punti di BC, ma se ciò non accade e le estremità delle trasversali, dalla parte di MC, tutte o in parte cadono entro il segmento MB, dovrà allora trasformarsi il triangolo ABC in altro equivalente avente con ABC in comune l'angolo A e la base $\parallel xy$, dopo di che si avranno le trasversali che completano la soluzione del problema e vanno a cadere coi loro estremi nei tratti AB, AD.

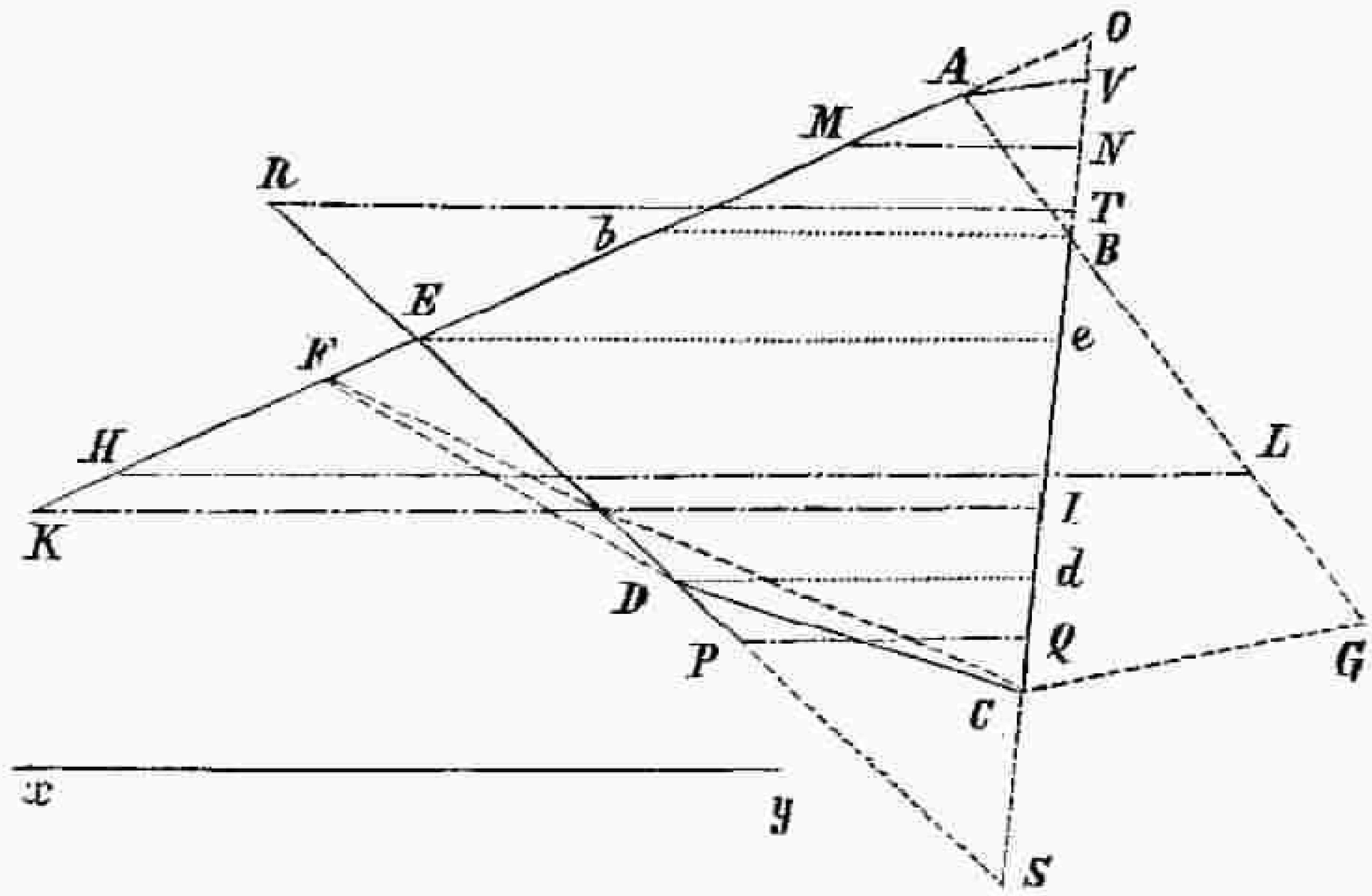
5. La costruzione precedente congiunta a quella che risolve il noto problema dividere un trapezio in parti proporzionali a più segmenti dati con rette parallele alle basi (*), conduce alla soluzione del problema più generale:

Dividere un poligono convesso in parti proporzionali a più segmenti dati m, n, p, ..., *in un senso prestabilito, con rette di direzione assegnata.*

Sia xy questa direzione, $ABCDE$ il dato poligono e dei suoi vertici A il più distante e C il più prossimo ad xy. Conducansi per gli altri vertici B, D, E le parallele Bb, Ec, Dd ad xy ad incontrare il contorno del poligono in b, e, d, poi si prolunghino EA, CB fino ad incontrarsi in O e BC, ED fino ad incontrarsi in S. Si tratta di determinare le costruzioni mediante le quali possono

(*) V. p. es. questo *Periodico*, Anno IV, p. 182.

giustamente collocarsi le trasversali che cadono nei tratti Ab, AB; bE, Be; ED, ed; DC, dC.



Per ottenere quelle relative ai due primi, conducasi EC, per D la $DF \parallel EC$ a tagliare AE in F, (*) poi congiunto F con B si tiri $CG \parallel FB$ fino a tagliare AB in G: sarà evidentemente AFG un triangolo equivalente al poligono dato avente con questo in comune l'angolo A. Si trasformi il medesimo in altro triangolo AHL, equivalente ed AFG, in modo che due lati siano nelle direzioni AE, AB e sia la base $HL \parallel xy$ (**4**). Dividendo AHL in parti proporzionali ai dati segmenti m, n, p, . . ., nell'ordine prestabilito, le trasversali che hanno i loro estremi in punti di Ab, AB resteranno giustamente collocate. Con costruzione analoga potranno situarsi in modo definitivo le trasversali le cui estremità sono punti di DC, dC. Ed ora per ottenere quelle i cui termini cadono nei tratti bE, BE si trasformi prima il triangolo OAB in altro equivalente OMN con l'angolo MON in comune con l'angolo O del primo triangolo e colla base $MN \parallel xy$ ed il triangolo OFC pure in altro equivalente OKI con due lati secondo OF, OB e colla base $KI \parallel xy$, poi si divida il trapezio $MKIN$, equivalente al poligono dato, in parti proporzionali ai dati segmenti, sempre nel senso stabilito. Finalmente condotta EB e per A la $AV \parallel EB$ ad incontrare CB in V, e tirata EV, si trasformi il triangolo ESV in altro equivalente con due lati nelle direzioni ES, VS e colla base $RT \parallel xy$, e il triangolo DSC in altro equivalente colla base $PQ \parallel xy$ e terminata ai lati dell'angolo DSC: il trapezio $RPQT$ equivarrà al poligono dato e se lo si divide, nell'ordine assegnato, cioè nel senso RT a PQ, in parti proporzionali ad m, n, p, ..., si metteranno a posto le trasversali i cui estremi cadono nei tratti ED, ed, dopo di che resterà completata la divisione del poligono dato in parti proporzionali ai segmenti dati, nell'ordine prestabilito.

(*) Per semplicità sono omesse nella figura alcune linee della costruzione che non nuocono alla intelligenza della dimostrazione.

È facile riconoscere che la costruzione ora effettuata si adatta con opportune modificazioni a qualunque poligono convesso, talchè anche l'ultimo problema può considerarsi come completamente risoluto, soltanto chi voglia rendersi ragione dei dettagli della costruzione comunque venga scelto il poligono dato e la retta data converrà che ricorra alla effettiva grafica rappresentazione.

A. Lugli.

E. DUPORCH. — **Sur la somme des puissances semblables des n premiers nombres.** (*Nouvelles Annales de Mathématiques.* Décembre 1890).

Pone

$$f(x) = \frac{1}{(n+1)!} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & \vdots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 & x^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & \binom{n}{2} & \vdots & n & x^n \\ 1 & n+1 & \binom{n+1}{2} & \vdots & \binom{n+1}{2} & x^{n+1} \end{vmatrix}$$

e trova

$$1^n + 2^n + \ldots.. + (x-1)^n + x^n = f(x+1).$$

Credo opportuno rilevare che dalla precedente relazione si ricava subito il numero B_n, n^{mo} numero di Bernoulli o coefficiente di x nello sviluppo di $1^n + 2^n + \ldots. + x^n$ secondo le potenze di x, e se ne deducono facilmente le note relazioni simboliche

$$(B+1)^p - B^p = p \qquad (B+1)^p - B^p = 0$$

dovute al Prof. E. Cesàro, la prima, ed al Prof. E. Lucas, la seconda; infatti si ricava immediatamente, come coefficiente di x in $f(x+1)$ ossia in $x^n + f(x)$,

$$B_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 1 & n & \binom{n}{2} & \vdots & n \\ 1 & (n+1) & \binom{n+1}{2} & \vdots & \binom{n+1}{2} \end{vmatrix}$$

e per le precedenti relazioni simboliche, convenientemente applicate, si ha

$$\begin{array}{l|l} 1 = B_0 & -1 = 2B' \\ 2 = B_0 + 2B_1 & -1 = 3B' + 3B_2 \\ 3 = B_0 + 3B_1 + 3B_2 & -1 = 4B' + 6B_2 + 4B_3 \\ \ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n+1 = B_0 + (n+1)B_1 + \binom{n+1}{2} & B_2 - 1 = (n+1)B' + \binom{n+1}{2} B_2 + \\ + \ldots.. + \binom{n+1}{2} B_{n-1} + (n+1) & B_n \ldots.. + \binom{n+1}{2} B_{n-1} + (n+1) B_n \end{array}$$

dalle quali, coll'uso dei determinanti, ricavansi per B_n, $n > 1$, valori che si riconoscono subito eguali a quello dato sopra.

Le relazioni simboliche ricordate danno valore diverso per B_1 e B' soltanto, ovvero rispettivamente i valori $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. Dalle ultime scritte delle equazioni dedotte dalle relazioni simboliche, ponendo per B_0 il suo valore 1, si ricava mediante sottrazione

$$n+2 = 1 + (n+1)(B_1 - B')$$

la quale relazione, essendo $B_1 = \frac{1}{2}$, $B' = -\frac{1}{2}$, mostra anch'essa l'accordo e l'equivalenza delle due espressioni simboliche.

F. GIUDICE.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 74*, 75*, 77*, 78* e 79*

74*. *Sia* ABCD *un quadrilatero inscritto in una circonferenza di centro* O. *Sopra il lato* AB, *preso come corda, si descrivano le due circonferenze che hanno i loro centri sulla circonferenza* O; *questi centri, che saranno i punti di mezzo dell'arco* BCDA *e dell'arco* AB, *si indichino con* P *e con* P' *rispettivamente. Si operi egualmente sui lati* BC, CD, DA, *si avranno così altre sei circonferenze, i cui centri, con notazioni analoghe alle precedenti, s'indicheranno con* Q *e* Q', *con* R *ed* R', *e con* S *ed* S'. *Dimostrare:*

1.° *che gli altri quattro punti in cui si tagliano le circonferenze* P', Q', R', S' *sono vertici di un rettangolo;*

2.° *che gli altri quattro punti in cui si tagliano le circonferenze* P, Q, R, S *sono pure vertici d'un rettangolo;*

3.° *che la congiungente dei centri di questi due rettangoli è bisecata dal punto* O. (G. PESCI).

Soluzione del Sig. *G. M. Nobile* allievo del R. Istituto tecnico di Chieti.

La somma degli archi $P'S'$, $R'Q'$ equivale ad una semicirconferenza; quindi $P'R'$ ed $S'Q'$ si tagliano ad angolo retto in un punto T'. I quadrangoli $PQRS$, $P'Q'R'S'$ sono simmetrici rispetto ad O, quindi PR ed SQ si tagliano ad angolo retto in un punto T, simmetrico di T' rispetto ad O. Risulta intanto che O è punto medio di TT'. I circoli P' e Q' (P e Q) che già si tagliano in B s'incontrano un'altra volta in b' (b); così, le seconde intersezioni dei circoli Q' ed R', R' ed S', S' e P' (Q ed R, R ed S, S e P) sieno c', d', a' (c, d, a). I cerchi P' e Q' (P e Q) tagliansi in B e b' (B e b), è quindi $P'Q'$ (PQ) bisettrice interna dell'angolo $BP'b'$ (BPb); ed essendo Q' (Q) punto medio dell'arco BC (supplemento di BC), $P'Q'$ (PQ) è pure bisettrice interna (esterna) dell'angolo $BP'C$ (BPC); dunque le direzioni $P'b'$, $P'C$ coincidono (Pb, PC sono opposte). Analogamente dimostrasi che le direzioni $P'a'$, $P'D$ coincidono (Pa, PD sono opposte); e poichè $P'R'$ (PR) biseca l'angolo $DP'C$ (DPC), biseca anche l'angolo $a'P'b'$ che coincide con esso (aPb che gli è opposto al vertice) e divide dunque per metà e ad angolo retto $a'b'$ (ab), essendo il triangolo $P'a'b'$ (Pab) isoscele. — Estendendo l'ultima conseguenza, si conchiude che due lati opposti del quadrangolo $a'b'c'd'$ $(abcd)$ sono dimezzati ad angolo retto da $P'R'$ (PR) e gli altri due da $S'Q'$ (SQ): dunque per l'osservazione posta a principio, risulta che $a'b'c'd'$ $(abcd)$ è un rettangolo ed ha per centro T' (T).

Che O sia punto medio di TT' è stato dimostrato.

75'. *Dimostrare che se* A_1, B_1, C_1, *sono punti dei lati* BC, CA, AB *d'un triangolo così situati che, posto* $\frac{BA_1}{BC} = h$, $\frac{CB_1}{CA} = k$, $\frac{AC_1}{AB} = l$, *abbia luogo la relazione*

$$(2h-1)a^2 + (2k-1)b^2 + (2l-1)c^2 = 0,$$

le perpendicolari ai lati BC, CA, AB, *condotte dai punti* A_1, B_1, C_1, *passano per uno stesso punto.* (D. Besso).

Dimostrazione del Sig. *P. Marano*, studente privato a Catania.

Indicando con a, b, c i numeri che misurano i lati del triangolo rispettivamente opposti ai vertici A, B, C, dall'essere $\frac{BA_1}{BC} = h$, $\frac{CB_1}{CA} = k$, $\frac{AC_1}{AB} = l$, si ricava $BA_1 = ah$, $CB_1 = bk$, $AC_1 = cl$. Tiro le perpendicolari ai lati BC, CA dai punti A_1 e B_1, che si tagliano in un punto O. Unisco O con A, B e C e dico x, y, z i numeri che misurano i segmenti OA, OB, OC. Allora per un noto teorema di geometria si ha:

$$x^2 = z^2 + b^2 - 2b \,.\, B_1C, \quad y^2 = x^2 + c^2 - 2c \,.\, AC_1',$$
$$z^2 = y^2 + a^2 - 2a \,.\, A_1B,$$

dove C_1' è il piede della perpendicolare abbassata da O su AB, e CB_1, BA_1, AC_1' si intendono considerati in valore e segno. Sostituendo a CB_1 e BA_1 i valori trovati e posto $AC_1' = cl'$ deve provarsi che $l' = l$.

Intanto il sistema diventa:

$$x^2 = z^2 + b^2 - 2b^2k, \quad y^2 = x^2 + c^2 - 2c^2l', \quad z^2 = y^2 + a^2 - 2a^2h.$$

Sommando membro a membro si ha:

$$a^2(1-2h) + b^2(1-2k) + c^2(1-2l') = 0,$$

che paragonata con la relazione indicata nel teorema ci dice appunto che $l' = l$, cioè che la perpendicolare condotta ad AB dal punto C_1, essendo C_1 il punto che insieme con A_1 e B_1 soddisfa alla relazione data, passa per O. E ciò è quanto volevasi dimostrare.

Osservazione 1. — Se $h = k = l = \frac{1}{2}$ la relazione proposta è identicamente verificata, e si ricade nel noto teorema di geometria che: Le perpendicolari innalzate dai punti di mezzo de' lati di un triangolo concorrono in un punto.

Osservazione 2. — Se dal vertice A si abbassa la perpendicolare $A A_1$ sul lato opposto, si ha:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \,.\, A_1 B \quad \text{da cui} \quad \left(2 \frac{A_1 B}{a} - 1\right) a^2 = c^2 - b^2.$$

Le espressioni analoghe per le altre altezze sono $b^2 - a^2$, $a^2 - c^2$. La somma di queste tre quantità essendo identicamente nulla, la relazione proposta è verificata da' piedi delle altezze di un triangolo, ciò che dimostra il teorema anche noto che: Le altezze di un triangolo concorrono in un punto.

Dimostrazione del Sig. *G. M. Nobile*, allievo del R. Istituto tecnico di Chieti.

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè la perpendicolari innalzate ai lati nei punti A_1, B_1, C_1 concorrano in uno stesso punto, è che si verifichi la eguaglianza:

$$\overline{BA_1}^2 - \overline{A_1 C}^2 + \overline{CB_1}^2 - \overline{B_1 A}^2 + \overline{AC_1}^2 - \overline{C_1 B}^2 = 0$$

(cf. BALTZER, *Plan.* § 14, 2).

Essa può trasformarsi nella seguente:

$$BC\,(BA_1 - A_1 C) + CA\,(CB_1 - B_1 A) + AB\,(AC_1 - C_1 B) = 0;$$

e questa nell'altra:

$$BC\,(2BA_1 - BC) + CA\,(2CB_1 - CA) + AB\,(2AC_1 - AB) = 0.$$

Ora, tenendo presente che $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ e che $BA_1 = ha$, $CB_1 = kb$, $AC_1 = lc$, l'ultima eguaglianza può scriversi:

$$a^2\,(2h - 1) + h^2\,(2k - 1) + c^2\,(2l - 1) = 0:$$

e così resta dimostrato ciò che si domandava (*).

77*. *Dare un metodo per la risoluzione del sistema d'equazioni*

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Ay^2 + Dx + Dy + E &= 0 \\ A_1 x^2 + B_1 xy + A_1 y^2 + D_1 x + D_1 y + E_1 &= 0. \end{aligned}$$

(B. CARRARA).

Soluzione dei Sigg. *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico Bari), *G. Calvitti, A. Ceci, A. Perna, F. Grillo* (R. Ist. tec. Napoli), *R. Catani* (R. Ist. tec. Roma, *E. Goti, A. Mucci, G. Paoli* (R. Ist. tec. Arezzo), *F. Mariantoni* (R. Univer-

(*) Altre soluzioni furono inviate dai Sigg. *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico Bari), *G. Candido* (R. Liceo Lecce), *G. Fumanti* (R. Istituto tecnico Roma).

sità Roma), *A. Ognissanti* (R. Liceo Bari), *P. P. Rizzuti* (Ist. tec. Catanzaro), *G. Trapani* (R. Ist. nautico Catania).

Il sistema proposto proposto può scriversi:

$$A(x^2+y^2)+D(x+y)+Bxy+E=0,$$
$$A_1(x^2+y^2)+D_1(x+y)+B_1xy+E_1=0,$$

e poichè $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, esso può ancora trasformarsi in

$$[1]\ldots\left\{\begin{array}{l} A(x+y)^2+D(x+y)+(B-2A)xy+E=0 \\ A_1(x+y)^2+D_1(x+y)+(B_1-2A_1)xy+E_1=0. \end{array}\right.$$

Eliminando xy, si ottiene:

$$(AB_1-A_1B)(x+y)^2+\{(DB_1-D_1B)-2(DA_1-D_1A)\}(x+y)+$$
$$\{(EB_1-E_1B)-2(EA_1-E_1A)\}=0.$$

Quest'equazione, che combinata con una delle [1] dà luogo ad un sistema equivalente a quello dato, fornisce per $x+y$ due valori p_1, p_2, i quali sostituiti in una delle [1] dànno per xy i valori ad essi corrispondenti q_1, q_2. Chiamando adunque (z_1, z_2), (v_1, v_2), rispettivamente, le radici delle equazioni

$$z^2-p_1z+q_1=0, \qquad v^2-p_2v+q_2=0,$$

si hanno come soluzioni del proposto sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x=z_1 \\ y=z_2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=z_2 \\ y=z_1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=v_1 \\ y=v_2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=v_2 \\ y=v_1. \end{array}\right.$$

78'. *Dimostrare la regola: un numero è divisibile per 17 se lo è la somma algebrica dei prodotti che si formano scomponendo, cominciando da destra, il numero in periodi di quattro gruppi di due cifre ciascuno, e moltiplicando ordinatamente il numero di ciascun gruppo per 1, 2, 4, 8 con tal legge per i segni da avere, incominciando dal positivo, tre variazioni ed una permanenza.*

(B. Carrara).

Dimostrazione del Sig. *F. Mariantoni*, studente nella R. Università di Roma.

Le cifre del numero proposto, lette da destra verso sinistra, siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ed esprimiamo che questo numero è multiplo di 17 secondo m:

$$a_1+10a_2+10^2a_3+\ldots\ldots+10^{n-1}a_n=17m. \quad \ldots\ldots [1]$$

Ora supponiamo la condizione di divisibilità posta nella forma seguente:

$$A_1(a_1+10a_2)+A_2(a_3+10a_4)+A_3(a_5+10a_6)+\ldots=17m'. \quad [2]$$

ove i coefficienti A sono da determinarsi e dove la serie degli indici delle A stesse potrà spingersi fino ad $\frac{n}{2}$ o ad $\frac{n+1}{2}$ secondo che n è pari o dispari; in corrispondenza di questi due casi l'ultimo termine del primo membro della [2] potrà avere o il coefficiente $A_{n:2}$ o l'altro $A_{(n+1):2}$ e se le [1] e [2] sono come si suppone subordinate l'una a l'altra, e sussistono contemporaneamente, la differenza dei loro primi membri è multipla anch'essa di 17 secondo un intero m'', onde potremo scrivere:

$$\begin{aligned}(1-A_1)(a_1+10a_2)+(10^2-A_2)(a_3+10a_4)\\ +(10^4-A_3)(a_5+10_6)+\dots=17m''\end{aligned} \quad \dots\dots\dots [3]$$

Nella [3] l'ultimo termine del primo membro potrà avere una delle due forme seguenti:

$$(10^{n-2}-A_{n:2})(a_{n-1}+10a_n) \quad \text{od anche} \quad (10^{n-1}-A_{(n+1):2})\,a_n$$

secondo che n è pari o dispari, ma ciò non ha influenza sul ragionamento che faremo poichè in esso considereremo termini qualunque.

Intanto esaminando la [3] si vede che essa contiene implicitamente le seguenti condizioni:

$$\frac{1-A_1}{17}=x \text{ (intero)}, \quad \frac{10^2-A_2}{17}=x, \quad \frac{10^4-A_3}{17}=x, \dots\dots\dots$$

cioè $A_1, A_2, A_3, \dots\dots$ debbono essere rispettivamente uno qualunque dei resti di $\frac{1}{17}, \frac{10^2}{17}, \frac{10^4}{18} \dots\dots$ od anche di $\frac{1}{17}, \frac{100}{17}, \frac{100^2}{17} \dots\dots$

Ora ricordando (Baltzer: *Aritm. gener.* § 13, 20) che se a diviso pel modulo k dà un resto r, a^m diviso per k ha un resto r^m, e che dato r od r^m, tutti gli altri resti che si ottengono col modulo k nel primo o nel secondo caso, sono della forma generale $r \pm yk$, $r^m \pm yk$ ove y è un intero qualunque, potremo formare il seguente sistema:

$$\begin{array}{llllll}
\text{resti di } \frac{1}{17} & \text{ovvero valori di } A_1 & \text{sono} & 1 & \pm 17y \\
\text{»} \quad \text{»} \ \frac{100}{17} & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \ A_2 & \text{»} & -2 & \pm 17y \\
\text{»} \quad \text{»} \ \frac{100^2}{17} & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \ A_3 & \text{»} & (-2)^2 & \pm 17y \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\
\text{»} \quad \text{»} \ \frac{100^s}{17} & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \ A_{s+1} & \text{»} & (-2)^s & \pm 17y
\end{array}$$

i primi quattro dei quali per $y=0$, danno $A_1=1$, $A_2=-2$; $A_3=4$, $A_4=-8$.

Ora secondo il teorema i valori delle A debbono riprodursi periodicamente di quattro in quattro con segni opposti in due quaterne consecutive, e debbono essere in valore assoluto quelli ottenuti pel primo periodo, cioè 1, 2, 4, 8.

Riflettendo un poco sullo schema precedente si vede subito che affinchè A_s sia il primo coefficiente di una quaterna o *periodo*, esso dev'essere della forma $A_s=(-2)^{4m}\pm 17y$ ove m indica l'ordine di successione del periodo accresciuto di 1.

Pertanto due periodi consecutivi saranno adunque:

$$\begin{aligned} A_s &= (-2)^{4m} \pm 17y, & A_{s+1} &= (-2)^{4m+1} \pm 17y, \\ A_{s+2} &= (-2)^{4m+2} \pm 17y, & A_{s+3} &= (-2)^{4m+3} \pm 17y \end{aligned} \quad \ldots [\alpha]$$

$$\begin{aligned} A_{s+4} &= (-2)^{4m+4} \pm 17y, & A_{s+5} &= (-2)^{4m+4+1} \pm 17y, \\ A_{s+6} &= (-2)^{4m+4+2} \pm 17y, & A_{s+7} &= (-2)^{4m+4+3} \pm 17y \end{aligned} \quad . [\beta]$$

Supponiamo per fissare le idee che il periodo (α) sia di ordine pari, e quindi m sia dispari; allora vediamo se sono possibili i valori $A_s = 1$, $A_{s+1} = -2$, $A_{s+2} = 4$, $A_{s+3} = -8$. Essi sono possibili per m dispari, poichè le relazioni:

$$\begin{aligned} 16^m \pm 17y &= 1, & -2 \,.\, 16^m \pm 17y &= -2, \\ 4 \,.\, 16^m \pm 17y &= 4, & -8 \,.\, 16^m \pm 17y &= -8 \end{aligned}$$

sono soddisfatte per valori interi di y (Baltzer: *l. c.*).

Se nella stessa ipotesi consideriamo il periodo (β), per le stesse ragioni sono soddisfatte per valori interi di y le relazioni

$$\begin{aligned} 16^{m+1} \pm 17y &= -1, & -2 \,.\, 16^{m+1} \pm 17y &= 2, \\ 4 \,.\, 16^{m+1} \pm 17y &= -4, & -8 \,.\, 16^{m+1} \pm 17y &= 8 \end{aligned}$$

dunque nel caso di m pari i coefficienti A di due periodi consecutivi si succedono nel modo seguente:

$$1, \ -2, \ +4, \ -8, \ -1, \ +2, \ -4, \ +8 \ \ldots\ldots$$

Non offre ora difficoltà il provare che per m dispari quei segni sono mutati. Ma quel che abbiamo detto basta per provare completamente il teorema, poichè per il primo periodo $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ si hanno i valori $1, -2, 4, -8$ onde, in forza della dimostrazione precedente, pel secondo periodo deve aversi $A_5 = -1$, $A_6 = 2$, $A_7 = -4$, $A_8 = 8$, e pel terzo che è di ordine dispari dovranno ritornare i valori $1, -2, 4, -8$ e così di seguito.

79'. *Dimostrare: 1. che le perpendicolari condotte dai vertici di un triangolo a ciascuno dei lati, incontrandosi, determinano un esagono inscrittibile in un cerchio; 2. che gli angoli ed i lati opposti di questo esagono sono rispettivamente fra loro eguali; 3. che quest'esagono è equivalente al doppio del triangolo considerato.*

Questa proposizione può estendersi a qualunque triangolo?

(S. Gatti).

Dimostrazione del Sig. A. *Dal Buono Sidoli*, alunno del R. Istituto tecnico di Reggio Emilia (*).

(*) Dimostrazioni, sostanzialmente analoghe alla presente, vennero inviate dai Sigg. *M. Cunei* (alunno del R. Ist. tec. di Chieti), *C. Cesari* (R. Liceo Modena), *P. Marano* (studente privato a Catania), *F. Mariantoni* (R. Università Roma), *A. Perna* (R. Ist. tec. Napoli); altre dimostrazioni meno complete pervennero poi dai Sigg. *A. Baldassarre* (R. Ist. tec. Bari), *R. Catani* e *G. Fumanti* (R. Ist. tec. Roma), *G. Paoli* (R. Ist. tecnico Arezzo), *G. Trapani* (R. Ist. nautico Catania).

Sia ABC il triangolo dato che supporremo dapprima acutangolo; A', B', C' i punti di incontro delle perpendicolari condotte ai lati dai loro estremi e da bande tali che questi punti risultino rispettivamente interni agli angoli A, B, C.

Il quadrangolo $ABA'C$ è inscrittibile avendo due angoli opposti retti, quindi il cerchio circoscritto al triangolo dato passa per A' e similmente si dimostra che passa per B' e per C'.

Le diagonali AA', BB', CC' dell'esagono si intersecano nel centro O del cerchio e, per conseguenza, i lati opposti, p. es. AC' e $A'C$, sono eguali e sono pure eguali gli angoli opposti, p. es. $AB'C$, $A'BC'$, perchè iscritti in archi eguali.

Dalle equivalenze di triangoli:

$$\begin{array}{lll} AOC = AC'O, & BCO = BC'O, & ABO = AB'O, \\ CBO = CB'O, & BAO = BA'O, & CAO = CA'O, \end{array}$$

si ricava sommando:

$$2 \,.\, \text{triangolo } ABC = \text{esagono } AB'CA'BC'$$

Se, mantenendo fissi il lato AB e la direzione del lato AC del triangolo primitivo, si fa muovere C sulla circonferenza O verso A sinchè l'angolo C diventi retto, il punto B' si confonde al limite con A ed A' con B. L'esagono primitivo si riduce allora ad un rettangolo pel quale il teorema sussiste evidentemente.

Seguitando il punto C ad avvicinarsi ad A nella direzione primitiva di CA, il triangolo diventa ottusangolo in C e le perpendicolari condotte da C ai lati CA, CB incontrano quelle condotte dai punti A, B al lato AB dalla parte opposta di C rispetto ad AB. La figura $AB'CA'BC'$ è allora un esagono intrecciato pel quale sussistono le prime due parti del teorema e le equivalenze precedenti, con la stessa dimostrazione.

In quanto alla 3ª parte, se dalla somma della 1ª, 2ª, 4ª e 6ª equivalenza si tolgono la 3ª e la 5ª, si ha, riducendo:

$$2\Delta\ ABC = \text{parallelog } CYC'X - \text{triang } AB'X - \text{triang } A'BY$$

ove X e Y indicano i *nodi* del perimetro dell'esagono in cui si tagliano le coppie di lati AC', $B'C$; CA', $C'B$.

Osservazione. — Se c_1, c_2 .... sono i coefficienti delle singole caselle delle quali è costituito un poligono a perimetro intrecciato, ed A_1, A_2 .... le aree di queste, si definisce come *area* di quel poligono la somma algebrica:

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \ldots\ldots = \Sigma.$$

(V. Baltzer: *Plan.* § 9).

Nel caso nostro, percorrendo il poligono nel senso $AB'CA'BC'$ ed il triangolo dato nel senso ACB, i coefficienti dei triangoli $AB'X$, $A'BY$ sono eguali a -1 e quello del parallelogrammo $CYC'X$ è $+1$, quando si assumano come positive le rotazioni da sinistra a destra.

Possiamo dunque dire anche adesso:

$$2 \,.\, \text{triangolo } ACB = \text{esagono } AB'CA'BC'.$$

Il teorema proposto è dunque vero in generale.

Si dichiara inoltre ricevimento delle soluzioni seguenti: quistione **91***. dal Sig. *G. Calvitti, G. Candido, A. Dal Buono Sidoli, D. de Blasi, A. Gandolfi, S. Lopriore, P. Marano, A. Ognissanti, R. Palma, A Perna, E. G. Ricci, P. Taverna, G. Trapani;* **92***. *G. Bartoli, G. Calvitti, G. Candido, A. Ceci, A. Dal Buono Sidoli, D. de Blasi, A. di Bello, A. Gandolfi, S. Lopriore, L. Manfredonio, P. Marano, A. Ognissanti, A. Perna, E. G. Ricci, M. Salvadori, G. Santorelli, P. Taverna, G. Trapani;* **93***. *G. Calvitti, L. Catelli, A. Dal Buono Sidoli, A. Ognissanti, R. Palma, G. Trapani;* **94**. *S. Catania, F. Palatini;* **96**. *U. Scarpis;* **98.*** e **99***. *G. Ascoli, A. Dal Buono Sidoli, D. de Blasi, G. Floridia, S. Lopriore, L. Manfredonio, P. Marano, A. Ognissanti, E. G. Ricci, P. P. Rizzuti, P. Taverna, G. Trapani* — soluzioni alle quali verrà data evasione nei fascicoli venturi.

La Redazione.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

100. Dimostrare che, quando n tende all'infinito si ha

$$\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

101*. A quale relazione devono soddisfare i coefficienti a, b, c affinchè il polimonio $x^4+ax^3+bx^2+cx+m$ si possa mettere nella forma $\left(x^2+\frac{a}{2}x+p\right)^2$?

E, nell'ipotesi che quella relazione sia soddisfatta, risolvere la equazione

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0. \text{ (**)}$$

D. Besso.

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

(**) Un'equazione particolare di questa classe, cioè l'equazione

$$x^4+2x^3+3x^2+2x=81600$$

è stata risolta da *Luca Pacioli*.

102. Indicando col simbolo $\binom{h}{r}$ il numero delle combinazioni di h elementi presi r ad r, dimostrare che

$$\sum_{i=0}^{i=k} \binom{m+i}{m} = \binom{m+k+1}{m+1}$$

e farne applicazione a mostrare che

$$\sum_{i=0}^{i=k}(1+2+\ldots+i) = \binom{k+2}{3}, \quad \sum_{i=1}^{i=k} i^2 = \binom{k+2}{3} + \binom{k+3}{3}.$$

C. Marsengo Bastia.

103*. In un tetraedro, se i coseni delle facce d'un triedro sono proporzionali alle lunghezze degli spigoli opposti, le altezze del tetraedro passano per uno stesso punto: reciprocamente se le altezze d'un tetraedro passano per uno stesso punto, in ciascun triedro i coseni delle facce sono proporzionali agli spigoli opposti.

G. Riboni.

104*. Indicare la costruzione mediante la quale può dividersi un poligono convesso $ABCDE\ldots$ in parti proporzionali a più segmenti dati $m, n, p, \ldots$, in un verso assegnato, ad es. $ABC\ldots$, mediante segmenti uscenti da un punto O interno al poligono, a partire da un segmento OX che termina ad un punto X di un lato, ad es. AB.

A. Lugli.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

C. ARZELÀ. — *Trattato di Algebra elementare ad uso dei Licei.* 2ª edizione. — Firenze. Successori Le Monnier, 1891. Prezzo L. 4.

Lo scopo, che si propone quella parte della matematica elementare che ordinariamente si comprende sotto il nome di Algebra, è chiaramente indicato dall'A. nel primo paragrafo del capitolo primo. Tutta la tela del libro è magistralmente esposta in quelle poche pagine, e l'A., in tutta l'opera, non perdè mai di vista il problema fondamentale dell'Algebra che egli formula così: « non conoscendosi « il valore dei numeri sui quali si opera, non si può sapere quando una certa « operazione è possibile, e quando è impossibile, e così di una *espressione algebrica* « non si potrà sempre dire che essa abbia significato; a meno che, intorno ai

« valori da potersi attribuire alle lettere, che entrano in essa, non si facciano « le ipotesi e le restrizioni necessarie affinchè e le operazioni ivi indicate e « quelle altre, che possono essere occorse per pervenire alla data *espressione* e « delle quali in esse non è rimasta traccia, siano sempre possibili: la qual cosa « ognun vede quanto intralcerebbe i ragionamenti e quanto limiterebbe il significato delle espressioni algebriche.

« È dunque importante togliere le impossibilità di certe operazioni, che sopra « abbiamo messe in evidenza ».

Posto così il problema l'A. nelle varie parti del libro passa in rassegna tutte le operazioni che si possono fare sui numeri e, ogniqualvolta il risultato non è esprimibile con numeri appartenenti alla categoria di quelli sui quali si opera, introduce nuovi enti numerici pei quali stabilisce l'esistenza di tutti i concetti e di tutte le proprietà, che l'aritmetica attribuisce ai numeri ordinari. E siccome i nuovi numeri possono alla loro volta essere oggetto del calcolo, l'A. esplica come debbano intendersi le operazioni che vogliamo effettuare su di essi.

In seguito a ciò l'A. tratta prima di tutte operazioni e problemi che, come quello delle equazioni di 1° grado ad una e più incognite, e come quello delle disuguaglianze di 1° grado, non richieggono altra distinzione dei numeri, che quella di positivi e negativi. Poscia, venendo all'operazione di estrazione di radice, è mestieri estendere vieppiù il concetto di numero e l'A. si occupa di conseguenza dei numeri irrazionali ed immaginari. Per definire i primi egli si serve del concetto di limite di una grandezza variabile, che pone ogni cura di stabilire con precisione con esempi numerici e geometrici. E, per mezzo dei teoremi fondamentali sui limiti che dimostra con tutto il rigore possibile, dice come debbano intendersi tutte le operazioni sui numeri irrazionali, ai quali può così estendere con dimostrazioni rigorose tutti i corrispondenti teoremi, che già si sono visti valevoli per i numeri razionali. E poichè l'A. richiama i principali teoremi sulla misura delle grandezze, può considerare questi numeri non solo come enti astratti, ma altresì come veri rappresentanti dei valori di grandezze concrete. E questo, valendosi della rappresentazione dell'unità immaginaria su una direzione ortogonale a quella delle unità reali, gli permette di stabilire, anche per i numeri immaginari, quelle più semplici proprietà che sono indispensabili per poter sempre interpretare i valori delle radici di una equazione di 2° grado. Preparato così tutto il materiale, che può essere necessario, l'A. è in grado di trattare ciascuno degli argomenti dell'Algebra colla maggior generalità ed è così che la teoria delle proporzioni, delle equazioni di 2° grado, della funzione esponenziale e dei logaritmi, delle progressioni sono svolti con tutto il rigore desiderabile.

La teoria delle equazioni, come quella delle disuguaglianze, è fatta in modo, che essa si collega sempre col concetto fondamentale del libro; e ponendo, come base di essa, il concetto di funzione di una o più variabili, che l'A. stabilisce confortandolo con esempi opportunamente scelti dalla Geometria, vien fatta discendere dal problema di cercare il valore della variabile, o delle variabili per il quale la funzione acquista un determinato valore che sia maggiore o minore di un numero dato.

Anche la parte pratica del calcolo algebrico, della risoluzione e discussione dei problemi è trattata dell'A. con gran cura, e in modo da avviare i giovani a tutti gli artifizi, che possono semplificarne i procedimenti, e condurre più rapidamente e con maggior sicurezza al risultato. Così è notevole il modo con cui egli procede perchè, nel far sparire i divisori da una equazione, non vengano introdotte soluzioni estranee alla medesima.

Il libro termina con una nota sulla rappresentazione delle funzioni per mezzo di curve, ove in poche pagine il metodo cartesiano è esposto con eccezionale sobrietà e chiarezza, e, senza uscire dal campo elementare, è applicato alle funzioni di 1° e 2° grado, in modo da renderne facilissima l'intelligenza e, nello stesso tempo, in modo da dare una idea chiara e precisa della portata e dell'uso del metodo stesso.

Pregio principale di questo libro, di cui mi sono sforzato di dare un'idea è l'ordine logico, rigoroso e naturale, con cui le varie parti si collegano, dimodochè tutta la materia si svolge così in un tutto organico, retto da un' idea fondamentale, che lo guida dalla prima all'ultima pagina. Inoltre nell'ordine elementare l'A. segue lo stesso procedimento dell' analisi algebrica superiore, nello studio di ogni funzione, dimodochè i giovani, che proseguiranno negli studi matematici, non dovranno, nelle parti più elevate della scienza, trovarsi alle prese con concetti e metodo affatto nuovi.

Ora non mi resta che esprimere il desiderio che agli insegnanti dei Licei, ai quali il libro è destinato, sia dato modo di svolgere il loro insegnamento secondo gli intendimenti del chiarissimo autore. Ma questo non sarà possibile finchè si creda conveniente di proseguire col presente ordinamento, e nelle condizioni in cui attualmente è posto l'insegnamento della matematica nei nostri istituti classici.

Anche lo studio dell'Algebra può mirare, come ha detto il prof. Frattini nella Rivista bibliografica del fascicolo I, anno VI di questo Periodico a proposito di un libro d'Aritmetica (*), a due fini principali. Primo di questi, l'agile maneggio delle proprietà algoritmiche delle espressioni algebriche, l'altro, lo studio delle loro proprietà *chimiche* in quanto che esse possono rappresentare numeri nel significato più generale della parola. Il prof. Arzelà senza perdere di vista il primo di questi problemi dell'insegnamento algebrico elementare, imprimendo al suo libro un indirizzo altamente rigoroso e scientifico, dà pure un ampio svolgimento al secondo problema, quale non si trova in nessun trattato di Algebra elementare, e senza dubbio come meglio difficilmente si potrebbe fare.

Ma cogli ordinamenti attuali dei Licei è possibile raggiungere l'uno e l'altro scopo? Ai giovani, agli insegnanti, sono dati i mezzi di conseguirli? Con sole tre ore settimanali di lezione, possono con un tal indirizzo svolgere tutto il programma? È possibile ottenere sufficiente agilità nei calcoli, quando manca il tempo per opportuni esercizi, manca lo stimolo dell'esame scritto, manca spesso pel numero notevole di alunni, il modo di fare frequenti interrogazioni? D'altra

(*) Prof. S. Pincherle. — *Gli elementi dell'aritmetica ad uso delle scuole secondarie inferiori.* — Bologna, N. Zanichelli, 1891.

parte, finchè avremo un solo programma che deve servire indistintamente per i futuri medici, i futuri avvocati, i futuri naturalisti, i futuri ingegneri, i futuri matematici si potrà ragionevolmente da tutti pretendere uno studio dell'Algebra fatto con quella larghezza e con quel rigore di metodo con cui giustamente l'intende il chiarissimo prof. Arzelà?

E giacchè questa quistione non tocca i bilanci, speriamo che una buona volta si metta mano a dare alla nostra istruzione secondaria classica e tecnica un assetto definitivo, e più opportuno e conveniente per il buon andamento degli studi scientifici in generale e in particolare dei matematici, i quali, se non mi fa velo agli occhi, l'essere essi i miei preferiti, più degli altri hanno bisogno di urgente riforma.

Demetrio Valeri.

P. VISALLI e G. MANDES. — *Trattato di Algebra* ad uso degli alunni della R. Accademia navale, delle Scuole militari e secondarie. — Livorno, R. Giusti libraio-editore, 1890. Prezzo L. 3, 75.

Il libro, lungamente meditato, è armonico nell'insieme ed accurato nei particolari: preciso negli enunciati dei teoremi e delle regole, sobrio e rigoroso nelle dimostrazioni.

Leggendolo ci si sente qua e là come l'ispirazione di questo o quell'altro dei pregevoli trattati che corrono per le nostre scuole; cosa che forse non poteva evitarsi ma che, ad ogni modo, gli egregi A. non han tenuto a dissimulare. Pur non di rado ci s'imbatte in qualcosa d'originale e citerò ad esempio lo sviluppo ampio della teoria delle ineguaglianze ed inequazioni condotta simmetricamente a quella delle eguaglianze ed equazioni; e la teoria dei numeri irrazionali. In questa svolta col metodo del Dedekind, gli elementi della classe minore si suppongono disposti in ordine crescente e in ordine decrescente quelli della maggiore, e tra gli elementi delle due classi, chiamate perciò serie dagli A., è stabilita una corrispondenza univoca: il che toglie un pochino all'estetica del metodo, ma credo lo renda più accessibile all'intelligenza degli alunni. In questa teoria è corsa una svista, vero *lapsus calami*: come quoziente degl'irrazionali (A, A'), (B, B') è definito $\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}\right)$ invece di $\left(\frac{A}{B'}, \frac{A'}{B}\right)$.

Qualche appunto di lieve momento si potrebbe muovere al libro, ma non mette conto notarlo; il meno lieve mi sembra questo, che nell'introduzione del numero negativo gli A. hanno tentennato tra la via tenuta dal Bertrand nella sua Algebra, e quella tracciata dal Betti in una nota alla stessa; in vero dopo la definizione puramente formale: « Chiameremo numeri negativi gli ordinari « numeri dell'Aritmetica preceduti dal segno — », e la definizione, in conseguenza, dei positivi, si legge quanto segue: « Formeremo i numeri negativi con « la stessa legge con la quale si formano i positivi; cioè formeremo il nu—

« mero —2 contando un'*unità negativa* dopo un'altra unità negativa, ecc. » ; ora questa seconda parte non può riguardarsi, o io m'inganno, nè come chiosa nè come corollario della prima, ma presuppone la nozione del contare in doppio senso.

Chiude il volume una buona raccolta d'esercizi.

F. VIAGGI.

DOTT. OSKAR SCHLÖMILCH. — *Elementi di Geometria metrica*. – Parte I: L. 2,40. – Parte II: L. 2. – Parte III: L. 4. — Ditta G. B. Paravia e Comp., 1891.

Mentre non posso convenire nel giudizio espresso dagli egregi traduttori, nella prefazione alla prima parte, riguardo agli Elementi di matematica del Baltzer, che secondo essi sarebbero assolutamente inadatti qual libro di testo nelle scuole mezzane, chè anzi è doveroso debito di giustizia riconoscere essere i medesimi un'opera di gran lunga fuori del comune e che ha arrecato all'insegnamento secondario in Italia segnalati servizi, nuovo titolo di benemerenza, se ve ne fosse bisogno, per l'illustre suo traduttore, il Prof. Cremona, sono lieto per altro di poter francamente affermare che i signori Prof. D. Gambioli e V. Bernardi hanno fatto opera assai commendevole voltando nel nostro idioma la *Geometrie des Maasses* del Dott. Oskar Schlömilch, noto ed insigne redattore di molte opere didattiche e scienziato di fama non comune nelle discipline matematiche.

La Geometria della misura dello Schlömilch comprende tre parti: Planimetria – Trigonometria piana – Stereometria, Trigonometria sferica e Geometria descrittiva — che i traduttori hanno pubblicato in tre distinti volumi. Per ora mi limito a riferire sulla seconda parte che ha tratto alla trigonometria piana.

Carattere spiccato della medesima è quello di non dar corpo agli accessori delle diverse teoriche che contiene, raggiungendosi notabile brevità, pur nondimeno senza ommissione del necessario, ciò che accresce efficacia al libro, rendendolo specialmente utile alle nostre scuole causa la ristrettezza del tempo inerente allo sviluppo dei programmi. L'A. non parte dalla considerazione dei rapporti trigonometrici degli archi com'è fatto nella Trigonometria del Serret e seguaci, ma studia i medesimi prima per l'angolo supposto acuto, quindi per l'angolo ottuso o per qualsiasi altro angolo maggiore, valendosi della considerazione delle proiezioni principale e secondaria d'una retta, ciò che, a mio giudizio, ha il vantaggio di non snaturare l'argomento. Singolarmente felice è poi la sua trattazione quando mostra (§ 9) come possa effettuarsi il calcolo delle funzioni trigonometriche, in quanto col procedimento da lui seguito si entra in modo così piano, e senza il sussidio di cognizioni ulteriori, nel concetto delle approssimazioni che si ottengono pel seno e coseno di un piccolo angolo fino ad un certo limite, da rendere di facile intelligenza per gli alunni un soggetto che di per sè presenta rilevanti difficoltà.

Oltre allo sviluppo delle proprietà delle funzioni trigonometriche ed alle applicazioni di queste alla risoluzione del triangolo, ciò che forma l'oggetto dei capitoli 1. e 2., l'A. nel cap. 3. si occupa della risoluzione del quadrilatero qualunque e in particolare di quello inscrittibile, dei rapporti trigonometrici delle linee spezzate e delle formole fondamentali della poligonometria, che lo conducono alla determinazione dell'area dell'n^{gono}, e nel cap. 4. considera le più ovvie ed ordinarie applicazioni della trigonometria ai problemi geodetici. In appendice trovansi svolti poi un metodo diretto pel calcolo del seno e coseno di un angolo qualunque fondato sulle formole che danno la somma dei seni e coseni di n angoli in progressione aritmetica e sulla relazione:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^h + 2^h + \ldots + n^h}{n^{h+1}} = \frac{1}{h+1}$$

e conseguentemente la rettificazione grafica degli archi circolari, l'analisi di una costruzione appressimata dei poligoni regolari, finalmente la determinazione del poligono regolare di 17 lati.

Questo rispetto all'opera originale. Riguardo alla traduzione è da elogiare l'aggiunta fatta a ciascun capitolo in questa, come nella prima e terza parte, di una serie numerosa di variati esercizi e l'appendice dei traduttori nella quale si tratta della costruzione delle tavole dei logaritmi delle funzioni circolari, della riduzione a formole calcolabili con logaritmi di espressioni non monomie, sono dati esempi numerici di risoluzione dei triangoli, finalmente sono risolute alcune equazioni trigonometriche, argomenti tutti che fan parte degli ordinari programmi di trigonometria per le nostre scuole e nell'opera originale hanno sviluppo manchevole o nullo. Da segnalare nell'ultima appendice, per la sua grande utilità pratica, una tabella in cui son raccolti i valori dei 5 elementi di 12 differenti triangoli rettangoli e dei 6 spettanti a 12 triangoli obliquangoli.

Il mio giudizio non sarebbe peraltro completo ove passassi sotto silenzio un grave inconveniente, comune anche alla prima e terza parte, ossia i molteplici errori di stampa e talvolta l'imperfezione del periodo. Ora a me pare che se cosa di tale natura è grave per qualsiasi libro e qualunque sia l'argomento a cui si riferisce, più lo sia in un libro destinato a scolari i quali sempre dubbiosi di sè possono così esser tratti a false interpretazioni del soggetto che li interessa (*).

Terminerò col manifestare l'opinione che la Trigonometria piana dello Schlömilch, colle aggiunte arrecatevi dai signori traduttori, è un libro che si adatta assai bene come testo per lo studio di questa parte della matematica nei nostri Istituti tecnici.

A. Lugli.

(*) Per debito di giustizia debbo dichiarare che avendo confrontata la traduzione col testo tedesco, ho potuto verificare che diversi degli errori notati nelle formole esistono pure in questo.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico (*)

Bellacchi (G.) — *Lezioni di algebra elementare.* Vol. 3° - Parte II: Teoria delle equazioni. — Firenze, Tip. Barbèra, 1891. - Prezzo: L. 3.

Biffignandi (A.) — *Le principali proprietà delle grandezze proporzionali*, novamente esposte. — Acireale, Tip. V. Micale, 1891.

Carrozzini (A.) — Sette lezioni di trigonometria dal punto di vista delle coordinate cartesiane. — Lecce, R. Tip. Salentina, 1891. - Prezzo: L. 1,20.

Cesàro (E.) — Sul calcolo della dilatazione e della rotazione nei mezzi elastici. (Rend. R. Istituto Lom., 1891, Serie II, Vol. XXIV).

De Amicis (E.) — Introduzione alla teoria matematica della propagazione del calore (nei corpi solidi atermani). — Torino, E. Loescher, 1891. - Prezzo: L. 3.

de Longchamps (G.) — Sur les déterminants troués. (Journal de Mathématiques spéciales, Paris, 1891). = Intégration de l'équation de Brassine au moyen des fonctions hyper-bernoulliennes. (Association française pour l'avancement des Sciences, Congrès de Limoges, 1890).

de Kerbedz (E.) — *Sophie de Kowalevski.* (Rend. Cir. mat. Palermo, Tomo V, 1891).

Giudice (F.) — Dott. G. Petersen: *Teoria delle equazioni algebriche.* (Rivista di matematica. Anno I, 1891).

Gob (A.) — Sur quelques transformations des figures. (Association française pour l'avancement des Sciences, Congrès de Limoges, 1890).

Lazzeri (G.) e Bassani (A.) — *Elementi di geometria.* Libro di testo per la R. Accademia navale. — Livorno, R. Giusti edit.-lib., 1891. - Prezzo: L. 6.

Loria (G.) — Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati. (Bibl. math. di G. Eneström, Nou. Série, Vol. V, 1891).

Millosevich (E). — Sulle maree. (Neptunia, Anno I, 1891).

Palatini (F). — Sopra una trasformazione delle figure del piano in figure dello spazio a quattro dimensioni fondata sopra una corrispondenza univoca dei punti reali ed immaginari di R_2 coi punti reali di R_4. — Palmi, Tip. Lopresti, 1891.

Rosadi (O.) — *Compendio di aritmetica elementare*, corredato di oltre 1900 esercizi e problemi graduati. — Firenze, Tip. dei Minori corrigendi, 1891.

Thiry (C.) — Le troisième livre de Géométrie à l'usage de l'Enseignement moyen et de l'Enseignement normal. — Gand, Ad. Hoste. - Prix: fr. 1.

— — Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre. — Gand, Ad. Hoste. - Prix: fr. 2.

— — Distances des points remarquables du triangle. (Bullettins de l'Académie royale de Belgique, 1891).

(*) Per deficenza di spazio si rimanda al fascicolo venturo l'elenco delle pubblicazioni periodiche ricevute dalla chiusura del II fascicolo.

Chiusura della redazione il dì 24 maggio 1891.

SULL' INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA NEI LICEI

La recente pubblicazione di un nuovo trattato di geometria, quello dei sigg. Prof. Lazzeri e Bassani (*), mi suggerisce un'osservazione sul modo con cui si impartisce l'insegnamento della matematica nei nostri Licei. Già su questo giornale (Anno V, fasc. 2-3) il Prof. Valeri si occupò di tale questione, rilevando principalmente l'insufficienza del numero delle ore di fronte all'ampiezza del programma; io intendo qui considerarla sotto un altro punto di vista.

Il metodo di trattazione della geometria elementare, col quale svolgesi contemporaneamente la geometria piana e la solida, va prendendo sviluppo fra noi, giacchè dopo il trattato del De Paolis, che trapiantò fra noi l'idea altrove già nata, ne sono apparsi in Italia altri due (che io sappia), quello del Prof. Andriani e l'altro citato in principio, che hanno seguite le sue norme. Si discusse sul nome di fusione dato a questa contemporaneità dei due rami della geometria, e che realmente non è il più adatto, consistendo esso il più spesso in un ravvicinamento di teoremi simili nel piano e nello spazio; nonostante non si può negare che, sia o non sia fusione, essa presenta vantaggi non dubbi. Sarei dunque ben contento se, seguendo il consiglio dato dai miei ottimi amici Lazzeri e Bassani nella prefazione del loro libro, potessi nel mio insegnamento liceale adottare quella fusione. Ma faccio osservare ad essi che, come hanno detto poco prima nella stessa prefazione, tale fusione « a causa dei programmi restrittivi del Ministero della Pubblica Istruzione non ha ancora potuto essere attuata nei nostri licei » e che quindi il loro consiglio pur troppo non si può seguire.

O perchè non dev'essere possibile tentare nell'insegnamento classico officiale un metodo che da più d'uno è tanto caldamente raccomandato? Il guaio sta nei programmi, e sono appunto quelli che io propongo di modificare.

(*) G. Lazzeri e A. Bassani. — *Elementi di Geometria ecc.* — Livorno, Giusti, 1891.
Segnalo all'attenzione dei miei colleghi quest'opera scritta con serietà d'intendimenti e con lodevolissimo rigore. Dell'opera stessa il lettore troverà più oltre una recensione.

Se si pensa allo sconcio notato nella predetta prefazione, che cioè « i giovani del liceo arrivano al terzo anno senz'avere nessuna nozione « di geometria solida, mentre assai prima il professore di fisica e quello « di scienze naturali hanno bisogno di presupporre tali nozioni special- « mente nella cosmografia e nella cristallografia », si vede che, adottando nei licei la fusione delle due geometrie col mantenere la divisione dell'insegnamento in tre anni di studio, si scanserebbe il guaio accennato, per cadere forse nell'altro di veder trattate le teorie delle proporzioni, della similitudine e della misura in terzo corso, mentre occorrono certamente prima al professore di fisica. Io penserei che si potesse provvedere a tutto dividendo il corso di matematiche nei soli primi due anni di liceo, assegnando, ben inteso, ad essi tutte le 9 (*) ore che l'orario liceale dà alle matematiche. Sento già muovermi l'obiezione che l'insegnamento delle matematiche è così gravoso nel liceo, da non dover pensare a peggiorarlo condensandolo in un minor numero di anni; ma io rispondo che la mia riforma vorrei accompagnata da un'altra da cui mi riprometterei molto bene. Io credo (e non sono persona sospetta, come insegnante di matematiche) che l'attuale programma si possa alquanto ridurre per il maggior numero dei giovani del liceo, quelli che devono dedicarsi ad altri studi. Come me la pensa il Prof. Valeri (vedi articolo citato) e so che così la pensano altre persone autorevoli; certo è che meglio dell'attuale programma costretto a mala pena nelle 9 ore settimanali del liceo varrà un programma più modesto, ma svolto con cura nelle stesse ore. D'altra parte non può chi debba seguire all'Università i corsi di matematiche contentarsi della preparazione che oggigiorno riceve nel liceo, la quale è di per sè officialmente incompleta, e riesce incompletissima per il modo con cui è fatta a scolaresche generalmente avverse agli studi scientifici. Penso dunque che si potrebbe nei primi due anni di liceo impartire a tutti gli alunni un insegnamento di matematiche più breve dell'attuale, lasciando da parte la trigonometria tutta, in algebra i logaritmi e le progressioni e magari i numeri irrazionali, e restringendo la geometria al puro necessario.

(*) Mentre correggo le bozze di stampa apprendo con piacere che un'opportuna modificazione dell'On. Villari porta da 9 ad 11 le ore settimanali per le matematiche nei Licei.

L'esame di matematiche per la licenza si potrebbe dare al secondo anno (*), e nel terzo, per quei soli alunni che fossero destinati alle facoltà scientifiche dell'Università, si potrebbero completare gli insegnamenti propri dei corsi secondari, preparandoli a seguire con frutto le lezioni universitarie: il che non è possibile con l'attuale ordinamento, com'è universale lagnanza.

I giovani del terzo anno, che sarebbero certamente i migliori nelle scienze perchè destinati a quelli studi superiori che generalmente non s'impongono ma vengono scelti per inclinazione naturale, seguirebbero con prontezza nel suo corso il professore, e questi potrebbe con minore sforzo e maggior rapidità insegnare quel che ordinariamente richiede gran tempo e gran fatica e non dà frutto. Due o tre ore settimanali credo basterebbero allo scopo.

Con questa proposta l'intero insegnamento della geometria (ristretto nel modo indicato) si farebbe nei primi due anni di liceo. Ho detto *intero* perchè, secondo me, il primo libro d'Euclide (almeno così solo) non è al suo posto nel ginnasio superiore. Infatti i giovani che si trovano nel primo corso liceale provengono da diversi ginnasi e da istruzione privata, e si sono quindi preparati su testi differenti; o, se anche hanno studiato tutti sul medesimo libro, questo può non essere quello preferito dal professore di liceo. Ne viene, come osserva il Professor Valeri e come pur troppo fa il sottoscritto nel suo insegnamento, che il professore di liceo è costretto a ripetere anche il primo libro d'Euclide, perchè l'insegnamento sia dato con uniformità (**).

L'intero corso di geometria si potrebbe dividere in modo da assegnare parte della piana e parte della solida tanto in primo che in second'anno, talchè fosse possibile all'insegnante sia di tenere anno per anno il solito metodo della divisione della geometria piana dalla solida, sia di adottarne la fusione.

(*) se pure non fosse meglio adottare l'idea già espressa da altri (mi pare dal Prof. Mestica) di dare l'esame di licenza al secondo anno, dividendo il terz'anno in due, letterario e scientifico, a seconda dell'indirizzo degli studi universitari degli alunni.

(**) Quand'anche non ci fossero altre ragioni, mi pare che basterebbe a richiedere che venisse modificato il programma di Geometria nel ginnasio superiore il fatto che il primo libro di Euclide non contiene un complesso determinato e completo di teorie che possano stare da sè. Il nome augusto del Geometra greco non basta a rendere i suoi diversi libri di geometria adattabili uno per ogni anno d'insegnamento. L'inconveniente citato fa sì che i più dei professori, per non ingannarsi circa l'estensione da darsi all'insegnamento su un altro libro di testo, sono costretti a servirsi degli elementi d'Euclide, anche se non corrispondono ai loro desideri didattici; il professore di liceo che succede ad essi si trova pure imbarazzato da questa scelta già fatta.

Posto tang $60° = A$ e tang $20° = x$, l'equazione che dà x in funzione di A è (V. SERRET: *Trig.* Lib. 2°, § 71):

$$x^3 - 3Ax^2 - 3x + A = 0;$$

ma quest'equazione ha tre radici le quali oltre il valore di tang 20°, dànno anche i valori di tang 80° e tang 140° = — tang 40°, e si sa dall'Algebra che il prodotto di queste tre radici è uguale al termine noto cambiato di segno diviso pel coefficiente del primo termine, dunque:

$$\tan 20° \cdot \tan 80° \cdot \tan 40° = \tan 60°,$$

da cui

$$\tan 20° \cdot \cot 10° \cdot \tan 40° = \cot 30°$$

e finalmente

$$\tan 20° \cdot \tan 30° \cdot \tan 40° = \tan 10°, \qquad \text{c. d. d..}$$

Dimostrazione dei Sigg. *P. Marano* (studente privato a Catania), *C. Lavarella* (alunno del R. Istituto tecnico di Porto Maurizio), *A. Longo* (R. Liceo Acireale), *G. Trapani* (R. Ist. nautico Catania), *G. Calvitti, A. Ceci, A. Perna, G. Santorelli* (R. Ist. tec. Napoli).

Sviluppando tang 20° = tang (30° — 10°) e tang 40° = tang (30° + 10°) e sostituendo per tang 30° il suo valore $\frac{1}{\sqrt{3}}$, si ha:

$$\tan 20° = \frac{1 - \sqrt{3} \cdot \tan 10°}{\sqrt{3} + \tan 10°}; \quad \tan 40° = \frac{1 + \sqrt{3} \cdot \tan 10°}{\sqrt{3} - \tan 10°}.$$

Inoltre:

$$\tan 30° = \tan (3 \cdot 10°) = \frac{3 - \tan^2 10°}{1 - 3 \tan^2 10°} \cdot \tan 10°.$$

Moltiplicando membro a membro le tre ultime eguaglianze e riducendo si ha appunto

$$\tan 20° \cdot \tan 30° \cdot \tan 40° = \tan 10°.$$

82*. *Dimostrare che* log 2 (base 10) *è compreso fra* $\frac{3}{10}$ e $\frac{4}{13}$. *Trovare mediante queste limitazioni, il numero delle cifre della potenza* 64ª *di* 2.

(D. BESSO).

Soluzioni dei Sigg. *G. Calvitti, A. Ceci, A. Perna* (alunni del R. Istituto tecnico di Napoli), *A. Dal Buono Sidoli* (R. Ist. tec. Reggio Emilia), *G. Federici* (Ist. tec. Spezia), *A. Longo* (R. Liceo Acireale), *A. Ognissanti* (R. Liceo Bari).

Posto $\log 2 = x$, si ha: $10^x = 2$, con $x < 1$. Si potrà porre adunque $x = \frac{1}{y}$, dove $y > 1$, quindi:

$$10^{\frac{1}{y}} = 2, \qquad \text{ossia} \qquad 10 = 2^y.$$

Da qui risulta $3 < y < 4$, cioè $y = 3 + \frac{1}{z}$, dove $z > 1$.

Sostituendo ricavasi:

$$10 = 2^{3+\frac{1}{z}} = 8 \,.\, 2^{\frac{1}{z}}, \qquad \text{da cui:} \qquad 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^z$$

e perciò $3 < z < 4$.

Riassumendo si ha:

$$\frac{1}{3+\frac{1}{3}} < x < \frac{1}{3+\frac{1}{4}}$$

e riducendo:

$$\frac{3}{10} < x < \frac{4}{13}.$$

Moltiplicando i membri delle disuguaglianze precedenti per 64, risulta:

$$64 \,.\, \frac{3}{10} < 64x < 64 \,.\, \frac{4}{13}$$

o finalmente, poichè $64\,x = 64 \log 2 = \log 2^{64}$:

$$\frac{192}{10} < \log 2^{64} < \frac{256}{13}.$$

La parte intera di queste due frazioni essendo 19, tale sarà pure la parte intera di $\log 2^{64}$, ossia 2^{64} avrà 20 cifre.

83. *Dimostrare che, se* $\varphi_1, \varphi_2; \ldots\ldots \varphi_n$ *sono funzioni lineari a coefficienti interi delle* n *incognite* $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$; *e se le lettere* a, *le* b, *le* μ *e le* A *significano numeri interi, dei quali* μ_1 *è primo con* A_1, μ_2 *primo con* A_2, *ecc., il sistema delle* n *congruenze di 1° grado con* n *incognite*:

$$\begin{array}{l} a_1\,\varphi_1 \equiv b_1 - \mu_1\,x_1 \;(mod.\; A_1) \\ a_2\,\varphi_2 \equiv b_2 - \mu_2\,x_2 \;(mod.\; A_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\,\varphi_n \equiv b_n - \mu_n\,x_n \;(mod.\; A_n) \end{array}$$

è sempre risolubile quando una potenza di a_1 *sia divisibile per* A_1; *una potenza di* a_2 *sia divisibile per* A_2; *e via così.* (G. Frattini).

Dimostrazione del Sig. Prof. *U. Scarpis.*

Supponiamo dimostrato il teorema pel caso di $n-1$ congruenze con $n-1$ incognite e dimostriamo che esso pure sussiste per n congruenze con altrettante incognite.

Ponendo

$$\varphi_1 = \alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \ldots\ldots + \alpha_n' x_n + \alpha_{n+1}',$$

la prima congruenza del sistema proposto diventa:

$$\left(a_1\,\alpha_1' + \mu_1\right) x_1 + a_1 \left(\alpha_2' x_2 + \ldots . + \alpha_n' x\right) \equiv b_1 - a_1\,\alpha_{n+1}' \;(\text{mod.}\; A_1) \;[1].$$

Poichè per ipotesi esiste un potenza di a_1 che è divisibile per A_1, a_1 sarà divisibile per tutti i fattori primi che compongono A_1; essendo inoltre μ_1 primo con A_1 il coefficiente $(a_1\alpha_1' + \mu_1)$ sarà primo con A_1 e quindi la [1] si potrà sempre risolvere rispetto ad x_1 qualunque sieno i valori che si possono attribuire ad $x_1, x_2, \ldots x_n$. Avremo allora, indicando con $\varphi(A_1)$ quanti sono i numeri inferiori ad A_1 e primi con A_1, la seguente espressione per x_1:

$$x_1 = \left\{ b_1 - a_1 \alpha_{n+1}' - a_1 \left(\alpha_2' x_2 + \ldots + \alpha_n' x_n\right)\right\} \left(a_1 \alpha_1' + \mu_1\right)^{\varphi(A_1)-1}$$

la quale per semplicità si può porre nella forma:

$$x_1 = B_2 x_2 + B_3 x_3 + \ldots + B_n x_n + B_{n+1}$$

essendo $B_2, B_3, \ldots B_{n+1}$ numeri interi.

Sostituendo ora tale espressione di x_1 nelle successive congruenze si ottiene il sistema di $n-1$ congruenze con $n-1$ variabili:

$$\begin{aligned} a_2 \psi_1 &\equiv b_2 - \mu_2 x_2 \pmod{A_2} \\ a_3 \psi_2 &\equiv b_3 - \mu_3 x_3 \pmod{A_3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n \psi_{n-1} &\equiv b_n - \mu_n x_n \pmod{A_n} \end{aligned}$$

nel quale $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{n-1}$ rappresentano funzioni lineari a coefficienti interi di $x_2, x_3, \ldots x_n$, il quale sistema essendo simile al dato è per ipotesi risolubile. Risolto quest'ultimo sistema e determinati così i valori di $x_2, x_3, \ldots x_n$ ne ricaveremo subito il valore di x_1, e quindi sarà così risolto anche il proposto.

Consideriamo ora il sistema:

$$\begin{aligned} a_1\left(\alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \alpha_3'\right) &\equiv b_1 - \mu_1 x_1 \pmod{A_1} \\ a_2\left(\alpha_1'' x_1 + \alpha_2'' x_2 + \alpha_3''\right) &\equiv b_2 - \mu_2 x_2 \pmod{A_2} \end{aligned}$$

e dimostriamo che esso è solubile nell'ipotesi che una potenza di a_1 sia divisibile per A_1, una potenza di a_2 sia divisibile per A_2 e che μ_1, μ_2 sieno rispettivamente primi con A_1, A_2. Infatti dalla prima congruenza si ha:

$$x_1 = \left(b_1 - a_1 \alpha_3' - a_1 \alpha_2' x_2\right) \left(a_1 \alpha_1' + \mu_1\right)^{\varphi(A_1)-1} = B_2 x_2 + B_3$$

e sostituendo nella seconda:

$$\left(a_2 \alpha_1'' B_2 + a_2 \alpha_2'' + \mu_2\right) x_2 \equiv b_2 - a_2 \alpha_3'' - a_2 \alpha_1'' B_3 \pmod{A_2}$$

ed essendo il coefficiente di x_2 primo con A_2 in quanto che a_2 è divisibile per tutti i fattori primi di A_2, e μ_2 primo con A_2, quest'ultima congruenza è sempre solubile e ci somministrerà il valore di x_2 dal quale ricaveremo poi quello di x_1. Essendo quindi solubile un tale sistema di due congruenze con due variabili, sarà pure solubile, per quanto abbiamo da principio dimostrato, un sistema di tre congruenze con tre variabili e così di seguito.

85. *Determinare i numeri di due cifre tali che i loro valori siano multipli del prodotto delle loro rispettive cifre.* (S. Gatti).

Soluzione del Sig. Prof. *F. Viaggi.*

Sia x la cifra delle decine ed y quella delle unità d'un numero; si vuole determinare x, y in modo che

$$\frac{10}{y} + \frac{1}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [\alpha]$$

sia numero intero.

Si tenga presente che la somma di due frazioni irreducibili non può essere numero intero, se le frazioni non hanno lo stesso denominatore.

Ciò posto possiamo fare tre ipotesi su y, che è < 10:

1ª: y primo con 10, quindi $y = x$, e la $[\alpha]$ diventa

$$\frac{11}{x}$$

che non può essere intero se non quando è $x = 1, = 11$, donde $y = 1, = 11$; la seconda soluzione è da rifiutare;

2ª: y è divisibile per 2, quindi $y = 2x$, e la $[\alpha]$ diventa

$$\frac{6}{x}$$

che è intero per $x = 1, = 2, = 3, = 6$, donde è $y = 2, = 4, = 6, = 12$; la quarta soluzione è da rifiutare;

3ª: y è divisibile per 5, quindi $y = 5x$, e la $[\alpha]$ diventa

$$\frac{3}{x}$$

che non può essere intero se non quando è $x = 1, = 3$, donde $y = 5, = 15$; la seconda soluzione è da rifiutare.

Riassumendo: 11, 12, 24, 36, 15 sono i numeri domandati (*).

86*. *Dimostrare che esistono due soli triangoli isosceli, tali che il punto medio della retta che congiunge il vertice del triangolo col punto di concorso delle altezze, e i piedi delle medesime, sono i vertici d'un quadrato.*

(G. Russo).

Soluzione dei Sigg. *A. Perna, A. de Falco* alunni del R. Istituto tecnico di Napoli.

Sia il triangolo ABC isoscele per avere eguali i lati AB, AC; sieno AA', BB', CC' le altezze, O il loro punto d'incontro, M il punto medio di OA.

(*) Altre soluzioni pervennero dai Sigg. Prof. *S. Catania, F. Palatini, G. Riboni, G. Russo,* e dagli alunni *G. Calvitti, A. Cesi, A. Perna* (R. Ist. tec. Napoli).

Risponderemo alla quistione, dimostrando che la condizione necessaria e sufficiente affinchè il quadrilatero $MC'A'B'$ sia un quadrato è che l'angolo BAC sia $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$ di angolo retto.

Tale condizione è necessaria. In effetti, supponiamo che $MC'A'B'$ sia quadrato. L'angolo BAC non può essere retto, giacchè altrimenti i punti B', C', O, M si confonderebbero con A, e non potrebbe esistere il quadrato. Esso angolo dunque è o acuto, od ottuso. Nel caso che sia acuto, MB', come mediana dell'ipotenusa nel triangolo rettangolo $AB'O$ è uguale ad MA, dunque il triangolo MAB' è isoscele, e l'angolo MAB' è metà dell'angolo esterno OMB', cioè è $\frac{1}{4}$ di retto, quindi l'angolo BAC doppio di MAB' è $\frac{1}{2}$ retto. Nel caso che BAC sia ottuso la stessa dimostrazione prova che l'angolo $B'OC'$ è $\frac{1}{2}$ retto, quindi: $BAC = B'AC' = 2$ retti $- B'OC' = \frac{3}{2}$ di retto.

La condizione è sufficiente. Infatti sia $BAC = \frac{1}{2}$ retto, l'angolo OMB' risulta anch'esso $\frac{1}{2}$ retto, e quindi $C'MB'$ è retto. Nel triangolo rettangolo $BB'C$ la mediana $A'B'$ dell'ipotenusa è uguale ad $A'C$, quindi il triangolo $A'B'C$ è isoscele, e avendo un angolo alla base di comune con ABC è ad esso equiangolo, perciò l'angolo $B'A'C = BAC = \frac{1}{2}$ retto, quindi $MA'B'$, complemento di $B'A'C$ è anch'esso $\frac{1}{2}$ retto, perciò nel triangolo $B'A'M$ si ha: $B'A' = B'M$. Similmente si dimostra $C'A' = C'M$; d'altra parte $C'M = B'M$, perchè ambedue eguali ad MA, dunque il quadrilatero $MB'A'C'$ è equilatero, ed avendo un angolo retto è quadrato. Se si suppone l'angolo $BAC = \frac{3}{2}$ di retto nel triangolo BOC del pari isoscele, l'angolo $BOC = \frac{1}{2}$ retto, ed il quadrilatero $MB'C'A'$ è quadrato.

Così resta provato interamente l'enunciato (*).

87*. *Si assegnino in modo generale i due limiti del numero delle cifre del quoziente di* a b c .... l *per* a' b' c' .... l', n *ed* n' *essendo il numero dei fattori di ciascun prodotto,* α, β, γ .... λ *ed* α', β', γ' .... λ' *i numeri delle cifre dei differenti fattori.*

(B. Carrara).

(*) Hanno risoluto la medesima quistione i Sigg. *A. Baldassarre* (alunno del R. Ist. tec. Bari), *G. Calvitti*, *A. Ceci*, *E. La Pianza*, *P. Viscidi* (R. Ist. tec. Napoli), *C. Chigiotti* (R. Ist. tec. Chieti), *A. Dal Buono Sidoli* (R. Ist. tec Reggio Emilia), *C. Ghelli* (R. Liceo Sinigallia), *E. Goti* e *G. Paoli* (R. Ist. tecnico Arezzo, *A. Longo* (R. Liceo Acireale), *P. Marano* (studente privato a Catania), *A. Ognissanti* (R. Liceo Bari).

Soluzione del Sig. *M. Appugliese*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti.

Pongo per semplicità

$$\alpha + \beta + \ldots\ldots + \lambda = \sigma, \qquad \alpha' + \beta' + \ldots\ldots + \lambda' = \sigma'.$$

Il più piccolo numero di α cifre è l'unità seguita da $\alpha - 1$ zeri, il più grande è formato da α cifre uguali a 9; quindi un numero qualunque di α cifre è uguale o maggiore di $10^{\alpha-1}$, eguale o minore di $10^{\alpha} - 1$; perciò possiamo scrivere le disuguaglianze

$$10^{\alpha} > a \geqq 10^{\alpha-1}, \quad 10^{\beta} > b \geqq 10^{\beta-1}, \quad \ldots\ldots \quad 10^{\lambda} > l \geqq 10^{\lambda-1},$$

dalle quali, moltiplicando membro a membro, deducesi la limitazione

$$10^{\sigma} > a\,b\,c \ldots\ldots l \geqq 10^{\sigma-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

In guisa analoga si ottiene l'altra limitazione

$$10^{\sigma'-n'} \leqq a'\,b'\,c' \ldots\ldots l' < 10^{\sigma'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [2]$$

Se si divide membro a membro la limitazione [1] per la [2], si ha l'altra

$$10^{\sigma-\sigma'+n'} > \frac{a\ b\ c \ldots\ldots l}{a'b'c' \ldots\ldots l'} > 10^{\sigma-\sigma'-n}$$

quindi il numero delle cifre della parte intera di $\dfrac{a\,b\,c \ldots\ldots l}{a'\,b'\,c' \ldots\ldots l'}$ non potrà essere minore di $\sigma - \sigma' - n + 1$, nè superiore di $\sigma - \sigma' + n'$: ossia non potrà essere minore di

$$(\alpha + \beta + \ldots\ldots + \lambda) - (\alpha' + \beta' + \ldots\ldots + \lambda') - n + 1$$

nè maggiore di

$$(\alpha + \beta + \ldots\ldots + \lambda) - (\alpha' + \beta' + \ldots\ldots + \lambda') + n'.$$

Con qualche esempio numerico è agevole mostrare che sia l'uno, sia l'altro limite può essere raggiunto: così con l'aiuto dei logaritmi si trova che $\dfrac{9999^7}{10^7}$ ha nella parte intera 21 cifre, e $\dfrac{100000^7}{9999^7}$ ne ha 8 (*).

88*. *In un cerchio di raggio* R *si tiri un diametro* AB, *sul quale si prenda un punto* H *in modo che sia* $HA = \dfrac{1}{3} AB$. *Da* H *si conduca la corda* CD *perpendicolare ad* AB, *e dal punto medio* G *di* HD *tirisi la corda* EF *perpendicolare a* CD. *Calcolare le diagonali e l'area del quadrangolo convesso* CEDF, *e dimostrare che i lati* FC, ED *sono i cateti d'un triangolo rettangolo di cui l'ipotenusa è il diametro.* (S. Catania).

(*) Soluzioni sostanzialmente analoghe pervennero dai Sigg. *A. Baldassarre* alunno del R. Istituto tecnico Bari), *A. Ceci* e *A. Perna* R. Istituto tecnico Napoli), *A. Longo* (R. Liceo Acireale).

Soluzione del Sig. *N. Bottini*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti.

La corda CD è divisa per metà in H dal diametro perpendicolare AB e CH è cateto del triangolo rettangolo CHO (O centro del cerchio), di cui la ipotenusa ed un cateto sono misurate da R ed $\frac{R}{3}$, quindi

$$CD = 2 \, . \, CH = 2 \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3} R.$$

Il segmento HG, quarta parte di CD, è misurato da $\frac{\sqrt{2}}{3} R$; esso rappresenta la distanza fra il diametro AB e la corda EF, e quindi anche la distanza della corda dal centro, perciò

$$EF = 2\sqrt{R^2 - \overline{HG}^2} = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3} R\right)^2} = \frac{2\sqrt{7}}{3} R.$$

Poichè le due diagonali del quadrangolo sono perpendicolari fra loro, l'area del quadrangolo è uguale al semiprodotto di queste due diagonali, ossia

$$CEDF = \frac{1}{2} CD \times EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} R \, . \, \frac{2\sqrt{7}}{3} R = \frac{4\sqrt{14}}{9} R^2.$$

Dal punto E tiriamo la parallela a CD, che incontri di nuovo in S la circonferenza; l'angolo FES è retto e però SF è un diametro.

Il triangolo rettangolo FCS, che ha l'ipotenusa eguale al diametro e per cateto CF un lato del quadrangolo, ha il secondo cateto SC eguale al lato ED: infatti, le corde SC, ED sottendono archi eguali come quelli che sono compresi fra corde parallele (*).

89. *Dimostrare la disuguaglianza*

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right\} > \left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} - 1\right) + \left(\sqrt[n+1]{\frac{n+2}{n+1}} - 1\right) + \ldots\ldots > \frac{1}{n}.$$

(F. GIUDICE).

Dimostrazioni identiche dai Sigg. Prof. *F. Viaggi* e *G. Riboni*.

Dalla nota identità

$$a - 1 = \frac{a^m - 1}{a^{m-1} + a^{m-2} + \ldots.. + a + 1}$$

(*) Mandarono soluzioni di questa questione anche i Sigg. *A. Baldassarre* (alunno del R. Ist. tec. Bari); *G. Calvitti*, *A. Ceci*, *E. La Fianza*, *A. Perna*, *T. Rebollo*, *O. Scilla*, *P. Viscidi* (alunni del R. Ist. tec. Napoli); *A. Dal Buono Sidoli* (R. Ist. tec. Reggio Emilia); *A. Gandolfi* (R. Ist. tec. Piacenza); *E. Goti*, *A. Mucci*, *G. Paoli* (R. Ist. tec. Arezzo; *N. Leo* e *G. Rocchetti* (R. Ist. tec. Foggia); *A. Ognissanti* (R. Liceo Bari), *P. Marano* (studente privato a Catania); *D. Taverna* (R. Liceo Catanzaro); *G. Trapani* (R. Ist. nautico Catania).

si deducono, nell'ipotesi $a > 1$, le disuguaglianze

$$a - 1 < \frac{a^m - 1}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\alpha]$$

$$a - 1 > \frac{a^m - 1}{m a^{m-1}} > \frac{a^m - 1}{m a^m} \ldots\ldots\ldots\ldots [\beta]$$

Dalla [α], ponendo $a = \sqrt[m]{\frac{m+1}{m}}$, si ottiene

$$\sqrt[m]{\frac{m+1}{m}} - 1 < \frac{1}{m^2} < \frac{1}{m^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1}\right)$$

e da questa ponendo $m = n,\ n+1, \ldots\ldots, n+h$, e addizionando

$$\left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} - 1\right) + \left(\sqrt[n+1]{\frac{n+2}{n+1}} - 1\right) + \ldots\ldots < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+h} - \frac{1}{n+h+1}\right)$$
$$< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$$

e così è dimostrata la 1ª disuguaglianza.

Dalla [β] ponendo pure $a = \sqrt[m]{\frac{m+1}{m}}$, si deduce

$$\sqrt[m]{\frac{m+1}{m}} - 1 > \frac{1}{m\,(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

e quindi

$$\sqrt[m]{\frac{m+1}{m}} - 1 = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \varepsilon$$

e da questa ponendo successivamente $m = n,\ n+1, \ldots\ldots, n+h$, si deduce

$$\left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} - 1\right) + \left(\sqrt[n+1]{\frac{n+2}{n+1}} - 1\right) + \ldots + \left(\sqrt[n+h]{\frac{n+h+1}{n+h}} - 1\right) > \frac{1}{n} - \frac{1}{n+h+1} + \varepsilon :$$

ora col crescere di h verrà momento in cui $\frac{1}{n+h+1} < \varepsilon$, e quindi è dimostrata la seconda diseguaglianza.

90*. *Se* A, B, C, D, E *sono punti d'una circonferenza e con centri rispettivamente in* B, C, D, E *e raggi* BA, CA, DA, EA *si descrivano altrettante circonferenze, dimostrare che i punti in cui queste s'intersecano sono tre a tre in linea retta.*

(A. Lugli).

Dimostrazione del Sig. *L. Pece*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti.

Le sei intersezioni sono i vertici di un quadrilatero completo.

Per dimostrare ciò, considero tre delle circonferenze costruite, quelle p. es. che hanno i centri in B, C, D; esse, che già passano per A, s'incontrano a due a due di nuovo in altri tre punti, che sono simmetrici di A rispetto ai lati del triangolo BCD: tali punti sono per diritto, perchè i punti medi dei segmenti che li congiungono con A, in virtù del teorema di Simson (Cfr. Baltzer: *Plan.* § 4, 8), sono in linea retta (*).

Dimostrazione dei Sigg. *A. Ceci* e *G. Calvitti*, alunni del R. Istituto tecnico di Napoli.

Siano F, G, H rispettivamente gli ulteriori punti d'incontro delle coppie di circonferenze (BA, CA), (BA, DA), (CA, DA). In virtù del teorema sull'angolo inscritto, e poichè F ed H sono simmetrici ad A rispetto a BC e CD ordinatamente, gli angoli AGF, AGH sono eguali agli angoli esterni del quadrilatero inscritto $ABCD$, aventi rispettivamente per vertici B, D; quindi quelli come questi sono supplementari e i punti F, G, H stanno per diritto, il che prova il teorema enunciato.

Il Sig. *A. Ognissanti* (R. Liceo Bari), che inviò pure una dimostrazione del quesito, osserva che: In generale se si prendono n punti su una circonferenza e si descrivono, con centri in questi punti, uno eccettuato, $n-1$ circonferenze con raggi eguali alle rispettive loro distanze da questo, i punti d'intersezione delle circonferenze ultime, presi tre a tre sono in tante rette la cui totalità è $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}$.

Si dichiara inoltre ricevimento delle soluzioni seguenti: questione **91***, **92***, **93***, **98*** e **99***. dal Sig. *A. Baldassarre*; **94**. *S. Catania, F. Palatini*; **96** e **97**. *U. Scarpis*; **100**. *F. Mariantoni*; **101***. *A. Baldassarre, G. Candido, A. Dal Buono Sidoli, P. Marano*; **102**. *G. Bernardi, L. Bosi, S. Catania, F. Mariantoni, M. Martone*; **103*** e **104***. *G. Trapani* — soluzioni alle quali verrà data evasione nei fascicoli venturi.

La Redazione.

(*) Soluzioni sostanzialmente analoghe pervennero dai Sigg. *C. Lararello* (alunno del R. Ist. tec. di Porto Maurizio), *A. Longo* (R. Liceo Acireale), *C. Margreth* (R. Ist. tec. Reggio Emilia).

QUISTIONI PROPOSTE (*)

105. Determinare i triangoli ciascuno dei quali soddisfi alle seguenti condizioni: un vertice cada in un punto dato, i due vertici rimanenti cadano in due date rette, uno per ciascuna, e l'ortocentro sia un punto assegnato.

S. CATANIA.

106*. Dimostrare che se a, b sono due interi qualunque primi tra loro ed n è pure un intero primo con a, le due serie

$$\begin{array}{ccccc} a+b, & 2a+b, & 3a+b, & \ldots\ldots, & na+b \\ 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots, & n \end{array}$$

contengono lo stesso numero di termini primi con n.

U. SCARPIS.

107*. Se n è una potenza intera di 2 se cioè $n=2^k$, la somma delle prime n potenze di un numero qualsivoglia a, la potenza zero inclusavi, è data dal prodotto dei k fattori

$$(1+a)(1+a^2)(1+a^{2^2})(1+a^{2^3})\ldots\ldots(1+a^{2^{k-1}}).$$

F. P. PATERNÒ.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

G. LAZZERI e A. BASSANI Professori nella R. Accademia Navale. – *Elementi di Geometria.* – Libro di testo per la R. Accademia Navale. — Livorno. Tip. di R. Giusti, 1891.

1. Ecco un libro ben fatto. Sebbene gli autori lo presentino come testo per la R. Accademia Navale, nonostante io credo che gli sarà fatto buon viso anche in altre scuole, e stimo quindi non inutile il dirne qualche parola in questo periodico destinato all'insegnamento secondario.

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

Liberi gli autori di seguire l'ordine delle materie da essi preferito, e incoraggiati, come essi dicono, dall'esperienza di 4 anni d'insegnamento, hanno (e con ragione) scelta la trattazione simultanea della geometria piana con la solida; le linee generali del libro sono quindi naturalmente quelle stesse del magistrale lavoro del De Paolis, le più razionali, a mio credere, e le più logiche, accettato che sia quel metodo. Dicendo così non voglio accusare gli autori di mancanza di originalità; e d'altronde un libro di testo per essere stimato non occorre che sia un'accolta di cose nuove, bastando che in esso siano accettate le buone idee di altri e messe a frutto migliorandole, perchè lo si debba ritenere un lavoro interessante. Nell'opera dei professori Lazzeri e Bassani si trova questo e meglio ancora, alcune sue parti avendo realmente impronta di originalità; essa è dunque di un'importanza non ordinaria.

I pregi di questo lavoro si avvertono facilmente. I postulati sono stati scelti con maggior cura che altrove e minore è il numero di quelli tacitamente ammessi; la fusione della geometria piana con la solida è più intima che nei libri consimili; e finalmente la teoria delle proporzioni è resa più facile col trattarla dal punto di vista aritmetico, che, come dicono gli autori stessi, è l'unico che ne riveli l'essenza.

Poichè sono queste le caratteristiche più salienti del libro, mi si permetta di intrattenermivi un poco.

Dei postulati già ho detto come siano stati scelti con cura: per altro è d'uopo aggiungere che quelli citati non sono tutti i necessari, e che alcuni di essi si appoggiano a parole il cui significato, non esplicitamente definito, deve tacitamente essere attinto all'esperienza. Ne faremo forse un grave carico agli egregi autori? Chiunque per poco abbia meditato sui fondamenti della geometria capirà come, su tale argomento, la perfezione sia davvero un ideale, tanto più quando un libro è destinato alle scuole, dove mille esigenze impongono limiti assai ristretti. Del resto gli autori stessi non pretendono (è una loro frase), « di aver detto l'ultima parola su questa questione »; ed io credo che l'ultima parola potrà dirsi solamente dopo che sia stato dimostrato quali sono i postulati scientificamente necessari e sufficienti per svolgere l'intera geometria elementare, questione che, se studiata già con amore (*), non può dirsi ancora completamente risoluta. Tolta questa sicura base scientifica, s'intende come la scelta dei postulati assuma carattere pratico, e dipenda dalla natura dell'insegnamento e dall'indole dei giovani a cui questo è rivolto. I postulati scelti dai nostri autori mi sembrano prestarsi assai bene ad una facile intuizione da parte degli scolari; essi non presentano quell'eccessiva minuziosità, la quale nelle scuole medie va sempre scansata anche, io credo, a spese di un po' di rigore, trattandosi di un tale argomento.

Quanto alla fusione della geometria piana con la solida, stimo inutile mostrarne i vantaggi: se non foss'altro, l'autorità delle persone che l'hanno accolta e diffusa e l'asserzione di chi ha potuto farne prova nell'insegnamento, devono togliere ogni dubbio anche a coloro che, per rigore di regolamenti e di pro-

(*) V. p. es. i lavori di PASCH, PEANO.

grammi, non l'hanno potuta giudicare nella scuola. Gli autori si sono studiati di cavare da questa fusione il massimo frutto, ed hanno realmente ottenuto qualche notevole risultato nuovo: cito, come un esempio, il teorema del § 144, nel quale le considerazioni stereometriche permettono di fare a meno della teoria delle proporzioni.

Non bisogna nascondere per altro che questa fusione della geometria piana colla solida consiste spesso unicamente in un ravvicinamento di teoremi simili nel piano e nello spazio; in tal caso, invece di costituire un vero passo dal punto di vista scientifico, non è che un artifizio didattico, col quale per altro si abbrevia il tempo e la fatica, lasciando tracce più profonde nella mente dei giovani e dando alla trattazione un certo aspetto di eleganza. I nostri autori ne hanno opportunamente profittato unendo addirittura i teoremi analoghi per il piano e per lo spazio e dando loro un enunciato unico: ma devo dire che qualche volta si sono lasciati trascinare da questo desiderio, dirò così, di condensazione, unendo teoremi che per loro natura sono alquanto differenti. Cito per esempio il § 189 relativo ai punti comuni a due circonferenze o a due superficie sferiche, nel quale l'analogia fra i due punti e la circonferenza comuni mi sembra un po' artificiosa.

Un'innovazione del libro in questione o, per dir meglio, una cosa che lo distingue dai trattati che intendono informarsi al metodo euclideo, sta nell'avervi esposte le proporzioni col metodo aritmetico.

Gli autori spiegano nella prefazione perchè si siano attenuti a questo. Per essi le proporzioni dipendono essenzialmente dal concetto di numero, ed i risultati possono essere espressi completamente solo con l'idea di rapporto, che trae seco quella del numero. È un fatto che se si potessero trattare le proporzioni con mezzi puramente geometrici, spogliandole dalla difficoltà di cui le circonda Euclide e mettendone a nudo l'essenza, sarebbe preferibile svolgerle con un tal metodo, innegabilmente più educativo dell'altro. Ma è un fatto altresì, che allo stato attuale della geometria e nonostante le semplificazioni che i moderni hanno portato alla definizione d'Euclide (p. es. De Paolis, Faifofer) gli alunni male si fanno un'idea del fatto geometrico a cui alludono le proporzioni; e di più rimane così gravoso lo svolgimento della loro teoria, da obbligare spesso l'insegnante (si ritenga pur questa una confessione di chi scrive) a passar sopra alle dimostrazioni dei teoremi più complicati. Trovo quindi come sia accettabile l'idea di trattare numericamente le proporzioni, tanto più in quelle scuole nelle quali poi della geometria metrica dovrà farsi largo uso.

Si consideri inoltre che la differenza fra i metodi geometrico ed aritmetico di trattare le proporzioni consiste essenzialmente in questo: che nel 1° non si definisce il rapporto in sè, ma solo l'uguaglianza o disuguaglianza di due rapporti, il che equivale a dare il nome di rapporto ad un *nuovo* ente, del quale con le proporzioni si stabiliscono le relazioni coi suoi consimili, cioè l'uguaglianza o la disuguaglianza, mentre nel 2° esso si definisce dando quel nome ad un ente già noto, il numero. Ma il processo tenuto nel 2° metodo per le proporzioni, non per esse soltanto comparisce in geometria. Per esempio il segmento si definisce ordinariamente come una parte di retta, cioè come un certo ente già noto, mentre per farne la teoria basterebbe, allo stesso modo che Euclide fa per i rapporti, definire l'uguaglianza o disuguaglianza di due segmenti come la possibilità o impossibilità di portare a coincidere il gruppo dei loro estremi. Così per l'angolo, la cui definizione è così controversa, si può fare la teoria definendo in modo consimile l'uguaglianza o disuguaglianza del gruppo di due rette, senza curarsi di attribuire a tal gruppo il significato di un ente a sè: e lo stesso si ripeta per i diedri, le striscie, gli strati ecc.. Se si concede allo scolare di aiutare la propria mente a concepire l'uguaglianza o disuguaglianza dei gruppi formati da due punti, o da due rette convergenti ecc. con l'unire ai loro concetti quelli a lui già noti di parte di retta o di parte di piano ecc., perchè non si potrà concedergli di aiutarsi a concepire i rapporti o le ragioni di due grandezze associandovi l'idea a lui già famigliare di numero? Ogni concetto nuovo è una nuova fatica per l'alunno; se la difficoltà dell'argomento richiede che si scansi, non c'è motivo di farne assoluta proibizione. Piuttosto, a corso terminato, si potrà (anzi sarà utile il farlo) accennare come sia possibile fare a meno di molti enti già definiti (segmenti, rapporti ecc.) e mostrare allora come un'altra definizione della proporzione (quella euclidea) conduca agli stessi risultati. Sarebbe questo un degno coronamento del corso di geometria: esso aprirebbe ai giovani più vasti orizzonti (*).

Del resto la trattazione aritmetica delle proporzioni può unicamente combattersi per la introduzione che essa fa del concetto di numero, giudicato come estraneo alla geometria. Ma io osservo che il concetto di numero non è da ritenersi come tale; giacchè se per *estraneo* s'intende *non conciliabile*, si dice cosa evidentemente falsa: se s'intende *inutile*, è chiaro che tale idea è inesatta per l'importanza che ha l'applicazione dell'algebra alla geometria e per il fatto che il numero serve, per mezzo dei rapporti, delle proporzioni e delle misure, a mettere in luce proprietà importanti delle figure geometriche: se poi s'intende *non necessario*, si osservi che almeno il concetto di numero intero (se non si voglia dire anche di frazione) è indispensabile per parlare di multipli e di sottomultipli, ed è poi necessario il concetto completo di numero nella teoria della misura. Altri concetti si usano in geometria, e da certi punti di vista sarebbero pure da dirsi estranei ad essa; mi limito a citare fra gli altri quello del moto. Secondo me la discussione non è da portarsi sull'introduzione del numero in geometria fatta prima o dopo, ma sul modo rigoroso o no con cui il numero viene introdotto. Se l'ammissione di tale concetto è fatta esattamente, le ragioni didattiche possono avere un gran peso per compierla in un momento piuttosto che in un altro (**).

2. Le osservazioni che ho fatte fin qui mostrano chiaro come io approvi senza restrizioni la struttura generale del libro: quanto allo svolgimento di esso non esito a dirlo lodevolissimo, e questa lode è tanto più apprezzabile, in quanto in Italia egregi autori ci hanno oramai abituati a trattati eccellenti per rigore

(*) C. in proposito il mio articolo « *Sul concetto di un numero* » (questo Giornale, Anno II) e la mia « *Teoria delle grandezze* » (Pisa, 1897).

(**) Mi si vorrà perdonare la troppo lunga digressione: l'importanza dell'argomento mi ha condotto ad esporre le mie idee, il che del resto era anche necessario per discutere quelle degli autori.

e per purezza di concetti. Nel libro di cui parlo gli argomenti sono trattati in modo completo, esponendovisi all'occorrenza teoremi raramente dati nei trattati (p. es. §§ 168, 346 e segg.) o altrove dati inesattamente (p. es. teor. del § 154 sui prismi parallelepipedi): dei teoremi, quand'è possibile, si danno gli inversi, usando spessissimo, e con sommo vantaggio della brevità e dell'efficacia, la legge delle inverse, sulla quale opportunamente s'insiste nei primi paragrafi. Alcuni teoremi sono originali o dimostrati in modo originale (*V.* p. es. quelli dei §§ 52, 142, 143, 144, 358 ecc.): fra essi si vogliono particolarmente citare quelli che, per la fusione della geometria piana con la solida o per l'opportuna disposizione delle materie, possono esser dimostrati con un numero di principii minore dell'ordinario. Per esempio la teoria dell'omotetia, quella dei piani, assi e centri radicali, che di solito si trattano con le proporzioni e con l'equivalenza, sono qui svolte indipendentemente da questa e da quelle con evidente vantaggio teorico. Debbo per altro confessare, giacchè ho parlato di vantaggio teorico, che io sono convinto come in un libro destinato all'insegnamento, stabilito quali sono le teorie da svolgersi ed i concetti da introdurre nell'intero corso, si debba cercare non di dimostrare i teoremi col minor numero di principii, ma con la maggior semplicità e facilità possibili, anche a costo di ricorrere a teorie non strettamente necessarie, visto che di quelle prima o poi si dovrà fare uso. Si osservi che ho detto « un libro per l'insegnamento », essendo una dimostrazione *teoricamente* tanto più apprezzabile quanto minore è il numero di principii che invoca; mentre l'insegnamento dal quale, per quanto è compatibile col rigore assoluto, devesi allontanare la eccessiva complicazione, richiede che le dimostrazioni sieno le più semplici, le più accessibili, quelle che meglio rivelano l'essenza dei teoremi. Per ragioni consimili non incontrò favore l'idea già da alcuni accolta di ritardare nella geometria più che si possa l'ammissione del postulato d'Euclide, col dimostrare dapprima tutti i teoremi che ne sono indipendenti, parendo nell'insegnamento inopportuno lo sdegnare il sussidio che viene alle dimostrazioni di varii teoremi da quel postulato che, non potendosi bandire dalla geometria, devesi prima o poi ammettere: e fecero quindi bene i nostri autori che quel postulato enunciarono fin da principio, profittandone all'occorrenza.

Mi sembra ben condotta la teoria della similitudine, che è presa da un punto di vista generale e comune alle figure piane e solide: per quanto io stimi che essa, strettamente connessa com'è alle proporzioni sulle quali essenzialmente si fonda, sia in un insegnamento secondario più efficace se trattata del tutto indipendentemente dall'omotetia. Questa essendo un'opinione mia, non toglie menomamente valore al bel capitolo del libro, che torno sinceramente ad approvare. Solo mi domando perchè, mentre, dopo aver trattato in generale la similitudine, si danno per i poligoni teoremi che li dimostrano simili quando sono soddisfatte certe condizioni, che sono quelle che sogliono costituire le ordinarie definizioni dei trattati (§§ 389, 390), non si faccia poi altrettanto per i poliedri, come avrebbe richiesto, se non altro, l'analogia.

Lodo gli autori per l'interessante capitolo sull'equivalenza del circolo e dei corpi rotondi, dove le ricerche sono fatte con tutta generalità, riferendosi esse alle superficie ed ai volumi generati dalla rotazione di linee e superficie sem—

plici quando rotano di un angolo qualunque α, invece del solo intero giro di 360°, come si fa ordinariamente. E faccio plauso anche, vedendo in tal capitolo inclusa la superficie ed il volume del toro, dell'anello solido poligonale e dei loro settori; giacchè tali figure rientrano evidentemente nel dominio della geometria elementare, e completano la serie di quelle ottenute facendo rotare attorno ad un asse le figure tutte che studia la geometria piana, cioè segmenti, spezzate, circoli.

Fra i pregi del libro va annoverata la ricca ed importante collezione di problemi e di esercizi da svolgere, la quale fa nascere il desiderio che gli egregi autori, dovendo fare un'altra edizione del libro, vi aggiungano un capitolo sulla soluzione dei problemi geometrici, argomento tanto più interessante in quanto non esiste un metodo generale per detta risoluzione.

Nelle dimostrazioni trovo usata giusta sobrietà di esposizione. Talora, per altro, giudico che questa sia eccessiva: perchè se di cose di dimostrazione facile, sì, ma non breve si dica, come fanno talora i nostri autori: *è facile vedere ecc.*, temo che i giovani prendano l'abito non lodevole di sopprimere le dimostrazioni, troppo spesso appagandosi di quello che all'occhio mostra la figura.

L'amore di una certa brevità, che in giusta misura è da ritenersi come un pregio, ha condotto gli autori a citare dei corollarî, appartenenti a teoremi assai lontani dal luogo ove quelli sono esposti, senza convenienti singoli richiami o qualche parola di legame. Ne risultano lunghe liste di corollarii (come p. es. al § 383) che per qualche alunno potranno sembrare aride enumerazioni le quali lo tentino ad impararle solo macchinalmente. È vero per altro che un abile insegnante potrà evitare un tale sconcio; come è vero che tutto il libro per il rigore e l'ampiezza d'idee che lo informa dev'essere affidato all'opera di un professore intelligente ed esperto, perchè dia i frutti che se ne possono giustamente aspettare.

3. I tre argomenti principali del libro, cioè i postulati, la teoria dell'equivalenza, e quella delle misure, hanno gli autori seriamente meditati e di essi hanno intesa l'importanza: ed infatti si trovano esposti in modo ordinariamente rigoroso, benchè fra i tre il terzo, quello delle misure, mi sembri condotto meno robustamente. In questioni così capitali e delicate era per altro inevitabile che qualche cosa sfuggisse agli egregi autori: e mi permetto di esporre brevemente le mie osservazioni in proposito, alcune delle quali sono frutto di vedute mie personali e non accennano perciò a censura del libro.

Quanto ai postulati già ne ho detto qualche cosa in generale; e, anche per le ragioni allora esposte, non credo dover fare singole analisi minute. Mi limito a poche idee.

I postulati del moto (II, III, VIII) hanno la forma più comune e più intuitiva e, dal punto di vista didattico, sono ottimi. Ma è bene avvertire come in essi interviene (in modo, se si vuole un po' velato) un elemento davvero estraneo alla geometria, il tempo, se almeno non si abbia cura di definire opportunamente la parola percorrere (*) che, interpretata nel senso ordinario, richiama

(*) P. es. esprimendosi così: « Dire che un punto si muove da una posizione A ad una posi« zione B percorrendo una linea di cui A e B sono gli estremi o descrivendo questa linea, signil'idea di momenti successivi, idea, oltrechè non geometrica, difficile a mettere in chiaro.

Vedo con piacere citato in modo esplicito il postulato IV, che fin qui si soleva ammettere tacitamente: soltanto esso non appare completo, come si nota al momento di applicarlo ai teoremi dei §§ 76 ed 81 nei quali si dimostra che i contorni dei poligoni sono linee complete, ed altri simili. Infatti al § 76 (poligoni convessi) si dice che la linea incompleta suddivide la superficie in *due* parti, ciò che non è richiesto nel postulato. Ed al § 81, dove si tratta dei poligoni qualunque, considerando le due spezzate come formanti una linea sola, resta dubbio circa al numero di queste parti. Che se al § 81 s'intende di applicare il postulato prima per una spezzata e poi per l'altra, ne è legittima l'applicazione per la prima, non per la seconda. Osservazioni analoghe si facciano per i corrispondenti teoremi sugli angoloidi, sui poliedri ecc. Per altro è da ascrivere a merito degli autori l'aver riconosciuto come il fatto che i contorni dei poligoni o le superficie degli angoloidi ecc. sono completi sia da enunciarsi esplicitamente e da tentare di dimostrarlo, quando non si ritenga opportuno di prenderlo come un postulato esso stesso (*).

Noto l'aspetto che assume in questo libro il postulato d'Euclide (post. X) il quale, fuso con quello dello scorrimento del diedro, prende una forma assai semplice ed intuitiva.

Il postulato XIII (postulato della continuità) è ammesso per tutte le grandezze sotto la forma che si usa in tutti i trattati. A me sembra che sarebbe conveniente l'ammetterlo o solo per i segmenti, o almeno solo per essi e per le altre grandezze elementari (angoli, striscie, strati, diedri): prima di tutto perchè si dimostra poi facilmente per le altre grandezze, secondariamente poi perchè per le grandezze non elementari (superficie, solidi) si afferra male l'esistenza di un tal limite, eccetto per serie speciali di variabili che pure si possono ricondurre al caso dei segmenti. Per esempio, prendendo due variabili convergenti formate da convenienti poligoni in cui il numero dei lati vada continuamente crescendo e non siano regolari, il loro limite non si immagina bene quale possa essere, se prima non si trasformano in triangoli o parallelogrammi di eguale altezza, nel qual caso l'esistenza del limite risulta dimostrata solo che si applichi il postulato alle serie convergenti dei segmenti delle basi.

4. Passando alla teoria dell'equivalenza, la quale è condotta in modo simile a quello della Geometria del De Paolis, credo dover notare che le condizioni citate nel § 270 come caratteristiche per le classi di grandezze non sono sufficienti, perchè da esse discendano tutte le altre (**). Di più per le classi che sono prive della seconda e terza proprietà caratteristica non può asserirsi, come è detto nello stesso paragrafo a pag. 249, che *perciò solo* non godono neanche

---

« fica considerare insieme il punto A e questa linea ». Così per le superficie e per i solidi. In tal modo i due postulati II, III sono suppliti da una definizione. Il postulato VIII resta postulato e diviene: « Una retta può scorrere in modo che ciascun suo punto descriva un suo segmento ». Noto per altro che questo modo di considerare il movimento come accompagnato da un ente generato non è, a mio credere, il più opportuno in geometria.

(*) Come fanno i professori Sannia e d'Ovidio nell'edizione 8ª della loro *Geometria*.

(**) Cfr. la mia « *Teoria delle grandezze* ».

le altre proprietà: poichè se queste si dimostrano mediante quelle, non può dirsi *a priori* che non si possono dimostrare anche senza. Circa la proprietà citata nel § 273 (quella che per due grandezze A, B si verifica necessariamente uno dei tre casi $A \gtreqless B$) è sfuggita agli autori la frase « che essi dimostreranno « che tale proprietà non vale per certe classi, p. es. per i poliedri », mentre in seguito non solo ciò non si dimostra, ma di più con le definizioni ampliate di equivalente, maggiore e minore si prova che le classi dei poliedri la godono esse pure.

Così non trovo opportuna la distinzione delle grandezze nelle tre classi del § 275, giacchè grandezze della terza specie sono dette quelle per le quali fino al punto in cui si classificano come tali non si sa se sono o no della prima o della seconda specie: e quindi mentre sono determinate le proprietà che servono a caratterizzare una classe come di prima o di seconda specie, non è data la proprietà che da esse distingua quelle di terza specie, altro che sotto forma di una proprietà negativa ed accidentale. Anzi può darsi (diremo di più che realmente succede così quando si ampliano i concetti di equivalenza ecc. per mezzo dei limiti) che, in seguito, le grandezze che in un certo momento si chiamano di terza specie, si possano chiamare almeno di seconda godendo tutte le proprietà di esse, quando almeno queste proprietà si ritengono esposte come nella definizione 2ª del § 275. Si vede infatti in seguito, per le grandezze limiti di serie convergenti (quelle che aggiunte alla classe di seconda specie cambiano questa in una di terza specie) che date due qualunque di esse, o una di esse ed una delle grandezze di seconda specie, A e B, si ha sempre anche per esse uno ed uno solo dei tre casi $A \gtreqless B$. Su questo argomento preferisco come più corretta la distinzione fatta nella *Geometria* dei professori Sannia e D'Ovidio (§ 215, 8ª edizione); ma devo osservare che forse l'inesattezza ch'io rilevo ha la sua base unicamente nella definizione delle grandezze di seconda specie, nella quale non è al certo resa completa l'idea degli autori.

5. Due parole sulla teoria delle proporzioni e della misura.

La definizione del rapporto di A a B (§ 373) come « il numero che si ricava « dall'unità per mezzo delle operazioni mediante le quali dalla grandezza B si « può ricavare una grandezza equivalente ad A » mi sembra incompleta; giacchè bisognerebbe indicare la natura delle operazioni che sole in questa questione sono lecite per ottenere A da B (somme, multiple, summultiple, limiti di variabili convergenti) e mostrare che esse ed il loro ordine di successione sono determinati o almeno che la loro diversa scelta non influisce sul risultato, perchè non si movesse a questa definizione l'obiezione che si fa all'ordinaria definizione di prodotto (*). Tale insufficienza si riflette naturalmente sul teorema del § 376: « Dati i rapporti di una prima grandezza ad una seconda e di questa ad una « terza, il rapporto della prima alla terza è uguale al prodotto dei due rapporti dati ». Inoltre la dimostrazione di quest'ultimo teorema si fonda su un circolo vizioso. Infatti: che se r_1 è il rapporto di A a B ed r_2 il rapporto di B a C, per

(*) Com'è riferita nel libro stesso al § 376 (Cfr. PEANO. *Rivista Matematica* Fasc. 4. e 5. dell'anno I).

eseguire su C le operazioni per mezzo delle quali si passa da 1 ad $(r_2 \times r_1)$ *basti* eseguire prima su C le operazioni con cui da 1 si ottiene r_2 (avendosi così B) e poi su B le operazioni con cui da 1 si ottiene r_1, ossia che il risultato della operazione $(r_2\, r_1)$ fatta su una grandezza sia uguale al risultato delle successive operazioni r_2 ed r_1 fatte su di essa, mi sembra un teorema che deve essere dimostrato e che, se si guarda bene, equivale a quello proposto.

Perchè il concetto di rapporto fosse poi stabilito senza ambiguità ed apparisse uniforme per il caso delle grandezze commensurabili od incommensurabili, occorreva che gli autori avessero aggiunto il teorema che « se una grandezza B, « commensurabile o no con un altra A, è limite di due variabili convergenti, « il rapporto di B ad A è il limite delle serie (che risultano convergenti) dei « rapporti ad A delle variabili convergenti ». Così si sarebbe stabilito con esattezza che ad una certa grandezza data ogni altra grandezza non ha che un rapporto solo, da cui discende l'unicità della misura rispetto ad una data unità.

Circa poi alle misure, sebbene il dire (come fanno gli autori) che sono rapporti includa che godono le proprietà di questi, sarebbe stato utile di mettere in evidenza che le misure della somma, della differenza, dei multipli ecc. di grandezze si ottengono sommando, sottraendo, moltiplicando ecc. le singole misure.

Taccio di altre poche osservazioni di importanza secondaria, facili a farsi da chiunque, e che non alterano in nulla il rigore generale.

6. Al termine di questa rassegna del libro, credo dovere accennare che la minuzia delle osservazioni fatte depone in suo favore, poichè solo nei lavori ben fatti colpiscono i piccoli difetti. Ci auguriamo che esso sia studiato ed apprezzato da quanti s'interessano agli studi geometrici: e che, resa possibile dai programmi la fusione della geometria piana con la solida in tutte le nostre scuole secondarie (*), l'ottima opera possa entrare in queste a recarvi i frutti che un insegnamento robusto e rigoroso deve necessariamente dare.

È giusto poi dire che, a renderla più pregevole, contribuiscono come fattori non trascurabili così la bella stampa e la buona scelta dei diversi caratteri che agevolano il compito dello studioso, come le accuratissime figure, molte delle quali, specialmente nella parte stereometrica, hanno una chiarezza ed una eleganza alla quale pur troppo gli editori italiani non ci hanno abituati. Anche all'egregio tipografo livornese sia dunque data la lode che si merita.

Torino, maggio 1891.

RODOLFO BETTAZZI.

DOTT. GIUSEPPE M. TESTI. — *Corso di Matematiche.* – Vol. I: *Aritmetica razionale.* — Livorno, Giusti, 1891. L. 2,50.

Con questo primo volume di un *Corso di Matematiche* il Dott. Testi dà non dubbie prove di possedere eccellenti disposizioni, sussidiate da forti ed accurati studi, per riuscire ottimo autore di opere scolastiche.

(*) V. l'altro mio art. *Sull'insegnamento della geometria nei Licei* a pag. 113.

Egli comincia col definire *collezione* e poi dimostra tre importanti teoremi relativi: uno allo scambio di due oggetti in una stessa collezione, e gli altri due all'indipendenza dall'ordine, nell'esaurirsi assieme, ovvero no, gli oggetti di due collezioni che si fanno corrispondere due a due: espone convenientemente il concetto di grandezza discreta e quello di eguaglianza e di diseguaglianza tra due grandezze discrete omogenee, e, relativamente a queste, dimostra con molta opportunità le proposizioni che negli altri trattati appariscono sotto il nome di assiomi.

Osservato in seguito che le relazioni, considerate sulle grandezze discrete, sussistono indipendentemente dalla natura intrinseca degli oggetti che formano le grandezze stesse, passa a dare il concetto di *numero intero* riguardandolo come la collezione di elementi astratti (*unità*), e quindi gradatamente estende ai numeri interi le proprietà dimostrate per le grandezze discrete.

Parla poi della numerazione decimale, dimostrando nella numerazione scritta cinque proposizioni le cui verità sono in quasi tutti gli altri trattati *solo tacitamente ammesse.*

Appoggiate su basi così salde, non recherà meraviglia che io dica che tutte le teorie seguenti procedono senza sottintesi e col massimo rigore. E sebbene l'A. si riservi di trattare delle funzioni e dei limiti in altro volume del suo *Corso di Matematiche,* nondimeno, anche senza il sussidio di queste nozioni, egli è riuscito a svolgere convenientemente ciò che riguarda le generatrici dei numeri decimali, ricorrendo (dopo aver definito che cosa s'intenda per *ridotte successive* d'un numero periodico) ai seguenti due teoremi:

1° *La differenza fra una data frazione ordinaria e le ridotte successive del numero periodico corrispondente è minore, quando è maggiore il numero d'ordine delle ridotte considerate.*

2° *Ogni numero decimale periodico ha una sola generatrice.*

che naturalmente ha prima dimostrati.

Caratteristiche, che si notano in tutto il corso dell'*Aritmetica razionale* del Dott. Testi, sono: *unità di metodo, chiarezza di esposizione, logica sempre rispettata in ciò che si riferisce ad ordine, induzione e deduzione; inguaggio preciso ed in giusta misura, e procedimento nelle dimostrazioni sempre informato al debito rigore.*

Tuttavia mende non mancano, ma sono di così poca entità e di tal genere da non togliere pressochè nulla all'importanza ed al valore del libro. Passiamole in rassegna.

Trattandosi di Aritmetica razionale, mi sembrano superflue la tavola di Pitagora e la regola per servirsene, non che le regole in esteso per eseguire le quattro operazioni sui numeri interi.

Noto che nella regola 73, pag. 42: « *Per togliere da un numero un altro, del quale le cifre sono tutte minori di quelle dello stesso ordine del primo, si scrive il secondo numero sotto il primo per modo ecc. Si sottraggono poi ordinatamente dalle cifre del primo quelle del secondo (cominciando da quelle delle unità) e si scrivono ecc.* » che la parte racchiusa fra parentesi è perfettamente inutile, giacchè, per *il caso contemplato,* torna indifferente il cominciare da sinistra o da destra ecc.

Vorrei più chiaro l'enunciato del teorema 94, pag. 53, il quale, com'è, mi sembra possa lasciar dubbio se nel dover moltiplicare, per es. 708000 per 15, basti il moltiplicare 708 per 15 e quindi scrivere alla destra del prodotto tre zeri, oppure moltiplicare 78 per 15, scrivendo poi alla destra di tale prodotto quattro zeri.

Inoltre, rispetto all'ordine, esso dovrebbe essere posposto ai n. 95, 96, 97 nei quali si tratta rispettivamente della moltiplicazione di un numero di più cifre per un numero di una cifra sola; di un numero di più cifre per un altro composto da una cifra significativa seguita da zeri, o di due numeri di più cifre.

Ometterei altresì la proposizione 268, pag. 254: « *Di due unità frazionarie di differente denominatore è minore quella che ha denominatore maggiore*, MAGGIORE L'ALTRA », la quale, evidentemente, è inclusa in quest'altra n. 269, pag. 155: *Di due frazioni che hanno eguale numeratore e diseguale denominatore, è minore quella che ha il denominatore maggiore*, MAGGIORE L'ALTRA. In entrambe poi è a notarsi che è perfettamente inutile l'espressione *maggiore l'altra* con cui esse terminano.

Quanto agli esercizi proposti in fin del libro, osservo che sono tutti ben adatti. Solo vanno corretti i due ai n. 53 e 93, i quali, per errori tipografici, così, come sono enunciati, non possono stare. Nel primo di questi bisogna scrivere tra *L'ho pensato* e *Aggiungici*, quest'altra espressione: *Raddoppialo. – L'ho raddoppiato*; e nel secondo: *Dimostrare che il prodotto* n (n — 1), *dove* n *rappresenta un numero intero maggiore di 2, è sempre divisibile per 6*, bisogna scrivere $n\ (n^2 - 1)$ al posto di $n\ (n - 1)$, e sostituire l'espressione *non minore di 2* all'altra *maggiore di 2*.

Come ognun vede, le mende da me notate sono poche, lievi e facili a farsi scomparire in altre edizioni; mentre invece i pregi sono molti e tali che, a giudizio mio, l'*Aritmetica razionale*, di cui scrivo, merita di essere classificata fra quei lavori che si possono davvero dire *ben pensati ed ottimamente compiuti*.

Mi auguro intanto di vedere presto gli altri volumi, oltre al secondo già pubblicato, del *Corso di Matematiche* intrapreso dall'egregio Dott. Testi, e che il volume di cui ho parlato abbia nei nostri istituti classici e tecnici diffusione pari a' suoi meriti.

STEFANO GATTI.

Prof. STANISLAO TAMBURINI. — *Guida pratica di Disegno geometrico*, esposta a tavole sinottiche ad uso delle Scuole tecniche, normali, professionali, ecc.. — Parte I, L. 1.25; parte II, L. 1.25; parte III, L. 1.25. Antonio Vallardi, editore, Milano.

Questa *Guida pratica* consta di XXXII tavole, delle quali dieci spettano alla 1ª parte, dieci alla 2ª e le rimanenti alla 3ª. Delle tavole appartenenti a ciascuna parte alcune sono dedicate alla soluzione grafica di problemi, altre alle applicazioni. Accompagna le tavole un breve *Testo complementare* in cui sono descritte le costruzioni dei problemi graficamente rappresentati in quelle, il che è senza dubbio opera utile, quantunque nomenclatura per le singole figure considerate ed accenni alle costruzioni medesime si trovino in ciascuna tavola. Ecco il principale contenuto della *Guida:*

I PARTE. — Problemi relativi a tracciamento di parallele e perpendicolari, divisione in parti uguali di segmenti ed angoli, costruzione di quadrangoli e rettangoli, soddisfacenti a determinate condizioni, e di poligoni regolari. Descrizione di fascie ornamentate o meandri, di rosoni, soffitti e pavimenti.

II PARTE. — Inscrizione e circoscrizione di poligoni regolari e poligoni semplici e qualche trasformazione di figure, divisione della circonferenza in 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 10 parti uguali e divisione approssimata della medesima in qualsivoglia numero di parti uguali, costruzione d'un poligono regolare qualunque datone il lato, descrizione d'un cerchio tangente a rette o circonferenze date. Raccordamento degli archi circolari, costruzione dell'evoluta, delle ovali e degli ovoli; ancora fascie, rosoni, soffitti e pavimenti variamente ornamentati e di più difficile esecuzione di quelli considerati nella 1ª parte: ruote dentate, inferriate, anfore e vasi di svariata forma, colonnette per balaustra, spirali, ecc.

III PARTE. — Tracciamento delle sezioni coniche, della cicloide e dell'elica: sviluppo di solidi geometrici, rappresentazione su due piani ortogonali di solidi e delle loro sezioni. Le applicazioni riguardano la costruzione della vite a pane triangolare, delle scale metriche e della meridiana orizzontale e verticale.

Varie, di difficoltà graduale e di molto buon gusto le applicazioni le quali, considerate le scuole a cui la *Guida* è particolarmente destinata, nè teoriche, nè d'arti e mestieri, mi sembrano tenute in giusta misura. Quasi tutte le tavole illustrative dell'opera sono a più tinte, ciò che dà risalto al disegno ed è stimolo ed insegnamento ai giovanetti per lo studio dell'acquerello, sicchè per la parte applicativa la *Guida* stessa parmi opera perfettamente riuscita.

Ma rispettando anche le esigenze richieste dallo sviluppo graduale delle applicazioni, non può dirsi altrettanto bene della parte teorica, relativa cioè alla scelta dei problemi trattati, poco ordinata e manchevole. Il breve testo complementare alla *Guida* è poi redatto con linguaggio pratico sì ma altrettanto scorretto.

Il problema della fig. 1ª, tav. XI è sbagliato, in quanto la figura che si ottiene non è un triangolo *equilatero* ma isoscele. Tutte le altre costruzioni, verificate una per una, anche col sussidio dell'analisi, sono esatte. Per me trovo inutili certe costruzioni complicate, di discutibile utilità pratica, quale ad es. quella della fig. 6ª, tav. XI, relativa all'inscrizione d'un pentagono regolare in un triangolo equilatero: vorrei maggiormente estesi i problemi riguardanti la trasformazione delle figure rettilinee in altre equivalenti e mi piacerebbe veder introdotte alcune delle costruzioni che richiedono l'uso della sola riga, che si studiano nella geometria proiettiva, almeno quelle elementarissime relative al tracciamento delle polari di un punto rispetto a due date rette e ad una circonferenza o ad una conica data (giacchè l'A. insegna a costruire le coniche con moto continuo), non foss'altro come utile esercizio di disegno manuale.

Meglio che la costruzione data dall'A. per la divisione approssimata della circonferenza in n parti uguali, varrebbe citare per $n > 5$ la seguente: Dividasi il diametro in n parti uguali, si descriva il raggio perpendicolare ad esso e si prolunghino diametro e raggio di $\frac{1}{n}$ del diametro stesso. Congiunti i due punti così ottenuti si ottiene una retta segante il cerchio in due punti, il segmento congiungente quello dei due punti maggiormente prossimo al diametro col 3° punto di divisione del diametro stesso è con grande approssimazione il lato del poligono regolare inscritto di n lati. L'errore che si commette con tale costruzione nell'angolo al centro, corrispondente all'ennesima parte del cerchio, non arriva a 3′ pei poligoni regolari inscritti di 7, 13, 15, 17, 19, 21,..... 101 lati ed a 4′ per l'ennagono e l'undecagono (*) dunque non raggiunge in ogni caso $\frac{1}{1350}$ del quadrante, errore di molto inferiore a quello che si ha dall'esecuzione manuale, comunque accurata. A giustificazione del mio asserto basterà notare che colla costruzione insegnata dall'A. per la divisione del cerchio in 9 parti uguali (fig. 23ª della tav. XIII), si ha un errore nell'angolo al centro, corrispondente al lato dell'ennagono, alquanto superiore ad 1° 2′, dunque presso a poco 16 volte tanto l'errore proveniente dalla costruzione sopra riportata.

Chiuderò col notare che la divisione della *Guida* in tre parti, che si vendono separatamente, e su per giù rispondenti ai programmi da svolgersi nei tre corsi di studio tecnico e normale, rende l'opera più adatta per le scuole alle quali è particolarmente destinata.

A. Lugli.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström. Nouvelle série. 5. N. 1 et 2. Stockholm, 1891.

Giornale di Matematiche, pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Volume XXVIII. Gennaio-Giugno 1891. — Napoli, B. Pellerano.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. de Longchamps. 3ª Série, XV année. N. 3, 4, 5, 6, 7; Mars à Juillet. — Paris, Librairie Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. 15ª année. Nombres 12 à 20. Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles, 1891.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. Mansion et J. Neuberg. Deuxième série. Tome I. Mars à Septembre 1891. — Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo V, Fasc. III, IV e V. Maggio-Ottobre 1891.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª. Vol. V. Fasc. 2° a 6°. Febbraio-Giugno 1891.

(*) V. Schlömilch: *Plani.* § 30, *Trig.* App. III.

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par M. B. Niewenglowski. N. 7 à 11. Avril-Août 1891. — Paris, Librairie Nony e C., 17 rue des Écoles.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. XXII Jahrgang. 2, 3, 4 Heft. — Leipzig, B. G. Teubner, 1891.

Rivista di matematica diretta da G. Peano. Fasc. 4°, 5°, 6° e 7°. Aprile-Luglio 1891. — Torino, Fratelli Bocca.

Carrara (B.) — Un' applicazione della teoria dei numeri alle frazioni decimali periodiche. — Cremona, Tip. e Lit. Fezzi, 1891.

— — Lezione sui massimi e minimi delle funzioni di 2° grado. — Cremona, Tip. e Lit. Fezzi, 1891.

Eneström (G.) — Om måttet för dödligheten inom en bestämd åldersklass (Öfversigt. af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. Stockholm).

Giudice (F.) — Geometria solida ad uso dei ginnasi e licei. — Palermo, R. Sandron, 1891. - Prezzo: L. 2.

— — Sulle successioni. - Sui prodotti infiniti a fattore generale sviluppabile in serie ordinata secondo le potenze di $\frac{1}{n}$. (Rendic. Circ. mat. di Palermo, tomi IV e V).

Künssberg (H.) — Gino Loria. *Il periodo aureo della Geometria greca. Saggio storico.* (Biblioth. math. di G. Eneström, 1891).

Martone (M.) — Sulla risoluzione delle equazioni numeriche. — Catanzaro, C. Maccarone, 1889.

— — La funzione Alef di Hoënè Wronski. — Catanzaro, C. Maccarone, 1891.

— — Sulle radici comuni a più equazioni. — Catanzaro, C. Maccarone, 1891.

— — I determinanti Wronskiani e la legge suprema. — Catanzaro, C. Maccarone, 1891.

Matteucci (A.) — Nozioni di fisica elementare, coordinate in conformità dei programmi pei Licei del Regno. - Parte prima: Cinematica, Statica, Dinamica, Elasticità dei solidi. Milano, F. Vallardi, 1891. - Prezzo: L. 1.

Murer (V.) — Nozioni di aritmetica pratica per il 1° e 2° corso elementare. — Spezia, Tip. Matuella, 1890. - Prezzo: L. 1.

— — Nozioni di geometria intuitiva per il 3° e 4° corso elementare. — Spezia, Tip. Matuella, 1890. - Prezzo: L. 1,20.

Padelletti (D.) — Sul movimento del pendolo semplice quando si tien conto dell'effetto della rotazione terrestre. (Rend. Acc. Scienze fisiche e mat. Napoli, 1891).

Palazzo (L.) — Misure magneto-telluriche eseguite in Italia negli anni 1888 e 1889 ed osservazioni relative alle influenze perturbatrici del suolo. (Rend. R. Acc. dei Lincei, 1891).

Scarpis (U.) — Il problema della divisione della circonferenza. — Savona, Tip. Bertolotto e C., 1891).

Rettificazione. — I Signori Prof. P. Visalli e G. Mandes avvertono la Redazione che l'errore segnalato dal Signor Prof. F. Viaggi, a pag. 109 di questo *Periodico*, nella recensione del loro *Trattato d'Algebra*, pel quale come quoziente degli irrazionali (A, A'), (B, B') è definito $\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}\right)$ invece di $\left(\frac{A}{B'}, \frac{A'}{B}\right)$, vero *lapus calami*, trovasi corretto nell'*errata* in fondo del Trattato stesso.

Chiusura della redazione il dì 30 agosto 1891.

DELL'ANALISI INDETERMINATA DI SECONDO GRADO

Con questo scritto mi propongo di trattare in maniera affatto elementare, e soprattutto senza ricorrere alla teoria delle frazioni continue periodiche, il problema capitale dell'analisi indeterminata di secondo grado, preparando gli elementi principali d'un capitolo che, nei libri d'algebra per uso delle scuole secondarie, potrebbe far seguito a quello che suol dedicarsi all'analisi indeterminata di primo grado. Non tacerò che il presente lavoro, pur non guardando al suo fine didattico e al metodo seguito, mi sembra contenere qualche cosa di nuovo sul vecchio tema, che fu diletto ai sommi matematici: EULERO, LAGRANGE, LEGENDRE, GAUSS, DIRICHLET. Veggansi su tale proposito le note in fine.

Il problema principale dell'analisi indeterminata di secondo grado a due incognite x ed y consiste nella risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$ in numeri interi e positivi (le lettere D ed N indicano numeri interi e positivi). Perchè, quando per risolvere in numeri interi l'equazione generale di secondo grado a due incognite x ed y e a coefficienti interi, siasi trovato il valore d'una incognita per mezzo dell'altra, occorre anzitutto imporre a questa seconda incognita la condizione di rendere quadrato perfetto la quantità sotto radice. S'incontra così un'equazione della forma $x^2 \pm Dy^2 = \pm N$, da risolversi in numeri interi, e possiamo dire, osservando la forma dell'equazione per rispetto alle incognite, in numeri interi e positivi. Se il coefficiente della y^2 è $+D$, possono darsi due casi. O il secondo membro è $-N$, e l'equazione non ha soluzioni. O esso è $+N$, e l'equazione si riguarda come risoluta, perchè, non potendo il valore della y superare il limite $\sqrt{\frac{N}{D}}$, le soluzioni dell'equazione possono trovarsi con un numero più o meno grande, ma limitato, di tentativi (*). Quando il coefficiente di y^2 è $-D$, la cosa procede altrimenti.

(*) V. p. es. LEGENDRE: *Théorie des nombres*, tome I, pag. 105.

Il numero delle soluzioni, se non è nullo, è infinito: epperò non è possibile accertare per mezzo di tentativi l'impossibilità dell'equazione, o trovarne con lo stesso mezzo tutte le soluzioni. Tuttavia si comprende la possibilità di assegnare alla y dell'equazione che si vuol risolvere un limite superiore B (dal quale conseguirà un limite superiore anche per la x) e di assegnarlo in maniera, che l'insieme delle soluzioni (x, y) nelle quali $y < B$ oppure $y \leq B$, formi un sistema *fondamentale*, vale a dire così fatto, che ogni soluzione dell'equazione proposta possa esprimersi per mezzo di quelle del sistema, senza che alcuna soluzione si ripeta. Cognito che sia il limite superiore B, in un con la formola che esprime tutte le soluzioni dell'equazione proposta per mezzo di quelle del sistema fondamentale, è chiaro che il caso del coefficiente $-D$ si ridurrà, quanto a difficoltà, al caso del coefficiente $+D$. Basterà infatti trovare per tentativi quelle soluzioni che soddisfano la condizione $y < B$, o la $y \leq B$, il numero delle quali è limitato.

Dicendo (α, β) una soluzione dell'equazione Pelliana $x^2 - Dy^2 = 1$ e supponendo β diversa da 0, il limite superiore sopra detto è

$$\beta \sqrt{N}, \text{ per la } y \text{ dell'equazione } x^2 - Dy^2 = N;$$

ed è

$$\sqrt{\frac{N(\alpha+1)}{2D}}, \text{ per la } y \text{ dell'equazione } x^2 - Dy^2 = -N.$$

Di più, detta (K, H) una soluzione appartenente al sistema fondamentale (nella quale, come si vedrà, il valore H della y deve essere minore del primo limite sopra assegnato, se il secondo membro dell'equazione è N, e non maggiore dell'altro, se il secondo membro dell'equazione è $-N$) le formole generali di risoluzione sono:

$$x + y\sqrt{D} = (K + H\sqrt{D})(\alpha + \beta\sqrt{D})^m,$$
$$\text{per l'equazione } x^2 - Dy^2 = N$$

e

$$x + y\sqrt{D} = (\pm K + H\sqrt{D})(\alpha + \beta\sqrt{D})^m,$$
$$\text{per l'equazione } x^2 - Dy^2 = -N.$$

Ponendo nella prima formola consecutivamente $m = 0, 1, 2,$ ecc., e per ogni valore dato ad m eguagliando fra loro le parti razionali e i coefficienti di $\sqrt{D}$ dei due membri, con l'avvertenza di estendere il procedimento a tutte le soluzioni fondamentali (K, H), si otterranno tutte le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$, comprese le fondamentali, senza che alcuna soluzione si ripeta. Similmente si ricaveranno dalla seconda formola (*) tutte le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$. - Questo è ciò che sarà dimostrato qui appresso. Per le applicazioni pratiche occorrerà tuttavia conoscere una soluzione (α, β) dell'equazione Pelliana, e di preferenza la minima. Quantunque il *Canon Pellianus* del DEGEN e la tavola X unita al 1° volume della *Théorie des nombres* di LEGENDRE forniscano quest'ultima fino a grandi valori del coefficiente D, tuttavia assegnerò anche un metodo per la ricerca d'una soluzione e generalmente di tutte le soluzioni dell'equazione Pelliana. Tale metodo, in una trattazione elementare, può supplire l'altro, notissimo, che discende dalla teorica delle frazioni continue periodiche. Come corollario delle cose esposte dimostrerò infine il seguente teorema di TCHEBICHEFF: *Se* α *è il valore della* x *nella soluzione minima dell'equazione di* PELL, *il valore della* x *nella soluzione minima dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = \pm N$ *non può superare il limite*

$$\sqrt{\frac{N(\alpha \pm 1)}{2}}. \text{ (**)}$$

1. La risoluzione dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

dipende, come vedremo, da quella dell'equazione

$$x^2 - (a^2 - 1)\, y^2 = N. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [2]$$

Si consideri adunque quest'equazione. Sia (x_1, y_1) una sua soluzione qualsiasi. Si avrà identicamente:

$$x_1^2 - a^2 y_1^2 = N - y_1^2.$$

(*) Per $m = o$ e solo per $m = o$ bisogna rifiutare il segno — davanti alla K della formola. Per ogni altro valore di m bisogna calcolare tanto col + quanto col — davanti alla K.

(**) V. la memoria « *Sur les formes quadratiques* » nel *Journal de mathématiques pures et appliquées*, anno 1851.

Supponendo che y_1 non sia minore di $\sqrt{N}$, dovrà aversi: $x_1 \leq a y_1$ e si potrà porre:

$$x_1 = a y_1 - h,$$

intendendo per h un numero positivo o nullo. Dall'identità

$$(ay_1 - h)^2 - (a^2 - 1) y_1^2 = N$$

si ricava:

$$y_1 = ah \pm \sqrt{(a^2 - 1) h^2 + N}.$$

Essendo y_1 un intero, la quantità sotto radice nel secondo membro dovrà essere un quadrato intero k^2, ed oltre a ciò:

$$y_1 = a h \pm k.$$

Ora si avverta che, avendosi

$$k^2 - (a^2 - 1) h^2 = N, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [3]$$

(k, h) è una soluzione della [2] in numeri interi e positivi. Si osservi ancora che il segno negativo davanti alla k della penultima uguaglianza non è ammissibile. Prendendo infatti il detto segno, dalle uguaglianze

$$x_1 = ay_1 - h; \qquad y_1 = ah - k$$

seguirebbe:

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2 - 1} = (h \sqrt{a^2 - 1} - k)(a + \sqrt{a^2 - 1}).$$

Questa uguaglianza è assurda, perchè il suo secondo membro è negativo ($k > h \sqrt{a^2 - 1}$, per virtù della [3]) mentre il primo è positivo. Si avrà dunque, semprechè y_1 non sia minore di $\sqrt{N}$,

$$x_1 = ay_1 - h; \qquad y_1 = ah + k;$$

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2 - 1} = (k + h \sqrt{a^2 - 1})(a + \sqrt{a^2 - 1}).$$

Ora, poichè (k, h) è soluzione dell'equazione [2], se h non è minore di $\sqrt{N}$, si avrà anche:

$$k + h \sqrt{a^2 - 1} = (k' + h' \sqrt{a^2 - 1})(a + \sqrt{a^2 - 1}),$$

essendo (k', h') una nuova soluzione della [2]. Moltiplicando fra loro le due formole precedenti e semplificando, risulta:

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2-1} = (k' + h' \sqrt{a^2-1})(a + \sqrt{a^2-1})^2.$$

Se h' non è minore di $\sqrt{N}$, detta (k'', h'') un'altra soluzione della [2], sarà ancora:

$$k' + h' \sqrt{a^2-1} = (k'' + h'' \sqrt{a^2-1})(a + \sqrt{a^2-1}),$$

epperò:

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2-1} = (k'' + h'' \sqrt{a^2-1})(a + \sqrt{a^2-1})^3.$$

E via così. – Se fra i numeri h, h', h'' ecc. non se ne trovasse finalmente uno più piccolo di $\sqrt{N}$, il secondo membro dei successivi valori del binomio $x_1 + y_1 \sqrt{a^2-1}$ supererebbe ogni limite, nonchè il valore del binomio stesso, conclusione assurda. Indicando dunque con (K, H) una particolare soluzione della [2] (particolare perchè soggetta alla condizione $H < \sqrt{N}$) e con m un numero intero e positivo oppur nullo, dovrà sussistere l'eguaglianza:

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2-1} = (K + H \sqrt{a^2-1})(a + \sqrt{a^2-1})^m.$$

Si è così dimostrato che ogni soluzione intera e positiva (x, y) della [2] soddisfa l'equazione

$$x + y \sqrt{a^2-1} = (K + H \sqrt{a^2-1})(a + \sqrt{a^2-1})^m,$$

nella quale K ed H sono gli elementi di una particolare soluzione, scelta fra quelle nelle quali $H < \sqrt{N}$.

2. Passando all'equazione [1] ricorderemo che l'equazione di Pell: $x^2 - D y^2 = 1$, oltre alla soluzione evidente $(1, 0)$, ammette infinite soluzioni intere e positive (teorema celebre di Lagrange) (*). Sia (α, β) una di cotali soluzioni, cosicchè sussista l'identità: $\alpha^2 - D\beta^2 = 1$. L'equazione [2], moltiplicata per β^2, potrà scriversi così:

$$(\beta x)^2 - (\alpha^2 - 1) y^2 = N \beta^2 ;$$

(*) Supporremo che D non sia quadrato perfetto, e noteremo che questo richiamo del teorema di Lagrange non infirma l'indole elementare del presente lavoro, perchè, nelle *Vorlesungen ueber Zahlentheorie* (Supp. VIII), Dirichlet dimostra il teorema suddetto, avendo cura di evitare qualunque ricorso alla teorica delle frazioni continue.

e per ciò che si è concluso nel numero precedente, si avrà:

$$\beta x + y \sqrt{\alpha^2 - 1} = (\beta K + H \sqrt{\alpha^2 - 1}) (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^m,$$

indicando con (K, H) una tal soluzione della penultima equazione (o della [1] che le è equivalente), nella quale si verifichi la condizione: $H < \beta \sqrt{N}$. L'ultima eguaglianza, divisa per β, diventa:

$$x + y \sqrt{D} = (K + H \sqrt{D}) (\alpha + \beta \sqrt{D})^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [4]$$

Si ottiene così per l'equazione [1] la formola annunziata nell'esordio di questa nota. Naturalmente, per ottenere le soluzioni (x, y), basterà eguagliare le parti razionali dei due membri, nonchè i coefficienti dell'irrazionale $\sqrt{D}$. Che poi così facendo si ottengano vere soluzioni dell'equazione [1], qualunque siano il valore dell'intero m e la soluzione particolare (K, H) che si sceglie, si dimostra moltiplicando membro a membro la formola [4] e quella che se ne deriva cambiandovi $\sqrt{D}$ in $-\sqrt{D}$.

3. Le soluzioni particolari (K, H) sono, non che sufficienti, necessarie per la risoluzione dell'equazione [1], e però costituiscono un sistema fondamentale. Per chiarir questo punto, mostreremo che se alla m della formola [4] si danno consecutivamente i valori 0, 1, 2 ecc., e se per ogni valore che si dà alla m si ha cura di sostituire nella formola le soluzioni (K, H) dalla minima alla massima, il valore del binomio $x + y \sqrt{D}$ andrà crescendo. Col valore del binomio crescerà ancora la soluzione (x, y), epperò non saranno possibili le soluzioni ripetute.

Che per ogni valore m_1 attribuito alla m il binomio cresca col crescere della soluzione particolare (K, H), è evidente. Siano dunque (K', H'), (K'', H'') le soluzioni particolari minima e massima. Si dovrà dimostrare che il valor massimo che il binomio prende quando $m = m_1$, è più piccolo del valor minimo ch'esso prende quando $m = m_1 + 1$. Ossia che:

$$(K'' + H'' \sqrt{D}) (\alpha + \beta \sqrt{D})^{m_1} < (K' + H' \sqrt{D}) (\alpha + \beta \sqrt{D})^{m_1 + 1},$$

ovvero:

$$K'' + H'' \sqrt{D} < (K' + H' \sqrt{D}) (\alpha + \beta \sqrt{D}).$$

Ora, poichè dalla $H'' < \beta \sqrt{N}$ discende: $K'' < \alpha \sqrt{N}$ e conseguentemente

$$K'' + H'' \sqrt{D} < \sqrt{N}(\alpha + \beta \sqrt{D}),$$

basterà dimostrare che

$$\sqrt{N} \leq K' + H' \sqrt{D}.$$

Poichè

$$N = (K' + H' \sqrt{D})(K' - H' \sqrt{D}),$$

si trova che la disuguaglianza da dimostrarsi si risolve in una proposizione evidente.

4. Rimane a trattarsi un caso alquanto più difficile: quello dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = -N. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [5]$$

Incominciando come per la [1], si consideri dapprima l'equazione

$$x^2 - (a^2 - 1)\, y^2 = -N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [6]$$

e si chiami (x_1, y_1) una soluzione di questa. È opportuno premettere, lasciandone al lettore la verificazione, che, posto

$$L = \sqrt{\frac{N}{2(a-1)}},$$

sarà:

$$y_1 \lesseqgtr L, \quad \text{secondochè} \quad x_1 \lesseqgtr (a-1)\, y_1\,;$$

e viceversa.

Se $y_1 \leq L$, non discuteremo più oltre. Ma se $y_1 > L$, essendo per virtù della [6] $x_1 < ay_1$, si ponga: $x_1 = ay_1 - h$ (h positiva). Sostituendo nella [6] e risolvendo per rispetto alla y_1 l'identità risultante, si otterrà:

$$y_1 = ah \pm \sqrt{(a^2 - 1)\, h^2 - N}.$$

Dovendo il secondo membro essere un intero, come il primo, bisogna che la quantità sotto radice sia un quadrato intero k^2. Scrivasi adunque:

$$y_1 = ah \pm k,$$

e quanto ai numeri k ed h, si noti che essi forniscono una soluzione della [6]. Se $h \leq L$, dalle formole

$$x_1 = a y_1 - h; \qquad y_1 = a h \pm k$$

si dedurrà:

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2 - 1} = (\pm k + h \sqrt{a^2 - 1})(a + \sqrt{a^2 - 1}).$$

Ma se $h > L$, come la y_1, nelle formole precedenti dovrà rifiutarsi il segno negativo davanti alla k. Perchè, se fosse

$$x_1 = a y_1 - h; \qquad y_1 = a h - k,$$

sarebbe ancora:

$$x_1 - (a - 1) y_1 + k - (a - 1) h = 0,$$

eguaglianza assurda, perchè da $y_1 > L$ ed $h > L$ segue: $x_1 > (a-1) y_1$ e $k > (a - 1) h$. Se dunque $h > L$, si avrà:

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2 - 1} = (k + h \sqrt{a^2 - 1})(a + \sqrt{a^2 - 1}).$$

Ancora:

$$k + h \sqrt{a^2 - 1} = (\pm k' + h' \sqrt{a^2 - 1})(a + \sqrt{a^2 - 1})$$

e dovrà rifiutarsi il segno negativo davanti alla k', se h' sarà maggiore di L. In questa supposizione:

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2 - 1} = (k' + h' \sqrt{a^2 - 1})(a + \sqrt{a^2 - 1})^2.$$

Ecc., ecc. – La serie delle soluzioni (x_1, y_1), (k, h), (k', h') ecc. procederà verso una soluzione (K, H) nella quale si avveri la condizione $H \leq L$. Se non fosse così, il secondo membro dei successivi valori del binomio $x_1 + y_1 \sqrt{a^2 - 1}$ crescerebbe indefinitamente, e ciò è assurdo. Si conclude che si deve finalmente arrivare a una eguaglianza della forma

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2 - 1} = (\pm K + H \sqrt{a^2 - 1})(a + \sqrt{a^2 - 1})^m,$$

nella quale K ed H sono i valori della x e della y in una soluzione della [6], e di più: $H \leq L$.

5. Applicando l'ultima conclusione alla [5], dopo averla scritta sotto la forma

$$(\beta x)^2 - (\alpha^2 - 1)\, y^2 = - N \beta^2,$$

e procedendo come nel n. 2, si ottiene per la [5] la seguente formola di risoluzione:

$$x + y \sqrt{D} = (\pm K + H \sqrt{D})\, (\alpha + \beta \sqrt{D})^m \; . \; . \; . \; . \quad [7]$$

Per K ed H dovranno intendersi i valori della x e della y in una soluzione soggetta alla condizione

$$H \leq \beta \sqrt{\frac{N}{2\,(\alpha - 1)}} = \sqrt{\frac{N\,(\alpha + 1)}{2\,D}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [8]$$

6. Per dimostrare che le soluzioni (K, H) nelle quali

$$H \leq \sqrt{\frac{N\,(\alpha + 1)}{2\,D}}$$

sono fondamentali per ciò che riguarda la risoluzione della [5], basterà accertare che la [7] non comprende soluzioni ripetute. Così accade per l'appunto, eccetto il caso limite in cui nella precedente disuguaglianza debba prendersi, oltre al segno di minoranza, anche quello li eguaglianza, vale a dire il caso in cui la limitazione superiore

$$\sqrt{\frac{N\,(\alpha + 1)}{2\,D}}$$

ia essa stessa valore della y in una soluzione della [5]. Infatti il alore del secondo membro della [7] cresce col crescer della m, e, er ogni singolo valore di m, col crescere del valore algebrico della uantità $\pm K$. Per ben fissare questo secondo punto, basterà provare he il valore del binomio $H \sqrt{D} - K$ cresce al diminuire di K, che ioè, dette (K', H'), (K'', H'') due soluzioni della [5], e supposta la econda maggiore della prima,

$$H' \sqrt{D} - K' > H'' \sqrt{D} - K''.$$

iò risulta dall'identità

$$(H' \sqrt{D} + K')\,(H' \sqrt{D} - K') = (H'' \sqrt{D} + K'')\,(H'' \sqrt{D} - K''),$$

nellà quale

$$H' \sqrt{D} + K' < H'' \sqrt{D} + K''$$

e conseguentemente

$$H' \sqrt{D} - K' > H'' \sqrt{D} - K''.$$

Resta da dimostrare che il massimo valore che il secondo membro della [7] prende quando $m = m_1$, è minore del minimo valore che esso prende quando $m = m_1 + 1$. Dicendo (K_1, H_1) la massima delle soluzioni che verificano la [8], si tratta adunque di dimostrare che

$$(K_1 + H_1 \sqrt{D})(\alpha + \beta \sqrt{D})^{m_1} < (-K_1 + H_1 \sqrt{D})(\alpha + \beta \sqrt{D})^{m_1 + 1},$$

ossia che:

$$K_1 + H_1 \sqrt{D} < (-K_1 + H_1 \sqrt{D})(\alpha + \beta \sqrt{D})$$

od anche:

$$(K_1 + H_1 \sqrt{D})^2 < N(\alpha + \beta \sqrt{D}).$$

Ora, escludendo il caso in cui

$$H_1 = \sqrt{\frac{N(\alpha + 1)}{2D}},$$

si ha sempre:

$$H_1 < \sqrt{\frac{N(\alpha + 1)}{2D}},$$

e conseguentemente:

$$K_1 < \sqrt{\frac{N(\alpha - 1)}{2}}.$$

Dalle ultime due disuguaglianze si ricava per l'appunto:

$$(K_1 + H_1 \sqrt{D})^2 < N\left(\sqrt{\frac{\alpha + 1}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha - 1}{2}}\right)^2 = N(\alpha + \beta \sqrt{D}).$$

Osservazione. — Si riconosce facilmente che nel caso limite poco fa escluso, la massima tra le soluzioni fornite dalla [7] per $m = m_1$ coincide con la minima di quelle che se ne ottengono per $m = m_1 + 1$. Nel calcolo pratico, trascurando o l'una o l'altra, si eviteranno le soluzioni ripetute.

6. **Esempi**: *a*). Debbasi risolvere l'equazione

$$x^2 - 12\,y^2 = 52.$$

Relativamente alla soluzione [7, 2] dell'equazione $x^2 - 12y^2 = 1$, si ottiene $2\sqrt{52}$, come limitazione superiore per la y delle soluzioni fondamentali, la quale perciò non supera 14. Le soluzioni fondamentali si ottengono con pochi tentativi, e sono le quattro seguenti:

$$(8,\ 1) \quad (10,\ 2) \quad (22,\ 6) \quad (32,\ 9)$$

Il secondo membro della [4] prende quattro valori, che sono:

$$(8 + \sqrt{12})\,(7 + 2\sqrt{12})^m; \quad (10 + 2\sqrt{12})\,(7 + 2\sqrt{12})^m;$$
$$(22 + 6\sqrt{12})\,(7 + 2\sqrt{12})^m; \quad (32 + 9\sqrt{12})\,(7 + 2\sqrt{12})^m.$$

Facendo consecutivamente $m = 0, 1, 2$, ecc., si ricaveranno a quattro a quattro, e schierate in ordine per ragion di grandezza, tutte le soluzioni della equazione proposta.

b) Debbasi risolvere la

$$x^2 - 13\,y^2 = -\,12.$$

elativamente alla soluzione (649, 180) della $x^2 - 13\,y^2 = 1$, si ttiene $\sqrt{\dfrac{12\,.\,650}{2\,.\,13}}$, come limitazione superiore per la y delle soluzioni ondamentali. In queste la y non può adunque superare 17. Da ciò isulta che le soluzioni fondamentali sono: (1, 1); (14, 4); (25, 7). secondo membro della [7] prende 6 valori, e questi sono:

$$(-\,25 + 7\sqrt{13})\,(649 + 180\sqrt{13})^m;$$
$$(-\,14 + 4\sqrt{13})\,(649 + 180\sqrt{13})^m;$$
$$(-\,\ \ 1 + \ \ \sqrt{13})\,(649 + 180\sqrt{13})^m;$$
$$(\ \ \ \ 1 + \ \ \sqrt{13})\,(649 + 180\sqrt{13})^m;$$
$$(\ \ 14 + 4\sqrt{13})\,(649 + 180\sqrt{13})^m;$$
$$(\ \ 25 + 7\sqrt{13})\,(649 + 180\sqrt{13})^m.$$

onendo $m = 1, 2, 3$, ecc., si ricaveranno a sei a sei, in ordine per gion di grandezza, tutte le soluzioni dell'equazione proposta (escluse fondamentali, già trovate).

c) L'equazione proposta sia

$$x^2 - Dy^2 = -1.$$

Supponendola possibile, se ne dica (a, b) la soluzione minima. La soluzione minima della $x^2 - Dy^2 = 1$ sarà $(2a^2 + 1, 2ab)$. Relativamente a questa, il limite della y per le soluzioni fondamentali della proposta è $\sqrt{\frac{a^2+1}{D}}$, cioè b, valore della y esso stesso. Le formole di risoluzione per l'equazione $x^2 - Dy^2 = 1$ sarebbero:

$$x + y\sqrt{D} = (-a + b\sqrt{D})(2a^2 + 1 + 2ab\sqrt{D})^m$$
$$x + y\sqrt{D} = (\ \ a + b\sqrt{D})(2a^2 + 1 + 2ab\sqrt{D})^m.$$

Ma poichè la soluzione che viene dalla seconda formola quando vi si fa $m = m_1$ coincide con quella che viene dalla prima per $m = m_1 + 1$, per l'osservazione fatta nel n. 5, le due formole si riducono all'unica

$$x + y\sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})(2a^2 + 1 + 2ab\sqrt{D})^m.$$

(Continua). G. FRATTINI.

SULLA DIVISIBILITÀ DEI POLINOMI PER IL BINOMIO $x^r - a^r$ e per il polinomio $x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + \ldots\ldots + a^{m-1}x + a^m$

(Continuazione e fine: V. pag. 123).

3.

Ai caratteri di divisibilità per $x^r - a^r$ possono sempre essere ridotti quelli della divisibilità di un polinomio per $x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + \ldots + a^{m-1}x + a^m$, in virtù del seguente teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un polinomio P *sia divisibile per* $\mathrm{x}^m + \mathrm{a}\,\mathrm{x}^{m-1} + \mathrm{a}^2\mathrm{x}^{m-2} + \ldots + \mathrm{a}^{m-1}\mathrm{x} + \mathrm{a}^m$ *è che dividendo* P *per* $\mathrm{x}^{m+1} - \mathrm{a}^{m+1}$ *si abbia per resto* C $(\mathrm{x}^m + \mathrm{a}\,\mathrm{x}^{m-1} + \ldots + \mathrm{a}^{m-1}\mathrm{x} + \mathrm{a}^m)$, *indicando con* C *una quantità che non dipende dalla* x.

Infatti, se P è divisibile per $x^m + a x^{m-1} + \ldots + a^{m-1} x + a^m$, si potrà porre:

$$P = Q (x^m + a x^{m-1} + \ldots + a^m)$$

donde

$$P (x - a) = Q (x^{m+1} - a^{m+1})$$

e per conseguenza

$$\frac{P (x - a)}{x^{m+1} - a^{m+1}} = Q.$$

Di qui rilevasi, — essendo Q un polinomio intero —, che la divisione del prodotto $P (x - a)$ per $x^{m+1} - a^{m+1}$ deve farsi esattamente. Ora, supposto m intero e maggiore di zero, il resto della divisione di $x - a$ per $x^{m+1} - a^{m+1}$ è $x - a$ stesso e perciò se R è il resto della divisione di P per $x^{m+1} - a^{m+1}$ dovrà, (n° 1. teor. II), $R (x - a)$ esser divisibile per $x^{m+1} - a^{m+1}$ e quindi aversi:

$$R (x - a) = C (x^{m+1} - a^{m+1})$$

ossia:

$$R = C (x^m + a x^{m-1} + \ldots + a^{m-1} x + a^m)$$

con C indipendente dalla x, perchè R dev'essere di grado inferiore a $m + 1$.

Reciprocamente se la condizione imposta dal teorema è soddisfatta e si ha perciò

$$P = Q_1 (x^{m+1} - a^{m+1}) + C (x^m + a x^{m-1} + \ldots + a^m),$$

sostituendo $(x - a) (x^m + a x^{m-1} + \ldots + a^m)$ in luogo di $x^{m+1} - a^{m+1}$, si trova:

$$P = [Q_1 (x - a) + C] (x^m + a x^{m-1} + \ldots + a^m)$$

e questa uguaglianza dimostra che P è divisibile per $x^m + a x^{m-1} + \ldots + a^m$.

In particolare, e nell'ipotesi di $a = 1$, *il polinomio*

$$p = x^{n^{(m)}} + x^{n^{(m-1)}} + \ldots + x^{n^{(2)}} + x^{n^{(1)}} + x^{n^{(0)}}$$

che ha $m + 1$ *termini e tutti i coefficienti positivi e uguali all'unità è divisibile per* $x^m + x^{m-1} + \ldots + x + 1$ *se gli* $m + 1$ *numeri*

$$n^{(m)}, n^{(m-1)}, \ldots n^{(2)}, n^{(1)}, n^{(0)}$$

costituiscono un sistema completo di numeri incongrui rispetto al numero (modulo) $m+1$.

Infatti, ciò significando che i numeri $n^{(h)}$ ($h = 0, 1, 2, \ldots m$) divisi per $m+1$ danno resti uguali a *tutti* i numeri interi inferiori ad $m+1$, la divisione successiva dei singoli termini di p per $x^{m+1} - 1$ riprodurrà come resti (n. 2), in un ordine qualunque, *tutti* i termini del polinomio $x^m + x^{m-1} + \ldots + x + 1$.

Come esempi notevoli di classi di numeri $n^{(h)}$ si possono citare:

1°) i numeri

$$m\,k,\ (m-1)\,k,\ \ldots\ldots\ 3h,\ 2\,k,\ k,\ 0$$

k ed $m+1$ essendo numeri primi tra loro;

2°) i numeri

$$g^{m-1},\ g^{m-2},\ \ldots\ g^2,\ g,\ 1,\ 0$$

supposto che $m+1$ sia un numero primo e g una sua *radice primitiva.* (*)

4.

Non essendosi fatta nessuna restrizione circa al segno di a, è naturale altresì che i caratteri di divisibilità d'un polinomio P per $x^m - a\,x^{m-1} + a^2\,x^{m-2} - \ldots \mp a^m$ (dove il segno negativo dell'ultimo termine si riferisce al caso di m dispari e il positivo a quello di m pari) siano riducibili, nel modo espresso dal teorema dimostrato, ai caratteri di divisibilità per $x^{m+1} - a^{m+1}$ se m è dispari e per $x^{m+1} + a^{m+1} = x^{m+1} - (-a)^{m+1}$ se m è pari.

Nell'ipotesi di $a = -1$ ed essendo ancora

$$n^{(m)},\ n^{(m-1)},\ \ldots\ n^{(1)},\ n^{(0)}$$

un sistema completo di numeri incongrui rispetto al modulo $m+1$, determiniamo i casi particolari in cui il polinomio

$$p_1 = \pm\, x^{n^{(m)}} \pm x^{n^{(m-1)}} \pm \ldots \pm x^{n^{(1)}} \pm x^{n^{(0)}}$$

(*) Gli enunciati dei teoremi che si riferiscono a questi due casi speciali, si trovano negli esercizi 1° e 2° dell'*Algebra* del BERTRAND (trad. del prof. BETTI) a pag 170. Ma l'ultima linea del 2° esercizio va corretta, ed invece che: *è divisibile per* $1 - x^p$, vi si deve leggere: *è divisibile per* $1 + x + x^2 \ldots + x^{p-1}$.

è divisibile per

$$x^m - x^{m-1} + x^{m-2} - \ldots + x - 1$$

se m è dispari; o per

$$x^m - x^{m-1} + x^{m-2} - \ldots - x + 1$$

se m è pari. Pongasi

$$n^{(h)} = (m+1)\, q^{(h)} + r^{(h)} \qquad (h = 0, 1, 2 \ldots m) \;\ldots\; [1]$$

indicando con $q^{(h)}$ il quoziente e con $r^{(h)}$ il resto della divisione di $n^{(h)}$ per $m+1$. I resti $r^{(h)}$, qualunque sia m, non possono differire in altro che nell'ordine dai numeri $0, 1, 2, \ldots. m$.

I Se m è dispari, e conseguentemente $m+1$ è pari, si dovrà cercare il resto della divisione di p_1, per $x^{m+1} - 1^{m+1}$. Ora è facile vedere (n. 2, 2°) che $x^{n^{(h)}}$ diviso per $x^{m+1} - 1^{m+1}$ dà di resto $x^{r^{(h)}}$. Affinchè dunque il resto della divisione di p_1 per $x^{m+1} - 1^{m+1}$ sia $x^m - x^{m-1} + \ldots. + x - 1$, o questo polinomio cambiato di segno (*), vale a dire *affinchè* p_1 *sia divisibile per* $x^m - x^{m-1} + \ldots. + x - 1$, *è necessario e sufficiente che i termini dei quali l'esponente* $n^{(h)}$ *diviso per* $m+1$ *dà di resto un numero pari della serie* $0, 1, 2, \ldots. m$, *abbiano segno contrario a quelli di cui l'esponente diviso per* $m+1$ *dà di resto un numero dispari della stessa serie.*

La [1] pone in chiaro che la metà degli $m+1$ numeri $n^{(h)}$ sarà pari e l'altra dispari, e che dovranno avere lo stesso segno quelli della medesima specie.

II. Se m è pari, e perciò $m+1$ è dispari, il resto della divisione di p_1 per $x^{m+1} - (-1)^{m+1}$ deve essere $C\,(x^m - x^{m-1} + x^{m-2} - \ldots. - x + 1)$, e poichè (n. 2, 2°) $x^{n^{(h)}}$ diviso per $x^{m+1} - (-1)^{m+1}$ dà per resto $(-1)^{(m+1)\,q^{(h)}} x^{r^{(h)}}$, si trova che dev'essere $C = \pm 1$ e si conclude che *affinchè* p_1 *sia divisibile per* $x^m - x^{m-1} + x^{m-2} - \ldots. - x + 1$, *è necessario e sufficiente che i termini i quali hanno per esponente un numero* $n^{(h)}$ *pari, abbiano segno contrario a quelli che hanno per esponente un nu-*

(*) In tal caso, infatti, la quantità C del teorema generale avrebbe il valore -1.

mero dispari. Dalla [1] rilevasi, in questo caso, che non v'ha alcun legame necessario tra il numero dei termini aventi lo stesso segno e quello dei termini che hanno il segno contrario, e che perciò è anche possibile che tutti i termini di p_1 abbiano uno stesso segno, per essere gli esponenti o tutti pari o tutti dispari.

Una serie speciale di numeri $n^{(h)}$, per il caso I (m dispari) è data, per esempio, dai numeri

$$m\,k,\ (m-1)\,k,\ (m-2)\,k\ \ldots\ 2\,k,\ k,\ 0$$

nell'ipotesi che k ed $m+1$ siano numeri primi fra loro.

Questa serie vale anche per il caso II (m pari) supponendo che k sia un numero *dispari* e primo con $m+1$. Infine, nello stesso caso II, possono essere presi per esponenti $n^{(h)}$ i numeri

$$(m+1)\,k+(m+2)\,m,\ (m+1)\,k+(m+2)\,(m-1),$$
$$(m+1)\,k+(m+2)\,(m-2),\ \ldots\ (m+1)\,k+(m+2)\,.\,2$$
$$(m+1)\,k+(m+2),\ (m+1)\,k$$

dove k è un numero intero qualunque; ed in corrispondenza di queste serie sussistono i teoremi:

1.° *Se* m *è dispari e i numeri* k *ed* m + 1 *sono primi fra loro, il polinomio*

$$x^{m\,k}-x^{(m-1)\,k}+x^{(m-2)\,k}-\ldots-x^{2\,k}+x^{k}-1$$

è divisibile per il polinomio

$$x^{m}-x^{m-1}+x^{m-2}-\ldots-x^{2}+x-1$$

2.° *Se* m *è pari e* k *è un numero dispari e primo con* m + 1, *il polinomio*

$$x^{m\,k}-x^{(m-1)\,k}+x^{(m-2)\,k}-\ldots+x^{2\,k}-x^{k}+1$$

è divisibile per il polinomio

$$x^{m}-x^{m-1}+x^{m-2}-\ldots+x^{2}-x+1.$$

3.° *Se* m *è pari e* k *è un numero intero qualunque, il polinomio*

$$x^{(m+1)\,k+(m+2)\,m}+x^{(m+1)\,k+(m+2)\,(m-1)}+x^{(m+1)\,k+(m+2)\,(m-2)}$$
$$+\ldots+x^{(m+1)\,k+(m+2)\,.\,2}+x^{(m+1)\,k+(m+2)}+x^{(m+1)\,k}$$

è divisibile per il polinomio

$$x^m - x^{m-1} + x^{m-2} - \ldots + x^2 - x + 1.$$

I teoremi 1° e 2° combinano con due dei teoremi dimostrati per altra via dal signor prof. *Gatti.* (*)

Roma, aprile 1891.

ELCIA SADUN.

TEMI D'ESAME

1. Un corpo percorre una distanza con velocità costante. Se la velocità si aumenta di 6 metri, il corpo percorrendo la medesima distanza impiega due secondi di meno. Se la velocità si diminuisce di 10 metri impiega 6 secondi di più. Trovare la velocità e lo spazio percorso dal mobile.

2. Divisi per metà gli angoli esterni di un quadrato, le quattro bisettrici formano un altro quadrato le cui diagonali sono parallele ai lati della prima figura e la cui superficie è doppia di quella del quadrato dato.

Prof. A. MOTTA.

3. In una progressione geometrica a termini positivi, il primo termine è 5 e la somma del secondo e del terzo termine è 100. Trovare la ragione.

4. Nella equazione $x^2 - 6px + 5p^2 = 0$, determinare p in modo che la somma dei quadrati delle radici sia eguale a 104.

5. In un triangolo isoscele dal punto di mezzo di uno dei lati eguali si conduce la perpendicolare alla base. Dimostrare che la base resta divisa in due parti una tripla dell'altra.

6. In un cerchio si conduce una corda AB e dal punto di mezzo di uno degli archi in cui la circonferenza è divisa dalla corda si conduce un'altra corda CD che tagli la prima in un punto E, indi si tirano AD, BD. Dimostrare che si ha la proporzione $AE : EB :: AD : DB$.

Dott. L. BOSI.

7. Col calcolo algebrico e senza ricorrere alle tavole trigonometriche, trovare gli angoli acuti pei quali ha luogo la proprietà che la somma della tangente e della cotangente sia 4.

Risposta: 15° e 75°.

8. Si ha un tronco di cono retto nel quale l'apotema è uguale alla somma dei raggi r e R delle due basi. Dimostrare che la metà dell'altezza del tronco

(*) V. Anno I, fasc. VI, pag. 191, teoremi II e III.

è media proporzionale fra i due raggi r e R, e il volume del tronco è il prodotto della sua superficie totale per il sesto dell'altezza; e conoscendo l'angolo (acuto) che l'apotema fa con una delle basi, trovare il rapporto fra i due raggi R e r e quello fra l'apotema e uno di questi raggi.

Risposte: detto α l'angolo acuto fra l'apotema a e una delle basi si ha $R : r = \cot^2 \frac{\alpha}{2}$; $a : r = \operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha}{2}$.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Sulle somme delle combinazioni dei numeri naturali. — 1. Indico con K_p^n la somma delle combinazioni (prodotti) dei primi n numeri naturali a p a p e la dico dell'ordine p^{esimo}. Così p. es.:

$$K_3^5 = 1.2.3 + 1.2.4 + 1.2.5 + 1.3.4 + 1.3.5 + 1.4.5 + 2.3.4 + 2.3.5 + 2.4.5 + 3.4.5.$$

Somme di 1° ordine:

$$K_1^1 = 1 \qquad = \binom{2}{2}$$

$$K_1^2 = 1 + 2 \qquad = \binom{3}{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K_1^n = 1 + 2 + 3 \ldots\ldots n \qquad = \binom{n+1}{2}$$

Somme di 2° ordine:

$$K_2^2 = 1.2 \ldots\ldots\ldots\ldots = 2\, K_1^1$$

$$K_2^3 = 1.2 + 1.3 + 2.3 \ldots\ldots\ldots = K_2^2 + 3\, K_1^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K_2^n = 1.2 + 1.3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = K_2^{n-1} + n\, K_1^{n-1}$$

Sommando e riducendo:

$$K_2^n = 2\, K_1^1 + 3\, K_1^2 + 4\, K_1^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots n\, K_1^{n-1}$$

Somme di 3° ordine:

$$K_3^3 = 1.2.3 \ldots\ldots\ldots\ldots = 3\, K_2^2$$

$$K_3^4 = 1.2.3 + 1.2.4 + 1.3.4 + 2.3.4 = K_3^3 + 4\, K_2^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K_3^n = 1.2.3 + 1.2.4 + \ldots\ldots\ldots\ldots = K_3^{n-1} + n\, K_2^{n-1}$$

Sommando e riducendo:

$$K_3^n = 3\,K_2^2 + 4\,K_2^3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\; n\,K_2^{n-1}$$

E in generale poi:

Somme del p^{esimo} *ordine* (p < n):

$$K_p^p = 1\,.\,2\,\dots\dots\,p\,\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = p\,K_{p-1}^{p-1}$$
$$K_p^{p+1} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = K_p^p + (p+1)\,K_{p-1}^p$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$K_p^n = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = K_p^{n-1} + n\,K_{p-1}^{n-1}$$

Sommando e riducendo:

$$K_p^n = p\,K_{p-1}^{p-1} + (p+1)\,K_{p-1}^p + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\; n\,K_{p-1}^{n-1}.$$

Le quali relazioni permettono di calcolare la somma di un certo ordine mediante quelle dell'ordine precedente.

2. Applicando le formole ora trovate, che si compendiano nella $K_p^n = K_p^{n-1} + n\,K_{p-1}^{n-1}$, si trova il seguente prospetto dei valori delle somme di 1°, 2°, 3°.... ordine. La prima riga di unità è posta per dedurre anche le somme di 1° ordine colla stessa legge con cui si deducono le altre: ogni numero cioè si ottiene aggiungendo al precedente della riga il prodotto del numero immediatamente superiore a questo pel numero d'ordine della colonna: così p. es. $735 = 225 + 85 \times 6$.

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
1° ordine .	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	...
2° ordine . . .		2	11	35	85	175	322	546	870	1320	...
3° ordine			6	50	225	735	1960	4536	9450	18150	...
4° ordine				24	274	1624	6769	22440	63273	157773	...
5° ordine					120	1764	13132	67284	269325	902055	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

3. La serie $K_1^1\,K_1^2 \dots\, K_1^n$ è una progressione aritmetica di 2° ordine, la cui 2ª differenza è 1: perciò la serie: $2\,K_1^1\;3\,K_1^2\;4\,K_1^3\,\dots\dots\,n\,K_1^{n-1}$ è una progressione aritmetica di 3° ordine, la cui 3ª differenza è $3\,.\,1 = 3$ (*).

Se ne deduce che la serie:

$$2\,K_1^1\;\left(2\,K_1^1 + 3\,K_1^2\right)\;\left(2\,K_1^1 + 3\,K_1^2 + 4\,K_1^3\right)\,\dots\dots\,\left(2\,K_1^1 + \dots\dots\, n\,K_1^{n-1}\right)$$

cioè la serie

$$K_2^2 \qquad K_2^3 \qquad\qquad K_2^4 \quad , \quad \dots\dots \qquad K_2^n$$

è una progressione aritmetica del 4° ordine, la cui 4ª differenza è ancora 3: infatti le prime differenze di questa serie non sono altro che i termini della progressione di 3° ordine considerata prima (eccetto il 1° termine).

(*) V. Baltzer: *Elementi di matematica*. (Traduz. Cremona). *Aritmetica generale*. (1875). § 28, n. 9.

Collo stesso ragionamento si prova che la serie: $K_3^3\ K_3^4 \ldots\ K_3^n$ è una progressione aritmetica del 6° ordine la cui 6ª differenza è $5 \,.\, 3 = 15$. Similmente la serie: $K_4^4\ K_4^5 \ldots\ K_4^n$ è una progressione aritmetica dell'8° ordine, la cui 8ª differenza è: $7 \,.\, 15 = 105$: ed in generale la serie: $K_p^p\ K_p^{p+1} \ldots$ K_p^n è una progressione dell'ordine $(2p)^{\text{esimo}}$, la cui $(2p)^{\text{esima}}$ differenza è: $(2p-1)\,d_{2(p-1)}$; dove $d_{2(p-1)}$ è l'ultima differenza della progressione precedente.

4. Si possono avere delle formole che dieno direttamente il valore di queste somme. Così: $K_1^n = \binom{n+1}{2}$.

Per avere K_2^n si sostituiscano nelle formole trovate i valori di $K_1^1\ K_1^2 \ldots$ e si avrà: $K_2^n = 2\binom{2}{2} + 3\binom{3}{2} + \ldots\ n\binom{n}{2}$.

Ma (come si è osservato) i termini di questa somma formano una progressione aritmetica di 3° ordine, di cui il 1° termine è 2 e le differenze iniziali 7, 8, 3; perciò la somma degli $(n-1)$ termini considerati (*) è data da:

$$K_2^n = 2(n-1) + 7\binom{n-1}{2} + 8\binom{n-1}{3} + 3\binom{n-1}{4}$$

la quale con facili trasformazioni diventa:

$$K_2^n = \binom{n+1}{4} + 2\binom{n+2}{4}$$

ove si tenga conto della formola: $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

Così per K_3^n si sostituiscano nella formola trovata i valori di $K_2^2,\ K_2^3, \ldots$ K_2^{n-1} dedotti da quest'ultima e si avrà:

$$K_3^n = 3\left\{2\binom{4}{4}\right\} + 4\left\{\binom{4}{4} + 2\binom{5}{4}\right\} + \ldots\ n\left\{\binom{n}{4} + 2\binom{n+1}{4}\right\}.$$

Ma i termini di questa somma formano una progressione aritmetica del 5° ordine, di cui il primo termine è 6 e le differenze iniziali sono: 38, 93, 111, 65, 15; perciò la somma degli $n-2$ termini considerati è data da:

$$K_3^n = 6(n-2) + 38\binom{n-2}{2} + 93\binom{n-2}{3} + 111\binom{n-2}{4} +$$
$$65\binom{n-2}{5} + 15\binom{n-2}{6}$$

che con facili trasformazioni diventa:

$$K_3^n = \binom{n+1}{6} + 8\binom{n+2}{6} + 6\binom{n+3}{6}.$$

(*) Id. Id., n. 7.

Con analogo procedimento si troverebbe:

$$K_4^n = \binom{n+1}{8} + 22\binom{n+2}{8} + 58\binom{n+3}{8} + 24\binom{n+4}{8}$$

e così di seguito per le altre somme.

G. Riboni.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 91*, 92*, 93*, 94, 98* e 99*

91*. *Dimostrare che* $13453^7 - 13452^7 - 1$ *è divisibile per* 180969757.

(D. Besso).

Dimostrazione del Sig. *D. de Blasi*, alunno del R. Liceo di Lecce.

Si ha successivamente

$$a^7 - (a-1)^7 - 1 = 7a^6 - 21a^5 + 35a^4 - 35a^3 + 21a^2 - 7a =$$
$$7a(a^5-1) - 21a^2(a^3-1) + 35a^3(a-1) =$$
$$7a(a-1)\left\{a^4 - 2a^3 + 2a^2 + a^2 - 2a + 1\right\} = 7a(a-1)\left\{a(a-1)+1\right\}^2.$$

Sostituendo ad a il numero 13453, poichè allora $a^7 - (a-1)^7 - 1$ riducesi all'espressione data, devesi dimostrare che

$$7 \,.\, 13453 \,.\, 13452 \,.\, (13453 \,.\, 13452 + 1)^2$$

è divisibile per 180969757. Ora questo numero è primo con 7, con 13452 e con 13453, per cui esso deve dividere l'altro fattore $(13453 \,.\, 13452 + 1)^2$. Si trova infatti che $180969757 = 13453 \,.\, 13452 + 1$. (*)

Il Sig. *P. Marano* ad una soluzione algebrica della quistione fa seguire la seguente osservazione.

Che $\dfrac{a^7 - (a-1)^7 - 1}{a(a-1)+1}$ rappresenti un intero, qualunque sia l'intero a, può mostrarsi ancora come segue.

Si ha:

$$a(a-1) + 1 = a^2 - a + 1 =$$
$$\left\{a - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1}\right)\right\}\left\{a - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1}\right)\right\} =$$
$$\left\{a - (\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)\right\}\left\{a - (\cos 60^\circ - i \operatorname{sen} 60^\circ)\right\}.$$

(*) Dimostrazioni sostanzialmente analoghe alla presente pervennero dai Sigg. *A. Baldassarre* (alunno del R. Ist. tec. Bari), *G. Calvitti* e *A. Perna* (R. Ist. tec. Napoli), *G. Candido* e *R. Palma* (R. Liceo Lecce), *A. Dal Buono Sidoli* (R. Ist. tec. Reggio Emilia), *A. Gandolfi* (R. Ist. tec. Piacenza), *D. Taverna* (R. Liceo Catanzaro), *G. Trapani* (R. Ist. nautico Catania).

Posto $a = \cos 60° + i \operatorname{sen} 60°$, quindi $a - 1 = \cos 120° + i \operatorname{sen} 120°$, pel teorema di Moivre, risulta

$$\begin{aligned} a^7 - (a-1)^7 - 1 &= \cos 7 . 60° + i \operatorname{sen} 7 . 60° - \cos 7 . 120° - i \operatorname{sen} 7 . 120° - 1 \\ &= \cos 60° + i \operatorname{sen} 60° + \cos 60° - i \operatorname{sen} 60° - 1 = 0: \end{aligned}$$

dunque $a^7 - (a-1)^7 - 1$ è divisibile per $a - (\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$.

Si dimostra similmente che la stessa espressione è divisibile per $a - (\cos 60° - i \operatorname{sen} 60°)$, quindi sarà divisibile per il prodotto delle due ultime espressioni che è $a(a-1)+1$.

Il quoziente che è un polinomio intero in a, darà un valore numerico intero per a intero.

92*. *Risolvere l'equazione*

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0.$$

(D. Besso).

Soluzione dei Sigg. *L. Manfredonio*, alunno del R. Liceo di Foggia; *G. Bartoli* e *M. Salvadori*, alunni della R. Accademia di Livorno; *G. Candido*, alunno del R. Liceo di Lecce; *A. Dal Buono Sidoli*, alunno del R. Istituto tecnico di Reggio Emilia; *P. Marano*, studente a Catania; *E. G. Ricci*, alunno del R. Liceo di Bari; *D. Taverna*, alunno del R. Liceo di Catanzaro; *G. Trapani*, alunno del R. Istituto nautico di Catania.

Poichè la somma dei coefficienti è 0, l'equazione ammette la radice 1. Dividendo per $x - 1$, si ha:

$$x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = 0.$$

Quest'equazione, per la medesima ragione, ammette la radice 1, e dividendo di nuovo per $x - 1$, si ha

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

il cui discriminante è $6^2 - 4 . 9 = 0$, e perciò $x_1 = x_2 = -\frac{6}{2} = -3$. Quindi l'equazione proposta ha due coppie di radici eguali ad 1 e -3.

Soluzione dei Sigg. *A. Ognissanti* ed *E. G. Ricci*, alunni del R. Liceo di Bari.

Pongasi $x = y - 1$. Fatte le debite sostituzioni e riduzioni si ottiene l'equazione biquadratica

$$y^4 - 8y^2 + 16 = 0,$$

le cui radici sono $+2$, $+2$, -2, -2. Dalla posizione fatta per x si ricavano conseguentemente come radici dell'equazione proposta i quattro valori 1, 1, -3 e -3.

Soluzione dei Sigg. *A. di Bello*, *G. Calvitti*, *A. Ceci*, *A. Perna*, *G. Santorelli*, alunni del R. Istituto tecnico di Napoli; *A. Baldassarre*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari; *G. Candido* e *D. de Blasi*, alunni del R. Liceo di Lecce.

L'equazione proposta può scriversi successivamente

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + 6x^3 - 12x^2 + 6x + 9x^2 - 18x + 9 =$$
$$x^2(x^2 - 2x + 1) + 6x(x^2 - 2x + 1) + 9(x^2 - 2x + 1) =$$
$$(x^2 + 6x + 9)(x^2 - 2x + 1) = (x + 3)^2 (x - 1)^2 = 0,$$

perciò essa ammette due radici eguali a -3 e due eguali ad 1.

Soluzione dei Sigg. *A. Gandolfi*, alunno del R. Istituto tecnico di Piacenza e *S. Lopriore*, studente privato a Capurso.

Dividendo per x^2 tutti i termini della data equazione e raccogliendo secondo le potenze della x, si avrà

$$x^2 + \frac{9}{x^2} + 4\left(x - \frac{3}{x}\right) - 2 = 0.$$

Ora facendo $x - \dfrac{3}{x} = y$, risulta $x^2 + \dfrac{9}{x^2} = y^2 + 6$, talchè sostituendo si giunge all'equazione

$$y^2 + 4y + 4 = 0,$$

le cui radici sono -2 e -2. Sostituendo questi valori di y nella $x - \dfrac{3}{x} = y$ si ottiene due volte l'equazione $x^2 + 2x - 3 = 0$, che ha per radici $+1$ e -3. Le radici della proposta equazione sono per conseguenza $1, 1, -3$ e -3.

93*. *Se* A, B, C *indicano gli angoli d'un triangolo*, m, m′, m″ *le sue mediane, e si pone* $\tan$ A : $\tan$ B : $\tan$ C $=$ p : q : r *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{t}$, *dimostrare che si ha:*

$$m^2 : m'^2 : m''^2 = \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{p}\right) : \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{q}\right) \cdot \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{r}\right).$$

(A. Lugli).

Soluzioni sostanzialmente analoghe da *A. Ognissanti*, alunno del R. Liceo di Bari; *A. Baldassarre*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari; *G. Bartoli*, alunno della R. Accademia di Livorno; *G. Calvitti*, alunno del R. Istituto tecnico di Napoli; *L. Catelli*, alunno del R. Istituto tecnico di Como; *A. Dal Buono Sidoli*, alunno del R. Istituto tecnico di Reggio Emilia; *R. Palma*, alunno del R. Liceo di Lecce; *G. Trapani*, alunno del R. Istituto nautico di Catania.

Indicando rispettivamente con a, b, c i lati relativi alle mediane m, m', m'' del triangolo ABC, si ha:

$$4m^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \quad 4m'^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2,$$
$$4m''^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2. \qquad \ldots\ldots [1]$$

Da $a = b \cos C + c \cos B$, si ricava l'uguaglianza $a^2 = ab \operatorname{sen} C \cot C + ac \operatorname{sen} B \cot C = 2S(\cot C + \cot B)$, dove S rappresenta l'area del triangolo.

Similmente $b^2 = 2S(\cot A + \cot C)$, $c^2 = 2S(\cot B + \cot A)$. In conseguenza

$$\begin{aligned} 2b^2 + 2c^2 - a^2 &= 2S(4\cot A + \cot B + \cot C) = \\ &2S\{3\cot A + (\cot A + \cot B + \cot C)\} \end{aligned} \quad \ldots\ldots [2]$$

con due relazioni analoghe.

Dall'ipotesi $\tan A : \tan B : \tan C = p : q : r$, deducesi $\cot A = \frac{1}{p\alpha}$, $\cot B = \frac{1}{q\alpha}$, $\cot C = \frac{1}{r\alpha}$, avendo posto $\tan A : p = \alpha$, onde si ha:

$$\begin{aligned} &3\cot A + \cot A + \cot B + \cot C = \\ &\frac{1}{\alpha}\left(\frac{3}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{t} + \frac{3}{p}\right) \end{aligned} \quad \ldots\ldots [3]$$

con due relazioni analoghe.

Dalle [1], [2] e [3] segue poi immediatamente:

$$m^2 : m'^2 : m''^2 = \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{p}\right) : \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{q}\right) : \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{r}\right).$$

94. *Se nel piano di una conica di centro* O *sono dati due punti* M *ed* N, *e* P *e* Q *sono rispettivamente i punti d'incontro delle polari di* M *ed* N *coi diametri* N O *ed* M O, *i triangoli* M O P *ed* N O Q *sono equivalenti.*

(G. Rozzolino).

Dimostrazione del Sig. Prof. *F. Palatini.*

Ricordiamo che due triangoli reciproci rispetto ad una conica sono omologici (Chasles: *Sections coniques*). Ora MON è, nella figura definita dalla questione, il triangolo reciproco, rispetto alla data conica, al triangolo formato dalle RS, UV, polari rispettive di M, N, e dalla retta all'infinito del piano, polare di O; perciò, indicando con h_∞ la retta all'infinito del piano, si trovano in linea retta retta i punti

$$(MO,\ UV) \equiv Q, \quad (NO,\ RS) \equiv P, \quad (MN,\ h_\infty).$$

Dunque la retta PQ è parallela alla MN, perciò i due triangoli MPO, NQO sono equivalenti perchè sono tali i triangoli PQM, PQN costruiti sulla stessa base PQ e compresi fra le stesse parallele PQ, MN.

Dimostrazione del Sig. Prof. *G. Sforza.*

Siano M, N i punti dati nel piano della conica di centro O e P, Q le intersezioni di MO, NO rispettivamente con le polari m, n di M, N. Dico intanto che $OP \,.\, ON = OQ \,.\, OM$. Infatti, sia p la polare di P; allora p ed n saranno parallele, perchè P ed N sono sul medesimo diametro. Se M', Q' sono le intersezioni del diametro PN con p, n rispettivamente, saranno (M', P), (Q', N) coppie di punti coniugati di una involuzione di centro O, e perciò sarà

$$OM' \,.\, OP = OQ' \,.\, ON.$$

Ma i due triangoli MOM', QOQ' sono simili e si ha

$$\frac{OM}{OQ} = \frac{OM'}{OQ'},$$

dunque sarà anche

$$OP \,.\, OM = OQ \,.\, ON.$$

Segue da ciò che i due triangoli OPM, OQN saranno equivalenti, c. v. d.

Dimostrazione del Sig. Prof. *S. Catania*.

Se M descrive il diametro OM, la sua polare descriverà un fascio proiettivo alla punteggiata (M), il quale fascio taglierà il diametro ON in una punteggiata (P) prospettiva ad esso, e quindi proiettiva ad (M). Quando M cade in Q, P cadrà in N, perchè la polare di N passando per Q, viceversa, la polare di Q passerà per N. L'inviluppo delle rette analoghe alle MP ed NQ è perciò una conica, della quale OM ed ON sono tangenti. Questa conica è un'iperbole, perchè quando M coincide con il punto all'infinito di OM, il punto corrispondente P cadrà in O, perchè OM è un diametro, e quando N cade all'infinito su ON, allora Q cadrà pure in O. Pertanto i punti contatto delle tangenti OM, ON sono all'infinito, e quella conica è un'iperbole della quale OM ed ON sono gli assintoti. E allora, per un noto teorema di Apollonio, è costante l'area dei triangoli analoghi ad OMP, ed in particolare sono equivalenti i due triangoli OMP, ONQ, che è quanto volevasi dimostrare.

Soluzione del Sig. *C. Aiello*, studente nella R. Università di Napoli.

Sia $OM = m$ e $ON = n$ e siano ON e OM gli assi delle x e delle y rispettivamente. È chiaro che l'equazione della curva riferita a questi assi è

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c = 0$$

e quelle delle polari di M e N, rispettivamente, sono

$$hmx + bmy + c = 0 \quad \text{e} \quad anx + hny + c = 0.$$

La parte che la polare di M taglia sull'asse delle x, cioè OQ, è data dalla prima di queste equazioni facendovi $y = 0$ e similmente dalla seconda facendo $x = 0$ si ottiene OP, e propriamente si ha che $OQ = -\frac{c}{hm}$ e $OP = -\frac{c}{hn}$.

Ora si sa che i triangoli aventi un angolo in comune stanno fra loro come i rettangoli dei lati che comprendono l'angolo comune, dunque

$$\Delta MQO : \Delta NPO = OM \,.\, OQ : ON \,.\, OP = m\frac{c}{hm} : n\frac{c}{hn} = 1,$$

e perciò $\Delta MQO = \Delta NPO$.

98* e **99***. *Verificare che ponendo* $x = \frac{m}{2}(m^2 + 3) \qquad y = \frac{1}{2}(m^2 + 1)$ *si soddisfa all'equazione*

$$x^2 - (m^2 + 4)\, y^2 = -1 \quad (*).$$

(*) Supponendo m intero e dispari, si ottiene una soluzione dell'equazione in numeri interi.

Verificare che ponendo $x = \dfrac{m^2 - m + 2}{2}$ $\quad y = \dfrac{m-1}{2}$ *si soddisfa all'equazione*

$$x^2 - (m^2 + 4)\, y^2 = m \quad (^*).$$

(G. Frattini).

Soluzioni dei Sigg. *G. Ascoli,* alunno del R. Liceo di Ancona; *A. Baldassarre,* alunno del R. Istituto tecnico di Bari; *A. Dal Buono Sidoli,* alunno del R. Istituto tecnico di Reggio Emilia; *D. De Blasi,* alunno del R. Liceo di Lecce; *G. Floridia,* studente a Ragusa; *S. Lopriore,* studente privato a Capurso; *L. Manfredonio,* alunno del R. Liceo di Foggia; *P. Marano,* studente privato a Catania; *A. Ognissanti,* alunno del R. Liceo di Bari; *E. G. Ricci,* alunno del R. Liceo di Bari; *P. P. Rizzuti,* studente privato a Catanzaro; *P. Taverna,* alunno del R. Liceo di Catanzaro; *G. Trapani,* alunno del R. Istituto nautico di Catania.

Si ha invero:

$$\left[\frac{m}{2}\,(m^2+3)\right]^2 - (m^2+4).\left[\frac{1}{2}\,(m^2+1)\right]^2 =$$
$$\frac{(m^6 + 6\,m^4 + 9\,m^2) - (m^6 + 6\,m^4 + 9\,m^2 + 4)}{4} = -1$$

e

$$\left(\frac{m^2 - m + 2}{2}\right)^2 - (m^2+4)\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 =$$
$$\frac{(m^4 - 2\,m^3 + 5\,m^2 - 4\,m + 4) - (m^4 - 2\,m^3 + 5\,m^2 - 8\,m + 4)}{4} = m.$$

Se m è intero e dispari $m^2 + 3$, $m^2 + 1$, $m^2 - m + 2$ ed $m - 1$ sono evidentemente pari, onde

$$\frac{m}{2}\,(m^2+3)\,, \quad \frac{1}{2}\,(m^2+1)\,, \quad \frac{m^2 - m + 2}{2} \quad \text{e} \quad \frac{m-1}{2}$$

sono numeri interi.

Sono pervenute inoltre le soluzioni seguenti: quistione **102**. dal Sig. *G. Rozzolino;* **105**. *R. Bettazzi, F. Palatini;* **106**. *N. Bottini, G. Trapani;* **107**. *G. Candido, C. Chigiotti, D. de Blasi, P. Marano, R. Palma, G. Trapani* — soluzioni alle quali verrà data evasione nei fascicoli venturi.

La Redazione.

(*) Supponendo m intero e dispari, si ottiene una soluzione dell'equazione in numeri interi.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

108*. Se in un quadrangolo, le cui diagonali sono perpendicolari l'una all'altra, è inscritto un quadrato coi lati paralleli a queste diagonali, il doppio del lato del quadrato è medio armonico fra le diagonali del quadrangolo.

A. BALDASSARRE.

109*. Se dal vertice d'un triangolo si tirano alla base le due rette formanti con essa angoli uguali a quello al vertice, si hanno due triangoli simili fra loro e al dato: un poligono costruito sulla base sta alla somma dei poligoni simili e similmente descritti sugli altri due lati, come la base sta alla somma dei due lati dei due nuovi triangoli, che giacciono su di essa. (**)

I. AMALDI.

110*. Posto

$$b_n = 2^n + \binom{n-1}{1} . 2^{n-2} + \binom{n-2}{2} . 2^{n-4} + \ldots\ldots,$$

dove il 2° membro finisce col termine 1 se n è pari e con $\frac{n+1}{2} . 2$ se n è dispari, dimostrare che si ha:

$$\sqrt{2} = \lim_{n=\infty} \frac{b_{n-1} + b_n}{b_n}.$$

111. Posto

$$\alpha_n = (2a)^n + (n-1)(2a)^{n-2} . b + \frac{(n-2)(n-3)}{1 . 2}(2a)^{n-4} . b^2 + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 . 2 . 3}(2a)^{n-6} . b^3 + \ldots,$$

con $a > 0$ e $b > 0$, dove il secondo membro deve finire col termine $b^{\frac{n}{2}}$ se n è pari e col termine $\frac{n+1}{2} . 2a . b^{\frac{n-1}{2}}$ se n è dispari, si ha:

$$\sqrt{a^2 + b} = a - 1 + \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n + b . \alpha_{n-1}}{\alpha_n}$$

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

(**) Questa proposizione può considerarsi come una generalizzazione del teorema di Pitagora. Già una generalizzazione del teorema stesso trovasi in PAPPO, nel libro IV delle sue *Collezioni matematiche*. Questo teorema di Pappo viene riportato anche dal COMMANDINO nel suo *Euclide* in una nota alla prop. XXXI del VI libro. Vedi a questo proposito gli *Elementi di matematica* del BALTZER. Plan. § 9,7.

e la differenza tra $\sqrt{a^2+b}$ ed $a-1+\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\alpha_n+b\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$ è minore di $\dfrac{b^n}{\alpha_{n-1}\cdot\alpha_n}$.

F. GIUDICE.

112. Se a, b, n sono interi qualunque ad a, b primi tra loro, e si indica con $D(x, y)$, $\varphi(x)$ rispettivamente il massimo comun divisore di x, y ed il numero degli interi minori di x e primi con esso, il numero dei valori interi di z, minori di n, che rendono il binomio $az+b$ primo con n, è dato da

$$d_1 d_2 \ldots . d_m \cdot \varphi\left(\frac{n}{d_1 d_2 \ldots . d_m}\right)$$

essendo $d_1 = D(n, a)$, $d_2 = D\left(\frac{n}{d_1}, d_1\right)$, $d_3 = D\left(\frac{n}{d_1 d_2}, d_2\right)$ .... $d_m = D\left(\frac{n}{d_1 d_2 \ldots . d_{m-1}}, d_{m-1}\right)$ e posto che sia $d_{m+1} = 1$.

U. SCARPIS.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

CLÉMENT THIRY. — *Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre.* — Gand, Ad. Hoste; Paris, Gauthier-Villars; 1891. — Prix: 2 fs.

Il teorema di Stewart stabilisce, com'è noto, una relazione fra tre punti A, B, C in linea retta ed un punto qualunque O. Tenendo conto dell'identità di Eulero, ossia: $\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}=0$, esso è espresso dall'eguaglianza

$$\overline{OA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{OB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{OC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0.$$

Le parole che l'illustre Chasles scriveva a proposito del medesimo fin dal 1837: « cette propriété, qui est à peu près inconnue de nos jours, mériterait « bien de prendre place dans les éléments ou au moins dans les compléments « de géométrie » (*) non cessano dall'avere il pregio dell'attualità e il libro del signor prof. Thiry è la migliore giustificazione possibile da darsi alle medesime, in quanto, anche tacendo dell'opportunità di trovar svolto in modo elementare la teoria del baricentro con numerosi particolari ed applicazioni, l'A. valendosi quasi esclusivamente degli elementi della geometria, con esposizione facile ed ordinata, è riuscito a mostrare nel modo il più felice di quale possente ausilio sia questo teorema nella trattazione di questioni moltoplici e come serva mirabilmente alla deduzione di numerose relazioni metriche.

(*) CHASLES: *Aperçu historique*, pp. 175-176.

Il libro consta di sei capitoli i cui titoli sono: — Diverse forme del teorema di Stewart. Ordinarie conseguenze classiche di questa proposizione. — Applicazioni diverse relative al triangolo. — Applicazioni relative al quadrilatero ed al trapezio. — Applicazioni relative al circolo. — Luoghi geometrici. — Baricentro o centro delle distanze proporzionali.

Da notarsi, fra i molti particolari degni d'interesse, nel

I Cap.: quattro differenti dimostrazioni del teorema di Stewart due delle quali proprie dell'A.; le applicazioni al calcolo della bisettrice, della mediana e della simediana d'un triangolo in funzione dei lati; nel

II. Cap.: la formola $\sum_{1}^{n-1} \alpha_i^2 = \frac{n-1}{2}\left[b^2 + c^2 - \frac{a^2(n+1)}{3n}\right]$ che dà la somma dei quadrati delle $n-1$ rette α_i congiungenti il vertice A di un triangolo ABC coi punti del lato opposto che dividono questo lato in n parti uguali; le proprietà che risultano dalla considerazione delle congiungenti i vertici di un triangolo coi punti che dividono i lati opposti nello stesso rapporto e in particolar modo il calcolo delle distanze dei punti notevoli del triangolo, quali il centro del cerchio inscritto, il circumcentro, il baricentro, l'ortocentro, il punto di Lemoine, i punti di Brocard, distanze derivanti tutte da una formola generale, che l'A. propone di chiamare *omniformola metrica del triangolo,* che dà la distanza d'un punto qualunque P al punto d'intersezione K_n delle rette dividenti i lati del triangolo nel rapporto delle potenze n^{esime} dei lati adiacenti, ossia

$$\overline{PK}_n^2 = \frac{a^n \cdot \overline{PA}^2 + b^n \cdot \overline{PB}^2 + c^n \cdot \overline{PC}^2}{a^n + b^n + c^n} -$$

$$\left(\frac{abc}{a^n + b^n + c^n}\right)^2 \left\{a^{n-2} b^{n-2} + b^{n-2} c^{n-2} + c^{n-2} a^{n-2}\right\},$$

e diverse applicazioni fra le quali la soluzione del problema: condurre pel vertice d'un triangolo ABC una tal retta AD che determini due triangoli ABD, ADC di uguali cerchi inscritti. Questo capitolo va considerato quale un contributo assai felice a profitto della recente geometria del triangolo.

III Cap.: Espressioni delle diagonali del trapezio in funzione dei lati, ottenute con grandissima semplicità, come pure la soluzione del problema: date quattro circonferenze concentriche tagliarle con una segante in modo che il segmento staccato dalle prime due uguagli quello determinato dalle rimanenti.

Da notarsi nel cap. V, fra gli otto luoghi studiati, quelli dei punti M pei quali le distanze da due punti fissi A e B soddisfano alle relazioni $m\overline{MA}^2 \pm n\overline{MB}^2 = K^2$ e nel cap. VI la dimostrazione di carattere puramente geometrico del teorema di Lagrange (*).

Termina il libro una raccolta di 34 esercizi a risolvere, alcuni dei quali accompagnati da un cenno di soluzione.

Vogliamo sperare che questa breve rassegna invoglierà molti colleghi a prender cognizione dell'importante lavoro del signor prof. Thiry, convinti che

(*) Mém. de Berlin 1878, p. 290.

vi troveranno materia da trasportarsi nella scuola qualunque sia il grado d'insegnamento da essi impartito.

Nota. Il teorema di Stewart trovasi dimostrato nelle *Lezioni d'Alge. ele.* del Prof. Bellacchi (vol. 1°, p. 101) e negli *Elementi di Mat.* del Baltzer (Pla. § 14, 22, p. 201). Nella prima di queste opere l'A. ne fa applicazione al calcolo delle lunghezze delle bisettrici interna ed esterna di un triangolo e della mediana. Il luogo corrispondente alla formola $m \cdot \overline{MA}^2 + n \cdot \overline{MB}^2 = K^2$ è considerato tanto dal prof. Bellacchi (vol. 3°, p. 43), quanto dal Baltzer (Pla. § 14, 22, p. 201). L'applicazione del sig. Thiry alle proprietà che scaturiscono dalla considerazione delle rette congiungenti i vertici dal triangolo $A\,B\,C$ ai punti che dividono i lati opposti nello stesso rapporto, si può leggere ampliata nell'articolo del professor Besso: *Di alcune proprietà del triangolo*, pubblicato in questo *Periodico* (vol. II, p. 1 a 6). Si può osservare, cosa del resto notata altresì dal signor Thiry, che la *omniformola* sopra citata non è che un caso particolare dell'altra

$$m_1 \cdot \overline{MA}_1^2 + m_2 \cdot \overline{MA}_2^2 + \ldots = (m_1 + m_2 + \ldots) \cdot \overline{MX}^2 + \frac{m_1 m_2 \cdot A_1 A_2 + m_1 m_3 \cdot A_1 A_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$$

che stabilisce una relazione fra la distanza del baricentro X d'un sistema di punti A_1, $A_2, \ldots,$ gravati delle masse m_1, $m_2, \ldots,$ ad un punto qualunque M e le distanze dei punti A fra di loro e di M da questi punti, ed invero è facile vedere che K_n non è in ultima analisi che il centro di gravità di tre masse applicate ai vertici del triangolo $A\,B\,C$ proporzionali ad a^n, b^n, c^n. Ciò non toglie per altro all'A. il merito d'aver stabilito la sua formola indipendentemente da ogni concetto di centro di gravità, in maniera facile e spedita, e di averne fatte applicazioni originali degne di particolare elogio.

A. Lugli.

Prof. AUGUSTO BIFFIGNANDI. — *Le principali proprietà delle grandezze proporzionali novamente esposte.* — Acireale, Tip. V. Micale. 1891.

Tra il metodo, che chiamasi *puro*, adottato da Euclide e dai suoi seguaci nella trattazione dell'importante argomento delle grandezze proporzionali, ed il metodo del Legendre e dei suoi imitatori, quello del Prof. Biffignandi tiene un posto a mio parere pressochè intermedio.

Se infatti da una parte l'A. segue il Legendre nel ricavare le principali relazioni di proporzionalità non operando direttamente sulle grandezze stesse, ma bensì invece su loro rappresentazioni convenzionali; dall'altra però se ne allontana e con notevole vantaggio poichè, rappresentando le grandezze con segmenti di rette invece che con numeri, non ha bisogno di alcun sussidio dall'aritmetica e si vale all'uopo opportunamente delle più elementari proposizioni di Planimetria che in tutti i trattati sogliono precedere il capitolo delle proporzioni.

Il lavoro in questione nel suo complesso è ben condotto, l'esposizione ne è chiara e mostra nell'A. piena conoscenza dell'argomento: venendo ai particolari mi limiterò ad osservare che il Teorema 2° non si può, a mio credere, far dipendere unicamente dal Teorema 1°, ma che esso ha pure bisogno dell' 11° al quale senza inconvenienti può essere posposto. Sotto l'aspetto didattico non mi sembrerebbe utile, a dir il vero, seguire nell'insegnamento della teoria delle grandezze proporzionali un tal nuovo indirizzo; e ciò non perchè manchi di chiarezza ma, al contrario, perchè rende pressochè intuitive certe verità che è preferibile vengano conquistate dai giovani anche con uno sforzo ma mediante i soli strumenti della Logica.

Questa mia opinione però non toglie che un Trattato di Geometria nel quale la teoria delle proporzioni fosse svolta secondo le idee del Prof. Biffignandi, presenterebbe su molti altri compilati ad imitazione del Legendre, il vantaggio della omogeneità e sarebbe convenientissimo per quelle scuole nelle quali lo studio della Matematica non è esclusivamente considerato come una ginnastica intellettuale e come parte di un'educazione filosofica.

U. Scarpis.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström. Nouvelle série. 5. N. 3. Stockholm, 1891.

El Progreso matemático. Director Don Zoel G. de Galdeano. Año I. N. 1° á 9°. Enero á Septiembre de 1891. Zaragoza.

Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Vol. XXIX. Luglio-Agosto 1891. — Napoli, B. Pellerano.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. de Longchamps. 3e Série, XV année. N. 8, 9, 10; Août, Septembre, Octobre 1891. — Paris, Librairie Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. 16e année. Nombres 1, 2. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles, 1891.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. Mansion et J. Neuberg. Deuxième série. Tome I. Octobre 1891. — Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2a. Vol. V. Fasc. 7° e 8°. Luglio e Agosto 1891.

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par M. B. Niewenglowski. 1re année N. 12 Septembre; 2e année, N. 1: Octobre 1891. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles.

Rivista di matematica diretta da G. Peano. Fasc. 8° e 9°. Agosto e Settembre 1891. — Torino, Fratelli Bocca.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. XXII Jahrgang. 5, 6, 7 Heft. — Leipzig, B. G. Teubner, 1891.

Amanzio (D.) — *Trattato di algebra elementare.* — Napoli, B. Pellerano, 1892. — Prezzo: L. 4,50.

Bernardi (G.) — Alcuni teoremi di poligonometria rettilinea e sferica. (Gior. di Mat. di Battaglini, Vol. XXIX, 1891).

Bettazzi (R.) — Osservazioni sopra l'articolo del Dott. G. Vivanti: *Sull'infinitesimo attuale.* (Rivista di Matematica, Anno I, 1891).

Bosi (L.) — Solution de la question 1587. (Nouvelles Ann. de Mathé. 3e série. Tome X, 1891).

De Galdeano (Z. G.) — *Problemas de aritmética y álgebra* con las nociones correspondientes de crítica algorítmica. Toledo, de Fando, 1885. - Precio: 4 pesetas.

— — *Crítica y síntesis del álgebra.* — Toledo, J. Peláez, 1888. - Precio: 6 pesetas.

— — *Estudios críticos sobre la generación de los conceptos matemáticos.* — Madrid, de Fortanet, 1890. - Precio: 2,50 pesetas.

Del Re (A.) — Sulle coppie di forme bilineari ternarie. (R. Acc. Lincei, 1891). — Di cinque superficie del 5° ordine con rette semplici e doppie ed una retta tripla (id., id.). — Su una superficie del 5° ordine dotata di una retta tripla, di rette doppie e di rette semplici (id., id.).

Eneström (G.) — Ett par formler för beräkning af mortaliteten inom pensionskassor eller andra slutna sällskap. (Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891, Stockholm). — Om de befolkningsstatistiska formlerna för beräkning af dödligheten under första lefnadsåret. (id., id.).

Fiore (V.) — Primi elementi di geometria. — Napoli, L. Chiurazzi, 1892. - Prezzo: L. 2,50.

Giudice (F.) — Rivista bibliografica. (Riv. di mat., An. I, 1891). = Prodotti infiniti. — Palermo, C. Clausen, 1891. = Sulla corrispondenza tra due iperspazii. (Gior. di Mat. di Battaglini, Vol. XXIX, 1891).

Lebon (E.) — Sur l'arrête de rebroussement d'une développable. (Bullettin de la Société Mathé. de France, t. VIII; 1880). — Note sur l'intersection d'une droite et d'une quadrique de révolution. — Mémoire sur l'épaisseur des berceaux horizontaux. — Note sur l'intégration des équations différentielles de la forme $F(p, px - y) = 0$. (Bulletin des anciens Élèves de l'École de Cluny; 1884). — Sur l'angle des lits oblique et normal de la vis Saint-Gilles. (Nouv. Ann. de Mathé., 3e série, t. III; 1884). — Construction nouvelle des points d'intersection d'une droite et d'une conique. (Nouv. Ann. de Mathé., 3e série, t. IV; 1885). — Sur le calcul de quelques intégrales. (Journal de Mathé. spéciales, 1888). — Sur les surfaces admettant les plans de symétrie du tétraèdre régulier et du cube. (Jour. de Mathé. spéciales, 1889). — Sur les demonstrations de quelques propriétés métriques du triangle. (Mathesis, t. IX; 1889). — Solution du Problème de Malfatti. (Rend. Cir. mat. Palermo, t. III; 1889). — Sulla determinazione degli ombelichi delle superficie tetraedriche. (Rend. Cir. mat. Palermo, t. IV; 1890).

Loria G. — Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati. (Rend. Cir. mat. Palermo, t. V; 1891). — Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. Contributo alla Storia critica dell'Algebra. (Rivista di mat., An. I; 1891).

Nannei (E.) — *Elementi di Geometria.* Parte 1a: Planimetria. — Milano, Dottor F. Vallardi, 1891. - Prezzo: L. 3.

Riboni (G.) e Gambioli (D.) — *Elementi di Geometria,* a uso delle Scuole secondarie inferiori, corredati da una raccolta di circa seicento esercizi. — Bologna, N. Zanichelli, 1892. - Prezzo: L. 2.

Testi (G. M.) — *Corso di aritmetica,* con numerosi esercizi e problemi, ad uso degli alunni delle scuole tecniche e dei ginnasi inferiori, secondo gli ultimi programmi governativi. 3a edizione. — Livorno, R. Giusti; 1891.

— — *Elementi di Geometria,* con una raccolta di 510 esercizi e problemi, ad uso degli alunni delle Scuole tecniche e normali, secondo gli ultimi programmi governativi. 2a edizione. — Livorno, R. Giusti, 1891.

Chiusura della redazione il dì 15 novembre 1891.