3

Associazione postale.

ANNO IV. Marzo-Aprile 1889. FASCICOLO II.

PERIODICO DI MATEMATICA PER L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

DIRETTO DA

DAVIDE BESSO
PROFESSORE DI CALCOLO INFINITESIMALE NELLA R. UNIVERSITÀ DI MODENA

AURELIO LUGLI
PROFESSORE DI MATEMATICA NEL R. ISTITUTO TECNICO DI ROMA

SOMMARIO:

Con una incisione in legno.

ROMA
TIPOGRAFIA METASTASIO
Via Venti Settembre, 122
1889

Associazione postale.

ANNO IV. SETTEMBRE-OTTOBRE 1889. FASCICOLO V.

PERIODICO
DI
MATEMATICA
PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

DIRETTO
DA

DAVIDE BESSO
PROFESSORE DI CALCOLO INFINITESIMALE
NELLA R. UNIVERSITÀ DI MODENA

AURELIO LUGLI
PROFESSORE DI MATEMATICA
NEL R. ISTITUTO TECNICO DI ROMA

SOMMARIO:

Con una tavola litografata.

ROMA
TIPOGRAFIA ELZEVIRIANA
nel Ministero delle Finanze
1889

Associazione postale.

ANNO IV. NOVEMBRE-DICEMBRE 1889. FASCICOLO VI.

PERIODICO DI MATEMATICA PER L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

DIRETTO DA

DAVIDE BESSO
PROFESSORE DI CALCOLO INFINITESIMALE NELLA R. UNIVERSITÀ DI MODENA

AURELIO LUGLI
PROFESSORE DI MATEMATICA NEL R. ISTITUTO TECNICO DI ROMA

SOMMARIO:

ROMA
TIPOGRAFIA ELZEVIRIANA
nel Ministero delle Finanze

1889

AVVISO — Il primo fascicolo del 1890 uscirà alla metà di gennaio. Quei Signori abbonati al Periodico, pel 1889, che intendono rinnovare l'associazione sono pregati a darne avviso alla direzione a scanso di ritardi nella spedizione.

PERIODICO DI MATEMATICA

PER L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

Questa pubblicazione è principalmente destinata agl'insegnanti ed agli allievi delle Scuole secondarie.

Essa contiene articoli di matematica, con speciale riguardo all'insegnamento secondario, serie di esercizi per la scuola, problemi di matematica elementare con le soluzioni, e fra questi i temi assegnati negli esami di licenza liceale e di Istituto tecnico, riviste di libri di matematica, ed anche quistioni a risolvere.

Coloro che spediscono lavori da pubblicarsi sono pregati di scriverli in buona calligrafia sopra una sola faccia di ciascun foglio, disegnando nitidamente in foglio a parte le figure che fossero annesse ai medesimi.

Chi manda quistioni a proporsi voglia accompagnarle da un cenno di soluzione.

Dei libri ed opuscoli ricevuti sarà fatta menzione nel giornale.

Il *Periodico di matematica per l'Insegnamento secondario* si pubblica in fascicoli bimestrali di 32 pagine in-8° grande. Il prezzo d'associazione è, pel Regno, di Lire 6, che potranno inviarsi o mediante vaglia da spedire al Prof. Aurelio Lugli, Via della Minerva, 46, Roma, *C*, o più semplicemente versandole al locale Ufficio di Posta, poichè al *Periodico* è concessa l'*associazione postale*.

Per gli Stati dell'unione postale il prezzo d'associazione è di Lire 7, da trasmettersi mediante vaglia postale al Prof. Aurelio Lugli, Via della Minerva, 46, Roma.

I collaboratori, quando sieno associati, riceveranno gratuitamente 25 copie dei loro lavori.

Per facilitare ai nuovi associati l'acquisto delle tre prime annate del *Periodico*, legate elegantemente in volumi, queste verranno loro cedute al prezzo di Lire 15, anzichè di Lire 18.

Indice Articoli Anno 1889

IL SISTEMA METRICO

I.

Parve a me, e ne convennero i miei amici, che curano la pubblicazione di questo periodico, che fosse opportuna, per l'indole di esso, una esposizione sommaria storico-teoretica della genesi del sistema metrico, perocchè è fuor di dubbio essere di sommo giovamento ai docenti la conoscenza un po' più approfondita delle cose che diuturnamente debbono insegnare ne' primi elementi; e però chieggo venia ai molti che sanno, dettando l'articolo che segue per i pochi che credono di profittarne.

Tre grandi rivoluzioni dello spirito umano si svolsero dopo il cristianesimo; il rinascimento e l'umanesimo in Italia, la riforma in Germania e la rivoluzione in Francia. È appunto nel primo periodo di quest'ultima che i pensatori francesi sollevarono a questione pratica l'unificazione delle misure, de' pesi, del tempo, degli angoli. La scienza, i commerci, i pericoli di frode esigevano da lungo tempo una unificazione, e se il sistema metrico non trionfò in ogni luogo della terra e fin da' primordi della sua creazione, dipese più che tutto dalle convulsioni politiche della Francia nel tempo della attuazione di esso, perocchè al di là de' confini di quella parvero tinti di sangue regale i campioni delle misure e dei pesi, e la opposizione naturale degli uomini a mutare le cose consuete si confuse con sentimenti politici ed umanitarii, e perfino il gigante che schiacciò la repubblica francese, fattosi sire, così poco bramava che le gesta di quella si ricordassero, che acconsentì che rivivessero insieme col sistema metrico le antiche misure; e negli ultimi giorni di vita Simone Laplace (1749-1827) scriveva:

« Il est donc permis d'espérer qu'un jour ce système qui réduit toutes les mesures et leurs calculs à l'échelle et aux opérations les plus simples de l'arithmétique décimale sera aussi généralement adopté que le système de numération dont il est le complément... »

I voti dell'uomo di genio vennero in gran parte, ma non integralmente soddisfatti. Ed in verità una mutazione nelle suddivisioni del giorno, così che questo divenisse di 10 ore, ognuna di 100 minuti, urtava, senza manifesto beneficio, contro le secolari abitudini umane, e però il giorno decimale nè trionfò, nè trionferà. All'incontro, che l'angolo retto (unità di misura angolare) dovesse dividersi in 100 parti era questione puramente scientifica, e i vantaggi di tale suddivisione si compendiano nella facilità de' conteggi: che se il patrimonio numerico delle scienze di osservazione e l'altro finanziario de' circoli divisi impedirono l'accettazione dell'arco decimale, non per questo è improbabile che lentamente il mondo scientifico faccia a quello buon viso.

Noi, del resto, lascieremo da un lato, del sistema, di cui ci occupiamo, appunto quello che riguarda tempo ed archi, delle quali unità la società posteriore a quella della Rivoluzione Francese sembrò voler fare categoria a parte.

Poche volte l'attività umana raggiunse quel culmine che ci si manifesta fra il 1750 e il 1800, specialmente nella società europea; alla testa d'un movimento vertiginoso si pose la Francia, ma le idee ben prima ed altrove avevano germogliato. Ciò non pertanto devesi riconoscere che una pleiade di uomini di genio fecero corona alla riscossa delle genti di Francia ed alla emancipazione delle classi popolari contro le storiche tirannie; solo è deplorevole che quella benefica riscossa degenerasse in ispaventevole degradazione, e quasi compromettesse principii supremamente morali. Il sistema metrico, che nacque nel seno della Rivoluzione, sentì anch'esso le dure conseguenze e del periodo delirante di quella e delle guerre od ostilità esteriori che ne furono per un certo periodo di tempo la conseguenza. Anche il sistema metrico si trovò coinvolto nelle miserie umane.

Ricorrere a lunghezze forniteci dalla natura allo scopo di creare l'unità lineare, non è idea originale della celebre Commissione del metro, perocchè l'antichissima civiltà chinese aveva provveduto in quel senso, e qualche cosa di simile troviamo anche nella civiltà del Nilo; nè è da maravigliare, poichè il concetto per sua natura è semplice e si presenta spontaneo allo spirito, ma il mondo animale e vegetale troppo subisce la influenza dell'ambiente per poter fornire un prototipo di unità lineare, ed è uopo ricorrere a fatti fisici, la mutabilità de' quali non sia prevedibile senza straordinari cataclismi, che del resto sfuggono alle ricerche umane.

Come una durata della rotazione terrestre dà la naturale unità di tempo, così la lunghezza del pendolo che batte, per esempio, il secondo medio e quella del meridiano sono i due principali mezzi che offre la natura per fissare l'unità delle misure lineari. Alla prima rivolse, in principio, la sua attenzione la Commissione metrica.

Clairaut (1713-1765) ha insegnato quale relazione esista fra le lunghezze di due pendoli che battono il secondo medio in paralleli diversi. Ed invero, se l_1 rappresenta la lunghezza del pendolo che batte il secondo medio all'equatore, la lunghezza l in luogo di latitudine φ è data dall'equazione

$$l = l_1 + \left(\frac{5}{2} q - \mu\right) l_1 \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

dove μ è lo schiacciamento terrestre, cioè $\frac{a-b}{a}$ e q il numero $\frac{1}{289}$, che è il rapporto della forza centrifuga alla gravità all'equatore. La formola corrisponde al livello del mare (*).

(*) La lunghezza d'un pendolo, che compie piccolissime oscillazioni di durata t nel vuoto, e l'accelerazione in un luogo dato, sono legate dalla relazione

$$t^2 = \pi^2 \frac{l}{g}$$

e se si assume per unità il secondo sessagesimale di tempo medio si ha

$$g = \pi^2 l.$$

La formola quindi di Clairaut, quando la si moltiplichi per π^2, diventa:

$$g = g' + \left(\frac{5}{2} q - \mu\right) g' \operatorname{sen}^2 \varphi$$

Qualora adunque g o l sieno esperimentalmente determinati in luogo qualunque, la costante g' (accelerazione equatoriale) diviene nota, poichè $\frac{a-b}{a}$ può essere fornito dalla geodesia. È facile comprendere che si può risolvere il problema reciproco, di ammirabile accertamento nel valore di $\frac{a-b}{a}$ del problema diretto.

La Commissione metrica aveva pensato da principio di determinare la lunghezza di detto pendolo al livello medio del mare per il parallelo 45°; tale lunghezza sarebbe stata facilmente ed in ogni tempo reperibile. Bastava determinarla in pollici, linee e millesimi di linea, suddivisioni della tesa che servi per le misure geodesiche del Perù, tener conto delle influenze della temperatura per le riduzioni del prototipo ad una temperatura normale, chiamare μέτρον quella calcolata lunghezza e edificare poscia tutto il sistema già oggi ben noto. Considerazioni forse soverchiamente teoretiche fecero abbandonare la lunghezza del pendolo: dicevasi dai commissari che l'unità di misura lineare in tal modo sarebbe dipesa da elementi ad essa affatto eterogenei, come la gravità ed il tempo, che quest'ultimo aveva suddivisioni arbitrarie e sessagesimali. Di più le belle tradizioni geodesiche francesi per le misure di D. Cassini (1625-1712), per quelle di Bouguer (1698-1758) e di Lacondamine (1701-1774) nel Perù, di Maupertuis (1698-1759) e di Clairaut in Lapponia fecero pendere la bilancia per la revisione della meridiana di Francia, e si deliberò che, allorquando si potesse conoscere in tese dell'arco del Perù la lunghezza d'un quarto del meridiano terrestre (nella ipotesi d'un ellissoide di rotazione), verrebbe assunta la diecimilionesima parte di essa come *unità* di lunghezza, la quale prenderebbe il nome classico di μέτρον.

I preludi della grande innovazione tu li ritrovi in opuscoli numerosi che accennavano al bisogno di unificazione, ma soltanto un anno dopo la convocazione degli Stati Generali a Versailles, che come è notissimo avvenne il primo maggio 1789, cioè il 10 maggio 1790 l'Assemblea nazionale udì per la prima volta Buffon, che fece la proposta di assumere per unità di lunghezza quella del pendolo che al livello medio del mare e sul parallelo 45mo batte il secondo medio.

Il cittadino Talleyrand (1754-1838), che incominciava quella grande e subdola carriera politica, era allora presidente dell'Assemblea; invaghitosi della proposta, volle che l' Inghilterra vi si associasse affinchè l'esito internazionale fosse assicurato, e che l'Accademia delle scienze se ne occupasse e venisse a riferire all'Assemblea; e vi riferì l' illustre Condorcet (1743-1794), immemore allora che, come Annibale, avrebbe un dì preso il veleno per evitare la ghigliottina. A questo tempo interviene la profonda modificazione sull'unità di misura. La Commissione delibera che questa non dovesse più essere la lunghezza del pendolo nelle condizioni prima dette, ma invece $\frac{1}{10000000}$ del quarto del meridiano terrestre. Il 20 marzo 1791, in seguito a relazione di Talleyrand e udito un'altra volta Condorcet, l'Assemblea votò senza contestazione, anzi con grande benevolenza, il novello progetto. La prima e celeberrima Assemblea nazionale si sciolse il 30 settembre 1791; spetta ad essa la gloria di aver sancito per legge il sistema metrico: esso sorse nel periodo puro della Rivoluzione, acquistò forza di legge quando moriva Mirabeau (1749-1791).

I teoremi di Huyghens (1629-1695) sulla forza centrifuga conducevano al concetto teorico che la lunghezza di un grado di meridiano dovesse essere maggiore verso il polo che non verso l'equatore, cioè che la terra dovesse essere schiacciata ai poli e rigonfia all'equatore.

I cannocchiali avevano mostrato il disco di Giove schiacciato nel senso dell'asse di rotazione. Newton (1643-1727), nell'ipotesi d'una sfera liquida omogenea delle dimensioni della terra e della velocità rotatoria di essa, aveva conchiuso per un valore

$$\frac{a-b}{a}=\frac{1}{230}$$

Senonchè le misure geodesiche ideate da Picard (1620-1682) in Francia e compiute da D. Cassini e da F. Lahire (1640-1718) colla misura dell'arco di meridiano da Dunkerque a Perpignano contraddissero per difetti intrinseci il risultato di Newton, e l'Accademia delle scienze immaginò e condusse a termine le due celebri spedizioni in Lapponia e in Perù verso la metà del secolo passato, per togliere di mezzo il dubbio sulla figura della terra. Newton aveva ragione. Prendendo per unità la tesa del Perù si pervenne allora ai seguenti risultati:

φ	
$-1^{\circ}\,30'$	$1^{\circ}=56750^{t}$
$+45\ \ 0$	$1^{\circ}=57069$
$+70\ \ 0$	$1^{\circ}=57422.$

Sull'arco di Lapponia allora si sollevarono dubbi e nel 1801 venne rifatto e lo si trovò minore di circa 223 tese. In ogni modo la questione era risoluta, e già colle misure di Francia e del Perù si possedeva un valore di *e* (eccentricità) abbastanza approssimato. Tali erano le cognizioni geodetiche in Francia al momento della costituzione della Commissione del sistema metrico. Prevalsa l'idea dell'unità di misura basata sulle dimensioni della terra, gli uomini illustri, che formavano parte della Commissione, ben presto convennero che era necessario rimisurare con cura infinita il meridiano Cassiniano; i buoni accordi del momento colla Spagna permettevano che l'arco si estendesse fino a Barcellona; in tale modo la nona parte del quadrante veniva misurata direttamente. Ma per misurare con rigore le basi necessarie, per leggere con precisione gli angoli dei triangoli, per determinare le latitudini alle estremità dell'arco occorrevano strumenti nuovi e precisi, uomini illuminati e devoti, denari dello Stato, concorso delle autorità centrali e dipartimentali, simpatia fra i contadini nelle campagne affinchè non si dovesse temere o della malevolenza o della ignoranza durante i lavori; per di più occorreva molto tempo per apprestare il necessario, ed in epoca vertiginosa come quella il molto tempo era un grande pericolo per l'impresa, perchè l'avvenire della Francia si oscurava ogni dì più.

La seconda Assemblea nazionale inaugurata il primo ottobre 1791 aveva già nel suo seno i germi del Terrore; i Giacobini erano in prevalenza. La Commissione del metro appena funzionava che si vide colpita dagli strali avvelenati del cittadino Marat (1744-1793) autore del libello « les Charlatans académiques, » il quale fra le altre cose malvage scriveva quanto segue:

« ..... Mais le beau de jeu, c'est que, sous prétexte de mesurer un degré de méridien si bien détérminé (sic) par les anciens, ils se sont fait accorder par le ministre 100,000 écus pour les frais de l'opération; petit gâteau qu'ils se partageront en frères... »

La Commissione metrica ebbe uomini celebri nel suo seno, ma si modificò in ordine di tempo per morti naturali o violente, per ritiro o spontaneo o dettato dallo sgomento dell'epoca; vi furono membri Laplace, Lalande (1732-1807), Borda (1733-1799), Condorcet, Cassini IV (1747-1845), Méchain (1744-1804), Legendre (1752-1833), Carnot (1753-1823), Bailly (1736-1793), Meusnier, Monge (1746-1818), Coulomb, Lavoisier (1743-1794), Haüy (1743-1822), Tillet, Brisson, Vandermond, Delambre (1749-1822), Biot (1774-1862), Arago (1786-1853), ecc., ecc.

A varie epoche vennero aggregati nuovi membri, ma gli eroi delle misure furono Delambre assieme al nepote di Lalande al nord; Méchain insieme con Tranchot al sud, e dopo la morte di Méchain, Biot insieme col giovane Francesco Arago. I lavori peraltro di questi due ultimi non entrarono veramente nelle determinazioni del quarto del meridiano terrestre allo scopo di averne il diecimilionesimo. Era stato deliberato che Borda e Coulomb si occupassero della lunghezza del pendolo che batte il secondo. Il celebre Borda doveva fornire le sbarre metalliche per le misure delle basi, i termometri per esplorare la temperatura di quelle, i circoli a ripetizione per le misure angolari; a Lavoisier ed a Haüy era affidato il compito di assegnare l'unità di peso. L'acqua distillata, al suo massimo di densità, fu il liquido scelto assai opportunamente per dare l'unità di peso, e si convenne che, dopo conosciuta la lunghezza del metro, il peso dell'acqua nelle condizioni sopra dette, nel vuoto e al parallelo di 45°, contenuta nel decimetro cubo varrebbe mille volte l'unità di peso, il grammo.

Da ultimo era necessario che alcuni membri si occupassero di redigere le tabelle di rapporto fra le antiche misure e le nuove, che le dovevano sostituire; e poichè conveniva misurare con una unità di lunghezza ben definita, si stabilì che tutte le misure sarebbero state fatte colla tesa che servì a Bouguer e a Lacondamine a misurare l'arco di meridiano in Perù; questa tesa, di cui il sesto è il piede, il settantaduesimo è il pollice e l'ottocentosessantaquattresimo è la linea (quest'ultima suddivisa fino alla sua millesima parte), doveva supporsi alla temperatura di $16^{gr}\ ^1/_4$ del termometro centigrado.

(Continua).

E. Millosevich.

Sopra i sistemi di Circoli aventi lo stesso asse radicale

I.

1. Nella presente Nota mi propongo di dimostrare con mezzi semplici ed elementari alcune importanti proprietà dei sistemi di cerchi aventi lo stesso asse radicale le quali, per la maggior parte, sono dovute al PONCELET *(Traité des Proprietés proiectives des figures)*.

2. Consideriamo un circolo di centro O (Tav. I, figura 1) e raggio O K, ed una retta I C perpendicolare ad un diametro K′ K di esso in un punto I del suo prolungamento. Preso sopra la C I un punto C ad arbitrio si guidi da esso al cerchio una tangente C D. Se si confrontano i due triangoli rettangoli C D O, C I O si scorge facilmente che C D è maggiore di C I. Perciò se col centro C e l'intervallo C D si descrive il cerchio, esso taglierà la retta K I in due punti L, L′ simmetricamente posti rispetto al punto I. I due cerchi O e C si segano ortogonalmente; e se si considera il sistema dei cerchi che, insieme al cerchio O, hanno per asse radicale la retta I C, tutti quanti verranno dal circolo C segati ortogonalmente.

Dal triangolo rettangolo C I L si osservi che si ha:

$$\mathrm{I\,L}^2 = \mathrm{C\,L}^2 - \mathrm{I\,C}^2 = \mathrm{C\,D}^2 - \mathrm{I\,C}^2$$

e dall'altro C D O:

$$\mathrm{C\,D}^2 = \mathrm{C\,O}^2 - \mathrm{O\,D}^2 = \mathrm{I\,C}^2 + \mathrm{I\,O}^2 - \mathrm{O\,K}^2,$$

quindi risulta:

(1) $$\mathrm{I\,L}^2 = \mathrm{I\,O}^2 - \mathrm{O\,K}^2.$$

Questa relazione prova che i punti L, L′ sono punti determinati della K I indipendenti dalla posizione del punto C. Tali punti, che godono di importanti proprietà, vennero dal PONCELET denominati *punti limiti* del sistema.

Se poi si considera il sistema dei cerchi che passano tutti per due punti fissi L, L′, è facile vedere che esso è segato ortogonalmente da quelli del sistema che ha per asse radicale la linea dei centri del primitivo e per punti limiti i punti L ed L′. Possiamo adunque dire: — « I circoli che segano ortogonalmente « quelli di un sistema dato costituiscono un altro sistema (detto « *ortogonale reciproco* del primo), il cui asse radicale è la linea dei « centri del primitivo. Se i circoli dell'un sistema si segano, « quelli dell'altro non si segano; i punti comuni ai circoli che si « segano sono i punti limiti di quelli che non si segano » (*).

II.

1. Consideriamo (Fig. 1) un punto P′, e costruiscasi la sua polare rispetto al circolo di centro O raggio O D del sistema che ha per asse radicale la C I, per punti limiti L ed L′: sia dessa la P T, essendo T il punto ove essa incontra la congiungente di P′ con O. Si avrà allora:

$$OP' . OT = OD^2,$$

ma perchè si ha pure (per la (1)):

$$OD^2 = IO^2 - IL^2 = (IO + IL)(IO - IL) = L'O . LO,$$

sarà:

$$OP' . OT = OL' . OL.$$

Laonde i quattro punti L, L′, P′, T sono sopra una medesima circonferenza. Perciò una volta fissato il punto P′, ne viene che qualunque sia il centro O del circolo del sistema rispetto al quale si prende la polare di P′, il corrispondente punto T si trova situato sulla circonferenza che passa pei tre punti fissi L, L′, P′. Siccome poi l'angolo P′ T P è costantemente retto, se ne conclude che le polari di P′ rispetto ai circoli del sistema passano tutte per un medesimo punto P che è l'estremo del diametro condotto per P′ nel circolo L L′ P′.

Si esamini ora il caso di un sistema di circoli che si segano nei punti L, L′: (Fig. 2) e scelto il punto P′ a piacere si determini la sua polare P T rispetto al circolo di centro O del sistema. Per P′, L′ ed L si faccia passare il cerchio; e condotta la tangente ad esso nel punto P′, si prolunghi fino ad incontrare in C l'asse radicale del sistema. Se si descrive il circolo di centro C e raggio C P′, esso sega ortogonalmente quello che passa per

---

(*) Amiot, Libro 3°, Cap. 4°, Teor. II.

P', L', L: quindi appartiene al sistema il cui asse radicale è OI e che ha per punti limiti L ed L'. Avremo adunque:

$$IL^2 = CI^2 - CP^2.$$

Ma perchè T è il punto ove la polare di P' rispetto al cerchio di centro O del sistema incontra la $P'O$, si avrà:

$$OP' . OT = OL^2 = OI^2 + IL^2$$

dunque sarà:

$$OP' . OT = OI^2 + CI^2 - CP^2 = OC^2 - CP^2$$

e perciò:

$$OP' . OT = OM . OM'.$$

Questa relazione prova che i quattro punti M, P', M', T sono sopra una stessa circonferenza; e siccome i primi tre stanno sul cerchio di centro C, così anche T si troverà situato su di esso; e ciò indipendentemente dalla posizione del centro O del primo cerchio considerato. Poichè poi l'angolo $P'TP$ è costantemente retto, se ne conclude, anche in tal caso, che le polari di P' rispetto ai circoli del sistema dato passan tutte per un punto P estremo del diametro, del circolo di centro C, che parte da P'. Possiamo quindi in generale affermare:

« Le polari di uno stesso punto rispetto ai circoli di un si-« stema qualunque passano per un punto fisso; questo è l'estremo « del diametro condotto pel punto dato nel cerchio che passa « per esso punto e che fa parte del sistema ortogonale reciproco « del sistema dato » (Poncelet).

Ed anche: — « Se un punto scorre sopra una circonferenza « di un sistema, scorre sulla stessa il centro del fascio di polari « di esso punto rispetto ai circoli del sistema ortogonale reci-« proco al sistema dato ».

2. Condotta $P'P$ (Figure 1 e 2), essa incontra l'asse radicale del sistema nel punto C centro del circolo $P'TP$; perciò sarà $CP' = CP$. Se quindi si conducono da P' e da P le $P'H'$, PH parallele all'asse, risulterà $IH' = IH$.

È dunque manifesto che se P' scorre sopra $P'H'$, corrispondentemente P scorrerà su PH. Dunque: — « Se un punto scorre « sopra una parallela all'asse radicale di un sistema di circoli, « il centro del fascio di polari di quel punto rispetto ai mede-

« simi circoli scorre sopra un'altra retta parallela all'asse radi-
« cale stesso situata, rispetto ad esso, simmetricamente alla pa-
« rallela primitiva ».

3. Se il punto P′ è situato sopra la parallela all'asse radicale condotta per uno dei punti limiti L′, l'angolo L L′ P′ è retto; e perciò il diametro del cerchio di centro C, che passa per P′, incontrerà di nuovo il cerchio in L. Dunque: — « Se un punto scorre « sulla parallela condotta all'asse radicale di un sistema di cerchi « per uno dei punti limiti, il centro del fascio corrispondente di « polari è costantemente l'altro punto limite ».

4. Se il punto P′ coincide con un punto S′ dell'asse radicale è facile vedere che il suo corrispondente S si troverà sopra l'asse radicale stesso. Poichè poi è manifesto che se si parte da S come polo si ritrova per centro del fascio delle polari di esso il primitivo punto S′, così potremo concludere il noto teorema: — « I punti dell'asse radicale di un sistema di circoli e i centri « dei fasci corrispondenti di polari rispetto a quei circoli sono « accoppiati in involuzione ». — Il centro della involuzione è il punto di incontro della linea dei centri coll'asse radicale del sistema. Se i circoli di questo non si segano, i punti coniugati sono separati dal centro della involuzione; altrimenti il centro è esterno a ciascuna coppia di punti corrispondenti.

5. Quando l'asse radicale non taglia i cerchi del sistema è manifesto che i punti I, S, S′ (Fig. 1) sono legati dalla relazione:

$$S'I \, . \, IS = IL^2. \tag{2}$$

Nel caso opposto, ricordando (Fig. 2) che il circolo di centro C appartiene al sistema ortogonale reciproco del sistema dato, cioè a quello che ha per punti limiti L, L′, si deduce agevolmente che se da I si conduce una tangente ad esso circolo, essa sarà eguale ad I L; e perciò sarà:

$$IS' \, . \, IS = IL^2. \tag{3}$$

In questo secondo caso la relazione precedente suggerisce un'altra costruzione delle coppie di punti S, S′. Sopra la linea dei centri H H′ prendasi a partire da I, $I\lambda = IL$: le circonferenze tangenti in λ alla predetta linea, e che incontrano l'asse radicale, determinano sopra di esso coppie di punti che soddisfano la relazione (3). Due delle predette circonferenze, precisamente quelle il cui raggio è IL, toccano l'asse radicale in L, L'; dunque questi sono i punti doppi della involuzione.

6. Nel fascio delle polari di un punto P' rispetto ai circoli di un sistema i cui punti limiti sono L ed L', le rette che proiettano dal centro P del fascio questi punti sono manifestamente le polari di P' rispetto a circoli (di raggio nullo) che hanno per centri L, L'. Se, mercè la relazione (1), si ricercano i raggi dei cerchi del sistema coi centri in L, L' questi si trovano pure eguali a zero. Ciascun punto limite L può quindi venir considerato come un cerchio, di raggio zero, appartenente al sistema (Poncelet, l. c.), e PL ne è la polare rispetto a P'.

7. Dalla relazione (2) si ricava: (Fig. 1).

$$S'L^2 = S'I \, . \, S'S \text{ ed } SL^2 = SI \, . \, SS'$$

le quali ci permettono di enunciare il Teorema:

« Se due punti dell'asse radicale di un sistema di cerchi che « non si segano sono l'uno polo, l'altro centro del fascio corri- « spondente delle polari rispetto a quei cerchi, la linea dei centri « del sistema è la polare di uno qualunque di quei due punti « rispetto al cerchio che ha per centro l'altro punto ed appar- « tiene alla serie ortogonale reciproca del sistema dato ».

Esaminiamo ora ciò che avviene allorquando si considera il caso di un sistema di cerchi segati dal loro asse radicale.

Si osservi intanto che dalla relazione (1) si ha:

$$OK^2 = IO^2 - IL^2$$

la quale fornisce la lunghezza OK del raggio del circolo del sistema che ha per centro un punto O e per punti limiti L ed L'. Quando questo punto O cade entro il segmento compreso fra i punti limiti la quantità OK è immaginaria: e ciò fa concludere che del sistema non fanno parte circoli i cui centri cadono entro l'intervallo compreso fra i punti limiti. Ciò posto, poichè, nel caso ora in esame, i punti S, S' sono separati (Fig. 2) dal punto L, se S' è quello di essi che cade fuori del tratto LL', si immagini descritto il circolo di centro S' appartenente alla serie la quale ha per punti limiti L, L'. Il quadrato del suo raggio, a causa della (1), sarà: $S'I^2 - IL^2$. Togliendo dai due membri della identità:

$$IS'^2 = IS'^2$$

rispettivamente i due membri della equivalenza:

$$IS' . IS = IL^2,$$

si ottiene subito:

$$IS' . SS' = IS'^2 - IL^2 \tag{4}$$

la quale dice che il punto S è il polo del circolo di centro S' e di raggio $\sqrt{IS'^2 - IL^2}$ rispetto alla linea dei centri del sistema. Se invece i due membri della equivalenza $IS' . IS = IL^2$ si tolgono rispettivamente dai due membri della identità $IS^2 = IS^2$, si avrà ancora:

$$IS . S'S = IS^2 - IL^2$$

ove la quantità $IS^2 - IL^2$ è negativa, perchè il punto S cade entro il tratto LI. Ora se si conviene di dire che i punti S dell'intervallo compreso fra i punti limiti di un sistema sono essi pure centri di cerchi appartenenti al sistema, ma aventi per raggi le quantità immaginarie $\sqrt{IS^2 - IL^2}$ (che pure verificano la relazione (1)), si potrà allora asserire che la linea dei centri del sistema dato è ancora la polare del punto S' rispetto al circolo (di raggio immaginario) che ha per centro il punto S ed appartiene al sistema ortogonale reciproco di quello dato.

Tale convenzione parmi giustificata dal vantaggio di poter così enunciare teoremi generali riflettenti proprietà comuni a tutti i sistemi di circoli: e nel caso nostro per essa si potrà concludere: — « Le coppie di punti dell'asse radicale di *qualsivoglia* « sistema di circoli, che sono l'uno polo, l'altro centro del fascio « corrispondente di polari rispetto a quei cerchi, sono altresì « centri di cerchi del sistema ortogonale reciproco del dato e « poli di questi rispetto al loro asse radicale (linea dei centri del « sistema primitivo) ».

(Continua).

L. Gianni.

Sopra una ricerca goniometrica di Aristarco di Samo

Aristarco di Samo (nato verso l'anno 320 a. C.) (*) è forse il più antico geometra del quale sia a noi pervenuta una ricerca di carattere goniometrico (**).

1. Nel suo libro sulle grandezze e le distanze del sole e della luna (***) egli trova due limitazioni pel seno di 3°, e nel seguente modo:

Sia A B E F (Tav. I, fig. 3) un quadrato, l'angolo H B E = 3°, e sia B G la bisettrice dell'angolo F B E; si avrà la proporzione

$$\frac{\text{ang. } G B E}{\text{ang. } H B E} = \frac{15}{2}$$

ed anche

$$\frac{G E}{E H} > \frac{\text{ang. } G B E}{\text{ang. } H B E} \qquad (1)$$

epperciò sarà

$$\frac{G E}{E H} > \frac{15}{2}. \qquad (1')$$

Inoltre si ha

$$\frac{F G}{G E} = \frac{F B}{B E},$$

ma $F B^2$ è doppio di $B E^2$, epperciò sarà $F G^2$ doppio di $G E^2$, e quindi $\frac{F G}{G E} > \frac{7}{5}$, dalla quale, componendo, risulta $\frac{F E}{G E} > \frac{12}{5}$. Da questa e dalla (1') si ricava $\frac{F E}{E H} > 18$ ossia $\frac{B E}{E H} > 18$, e a *fortiori* $\frac{B H}{E H} > 18$, cioè sen $3° < \frac{1}{18}$.

Condotta la H K perpendicolare ad A B, e sulla B H come dia-

(*) Questa data trovo nella Memoria dello *Schiaparelli:* " Opinioni e ricerche degli antichi sulle distanze e sulle grandezze dei corpi celesti ,.

(**) Nella pregevolissima opera del *Cantor:* " Vorlesungen über Geschichte der Mathematik „ non trovo menzionata questa ricerca.

(***) ARISTARCHI. De magnitudinibus et distantiis solis et lunae liber, cum *Pappi* alexandrini explicationibus quibusdam. A *Federico Commandino* urbinate in latinum conversus ac commentariis illustratus. Pisauri, 1572.

metro descritta la circonferenza, questa passerà per K, e l'arco B K sarà di 6°; perciò se l'arco B L è di 60°, sarà $\frac{\text{ar. B L}}{\text{ar. B K}} = 10$.

E in forza della diseguaglianza

$$\frac{\text{ar. B L}}{\text{ar. B K}} > \frac{\text{B L}}{\text{B K}} \tag{2}$$

e perchè B L è la metà di B H, sarà

$$\frac{\text{B H}}{\text{B K}} < 20$$

cioè

$$\text{sen } 3^\circ > \frac{1}{20}.$$

2. Le diseguaglianze (1) (2) sulle quali è fondata questa ricerca d'Aristarco, si traducono, nel linguaggio odierno, nelle

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{tang } a}{\text{tang } b} &> \frac{a}{b} \\ \frac{\text{sen } a}{\text{sen } b} &< \frac{a}{b} \end{aligned}\right\} \text{per } a > b$$

delle quali, in alcuni moderni trattati, si trovano dimostrazioni di carattere analitico.

Nel commento di *Commandino* è dimostrata la (1) nel seguente modo:

Sia A C (Fig. 4) perpendicolare a B C, C D < C A, e sieno E ed F i punti in cui A B e B C sono incontrati dall'arco di raggio B D e centro B.

Dalle diseguaglianze

$$\begin{aligned} &\text{sett. B D F} > \text{tr. B D C} \\ &\text{sett. B D E} < \text{tr. A D B} \end{aligned}$$

si ricava

$$\frac{\text{sett. B D F}}{\text{sett. B D E}} > \frac{\text{tr. B D C}}{\text{tr. A D B}};$$

ma il primo rapporto è eguale a quello degli archi D F e D E, e il secondo è eguale a quello di D C ad A D, epperciò sarà

$$\frac{\text{ar. D F}}{\text{ar. D E}} > \frac{\text{D C}}{\text{A D}}, \text{ ossia } \frac{\text{A D}}{\text{D C}} > \frac{\text{ar. D E}}{\text{ar. D F}},$$

e componendo

$$\frac{\text{A C}}{\text{D C}} > \frac{\text{ar. E F}}{\text{ar. D F}} = \frac{\text{ang. A B C}}{\text{ang. D B C}}$$

3. In quanto alla seconda diseguaglianza, quella relativa al seno, il *Commandino* dice: « Ex demonstratis à *Ptolemeo* in prin-

cipio magne constructionis. » E invero nell'*Almagesto* si trova la seguente dimostrazione:

Siano in un circolo (Fig. 5) due archi $a\,b$ e $b\,g$ e sia $a\,b < b\,g$, sia inoltre f il punto di mezzo della corda $a\,g$ ed $f\,d$ perpendicolare ad $a\,g$. Indicato con e il punto d'incontro della $a\,g$ colla $b\,d$ si descriva l'arco $h\,e\,c$ col raggio $d\,e$ centro d, e sieno h e c i punti in cui esso incontra la $a\,d$ e la $f\,d$; sarà $a\,d > e\,d > f\,d$, epperciò il punto h sarà interno ad $a\,d$ e il punto c esterno ad $f\,d$. Si avranno in conseguenza le diseguaglianze

$$\frac{\text{tr.}\,e\,d\,f}{\text{sett.}\,h\,d\,e} < \frac{\text{sett.}\,e\,c\,d}{\text{sett.}\,h\,d\,e} \quad \text{e} \quad \frac{\text{tr.}\,e\,d\,f}{\text{tr.}\,a\,d\,e} < \frac{\text{tr.}\,e\,d\,f}{\text{sett.}\,h\,d\,e}$$

dalle quali risulta

$$\frac{\text{tr.}\,e\,d\,f}{\text{tr.}\,a\,d\,e} < \frac{\text{sett.}\,e\,c\,d}{\text{sett.}\,h\,d\,e}$$

e quindi anche

$$\frac{e\,f}{a\,e} < \frac{\text{ar.}\,e\,c}{\text{ar.}\,h\,e} \quad \text{ossia} \quad \frac{e\,f}{a\,e} < \frac{\text{ang.}\,e\,d\,c}{\text{ang.}\,a\,d\,e}.$$

Da questa, componendo, si ha

$$\frac{a\,f}{a\,e} < \frac{\text{ang.}\,a\,d\,f}{\text{ang.}\,a\,d\,e}$$

e raddoppiando

$$\frac{a\,g}{a\,e} < \frac{\text{ang.}\,a\,d\,g}{\text{ang.}\,a\,d\,e}$$

e quindi

$$\frac{a\,g - a\,e}{a\,e} < \frac{\text{ang.}\,a\,d\,g - \text{ang.}\,a\,d\,e}{\text{ang.}\,a\,d\,e}$$

ossia

$$\frac{g\,e}{a\,e} < \frac{\text{ang.}\,g\,d\,e}{\text{ang.}\,a\,d\,e};$$

ma il primo rapporto è eguale a $\frac{b\,g}{a\,b}$, per essere $b\,e$ bisettrice dell'angolo $a\,b\,g$, e il secondo rapporto è eguale ad $\frac{\text{ar.}\,b\,g}{\text{ar.}\,a\,b}$, e in conseguenza sarà

$$\frac{\text{corda}\,b\,g}{\text{corda}\,a\,b} < \frac{\text{ar.}\,b\,g}{\text{ar.}\,a\,b}.$$

4. Non mi sembra fuor di luogo il rammentare come Tolemeo si sia giovato di questo teorema pel calcolo della corda di 1°.

Applicandolo agli archi di 45′, 1°, 1° 30′ si ha

$$\frac{\text{corda } 1^\circ}{\text{corda } 45'} < \frac{4}{3}, \quad \frac{\text{corda } 1^\circ\, 30'}{\text{corda } 1^\circ} < \frac{3}{2}$$

ossia

$$\frac{2}{3}\text{ corda }1^\circ\,30' < \text{corda }1^\circ < \frac{4}{3}\text{ corda }45'.$$

Ora Tolemeo, che divideva il raggio in 60 *gradi*, il grado in 60 *minuti*, il minuto in 60 *secondi* e il secondo in 60 *terzi*, aveva trovato

$$\text{corda }45' = 0 \text{ gradi } 47 \text{ minuti } 7 \text{ secondi},$$
$$\text{corda }1^\circ\,30' = 1 \text{ grado } 34 \text{ minuti } 14 \text{ secondi},$$

epperciò ricava

$$\text{corda }1^\circ = 1 \text{ grado } 2 \text{ minuti } 49 \text{ secondi } 20 \text{ terzi}$$

il quale valore corrisponde a 0,0174506 che è approssimato a meno di $\frac{24}{10^7}$.

Ma colle limitazioni

$$\text{corda }45' = 2\text{ sen }22'\,30'' < 0{,}01309$$
$$\text{corda }1^\circ\,30' = 2\text{ sen }45' > 0{,}026179$$

si trova

$$\text{corda }1^\circ < \frac{4}{3}\text{ corda }45' < 0{,}0174534$$

$$\text{corda }1^\circ > \frac{2}{3}\text{ corda }1^\circ\,30' > 0{,}0174526$$

dalle quali risulta

$$\text{corda }1^\circ = 0{,}0174530 \text{ a meno di } \frac{4}{10^7}.$$

D. Besso.

TEMI DI MATEMATICA

PER LA LICENZA D'ISTITUTO TECNICO NELLA SEZIONE *FISICO-MATEMATICA*

(*Continuazione*)

Autunno 1879, II b). — *Trovare il numero totale di combinazioni che si possono fare con* n *oggetti, prendendoli successivamente ad* 1, 2, ... n.

Risposta: $2^n - 1$.

Estate 1880, I) — *Conoscendo due lati* a *e* b *di un triangolo e la bisettrice* l *dell'angolo* C *da essi compreso, trovare le formole* *che determinano, per mezzo dei dati* a, b, l, *gli angoli* A, B, C *del triangolo, ed il terzo lato* c. *Calcolare con queste formole gli elementi ignoti del triangolo supponendo* $a = 3^m, 15$; $b = 2^m, 25$; $l = 1,^m 62$.

Chiamando x ed y i segmenti A D, D B che la bisettrice C D determina sul lato opposto A B, le equazioni dalle quali sono da ricavare x, y, per noti teoremi, saranno

$$a\,b = l^2 + x y, \quad a x = b y$$

onde $$x = + \sqrt{\frac{b}{a}(a\,b - l^2)}; \; y = + \sqrt{\frac{a}{b}(a\,b - l^2)}.$$

La prima condizione da soddisfare affinchè i valori di x ed y siano reali è che sia $a\,b \overline{\gtrless} l^2$. Il caso di $a\,b = l^2$ è evidentemente da trascurare, rimane da considerare quello in cui $a\,b > l^2$.

In questo caso si ha:

$$c = x + y = \sqrt{\frac{b}{a}(a\,b - l^2)} + \sqrt{\frac{a}{b}(a\,b - l^2)}$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(x+y)^2 - (a-b)^2}{4\,a\,b}} = \frac{1}{2\,a\,b} \sqrt{4\,a^2\,b^2 - (a^2 + b^2)\,l^2}.$$

Perchè questa espressione sia reale occorre che si abbia $4\,a^2\,b^2 > (a^2 + b^2)\,l^2$, ciò che fornisce un'altra limitazione per l, ossia $l^2 < \frac{4\,a^2\,b^2}{a^2 + b^2}$.

Supponiamo ora che anche la seconda limitazione $l^2 < \frac{4\,a^2\,b^2}{a^2 + b^2}$, se è necessario, sia soddisfatta, è chiaro, dalla considerazione dei triangoli A D C, B D C, che si ha

$$\operatorname{sen} A = \frac{l}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{2} C = \frac{l}{2\,a\,b} \sqrt{\frac{4\,a^3\,b^2 - a\,(a^2 + b^2)\,l^2}{a\,b^2 - b\,l^2}}.$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{l}{y} \operatorname{sen} \frac{1}{2} C = \frac{l}{2\,a\,b} \sqrt{\frac{4\,a^2\,b^3 - b\,(a^2 + b^2)\,l^2}{a^2\,b - a\,l^2}}.$$

e i valori di sen A e sen B saranno reali come quelli di sen $\frac{1}{2}$ C, x ed y.

Nel caso che sia $a = 3^m, 15$; $b = 2^m, 25$; $l = 1^m, 62$, le condizioni $a\,b > l^2$ e $\frac{4\,a^2\,b^2}{a^2 + b^2} > l^2$ vengono soddisfatte e dall'uso delle formole precedenti si ricava:

$$c = 3^m, 285; \; C = 103^\circ . 46' . 46''; \; A = 45^\circ . 34' . 8''.$$

Estate 1880, II). — *Trovare i quattro termini di una proporzione aritmetica, conoscendo il prodotto degli estremi, il prodotto* *dei medî e la somma delle quarte potenze dei quattro numeri. Applicare le formole generali al caso particolare in cui il prodotto degli estremi è* 104, *il prodotto dei medî è* 110, *e la somma delle quarte potenze dei quattro numeri è* 57298.

Chiamando x, y, z, t i quattro termini della proporzione, p_1 il prodotto degli estremi, p_2 quello dei medî, s la somma delle quarte potenze dei quattro termini, le equazioni del problema saranno:

$$y+z=x+t,\ xt=p_1,\ yz=p_2,\ x^4+y^4+z^4+t^4=s.$$

Quadrando la prima e aggiungendo ai due membri dell'ultima la quantità $2p_1^2+2p_2^2$, si ottengono le equazioni:

$$X-Y=2(p_1-p_2);\ X^2+Y^2=s+2(p_1^2+p_2^2),$$

dove si è posto X in luogo di y^2+z^2 ed Y in luogo di x^2+t^2. Da queste si ha: $X+Y=+\sqrt{2s+8p_1p_2}$, dovendo $X+Y$ essere una quantità positiva. Quindi:

$$X=p_1-p_2+\sqrt{\frac{s}{2}+2p_1p_2},\quad Y=p_2-p_1+\sqrt{\frac{s}{2}+2p_1p_2}$$

e perciò:

$$y+z=\pm\sqrt{X+2p_2}=x+t=\pm\sqrt{Y+2p_1},$$

dove per le radici sono da prendersi contemporaneamente od i segni superiori o quelli inferiori.

Così per determinare y e z, x e t si hanno da trovare le radici delle due equazioni di 2° grado:

$$Z^2\mp\sqrt{X+2p_2}\,.\,Z+p_2=0,\quad Z^2\mp\sqrt{Y+2p_1}\,.\,Z+p_1=0$$

le quali conducono, per le considerazioni precedenti relative ai segni dei radicali, alle due seguenti soluzioni del problema

$$\begin{array}{l|l}
x'=+\sqrt{\frac{Y}{4}+\frac{p_1}{2}}+\sqrt{\frac{Y}{4}-\frac{p_1}{2}} & x''=-\sqrt{\frac{Y}{4}+\frac{p_1}{2}}+\sqrt{\frac{Y}{4}-\frac{p_1}{2}} \\
y'=+\sqrt{\frac{X}{4}+\frac{p_2}{2}}+\sqrt{\frac{X}{4}-\frac{p_2}{2}} & y''=-\sqrt{\frac{X}{4}+\frac{p_2}{2}}+\sqrt{\frac{X}{4}-\frac{p_2}{2}} \\
z'=+\sqrt{\frac{X}{4}+\frac{p_2}{2}}-\sqrt{\frac{X}{4}-\frac{p_2}{2}} & z''=-\sqrt{\frac{X}{4}+\frac{p_2}{2}}-\sqrt{\frac{X}{4}-\frac{p_2}{2}} \\
t'=+\sqrt{\frac{Y}{4}+\frac{p_1}{2}}-\sqrt{\frac{Y}{4}-\frac{p_1}{2}} & t''=-\sqrt{\frac{Y}{4}+\frac{p_1}{2}}-\sqrt{\frac{Y}{4}-\frac{p_1}{2}}
\end{array}$$

ed a quelle che si ottengono da queste ponendo:

$x=t',\ y=z',\ z=y',\ t=x';\ x=t'',\ y=z'',\ z=y'',\ t=x''$

$x=x',\ y=z',\ z=y',\ t=t';\ x=x'',\ y=z'',\ z=y'',\ t=t''$

$x=t',\ y=y',\ z=z',\ t=x';\ x=t'',\ y=y'',\ z=z'',\ t=x''.$

È facile poi vedere che $\sqrt{\frac{X}{4}+\frac{p_2}{2}}=\sqrt{\frac{Y}{4}+\frac{p_1}{2}}$ e che si ha:

$$x'=-t'',\ y'=-z'',\ z'=-y'',\ t'=-x''.$$

Nel caso particolare di $p_1=104$, $p_2=110$, $s=57298$ le otto proporzioni che rispondono al quesito sono:

13 . 11 : 10 . 8	— 8 . — 10 : — 11 . — 13
8 . 10 : 11 . 13	— 13 . — 11 : — 10 . — 8
13 . 10 : 11 . 8	— 8 . — 11 : — 10 . — 13
8 . 11 : 10 . 13	— 13 . — 10 : — 11 . — 8.

Autunno 1880, I). — *S'inscriva in un triangolo equilatero un circolo, in questo circolo un triangolo equilatero, in questo triangolo di nuovo un circolo, e così di seguito indefinitamente. — Qual'è la somma dei raggi di tutti questi circoli, quale la somma delle loro periferie, quale la somma delle loro superficie, quale la somma dei perimetri, e quale la somma delle aree di tutti i triangoli, escluso il triangolo proposto.*

In secondo luogo trattare la stessa questione sostituendo sempre al triangolo equilatero un quadrato.

Risposte: — Chiamando a il lato del triangolo equilatero o del quadrato dato, si ha:

Somma raggi $=\frac{a}{\sqrt{3}}$; somma circonferenze $=\frac{2\pi a}{\sqrt{3}}$, somma aree circoli $=\frac{\pi a^2}{9}$. Somma perimetri triangoli $=3a=$ perimetro del dato triangolo, somma aree triangoli $=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=$ area triangolo primitivo.

Somma raggi inscritti nei quadrati $=\frac{a(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$; somma circonferenze $=a\pi\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$; somma aree circoli $=\frac{\pi a^2}{3}$; somma perimetri quadrati $=4a\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$; somma aree quadrati $=a^2=$ area quadrato dato.

Autunno 1880, II). — *Una piramide regolare ha per base il poligono regolare di* m *lati inscritto nel cerchio di raggio* r, *e per apotema questo stesso raggio. Condotto pel centro della sfera inscritta nella piramide il piano parallelo alla base, trovare le formole che esprimono la superficie totale ed il volume del tronco di piramide e calcolarne i valori supponendo* $m=10$ *ed* $r=1$.

Si ha intanto con facilità:

lato base piramide $= 2r \operatorname{sen} \frac{180^0}{m}$, perimetro base $= 2mr \operatorname{sen} \frac{180^0}{m}$; apotema base $= r \cos \frac{180^0}{m}$, altezza piramide $=$ metà lato $= r \operatorname{sen} \frac{180^0}{m}$, area base $= \frac{mr^2}{2} \operatorname{sen} \frac{360^0}{m}$. Per determinare l'altezza del tronco della piramide e gli altri elementi necessari alla soluzione del problema, s'immagini una sezione della piramide ottenuta con un piano passante per l'asse e perpendicolare ad uno dei lati della base. Si avrà così un triangolo rettangolo (C D B) di cui uno dei cateti (B C) sarà l'altezza della piramide, l'altro cateto (B D) l'apotema della base, e l'ipotenusa (C D) l'apotema della piramide, per ipotesi $= r$. La sfera inscritta sarà intersecata dal piano di questo triangolo secondo una semicirconferenza tangente all'ipotenusa (D C) e ad uno dei cateti (B D) e avente il suo diametro sul cateto rimanente. La retta che congiunge il centro (A) del semicerchio col vertice opposto (D) del triangolo, sarà bisettrice dell'angolo (C D B) dei due apotemi, il quale angolo, com'è facile vedere, è uguale a $\frac{180^0}{m}$, talchè si avrà:

altezza tronco $= (A\,B) = r \cos \frac{180^0}{m} \operatorname{tg} \frac{90^0}{m}$, altezza della piramide staccata $= (A\,C) = r \operatorname{sen} \frac{180^0}{m} - r \cos \frac{180^0}{m} . \operatorname{tg} \frac{90^0}{m} = r \operatorname{tg} \frac{90^0}{m}$.

L'area della base superiore del tronco sarà quindi

$$= \left(\text{area base piramide} \times r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{90^0}{m}\right) : r^2 \operatorname{sen}^2 \frac{180^0}{m} = \frac{mr^2}{8} \frac{\operatorname{sen} \frac{360^0}{m}}{\cos^4 \frac{90^0}{m}}.$$

L'apotema della piramide staccata (C E. Il punto E è sulla parallela a B D condotta pel centro A della sfera), si avrà facilmente osservando che è $=$ altezza piramide staccata (A C) : seno dell'angolo formato dai due apotemi della piramide staccata $=$

$$= r \operatorname{tg} \frac{90^0}{m} : \operatorname{sen} \frac{180^0}{m} = \frac{r}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{90^0}{m}}.$$

Quindi: apotema tronco $= r - \frac{r}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{90^0}{m}} = \frac{r}{2} \cos \frac{180^0}{m} \frac{1}{\cos^2 \frac{90^0}{m}}$.

Di più si ha:

lato base superiore tronco : lato base inferiore :: apotema piramide staccata (C E) : apotema piramide. Onde lato base superiore $= 2\,r \operatorname{sen}\frac{180^0}{m} \cdot \frac{1}{2\cos^2\frac{90^0}{m}} = 2\,r \operatorname{tg}\frac{90^0}{m}$, e, perimetro base superiore $= 2\,m\,r \operatorname{tg}\frac{90^0}{m}$.

Dopo ciò si hanno tutti gli elementi necessari per determinare la superficie totale ed il volume del tronco e si ricava:

$$\text{Sup. totale tronco} = \frac{m\,r^2}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{90^0}{m} + \operatorname{sen}\frac{180^0}{m}\right)\cos\frac{180^0}{m}\sec^2\frac{90^0}{m} + $$
$$+ \frac{m r^2}{2}\operatorname{sen}\frac{360^0}{m} + \frac{m r^2}{8}\operatorname{sen}\frac{360^0}{m}\sec^4\frac{90^0}{m} =$$
$$= m\,r^2 \operatorname{tg}\frac{90^0}{m}\sec^2\frac{90^0}{m}\cos\frac{180^0}{m}\left\{1 + \cos^2\frac{90^0}{m} + 2\cos^4\frac{90^0}{m}\right\}.$$

$$\text{Vol. tronco} = \frac{m\,r^3}{6}\cos\frac{180^0}{m}\operatorname{tg}\frac{90^0}{m}\left\{\operatorname{sen}\frac{360^0}{m} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{360^0}{m}\sec^2\frac{90^0}{m} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{360^0}{m}\sec^4\frac{90^0}{m}\right\} =$$
$$= \frac{m\,r^3}{6}\operatorname{sen}\frac{90^0}{m}\operatorname{tg}\frac{90^0}{m}\cos^2\frac{180^0}{m}\sec^3\frac{90^0}{m}\left\{1 + 2\cos^2\frac{90^0}{m} + 4\cos^4\frac{90^0}{m}\right\}.$$

Nel caso speciale di $m = 10$ ed $r = 1$, la superficie totale ed il volume del tronco sono espressi dalle formole:

$$\text{Superficie} = 10 \operatorname{tg} 9^\circ \sec^2 9^\circ \cos 18^\circ \{1 + \cos^2 9^\circ + 2\cos^4 9^\circ\},$$
$$\text{Volume} = \frac{5}{3}\operatorname{sen} 9^\circ \operatorname{tg} 9^\circ \cos^2 18^\circ \sec^3 9^\circ \{1 + 2\cos^2 9^\circ + 4\cos^4 9^\circ\}.$$

Eseguendo i calcoli si trova:

Superficie totale tronco $= 5{,}9756$ unità di superficie,
Volume tronco $= 0{,}268067$ unità di volume.

Del resto il caso speciale qui considerato può trattarsi indipendentemente dalle funzioni trigonometriche.

Difatti dalla considerazione del solito triangolo rettangolo (C D B), deducesi che uno de'suoi cateti (B D), uguale all'apotema del decagono regolare di base inferiore, è $\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 0{,}95016$, l'ipotenusa è $= 1$ e quindi l'altro cateto (C B), uguale all'altezza della piramide ed alla metà del lato della base, è $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) = 0{,}30901$. Così l'altezza (A B) del tronco, data dalla proporzione (A B) : (B D) :: (C B) : (B D) + (D C), da cui $(A\,B) = \frac{(B\,D)\,.\,(C\,B)}{(B\,D) + (D\,C)}$, sarà

$$\left\{\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)\right\} : \left\{\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 1\right\} =$$
$$= \frac{0{,}95016\,.\,0{,}30901}{1{,}95016} = a\,.\,0{,}30901, \text{ avendo posto } a = \frac{0{,}95016}{1{,}95016}.$$

L'apotema (A E) della base superiore del tronco, data dalla proporzione (A E) : (D B) : : (C B) — (A B) : (C B) da cui

$$(A\,E) = \frac{(D\,B)\,[(C\,B) - (A\,B)]}{(C\,B)},$$ risulterà poi eguale a

$$\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left\{\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1) - \text{altezza tronco}\right\}\right) : \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1) =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+1} = \frac{0{,}95016}{1{,}95016} = a.$$

Finalmente per avere l'apotema (D E) del tronco, basta osservare che questa è uguale al rapporto fra l'altezza del tronco e l'altezza della piramide (ciò risulta dalla proporzione (D E) : 1 :: (AB) : (B C)), onde essa sarà $= \frac{a\,.\,0{,}30901}{0{,}30901} = a =$ apotema base superiore.

Si è così in possesso di tutti gli elementi necessari alla spedita calcolazione aritmetica della superficie totale e del volume del tronco speciale di piramide considerato nell'enunciato.

Estate 1882, I). — *Trovare il valore delle formole:*

$$\frac{\cot A + \cot B + \cot C}{\cot A\,.\,\cot B\,.\,\cot C}, \quad \frac{\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C}{\cos A\,.\,\cos B\,.\,\cos C}$$

quando $A + B + C = 90°$, *e il valore delle formole*

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A\,.\,\operatorname{tg} B\,.\,\operatorname{tg} C}, \quad \frac{\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C}{\operatorname{sen} A\,.\,\operatorname{sen} B\,.\,\operatorname{sen} C}$$

quando $A + B + C = 180°$.

Risposte: Quando $A + B + C = 90°$, si ha:

$$\frac{\cot A + \cot B + \cot C}{\cot A\,.\,\cot B\,.\,\cot C} = 1, \quad \frac{\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C}{\cos A\,.\,\cos B\,.\,\cos C} = 4;$$

quando $A + B + C = 180°$, si ha:

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A\,.\,\operatorname{tg} B\,.\,\operatorname{tg} C} = 1, \quad \frac{\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C}{\operatorname{sen} A\,.\,\operatorname{sen} B\,.\,\operatorname{sen} C} = 4.$$

Estate 1882, II). — *Dati i raggi* a, b *di due cerchi che si toccano esternamente, trovare il valore del seno dell'angolo compreso tra le loro tangenti comuni.*

Chiamando x l'angolo delle tangenti, si trova facilmente

$$\operatorname{sen} x = \frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}.$$

Questa formola può rendersi calcolabile per logaritmi col porre $\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{b}{a}$, sicchè φ è da calcolarsi mediante l'equazione

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \frac{\log b - \log a}{2}.$$

Con questa posizione si trova:

$$\operatorname{sen} x = \frac{4(1 - \operatorname{tg}^2\varphi) \operatorname{tg} \varphi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} = 4 \cos 2\varphi \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = \operatorname{sen} 4\varphi.$$

(*Continua*).

A. Lugli.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

Sulla misura del quadrato e sul teorema di Pitagora.

1. Si costruiscano due quadrati in modo che il lato dell'uno sia doppio di quello dell'altro. Quante volte il secondo quadrato è contenuto nel primo?

2. Si costruiscano due quadrati in modo che il lato dell'uno sia triplo di quello dell'altro. Quante volte il secondo quadrato è contenuto nel primo?

3. Si costruiscano due quadrati in modo che il lato del primo sia quadruplo di quello del secondo. Quante volte il secondo quadrato è contenuto nel primo?

4. Dato un quadrato, si costruisca un secondo quadrato col lato eguale a cinque volte il lato del primo, ed un terzo quadrato col lato eguale a sei volte quello del primo. Quante volte il primo quadrato è contenuto nel secondo? Quante volte è esso contenuto nel terzo?

5. Si costruiscano cinque quadrati in modo che il lato del primo sia contenuto sette volte in quello del secondo, otto volte in quello del terzo, nove volte in quello del quarto, e dieci volte in quello del quinto. Quante volte il primo quadrato è contenuto nel secondo? Quante volte è esso contenuto nel terzo? Quante volte nel quarto? Quante volte nel quinto?

6. Quanti decimetri quadrati sono contenuti nel metro quadrato? Quanti centimetri quadrati sono contenuti nel decimetro

quadrato? Che parte è il centimetro quadrato del metro quadrato?

7. Quanti metri quadrati sono contenuti in un decametro quadrato? Quanti in un chilometro quadrato? Che parte è il millimetro quadrato del metro quadrato?

8. Il lato d'un quadrato misura 1 metro e 47 centimetri. Quanti centimetri quadrati sono in esso contenuti?

9. Un quadrato contiene 144 metri quadrati. Qual' è la lunghezza del suo lato?

10. Se un quadrato contiene quarantanove volte la centesima parte d'un altro quadrato, e se il lato del secondo è diviso in dieci parti eguali, quante di esse saranno contenute nel lato del primo?

11. Provare che, se un quadrato contiene 47 decimetri quadrati, il suo lato dev'essere maggiore di 68 centimetri, ma minore di 69 centimetri.

12. Trovare due segmenti che differiscano d'un millimetro, e tali che il quadrato costruito sull'uno sia minore, e quello costruito sull'altro sia maggiore di 7 metri quadrati.

13. Costruito il quadrato quadruplo d'un quadrato dato, si conducano quelle diagonali dei quattro quadrati che uniscono i punti di mezzo dei suoi lati. Quale figura ne risulta?

14. Dato un quadrato, si costruisca un altro quadrato il quale sia doppio del primo.

15. Provare che, se un cateto d'un triangolo rettangolo isoscele è diviso in 1000 parti eguali, la sua ipotenusa è maggiore del segmento che ne contiene 1414, ma minore di quello che ne contiene 1415.

16. Nel quadrato che ha il lato eguale alla somma di due segmenti dati, si dispongano i quadrati che hanno per lati quei due segmenti, così che un angolo dell'uno e un angolo dell'altro sieno due angoli opposti, e si conducano le diagonali nei due rettangoli restanti.

17. Dimostrare che, dal quadrato che ha il lato eguale alla somma di due segmenti dati, si possono togliere quattro triangoli rettangoli eguali, coi cateti eguali a quei due segmenti, così che la figura restante sia un quadrato.

18. Dati due quadrati, costruire un terzo quadrato equivalente alla loro somma.

19. Dimostrare che, se un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 3 metri e l'altro cateto lungo 4 metri, la sua ipotenusa dev'essere lunga 5 metri.

20. Trovare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti misurano rispettivamente 5 metri e 12 metri.

21. Se l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è divisa in 25 parti eguali, e se uno dei cateti ne contiene 7, quante di esse saranno contenute nell'altro cateto?

22. Provare che, se il lato d'un triangolo equilatero è diviso in 100 parti eguali, la sua altezza è compresa fra due segmenti i quali contengono rispettivamente 86 e 87 di quelle parti.

23. Trovare due segmenti che differiscano di un millesimo di millimetro, e i quali comprendano l'altezza del triangolo equilatero che ha il lato di un metro.

24. Provare che, se due lati d'un triangolo misurano rispettivamente 33 decimetri e 56 decimetri, il terzo lato è minore o maggiore di 65 decimetri, secondo che l'angolo compreso fra quei due lati è acuto od ottuso.

25. Provare che, se i lati d'un triangolo sono misurati dai numeri 60, 91, 109, il raggio del circolo ad esso circoscritto è misurato dal numero $54\,\frac{1}{2}$.

26. Dimostrare che, se i lati d'un triangolo sono misurati dai numeri 17, 25, 26, quel triangolo dev'essere acutangolo.

27. Condotta la perpendicolare al minor lato del triangolo considerato nel precedente esercizio, dal vertice dell'angolo ad esso opposto, si dimostri che la differenza dei numeri che misurano i quadrati dei due segmenti di quel lato è eguale a 51.

28. Trovare la misura di quell'altezza del triangolo, considerato nei due precedenti esercizi, che corrisponde al minore dei tre lati.

29. I tre lati d'un triangolo sono lunghi rispettivamente m. 125, m. 312 e m. 323: trovare la misura dell'altezza corrispondente al maggiore di essi.

30. Calcolare a meno di un millimetro la lunghezza di quel segmento che unisce il vertice del maggior angolo del triangolo, considerato nel precedente esercizio, col punto di mezzo del lato opposto.

D. Besso.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 15, 16 e 17

15. *Dimostrare che il numero dei modi nei quali un intero positivo* n *può essere formato, per via di addizione, coi numeri 1, 2, 3, è dato dalla formola*

$$\frac{(n+3)^2}{12}+\frac{(-1)^n}{8}-\frac{7}{72}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}.$$

D. BESSO.

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi*.

Vediamo da prima in quanti modi combinando per via d'addizione i numeri 1, 2 si possa ottenere il numero intero e positivo n. Se h è il quoziente intero di n diviso per 2, il numero 2 si potrà prendere $0, 1, 2, \ldots, h$ volte come addendo, e a ciascuna di tali scelte corrisponderà una soluzione del problema: il numero di soluzioni è dunque $h+1$, cioè $\frac{n+2}{2}$ o $\frac{n+1}{2}$ secondo che sia n pari o dispari, e in tutti i casi

$$\frac{2n+3}{4}+\frac{(-1)^n}{4}\ldots\ldots(\alpha).$$

Ciò premesso, cerchiamo ora in quanti modi combinando per via d'addizione i numeri 1, 2, 3 si possa ottenere n. Se h, r sono quoziente intero e resto della divisione di n per 3, il numero 3 si potrà prendere $0, 1, 2, \ldots, h$ volte come addendo e a ciascuna di tali scelte corrispondono, in virtù di (α),

$$\frac{2n+3}{4}+\frac{(-1)^n}{4},\quad \frac{2(n-3)+3}{4}+\frac{(-1)^{n-3}}{4},\ldots,\quad \frac{2(n-3h)+3}{4}+\frac{(-1)^{n-3h}}{4}$$

soluzioni; e la somma delle precedenti frazioni è il numero domandato.

Ora, osservando che $n=3h+r$, si ha

$$\frac{2n+3}{4}+\frac{2(n-3)+3}{4}+\ldots+\frac{2(n-3h)+3}{4}=\frac{(2n-3h+3)(h+1)}{4}=$$
$$=\frac{(2n-3h+3)(3h+3)}{12}=\frac{(n+r+3)(n-r+3)}{12}=\frac{(n+3)^2}{12}-\frac{r^2}{12},$$

e inoltre

$$\frac{(-1)^{n-3h}}{4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(-1)^{n-3h}-(-1)^{n-3h+1}}{1-(-1)^3}=\frac{(-1)^r+(-1)^n}{8},$$

perciò il numero domandato è

$$\frac{(n+3)^2}{12}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{(-1)^r}{8}-\frac{r^2}{12}.$$

Ora, ponendo $r=0, 1, 2$ nella espressione $\frac{(-1)^r}{8}-\frac{r^2}{12}$, e contemporaneamente $n\equiv 0, 1, 2 \pmod 3$ nella $-\frac{7}{72}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}$, le due espressioni assumono gli stessi valori: resta così dimostrato il teorema.

16. *Dedurre il postulato delle parallele dalla proposizione: Il quadrato del numero che misura l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo è eguale alla somma dei quadrati dei numeri che misurano i due cateti.*

D. Besso.

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi.*

Dalla proposizione premessa si deducono corollari corrispondenti a quelli che derivano dal teorema di Pitagora, tra gli altri quello che fornisce la relazione tra le misure dei lati e d'una mediana: cioè in un triangolo A B C, se A O è mediana, si ha

$$AB^2 + AC^2 = 2AO^2 + 2BO^2.$$

Ora, se il triangolo proposto è rettangolo in A, si ha pure

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = 4BO^2;$$

dunque B O = O C = A O, i triangoli O A B, O C A sono isosceli, e quindi gli angoli in B e C sono eguali rispettivamente a O A B, C A O e sono perciò complementari.

Si ottiene così, come corollario della proposizione premessa, che in un triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari; e di qui si conchiude, con metodo noto, al postulato delle parallele. (Cf. Baltzer Plan. § 2, 7).

17. *Preso un punto sulla bisettrice di un angolo retto e condotto per questo punto una secante ai lati, determinare la posizione che deve avere la secante affinchè sia minima*

1º *la somma dei segmenti staccati dai lati dell'angolo a partire dal vertice,*

2º *la porzione della secante limitata ai lati,*

3º *l'area del triangolo formato dalla secante e dai lati dell'angolo.*

A. Lugli.

Soluzione del Prof. *Pol'ilo Montesano* (*).

1º. Sia D il punto scelto sulla bisettrice A D dell'angolo retto B A C e B C una secante condotta per D; si tiri D E parallela a B A e si ponga D E $= a$, sarà A E $= a$.

Dinotando con x la lunghezza del segmento E C, dai triangoli equiangoli B A C, D E C si ricava:

$$BA : a :: a + x : x,$$

donde

$$BA = \frac{a(a+x)}{x} = \frac{a^2}{x} + a.$$

Dunque si tratta di determinare il valore di x che rende minima la funzione $a + x + \frac{a^2}{x} + a$, o la somma delle quantità variabili x ed $\frac{a^2}{x}$. Ma il prodotto a^2 di tali quantità è costante, perciò dev'essere

$$x = \frac{a^2}{x}$$

(*) Un' altra soluzione, non essenzialmente diversa, è stata inviata dal sig. Prof. *G. Riboni.*

da cui

$$x = \pm a.$$

Il valore $-a$ di x che rende nulla la funzione $a + x + \frac{a^2}{x} + a$ risolve il quesito nel solo caso che il punto D coincida con A.

2°. Dal triangolo rettangolo B A C si ricava:

$$BC = \sqrt{(a+x)^2 + \frac{a^2(a+x)^2}{x^2}}$$

ossia

$$BC = \sqrt{2a^2 + 2ax + x^2 + \frac{a^4}{x^2} + \frac{2a^3}{x}}$$

perciò si deve trovare il valore di x che rende minima la funzione $\frac{a^4}{x^2} + \frac{2a^3}{x} + x^2 + 2ax$, ovvero ciascuna delle somme $\frac{a^4}{x^2} + x^2$, $\frac{2a^3}{x} + 2ax$. Ma tanto la prima che la seconda somma è minima per $x = \pm a$, onde risulta minimo il valore di BC allorchè si prende $x = \pm a$.

Anche in questo caso il valore $-a$ di x risolve il quesito quando il punto D coincide con A.

3°. L'area del triangolo B A C è data dall'espressione

$$\frac{a(a+x)^2}{2x} = \frac{a^3}{2x} + a^2 + \frac{ax}{2}$$

perciò essa sarà minima se tale sarà la somma $\frac{a^3}{2x} + \frac{ax}{2}$. Ma $\frac{a^3}{2x} \cdot \frac{ax}{2} = \frac{a^3}{4}$, perciò dev'essere

$$\frac{a^3}{2x} = \frac{ax}{2}$$

donde

$$x = \pm a.$$

Si può dunque dire che $x = \pm a$ è la condizione comune per il minimo; per conseguenza conducendo dal punto D la BC perpendicolare ad AD risulta minima non solo $BA + AC$, ma anche BC e l'area del tirangolo B A C.

Errata-Corrige. — A pag. 186 del vol. III, linea 2ª: « $a^\alpha + b^\alpha$ » va corretto in: « $a^n + b^n$ »; ed a linea 6ª: « $(n+1)^{ma}$ » va corretto in « n^{ma} ».

QUISTIONI PROPOSTE.

20. Provare che esistono due triangoli isosceli, e due soli, col perimetro di 8 metri e l'area di 2 metri quadrati, e calcolare la base di ciascuno di essi a meno di un millesimo di millimetro.

21. Sulle perpendicolari ad un piano dato, innalzate da due suoi punti A, A', sono presi i segmenti $AB = 2a$, $A'B' = a$; è data la distanza $AA' = a\sqrt{2}$, ed è dato l'angolo acuto che una retta A R di quel piano forma colla A A': trovare sulla A R un punto C tale che sia l'angolo B C A doppio dell'angolo B' C A'.

D. Besso.

3

Associazione postale.

ANNO IV. Marzo-Aprile 1889. FASCICOLO II.

PERIODICO

DI

MATEMATICA

PER

L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

DIRETTO

DA

DAVIDE BESSO
PROFESSORE DI CALCOLO INFINITESIMALE
NELLA R. UNIVERSITÀ DI MODENA

AURELIO LUGLI
PROFESSORE DI MATEMATICA
NEL R. ISTITUTO TECNICO DI ROMA

SOMMARIO:

Con una incisione in legno.

ROMA
TIPOGRAFIA METASTASIO
Via Venti Settembre, 122
1889

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

FERDINANDO ASCHIERI — *Geometria proiettiva*. — U. Hoepli, Milano, 1886. Prezzo L. 1,50.

Questo è il primo di quattro volumetti, inspirati ai moderni metodi geometrici (Manuali Hoepli) (*) pubblicati dal Prof. Aschieri, della R. Università di Pavia, e nel medesimo l'A., come avverte nella prefazione, si è principalmente proposto di svolgere quegli argomenti che riguardano i principii di geometria proiettiva, che fan parte dei programmi degli Istituti tecnici. Per questo rispetto e per il chiaro nome dell'A., pare a noi di grande interesse il tenere parola di quest'operetta.

Nella medesima trovansi svolte le principali teoriche costituenti un corso elementare di geometria proiettiva, non che i principii dell'Omografia e Reciprocità per le forme fondamentali di 2ª specie, per quanto abbisognano nelle nozioni elementari di geometria descrittiva, ed è mirabile come l'A. abbia saputo concentrare in così piccola mole tanta molteplicità d'argomenti.

Nei primi §§ l'A., accennato alle operazioni della geometria proiettiva, definisce le forme fondamentali di 1ª, 2ª e 3ª specie, mostrando come colle operazioni stesse si passi da una forma delle prime due specie ad una forma della medesima specie, e come dai due differenti modi di generazione delle forme di 2ª e 3ª specie scaturisca il principio di dualità, riguardo al quale riporta alcune proposizioni correlative fondamentali. Passa poi a definire e studiare le forme proiettive e prospettive ed a trattare dei sistemi omologici, che costruisce in alcuni casi particolari, considerando in seguito l'omologia armonica, l'affinità, la similitudine e la simmetria.

Nei §§ 6 e 7 l'A. svolge piuttosto ampiamente le condizioni d'omologia e prospettività dei sistemi piani e di proiettività di due forme fondamentali di 1ª specie ed i principii sulle forme armoniche. Nel seguente § egli tratta specialmente della determinazione di posizione degli elementi fondamentali di 1ª specie, giungendo all'importante proposizione — " Gli elementi di una forma fondamentale di 1ª specie si ottengono tutti con costruzioni di forme armoniche a partire da tre elementi *(fondamentali)* presi ad arbitrio nella forma, e propriamente vi sono elementi *(razionali)* che si ottengono esattamente con un numero finito delle dette forme armoniche; vi sono invece elementi *(irrazionali)* che si ritengono determinati come elementi limiti di serie infinite di elementi ottenuti con costruzioni di forme armoniche a partire dagli elementi dati " — e ne deduce che se due di tali forme sovrapposte hanno tre elementi uniti sono congruenti, e che se due forme fondamentali di 1ª specie in corrispondenza univoca, sono tali che ad una forma armonica corrisponda

(*) I tre altri hanno per titolo: — *Geometria Descrittiva* — *Geometria analitica del piano* — *Geometria analitica dello spazio.*

una forma armonica, le due forme sono proiettive. Nel medesimo § sono poi svolte le costruzioni fondamentali delle forme proiettive di prima specie nel piano.

Nel § 9 considera l'A. le forme fondamentali di 1ª specie in involuzione e nei due successivi le relazioni metriche della proiettività e della involuzione delle forme fondamentali di 1ª specie ed i rapporti anarmonici.

Nel § 12 trovansi brevemente sviluppate le proprietà proiettive del cerchio e in quello 13 le proprietà dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio che hanno nome da Pascal e Brianchon ed i corollari che ne conseguono. Nel § 14 è trattato il sistema polare di un cerchio e quivi trova luogo la considerazione delle figure polari reciproche rispetto al cerchio, ciò che conduce l'A. alla dimostrazione del principio di dualità nel piano, e del triangolo coniugato rispetto al cerchio.

Nel § 15 sono studiate le forme elementari di 2º ordine del piano, ossia le coniche, costruite come figure omologiche del cerchio, esaminando i casi di loro determinazione, e da loro son dedotte mediante proiezione le forme elementari del 2º ordine della stella.

I §§ 16 e 17 sono i corrispondenti dei §§ 13 e 14, però riguardo alle coniche e il § 18 è un accenno alle quadriche gobbe.

Negli ultimi tre paragrafi finalmente l'A. tratta delle forme fondamentali reciproche mostrando quante siano le coppie di elementi corrispondenti sufficienti a determinarle e quali le condizioni da soddisfare affinchè due sistemi piani, od un sistema piano ed una stella, o due stelle siano proiettive o reciproche. Avendo particolare riguardo ai sistemi piani proiettivi sovrapposti, studia le particolarità inerenti ai loro elementi uniti ed alla loro corrispondenza involutoria. Insegna quindi a risolvere in modo generale il problema di costruire gli elementi uniti nelle forme elementari proiettive sovrapposte e in ultimo risolve alcuni problemi di 2º grado seguendo il metodo geometrico detto di falsa posizione.

La trattazione di tutti questi argomenti è, in generale, e necessariamente, atteso alle piccole proporzioni dei Manuali Hoepli, molto sommaria, tanto che un alunno delle nostre scuole medie vi si potrebbe difficilmente orizzontare senza l'aiuto del maestro, ma col sussidio di questo ha nel libro del Prof. Aschieri un valido ausiliario per procacciarsi buona messe di utili cognizioni in materia di geometria di posizione.

Egli è certo che disponendo di maggiore spazio l'A. avrebbe potuto, con vantaggio grande dei discenti, aggiungere in alcuni punti maggiori dettagli atti a meglio chiarire le successive teoriche. Così, ad es., riguardo alle forme fondamentali di 1ª specie in involuzione sarebbe tornato utile esplicare vieppiù perchè in due forme di tal specie proiettive sovrapposte, se ad un elemento, riguardato come appartenente all'una e poi all'altra, corrisponde lo stesso elemento, questa proprietà abbia luogo per tutti gli elementi delle due forme; e laddove egli insegna a costruire le forme proiettive di 1ª specie nel piano, era utile aggiungere, dopo le costruzioni del § 8 n. 8, *c)*, atteso alla loro importanza, gli enunciati dei teoremi a cui esse danno origine e da cui derivano quelli di Pascal e Brianchon (*). Queste e alcune altre aggiunte avrebbero forse accresciuto l'importanza didattica del libro, non certo il suo valore scientifico.

Insegnanti ed allievi, de' nostri Istituti tecnici, saranno sicuramente grati a chi abbandonate per un istante le regioni elevate della scienza ha voluto vivere alcun poco nel loro ambito redigendo il pregiato volumetto di cui ci siamo occupati.

A. Lugli.

PUBBLICAZONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. Battaglini. Vol. XXVI. Novembre-Dicembre. Napoli, 1888.

Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. de Longchamps, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, Lucien Lévy, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'Ecole preparatoire de Saint-Barbe. 3ᵉ Serie, Treizième année. N. 1, Janvier 1889, Paris.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par H. Vuibert. 13ᵉ année. N. 7, 8, Paris. M. Nony et Cie, 17 Rue des Écoles, 1889.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomica publicado pelo Dr F. Gomes Teixeira professor na Academia Polytechnica do Porto. Vol. VIII, n. 5 e 6. Coimbra, 1889.

Le Scuole secondarie, eco dell'Associazione nazionale fra gli insegnanti delle Scuole secondarie. Anno VI, n. 5 e 6. Milano, 1889.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche. (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª, Vol. 2, Fasc. 12. Dicembre, 1889.

Rivista Scientifico-industriale compilata da Guido Vimercati. Anno XX, n. 22-24. Firenze, 1888.

Bertini (E.) — Sulle curve fondamentali dei sistemi lineari di curve piane algebriche (Rend. Circolo mat. Palermo, 1888). — Aggiunta alla precedente memoria. Pavia, 1888.

Guccia (G. B.) — Sur l'intersection de deux courbes algébriques en un points singulier. — Théorème général concernant les courbes algébriques planes. (Comptes-Rendus Séances Académie des Sciences, 1888).

Jung (G.) — Sul numero delle *curve degeneri* contenute in un fascio di genere qualunque. — Sull'*eccesso* degli elementi fondamentali di un sistema lineare di genere qualunque. (Rend. R. Istituto lombardo).

Neuberg (J.) — Sur les triangles équibrocardiens. (Bulletin Association Française Avancement des Sciences).

Padova (E.) — Sulla teoria delle coordinate curvilinee. (Rend. R. Accademia Lincei, 1888).

Pascal (E.) — Sopra le relazioni che possono sussistere identicamente fra formazioni simboliche del tipo invariantivo nella teoria generale delle forme algebriche. (Atti. R. Accademia Lincei, 1888).

Riccò (A.) — Immagine deformata del sole riflesso sul mare e dipendenza della medesima dalla rotondità della terra. (Rend. R. Accademia Lincei, 1888).

Tonelli (A.) — Sopra una certa equazione differenziale a derivate parziali del 2° ordine. (Atti. R. Accademia Lincei, 1888). — Sopra una certa equazione a derivate parziali del 3° ordine (Rend. R. Accademia Lincei, 1888).

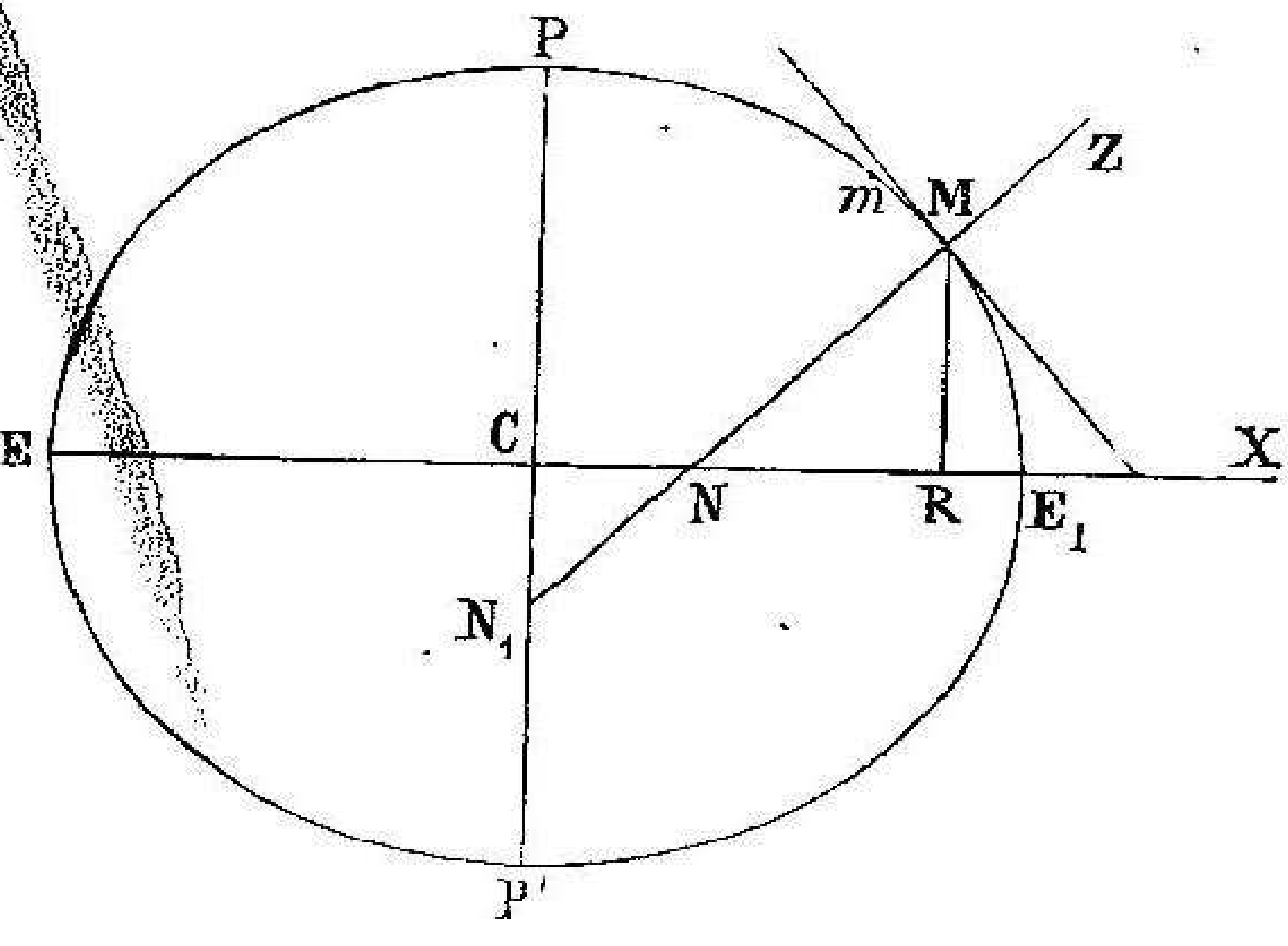
(*) Vedi a pag. 57 della maggior opera dello stesso A. — Lezioni di Geometria proiettiva. — U. Hoepli, Milano 1888.

IL SISTEMA METRICO

II.

Il cortese lettore, che mi ha fino a questo punto seguito, potrà ora leggere le poche cose di analisi che seguono; di queste ho bisogno per poter continuare nella mia narrazione. La esposizione di esse fu da me ridotta al puro necessario e nel modo che mi parve più acconcio, affinchè anche quel lettore, che per caso avesse dimenticato qualche principio algebrico, possa in brevi istanti richiamarselo alla memoria.

Nell'ellisse qui tracciata intendesi rappresentare una sezione meridiana della terra ritenuta un ellissoide di rotazione. P P' è l'asse minore ($2b$), E E_1 l'asse maggiore ($2a$), M un punto dell'ellisse meridiana, Z lo zenit di questo punto, C l'origine delle coordinate ortogonali,



M R $= y$, C R $= x$, 90° — M N X l'angolo che la tangente ad M forma coll'asse della X; N_1 N M la direzione della verticale, M N R $= \varphi =$ latitudine astronomica, M m un arco di meridiano che riteniamo infinitesimo.

Detta E l'eccentricità dell'ellisse espressa nella stessa unità in cui sono espressi a e b, poniamo $e\,a = \mathrm{E}$, cioè $b^2 = a^2(1 - e^2)$ ed allora la ben nota equazione dell'ellisse, riferita al centro di un sistema di assi ortogonali, diviene

1) $$y^2 + (1 - e^2)\,x^2 = a^2(1 - e^2).$$

Questa, differenziata, dà

$$-\frac{d x}{d y}=\frac{y}{x(1-e^2)};$$

poichè

$$\tang(90^\circ-\varphi)=-\frac{d y}{d x}$$

si ha tosto

$$\tang^2\varphi=\frac{y^2}{x^2(1-e^2)^2}.$$

Sostituendo il valore di y^2 della formola 1) si ha

$$\tang^2\varphi=\frac{a^2-x^2}{x^2(1-e^2)}.$$

Risolta per x dà

$$x=\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}}$$

e poi

$$y=\frac{a\operatorname{sen}\varphi(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Differenziando queste ultime equazioni si ha:

$$d x=-d\varphi\cdot\frac{a(1-e^2)\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)^3}}$$

$$d y=\quad d\varphi\cdot\frac{a(1-e^2)\cos\varphi}{\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)^3}}.$$

Poichè M m è supposto un arco infinitesimo, si ha, ponendo M $m=d s$,

$$d s=\sqrt{d x^2+d y^2},$$

dunque

2) $$d s=d\varphi\cdot\frac{(1-e^2)a}{\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)^3}},$$

ma è ben noto che $\frac{d s}{d\varphi}=\mathrm{R}$ è il raggio di curvatura, dunque

3) $$\mathrm{R}=\frac{(1-e^2)a}{\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)^3}}.$$

Sieno ora φ, φ_1 i valori delle latitudini astronomiche di due punti sullo stesso meridiano; volendo conoscere la lunghezza dell'arco intercetto si riprenda la formola 2).

Il fattore di $d\varphi$ sviluppato in serie secondo il canone binomiale diventa:

$$(1-e^2)\,a\,(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}=a(1-e^2)\Big[1+\frac{3}{2}e^2\operatorname{sen}^2\varphi+$$
$$+\frac{15}{8}e^4\operatorname{sen}^4\varphi+\frac{105}{48}e^6\operatorname{sen}^6\varphi+\ldots\Big]$$

Alle potenze dei seni si possono sostituire i coseni di archi multipli perchè

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi$$

$$\operatorname{sen}^4 \varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi$$

$$\operatorname{sen}^6 \varphi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2\varphi + \frac{3}{16} \cos 4\varphi - \frac{1}{32} \cos 6\varphi .$$

Sostituendo nella precedente serie i valori ora scritti e ponendo:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} e^2 + \frac{15}{8} \cdot \frac{3}{8} e^4 + \frac{105}{48} \cdot \frac{5}{16} e^6 \dots \\
\beta &= \quad - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} e^2 - \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{2} e^4 - \frac{105}{48} \cdot \frac{15}{32} e^6 \dots \\
\gamma &= \qquad\qquad\qquad \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{8} e^4 + \frac{105}{48} \cdot \frac{3}{16} e^6 \dots \\
\delta &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{105}{48} \cdot \frac{1}{32} e^6 \dots
\end{aligned}$$

si ottiene

$$d s = d\varphi \times a (1 - e^2) [\alpha + \beta \cos 2\varphi + \gamma \cos 4\varphi + \delta \cos 6\varphi \dots]$$

Integrando fra i limiti φ e φ_1 si ottiene la lunghezza σ dell'arco intercetto

$$\sigma = a (1 - e^2) \Big[\alpha (\varphi - \varphi) + \frac{1}{2} \beta (\operatorname{sen} 2\varphi - \operatorname{sen} 2\varphi_1) + \\ + \frac{1}{4} \gamma (\operatorname{sen} 4\varphi - \operatorname{sen} 4\varphi_1) + \frac{1}{6} \delta (\operatorname{sen} 6\varphi - \operatorname{sen} 6\varphi_1) \dots \Big]$$

Limitandoci alla quarta potenza dell'eccentricità (più che sufficiente nel problema dell'unità di misura), dopo fatte le facilissime sostituzioni si ha

$$\sigma = a \left(1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4\right) [\varphi - \varphi_1] - a \left(\frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{32} e^4\right) [\operatorname{sen} 2\varphi - \operatorname{sen} 2\varphi_1] \\ + \frac{15}{256} a e^4 [\operatorname{sen} 4\varphi - \operatorname{sen} 4\varphi_1].$$

È ben ovvio che nella formola precedente $\varphi - \varphi_1$ deve essere espresso in parti di raggio, e perciò, se $\varphi - \varphi_1$ è dato in gradi e frazioni decimali di grado (coll'errore massimo di $\frac{1}{2}$ unità del quinto ordine corrispondente al limite di precisione pratica nelle determinazioni astronomiche di φ) si avrà:

4) $$\sigma = a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4\right)\frac{\pi}{180}[\varphi - \varphi_1] -$$
$$- a\left(\frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{32}e^4\right)[\text{sen } 2\varphi - \text{sen } 2\varphi_1] +$$
$$+ \frac{15}{256}a\, e^4 [\text{sen } 4\varphi - \text{sen } 4\varphi_1].$$

Poniamo ora $\varphi_1 = 0°$, $\varphi = 90°$, e la lunghezza del quarto di meridiano che chiamo Σ diviene:

5) $$\Sigma = a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4\right)\frac{\pi}{2}.$$

Dividendo la 4) per la 5), e risolvendo rispetto a Σ, abbiamo:

6) $$\Sigma = \frac{90°}{\varphi - \varphi_1}\sigma + \frac{90\,\Sigma}{\pi(\varphi - \varphi_1)}\left(\frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{4}e^4\right)\text{sen}(\varphi - \varphi_1)\cos(\varphi + \varphi_1) -$$
$$- \frac{1350\,\Sigma\, e^4}{64\,\pi(\varphi - \varphi_1)}\text{sen } 2(\varphi - \varphi_1)\cos 2(\varphi + \varphi_1) \ldots .$$

Su quest'ultima relazione importantissima dobbiamo dirigere la nostra attenzione. Il valore di e deve essere conosciuto per altra via e diremo in qual modo: peraltro è imperioso far notare che se $\varphi + \varphi_1$ desse per somma $90°$ il termine che contiene e^2 si annullerebbe rimanendo l'altro in e^4; e però con quella fortunata condizione anche una conoscenza approssimata di e basterebbe allo scopo. Poi la risoluzione della 6) deve farsi col metodo delle approssimazioni successive.

Pongasi da prima $\sigma \dfrac{90°}{\varphi - \varphi_1} = \Sigma_o$, quest'ultimo valore si introduca nel secondo e terzo termine, i quali calcolati coll'aggiunta del primo ci porgono un secondo valore di Σ, ecc., ecc.

Resta ora ad esporre in qual modo si possa avere colle misure geodesiche e. A tal uopo ripigliamo l'equazione 3), che dà il raggio di curvatura

3) $$R = \frac{(1 - e^2)\,a}{\sqrt{(1 - e^2\,\text{sen}^2\varphi)^3}}.$$

Per una piccola estensione, per es., per un'ampiezza di circa 1°, l'arco del cerchio osculante si confonde col corrispondente arco di ellisse meridiana.

Sia s la lunghezza misurata fra φ e φ_1 poco differenti di 1° e ridotta con una proporzione ad un grado, e sia Φ la latitudine intermedia $\left(\frac{\varphi + \varphi_1}{2}\right)$. È ben ovvio che

$$s = \frac{\pi}{180} \cdot R$$

cioè
$$s = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{(1-e^2)\, a}{\sqrt{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \Phi)^3}}.$$

Un'altra misura ridotta ad un grado in latitudine diversa (verso il polo e verso l'equatore) darà

$$s_1 = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{(1-e^2)\, a}{\sqrt{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \Phi_1)^3}}.$$

Dividendo s_1 per s avremo

$$\sqrt[3]{\left(\frac{s'}{s}\right)^2} = \frac{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \Phi}{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \Phi_1}$$

e ponendo

$$4') \qquad \Gamma = \sqrt[3]{\left(\frac{s'}{s}\right)^2}$$

che è quantità data dalle misure nelle latitudini già determinate, si ha:

$$5_1) \qquad e^2 = \frac{1-\Gamma}{\operatorname{sen}^2 \Phi - \Gamma \operatorname{sen}^2 \Phi_1}.$$

Ripigliamo ora la nostra narrazione.

L'arco Lappone e quello del Perù, sostituiti nella formola 4'), avrebbero dato la 5_1), cioè l'eccentricità, con sufficiente approssimazione; di quella, come vedemmo, abbiamo bisogno per il calcolo della 6).

Ma la 6), come abbiamo fatto notare, contiene il fatto prezioso che se $\varphi + \varphi' = 90^\circ$, il quarto del meridiano è dato da

$$\Sigma = \frac{90}{\varphi - \varphi_1}\, \sigma - \Delta\Sigma$$

essendo $\Delta\Sigma$ un piccolo termine dipendente solo dalla quarta potenza dell'eccentricità.

Se le misure, dunque, affidate alla cura di Delambre e di Mechain, si estendevano da Dunkerque a Barcellona, $\varphi + \varphi'$ era $92^\circ\, 24', 9$; che se invece l'estremo Sud si portava a Formentera nelle Baleari, $\varphi + \varphi^1$ diventava $89^\circ\, 42', 1$, quantità così vicina a 90° che l'inesatta nozione di e non metteva certo pensiero. Di qui le cure, gli affanni, i pericoli e la morte di Mechain sul territorio spagnuolo, intento, anche dopo fissata la costante metrica, fino all'ultima ora a congiungere la costa di Spagna colle Baleari, congiungimento felice ed ammirabile che fecero più tardi Biot ed Arago in mezzo alle miserie del blocco continentale, dei pirati e della subdola guerra di Spagna.

Il programma, che dovevano compiere Delambre e Mechain, era quello di rimisurare l'arco Cassiniano fra Dunkerque e Montjoui, cioè fra 51° 2′ e 41° 22′ per mezzo di due basi e di una catena di oltre cento triangoli, colla condizione che le due basi dovessero reciprocamente verificarsi e coll'aggiunta delle determinazioni delle latitudini estreme ed anche intermedie, programma che si attuava con istrumenti nuovi e precisi usciti dagli ingegni di Borda e di Lenoir.

Qui dovrebbesi, per una narrazione meno incompleta dell'argomento, entrare sulla parte fisico-astronomica della misura dell'arco del meridiano; se non che mi astengo di farlo per l'indole del periodico dove trova posto questo scritto, ed anche perchè il cortese lettore può consultare l'opera dell'illustre Marinelli, *La terra*, e colà leggere, nel primo volume, una mia appendice proprio su questo argomento, che qui ometto.

Narrare ne' suoi minuti particolari in qual modo ammirabile ed in mezzo a quali pericoli i due illustri uomini compirono il loro mandato, dire della efferatezza da un lato, del coraggio dall'altro in epoca così tempestosa, sarebbe fuor di dubbio tema interessante, ma esso mi obbligherebbe a una quantità di premesse storiche qui fuor di proposito.

Dopo il 20 giugno 1792 fino al 28 luglio 1794, giorno della morte di Robespierre, la Francia entrò in quella fase fatale e ad un tempo grandiosa della Rivoluzione. La seconda Assemblea Nazionale prese il nome dapprima d'Assemblea Legislativa e poi di Convenzione Nazionale, nella quale padroneggiavano i Giacobini; da questo momento il despota della Francia è il Comitato di Salute Pubblica. Le passioni popolari si scatenarono, il sospetto divenne il sentimento universale, caddero teste regali, teste sacre, teste illustri, e per parlare dei nostri sparvero Lavoisier, Condorcet, Bailly violentemente; cadde Meusnier all' assedio di Magonza; muore più tardi Borda di morte naturale, ma in giovane età.

Carnot, del Comitato di Salute Pubblica, quantunque impieghi il formidabile suo genio a far trionfare la Francia contro i nemici proprio nel momento più terribile della sua rivoluzione, esercita nella posizione in cui si trova benefiche influenze a proteggere di fronte agli energumeni suoi colleghi i dotti, la scienza, la impresa dell'arco di meridiano.

Uno scrittore francese, il Fonvielle, ha narrato con efficacia drammatica appunto le vicende di Delambre e di Mechain durante i loro lavori, i quali vennero finalmente condotti a compimento per l'arco Dunkerque-Montjoui sotto il Direttorio e quando la meravigliosa campagna del 1796 e la spedizione di Egitto avevano rialzato dinanzi il mondo il prestigio di Francia.

L'arco di Francia e Spagna e quello di 60 anni prima del Perù fornirono alla Commissione metrica il valore di e con sufficiente approssimazione. Si ebbe $\frac{a-b}{a} = \alpha = \frac{1}{334}$, e quindi

$$e = \sqrt{2\alpha - \alpha^2} = 0.077324$$

$$\lg e^2 = 7.776629$$

$$\lg e^4 = 5.553258.$$

La lunghezza dell'arco misurato fra Dunkerque e Montjoui, espressa in tese, ridotta al livello del mare risultò di

$$551583.6 = \sigma.$$

La latitudine di Dunkerque risultò a Delambre di

$$51^\circ\, 2'\, 10''.\, 5 = \varphi,$$

quella di Montjoui fu determinata da Mechain ed ebbe

$$41^\circ\, 21'\, 44''.\, 9 = \varphi_1 \text{ (*)}.$$

Le latitudini posteriormente assunte da Delambre sono un pochino diverse; quelle ora scritte danno $\varphi - \varphi_1$ indentico a quello usato nel calcolo classico.

$$\varphi + \varphi_1 = 92^\circ\, 23'\, 55''.\, 4$$

$$\varphi - \varphi_1 = 9^\circ\, 50'\, 25''.\, 6$$

$$\lg \frac{90^\circ}{\varphi - \varphi^1} = 0.9686464$$

$$\lg \sigma = 5.7416113$$

$$\lg \left(\frac{90^\circ}{\varphi - \varphi_1}\sigma\right) = 6.7102577$$

$$\frac{90^\circ}{\varphi - \varphi_1}\sigma = 5131660.0 = \Sigma a$$

$$\lg [\mathrm{sen}\,(\varphi - \varphi_1) \cos (\varphi + \varphi_1)] = 7.8471348\, n$$

(*) *NB.* I valori di φ e φ_1 vennero più volte leggermente modificati durante l'epoca intera dei lavori. (Cfr. Delambre, *Base del sistema metrico*).

$$\lg [\text{sen}\, 2\, (\varphi - \varphi_1) \cos 2\, (\varphi + \varphi_1)] = 9.5186954\, n$$

$$\lg \left(\frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{4} e^4\right) = 7.954016 \ldots ; \ \lg \frac{90}{\pi\, (\varphi - \varphi_1)} = 0.4712933$$

$$\lg \frac{1350\, e^4}{64\, \pi\, (\varphi - \varphi_1)} = 5.394463 \ldots$$

Il calcolo nel 2do e 3^{zo} termine del secondo membro della 6) usando Σ_a in luogo di Σ mi diede -960.95; $+42.02$, donde un più esatto valore di Σ_a è 5130741, che non si modifica che di un decimo di tesa usandolo come nuovo valore approssimato: dunque $\Sigma = 5130741$ tese del Perù a $t_c\, 16\frac{1}{4}$.

Laplace (Méc. Cél., lib. III, pag. 155, ultima ed.) dà 5130740, quindi il calcolo precedente è in accordo col risultato storico.

$\frac{1}{10\,000\,000}$ di 5130741^{te} è $0^{te}.5130741$ cioè $0^{te}\ 3^{pi}\ 0^{po}\ 11^{li}.296$.

È assai interessante porre in evidenza la precisione colla quale avrebbero dovuto osservare e misurare Delambre e Mechain affinchè il valore del metro fosse esatto, per es., al mezzo decimo di millimetro. Supposto che $\varphi + \varphi_1$ fosse stato 90° e che l'eccentricità usata nulla avesse influito (come quasi fu veramente) sul termine che contiene e^4, si tratta di differenziare l'espressione $\Sigma = \frac{90^\circ}{\varphi - \varphi_1}\, \sigma$. Esprimendo in primi d'arco si ha

$$d\Sigma = 9.3\, d\sigma - 9.3\, d\varphi \cdot \frac{\sigma}{580}.$$

Sostituendo per σ l'arco misurato e esprimendo l'errore d_φ in 1″ si ha

$$d\Sigma = 9.3\, d\sigma - \frac{9.3}{60} \cdot \frac{551584^{te}}{580} \cdot d\varphi$$

$$d\Sigma = 9.3\, d\sigma - 147.4\, d\varphi.$$

Or dunque, perchè il metro avesse l'errore soltanto di mm 0.05 e non più, conveniva che Σ non errasse più di metri 500, cioè tese 256.5. Il massimo, dunque, errore tollerabile in $d\Sigma$ era nella nostra ipotesi tese 256.5: e però l'errore dell'arco Dunkerque-Montjoui non doveva oltrepassare 28 tese nella supposizione ben improbabile che $d\varphi$ fosse zero. E supposto invece $d\sigma$ zero, $d\varphi$, cioè l'errore nella differenza $\varphi - \varphi_1$, non doveva eccedere 1″.7; ma, a parte le deviazioni della gravità, all'epoca della unificazione dei pesi e delle misure non si era sicuri di raggiungere precisione simile nelle determinazioni delle latitudini.

Il 4 messidoro, anno VII, davanti i poteri riuniti nella sala dei 500, una deputazione dell'Istituto di Francia, allora riorganizzato, informò dei lavori compiuti dalla Commissione dei pesi e delle misure, e presentò i prototipi che rappresentavano la grande opera compiuta. Una sbarra di platino costruita da Borda, alla temperatura del ghiaccio che si fonde, lunga $3^{pi}\ 0^{po}\ 11^{li}.296$ della tesa del Perù alla temperatura di $16^{o}.25$ centigradi era il metro legale, il quale, col *placet* delle podestà legislative, veniva deposto negli Archivi di Stato.

Se il lettore volesse approfondire l'argomento dovrebbe consultare l'opera di Delambre prima citata, alcuni scritti di Legendre, la *Geodesia* di Puissant, le *Note Varie* di Lalande, ecc. Senonchè la tesa del Perù, *mater comunis*, e il metro, *filius suus*, potevano perire, perocchè un terremoto o lo folgore hanno podestà di annientare o di fondere, e peggio ancora (e lo sapeva bene il Direttorio) sovente gli uomini distruggono quelle cose che la folgore o il terremoto hanno risparmiato, con questo d'aggravante di fronte alla crudeltà delle forze naturali, che spesso si fanno apologisti della distruzione.

E però Borda aveva già determinata la lunghezza del pendolo che batte il secondo medio a Parigi, e aveva apparecchiato le sbarre di platino per le eventuali esperienze future. La sagacia umana si era premunita anche per i casi più improbabili.

Il Governo della Repubblica ordinava che a partire dal 21 vendemmiale, anno VIII, il litro fosse l'unità di misura per i liquidi, restando abolite le misure antiche.

Benchè il metro fosse trovato, il programma scientifico della misura dell'arco di meridiano fu continuato da Mechain sotto gli auspicii di Bonaparte (1769?-1821), poco prima che divenisse imperatore; ma ahimè! Mechain nello zelo del lavoro per il congiungimento de' suoi triangoli di Spagna colle isole Baleari non cura un primo attacco di febbre gialla, e al secondo muore nelle braccia del barone di Puebla alla Plana, dove ancor oggi dorme il sonno eterno, martire del dovere.

Una interruzione lunghissima ne' lavori di compimento è prodotta dalla morte di Mechain. Quando Napoleone I trionfava a Jena e annientava la Prussia, l'Ufficio delle longitudini ordinava a Biot e ad Arago di tentare l'ammirabile congiungimento dei triangoli spagnuoli colle Baleari. Qui non è il caso di narrare le nuove peripezie che le ostilità colla Spagna, i pirati e il blocco apparecchiarono al giovane Arago: diremo soltanto che il congiungimento fu fatto, e l'arco Cassiniano si estese da Dunkerque a Formentera, poi da Greenwich a Formentera.

Se la Commissione del metro avesse atteso di possedere la lunghezza dell'arco completo, Greenwich-Formentera, i risultati sulla lunghezza unitaria sarebbero stati un po' più concordanti col vero.

Con φ (Greenwich) $51^\circ 28' 40''.0$ e φ' (Formentera) $38^\circ 39' 56''.11$ (uso i costanti che si ottennero in principio del secolo), con $a = 730431,3$ tese del Perù, con $e^2 = 0.006166$ si ottiene

$$\Sigma = 5130942 = 3^{pi}\, 0^{po}\, 11^{li}.313$$

in eccesso sul risultato dato da Laplace di $0^{li}.017$.

I lavori geodesici assunsero nel nostro secolo uno slancio ed una precisione non prevedibili. Presto si dimostrò che i circoli ripetitori, usati da Delambre e Mechain, quantunque ammirabili, potevano benissimo dare le latitudini estreme coll'errore di qualche secondo d'arco e così pure gli angoli dei triangoli geodesici; fu messo bene in luce che le attrazioni locali possono viziare le latitudini astronomiche modificando la direzione normale della gravità. Grandi archi di meridiano si misurarono in più parti del mondo, sotto moltissimi paralleli si determinò la lunghezza del pendolo che batte i secondi, discussioni, approfondite mercè la teoria degli errori, condussero ai risultati moderni, che dalla verità potranno ancor discostarsi, ma di quantità estremamente piccole.

La scienza moderna riconosce che ben si apposero gli uomini celebri della Commissione del metro assumendo che i meridiani della terra avessero eccentricità costante, perocchè le attrazioni locali, spesse e svariatissime, vere intumescenze geodesiche, nulla tolgono all'insieme generale che il livello medio dei mari sia un ellissoide di rotazione. Soltanto il più probabile valore di Σ nello stato attuale della scienza è $5131758 \pm$. L'errore quindi commesso dalla Commissione del metro fu di circa 1018 tese sulla lunghezza del quadrante, e però l'errore sul metro di $-0^{li}.088$.

Il metro, quando debba rappresentare $\frac{1}{10\,000\,000}$ del quarto del meridiano terrestre, deve essere lungo

$$0^{\text{tese}}\ 3^{\text{pi}}\ 0^{\text{po}}\ 11^{\text{li}}.384$$

della tesa del Perù a $16^{\circ}.\frac{1}{4}$ di t_c.

Se ora nella formola

$$d\Sigma = 9.3\, d\sigma - 147.4\, d\varphi$$

si sostituisce a $d\varphi$ l'errore commesso nell'arco $\varphi - \varphi^1$, supponendo che le posteriori determinazioni di φ e di φ_1 lo abbiano veramente messo in evidenza, si ha $d\varphi = +2''.2$, e poichè $d\Sigma$ è -1018 tese, si ha $d\sigma = -75$.

Tale errore nella misura diretta è più che probabile, e però ci è lecito, fino ad un certo punto, di conchiudere che la deviazione de' livelli alle due teste dell'arco era o nulla o piccolissima, e perciò la massima parte dell'errore va attribuita alle determinazioni delle latitudini estreme.

La definizione di metro, che enunciasi nelle scuole, deve essere modificata nel seguente modo:

Il metro è l'unità di misura internazionale, il cui prototipo esiste nell'Archivio di Stato di Francia; esso differisce in meno dalla diecimilionesima parte d'un quarto del meridiano terrestre d'una quantità per gli usi civili evaniscente. Il prototipo è una sbarra di platino alla temperatura del ghiaccio fondentesi lunga

$$0^{\text{tese}}\quad 3^{\text{pi}}\quad 0^{\text{po}}\quad 11^{\text{li}}.296$$

la tesa essendo quella usata nelle misure del Perù supposta alla temperatura di $16^{\text{gr}}\frac{1}{4}$ centigradi.

Non varrebbe in verità la pena di mutare il prototipo in causa dell'errore $-0^{\text{li}}.088$, giacchè, qualora anche si facesse un prototipo esatto nello stato presente della scienza, pure a rigore di essa non sarebbe ancora $\frac{1}{10\,000\,000}$ del quarto del meridiano terrestre, giacchè, perchè lo fosse, sarebbe necessario che la terra fosse un ellissoide di rivoluzione, mentre il livello medio dei mari lo è soltanto approssimatamente, e poi bisognerebbe giurare in modo assoluto che i costanti moderni non abbiano ancora leggerissimamente a mutarsi e per la imperfezione delle misure e per la mutabilità, quanto lenta essa possa essere, della figura del nostro pianeta. In ogni modo e a titolo di curiosità diciamo che la sbarra di platino a 0°, perchè fosse $\frac{1}{10\,000\,000}$ del quarto del meridiano terrestre, dovrebbe essere lunga mm. 1000,20, in luogo di mm. 1000.

Non è fuori di proposito far osservare che immergendo il campione prototipo in un bagno a $+ 22°,5\ t.$, ritenuto che il coefficiente K per il platino sia 0.00000842, l'allungamento lineare è appunto circa mm. 0,2.

La Commissione internazionale del metro, riunitasi a Parigi nel 1872, neppure sollevò, a titolo di capriccio, la questione di mutare il prototipo, anzi, con decisione plenaria, deliberò che « Pour l'exécution du mètre international on prend comme point de départ le mètre des Archives dans l'état où il se trouve ».

Il metro prototipo di Borda non è diviso; ma il Comitato deliberò che i prototipi delle diverse nazioni, uguali in lunghezza al primitivo, fossero a tratti; che il metro internazionale avesse la lunghezza del metro tipo a 0° C.; che nella fabbricazione dei metri si dovesse impiegare una lega composta di 90 di platino e 10 di iridio. Deliberò ancora che le sbarre di platino iridiato, sulle quali debbonsi tracciare i 100 centimetri, debbono essere lunghe cm. 102. Riguardo poi al chilogramma fu deciso che il chilogramma internazionale sarebbe dedotto dal chilogramma prototipo degli Archivi. Come si stabilì per il metro, così si fece per il chilogramma, il quale deve essere di platino iridiato nello stesso rapporto di 90 a 10. La forma del chilogramma internazionale è identica a quella del prototipo degli Archivi, cioè un cilindro di cui l'altezza eguaglia il diametro e le periferie delle basi leggermente arrotondate.

Non credo necessario di più oltre trattenermi sulle deliberazioni della Commissione internazionale metrica, perocchè quel tanto che ho detto è sufficiente al mio compito. Non resta a desiderare che una sola cosa, cioè che tutto il mondo civile accetti per legge e nel fatto il monumento imperituro, che è gloria intangibile della Francia. Oggidì il sistema metrico è legalmente obbligatorio in Italia, nella Svizzera, nell'Olanda, nel Belgio, nella Danimarca, nella Svezia, ecc., ecc. In Inghilterra e negli

Stati Uniti l'uso è autorizzato per legge, ma lentamente il sistema metrico diverrà affatto universale, e la società umana proverà anche con questo fatto che, ad onta degli abusi sanguinosi di alcuni settari briachi, i beneficii morali, sociali e materiali che la Rivoluzione francese recò al mondo sono stelle lucide nella costellazione umana, alle quali sempre con reverenza dirigeranno gli sguardi i lontani nostri nepoti.

Dicembre 1888. R. Osservatorio del Collegio Romano.

E. Millosevich.

Sopra i sistemi di Circoli aventi lo stesso asse radicale

III.

1. Da un punto P′ (Tav. I, fig. 1ª e 2ª) si tiri una retta indefinita P′Q′, e si segnino i punti Q′, N ove essa incôntra rispettivamente l'asse radicale e la linea dei centri del sistema dato. Da P′ si tiri ancora P′R′ parallela alla linea dei centri e si prolunghi fino ad incontrare in R′ l'asse radicale. Detto P il centro del fascio corrispondente delle polari di P′ rispetto ai cerchi del sistema, e condotta PH parallela all'asse radicale, si prolunghi fino a segare nuovamente il cerchio (di centro C) che ha per diametro P′P. La distanza di questo punto di intersezione della PH col cerchio ad H è eguale a R′I. Quindi, ricordando che, quando si considera il caso della 2ª figura, la tangente condotta da H al circolo C è eguale ad HL, si avrà costantemente in ambedue i casi:

$$HP \, . \, IR' = HL \, . \, HL'.$$

Ora, osservando la prima figura, si vede che tanto il punto H cada dentro LL′, quanto cada fuori, si ha:

$$HL \, . \, HL' = IH^2 - IL^2,$$

mentre nella seconda figura si ha:

$$HL \, . \, HL' = IH^2 + IL^2;$$

quindi si comprendono ambedue i casi scrivendo:

$$HL \, . \, HL' = IH^2 \mp IL^2$$

e perciò:

$$IH^2 = HP . IR' \pm IL^2.$$

E se P_1 è la proiezione di P sull'asse radicale, sarà $P_1 P = IH$; onde:

$$P_1 P^2 = HP . IR' \pm IL^2. \tag{4}$$

Ma dai triangoli simili $P' H' N$, $Q' I N$, essendo $IR' = H' P'$, si ricava:

$$IR' : IQ' = H' N : IN$$

e perchè:

$$H' N = IN - IH' = IN + P_1 P,$$

si avrà:

$$IR' : IQ' = IN + P_1 P : IN$$

cioè:

$$IR' = \frac{IQ'}{IN} (IN + P_1 P).$$

Sostituendo quindi nella (4) per IR' questo suo valore, avremo:

$$P_1 P^2 = HP . IQ' + \frac{IQ'}{IN} . P_1 P . HP \pm IL^2. \tag{5}$$

Se dunque il punto P' si muove sulla retta $QP'N$, il corrispondente P descriverà una linea tale che le distanze rispettive di ogni suo punto dall'asse radicale e dalla linea dei centri del sistema verificano costantemente la relazione (5).

Senza stare ad investigare quale sia la definizione geometrica più semplice di questo luogo, si esamini subito il caso speciale in cui la retta data è la $P' R'$ parallela alla linea dei centri del sistema. In tal caso allora si deve manifestamente ritenere che IR' è costante nella relazione (4):

$$P_1 P^2 = IR' . HP \pm IL^2.$$

Se R è il centro del fascio di polari corrispondente ad R', abbiamo visto che si ha:

$$IR' . RI = \pm IL^2$$

a seconda che siamo nel caso contemplato dalla 1ª o dalla 2ª figura. Quindi si avrà in ambedue i casi:

$$P_1 P^2 = IR' . HP + IR' . RI$$

e perciò:

$$P_1 P^2 = IR' . RP_1. \tag{6}$$

Se ora P' si muove sopra $P' R'$ parallela ad HI, il segmento

IR' essendo costante per ogni posizione di P', ne viene che il corrispondente R di R' è un punto fisso. Perciò il centro P del fascio delle polari di P' rispetto ai circoli del sistema descrive una linea tale che il quadrato della perpendicolare condotta da ogni suo punto all'asse radicale del sistema è proporzionale alla distanza del suo piede ad un punto fisso dell'asse stesso. È noto che la linea che gode di tale proprietà è una parabola, il cui asse è l'asse radicale del sistema e il cui vertice è il punto fisso. Il parametro di questa parabola essendo IR', la distanza del vertice dal fuoco sarà $\frac{1}{4} IR'$. Dunque: — « Se un punto scorre lungo una « retta parallela alla linea dei centri di un sistema di cerchi, il « centro del fascio corrispondente di polari rispetto a quei cerchi « descrive una parabola che ha per asse l'asse radicale del si- « stema, per vertice il centro del fascio di polari del punto ove « la retta data incontra l'asse, e per raggio vettore del fuoco la « quarta parte della distanza fra la linea dei centri e la retta « data » (Poncelet).

O altrimenti può anche dirsi: — « Se pei punti d'intersezione « dei cerchi di un sistema con una parallela alla loro linea dei « centri si conducono i rispettivi diametri, i nuovi estremi di « questi sono sopra una parabola. »

2. Se si indica con V uno qualunque dei punti ove la parallela $P'R'$ alla linea dei centri è tagliata dalla corrispondente parabola, la posizione di detto punto verrà determinata dalla relazione (Fig. 1ª e 2ª):

$$R'V^2 = IR' . RR'.$$

Quindi, a seconda che siamo nel caso della prima o della 2ª figura, si avrà:

$$R'V^2 = IR'^2 + IL^2$$

oppure:

$$R'V^2 = IR'^2 - IL^2$$

e perciò nel primo caso è:

$$R'V = R'L;$$

nell'altro:

$$R'V^2 = R'L . R'L'.$$

Da ciò il teorema: — « La distanza del punto d'incontro di una « parallela alla linea dei centri di un sistema col suo asse radi- « cale a uno qualunque dei punti di intersezione di essa paral-

« lela colla parabola, luogo dei centri dei fasci di polari dei punti « situati su quella retta rispetto ai circoli del sistema, è eguale « al segmento che congiunge il nominato punto d'incontro a uno « dei punti limiti del sistema, se questo è composto di cerchi « che non si segano: nel caso opposto essa è media proporzio- « nale fra le distanze di quel punto ai punti comuni a tutti i « circoli del sistema. »

3. Se da V si conduce V G parallela all'asse radicale, essendo $VG = R'I$, si avrà nella prima figura:

$$GV^2 = R'V^2 - IL^2;$$

e nella seconda:

$$GV^2 = R'V^2 + IL^2.$$

E perciò osservando che $R'V = IG$, si avrà nell'un caso:

$$GV^2 = IG^2 - IL^2;$$

nell'altro

$$GV = GL.$$

Queste ultime relazioni provano che il circolo di centro G e raggio G V appartiene in ambedue i casi al sistema che si considera. Ora, siccome questo cerchio è tangente in V alla P' R', e due soli sono i cerchi del sistema che toccano la P' R', così si può concludere: — « La parabola, luogo dei centri dei fasci di po- « lari dei punti situati sopra una parallela alla linea dei centri « di un sistema rispetto ai cerchi di esso, passa pei punti di con- « tatto di quella retta coi due cerchi del sistema che le sono « tangenti. »

Si prova facilmente che, qualunque sia l'inclinazione di una retta sulla linea dei centri d'un sistema, la distanza del suo punto d'incontro coll'asse radicale ai punti nei quali è toccata dai cerchi del sistema ad essa tangenti, è eguale al segmento che congiunge detto punto ad uno dei punti limiti, se il sistema risulta di cerchi che non si segano; altrimenti è media proporzionale fra le distanze di quel punto ai punti comuni a tutti i cerchi del sistema.

Dopo tale osservazione, il lettore potrà facilmente verificare che un teorema analogo a quello dimostrato ora per la parabola sussiste anche allorquando si considera il caso che la data retta abbia colla linea dei centri del sistema di cerchi una inclinazione qualunque.

Modica, agosto 1883.

L. Gianni.

Alcune formole sulle somme delle potenze simili dei numeri naturali

Indico con $S^m(x)$ la somma delle potenze m^e dei numeri naturali $1.2.3.\ldots x$, e cioè pongo:

$$S^m(x) = 1^m + 2^m + \ldots x^m$$

e la chiamo per brevità *somma di* x *d'ordine* m.

Comincio dal considerare il caso di $m = 1$.

Si ha:

$$S(a+b) = 1 + 2 + \ldots a + (a+1) + (a+2) \ldots (a+b) =$$
$$= S(a) + S(b) + ab. \qquad (1)$$

Ponendo nella precedente relazione $(b+c)$ in luogo di b, risulta:

$$S(a+b+c) = S(a) + S(b+c) + a(b+c) =$$
$$= S(a) + S(b) + S(c) + a(b+c) + bc$$

ed in generale:

$$S(a+b+c+\ldots k+l) = S(a) + S(b) + \ldots S(k) + S(l) +$$
$$+ a(b+\ldots k+l) + b(c+\ldots k+l) + \ldots + kl.$$

Ponendo $a = b = c = \ldots = l$, le formole precedenti diventano:

$$S(2a) = 2S(a) + a^2$$
$$S(3a) = 3S(a) + (1+2)a^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S(ba) = bS(a) + S(b-1)a^2$$

ed osservando che $S(b-1) = S(b) - b$ e sostituendo si ha:

$$S(ba) = bS(a) + a^2 S(b) - a^2 b. \qquad (2)$$

Ponendo bc in luogo di b nella precedente relazione e sviluppando si ha:

$$S(abc) = bcS(a) + a^2 S(bc) - a^2 bc$$

e sviluppando $S(bc)$:

$$S(abc) = bcS(a) + a^2(cS(b) + b^2 S(c)) - a^2\{bc(b+1)\}$$

similmente:

$$S(a\,b\,c\,d) = b\,c\,d\,S(a) + a^2\,[c\,d\,S(b) + b^2\,\{d\,S(c) + c^2\,S(d)\}]$$
$$- a^2\,[b\,c\,d\,\{b\,c + b + 1\}]$$

. . . .

e la legge di formazione è manifesta.

Facendo $a = b = c = \ldots$, le precedenti relazioni diventano:

$$S(a^2) = (a + a^2)\,S(a) - a^3$$
$$S(a^3) = (a^2 + a^3 + a^4)\,S(a) - (a^5 + a^4) = a^2\,(S(a^2) + S(a) - a^2)$$
$$S(a^4) = (a^3 + a^4 + a^5 + a^6)\,S(a) - (a^7 + a^6 + a^5) =$$
$$= a^2\,(S(a^3) + a\,S(a) - a^3)$$

. . . .

$$S(a^n) = (a^{n-1} + a^n + \ldots a^{2n-2})\,S(a) - (a^{2n-1} + a^{2n-2} + \ldots a^{n+1})$$
$$= a^2\,\{S(a^{n-1}) + a^{n-3}\,S(a) - a^{n-1}\}.$$

Quest' ultima formola si verifica facilmente da n ad $n+1$ applicando la (2).

Passo ora alle somme d'ordine qualunque.

Si ha:

$$S^n(a+b) = 1^n + 2^n + \ldots a^n + (a+1)^n + (a+2)^n + \ldots (a+b)^n.$$

Sviluppando le potenze n^e indicate e sommando i termini d'eguale grado rispetto ad a in questi sviluppi, si ottiene:

$$S^n(a+b) = S^n(a) + a^n\,b + \binom{n}{1} a^{n-1}\,S(b) + \binom{n}{2} a^{n-2}\,S^2(b) + \ldots$$
$$\ldots \binom{n}{n-1} a\,S^{n-1}(b) + S^n(b) \qquad (3)$$

per $n = 1$ si ricade nella (1), per $n = 2, 3 \ldots$ si hanno le somme di $(a+b)$ di 2°, 3° ... ordine in funzione delle somme di a e b dello stesso ordine e degli ordini inferiori.

Ponendo $a + b$ in luogo di a e c in luogo di b nella precedente relazione e sviluppando si ha:

$$S^n(a+b+c) = S^n(a+b) + (a+b)^n\,c + \binom{n}{1}(a+b)^{n-1}\,S(c) \ldots$$
$$\ldots \binom{n}{n-1}(a+b)\,S^{n-1}(c) + S^n(c)$$

e sostituendo il valore di $S^n(a+b)$:

$$S^n(a+b+c) = S^n(a) + a^n\,b + (a+b)^n \cdot c + \binom{n}{1}\{a^{n-1}\,S(b) +$$
$$+ (a+b)^{n-1}\,S(c)\} + \binom{n}{2}\{a^{n-2}\,S(b) + (a+b)^{n-2}\,S(c)\} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n}{n-1}\{a\,S^{n-1}(b) + (a+b)\,S^{n-1}(c)\} + S^n(b) + S^n(c)$$

e così di seguito per le somme di 4, 5 ... termini.

Ponendo $a = b$ la (3) diventa:

$$S^n(2a) = S^n(a) + a^n \cdot a + \binom{n}{1} a^{n-1} S(a) + \binom{n}{2} a^{n-2} S^2(a) + \dots$$
$$\dots n\, a\, S^{n-1}(a) + S^n(a)$$

così pure:

$$S^n(3a) = S^n(2a) + (2a)^n \cdot a + \binom{n}{1} (2a)^{n-1} S(a) + \dots$$
$$\dots n\,(2a)\, S^{n-1}(a) + S^n(a)$$

. . . .

$$S^n(ba) = S^n\{(b-1)a\} + \{(b-1)a\}^n a + \binom{n}{1} \{(b-1)a\}^{n-1} S(a) \dots$$
$$\dots + n\,\{(b-1)a\}\, S^{n-1}(a) + S^n(a).$$

Addizionando membro a membro queste relazioni e riducendo si ha:

$$S^n(ba) = b\,S^n(a) + a^{n+1} S^n(b-1) + \binom{n}{1} a^{n-1} S(a)\, S^{n-1}(b-1) + $$
$$+ \binom{n}{2} a^{n-2} S^2(a)\, S^{n-2}(b-1) + \dots + \binom{n}{n-1} a^2 S^{n-2}(a)\, S^2(b-1) +$$
$$+ n\,a\,S^{n-1}(a)\, S(b-1). \qquad (4)$$

Osservando che $S^k(b-1) = S^k(b) - b^k$, per k qualunque intero è positivo (*), e ponendo per simmetria $\binom{n}{o} = 1$, la precedente formola si può anche scrivere così:

$$S^n(ba) - S^n(a) = \binom{n}{o} a^n S^o(a)\, S^n(b) + \binom{n}{1} a^{n-1} S(a)\, S^{n-1}(b) + \dots$$
$$\dots \binom{n}{n-1} a\, S^{n-1}(a)\, S(b) + \binom{n}{n} a^o S^n(a)\, S^o(b) - \{\binom{n}{o} S^o(a)(ab)^n +$$
$$+ \binom{n}{1} S(a)(ab)^{n-1} + \dots \binom{n}{n-1} S^{n-1}(a)(ab) + \binom{n}{n} S^n(a)(ab)^o\}$$

che dà $S^n(ba)$ in funzione delle somme di a e di b d'ordine n^o e di ordini inferiori. — Procedendo in modo analogo a quello tenuto per le somme lineari si potrebbero anche qui ottenere le formole esprimenti $S^n(abc)$, $S^n(abcd)\dots$ e quindi $S^n(a^2)$, $S^n(a^3), \dots S^n(a^k)$ in funzione delle somme d'ordine n^o e d'ordini inferiori dei fattori; il che però tralascio di fare per brevità; d'altra parte queste formole hanno forme assai complesse, sicchè non offrono più vantaggio di sorta.

Una relazione semplice ed interessante si ha tra le somme dei successivi ordini da o ad n di un numero a; da cui si deducono altre due, l'una tra le somme dei successivi ordini impari, l'altra tra le somme dei successivi ordini pari. Il lettore le può trovare nell'*Aritmetica generale* del Baltzer, § 28, n. 11.

G. Riboni.

(*) Che $S^o(a) = 1^o + 2^o + \dots a^o = a$.

Sul triangolo che ha per lati le mediane di un triangolo dato

1. Sia A B C il triangolo dato (*), le cui mediane AD, BE, CF s'incontrano in O a due terzi di ciascuna dal vertice, e sia A D un lato del triangolo da costruirsi con le medesime. Da D si conduca D E′ uguale e parallela a B E e diretta nel medesimo senso di B E e si unisca A con E′; sarà A D E′ il triangolo delle mediane.

Infatti, dal parallelogrammo D B E E′ si deducono successivamente gli altri C D E E′, C D F E, C B F E′, C F A E′ e si conclude A E′ uguale e parallela ad F C.

Se da C′, incontro di A C e D E′, si conduce C′B′ parallela a C B, fino ad incontrare A B in B′, sarà A B′ C′ il triangolo delle mediane di A D E′.

Infatti, risultando $DC' = C'E'$, la $AC' = \frac{3}{4}AC$ è una mediana del triangolo D A E′ la quale viene incontrata in E dalle altre due D G, E′ H, poichè $AE = 2 \cdot EC' = \frac{2}{3}AC'$. È inoltre $AB' = \frac{3}{4}AB$, e quindi $B'C' = \frac{3}{4}BC$; di più $B'D = \frac{1}{2}FC$ e parallela ad F C e $AG = \frac{1}{2}AE' = \frac{1}{2}FC$ e parallela ad F C, perciò D B′ A G è un parallelogrammo in cui $AB' = GD$ e parallela G D; infine $E'H = \frac{3}{4}E'F = \frac{3}{4}CB$ e parallela C B; quindi E′ H eguale e parallela C′ B′; adunque A B′ C′ è il triangolo delle mediane del triangolo D A E′.

Ora, volendo descrivere il triangolo che ha per lati le mediane del triangolo A C′ B′, sappiamo come continuare le costruzioni. Da D′, intersezione di A D con C′ B′, si conduca D′ E″ parallela a D E′ e che incontra A C in C″ e A E′ in E″, e da C″ la C″ B″ parallela a B C, e così si prosegua. Le parallele a C B dai punti C′, C″, . . . e a D E′ dai punti D′, D″, . . . danno due serie di triangoli omotetici rispettivamente ad A C B e ad A E′ D.

(*) Il lettore è pregato di fare la figura.

2. Volendo determinare l'area del triangolo delle mediane del dato triangolo si osservi che: area $ADC = \frac{1}{2} ABC$, poichè $DC = \frac{1}{2} BC$. Area $DC'C = \frac{1}{4} ADC = \frac{1}{8} ABC$, perche $C'C = \frac{1}{4} AC$, quindi: area $ADC' = \frac{1}{2} ABC - \frac{1}{8} ABC = \frac{3}{8} ABC$. L'area $ADE' = 2 . ADC'$, per essere $DE' = 2 C'D$, sarà pertanto $= \frac{3}{4} ABC$. Adunque l'area del triangolo delle mediane è $\frac{3}{4}$ di quella del triangolo dato. Questa proprietà si verifica per ciascun triangolo di una delle due serie omotetiche costruito colle mediane di quello che lo precede nell'altra serie.

Il rapporto tra la somma dei primi n triangoli costruiti ed il primo di essi è: $\left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right] ADE' : ADE'$, cioè lo sviluppo del quoziente $\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] : \left[1 - \frac{3}{4}\right]$ che ha per limite $1 : \left[1 - \frac{3}{4}\right] = 4$.

3. Il triangolo delle mediane può costruirsi anche in altro modo. Sia ABC il triangolo dato (*) e formisi il parallelogrammo doppio $ABCB'$. Essendo D, C' i punti medi dei lati BC, CB', sarà ADC' il triangolo delle mediane di ABC. Chiamisi E il punto medio di AC e F il punto medio di BA.

Infatti AD è mediana; $DC' =$ e parallela $BE = \frac{1}{2} BB'$, perchè congiungente, nel triangolo $BB'C$, i punti medi di BC, CB'; $AC' =$ e parallela CC' perchè anche $AF =$ e parallela CC'.

Compiendo il parallelogrammo $ADC'B''$, doppio del triangolo ADC' e congiungendo i punti medi D', C'' di DC', $C'B''$, sarà $AD'C''$ il triangolo delle mediane di ADC'; il che si dimostra come prima.

Ogni triangolo delle mediane si ottiene costruendo il parallelogrammo doppio dell'ultimo triangolo ottenuto e congiungendo con A i punti medi dei lati che concorrono nel vertice opposto ad A.

I punti indicati colle stesse lettere in quest'ultima costruzione appartengono a circuiti poligonali a forma di spirale col polo in A (**), che diremo *triangolari*, perchè derivati da un trian-

(*) Il lettore è pregato a fare una nuova figura.

(**) Anche nella 1ª costruzione i segmenti rettilinei BD, $B'D'$....; CE', $C'E''$.... possono riguardarsi inscritti in archi di spirali omopolari in A.

golo. Se il triangolo A B C è equilatero, le spirali risultano tutte equiangole.

4. Il triangolo delle mediane può avere attorno ad un vertice del triangolo dato sei collocazioni, che sarà lecito numerare e percorrere nel senso delle lancette d'un orologio, apponendo le cifre 1 e 2 ai due triangoli che hanno metà della loro area in comune col dato.

La serie dei triangoli successivi delle mediane può formarsi con uno o due dei sei triangoli sopra distinti, o con qualunque permutazione, anche con ripetizione e rovesciamento, di 3, 4, 5, 6 dei medesimi. Queste permutazioni (eccetto che in alcuni casi particolari) danno origine a spirali che risultano omopolari o in un vertice del triangolo fondamentale, o in un punto determinabile colle successive costruzioni.

Firenze, settembre 1888.

F. BENUCCI.

Sopra due esercizi proposti nella trigonometria del Serret (*)

I.

Essendo a un arco qualunque si ha

$$\operatorname{tang} a = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\right] \text{ (**)}$$

Infatti per note relazioni trigonometriche e perchè i due archi $\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}$ e $\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}$ sono complementari, si ha

$$\operatorname{tang} a = \frac{\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)}$$

(*) Edizione francese e traduzione italiana di A. Ferrucci.

(**) Quest'identità dev'essere sostituita alla $\operatorname{tang} a = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$ che è l'8ª dell'esercizio I del libro II del suddetto Trattato.

$$=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left[\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)-\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)-\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\right].$$

II.

Essendo a, b, c tre archi qualunque, si ha

$$\cos(a+b+c)+\cos(b+c-a)+\cos(a+c-b)+$$
$$+\cos(a+b-c)=4\cos a\cos b\cos c \text{ (*)}$$

Infatti per note relazioni trigonometriche si ha

$$\cos(a+b+c)+\cos(b+c-a)+\cos(a+c-b)+\cos(a+b-c)$$
$$=2\cos a\cos(c+b)+2\cos a\cos(c-b)=$$
$$2\cos a\,[\cos(c+b)+\cos(c-b)]$$
$$=2\cos a\,.\,2\cos b\cos c=4\cos a\cos b\cos c.$$

III.

Essendo a, b, c tre archi qualunque, si ha

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b+\operatorname{sen} c-4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\\ &=2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\left(\cos\frac{3a-b-c+\pi}{4}+\cos\frac{3b-a-c+\pi}{4}+\right.\\ &\left.+\cos\frac{3c-a-b+\pi}{4}+\cos\frac{a+b+c-\pi}{4}\right)\end{aligned}\right\}\text{ (**)}$$

Infatti, poichè per l'identità dimostrata ultimamente si ha

$$4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a+b+c}{2}+\cos\frac{b+c-a}{2}+\cos\frac{a+c-b}{2}+$$
$$+\cos\frac{a+b-c}{2}$$

(*) Quest'identità è la 1ª dell'esercizio VI del libro II, della quale mi servo per dimostrare poi la 2ª corretta dello stesso esercizio.

(**) Quest'identità dev'essere sostituita alla

$$\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b+\operatorname{sen} c-4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}=$$
$$=\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\left(\cos\frac{3a-b-c-\pi}{4}+\cos\frac{3b-a-c-\pi}{4}+\right.$$
$$\left.+\cos\frac{3c-a-b-\pi}{4}+\cos\frac{a+b+c-\pi}{4}\right)$$

che è la 2ª dell'esercizio VI del libro II.

sarà pure identicamente

$$\left.\begin{array}{c}\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c - 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} \\ = \operatorname{sen} a - \cos\frac{b+c-a}{2} + \operatorname{sen} b - \cos\frac{a+c-b}{2} + \operatorname{sen} c - \\ - \cos\frac{a+b-c}{2} - \cos\frac{a+b+c}{2}\end{array}\right\} \quad (1)$$

e poichè d'altra parte per note relazioni trigonometriche si ha

$$\cos\frac{a+b+c}{2} = -\operatorname{sen} 2\left(\frac{a+b+c-\pi}{4}\right)$$
$$= -2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\cos\frac{a+b+c-\pi}{4},$$

sostituendo convenientemente nella (1), si ottiene

$$\left.\begin{array}{c}\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c - 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} \\ = \left(\operatorname{sen} a - \cos\frac{b+c-a}{2}\right) + \left(\operatorname{sen} b - \cos\frac{a+c-b}{2}\right) + \\ + \left(\operatorname{sen} c - \cos\frac{a+b-c}{2}\right) + 2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\cos\frac{a+b+c-\pi}{4}\end{array}\right\} \quad (2)$$

Ora, mediante la nota identità

$$\operatorname{sen} q - \cos p = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right) =$$
$$= 2\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

la precedente eguaglianza diviene

$$\begin{array}{c}\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c - 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} \\ = 2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\cos\frac{b+c-3a-\pi}{4} + \\ + 2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\cos\frac{a+c-3b-\pi}{4} + \\ + 2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\cos\frac{a+b-3c-\pi}{4} + \\ + 2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\cos\frac{a+b+c-\pi}{4}\end{array}$$

e se nel 2° membro di questa, per la nota relazione $\cos x = \cos(-x)$, si cambia il segno ai tre primi archi di cui sono indicati i coseni, e si mette in evidenza il fattor comune $2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}$, si ottiene finalmente

$$\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b+\operatorname{sen} c-4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$$
$$=2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\left(\cos\frac{3a-b-c+\pi}{4}+\cos\frac{3b-a-c+\pi}{4}+\right.$$
$$\left.+\cos\frac{3c-a-b+\pi}{4}+\cos\frac{a+b+c-\pi}{4}\right).$$

Parma, luglio 1888.

Dottor GIUSEPPE BERNARDI.

SOLUZIONE DELLE QUISTIONI 17, 18 e 19

17. *Preso un punto sulla bisettrice di un angolo retto e condotta per questo punto una secante ai lati, determinare la posizione che deve avere la secante affinchè sia minima*

1º *la somma dei segmenti staccati dai lati dell'angolo a partire dal vertice,*

2º *la porzione della secante limitata ai lati,*

3º *l'area del triangolo formato dalla secante e dai lati dell'angolo.*

A. LUGLI.

Soluzione del Prof. *F. Viaggi.*

Tratto un problema alquanto più generale.

Sia XOY l'angolo retto; P un punto interno, $PO=d$ e $POX=\omega$; una retta condotta per P incontri in A, B le direzioni OX, OY e sia α l'angolo acuto in A: d, ω sono costanti, α variabile.

1º $$OA=d\,.\frac{\operatorname{sen}(\omega+\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha}=d\cos\omega+d\operatorname{sen}\omega\operatorname{cotg}\alpha\,,$$
$$OB=d\,.\frac{\operatorname{sen}(\omega+\alpha)}{\cos\alpha}=d\operatorname{sen}\omega+d\cos\omega\operatorname{tang}\alpha\,,$$

quindi

$$OA+OB=d\operatorname{sen}\omega+d\cos\omega+d\operatorname{sen}\omega\operatorname{cotg}\alpha+d\cos\omega\operatorname{tang}\alpha\,;$$

la somma dei due primi termini del 2º membro è costante, quella dei due ultimi, essendo essi positivi e il loro prodotto costante, diventa minima quando essi sono eguali, quando cioè

$$\operatorname{tang}\alpha=\sqrt{\operatorname{tang}\omega}\,.$$

Per tal valore di α, $OA+OB$ acquista il valore minimo

$$d\left(\sqrt{\operatorname{sen}\omega}+\sqrt{\cos\omega}\right)^2.$$

Se $\omega=45^\circ$, $OA+OB$ assume lo stato di minimo per $\alpha=45^\circ$.

2° Sia $A_1 B_1$ la posizione di AB corrispondente all'angolo acuto α_1 determinato dall'equazione

$$\tang \alpha_1 = \sqrt[3]{\tang \omega}$$

e sia $\alpha - \alpha_1 = \pm \varphi$, φ quindi acuto.

Dai triangoli OA_1P, OPB, si ricava

$$A_1P = d \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \alpha_1}, \quad PB_1 = d \,.\, \frac{\cos \omega}{\cos \alpha_1}$$

da cui

$$A_1 B_1 = d \,.\, \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \alpha_1} + d \,.\, \frac{\cos \omega}{\cos \alpha_1} = d \cos \omega \left(\frac{\tang \omega}{\operatorname{sen} \alpha_1} + \frac{1}{\cos \alpha_1} \right)$$

e analogamente

$$AB = d \cos \omega \left(\frac{\tang \omega}{\operatorname{sen}(\alpha_1 \pm \varphi)} + \frac{1}{\cos(\alpha_1 \pm \varphi)} \right);$$

e le due ultime eguaglianze, in virtù di quella posta a principio, diventano dopo agevoli trasformazioni trigonometriche

$$A_1 B_1 = \frac{d \cos \omega}{\cos^3 \alpha_1}$$

$$AB = \frac{d \cos \omega}{\cos^3 \alpha_1} \,.\, \frac{\operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_1 \cos \varphi \pm (\cos^2 \alpha_1 - \operatorname{sen}^2 \alpha_1) \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen}(\alpha_1 \pm \varphi) \,.\, \cos(\alpha_1 \pm \varphi)}$$

e da queste

$$AB - A_1 B_1 = A_1 B_1 \frac{2 \operatorname{sen}(\alpha + \alpha_1) + \operatorname{sen} 2\alpha_1}{\operatorname{sen} 2\alpha} (1 - \cos \varphi);$$

ed essendo, per le ipotesi fatte su α e α_1, positiva la frazione del secondo membro, si conchiude che

$$AB \geqq A_1 B_1$$

secondo che sia

$$1 - \cos \varphi \geqq 0 \text{ ossia } \varphi \geqq 0 .$$

Dunque $A_1 B_1$ è il minimo di AB.

Nell'ipotesi $\omega = 45°$, è $\alpha_1 = 45°$.

3° Moltiplicando tra loro i valori di OA, OB e dividendo per 2, si ha

$$\Delta OAB = d^2 \operatorname{sen} \omega \cos \omega + \frac{d^2}{2} (\operatorname{sen}^2 \omega \cotg \alpha + \cos^2 \omega \tang \alpha);$$

il 1° termine del 2° membro è costante, il valore della parentesi, somma di termini positivi il cui prodotto è costante, diventa minimo quando questi sono eguali, quando cioè

$$\tang \alpha = \tang \omega , \text{ ossia } \alpha = \omega .$$

Perciò il valore minimo il triangolo OAB l'acquista quando il centro del suo cerchio circoscritto è P.

Considerando ora il caso che la trasversale condotta per P incontri la direzione opposta di OX o di OY, se, p. es., A si allontana da O indefinitamente sulla direzione opposta di OX, le funzioni $OA + OB$, AB, OAB crescono continuamente e indefinitamente a partire da zero: dunque lo zero si può considerare un loro minimo.

18. *Se col simbolo* $S^m(x)$ *s'indica la somma delle potenze* m^{esime} *dei primi* x *numeri interi e positivi ed* a, b, c, ... l *sono numeri primi due a due ed* n *intero e positivo, dimostrare che:*

$$\frac{S^n(a.b.c....l)}{a.b.c...l} - \frac{S^n(a)}{a} - \frac{S^n(b)}{b} - \ldots \frac{S^n(l)}{l}$$

è un numero intero.

A. Lugli.

Dimostrazione del Prof. *U. Scarpis* (*).

Lemma. « Se a, n, k sono numeri interi e positivi sarà:

$$S^n(a.k) \equiv k.S^n(a) \pmod{a} ».$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} S^n(k.a) = {} & 1^n + 2^n + \ldots . r^n + \ldots . + a^n \\ & + (a+1)^n + (a+2)^n + \ldots . + (a+r)^n + \ldots . + (2a)^n \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (sa+1)^n + (sa+2)^n + \ldots . + (sa+r)^n + \ldots . + ((s+1)a)^n \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + ((k-1)a+1)^n + ((k-1)a+2)^n + \ldots . + ((k-1)a+r)^n + \ldots . + (ka)^n . \end{aligned}$$

Ora dallo sviluppo della potenza d'un binomio si riconosce che:

$$(s.a+r)^n \equiv r^n \pmod{a}$$

e sarà quindi

$$(sa+1)^n + (sa+2)^n + \ldots (sa+r)^n + \ldots . ((s+1)a)^n \equiv S^n(a), \pmod{a}$$

da cui si deduce subito la dimostrazione del predetto lemma.

Dopo ciò, riducendo allo stesso denominatore l'espressione considerata nella quistione, si ha:

$$\frac{S^n(a.b.c....l) - S^n(a).b.c....l - S^n(b)a.c....l - S^n(c)a.b....l - \ldots}{a.b.c....l}$$

Tutti i termini del numeratore sono multipli di a, ad eccezione dei due primi; ma per questi, secondo il lemma precedente, vige la relazione

$$S^n(a.b.c....l) \equiv S^n(a).b.c....l \pmod{a}$$

per cui la differenza $S^n(a.b.c....l) - S^n(a).b.c....l$ sarà divisibile per a, e quindi anche il numeratore in quistione.

Per la simmetria della formola in egual modo si dimostra che il numeratore è divisibile per i rimanenti fattori $b, c, \ldots l$, ed essendo $a, b, c \ldots l$ primi due a due, ne segue che sarà divisibile anche per il loro prodotto.

(*) Altre dimostrazioni di questa e della quistione seguente sono state inviate dai sig. Prof[i]. *F. Viaggi* e *G. Riboni*. Le dimostrazioni di quest'ultimo si fondano sopra i risultati contenuti nell'articolo " Alcune formole sulle somme delle potenze simili dei numeri naturali „ che trovasi in altra parte di questo fascicolo.

19. *Se col simbolo* $S^m(x)$ *s'indica la somma delle potenze* m^{esime} *dei primi* x *numeri interi e positivi;* a, b, c.... l *sono numeri primi due a due ed* n, α, β, γ.... λ *numeri interi positivi arbitrari, dimostrare che*:

$$\frac{S^{2n}\left(a^\alpha . b^\beta . c^\gamma .... l^\lambda\right)}{a^\alpha . b^\beta . c^\gamma .... l^\lambda} - \frac{S^{2n}(a)}{a} - \frac{S^{2n}(b)}{b} - .... \frac{S^{2n}(l)}{l}$$

è un numero intero.

A. Lugli.

Dimostrazione del Prof. *U. Scarpis.*

Lemma. « Essendo a, m, α numeri interi positivi, $S^m\left(a^\alpha\right)$ è sempre divisibile per $a^{\alpha-1}$ ».

Per il lemma della quistione precedente, abbiamo la seguente catena di congruenze:

$$S^m\left(a^\alpha\right) \equiv S^m\left(a^{\alpha-1}\right).a \quad \left(\text{mod. } a^{\alpha-1}\right)$$
$$S^m\left(a^{\alpha-1}\right) \equiv S^m\left(a^{\alpha-2}\right).a \quad \left(\text{mod. } a^{\alpha-2}\right)$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$S^m(a^3) \equiv S^m(a^2).a \quad (\text{mod. } a^2)$$
$$S^m(a^2) \equiv S^m(a).a \quad (\text{mod. } a).$$

Dall'ultima si ricava che $S^m(a^2)$ è divisibile per a, e tenendo conto di ciò si deduce dalla precedente che $S^m(a^3)$ è divisibile per a^2 e procedendo a questo modo si dimostra infine che $S^m\left(a^\alpha\right)$ è divisibile per $a^{\alpha-1}$.

Posto ciò, riducendo allo stesso denominatore l'espressione considerata nell'enunciato della quistione e riferendoci alla quistione precedente, si comprende che tutto si riduce a dimostrare la congruenza:

$$S^{2n}\left(a^\alpha . b^\beta . c^\gamma .... l^\lambda\right) \equiv S^{2n}(a).a^{\alpha-1}.b^\beta.c^\gamma....l^\lambda.\left(\text{mod. } a^\alpha\right).$$

Ma in virtù del lemma della quistione (18):

$$S^{2n}\left(a^\alpha . b^\beta . c^\gamma .... l^\lambda\right) \equiv S^{2n}\left(a^\alpha\right).b^\beta.c^\gamma....l^\lambda.\left(\text{mod. } a^\alpha\right)$$

e sostituendo:

$$S^{2n}\left(a^\alpha\right).b^\beta.c^\gamma....l^\lambda \equiv S^{2n}(a).a^{\alpha-1}.b^\beta.c^\gamma....l^\lambda\left(\text{mod. } a^\alpha\right).$$

Per ipotesi a, b, c. ....l sono primi due a due, quindi il prodotto $b^\beta.c^\gamma....l^\lambda$ sarà primo con a^α, e dividendo i due membri dell'ultima congruenza per il fattore comune $b^\beta.c^\gamma....l^\lambda$, primo col modulo, saremo così infine condotti a dimostrare che:

$$S^{2n}\left(a^\alpha\right) \equiv S^{2n}(a).a^{\alpha-1}\left(\text{mod. } a^\alpha\right).$$

A questo scopo osserviamo che:

$$(a+1)^{2n}=a^{2n}+\dots\binom{2n}{r}a^{2n-r}.1^r+\dots 1^{2n}$$

$$(a+2)^{2n}=a^{2n}+\dots\binom{2n}{r}a^{2n-r}.2^r+\dots 2^{2n}$$

. . . .

$$(a+h)^{2n}=a^{2n}+\dots\binom{2n}{r}a^{2n-r}.h^r+\dots h^{2n}$$

. . . .

$$(a+a)^{2n}=a^{2n}+\dots\binom{2n}{r}a^{2n-r}.a^r+\dots a^{2n},$$

da cui sommando si ricava:

$$S^{2n}(2.a)-S^{2n}(a)=a^{2n+1}+\dots\binom{2n}{r}a^{2n-r}.S^r(a)+\dots S^{2n}(a)=$$

$$=1^{2n}.a^{2n+1}+\dots\binom{2n}{r}1^{2n-r}.a^{2n-r}S^r(a)+\dots S^{2n}(a).$$

Analogamente si ha:

$$S^{2n}(3a)-S^{2n}(2a)=2^{2n}.a^{2n+1}+\dots\binom{2n}{r}2^{2n-r}.a^{2n-r}.S^r(a)+\dots S^{2n}(a)$$

. . . .

$$S^{2n}\left(a^{\alpha}\right)-S^{2n}\left(\left(a^{\alpha-1}-1\right).a\right)=\left(a^{\alpha-1}-1\right)^{2n}.a^{2n+1}+\dots$$

$$\dots\binom{2n}{r}\left(a^{\alpha-1}-1\right)^{2n-r}.a^{2n-r}.S^r(a)+\dots S^{2n}(a)$$

e sommando nuovamente:

$$S^{2n}\left(a^{\alpha}\right)-S^{2n}(a)=a^{2n+1}.S^{2n}\left(a^{\alpha-1}-1\right)+\dots$$

$$\dots\binom{2n}{r}a^{2n-r}.S^{2n-r}\left(a^{\alpha-1}-1\right)S^r(a)+\dots S^{2n}(a)\left(a^{\alpha-1}-1\right).$$

Notando ora che:

$$S^{2n-r}\left(a^{\alpha-1}-1\right)=S^{2n-r}\left(a^{\alpha-1}\right)-\left(a^{\alpha-1}\right)^{2n-r}$$

si scorge che, essendo $S^{2n-r}\left(a^{\alpha-1}\right)$ divisibile per $a^{\alpha-2}$, in base al lemma precedente, lo sarà pure $S^{2n-r}\left(a^{\alpha-1}-1\right)$ e che quindi tutti i termini dello sviluppo di $S^{2n}\left(a^{\alpha}\right)-S^{2n}(a)$ che corrispondono ad $r=0,1,2,\dots(2n-2)$, saranno divisibili per a^{α}.

D'altra parte per $r=2n-1$ abbiamo:

$$\binom{2n}{2n-1}.a.S^1\left(a^{\alpha-1}-1\right).S^{2n-1}(a)$$

ed essendo

$$\binom{2n}{2n-1}=2n,\ S^1\left(a^{\alpha-1}-1\right)=1+2+\dots\left(a^{\alpha-1}-1\right)=\frac{\left(a^{\alpha-1}-1\right)a^{\alpha-1}}{2}$$

risulta che anche il termine corrispondente ad $r=2n-1$ sarà divisibile per a^{α} e si conclude quindi infine che

$$\mathrm{S}^{2n}\left(a^{\alpha}\right) - \mathrm{S}^{2n}(a) \equiv \binom{2n}{2n} . a^{0} . \mathrm{S}^{0}\left(a^{\alpha-1} - 1\right) . \mathrm{S}^{2n}(a)$$
$$\equiv \left(a^{\alpha-1} - 1\right) \mathrm{S}^{2n}(a) \pmod{a^{\alpha}}$$

cioè che:

$$\mathrm{S}^{2n}\left(a^{\alpha}\right) \equiv \mathrm{S}^{2n}(a) . a^{\alpha-1} \pmod{a^{\alpha}};$$

quello che si voleva dimostrare (*).

QUISTIONI PROPOSTE.

22. Eliminare x, y, z dalle tre equazioni

$$y(b-c+z) + z(c-b+y) = \mathrm{X} + y^2 + z^2$$
$$z(c-a+x) + x(a-c+z) = \mathrm{Y} + z^2 + x^2$$
$$x(2a-b-c) + y(2b-a-c) + z(2c-a-b) =$$
$$= \mathrm{X} + \mathrm{Y} + \mathrm{Z} + 2(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy).$$

23. Dato un triangolo ABC si costruisca un secondo triangolo $A_1 B_1 C_1$ coi lati $B_1 C_1$, $C_1 A_1$, $A_1 B_1$ eguali rispettivamente ai segmenti AA′, BB′, CC′ che uniscono i vertici A, B, C con i punti A′, B′, C′ dei lati ad essi opposti, o dei loro prolungamenti, determinati dalle

$$\frac{\mathrm{BA'}}{\mathrm{A'C}} = \frac{\mathrm{CB'}}{\mathrm{B'A}} = \frac{\mathrm{AC'}}{\mathrm{C'B}} = m$$

in cui m significa un numero positivo o negativo. Sia $A_2 B_2 C_2$ il triangolo derivato, con analoga costruzione, dal triangolo $A_1 B_1 C_1$, e $A_3 B_3 C_3$ quello derivato da $A_2 B_2 C_2$. Provare: 1° che esistono tre valori di m per ciascuno dei quali il triangolo $A_2 B_2 C_2$ è simile al triangolo ABC; 2° che esistono sei valori di m per ciascuno dei quali il triangolo $A_3 B_3 C_3$ è simile al triangolo ABC.

D. Besso.

(*) Per abbondanza di materia si rimanda al fascicolo venturo lo svolgimento delle quistioni 20 e 21, di una od ambedue delle quali pervennero soluzioni dai sig. Prof[i]. *E. Millosevich*, *F. Viaggi*, *F. Palatini* e *R. Badia*.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

EUCLIDE. Libro quinto, novamente esposto dal Dott. MICHELE GREMIGNI. — Firenze, G. C. Sansoni, 1889. Prezzo L. 1.

Il Prof. Gremigni, già noto ai lettori di questo periodico, nel presente libretto espone in modo chiaro e rigoroso la teoria delle grandezze proporzionali contenuta nel quinto libro d'Euclide. L'A., fondandosi sul pregevole lavoro del Prof. Bertini sullo stesso argomento, che ha reso un così notevole servigio all'insegnamento liceale, ha creduto conveniente di modificarlo, nell'intento di rendere più semplice l'esposizione e in pari tempo ridurre a quanto è strettamente necessario la materia da esporre.

Ove si consideri che le recenti modificazioni ai programmi delle scuole classiche (24 ottobre 1888), assegnando al Ginnasio i primi due libri d'Euclide, trasportano il libro quinto dalla seconda alla prima classe liceale, la pubblicazione del Prof. Gremigni sarà accolta con favore dagli insegnanti, ai quali essa faciliterà grandemente il compito di dover esporre una teoria, già per sè stessa alquanto difficile, a giovanetti meno maturi per questa sorta di studi.

Il Gremigni sostituisce un teorema agli assiomi 1° e 3° d'Euclide, e nella dimostrazione di quello fa uso esplicitamente della definizione di *grandezze equivalenti*, secondo la quale son considerate come tali quelle che si possono dividere in parti rispettivamente eguali *(sovrapponibili)*. Sebbene questo concetto non sia in Euclide, il quale non definisce le figure che ora noi diciamo equivalenti e cui egli dà semplicemente il nome di eguali, è molto facile colmare questa lacuna col premettere, insieme con poche altre osservazioni, l'accennata definizione di equivalenza alla spiegazione della proposizione venticinquesima del libro primo. Noi pensiamo anzi che ciò oramai non possa trascurarsi da chiunque voglia impartire un insegnamento rigoroso.

La cura particolare posta dall'A. per ottenere la maggior possibile semplicità è manifestata anche dall'ordinamento che esso ha dato alle sue prime otto proposizioni, le quali così si possono ridurre a quattro soli enunciati facilissimi a ricordarsi.

Il G. poi premette molto opportunamente alla definizione di proporzione due facili proposizioni, le quali dimostrano che effettivamente si possono immaginare quattro grandezze aventi quella proprietà, per cui verranno poi dette proporzionali. In seguito espone nel seguente modo la definizione che è fondamentale in questa teoria: *Quattro grandezze.... formano una* proporzione, *quando le equimolteplici secondo qualsivoglia numero, della prima e della terza, sono, tutte e due, o maggiori, o equivalenti, o minori rispettivamente delle equimolteplici, pure secondo qualsivoglia numero, della seconda e quarta grandezza.* Questo enunciato ha su quello di Euclide (definizione 5ª) il vantaggio di non dare alcuna preferenza alle prime due grandezze di fronte alle altre due, il che contribuisce a render poi tutta l'esposizione più semplice e chiara. Così, per esempio, la proposizione: se A : B : : C : D, sarà anche C : D : : A : B, che ha bisogno di dimostrazione colla definizione euclidea, è data dal G. come immediata conseguenza della sua definizione nella quale essa è infatti contenuta.

Le proposizioni che seguono, senza allontanarsi essenzialmente nelle dimostrazioni da quelle di Euclide, ne differiscono per l'ordinamento pel quale, come pure per la maggiore semplicità degli enunciati, esse riescono assai più facili a ritenersi.

L'A., infine, oltre agli esercizi proposti dal Bertini, ne aggiunge alcuni altri molto propri anch'essi ad illustrare la teoria generale. Noteremo soltanto che l'esercizio 13°, non essendo che un diverso enunciato della proposizione 20ª, si potrebbe senza danno sopprimere.

Ci auguriamo che lo stesso autore faccia presto succedere a questo libro una nuova esposizione del libro sesto, informata agli stessi criteri che lo hanno guidato nel lavoro del quale qui abbiamo tenuto parola.

A. Grandi.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO.

Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. de Longchamps, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, Lucien Lévy, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'Ecole preparatoire de Saint-Barbe. 3ª Serie, Treizième année. N. 2, 3, Février, Mars. Paris. Librairie Ch. Delagrave, 1889.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par H. Vuibert. 13ª année. N. 9, 10, 11, 12. Paris. M. Nony et Cie, 17 Rue des Écoles, 1889.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion, professeur à l'Université de Gand, et J. Neuberg, professeur à l'Université de Liège. Tome neuvième. Janvier, Février, Mars, 1889.

Le Scuole secondarie, eco dell'Associazione nazionale fra gli insegnanti delle Scuole secondarie. Anno VI, n. 7, 8 e 9. Milano, 1889.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª, Vol. 3, Fasc. 1, 2: Gennaio, Febbraio 1889.

Rivista Scientifico-industriale compilata da Guido Vimercati. Anno XXI, n. 1, 2 e 3. Firenze, 1889.

Agamennone (G.) — Determinazione della densità dell'aria (Rend. R. Accademia Lincei, 1885). — Sul grado di precisione nella determinazione della densità dei gas (Rend. R. Acc. Lincei, 1885). — Influenza della deformazione del pallone di vetro nella misura della densità dei gas (Rend. R. Accademia Lincei, 1889).

Amodeo (F.) — Fasci di omografie binarie e rappresentazione geometrica degli elementi immaginari (Gior. Battaglini, Vol. XXVI).

Andreini (A.) — Sopra una proprietà singolare di alcuni numeri dipendente dal sistema particolare di numerazione nel quale sono scritti (Gior. Battaglini, Vol. XXVI).

Beltrami (E.) — Considerazioni idrodinamiche (Rend. R. Istituto lomb., 1889).

Chistoni (C.) — Sul calcolo del coefficiente magnetometrico per i magnetometri costruiti secondo il metodo Gauss modificato da Lamont. Torino, 1889.

Gelin (*l'Abbé* E.) — Éléments de trigonométrie plane et sphérique. Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique. Namur, Librairie Wesmael-Charlier, 1888. Prix: 5 fr. 40

Gremigni (M.) — Euclide. Libro quinto. In Firenze, G. C. Sansoni, 1889. — Prezzo: 1 lira.

(Il seguito nel prossimo fascicolo).

Sull'equivalenza dei poligoni e dei poliedri

1. Due poligoni o due poliedri che si possano decomporre nello stesso numero di parti rispettivamente eguali o che sono limiti delle stesse variabili convergenti (De Paolis, *Elementi di Geometria,* 386) sono equivalenti, ed è chiaro che due poligoni o due poliedri equivalenti hanno superficie o volume eguale. Non mi sembra inutile dimostrare le proprietà inverse, mentre, per quanto so, non vi sono che due memorie, una del Gerwien (*Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke* — Giorn. di Crelle, vol. 10) ed una del Göpel, inserita nel vol. 4º dell'Arch. di Grunert e che non ho potuto consultare, che si occupino di tale argomento. La dimostrazione per i poligoni è in sostanza quella del Gerwien, che si estende facilmente al caso dei poliedri.

2. Siano i due poligoni P e Q che abbiano aree uguali. Si trasformino rispettivamente P e Q in due triangoli ABC, DEF che avranno aree eguali. Se i due triangoli avessero un lato eguale, avrebbero eguali le corrispondenti altezze, e i due triangoli e quindi i due poligoni sarebbero equivalenti. Se questo non è, osserviamo che può sempre supporsi che un lato DF del triangolo DEF sia maggiore di ciascuno dei lati del triangolo ABC, potendo se no trasformarsi il triangolo DEF in uno che soddisfi questa condizione, e sia AB un lato del triangolo ABC non inferiore agli altri due (Tav. II, fig. 1ª a), EG l'altezza del triangolo DEF corrispondente al lato DF e CO l'altezza del triangolo ABC corrispondente al lato AB. È $CO > EG$, e poichè $AB \geqq BC > CO$, ne viene $AB > EG$. Il circolo descritto con centro in F e con raggio eguale ad AB incontra la retta r, parallela a DF e distante da questa di un segmento eguale ad EG, in due punti M ed N. Unendo M con D e con F si ha il triangolo DMF equivalente a DEF e che in conseguenza ha

la stessa area del triangolo $A\,B\,C$, e poichè i due triangoli $D\,M\,F$, $A\,B\,C$ hanno area eguale ed eguali i lati $A\,B$ ed $F\,M$, anche le altezze corrispondenti sono eguali; i due triangoli sono equivalenti, ed equivalenti sono i due $A\,B\,C$, $D\,E\,F$ per essere equivalenti al triangolo $D\,F\,M$.

3. Siano i due poliedri P e Q che abbiano volumi eguali. Si trasformino rispettivamente P e Q in due tetraedri $A\,B\,C\,D$, $E\,F\,G\,H$, che avranno volumi eguali. Se i due tetraedri avessero una faccia equivalente, avrebbero eguali le altezze corrispondenti a questa faccia e i due tetraedri e quindi i due poliedri sarebbero equivalenti. Se questo non è, abbia il triangolo $F\,G\,H$ area maggiore del triangolo $A\,B\,C$ e quest'area non sia inferiore a quella delle altre faccie del tetraedro $A\,B\,C\,D$. Osserviamo che un lato del triangolo $F\,G\,H$, per esempio $G\,H$, può supporsi non inferiore ad un lato $A\,B$ del triangolo $A\,B\,C$, poichè altrimenti il triangolo $F\,G\,H$ potrebbe trasformarsi in un altro che soddisfacesse a questa condizione. Da E tiro la $E\,O$ perpendicolare al piano $F\,G\,H$ e un piano π (fig. 2ª a) parallelo al piano $F\,G\,H$ e distante da questo di un segmento eguale ad $E\,O$. Sia poi $D\,S$ l'altezza del tetraedro $A\,B\,C\,D$ corrispondente alla faccia $A\,B\,C$, $C\,T$ l'altezza del triangolo $A\,B\,C$ rispetto al lato $A\,B$. È $D\,S > E\,O$, $C\,T > D\,S$, quindi $C\,T > E\,O$. Ne segue che il luogo dei vertici dei triangoli equivalenti al triangolo $A\,B\,C$ e che hanno per base $G\,H$ è un cilindro che taglia il piano π secondo due rette r e r'. Prendendo sopra una di esse un punto qualunque M ed unendolo con F, G ed H si avrà un tetraedro equivalente al tetraedro $E\,F\,G\,H$ e che avrà lo stesso volume del tetraedro $A\,B\,C\,D$, e poichè i due tetraedri $A\,B\,C\,D$, $F\,G\,H\,M$ hanno le due faccie $A\,B\,C$ e $G\,H\,M$ equivalenti, le corrispondenti altezze saranno eguali e i due tetraedri equivalenti, e risultano pure equivalenti i due $A\,B\,C\,D$ ed $E\,F\,G\,H$ per essere equivalenti ad uno stesso $F\,G\,H\,M$.

Giulio Giuliani.

Rappresentazione geometrica dei numeri irrazionali

La teoria dei numeri irrazionali, quale è esposta nei più recenti trattati, si fonda sul concetto di classi numeriche convergenti ed è suscettibile di una rappresentazione geometrica che mi pare notevole.

Per fissare le idee mi atterrò al capitolo IV degli elementi d'algebra di A. Faifofer (edizione del 1888): il quale capitolo cercherò di illustrare graficamente, ammettendo che un numero irrazionale (M, N) sia la misura d'un segmento, incommensurabile col segmento unitario, determinato in modo unico secondo la legge di formazione delle classi M, N che determinano il numero irrazionale suddetto.

Sarà facile, ad esempio, costrurre l'irrazionale $\sqrt{q}$ di cui si tratta nei paragrafi 111, 114.

Difatti sia (Tav. II, fig. 1ª) O U il segmento unitario, O Q il segmento misurato dal numero razionale q non quadrato perfetto e trovisi colla costruzione d'Euclide (VI, 8) il segmento O A medio geometrico tra O Q, O U.

Siano $O\,M_1 = m_1$ $O\,N_1 = n_1$ due segmenti commensurabili con O U e l'uno minore, l'altro maggiore di O A — Descrivansi le circonferenze $O\,M_1\,M_2$, $O\,N_1\,N_2$ tangenti in O alla circonferenza O A Q: e come i punti M_1 N_1 sono l'uno interno, l'altro esterno al segmento U A, così i punti M_2 N_2 saranno pure l'uno interno, l'altro esterno al segmento O Q.

Ora, giusta la 5ª definizione d'Euclide e indipendentemente da ogni idea di misura, si hanno le proporzioni:

$$O\,M_2 : O\,M_1 = O\,M_1 : O\,U; \quad O\,N_2 : O\,N_1 = O\,N_1 : O\,U$$

e poichè i segmenti $O\,M_1$ $O\,N_1$ sono commensurabili con O U per ipotesi, lo saranno pure $O\,M_2$ $O\,N_2$ con $O\,M_1$ $O\,N_1$ e quindi con O U, cosicchè le misure m_2 n_2 di quei segmenti saranno razionali e si avranno le proporzioni numeriche:

$$m_2 : m_1 = m_1 : 1; \quad n_2 : n_1 = n_1 : 1$$

onde:

$$m_1^2 = m_2 < q \quad n_1^2 = n_2 > q.$$

E poichè O A separa la classe dei segmenti O M_1 dalla classe dei segmenti O N_1, così il numero che misura O A separa le classi dei numeri m_1 n_1 razionali e i cui quadrati sono rispettivamente minori e maggiori di q.

Dunque il segmento O A rappresenta graficamente l'irrazionale $\sqrt{q}$.

Somma dei mumeri irrazionali.

Siano (fig. 2ª) O A, O B due segmenti presi su una retta indefinita dall'una e dall'altra parte rispetto il punto O, e siano α β le loro misure rispetto un segmento unitario O U. Se α, β sono razionali, il numero che misura il segmento A B è la somma $\alpha + \beta$: è quindi naturale di definire la somma $\alpha + \beta$ come il numero che misura A B anche nel caso in cui α, β siano uno od entrambi irrazionali ed espressi da (M, N); (P, Q). In tal caso, come O A separa le due classi di segmenti O m, O n commensurabili con O U e misurati dai numeri m, n; e O B separa le classi di segmenti analoghi O p, O q misurati dai numeri p, q, così A B separa le classi dei segmenti mp, nq e perciò il numero $\alpha + \beta$ separa le due classi di numeri $m + p$, $n + q$: cosicchè si ha:

$$(M, N) + (P, Q) = (M + P, \ N + Q).$$

Differenza dei numeri irrazionali.

Siano (fig. 3ª) O A, O B due segmenti, di cui O A il maggiore, portati a partire da un punto O su una retta indefinita da una stessa parte di O; e siano α, β le loro misure rispetto il segmento unitario O U.

La differenza $\alpha - \beta$ che misura A B nel caso di α, β razionali si prenderà come misura di A B anche se α β sono uno od entrambi irrazionali e espressi da (M, N); (P, Q).

In tal caso, segnato un segmento O C commensurabile con OU, maggiore di O B, e minore di O A, come il segmento O A separa la classe dei segmenti O n dalla classe dei segmenti O m terminati in un punto del segmento C A, e come O B separa la classe dei segmenti O p dalla classe dei segmenti O q terminati in un punto di B C, così il segmento A B separa la classe dei segmenti $m\,q$ da quella dei segmenti $n\,p$ e corrispondentemente la differenza $\alpha - \beta$ separa le due classi di numeri $m - q$; $n - p$: cosicchè abbiamo

$$(M, N) - (P, Q) = (M - Q,\ N - P).$$

Prodotto di numeri irrazionali.

Siano (fig. 4ª) O A, O B due segmenti portati sui lati O x, O y d'un angolo qualunque, e siano $\alpha\,\beta$ le loro misure rispetto un segmento unitario O U portato pure sul lato O x a partire da O.

Tirisi U B e per A la A C parallela a U B.

In ogni caso si ha, secondo Euclide, la proporzione:

$$OC : OA = OB : OU.$$

E se i segmenti O A, O B (e quindi anche O C) sono commensurabili rispetto O U cosicchè le misure $\alpha\,\beta\,\gamma$ di quei tre segmenti siano numeri razionali, si ha anche la proporzione numerica

$$\gamma : \alpha = \beta : 1$$

onde

$$\gamma = \alpha\,\beta.$$

Adunque se $\alpha\,\beta$ sono razionali, il numero che misura O C è dato dal prodotto $\alpha\,\beta$. È naturale di assumere il numero che misura O C come prodotto dei numeri α, β anche se $\alpha\,\beta$ sono uno o entrambi irrazionali ed espressi da (M, N); (P, Q).

In tal caso siano O M, O N due segmenti misurati da m, n e siano O P, O Q altri due segmenti misurati da p, q.

Tirate le U P, U Q e per M, N le rispettive parallele M R, N S si ottengono sul lato O y due segmenti O R, O S che, essendo m, n, p, q numeri razionali, rappresentano i prodotti mp, nq. Facilmente si dimostra essere O R minore e O S maggiore del segmento O C.

Difatti, tirata per A la A R′ parallela a M R si hanno, secondo Euclide, le seguenti proporzioni:

$$OA : OU = OC : OB = OR' : OP \; \ldots\ldots \; 1)$$
$$OA : OM = OR' : OR \; \ldots\ldots \; 2)$$

Dalla 1) per essere $OB > OP$ si deduce (Euclide, V, 14):

$$OC > OR';$$

dalla 2) per essere $OA > OM$ si deduce (Euclide, V, A):

$$OR' > OR,$$

onde, a fortiori, si ha:

$$OC > OR > mp.$$

Tirata poi per A la AS' parallela a NS, si dimostrerebbe essere similmente

$$OC < OS < nq.$$

Adunque abbiamo trovato

$$mp < \gamma < nq.$$

È anche facile dimostrare che le coppie dei segmenti OM, OP e dei segmenti ON, OR si possono sempre prendere in modo che i risultanti segmenti OR, OS differiscano tra loro per meno d'un segmento EE' piccolo ad arbitrio.

Sia infatti OR uno dei segmenti commensurabili con OU e terminati ai punti del segmento EC e così pure OS un qualunque segmento commensurabile terminato tra C ed E': sarà allora $OR > OE$; $OS < OE'$ e la differenza tra OS, OR riescirà minore di EE'.

Tirata allora la AR e per U la parallela UP', si prenda il punto P tra P' e B in modo che il segmento OP risulti commensurabile e tirisi RM parallela a PU.

Si hanno le proporzioni:

$$OM : OU = OR : OP \; \ldots\ldots\ldots \; 1)$$
$$OU : OA = OP' : OR \; \ldots\ldots\ldots \; 2)$$

dalle quali risulta che i tre segmenti OM, OU, OA e i tre altri OP', OR, OP presi due a due, hanno la medesima ragione, ma in ordine perturbato; cosicchè si ottiene (Euclide, V, 23):

$$OM : OA = OP' : OP$$

ove, essendo $OP' < OP$, è pure

$$OM < OA.$$

Adunque il segmento commensurabile OR risulta dai due segmenti OM, OP, dei quali OP, e quindi anche OM, è commensurabile con OU: cosicchè il segmento stesso OR è misurato da un prodotto mq. Anologamente dimostro che il segmento OS è misurato da un prodotto nq.

E come OC separa la classe dei segmenti OR da quella dei segmenti OS, così corrispondentemente il numero γ separa le classi dei numeri mp, nq, e perciò è $\gamma = (MP, NQ)$, ossia è

$$(M, N) . (P, Q) = (MP, NQ).$$

Quoziente di numeri irrazionali.

Siano (fig. 5ª) OA, OB due segmenti riferiti all'unità OU e misurati dai numeri α β.

Tirata AB e per U la UC parallela ad AB, è:

$$OA : OC = OB : OU$$

e nel caso che α β, e quindi anche $\gamma = OC$, siano razionali, è pure

$$\alpha : \gamma = \beta : 1$$

onde

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Nel caso che α β siano uno o entrambi irrazionali, il quoziente $\frac{\alpha}{\beta}$ lo intenderemo ancora definito dal numero γ che misura il segmento OC trovato colla precedente costruzione.

In tal caso, supposto $\alpha = (M, N)$ $\beta = (P, Q)$ e prese, come pel prodotto, le coppie dei segmenti OM, ON e dei segmenti OP, OQ, si conducano MQ, NP e per U le rispettive parallele UR, US.

Si ottengono così sul lato Oy due segmenti OR, OS che essendo m, n, p, q razionali, sono misurati dai quozienti $\frac{m}{q}$ $\frac{n}{p}$: i quali segmenti si dimostra facilmente essere uno minore di OC, l'altro maggiore.

Difatti, tirata BR' parallela a UR, si ha

$$OQ:OB=OM:OR' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1)$$
$$OU:OB=OC:OA=OR:OR' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 2)$$

e dalla 1), per essere $OQ > OB$, è pure $OM > OR'$, e quindi anche:

$$OA > OR'$$

dalla 2) per essere $OR > OR'$ si deduce che è pure

$$OC > OR > \frac{m}{q}.$$

Analogamente, tirata BS' parallela a US, si troverebbe

$$OC < OS < \frac{n}{p}.$$

Si è dunque dimostrato essere:

$$\frac{m}{q} < \gamma < \frac{n}{p}.$$

Sia inoltre EE' un segmento piccolo ad arbitrio e si prendano OR, OS commensurabili con OU e terminati l'uno tra E e C, l'altro tra C ed E': cosicchè la differenza tra OR, OS riesca minore di EE'.

Tirisi UR e conducansi per A, B le parallele AS'', BR'. Si ha:

$$OU:OB=OC:OA=OR:OR' \;.\;.\;.\;.\;.\; 1);$$

si ha pure:

$$OR:OA=OU:OS''$$
$$OA:OC=OB:OU,$$

onde (Euclide, V, 23) deducesi la proporzione:

$$OR:OC=OB:OS'' \;.\;.\;.\;.\;.\; 2)$$

Si ha dalla 1), essendo $OR < OC$, che è pure

$$OR' < OA,$$

e dalla 2), essendo $OC > OR$, deducesi similmente

$$OS'' > OB.$$

Se ora MQ è una parallela a UR situata tra BR', AS'' e che determini i segmenti OM, OQ commensurabili con OU, si ha che OR è misurato da un quoziente $\frac{m}{q}$.

Analogamente tirando A R'', B S'' parallele a U S e poi una parallela intermedia N P che determini i segmenti commensurabili O N, O P il segmento O S risulterebbe dal quoziente dei segmenti O N, O P e sarebbe misurato da $\frac{n}{p}$.

Ora, come O C separa le classi dei segmenti O R, O S, così il numero γ separa le classi dei numeri $\frac{m}{q}$ $\frac{n}{p}$: è cioè $\gamma = \left(\frac{M}{Q}, \frac{N}{P}\right)$ ossia è:

$$(M, N) : (P, Q) = \left(\frac{M}{Q}, \frac{N}{P}\right).$$

(Continua).

A. Biffignandi.

TEMI DI MATEMATICA

PER LA LICENZA D'ISTITUTO TECNICO

NELLA SEZIONE *FISICO-MATEMATICA*

(Continuazione)

Autunno 1882, I). — *Determinare i lati d'un triangolo rettangolo, conoscendone l'area ed il raggio del cerchio inscritto.*

Soluzione algebrica. — Rappresenti s^2 l'area data del triangolo ed r il raggio dato del cerchio inscritto. Chiamando x l'ipotenusa ed y e z i cateti del triangolo, alla determinazione delle incognite si hanno le tre equazioni:

$$y\,z = 2\,s^2;\ \ x + y + z = \frac{2\,s^2}{r};\ \ x^2 = y^2 + z^2.$$

Dalla seconda segue:

$$x^2 = \frac{4\,s^4}{r^2} + y^2 + z^2 + 2\,y\,z - \frac{4\,s^2\,(y+z)}{r},$$

e sostituendo ad $y\,z$ ed $y^2 + z^2$ i valori corrispondenti dati dalla 1ª e 3ª equazione

$$s^2 + r^2 = r\,(y + z),$$

donde: $y + z = \frac{r^2 + s^2}{r}$ ed $x = \frac{s^2 - r^2}{r}$. Perchè il problema sia possibile occorre intanto che si abbia $s > r$, poichè x non può essere una quantità negativa.

Conoscendo la somma ed il prodotto di y e z, i valori di queste quantità saranno le radici dell'equazione:

$$X^2 - \frac{r^2+s^2}{r}X + 2s^2 = 0,$$

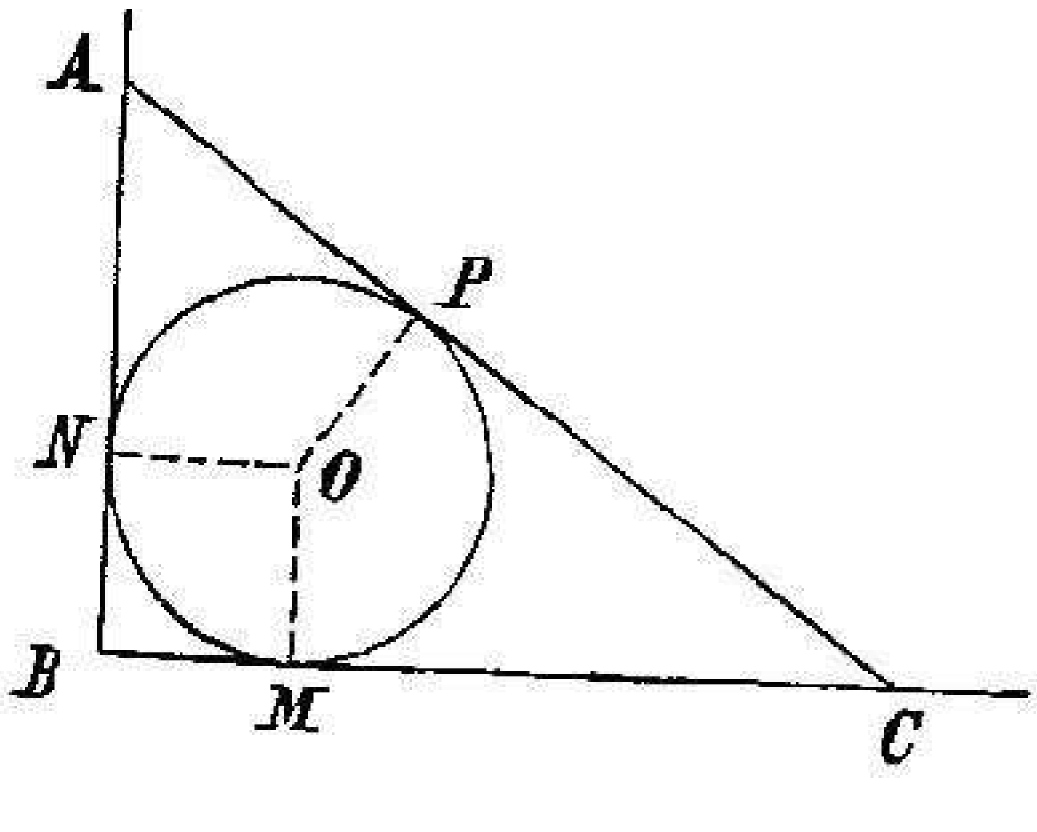
le quali sono:

$$y = \frac{r^2+s^2}{2r} + \sqrt{\left(\frac{s^2-r^2}{2r}\right)^2 - s^2},\ z = \frac{r^2+s^2}{2r} - \sqrt{\left(\frac{s^2-r^2}{2r}\right)^2 - s^2}.$$

Perchè queste radici siano reali, come il problema richiede, occorre che si abbia $\frac{s^2-r^2}{2r} > s$, ossia dividendo per $\frac{r}{2}$ e trasportando $\left(\frac{s}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{s}{r}\right) - 1 > 0$, sicchè il rapporto $\frac{s}{r}$ dovrà essere o maggiore della maggiore o minore della minore delle due radici dell'equazione $\rho^2 - 2\rho - 1 = 0$ le quali sono $\rho' = 1 + \sqrt{2}$ e $\rho'' = 1 - \sqrt{2}$. Dunque $\frac{s}{r} > \sqrt{2} + 1$, giacchè il rapporto stesso non può essere minore di $1 - \sqrt{2}$ che è una quantità negativa.

Segue da ciò che data l'area s^2 del triangolo, questo non esiste se non si ha $r < \frac{s}{\sqrt{2}+1}$, mentre dato il raggio r del cerchio inscritto nel triangolo conviene scegliere l'area s^2 in modo che la radice quadrata di quest'area, ossia s, sia $> r(\sqrt{2}+1)$ ed inoltre: 1° *il massimo raggio del cerchio inscritto in un triangolo rettangolo di cui è data l'area* s^2 *si ha quando* $r = \frac{s}{\sqrt{2}+1} = s(\sqrt{2}-1)$; 2° *la minima area* s^2 *di un triangolo rettangolo di cui è dato il raggio* r *del cerchio inscritto, si ha quando* $s = r(\sqrt{2}+1)$.

Soluzione geometrica. — Si descriva un angolo retto A B C, quindi un cerchio di raggio r tangente ai due lati dell'angolo,



poi tolta dall'area data un'area uguale a quella del quadrato M O N B del raggio del cerchio inscritto, si trasformi l'area rimanente in un triangolo avente per altezza il raggio O P; la metà della base di questo triangolo si chiami A′ C′. È chiaro che inserendo fra i lati dell'angolo retto un segmento $AC = A'C'$ in modo che sia tangente al cerchio MNP si avrà il triangolo richiesto ABC. A tale uopo si descriverà su $A'C'$ un segmento di cerchio capace di un angolo uguale alla metà di 3 retti poi si determinerà quel punto dell'arco di tal segmento distante da $A'C'$ della lunghezza r. Condotta da questo punto una perpendicolare ad $A'C'$ i segmenti in cui il piede di questa perpendicolare divide $A'C'$ saranno chiaramente quelli che nella figura terminano ad A e P ed a C e P, uguali rispettivamente ad NA ed MC. I punti A e C si possono quindi determinare con facilità e con essi il triangolo cercato.

Autunno 1882, II). — *Dividere un tronco di cono retto (circolare a basi parallele) in tre parti d'ugual volume, mediante due piani paralleli alle basi. (Dati i raggi* a, b *delle basi, si devono trovare i raggi delle due sezioni).*

Il trapezio isoscele ABCD rappresenti una sezione meridiana del tronco di cono circolare retto: sarà $AB = 2b$ e $DC = 2a$, con $a > b$. Chiamisi x il raggio di una sezione del tronco, con un piano parallelo alle basi, che divide il tronco in due parti i cui volumi sono come $m:n$ e GH l'intersezione di questa sezione con quella meridiana: sarà $GH = 2x$. Si conduca poi per B la perpendicolare a DC che incontra GH in K e DC in E.

Chiamando h, H le altezze e v, V i volumi dei due tronchi di sezioni meridiane ABHG, ABCD, si avrà:

$$v = \frac{\pi h}{3}(b^2 + x^2 + bx), \quad V = \frac{\pi H}{3}(b^2 + a^2 + ab),$$

onde x è da determinarsi dall'equazione:

$$h(b^2 + x^2 + bx) = \frac{mH}{m+n}(b^2 + a^2 + ab).$$

Ma dai triangoli simili BHK, BCE si ha $h : H = x - b : a - b$, quindi:

$$(x - b)(b^2 + x^2 + bx) = (a - b)(b^2 + a^2 + ab)\frac{m}{m+n}$$

da cui

$$x = \sqrt[3]{b^3 + \frac{m}{m+n}(a^3 - b^3)}$$

con x sempre reale e positiva $(a > b)$.

Facendo successivamente $m = 1$, $n = 2$ ed $m = 2$, $n = 1$ si hanno i raggi x ed x' cercati nell'enunciato, ossia

$$x = \sqrt[3]{b^3 + \frac{1}{3}(a^3 - b^3)}, \quad x' = \sqrt[3]{b^3 + \frac{2}{3}(a^3 - b^3)}.$$

Se poi fosse $m = n = 1$, allora si avrebbe

$$x = \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}}.$$

Estate 1883, I a). — *Dividere il numero 13 in tre parti i cui quadrati diano la somma 75 e in modo che i tre quadrati siano in progressione aritmetica.*

Chiamando n il numero dato 13, s la somma 75 dei quadrati delle tre parti, ed x, y due di queste con $x > y$, le equazioni generali del problema sono:

$$x^2 + y^2 + [n - (x + y)]^2 = s\,; \; 2\,y^2 - x^2 - [n - (x + y)]^2 = 0,$$

da cui, dopo avere addizionato membro a membro, si deduce $y = \pm\sqrt{\frac{s}{3}}$.

Sostituendo questo valore di y nella prima equazione, risulta

$$x^2 + \frac{s}{3} + \left[n - \left(x \pm \sqrt{\frac{s}{3}}\right)\right]^2 = s$$

ossia:

$$(1) \qquad x^2 - \left(n \mp \sqrt{\frac{s}{3}}\right)x - \frac{s}{3} + \frac{1}{2}\left(n \mp \sqrt{\frac{s}{3}}\right)^2 = 0,$$

quindi:

$$x = \frac{1}{2}\left(n \mp \sqrt{\frac{s}{3}}\right) \pm \sqrt{\frac{s}{3} - \frac{1}{4}\left(n \mp \sqrt{\frac{s}{3}}\right)^2},$$

dove i segni superiori corrispondono al valore $+\sqrt{\frac{s}{3}}$ per y e quelli inferiori al valore $-\sqrt{\frac{s}{3}}$.

Dall'espressione precedente per x si può ricavare agevolmente una limitazione per s corrispondentemente al valore di n. Considerando infatti i segni superiori, affinchè x sia reale è necessario che si abbia $\frac{s}{3} \geq \frac{1}{4}\left(n - \sqrt{\frac{s}{3}}\right)^2$ e quindi $s \geq \frac{n^2}{3}$, mentre se si adottano i segni inferiori deve aversi $\frac{s}{3} \geq \frac{1}{4}\left(n + \sqrt{\frac{s}{3}}\right)^2$, da cui deducesi $s \geq 3\,n^2$. Risulta da ciò e dal fatto che la somma delle due radici dell'equazione (1) è uguale a $n \mp \sqrt{\frac{s}{3}}$, che, dato n, se s è minore di $\frac{n^2}{3}$ il problema non ha soluzione, se $\frac{n^2}{3} \leqq s < 3n^2$ il problema ha una sola soluzione, e questa corrisponde al valore $+\sqrt{\frac{s}{3}}$ per y, finalmente se $s \geqq 3n^2$ il problema ha due soluzioni, corrispondenti ai valori $\pm\sqrt{\frac{s}{3}}$ per y.

Nel caso speciale considerato nell'enunciato, avendosi $s < 3 . 13^2$ e $> \frac{13^2}{3}$, il problema ha una soluzione unica, quella per la quale ad x, y ed alla terza parte competono i valori 7, 5, 1.

Estate 1883, I b). — *Trovare la distanza del sole dalla terra, preso il raggio terrestre come unità, e supposto essere 8'',57 l'angolo che questo raggio sottende al centro del sole.*

Risposta: distanza $= \frac{\text{angolo al centro corrisp. all'arco} = \text{raggio}}{8'',57} = \frac{57^\circ.17'.44'',75}{8'',57} = 24068$ raggi terrestri.

Estate 1883, II a). — *Senza far uso di tavole, calcolare la tangente dell'arco di 37°. 30'.*

Osservando che $37^\circ.30' = \frac{1}{2}.75^\circ$ e che

$$\text{tg}\,75^\circ = \frac{\cos 15^\circ}{\text{sen}\,15^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}-1}{2.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1},$$

si calcolerà la tangente richiesta x dall'equazione $\frac{2x}{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, ovvero:

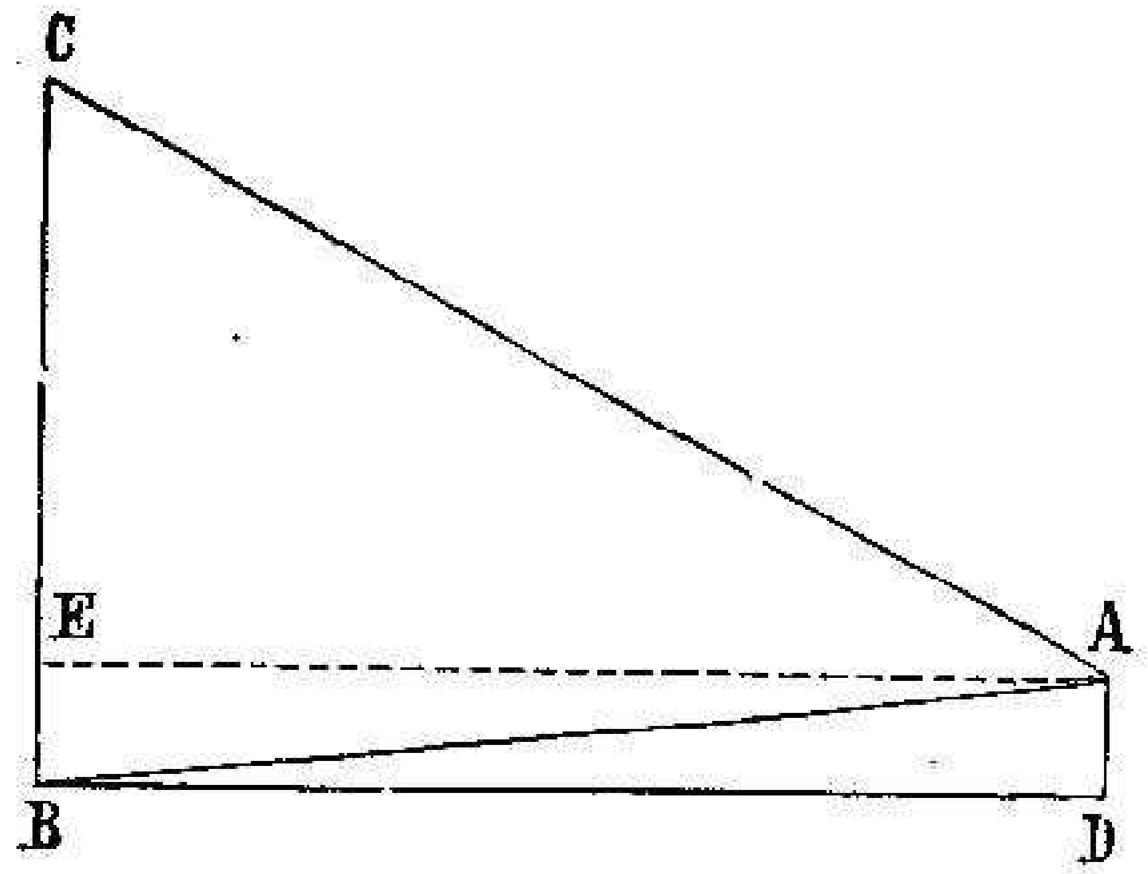
$$x^2 + 2(2-\sqrt{3})x - 1 = 0.$$

Da questa si ricava: $x = -(2-\sqrt{3}) \pm 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Dei due valori di x dati da quest'espressione quello che si ha prendendo il segno — pel radicale è negativo, e poichè la tangente cercata dev'essere positiva, così sarà:

$$x = \text{tang}\,37^\circ.30' = -(2-\sqrt{3}) + 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = 0{,}7673270.$$

Estate 1883, II b). — *Un fiume separa un osservatore da una torre alta metri 64,8. Con un sestante l'osservatore, il cui occhio è a 1^m, 50 sul livello del piede della torre, determina in 47°. 56' l'angolo sotteso dall'altezza della torre. Qual'è la distanza dell'osservatore dalla torre?*



La verticale CB rappresenti la torre, l'orizzontale DB il piano del del terreno, e sia A la posizione dell'occhio dell'osservatore. Immaginando da A la perpendicolare AD alla DB e tracciate AB, AC, ed AE parallela a DB, si avrà:

$$AD = EB = m.\ 1{,}5;\quad < CAB = 47^0.56';\quad CB = 64{,}8.$$

Pongasi: $< DBA = \alpha$, $AD = h$, $BC = H$, $BD = x$, $< CAB = \beta$. Sarà $< CAE = \beta - \alpha$ e dai triangoli rettangoli ADB, CAE si avrà: $AD = h = x \,.\, \text{tang}\,\alpha$, $AE = x = (H - h)\cot(\beta - \alpha)$, donde, eliminando la x, e sviluppando $\cot(\beta - \alpha)$:

$$\frac{h}{\text{tang}\,\alpha} = (H - h)\frac{1 + \text{tang}\,\beta \,.\, \text{tang}\,\alpha}{\text{tang}\,\beta - \text{tang}\,\alpha}$$

ovvero:

$$(1) \ldots\, (H - h)\,\text{tang}\,\beta \,.\, \text{tang}^2\,\alpha + H\,\text{tang}\,\alpha - h\,\text{tang}\,\beta = 0.$$

Di qui ricavando $\text{tang}\,\alpha$, si avrà x dalla relazione $x = \frac{h}{\text{tang}\,\alpha}$.

Poichè le quantità $H > h$ ed h sono da supporsi positive e $\text{tang}\,\beta$ parimenti, dai segni dei termini dell'equazione (1) si deduce che la radice numericamente minore della medesima è positiva e l'altra da trascurare negativa. E così coi dati numerici dell'enunciato si trova $\text{tang}\,\alpha = 0{,}02488$ e quindi $x =$ m. 60,3.

(Continua). A. Lugli.

ESERCIZI SUL TRIANGOLO RETTANGOLO

I. *Data la bisettrice dell'angolo retto d'un triangolo rettangolo e l'area di questo, determinare i lati.*

Sia α la misura della bisettrice, s la misura dell'area del triangolo. Indico con z, x, y le misure rispettive dell'ipotenusa e dei cateti. Alla determinazione delle incognite servono le equazioni:

$$[1]\qquad xy = 2s;\ x^2 + y^2 = z^2;\ xy - \frac{xyz^2}{(x+y)^2} = \alpha^2.$$

Dalla 1^a e 2^a si ha: $(x+y)^2 = z^2 + 4s$. Sostituendo questo valore nella 3^a, questa diviene:

$$2s - \frac{2sz^2}{z^2+4s} = \alpha^2 \text{ ossia } \alpha^2 z^2 + 4s\alpha^2 - 8s^2 = 0$$

da cui

$$z = \pm\frac{2}{\alpha}\sqrt{s(2s-\alpha^2)}.$$

Dei due valori di z quello proveniente dal segno meno non può soddisfare al problema, l'altro affinchè sia reale richiede che sia $2s - \alpha^2 > 0$, ovvero $\alpha < \sqrt{2s}$.

Sostituendo nella 2ª delle [1] il valore trovato di z, per determinare x, y restano a risolvere le equazioni

$$x^2 + y^2 = \frac{8s^2 - 4s\alpha^2}{\alpha^2}; \; xy = 2s,$$

da cui si ha subito:

$$x + y = 2\sqrt{2\frac{s}{\alpha}}; \; x - y = \frac{2\sqrt{2}}{\alpha}\sqrt{s(s-\alpha^2)}$$

e successivamente:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\left[s + \sqrt{s(s-\alpha^2)}\right]; \; y = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\left[s - \sqrt{s(s-\alpha^2)}\right],$$

essendo inutile tener conto del doppio segno pel redicale in $x - y$.

Perchè i valori di x ed y siano reali è necessario che sia $s - \alpha^2 \geqq 0$ ossia $\alpha \leqq \sqrt{s}$, e poichè se questa condizione è soddisfatta lo è pure la precedente, così quest'ultima è la sola che si richiede perchè i valori di x, y, z siano reali e positivi.

II. *Data la bisettrice dell'angolo retto d'un triangolo rettangolo e la sua ipotenusa, determinare i cateti.*

Siano α e a le misure della bisettrice e dell'ipotenusa date e s'indichino con x, y quelle dei cateti. Si hanno le equazioni:

$$[1] \qquad x^2 + y^2 = a^2; \; xy - \frac{a^2xy}{(x+y)^2} = \alpha^2.$$

Dalla 2ª di queste, tenendo conto della 1ª, si ricava facilmente:

$$2(xy)^2 - 2\alpha^2(xy) - a^2\alpha^2 = 0 \text{ donde: } xy = \frac{\alpha(\alpha \pm \sqrt{2a^2+\alpha^2})}{2}.$$

Evidentemente xy è positivo, quindi pel radicale deve prendersi il segno più, chè essendo $\sqrt{2a^2+\alpha^2} > \alpha$, se si prendesse il segno meno, xy riuscirebbe negativo. Si è così trasformato il sistema [1] nell'altro

$$x^2 + y^2 = a^2; \; 2xy = \alpha(\alpha + \sqrt{2a^2+\alpha^2}).$$

Da questo deduconsi immediatamente i valori di $x + y$ e $x - y$ e quindi x e y ossia:

$$x = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2 + \alpha(\alpha + \sqrt{2a^2 + \alpha^2})} + \sqrt{a^2 - \alpha(\alpha + \sqrt{2a^2 + \alpha^2})}\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2 + \alpha(\alpha + \sqrt{2a^2 + \alpha^2})} - \sqrt{a^2 + \alpha(\alpha + \sqrt{2a^2 + \alpha^2})}\right].$$

Ora perchè i valori di x ed y siano reali e positivi è necessario e sufficiente che sia $a^2 - \alpha(\alpha + \sqrt{2a^2 + \alpha^2}) \geqq 0$, da cui trasportando il radicale nel 2° membro, quadrando e riducendo si ricava $a^2 \geqq 2\alpha$.

III. *Data l'altezza corrispondente all'ipotenusa e la bisettrice dell'angolo retto d'un triangolo rettangolo, determinare i suoi lati.*

Indicando con h ed α le misure dell'altezza e della bisettrice, con x, y, z rispettivamente le misure dei cateti e dell'ipotenusa, alla soluzione del problema si hanno le equazioni:

$$[1] \qquad xy = hz;\ x^2 + y^2 = z^2;\ xy - \frac{xyz^2}{(x+y)^2} = \alpha^2.$$

Dall'ultima di queste, tenendo conto delle due altre, si ricava

$$hz - \frac{hz^3}{z^2 + 2hz} = \alpha^2 \text{ da cui deducesi } z = \frac{2h\alpha^2}{2h^2 - \alpha^2}.$$

Si ha perciò da risolvere il sistema:

$$x^2 + y^2 = \frac{4h^2\alpha^4}{(2h^2 - \alpha^2)^2};\ xy = \frac{2h^2\alpha^2}{2h^2 - \alpha^2}$$

dal quale ricavasi, operando come nei precedenti esercizi:

$$x = \frac{\sqrt{2}h\alpha}{2h^2 - \alpha^2}(h + \sqrt{\alpha^2 - h^2});\ y = \frac{\sqrt{2}h\alpha}{2h^2 - \alpha^2}(h - \sqrt{\alpha^2 - h^2}).$$

Perchè x e y riescano numeri reali è necessario che sia $\alpha^2 - h^2 \geqq 0$, ossia $\alpha \geqq h$, perchè poi siano positivi e finiti deve essere $2h^2 - \alpha^2 > 0$, la quale include pure $h - \sqrt{\alpha^2 h^2} > 0$. Infatti da quest'ultima deducesi successivamente $h > \sqrt{\alpha^2 - h^2}$ e $2h^2 - \alpha^2 > 0$. Si ha così che $\alpha < \sqrt{2}.h$, onde risultano per α le limitazioni $\sqrt{2}.h > \alpha \geqq h$ od anche $\sqrt{2} > \frac{\alpha}{h} \geqq 1$.

IV. *Dato il perimetro d'un triangolo rettangolo e la bisettrice dell'angolo retto, determinare i lati del triangolo.*

Indicando rispettivamente con α, $2p$, x, y, z le misure della bisettrice, del perimetro, dei cateti e dell'ipotenusa, alla determinazione delle incognite si hanno le equazioni:

$$x^2 + y^2 = z^2;\ x + y + z = 2p;\ xy - \frac{xyz^2}{(x+y)^2} = \alpha^2.$$

Dalla 1ª e 3ª si ricava subito:

$$\frac{x\,y\,\sqrt{2}}{x+y} = \alpha \text{ ossia } x\,y\,\sqrt{2} - \alpha\,(x+y) = 0.$$

Dalla 1ª e 2ª risulta poi:

$x^2 + y^2 = (2\,p - x - y)^2$, da cui $x\,y - 2\,p\,x - 2\,p\,y + 2\,p^2 = 0$.

Si ha così da risolvere il sistema:

$$x\,y - 2\,p\,(x+y) + 2\,p^2 = 0;\; x\,y\,\sqrt{2} - \alpha\,(x+y) = 0.$$

Da questo deducesi:

$$x\,y = \frac{2\,p^2\,\alpha}{2\,\sqrt{2}\,.\,p - \alpha},\; x + y = \frac{2\,p^2\,\sqrt{2}}{2\,\sqrt{2}\,.\,p - \alpha},$$

donde

$$x = \frac{\sqrt{2}\,.\,p}{2\,\sqrt{2}\,.\,p - \alpha}\left[p + \sqrt{\alpha^2 - 2\,\sqrt{2}\,.\,p\,\alpha + p^2}\right];$$

$$y = \frac{\sqrt{2}\,.\,p}{2\,\sqrt{2}\,.\,p - \alpha}\left[p - \sqrt{\alpha^2 - 2\,\sqrt{2}\,.\,p\,\alpha + p^2}\right].$$

Si ha poi subito

$$z = \frac{2\,p}{2\,p\,\sqrt{2} - \alpha}\left[p\,\sqrt{2} - \alpha\right].$$

Perchè i valori di x ed y siano reali occorre che si abbia $\alpha^2 - 2\,\sqrt{2}\,\alpha\,p + p^2 \geqq 0$, onde, se p si considera determinata, i valori possibili di α soddisfacenti a questa condizione saranno quelli maggiori della maggiore o minori della minore delle radici dell'equazione $\alpha^2 - 2\,\sqrt{2}\,\alpha\,p + p^2 = 0$, le quali sono $\alpha = p\,(\sqrt{2} \pm 1)$; se poi vuolsi che i valori medesimi siano anche positivi, come richiede la natura del problema, conviene che sia $2\sqrt{2}\,p - \alpha > 0$. Ma considerando che pure z dev' essere positiva, e perciò deve aversi $p\,\sqrt{2} - \alpha > 0$, ossia $\alpha < p\,\sqrt{2}$ (la qual condizione trascina l'altra $2\,\sqrt{2}\,p - \alpha > 0$), si ricava immediatamente che i soli valori accettabili per α son quelli minori od uguali a $p\,(\sqrt{2} - 1)$ ed il massimo valore attribuibile ad α è precisamente $p\,(\sqrt{2} - 1)$. Si è pervenuti così al risultato che di tutti i triangoli rettangoli di dato perimetro $2\,p$ quello ha la massima bisettrice α dell'angolo retto pel quale ad α spetta il valore $p\,(\sqrt{2} - 1)$ e in questo caso ad x, y, z corrispondono i valori

$$x = \frac{\sqrt{2}\,.\,p}{1 + \sqrt{2}};\quad y = \frac{\sqrt{2}\,.\,p}{1 + \sqrt{2}};\quad z = \frac{2\,p}{1 + \sqrt{2}},$$

onde il triangolo in discorso è isoscele.

Viceversa, considerando come determinato α, perchè i valori di x ed y siano reali conviene che p sia maggiore della maggiore o minore della minore delle due radici della stessa equazione $p^2 - 2\sqrt{2}\,\alpha p + \alpha^2 = 0$ considerandovi p come incognita, le quali sono $p = \alpha(\sqrt{2} \pm 1) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(2 \pm \sqrt{2})$.

Ma poichè z dev'essere positiva insieme ad x ed y, conviene inoltre che si abbia $\sqrt{2}\,p - \alpha > 0$, ossia $p > \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, onde, essendo $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(2 - \sqrt{2}) < \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, i valori da ritenersi per p saranno soltanto quelli maggiori od uguali ad $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(2 + \sqrt{2})$ e il minor valore che può prendere p sarà precisamente $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(2 + \sqrt{2})$. Si deduce da ciò che tutti i triangoli rettangoli aventi una determinata bisettrice α dell'angolo retto, quello ha il minimo perimetro p, pel quale p ha il valor precedente, ed allora ad x, y, z corrispondono poi i valori

$$x = y = \frac{\alpha(2+\sqrt{2})^2}{4+3\sqrt{2}}, \qquad z = \frac{\sqrt{2}\,\alpha(2+\sqrt{2})^2}{4+3\sqrt{2}}$$

ed il triangolo che si ottiene è isoscele.

D. Gambioli.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

Applicazione della teorica delle progressioni.

1. Dimostrare che dando ad i i valori $1, 2, \ldots m$ e supponendo che $a_1, a_2, \ldots a_m$ formino una progressione aritmetica di ragione d', la somma S delle somme $S_1, S_2, \ldots S_m$ delle m progressioni aritmetiche che si deducono dalla

$$\div\, a_i \,.\, a_i + d \,.\, a_i + 2d \ldots a_i + (n-1)\, d$$

è

$$S = a_1 m^2 + \frac{m\,n\,(n-1)}{2}\, d + \frac{m^2(m-1)}{2}\, d'$$

e in particolare supponendo che i numeri $a_1, a_2, \ldots a_m$ siano $1, 3, \ldots 2m-1$ e si abbia $d = 2$

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_m = m\,(m^2 + n^2 - n).$$

2. Dal risultato generale dell'es. prec. dedurre che la somma dei termini del quadro

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & \ldots m \\ 2 & 3 & 4 & \ldots m+1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m & m+1 & m+2 & \ldots 2m-1 \end{array}$$

è m^3.

3. Se $a_1, a_2, \ldots a_m$ sono i termini d'una progressione aritmetica di ragione d e si forma il quadro

$$\begin{array}{llll} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots a_m \\ 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 & \ldots 2a_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ na_1 & na_2 & na_3 & \ldots na_m, \end{array}$$

dimostrare che la somma dei termini del medesimo è

$$\left\{a_1 m + \frac{m(m-1)}{2} d\right\} \frac{n(n+1)}{2}.$$

4. Dal risultato dell'es. prec. dedurre che la somma dei numeri del quadro

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & \ldots m \\ 2 & 4 & 6 & \ldots 2m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m & 2m & 3m & \ldots m^2 \end{array}$$

è

$$\left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2$$

e in particolare che la somma dei numeri della tavola di moltiplicazione (pitagorica) è 2025.

5. Dimostrare che se $S_1, S_2, \ldots S_m$ rappresentano le somme dei primi n termini di m progressioni aritmetiche i cui primi termini $a_1, a_2, \ldots a_m$ formano una progressione aritmetica di ragione d e le cui ragioni $d_1, d_2, \ldots d_m$ formano parimenti una progressione aritmetica di ragione d', si ha:

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_m = n\left\{a_1 m + \frac{m(m-1)}{2} d\right\} + \\ + \frac{n(n-1)}{2}\left\{d_1 m + \frac{m(m-1)}{2} d'\right\}$$

e in particolare se $a_1, a_2, \ldots a_m$ sono i numeri $1, 2, \ldots m$ e $d_1, d_2, \ldots d_m$ i numeri $1, 3, \ldots 2m-1$

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_m = \frac{nm(1+mn)}{2}.$$

6. Dimostrare che dando ad i i valori $1, 2, \ldots m$ e supponendo che $a_1, a_2, \ldots a_m$ siano i termini d'una progressione geometrica di ragione q, la somma S delle somme dei termini delle m progressioni aritmetiche che si deducono dalla

$$\div\, a_i \,.\, a_i + d \,.\, a_i + 2\,d \ldots a_i + (n-1)\,d$$

è

$$S = n\,a_1 \frac{q^m - 1}{q-1} + m\,d \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

7. Dimostrare che se $S_1, S_2, \ldots S_m$ rappresentano le somme dei primi n termini di m progressioni geometriche aventi la stessa ragione q e per primi termini i numeri $a_1, a_2, \ldots a_m$, formanti una progressione aritmetica di ragione d, si ha

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_m = \left(a_1\,m + \frac{m\,(m-1)}{2}\,.\,d\right)\frac{q^m - 1}{q-1}$$

e in particolare se $a_1, a_2 \ldots a_m$ sono i numeri $a,\ 2\,a, \ldots m\,a$

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_m = \frac{a\,m\,(m+1)}{2}\,\frac{q^m - 1}{q-1}.$$

8. Dimostrare che dando ad i i valori di $1, 2, \ldots m$ e supponendo che $a_1, a_2, \ldots a_m$ siano i termini d'una progressione geometrica di ragione r, la somma S delle somme dei termini delle m progressioni geometriche di ragione q che si deducono dalla

$$\div\!\div\, a_i : a_i\,q : a_i\,q^2 : \ldots : a_i\,q^{n-1}$$

è

$$S = a_1 \frac{r^m - 1}{r-1}\,\frac{q^n - 1}{q-1}.$$

9. Nel caso dell'es. prec., supponendo che m ed n crescano indefinitamente, mostrare che S ha per valor limite

$$a_1 \frac{1}{(1-r)\,(1-q)}.$$

10. Dimostrare che se $S_1, S_2, \ldots S_m$ rappresentano i limiti delle somme di m progressioni geometriche decrescenti aventi per primo termine 1 e per ragioni rispettivamente $q, q^2, \ldots q^m$, si ha:

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \ldots + \frac{1}{S_m} = m - \frac{q\,(1-q^m)}{1-q}.$$

11. Date le somme S_n, S_p dei primi n e p termini, rispettivamente, d'una progressione aritmetica, mostrare che il primo termine della medesima è $\frac{p\,(p-1)\,S_n - n\,(n-1)\,S_p}{n\,p\,(p-n)}$, e la ragione $\frac{2\,n\,S_p - 2\,p\,S_n}{n\,p\,(p-n)}$.

12. Se a_m, a_n, a_p rappresentano i termini m^{esimo}, n^{esimo}, p^{esimo} d'una progressione aritmetica, mostrare che si ha la relazione:

$$(p-n)\,a_m+(m-p)\,a_n+(n-m)\,a_p=0.$$

13. Se a_m, a_n, a_p rappresentano i termini m^{esimo}, n^{esimo}, p^{esimo} di una progressione geometrica, mostrare che si ha:

$$(a_m)^{p-n}\,(a_n)^{m-p}\,(a_p)^{n-m}=1.$$

14. Se S_m, S_n, S_p rappresentano rispettivamente le somme dei primi m, n, p termini d'una progressione aritmetica, mostrare che si ha la relazione:

$$n\,p\,(p-n)\,S_m+p\,m\,(m-p)\,S_n+m\,n\,(n-m)\,S_p=0.$$

15. Dimostrare che se P_m, P_n, P_p rappresentano, rispettivamente, i prodotti dei primi m, n, p termini d'una progressione geometrica, si ha la relazione:

$$P_m^{\,n\,p\,(p-n)}.\,P_n^{\,p\,m\,(m-p)}.\,P_p^{\,m\,n\,(n-m)}=1.$$

16. Dall'identità:

$$(n+1)^3-n^3=3\,n\,(n+1)+1,$$

dedurre che la somma dei primi $m-1$ *numeri triangolari* $\frac{1.2}{2}$, $\frac{2.3}{2}$, ... $\frac{(m-1)\,m}{2}$, è

$$\frac{(m-1)\,m\,(m+1)}{6}.$$

17. Addizionando termine a termine le due somme

$$1\;+1.2+1.3+\ldots+1.m$$
$$0.1+1.2+2.3+\ldots+(m-1).m,$$

dedurre che

$$1^2+2^2+\ldots+m^2=\frac{m\,(m+1)\,(2\,m+1)}{6}.$$

18. Dimostrare che la somma dei prodotti due a due, in tutti i modi possibili, dei numeri 1, 2, 3, ... m è

$$\frac{(m-1)\,m\,(m+1)\,(3\,m+2)}{12}.$$

19. Dimostrare che la somma dei prodotti dei termini corrispondenti delle due progressioni

$$\div\, a\,.\,(a+x)\,.\,(a+2\,x)\,.\,\ldots.\,(a+[m-1]\,x)$$
$$\div\, b\,.\,(b+y)\,.\,(b+2\,y)\,.\,\ldots.\,(b+[m-1]\,y)$$

è

$$m\,a\,b+\frac{m\,(m-1)}{2}\,(b\,x+a\,y)+\frac{(m-1)\,m\,(2\,m-1)}{6}\,x\,y.$$

20. Dimostrare che la somma dei termini della serie che si ottiene moltiplicando i termini corrispondenti delle due progressioni

$$\div a \,.\, (a+x) \,.\, (a+2x) \,.\, \ldots \,.\, (a+[n-1]\,x)$$
$$\div\div b : \quad b\,y \quad : \quad b\,y^2 \quad : \ldots : \quad b\,y^{n-1}$$

è

$$b\left(a-\frac{x\,y}{y-1}\right)\cdot\frac{y^n-1}{y-1}+\frac{n\,b\,x\,y^n}{y-1}.$$

21. Dimostrare che il limite della somma

$$a\,b+(a+x)\,b\,y+(a+2\,x)\,b\,y^2+\ldots+(a+[n-1]\,x)\,b\,y^{n-1}+\ldots,$$

in cui y è minore dell'unità, quando n cresce indefinitamente, è

$$\frac{a\,b}{1-y}+\frac{b\,x\,y}{1-y^2}.$$

22. Dimostrare che la somma dei termini della serie che si ottiene dividendo i termini corrispondenti delle due progressioni

$$\div a \,.\, (a+x) \,.\, (a+2x) \,.\, \ldots \,.\, (a+[n-1]\,x)$$
$$\div\div b : \quad b\,y \quad : \quad b\,y^2 \quad : \ldots : \quad b\,y^{n-1}$$

è

$$\frac{1}{b\,(y-1)\,y^{n-1}}\left\{a\,(y^n-1)+\frac{x\,(y^n-1)}{y-1}-n\,x\right\}.$$

23. Dimostrare che il limite della somma

$$\frac{a}{b}+\frac{a+x}{b\,y}+\frac{a+2\,x}{b\,y^2}+\ldots+\frac{a+[n-1]\,x}{b\,y^{n-1}}+\ldots,$$

in cui y è maggiore dell'unità, quando n cresce indefinitamente, è

$$\frac{a\,y^2+x\,y-a\,y}{b\,y^2+2\,b\,y+b}.$$

24. Dimostrare che la somma

$$\frac{a}{e}+\frac{a\,c+b}{e\,d}+\frac{a\,c^2+b\,c+b}{e\,d^2}+\ldots+\frac{a\,c^{m-1}+b\,c^{n-2}+\ldots+b\,c+b}{e\,d^{n-1}},$$

è

$$\frac{a\,(c-d)\,(c-1)\,(d-1)+b\,(c^n-1)\,(d-1)-b\,(d^n-1)\,(c-1)}{e\,d^{m-1}\,(c-d)\,(c-1)\,(d-1)}.$$

25. Dimostrare che avendosi $c<d$ e $d>1$, la somma della serie infinita

$$\frac{a}{e}+\frac{a\,c+b}{e\,d}+\frac{a\,c^2+b\,c+b}{e\,d^2}+\frac{a\,c^3+b\,c^2+b\,c+b}{e\,d^3}+\ldots$$

è

$$\frac{a\,d^2-a\,d+b\,d}{e\,d^2-e\,c\,d-e\,d+e\,c}.$$

A. Lugli.

SOLUZIONE DELLE QUISTIONI 20, 21 e 22

20. *Provare che esistono due triangoli isosceli, e due soli, col perimetro di 8 metri e l'area di 2 metri quadrati, e calcolare la base di ciascuno di essi a meno di un millesimo di millimetro.*

D. Besso.

Soluzione del Prof. *F. Viaggi* (*).

Ciascuno dei lati eguali d'un triangolo isoscele sia misurato da y e la base da $2x$; siano $2p$ il perimetro ed a l'area del triangolo: a, p sono costanti positive.

Si stabiliscono le seguenti equazioni

$$y = p - x$$
$$x\sqrt{y^2 - x^2} = a$$

dalle quali, eliminando y, si ricava l'equazione cubica

$$2px^3 - p^2x^2 + a^2 = 0 \qquad (1)$$

che può anche scriversi così:

$$\left(x - \frac{p}{3}\right)^2\left(2x + \frac{p}{3}\right) + a^2 - \frac{p^4}{27} = 0. \qquad (1')$$

Attribuendo ad x valori continuamente decrescenti da 0 a $-\infty$, $2px^3$ e $-p^2x^2$ decrescono continuamente da 0 a $-\infty$ e il 1° membro della (1) da a^2 a $-\infty$, perciò (1) ammette sempre una ed una sola radice negativa.

Se $a^2 - \frac{p^4}{27} > 0$, per ogni valore positivo attribuito alla x il 1° membro della (1') assume valore positivo, quindi (1) non ha radice positiva.

Se $a^2 - \frac{p^4}{27} = 0$, la (1') e quindi (1) ammette la radice doppia positiva $\frac{p}{3}$.

Se $a^2 - \frac{p^4}{27} < 0$, poichè per due valori consecutivi scelti tra $0, \frac{p}{3}, \frac{p}{2}$ e attribuiti ad x il 1° membro della (1') assume valori di segni contrari, la (1') ha due radici positive comprese tra 0 e $\frac{p}{2}$. In questo caso, se φ è un angolo ausiliario acuto determinato dalla equazione

$$\cos\varphi = \frac{3\sqrt{3}\,a}{p^2},$$

la (1) si trasforma nella seguente:

$$4\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{2p}\cdot\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{2p}\cdot\frac{1}{x}\right) = \cos(\varphi - 180°);$$

(*) Altre soluzioni vennero inviate dai Sig.[i] Prof.[i] *E. Milloserich*, *R. Badia*, *F. Palatini*.

e confrontando questa con l'identità

$$4\cos^3\left(\frac{\varphi}{3}-60^\circ+k\,.\,120^\circ\right)-3\cos\left(\frac{\varphi}{3}-60^\circ+k\,.\,120^\circ\right)=\cos(\varphi-180^\circ),$$

si scorge che le sue radici sono fornite dalla formola

$$x=\frac{\sqrt{3}\,a}{2p}\sec\left(\frac{\varphi}{3}-60^\circ+k\,.\,120^\circ\right),$$

dalla quale, ponendo $k=0,1,2$ si deducono le radici positive

$$\left.\begin{matrix}x'\\x''\end{matrix}\right\}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2p}\sec\left(60^\circ\pm\frac{\varphi}{3}\right)$$

e la negativa

$$x'''=-\frac{\sqrt{3}\,a}{2p}\sec\frac{\varphi}{3}.$$

Ora delle radici di (1) conducono ad una soluzione del problema geometrico quelle che sono positive e minori del valore corrispondente d'y, ossia quelle comprese tra 0 e $\frac{p}{2}$: perciò nel 1° caso il problema non ha soluzione, nel 2° ne ha una sola e il triangolo risulta equilatero, nel 3° ne ha due.

Il caso di $p=4$, $a=2$ rientra nel 3°, e per questi valori particolari si ha

$$\begin{aligned}x' &= 1{,}85463\,76797\ldots\\ x'' &= 0{,}59696\,82832\ldots\\ x''' &= -0{,}45160\,59629\ldots\end{aligned}$$

e le basi dei due triangoli che rispondono al problema calcolate a meno di un mezzo millesimo di millimetro sono di metri 3,709275 e 1,193937.

Osservazione. Se ci si propone di calcolare la base ($2x$) d'un triangolo isoscele, data l'area (a) e la differenza ($2p$) tra la somma ($2y$) dei lati eguali e la base; si ottiene il sistema d'equazioni che si deduce dal precedente cambiando il segno alla lettera x. Dalla discussione precedente si conchiude che questo nuovo problema ammette sempre una soluzione e una sola.

Nel caso di $p=4$, $a=2$ la base calcolata a meno di un mezzo millesimo di millimetro è di metri 0,903212.

21. *Sulle perpendicolari ad un piano dato, innalzate da due suoi punti A, A', sono presi i segmenti $AB=2\,a$; $A'B'=a$; è data la distanza $AA'=a\sqrt{2}$, ed è dato l'angolo acuto che una retta AR di quel piano forma colla AA': trovare sulla AR un punto C tale che sia l'angolo BCA doppio dell'angolo $B'CA'$.*

D. Besso

Soluzione del Prof. *F. Viaggi* (*).

Sia α l'angolo che la direzione AR forma con la AA'; e sieno $AC=ax$, $A'C=ay$; x, y rappresentano numeri positivi.

(*) Un'altra soluzione venne inviata dal Sig. Prof. *E. Millosevich.*

Poichè $\cot g\, BCA = \frac{x}{2}$, $\cot g\, B'CA' = y$, essendo per ipotesi l'angolo BCA doppio di B'CA', si ottiene la seguente equazione:

$$x = \frac{y^2 - 1}{y} \qquad (1)$$

Un'altra equazione s'ottiene scrivendo la relazione tra i lati del triangolo ACA' e l'angolo α:

$$y^2 = x^2 - 2\sqrt{2}\, x \cos\alpha + 2;$$

e dalle due, eliminando x,

$$y^3 - y - \frac{1}{2\sqrt{2}\cos\alpha} = 0 \qquad (2)$$

che può anche scriversi nel modo seguente:

$$\left(y - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(y + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}\cos\alpha} = 0 \qquad (2').$$

Conducono a una soluzione del problema le radici di (2) che sieno positive e diano per x valore positivo, ossia le radici maggiori di 1. Ora $y^3 - y = y(y+1)(y-1)$ cresce continuamente da 0 a $+\infty$ se ad y si attribuiscono valori crescenti da 1 a $+\infty$, perciò:

Se $\alpha > 90°$, il 1° membro della (2) rimane positivo per valori eguali o maggiori di 1 attribuiti ad y, ossia la (2) non ammette radice maggiore di 1 e il problema non ha soluzione;

Se $\alpha = 90°$, la (2) ha la radice ∞, e quindi il punto all'infinito di AR risponde al problema;

Se $\alpha < 90°$, che è l'ipotesi del testo, la (2) ammette una ed una sola radice maggiore di 1: e può anche osservarsi che essa è la sola radice positiva di (2), perchè le sue tre radici, avendo per somma 0, non possono essere tutte e tre positive, ed avendo per prodotto il numero positivo $\frac{1}{2\sqrt{2}\cos\alpha}$ debbono essere una positiva e due negative, se reali. Rimanendo dunque nell'ipotesi $\alpha < 90°$, basterà prendere la radice positiva di (2), ed essa condurrà alla soluzione del problema: procediamo alla determinazione di tal radice.

Sia intanto α_1 l'angolo acuto determinato dalla equazione

$$\cos\alpha_1 = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

ossia

$$\alpha_1 = 23°\, 17'\, 1'',4342\ldots$$

Se $\alpha > \alpha_1$, e quindi $\frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}\cos\alpha} < 0$, radice negativa la (2) non ne ha (il che si rende manifesto, ove si osservi che per valori negativi d'y il primo membro della (2') è negativo); unica radice reale è la positiva che è fornita dalla formola cardanica

$$y = \left\{\frac{1}{4\sqrt{2}\cos\alpha} + \sqrt{\frac{1}{32\cos^2\alpha} - \frac{1}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{\frac{1}{4\sqrt{2}\cos\alpha} - \sqrt{\frac{1}{32\cos^2\alpha} - \frac{1}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

la quale con l'aiuto dei due angoli ausiliari acuti φ e ψ, determinati dalle equazioni

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\cos\alpha\,, \quad \operatorname{tang}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}\,,$$

diventa

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}\operatorname{sen}2\psi}$$

e quindi da (1)

$$x = \frac{\operatorname{sen}^2 2\psi}{2\sqrt{3}\operatorname{sen}\varphi}\,.$$

Se $\alpha = \alpha_1$, e quindi $\frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}\cos\alpha} = 0$, le radici di (2') sono una positiva e un'altra doppia negativa, epperò

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

e da (1)

$$x = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,.$$

Se $\alpha < \alpha_1$, e quindi $\frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}\cos\alpha} > 0$, mercè l'angolo acuto ausiliario φ determinato dall'equazione

$$\cos\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}\cos\alpha}\,,$$

l'equazione (2) si rasforma nella seguente

$$4\,.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,y\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,y\right) = \cos\varphi\,,$$

e paragonando questa coll'identità

$$4\cos^3\left(\frac{\varphi}{3} + k\,.\,120^\circ\right) - 3\cos\left(\frac{\varphi}{3} + k\,.\,120^\circ\right) = \cos\varphi$$

si scorge che le sue radici sono fornite dalla formola

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + k\,.\,120^\circ\right)$$

e, limitandoci alla radice positiva, si ha per questo terzo caso

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\varphi}{3} = \frac{\cos\frac{\varphi}{3}}{\cos 30^\circ}$$

e quindi da (1)

$$x = \frac{\operatorname{sen}\left(30^\circ + \frac{\varphi}{3}\right).\operatorname{sen}\left(30^\circ - \frac{\varphi}{3}\right)}{\cos 30^\circ\,.\cos\frac{\varphi}{3}}\,.$$

Il caso $\alpha = 0$ rientra nell'ultimo considerato; ma trattato direttamente conduce alla soluzione

$$x=\frac{1}{4}(\sqrt{10}+\sqrt{2}) \qquad y=\frac{1}{4}(3\sqrt{2}-\sqrt{10}).$$

Osservazione. Se il rapporto A B : A′ B′ fosse diverso da 2 la equazione nella y verrebbe del 4° grado, perciò la (2) si può considerare come caso particolare d'una biquadratica in cui il coefficiente di y^4 sia diventato 0, e quindi una sua radice sia diventata ∞; il che verrebbe a dire che il punto all'infinito di qualunque direzione A R risponde al problema. Questo per altro si può giustificare con considerazioni geometriche nel modo seguente: qualunque sia la direzione A R e comunque preso C su di di essa, si ha

$$\frac{\operatorname{tang} \mathrm{ACB}}{\operatorname{tang} . \mathrm{A'CB'}}=2 . \frac{\mathrm{A'C}}{\mathrm{AC}}$$

quindi

$$\frac{\mathrm{ACB}}{\mathrm{A'CB'}}=2 . \frac{\dfrac{\operatorname{tang} \mathrm{A'CB'}}{\mathrm{A'CB'}}}{\dfrac{\operatorname{tang} \mathrm{ACB}}{\mathrm{ACB}}} . \frac{\mathrm{A'C}}{\mathrm{AC}};$$

ora se C si allontana all'infinito $\lim \frac{\mathrm{A'C}}{\mathrm{AC}}=1$ e, poichè A C B, A′ C B′ tendono a zero, $\lim \frac{\operatorname{tang} \mathrm{ACB}}{\mathrm{ACB}}=1$ e $\lim \frac{\operatorname{tang} \mathrm{A'CB'}}{\mathrm{A'CB'}}=1$, dunque

$$\lim \frac{\mathrm{ACB}}{\mathrm{A'CB'}}=2 .$$

22. *Eliminare* x, y, z *dalle tre equazioni*

$$y(b-c+z)+z(c-b+y)=\mathrm{X}+y^2+z^2$$
$$z(c-a+x)+x(a-c+z)=\mathrm{Y}+z^2+x^2$$
$$x(2a-b-c)+y(2b-a-c)+z(2c-a-b)=\mathrm{X}+\mathrm{Y}+\mathrm{Z}+$$
$$+2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$$

D. Besso.

Soluzione del Prof. *S. Catania* (*).

Le prime due si possono scrivere:

$$(y-z)^2-(b-c)(y-z)+\mathrm{X}=0,$$
$$(z-x)^2-(c-a)(z-x)+\mathrm{Y}=0.$$

La terza prima si trasforma in

$$x(2a-b-c)+y(2b-a-c)+z(2c-a-b)=\mathrm{X}+(y-z)^2+$$
$$+\mathrm{Y}+(z-x)^2+\mathrm{Z}+(x-y)^2.$$

Il secondo membro di questa equazione, tenuto conto delle due equazioni precedenti, si riduce a

$$(b-c)(y-z)+(c-a)(z-x)+\mathrm{Z}+(x-y)^2.$$

Sostituendo, trasponendo e riducendo si ha:

$$(x-y^2)-(a-b)(x-y)+\mathrm{Z}=0.$$

(*) Altre soluzioni vennero inviate dai Sig.ri Prof.ri *L. Bosi, S. Gatti, G. Riboni* e *F. Viaggi*.

Dalle tre equazioni così trasformate si hanno immediatamente queste tre altre:

$$y-z=\frac{b-c}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b-c}{2}\right)^2-X},$$

$$z-x=\frac{c-a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2-Y},$$

$$x-y=\frac{a-b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2-Z},$$

le quali sommate membro a membro danno:

$$\pm\sqrt{\left(\frac{b-c}{2}\right)^2-X}\pm\sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2-Y}\pm\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2-Z}=0.$$

Togliendo i radicali, dopo facili riduzioni, si ottiene per eliminata delle tre equazioni date la relazione seguente:

$$X^2+Y^2+Z^2-2XY-2XZ-2YZ-X(b-a)(a-c)-Y(c-b)(b-a)$$
$$-Z(a-c)(c-b)=0.$$

QUISTIONI PROPOSTE.

24. Se a, b, c, f rappresentano numeri positivi e si ha:

$$a x^2+b x y+c y^2=f \text{ ed } r^2=x^2+y^2,$$

dimostrare elementarmente che i valori massimo e minimo di r^2 sono dati dall'equazione

$$(b^2-4ac)r^4+4f(a+c)r^2-4f^2=0.$$

A. Lugli.

25. Dato un cerchio ed un triangolo circoscritto al medesimo, condurre una coppia di tangenti al cerchio che stacchi dai lati del triangolo dato segmenti proporzionali a tre segmenti dati.

A. Sauve.

26. Se una piramide ha per base un poligono regolare, la somma dei quadrati degli spigoli laterali è uguale a tante volte la somma dei quadrati della congiungente il vertice col centro della base e del raggio del cerchio circoscritto al poligono base, quanti sono i lati di questo poligono. (*)

(*) Teorema enunciato nella *Poligonometria analitica* del Prof. Callegari e da questi attribuito al Prof. Piani.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

G. Z. Reggio: *Complementi d'algebra per gli allievi degl'Istituti Tecnici* (2° biennio). — Ditta G. B. Paravia — L. 3,50.

" In questo volume si trova sviluppato tutto il programma d'algebra per gli " Istituti Tecnici (2° biennio). L'Autore ha raccolto i vari articoli in quattro " libri sotto quattro titoli collettivi (Calcolo combinatorio — Numeri e gran- " dezze — Variabile e limite — Equazioni e diseguaglianze) per dare all'opera " maggiore unità e in certo modo improntarla a quella divisione che si fa del- " l'analisi nei suoi diversi rami principali. L'allievo che avrà seguìto su questo " testo il programma e procederà alla lettura del volume com'è scritto, vi tro- " verà, speriamo, una conveniente preparazione ai corsi superiori. "

In quest'avvertenza premessa all'opera è segnalato ciò che costituisce il suo maggior pregio: e invero in ciascuna pagina appare evidente lo studio messo dall'egregio A. a porre nella mente degli allievi i germi di teorie che dovranno essere fecondati in avvenire, ed a farlo coi modi più acconci: precisione nei concetti e rigore nelle dimostrazioni, senza però l'ingombro di troppe lungaggini e minuzie che impediscano a menti ancora inesperte di raccogliere in uno sguardo sintetico le cose studiate; larghezza di vedute, senza varcare il limite d'un insegnamento secondario; concisione ed evidenza anche nella esposizione delle teorie più delicate.

L'opera che s'è venuta formando nella pratica dell'insegnamento quotidiano, trarrà da questo occasione a miglioramenti per future e, spero, prossime edizioni: così qualcosa potrebbe forse essere soppressa, qualche altra aggiunta (l'applicazione, per esempio, delle diseguaglianze alla discussione dei problemi, la qual discussione è uno scoglio dei candidati alla licenza), qualche definizione resa più precisa (quella sul limite, a mo' d'esempio, in cui è detto che alla variabile indipendente s'attribuiscono valori *sempre crescenti o decrescenti*, senz'aggiunger altro, il che si presta a un'interpretazione incompleta), qualche enunciato di teorema reso meno ellittico (tra gli altri, alcuni di quelli che riguardano diseguaglianze dedotte da una o più altre).

Ma il 2° libro, che è il più notevole del volume, è anche quello su cui l'A. potrebbe, a mio avviso, effettuare qualche rimutamento di maggiore importanza. Egli, con savio consiglio, prepara il lettore al numero irrazionale e all'immaginario ripigliando addirittura il concetto di numero dai primordi: rapidamente ne espone le successive generalizzazioni con metodo analitico; quindi studia le grandezze e la possibilità di rappresentarle con i numeri.

Ora io credo che un'esposizione sintetica, condotta sul disegno che in un bell'articolo stampato in questo Periodico ne tracciava il ch. prof. Bettazzi, vincerebbe sull'altra per rapidità e, ciò che più monta, per evidenza, ove si badi che la teoria è destinata ad allievi di scuole secondarie: e se attingesse ad alcune vedute originali del Cliffort, tanto meglio. Ma detto questo di passata, osserverò che l'A., introdotto l'irrazionale secondo il concetto del Dedekind e trattato dell'addizione tra irrazionali, delle altre operazioni dà solo la definizione, salvo poi a tornare (una quarantina di pagine dopo) sull'irrazionale, considerandolo come limite, e ad occuparsi ampiamante di tutte le operazioni. E questo lasciare in sospeso la teoria ha creato qualche imbarazzo all'A. stesso: infatti, definito il rapporto di due grandezze in tutti i casi, ma non avendo ancora definito l'eguaglianza d'irrazionali, per dare un significato all'eguaglianza di rapporti ricorre alla seguente definizione:

" Date due grandezze tra loro omogenee, A e B, e altre due tra loro omo-
" genee, C e D, il rapporto delle due prime sarà eguale a quello delle seconde,
" quando B e D saranno comprese sempre lo stesso numero di volte in due
" grandezze equimultiple delle A e C, secondo qualunque numero „ (n. 74).

La qual definizione dovrebb'essere, nel libro dell'A., un vero teorema. Un altro imbarazzo incontra nella dimostrazione del teorema al n. 92:

" Sia y un numero variabile che assume valori sempre crescenti, ma che
" non può diventar grande più di qualunque numero; se nella successione dei
" suoi valori nessuno ve n'è maggiore di tutti, esisterà un numero finito l,
" limite superiore d'y. „

E comincia la dimostrazione così:

" Infatti sia y_1, y_2, y_3, ... la successione in ordine crescente dei valori d'y;
" siccome y non può diventar grande a piacere, vi saranno infiniti numeri ad
" esso superiori, sia l il più piccolo di questi. „

Ora o l'A. suppone già introdotto il numero irrazionale (come infatti l'ha introdotto) e parmi che l'esistenza di questo minimo l dovrebbe dimostrarla; o non lo suppone, e dovrebbe ammettere l'esistenza di l per postulato; ma e poi, al punto in cui si è condotto, sarebbe giustificata l'introduzione di quest'altro postulato? Osservazione simile pel n. 93.

E poichè son venuto a parlare del libro sul limite, osserverò che nella dimostrazione del teorema " $lim\,\frac{1}{y} = \frac{1}{lim\,y}$ „ se si parte dalla trasformazione $lim\left(\frac{1}{y}.y\right) = lim\,\frac{1}{y}\,.\,lim\,y$ si commette la svista di presupporre l'esistenza di $lim\,\frac{1}{y}$.

Per la teoria delle equazioni indeterminate, svolta con molta simmetria e abbondanza di metodi, vorrei segnalare all'attenzione dell'A. le formole risolutive dell'equazione lineare con tre incognite, le quali oltre all'inconveniente di comparire con tre indeterminate, anzichè con due, non sono facilmente generalizzabili al caso di più incognite.

Chiuderò questa rapida recensione col tributare ancora una lode all'egregio A. per le note storiche disseminate pel volume; le quali hanno il merito d'aprire l'animo dei giovani all'ammirazione dei grandi nomi che hanno illustrato la scienza.

F. Viaggi.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Annales de la licence ès sciences (Mathématiques, Phisiques, Naturelles) — Session de novembre 1888. — Paris, Nony, 17, Rue des Ecoles, 1889.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. Battaglini. Vol. XXVII. Gennaio-Febbraio, Marzo-Aprile. Napoli, B. Pellerano editore, 1889.

Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. de Longchamps, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, Lucien Lévy, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'Ecole preparatoire de Saint-Barbe. 3ᵉ Serie, Treizième année. N. 4, 5, Avril, Mai. Paris. Librairie Ch. Delagrave, 1889.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par H. Vuibert. 13ᵉ année. N. 13, 14, 15, 16. Paris. M. Nony et Cⁱᵉ, 17 Rue des Ecoles, 1889.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomica publicado pelo Dʳ F. Gomes Teixeira professor na Academia Polytechnica do Porto. Vol. IX, n. 1. Coimbra, 1889.

Le Scuole secondarie, eco dell'Associazione nazionale fra gli insegnanti delle Scuole secondarie. Anno VI, n. 10, 11, 12, 13, 14. Milano, 1889.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion, professeur à l'Université de Gand, et J. Neuberg, professeur à l'Université de Liège. Tome neuvième. Avril, Mai, 1889.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª, Vol. 3, Fasc. 3, 4: Marzo, Aprile 1889.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo III, Fasc. 1, 2. Gennaio-Febbraio, Marzo-Aprile 1889.

Rivista Scientifico-industriale compilata da Guido Vimercati. Anno XXI, n. 4 e 5. Firenze, 1889.

Alibrandi (P.) — Sulle variazioni di temperatura dell'acqua nelle condotture. Roma. Tipografia Poliglotta della S. C. di Propaganda Fide, 1889.

Andriani (A.) — Correzioni ed aggiunte agli Elementi di Geometria euclidea esposti con nuovo metodo. Napoli, Pellerano, 1889.

Arzelà (C.) — Sugli integrali di funzioni che oltre alla variabile di integrazione contengono altre variabili (Bologna 1888). — Funzioni di linee (Rend. R. Acc. dei Lincei, 1889).

Beltrami (E.) — Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewski (Rend. R. Acc. dei Lincei, 1889).

Bernardi (F.) — Aritmetica per le Scuole primarie. 2ª ediz. riveduta ed ampliata. Lecce, tipografia editrice salentina, 1888. — Prezzo: cent. 70.

Casorati (F.) — Nuova definizione della curvatura delle superficie e suo confronto con quella di Gauss (Rend. R. Istituto Lom., 1889).

De Marchi (L.) — Saggio d'applicazione dei principii dell'idraulica alla teoria delle correnti dell'aria (Annali Uff. Cent. Meteorologia e Geodinamica, Vol. VIII, 1886).

Guccia (G. B.) — Sulla classe e sul numero dei flessi di una forma algebrica dotata di singolarità qualunque (Rend. R. Acc. Lincei, 1889).

Gugliuzzo Fazio (A.) — Caratteri di divisibilità per 7, 13, 17 e pei numeri della forma (9, 10 + 1). Appunti. Palermo, Libreria L. Pedone Lauriel, 1889. — Prezzo: cent. 50.

Jung (G.) — Ricerche sui sistemi lineari di curve piane algebriche del genere p e sulla loro riduzione all'ordine minimo. Memoria II (Ann. matematica pura e applicata, 1889).

Loria (G.) — L'opera scientifica di Ettore Caporali (Gior. Battaglini, Vol. XXVII, 1889).

Loria (G.) — (I Poligoni di Poncelet). Discorso pronunziato nell' Università di Genova in occasione del suo solenne accoglimento a Dottore aggregato della Facoltà di Scienze. Torino, G. B. Paravia e C., 1889. — Prezzo: L. 3.

Marcolongo (R.) — Teorema di meccanica (Rend. Circolo mat. Palermo, 1888). Sulla variazione di un integrale definito e sulla teoria delle equazioni a derivate del primo ordine (Rend. R. Acc. Scienze fis.-mat. Napoli, 1888). — Sull'accelerazione nel moto di un solido intorno ad un punto fisso (Gior. Battaglini, Vol. XXVII). — Alcuni teoremi sulle funzioni cilindriche di prima specie (Rend. R. Acc. Scienze fis.-mat., Napoli, 1889).

Morera (G.) — L' insegnamento delle Scienze matematiche nelle Università italiane. Genova, 1889.

Padova (E.) — Sulle deformazioni infinitesime (R. Acc. Lincei, 1889).

Peano (I.) — Arithmetices principia nova methodo exposita. Torino, Bocca, 1889.

Persiani (O.) — Teorica delle equazioni di secondo grado esposta agli alunni della seconda classe liceale. Roma, Tip. della Pace. Prezzo: cent. 50.

Raiola Pescarini (L.) — La trigonometria per tutti. Napoli, Morano editore. 1888. Prezzo: cent. 60.

Razzaboni (A.) — Delle superficie sulle quali due serie di geodetiche formano un sistema coniugato (R. Acc. delle Scienze dell' Ist. di Bologna, 1889).

Rebière (A.) — Mathématiques et mathématiciens. Pensées et curiosités. Paris, Nony, 17, Rue des Ecoles, 1889).

Russo (G.) — Sul saggio di geometria metrico-proiettiva del prof. E. Tirelli. Catanzaro, 1889.

Scuole mezzane. — Pensieri di un vecchio insegnante in riposo. Roma, Forzani e C., 1889.

Tartinville (A.) — Cours d'arithmétique. Paris. Nony et C., 17, Rue des Ecoles — Prix: 5 fr.

Errata Corrige. — A pag. 53, l. 21, invece di:

« $A\,C' =$ e parallela $C\,C'$ », leggasi « $A\,C' = F\,C$ ».

A pag. 56, linea 13, invece di:

$$\text{sen}\; q - \cos p = 2\; \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right) = \ldots .$$

leggasi:

$$\text{sen}\; q - \cos p = -2\; \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right) = \ldots$$

Alcune proprietà projettive del triangolo

Le proprietà esposte qui sono un complemento di quelle contenute nella nota « *Un teorema sul triangolo* » inserita nel fascicolo del Settembre-Ottobre 1887 di questo Periodico.

1. Sia ABC un triangolo e P_1, P_2 due punti del suo piano. Siano

$$\begin{array}{lllll} A_1 \,,\; A_2 & \text{le intersezioni di} & BC & \text{con} & P_1A \,,\; P_2A \\ B_1 \,,\; B_2 & \quad » & CA & » & P_1B \,,\; P_2B \\ C_1 \,,\; C_2 & \quad » & AB & » & P_1C \,,\; P_2C \end{array}$$

ed A^*, B^*, C^* le intersezioni di P_1P_2 coi lati BC, CA, AB.

Dimostrerò relativamente ai triangoli

$$\begin{array}{ccc} A_2B_1C_1 \,, & B_2C_1A_1 \,, & C_2A_1B_1 \\ A_1B_2C_2 \,, & B_1C_2A_2 \,, & C_1A_2B_2 \end{array}$$

proprietà analoghe a quelle stabilite nell'altra nota per i triangoli

$$A_1B_1C_1 \quad , \quad A_2B_2C_2 .$$

Usiamo per brevità delle notazioni seguenti: (*)

$$\begin{array}{llllll}
\begin{pmatrix} B_1 & C_1 \\ A & A_1 \end{pmatrix} \equiv \alpha_2 \,, & \begin{pmatrix} C_1 & A_2 \\ B & B_2 \end{pmatrix} \equiv \beta_{211} \,, & \begin{pmatrix} A_2 & B_1 \\ C & C_2 \end{pmatrix} \equiv \gamma_{211} \,, \\
\begin{pmatrix} B_2 & C_1 \\ A & A_2 \end{pmatrix} \equiv \alpha_{121} \,, & \begin{pmatrix} C_1 & A_1 \\ B & B_1 \end{pmatrix} \equiv \beta_2 \,, & \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ C & C_2 \end{pmatrix} \equiv \gamma_{121} \,, \\
\begin{pmatrix} B_1 & C_2 \\ A & A_2 \end{pmatrix} \equiv \alpha_{112} \,, & \begin{pmatrix} C_2 & A_1 \\ B & B_2 \end{pmatrix} \equiv \beta_{112} \,, & \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C & C_1 \end{pmatrix} \equiv \gamma_2 \,; \\
\\
\begin{pmatrix} B_2 & C_2 \\ A & A_2 \end{pmatrix} \equiv \alpha_1 \,, & \begin{pmatrix} C_2 & A_1 \\ B & B_1 \end{pmatrix} \equiv \beta_{122} \,, & \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ C & C_2 \end{pmatrix} \equiv \gamma_{122} \,, \\
\begin{pmatrix} B_1 & C_2 \\ A & A_1 \end{pmatrix} \equiv \alpha_{212} \,, & \begin{pmatrix} C_2 & A_2 \\ B & B_2 \end{pmatrix} \equiv \beta_1 \,, & \begin{pmatrix} A_2 & B_1 \\ C & C_1 \end{pmatrix} \equiv \gamma_{212} \,, \\
\begin{pmatrix} B_2 & C_1 \\ A & A_1 \end{pmatrix} \equiv \alpha_{221} \,, & \begin{pmatrix} C_1 & A_2 \\ B & B_1 \end{pmatrix} \equiv \beta_{221} \,, & \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C & C_1 \end{pmatrix} \equiv \gamma_1 \,,
\end{array}$$

(*) Indico anche qui con $\begin{pmatrix} MN \\ PQ \end{pmatrix}$ il punto comune alle due rette MN e PQ.

Per giustificare poi le notazioni con tre indici che ho creduto di dovere adottare, farò osservare quanto sia facile tener presente che p. es. β_{112} è un punto del lato opposto a B_1 nel triangolo $A_1B_1C_2$, e precisamente quello in cui il lato stesso è incontrato dalla retta che va da B a B_2 (cioè a quello dei due punti B_1, B_2 che non appartiene al triangolo).

2. Le forme

$$\begin{matrix} C_1 & A_2 & \beta_{211} & \beta_{221} \\ A & C & B_2 & B_1 \end{matrix}$$

sono prospettive dal centro B, per cui si possono far corrispondere ai raggi

[1] $$P_1 C_1 \;,\; P_1 A_2 \;,\; P_1 \beta_{211} \;,\; P_1 \beta_{221}$$

i raggi

[2] $$P_2 C \;,\; P_2 A \;,\; P_2 B_1 \;,\; P_2 B_2 \,.$$

Inoltre queste due forme di quattro raggi sono prospettive ed hanno per asse $B\,C$, poichè

$$\begin{pmatrix} P_1 & C_1 \\ P_2 & C \end{pmatrix} \equiv C \;,\; \begin{pmatrix} P_1 & A_2 \\ P_2 & A \end{pmatrix} \equiv A_2 \,,\; \begin{pmatrix} P_1 & \beta_{221} \\ P_2 & B_2 \end{pmatrix} \equiv B \,.$$

Ne segue che le coppie

$$\begin{pmatrix} P_1 & \beta_{221} \\ P_2 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & B_2 \\ P_1 & \beta_{211} \end{pmatrix} \;,\; \begin{pmatrix} P_1 & C_1 \\ P_2 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & C \\ P_1 & \beta_{221} \end{pmatrix}$$

cioè le coppie

$$B_1 \, \beta_{211} \;,\; \begin{pmatrix} B & B_1 \\ C & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & B_2 \\ C & C_1 \end{pmatrix}$$

sono allineate con un punto O_a di $P_1 P_2$, che è il coniugato armonico di A^* rispetto a P_1 , P_2.

In modo analogo, cioè solo collo scambio delle lettere B e C, β e γ, si proverebbe che la coppia

$$C_1 \; \gamma_{211}$$

è anch'essa allineata collo stesso punto O_a. Di più a causa, del quadrilatero $B\,C_1\,C\,B_1$, è armonico il gruppo

$$A_1 \; \alpha_2 \; P_1 \, A$$

e perciò anche il gruppo di raggi

$$A_2 \,.\, (A_1 \; \alpha_2 \; P_1 \, A)$$

cioè

$$A_2 \, (A^* \; \alpha_2 \; P_1 \, P_2);$$

la retta $A_2 \, \alpha_2$ passa dunque essa pure per O_a.

Abbiamo così che nel triangolo $A_2 \, B_1 \, C_1$ le rette che uniscono i vertici

$$A_2 \;,\; B_1 \;,\; C_1$$

coi punti

$$\alpha_2 \;,\; \beta_{211} \;,\; \gamma_{211}$$

dei lati rispettivamente opposti, passano per O_a.

Collo scambio degli indici 1 e 2 si dimostrerebbe che le rette che uniscono i vertici

$$A_1 \quad , \quad B_2 \quad , \quad C_2$$

del triangolo $A_1 B_2 C_2$ ai punti

$$\alpha_1 \quad , \quad \beta_{122} \quad , \quad \gamma_{122}$$

dei lati opposti passano pure per O_a.

3. La retta che unisce O_a col punto O della nota precedente *(Un teorema sul triangolo)* è la retta

$$\begin{pmatrix} B & B_1 \\ C & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & B_2 \\ C & C_1 \end{pmatrix},$$

poichè questa coppia di punti è allineata con O_a, come abbiamo qui dimostrato, ed allineata con O, come è dimostrato in quella nota.

4. Dimostrazioni in tutto simili a quella del § 2 si possono fare per i triangoli

$$B_2\, C_1\, A_1 \quad , \quad B_1\, C_2\, A_2$$

e per i triangoli

$$C_2\, A_1\, B_1 \quad , \quad C_1\, A_2\, B_2$$

5. Possiamo riunire come segue i resultati precedenti.

Le 6 rette

$$\begin{matrix} A_2\, \alpha_2 & , & B_1\, \beta_{211} & , & C_1\, \gamma_{211} \\ A_1\, \alpha_1 & , & B_2\, \beta_{122} & , & C_2\, \gamma_{122} \end{matrix}$$

passano per O_a, le

$$\begin{matrix} B_2\, \beta_2 & , & C_1\, \gamma_{121} & , & A_1\, \alpha_{121} \\ B_1\, \beta_1 & , & C_2\, \gamma_{212} & , & A_2\, \alpha_{212} \end{matrix}$$

per O_b, e le

$$\begin{matrix} C_2\, \gamma_2 & , & A_1\, \alpha_{112} & , & B_1\, \beta_{112} \\ C_1\, \gamma_1 & , & A_2\, \alpha_{221} & , & B_1\, \beta_{221} \end{matrix}$$

per O_c.

I punti O_a , O_b , O_c sono sulla retta $P_1\, P_2$, e sono respettivamente i coniugati armonici di A^* , B^* , C^* rispetto a P_1 , P_2.

Le rette

$$OO_a \quad , \quad OO_b \quad , \quad OO_c$$

non sono altro che le

$$\begin{pmatrix} BB_1 \\ CC_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} BB_2 \\ CC_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} CC_1 \\ AA_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} CC_2 \\ AA_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} AA_1 \\ BB_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AA_2 \\ BB_1 \end{pmatrix}.$$

6. Considerando nei gruppi proiettivi di raggi (1) , (2) del § 2 le altre 4 coppie di intersezioni di cui non abbiamo tenuto conto nella dimostrazione si vedrebbe che vi sono altre 12 rette, di cui 4 passano per O_a, 4 per O_b e 4 per O_c.

Pesaro, 10 febbraio 1889

S. Rindi.

Sul numero delle divisioni nella ricerca del massimo comun divisore di due numeri

1. Lemma. *In ogni divisione il dividendo è maggiore del doppio del resto.*

Siano rispettivamente A, B, Q, R il dividendo, il divisore, il quoziente ed il resto di una divisione; dico che A è maggiore di 2 R.

Infatti, essendo

$$A = BQ + R,\ B > R$$

e Q almeno eguale ad 1, possiamo scrivere

$$B = R + d,\ Q = 1 + \delta,$$

dove d e δ adempiono alle condizioni:

$$d \geq 1,\ \delta \geq 0;$$

e quindi la prima di queste eguaglianze diviene

$$A = (R + d)(1 + \delta) + R,$$

ossia

$$A = 2R + d(1 + \delta) + R\delta.$$

E poichè $d(1 + \delta)$ dev'essere almeno eguale ad 1, l'ultima eguaglianza mostra che $A > 2R$.

2. Corollario. *Se fra i resti che provengono dalle successive divisioni per la ricerca del massimo comun divisore tra due numeri, se ne considerano due qualunque, che comprendano come intermedii un numero dispari di altri resti, il primo di questi due resti è maggiore del prodotto dell'altro per una potenza del 2 il*

cui esponente sia eguale al quoziente della divisione per 2 del numero dei resti fra essi intermedii aumentato di 1.

Consideriamo fra i resti, che si ottengono nel cercare il massimo comun divisore tra i numeri A e B, i resti R_h ed R_{h+2n}, e siano $R_{h+1}, R_{h+2}, \ldots, R_{h+2n-1}$ i resti fra essi intermedii: ciò è lo stesso di dire che fra i due resti considerati ve n' hanno altri $(2n-1)$ intermedii.

Frattanto il lemma precedente dà diritto a stabilire le seguenti n diseguaglianze:

$$R_h > 2R_{h+2.1}, R_{h+2.1} > 2R_{h+2.2}, \ldots, R_{h+2(n-1)} > 2R_{h+2n},$$

le quali, moltiplicate membro a membro, e soppresso poi nella diseguaglianza risultante il prodotto $R_{h+2.1}\, R_{h+2.2} \ldots R_{h+2(n-1)}$, che è fattor comune ad ambo i membri di essa, dànno

$$R_h > 2^n . R_{h+2n}.$$

Quest'ultima diseguaglianza dimostra appunto quanto è stato asserito.

3. Teorema. *Se nella ricerca del massimo comun divisore tra due numeri* A *e* B *si debbono fare più di* 2 n *divisioni, il minore di essi* B *è maggiore di* $2^{n-1}(n+2)$.

Siano

$$R_1, R_2, \ldots, R_{2n-1}, R_{2n}$$

i resti delle successive prime $2n$ divisioni. Da queste divisioni, poichè il quoziente di ciascuna di esse dev'essere almeno eguale ad 1, risulta:

$$(1)\quad B - R_1 \geq R_2, R_1 - R_2 \geq R_3, \ldots, R_{2n-2} - R_{2n-1} \geq R_{2n}.$$

Da queste eguaglianze o diseguaglianze, sommando membro a membro, otteniamo

$$(2)\qquad B \geq R_2 + R_3 + \ldots + R_{2n-2} + 2R_{2n-1} + R_{2n}$$

e poichè sappiamo *(corollario 2)* che

$$R_3 > 2^{n-2} . R_{2n-1}, R_5 > 2^{n-3} . R_{2n-1}, \ldots, R_{2n-3} > 2 . R_{2n-1},$$

sarà

$$R_3 + R_5 + \ldots + R_{2n-3} > 2R_{2n-1}(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-4} + 2^{n-3}),$$

ossia

$$R_3 + R_5 + \ldots + R_{2n-3} > 2\,R_{2n-1}\,(2^{n-2} - 1),\ (*)$$

donde proviene ancora

$$(3)\qquad R_3 + R_5 + \ldots + R_{2n-3} + 2\,R_{2n-1} > 2^{n-1}\,.\,R_{2n-1}$$

Le (2) e (3) forniscono la seguente diseguaglianza

$$(4)\qquad B > R_2 + R_4 + \ldots + R_{2n-2} + 2^{n-1}\,.\,R_{2n-1} + R_{2n}.$$

Con processo identico a quello tenuto per passare dalle (1) alla diseguaglianza (4), possiamo, escludendo dalle (1) dapprima le due prime eguaglianze e diseguaglianze, poi le prime quattro, ecc., dedurre successivamente

$$(C_1)\quad R_2 > R_4 + R_6 + \ldots + R_{2n-2} + 2^{n-2}\,.\,R_{2n-1} + R_{2n},$$

$$(C_2)\quad 2\,R_4 > 2\,R_6 + 2\,R_8 + \ldots + 2\,R_{2n-2} + 2^{n-2}\,.\,R_{2n-1} + 2\,R_{2n},$$

$$(C_3)\quad 2^2\,.\,R_6 > 2^2\,.\,R_8 + \ldots + 2^2\,.\,R_{2n-2} + 2^{n-2}\,.\,R_{2n-1} + 2^2\,.\,R_{2n},$$

. . . .

$$(C_{n-3})\qquad 2^{n-4}.R_{2n-6} > 2^{n-4}.R_{2n-4} + 2^{n-4}.R_{2n-2} + \\ + 2^{n-2}.R_{2n-1} + 2^{n-4}.R_{2n},$$

$$(C_{n-2})\quad 2^{n-3}.\,R_{2n-4} > 2^{n-3}.\,R_{2n-2} + 2^{n-2}.\,R_{2n-1} + 2^{n-3}.\,R_{2n}.$$

Ora la (4) e la (C_1) dànno

$$(5)\quad B > 2\,R_4 + 2\,R_6 + \ldots + 2\,R_{2n-2} + 3.\,2^{n-2}\,R_{2n-1} + 2\,R_{2n};$$

(*) Anche indipendentemente dalla conoscenza delle proprietà delle progressioni geometriche, si può in generale dimostrare che

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1,$$

osservando che, per essere

$$1 + 2 = 2 + 2 - 1 = 2\,.\,2 - 1 = 2^2 - 1;$$
$$1 + 2 + 2^2 = 2^2 - 1 + 2^2 = 2\,.\,2^2 - 1 = 2^3 - 1;$$
$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 2^3 - 1 + 2^3 = 2^3\,.\,2 - 1 = 2^4 - 1, \text{ ecc.}$$

siamo indotti a ritenere che

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

E questa eguaglianza, ottenuta per induzione, si mostrerà che è vera sempre, provando che la legge di eguaglianza fra il primo ed il secondo membro sussiste ancora per il caso che ad ambi i membri di essa si aggiunga il termine seguente a 2^{n-1}, ossia 2^n. Infatti il secondo membro diviene allora $2^n - 1 + 2^n = 2\,.\,2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$, il quale ha col primo membro $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$ la stessa relazione che ha $2^n - 1$ colla somma $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$. Dunque resta dimostrato quanto si voleva.

la (5) e la (C_2) forniscono quest'altra diseguaglianza

$$(6) \qquad B > 2^2 . R_6 + 2^2 . R_8 + \dots + 2^2 . R_{2n-2} + \\ + 4 . 2^{n-2} R_{2n-1} + 2^2 . R_{2n};$$

dalla (6) e dalla (C_3) risulta

$$B > 2^3 . R_8 + 2^3 . R_{10} + \dots + 2^3 . R_{2n-2} + 5 . 2^{n-2} R_{2n-1} + 2^3 . R_{2n}.$$

E così di seguito procedendo, si verrà ad avere

$$B > 2^{n-3} . R_{2n-4} + 2^{n-3} . R_{2n-2} + (n-1) 2^{n-2} R_{2n-1} + 2^{n-3} . R_{2n},$$

e poi

$$B > 2^{n-2} . R_{2n-2} + n . 2^{n-2} R_{2n-1} + 2^{n-2} . R_{2n}.$$

E poichè si ha

$$R_{2n-2} \geq R_{2n-1} + R_{2n},$$

sarà ancora

$$B > 2^{n-2} R_{2n-1} (n+1) + 2 . 2^{n-2} R_{2n},$$

ossia

$$B > 2^{n-2} R_{2n-1} . (n+1) + 2^{n-1} . R_{2n}.$$

Ma, per ipotesi, dovendosi fare per la ricerca del massimo comun divisore tra A e B più di $2n$ divisioni, è lo stesso che dire che dev'essere R_{2n} almeno eguale ad 1, ed R_{2n-1} almeno eguale a 2, e per conseguenza dall'ultima diseguaglianza si trae che

$$B > 2^{n-2} . 2 (n+1) + 2^{n-1},$$

ossia

$$B > 2^{n-1} (n+2).$$

4. Teorema. *Se* n *è il più piccolo numero intero che soddisfa alla condizione di essere* $2^{n-1}(n+2)$ *maggiore del più piccolo di due numeri dati, nella ricerca del massimo comun divisore fra questi due numeri non si possono fare più di* $2n$ *divisioni.*

Infatti, se nella ricerca del massimo comun divisore fra i due dati numeri si potessero fare più di $2n$ divisioni, allora, per il teorema (3), dovremmo conchiudere che il minore dei due numeri dati dovrebbe essere maggiore di $2^{n-1}(n+2)$, il che contraddice all'ipotesi fatta. Dunque resta dimostrato quanto si voleva.

5. Osservazione. Invece del teorema (4) i trattati di aritmetica di Bertrand e di Serret riportano quest'altro:

Se 2^n *è la più piccola potenza del 2 che supera il minore* *di due numeri dati, nella ricerca del massimo comun divisore tra questi due numeri non si possono fare più di* 2 n *divisioni.*

Ognun vede quale risultato più soddisfacente apporta il teorema (4) sul (5).

Citerò tuttavia uno dei moltissimi esempi, che si potrebbero addurre, per mostrare sia il maggior vantaggio che arreca il teorema (4) rispetto al (5), e sia ancora come si possa dire, in senso assoluto, soddisfacente la conclusione a cui conduce il teorema (4).

Volendo cercare il massimo comun divisore tra 144 ed 89, vediamo che il più piccolo numero n tale da soddisfare alla condizione

$$2^{n-1}(n+2) > 89$$

è 5, giacchè per $n = 5$ si ha $2^{n-1}(n+2) = 16 \times 7 = 112$.

Quindi, per il teorema (4), possiamo conchiudere che nella ricerca del massimo comun divisore fra 144 e 89 non si debbono fare più di 10 divisioni.

Mentre invece, poichè la più piccola potenza di 2 che supera 89 è 2^7, si dovrebbe, per il teorema (5), conchiudere che questo numero massimo di divisioni dovrebbe essere 14.

Cercando poi il massimo comun divisore fra 144 ed 89 si trova realmente che si debbono fare 10 divisioni (massimo numero di divisioni che viene appunto indicato dal teorema (4)).

Bari, 21 febbraio 1889.

Stefano Gatti.
Professore di matematica al R. Liceo di Bari.

Il teorema di Pitagora e il postulato delle parallele

Nel fascicolo Settembre-Ottobre 1888 di questo Periodico il prof. D. Besso proponeva, fra le altre questioni, la seguente:

Dedurre il postulato delle parallele dalla proposizione: Il quadrato del numero che misura l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo è eguale alla somma dei quadrati dei numeri che misurano i cateti.

Qui, manifestamente, la proposizione pitagorica deve intendersi ammessa per qualsiasi triangolo rettangolo, ma la quistione riesce più interessante se conveniamo di ammetterla soltanto per quei triangoli rettangoli pei quali possa effettivamente sottoporsi a verificazione sperimentale, vale a dire soltanto per quelli i cui lati risultino per essa commensurabili fra loro; allora infatti il postulato delle parallele che se ne deduce potrà considerarsi, *anche* per questa via, suscettibile di pratica verificazione.

Stante l'identità

$$a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2,$$

tutti i triangoli rettangoli che hanno i cateti proporzionali ai numeri razionali $a, \frac{a^2-1}{2}$, sono appunto nella condizione, se è vera la proposizione premessa, di avere tutti e tre i lati proporzionali a numeri razionali e quindi fra loro commensurabili; perciò noi considereremo la proposizione stessa come verificata per tutti e soli i triangoli di questa classe che corrispondono ad un dato particolare valore di a (*).

Se A B C è uno di questi triangoli, rettangolo in A, ponendo $a : \frac{a^2-1}{2} = m$, avremo:

$$AB : AC = m$$

$$(1) \quad BC^2 = AB^2 + AC^2 = \frac{AB^2}{m^2} \cdot (1 + m^2) = AC^2 \cdot (1 + m^2).$$

Anzitutto dimostriamo la reciproca, cioè che se fra i lati di un triangolo hanno luogo queste due relazioni, esso è rettangolo in A.

Su A C si tiri per A la perpendicolare $AD = AB$ e si unisca C con D: dal triangolo A C D, poichè in esso $AD : AC = m$, si ha

$$CD^2 = AC^2 + AD^2$$

onde, per la (1), $CD = BC$ e i due triangoli sono eguali.

S'imaginino ora costruiti tre segmenti le cui misure sodisfino le equazioni

$$x : y = m, \quad y : z = m, \quad x + z = BC,$$

(*) Il caso praticamente più semplice corrisponde ad $a = 3$. Potevamo servirci anche dell'altra identità $a^2 + \left(\frac{a^2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + 1\right)^2$ e allora il caso più semplice era per $a = 4$.

rappresentati cioè da

$$x = \frac{\mathrm{B\,C}}{1+m^2} \cdot m^2 \qquad y = \frac{\mathrm{B\,C}}{1+m^2} \cdot m \qquad z = \frac{\mathrm{B\,C}}{1+m^2}.$$

Con due di essi, x e y, e col lato A B si formi il triangolo P Q S, facendo

$$\mathrm{P\,S} = x \quad \mathrm{Q\,S} = y \quad \mathrm{P\,Q} = \mathrm{A\,B};$$

poichè

$$\mathrm{P\,S}^2 + \mathrm{Q\,S}^2 = \frac{\mathrm{B\,C}^2}{1+m^2} \cdot m_2$$

e per la (1)

$$\frac{\mathrm{B\,C}^2}{1+m^2} \cdot m^2 = \mathrm{A\,B}^2$$

sarà

$$\mathrm{P\,S}^2 + \mathrm{Q\,S}^2 = \mathrm{P\,Q}^2,$$

ed essendo ancora

$$\mathrm{P\,S} : \mathrm{Q\,S} = m,$$

ne deduciamo essere il triangolo P Q S rettangolo in S.

Si prolunghi P S d'un segmento

$$\mathrm{S\,R} = z = \frac{\mathrm{B\,C}}{1+m^2}$$

e si tiri Q R; dal triangolo rettangolo Q S R, in cui

$$\mathrm{S\,Q} : \mathrm{S\,R} = m,$$

si ha

$$\mathrm{Q\,R}^2 = \mathrm{Q\,S}^2 + \mathrm{R\,S}^2 = \frac{\mathrm{B\,C}^2}{1+m^2},$$

ma per la (1)

$$\frac{\mathrm{B\,C}^2}{1+m^2} = \mathrm{A\,C}^2,$$

onde

$$\mathrm{Q\,R} = \mathrm{A\,C},$$

ed essendo

$$\mathrm{P\,R} = x + z = \mathrm{B\,C}$$

concluderemo che i due triangoli P Q R ed A B C sono fra loro eguali. Ma P Q R è diviso dall'altezza corrispondente all'ipotenusa in due triangoli i cui cateti hanno fra loro lo stesso rapporto m dei cateti di esso; altrettanto avverrà dunque del triangolo A B C e di qualsiasi altro triangolo della classe che si considera.

Ciò posto, nel nostro triangolo A B C si tiri l'altezza A D, per D le corrispondenti altezze D E, D F dei due triangoli A D B, A D C: avremo

$$A F : D F = m \quad , \quad D F : C F = m \quad , \quad A F + C F = A C,$$

dalle quali

$$A F = \frac{A C}{1 + m^2} \cdot m^2 \; , \; D F = \frac{A C}{1 + m^2} \cdot m \quad , \quad C F = \frac{A C}{1 + m^2} \cdot$$

Similmente:

$$B E = \frac{A B}{1 + m^2} \cdot m^2 \; , \; D E = \frac{A B}{1 + m^2} \cdot m \quad , \quad A E = \frac{A B}{1 + m^2},$$

ed essendo

$$A B = A C \cdot m$$

si deduce

$$A F = D E, \qquad D F = A E.$$

I due triangoli A D E, A D F, rettangoli in E e in F, hanno dunque anche gli altri due angoli rispettivamente uguali, e poichè i due D A E, D A F sono fra loro complementari, la somma degli angoli di ciascuno di essi è eguale a due retti.

Di questa proprietà d'un triangolo il postulato delle parallele, com'è noto, è logica conseguenza.

S. Sbrana.

Rappresentazione geometrica dei numeri irrazionali

(Continuazione)

Potenze dei numeri irrazionali.

Sia (fig. 6^a e 7^a) un angolo $X_0 O X$; siano $X_1 O X_2$, $X_2 O X_3$, $X_3 O X_4 \ldots . X_{p-1} O X_p$ tanti angoli uguali al dato e contati nel senso positivo $X_0 O X_1$, e altrettanti angoli $X_0 O X_{-1}$, $X_{-1} O X_{-2} \ldots . X_{-(p-1)} O X_{-p}$ uguali essi pure al dato e contati nel senso negativo $X_1 O X_0$.

Fatto centro in O e con raggi l'unità lineare O U e un segmento qualsivoglia O A, descrivansi due circonferenze che sechino le rette O X nei punti U ed A rispettivamente. — Chiameremo A_0 A_1 i punti U, A appartenenti ai lati $O X_0$ $O X_1$.

Forminsi ora le spezzate $A_0 A_1 A_2 \ldots . A_p$; $A_0 A_{-1} A_{-2} \ldots . A_{-p}$ i cui lati siano paralleli ai successivi segmenti U A terminati alle rette $O X_0$, $O X_1$, $O X_2 \dots O X_p$ e alle rette $O X_0$, $O X_{-1}$, $O X_{-2} \dots O X_{-p}$.

I risultanti triangoli $A_0 O A_1$, $A_1 O A_2$, $A_2 O A_3 \dots A_{p-1} O A_p$; $A_0 O A_{-1}$ $A_{-1} O A_{-2} \dots A_{-(p-1)} O A_{-p}$ come tutti simili al triangolo costante $O A U$, sono simili tra loro; e sono pure simili i triangoli determinati da due coppie di lati comprendenti angoli equimoltiplici di $X_0 O X_1$ o di $X_1 O X_0$.

Sia ora $O A = \alpha$ e suppongasi α razionale.

Allora si ha . . . . $O A_1 = \alpha$

$$
\begin{array}{lcl}
O A_2 : O A_1 = O A : O U ; & \text{onde} & O A_2 = O A_1^2 = \alpha^2 \\
O A_3 : O A_2 = O A : O U & \text{»} & O A_3 = O A_2 \cdot O A = \alpha^3 \\
\dots\dots\dots & \text{»} & \dots\dots\dots \\
O A_p : O A_{p-1} = O A : O U & \text{»} & O A_p = O A_{p-1} \cdot O A = \alpha^p.
\end{array}
$$

E si ha pure analogamente

$$
\begin{array}{lcl}
O A_{-1} : O A_0 = O U : O A; & \text{onde} & O A_{-1} = \dfrac{O A_0 \cdot O U}{O A} = \dfrac{1}{O A} = \alpha^{-1} \\
O A_{-2} : O A_{-1} = O U : O A; & \text{»} & O A_{-2} = \dfrac{O A_{-1}}{O A} = \dfrac{1}{O A^2} = \alpha^{-2} \\
\dots\dots\dots & \text{»} & \dots\dots\dots \\
O A_{-p} : O A_{-(p-1)} = O U : O A; & \text{»} & O A_{-p} = \dfrac{O A_{-(p-1)}}{O A} = \dfrac{1}{O A_p} = \alpha^{-p}.
\end{array}
$$

Adunque se α è razionale, le rette che congiungono il punto O coi vertici della spezzata rappresentano le potenze positive, nulla, e negative del numero α.

Questi stessi segmenti converremo che rappresentino ancora quelle potenze anche quando sia α irrazionale e dato da (M, N).

Allora, giusta quanto si è detto circa il prodotto di due numeri irrazionali, sarà, ad es: $O A_2$ maggiore di tutti i quadrati m_r^2, minore dei quadrati n_s^2, e anche maggiore di tutti i prodotti come $m_r m_s$, e minore dei prodotti $n_r n_s$ poichè, supposto $m_r > m_s$ e $n_r > n_s$, essendo $O A_2$ maggiore di m_r^2 è pur maggiore di $m_r m_s$, ed essendo minore di n_s^2 è pur minore di $n_r n_s$.

È per conseguenza $O A_2 = (M^2, N^2)$, e analogamente si ragiona per $O A_3, O A_4 \dots O A_p$.

In quanto ai segmenti $O A_{-2}$ $O A_{-3}$ $O A_{-4} \dots O A_{-p}$ osserviamo che è ad es:

$$O A_{-2} = \frac{1}{O A^2} = \frac{1}{(M^2, N^2)}.$$

Cosicchè, giusta quanto fu detto sul quoziente di due numeri irrazionali, è $O\,A_{-2}$ minore dei quadrati $\frac{1}{m_r^2} = m_r^{-2}$ nonchè dei quozienti $\frac{1}{m_r\,m_s}$ e maggiore dei quadrati $\frac{1}{n_s^2} = n_s^{-2}$, nonchè dei quozienti $\frac{1}{n_r\,n_s}$ per cui è

$$O\,A_{-2} = (N^{-2}, M^{-2})$$

e analogamente si conchiude per $O\,A_{-3}, O\,A_{-4}, \ldots . O\,A_{-p}$.

Abbiamo così trovato per le potenze ad esponente intero, positivo e negativo di un numero irrazionale le seguenti formole di definizione:

$$(M, N)^p = (M^p, N^p),$$
$$(M, N)^{-p} = (N^{-p}, M^{-p}).$$

Osservazione. — Il numero α, razionale o irrazionale, può essere maggiore dell'unità, come nella figura 6ª; o minore come nella figura 7ª. Nel primo caso risulta chiaramente, dalla similitudine dei diversi triangoli considerati, che i segmenti $O\,A_1$ $O\,A_2$ $O\,A_3 \ldots . O\,A_p$ vanno crescendo, e i segmenti $O\,A_{-1}$ $O\,A_{-2}$ $O\,A_{-3} \ldots . O\,A_{-p}$ vanno diminuendo; e indefinitamente come è facile dimostrare.

Poichè difatti presa su $O\,A_2$ la $O\,A'_1 = O\,A_1$
» » $O\,A_3 \ldots . O\,A'_2 = O\,A_2$
. . . .
» » $O\,A_p$, $O\,A'_{p-1} = O\,A_{p-1}$

risultano i triangoli $A_1\,A_2\,A'_1$, $A_2\,A_3\,A'_2 \ldots . A_{p-1}\,A_p\,A'_{p-1}$ che sono simili e in cui i lati omologhi $A_1\,A_2$, $A_2\,A_3$, $A_3\,A_4 \ldots .$ $A_{p-1}\,A_p$ vanno crescendo: cosicchè andranno pure crescendo i segmenti $A_2\,A'_1$, $A_3\,A'_2$, $A_4\,A'_3 \ldots . A_p\,A'_{p-1}$.

Ma si ha:

$$\begin{aligned} O\,A_1 &= O\,A \\ O\,A_2 &= O\,A_1 + A_2\,A'_1 \\ O\,A_3 &= O\,A_2 + A_3\,A'_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ O\,A_p &= O\,A_{p-1} + A_p\,A'_{p-1}\,; \end{aligned}$$

di qui sommando si ottiene:

$$O\,A_p > O\,A + (p-1)\,A_2\,A'_1$$

ed è chiaro che, prendendo p, e quindi anche $(p-1)$ A_2 A_1', abbastanza grande può rendersi $O A_p$ maggiore di qualunque segmento, per quanto grande.

Si dimostrerebbe in modo analogo che $O A_{-p}$ può rendersi minore di qualunque segmento per quanto piccolo.

Se invece consideriamo la figura 7ª, che si riferisce al caso di α razionale o irrazionale minore dell'unità, si giunge a conclusioni affatto opposte.

Ciò è naturale: poichè essendo ora $O A_0$ il maggiore dei due segmenti $O A_0$, $O A_1$ i lati $O A_0$ $O A_1$ del triangolo $O A_0$ A_1 disegnato nella fig. 6ª riescono ora scambiati e scambiato per conseguenza riesce il senso $X_0 O X_1$ degli angoli positivi col senso $X_1 O X_0$ cosicchè le conclusioni ottenute precedentemente nei campi positivi e negativi risultano invertite.

Conchiudendo si trova il noto:

Teorema. — Le successive potenze a esponente intero e positivo d'un numero, razionale o irrazionale, maggiore dell'unità vanno crescendo e le potenze a esponente negativo vanno decrescendo indefinitamente col crescere dell'esponente; mentre il contrario avviene se il numero è minore dell'unità.

Radici dei numeri irrazionali.

Le considerazioni fatte sulla spezzata A_{-p} $A_{-(p-1)}$ .... A_{-2} A_{-1} A_0 A_1 A_2 .... A_{p-1} A_p sussistono indipendentemente dal valor comune degli angoli in O. Se quindi pensiamo che questi angoli vadano continuamente decrescendo una spezzata, come la suddetta, i cui lati abbiano, sui lati di quegli angoli, una inclinazione costante, tende a una curva, detta spirale equiangola, le cui tangenti $x\,y$ fanno (figura 8ª) coi raggi *vettori* che vanno al punto di contatto un angolo costante.

I raggi *vettori* vanno crescendo nel senso A M di quella parte della curva che giace nell'angolo ottuso $O A x$ poichè O A cresce quando il punto A si sposta da A verso x; decrescono nel senso opposto. Vanno cioè crescendo quando ruotano intorno O nel senso degli angoli positivi, vanno decrescendo nel senso opposto. Questo però avviene per una spirale derivante da una spezzata come quella della figura 6ª: per una spirale derivante da una spezzata della figura 7ª avviene il contrario.

I raggi *vettori* si conservano di lunghezza costante se l'angolo O A x della spirale equiangola è retto, poichè in tal caso quella curva si riduce a una circonferenza.

Poichè poi il raggio *vettore* può farsi ruotare di infiniti giri attorno O nel senso positivo o negativo, le spire della curva sono in numero infinito e vicine o lontane dal polo tanto quanto si vuole senza che mai passino pel polo stesso.

Supposta ora descritta una qualunque spirale equiangola e in essa segnati due raggi *vettori* O U, O A_n uguali all'unità e a un segmento qualunque, dividasi l'angolo U O A_n in n parti uguali colle rette O A_1 O A_2 . . . O A_{n-1}. Siano α β i numeri rappresentati dai segmenti O A_n O A_1; si ha, come vedemmo a proposito delle potenze:

$$\alpha = \beta^{n}$$

e β dicesi radice n^{sima} di α.

Se β, e quindi anche α, è razionale la radice n^{sima} di α si definisce quel numero la cui potenza n^{sima} è uguale ad α.

Se β è irrazionale e dato da (P, Q) allora essendo

$$\alpha = (P^n, Q^n)$$

si definisce β, cioè la radice n^{sima} di α, come l'irrazionale che separa le due classi dei numeri le cui potenze n^{sime} sono rispettivamente minori e maggiori del dato numero α.

Logaritmi dei numeri irrazionali.

Siano O U, O A, O B tre raggi vettori di una spirale equiangola; siano 1, a, b i numeri che li misurano e siano α, β le misure degli angoli A O U, B O U riferiti ad un angolo unitario qualunque.

Circa i valori a, b possono presentarsi quattro casi: studiamo, in ciascuno di questi casi, il rapporto $\beta : \alpha$.

1° caso.

Suppongasi

$$a > 1\,;\ b > 1.$$

Il rapporto $\beta : \alpha$ può essere intero; frazionario; incommensurabile.

Se è $\beta = m\,\alpha$ si ha corrispondentemente $b = a^m = a^{(\beta : \alpha)}$.

Se è $\beta = \frac{m}{n}\alpha$ e si segna l'angolo V O U $= \frac{1}{n} \cdot \alpha$, si trova

$$a = \mathrm{O\,V}^n \ldots . \quad 1)$$
$$b = \mathrm{O\,V}^m \ldots . \quad 2)$$

e dalla 1) deriva:

$$\mathrm{O\,V} = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

e quindi la 2) diventa

$$b = a^{\frac{m}{n}} = a^{(\beta\,:\,\alpha)}.$$

Se infine $\beta : \alpha$ è un numero irrazionale (P, Q) cosicchè sia:

$$p\,\alpha < \beta < q\,\alpha$$

allora il raggio O B cade nell'angolo dei raggi O B′, O B″ formanti colla O U angoli uguali a $p\,\alpha$, $q\,\alpha$: perciò, per la natura della curva, sarà corrispondentemente:

$$\mathrm{O\,B'} < \mathrm{O\,B} < \mathrm{O\,B''}$$

ossia:

$$a^p < b < a^q.$$

E poichè O B separa le due classi di segmenti O B′, O B″ così avremo:

$$b = (a^p, a^q)$$
$$b = a^{(\beta\,:\,\alpha)}$$

dando così la definizione di una potenza a esponente incommensurabile.

Adunque qualunque sia la natura del rapporto $\beta : \alpha$ si è trovato:

$$b = a^{(\beta\,:\,\alpha)}$$

ossia, prendendo l'angolo A O U come unità di misura:

$$b = a^{\beta}.$$

2° caso.

Sia:

$$a > 1\,; \; b < 1.$$

L'angolo B O U essendo in senso opposto all'angolo unitario A O U, è misurato da un numero negativo $-\beta'$ e ragionando come nel 1° caso, si ottiene:

$$b = a^{-\beta'}.$$

3° CASO.

Sia:

$$a < 1 \; ; \; b > 1$$

Si ha ancora come nel 2° caso $\beta = -\beta'$ e si trova ancora:

$$b = a^{-\beta'}.$$

4° CASO.

Sia:

$$a < 1 \; ; \; b < 1$$

L'angolo B O U avendo lo stesso senso dell'angolo unitario A O U, il numero β è positivo e si ha:

$$b = a^{\beta}.$$

Adunque in ogni caso è

$$\beta = log_a b$$

qualora si misuri β prendendo l'angolo A O U come unità.

Si vede da ciò che si è detto come una spirale equiangola faccia graficamente l'ufficio di una tavola di logaritmi, dove i raggi *vettori* rappresentano i numeri e gli angoli dei raggi stessi col raggio unitario rappresentano i logaritmi, qualora si prenda come unità angolare l'angolo formato dal raggio, base dei logaritmi, col raggio unitario medesimo.

È chiaro che il logaritmo della base è l'unità: che il logaritmo dell'unità è lo zero: che secondochè la base sia maggiore o minore dell'unità i logaritmi dei numeri maggiori dell' unità sono positivi, i logaritmi dei numeri minori dell'unità negativi, o viceversa: che il logaritmo di $(+\infty)$ è $\pm\infty$ e il logaritmo di zero è $\mp\infty$ a seconda che è la base maggiore o minore dell'unità.

È pur facile dedurre dalla spirale medesima quell'altra definizione di logaritmo che nasce dal confronto di due progressioni: poichè gli angoli dei raggi *vettori* essendo in progressione aritmetica i raggi stessi sono in progressione geometrica: come sarebbe pur facile ricavare le proprietà fondamentali dei logaritmi ecc., ecc.

Mi basterà dimostrare che dai logaritmi calcolati in un sistema di base O A si possono dedurre i logaritmi in un nuovo sistema moltiplicando gli antichi per una costante che è il modulo.

Si ha difatti

$$\frac{\mathrm{BOU}}{\mathrm{A'OU}}=\frac{\mathrm{BOU}}{\mathrm{AOU}}\cdot\frac{\mathrm{AOU}}{\mathrm{A'OU}}=\frac{\mathrm{BOU}}{\mathrm{AOU}}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{A'OU}}{\mathrm{AOU}}}$$

ossia:

$$log_{a'} b = log_a b \cdot \frac{1}{log_a a'}.$$

Conclusione.

In tutto ciò che si è detto fin qui si tenne conto soltanto del valore dei segmenti rappresentanti i numeri irrazionali. Volendo tener conto anche del senso di quei segmenti otteniamo di estendere alle quantità algebriche le conclusioni trovate pei semplici numeri irrazionali.

Tale estensione è nota per ciò che riguarda la somma e la differenza. Quanto al prodotto, riferendoci alla figura 10ª rappresenteremo i moltiplicandi positivi con segmenti contati da O verso X_1: i negativi con segmenti da O verso X_2 e i moltiplicatori positivi con segmenti contati da O verso Y_1: i negativi da O verso Y_2. Allora applicando la costruzione conosciuta si vede che il prodotto positivo O $C_{(11)(22)}$ risulta da fattori dello stesso segno, mentre il prodotto negativo O $C_{(12)(21)}$ risulta da fattori di segno contrario.

Analogamente si conchiude circa il quoziente.

Si vede anche dalla figura 11ª come le potenze di grado pari di una quantità negativa siano positive, quelle di grado dispari negative.

Infine troviamo che le radici e i logaritmi delle quantità negative, non hanno una rappresentazione grafica, poichè i raggi della spirale equiangola possono tirarsi per il polo in tutte le possibili direzioni del piano.

A. Biffignandi.

ESAMI DI LICENZA LICEALE

1889 — Sessione di Luglio

TEMI DI MATEMATICA

(Il candidato ha la scelta fra i due temi qui sotto proposti)

GEOMETRIA.

Costruire un triangolo di cui siano date la lunghezza della base e le lunghezze delle perpendicolari tirate da un punto assegnato della base su ciascuno degli altri due lati.

ALGEBRA.

Di due cilindri circolari retti è conosciuta la somma V dei volumi, la somma k^2 dei quadrati dei loro raggi, e si sa inoltre che le loro superficie laterali sono equivalenti ognuna ad una superficie data S.

Calcolare il raggio e l'altezza di ciascuno dei due cilindri.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

Sulla potenza di un binomio e di un polinomio.

1. Provare che, se a e b sono positivi ed è $a > b$, si ha

$$a^2 - b^2 > (a - b)^2.$$

2. La differenza di due numeri è eguale a 12, e la differenza dei loro quadrati a 264: trovare i due numeri.

3. La somma di due numeri è eguale ad a, e la somma dei loro quadrati è eguale b: esprimere, mediante a e b, 1) il prodotto dei due numeri; 2) il quadrato della loro differenza.

4. Trovare due numeri tali che la loro somma sia eguale a 18 e la somma dei loro quadrati a 194.

5. La somma di due numeri è eguale ad a e il loro prodotto è eguale a b: esprimere, mediante a e b, il quadrato della differenza dei due numeri.

6. La somma di due numeri è eguale a 26 ed il loro prodotto a 144: trovare i due numeri.

7. Provare che, se la somma di due numeri è eguale a 26, ed il loro prodotto a 144, ciascuno di essi, sostituito in luogo di x, annulla il trinomio $x^2 - 26\,x + 144$.

8. Provare che, se il trinomio $x^2 - a\,x + b$ si annulla per un valore di x, diverso da $\frac{a}{2}$, esso dovrà pure annullarsi per un altro valore di x, e sarà la somma di quei due valori eguale ad a, ed il loro prodotto eguale a b.

9. Trovare una relazione fra la somma di due numeri, la somma dei loro cubi ed il loro prodotto.

10. La somma di due numeri è eguale a 23, e la somma dei loro cubi a 3887: trovare il loro prodotto.

11. La somma di due numeri è eguale a 23, e la somma dei loro cubi a 3887: trovare i due numeri.

12. Provare che l'uguaglianza

$$x^3 + p\,x = q$$

è soddisfatta quando s'intenda con x la differenza di due numeri, con p il triplo loro prodotto, e con q la differenza dei loro cubi. (*)

(*) Tartaglia, che aveva trovato la formola pel cubo di un binomio, è stato forse guidato da questa trasformazione alla scoperta della regola per la risoluzione dell'equazione $x^3 + px = q$. Ciò mi sembra risultare:

1) Dalle parole premesse alla dimostrazione dell'accennata formola:

“ La causa della regola data per cavar la radice cuba e similmente quella da formar il rotto delle propinque radici cube delli numeri non cubi, si può assegnare da questa sottoscritta proposizione non posta da Euclide nè da altri eccetto che da Hieronimo Cardano da noi a lui mostrata, con la qual proposizione fu da me trovata la regola generale al capitolo di cosa e cubo eguale a numero e a molti altri suoi dipendenti l'anno 1534 in Venezia come al suo luogo si dirà ” (a pag. 80 dell'opera: *La seconda parte del general trattato di numeri et misure* di Nicolò Tartaglia. Venezia, 1556).

2) Dalle famose terzine colle quali enuncia la regola corrispondente a quella forma dell'equazione cubica:

13. Trovare un numero che sostituito in luogo di x renda soddisfatta l'uguaglianza

$$x^3 + 360\,x = 2863$$

14. Verificare l'identità

$$a^3 + b^3 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + 6\,\frac{a+b}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

15. Applicare la precedente identità alla ricerca proposta al N. 11.

16. Verificare l'identità

$$a^4 + b^4 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 + 12\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \text{ (*)}$$

17. Provare che, se la somma di due numeri è eguale a 23 e la somma delle loro quarte potenze a 67937, il quadrato della loro differenza deve annullare il trinomio

$$x^2 + 3174\;x - 263655$$

18. La somma di due numeri è eguale a 23, e la somma delle loro quarte potenze a 67937: trovare i due numeri.

19. Esprimere la differenza, fra la quarta potenza della somma di due numeri e la somma delle loro quarte potenze, in funzione della somma dei due numeri e del loro prodotto.

Quando ch'el cubo con le cose appresso,
Se agguaglia a qualche numero discreto,
Trovan due altri differenti in esso:

Dappoi terrai questo per consueto,
Ch'el lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto;

El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti,
Darà le tua cosa principale.

(*Quesiti et invenzioni diverse* di NICOLÒ TARTALEA bresciano. Venezia, 1546).

(*) Le identità proposte ai N.i 14 e 16 sono state stabilite dal CAVALIERI, e da lui applicate alle dimostrazioni di quei suoi celebri teoremi che si traducono nelle eguaglianze

$$lim\left(\frac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^4}\right)_{n=\infty} = \frac{1}{4}$$

$$lim\left(\frac{1^4 + 2^4 + \ldots + n^4}{n^5}\right)_{n=\infty} = \frac{1}{5}$$

(*Exercitationes geometricae sex* Auctore F. BONAVENTURA CAVALERIO. Bononiae, 1647).

20. Applicare la relazione richiesta nel precedente esercizio alla ricerca proposta al N. 18.

21. Esprimere la differenza

$$(a+b)^5 - (a^5+b^5)$$

in funzione della somma $a+b$, e del prodotto $a\,b$.

22. La somma di due numeri è eguale a 14 e la somma delle loro quinte potenze a 161294: trovare i due numeri.

23. Verificare l'identità

$$a^6+b^6 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^6 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^6 +$$
$$+30\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right)$$

24. Provare che, se a e b sono interi, il quoziente

$$\frac{(a+b)^7-(a^7+b^7)}{7\,a\,b\,(a+b)}$$

è il quadrato d'un numero intero.

25. Con successive moltiplicazioni del binomio $a+b$ per sè stesso, si formino gli sviluppi delle potenze seconda, terza, quarta, ecc. fino alla dodicesima.

26. Quale relazione ha luogo fra il coefficiente del terzo termine nello sviluppo di $(a+b)^7$ e i coefficienti dei termini secondo e terzo nello sviluppo di $(a+b)^6$? Verificare che la stessa relazione ha luogo fra il coefficiente del quinto termine nello sviluppo di $(a+b)^{12}$ e i coefficienti dei termini quarto e quinto nello sviluppo di $(a+b)^{11}$. E in generale che, indicando con $L_{n,r}$ il coefficiente di $a^{n-r}\,b^r$ nello sviluppo di $(a+b)^n$, cioè il coefficiente del termine $(r+1)^{mo}$, si ha, per tutti quei valori di n ed r,

$$L_{n,\,r} = L_{n-1,\,r-1} + L_{n-1,\,r} \text{ (*)}$$

27. Dimostrare che la precedente relazione ha luogo qualunque sia l'intero positivo n.

(*) Gli sviluppi delle potenze d'un binomio, fino alla dodicesima, sono stati trovati da Tartaglia, il quale ha pure trovato che i coefficienti sono legati da questa legge (a pag. 72 dell'opera già citata: *La seconda parte del general trattato di numeri et misure* di Nicolò Tartaglia. Venezia, 1556). Ma egli non ha data la formola generale dello sviluppo di $(a+b)^n$, come sembra avere creduto qualche autore moderno.

28. Mediante la precedente relazione dimostrare la formola

$$L_{n,r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}$$

29. Dimostrare che il numero $L_{n,r}$ ha la proprietà espressa dall'eguaglianza

$$L_{n,r} = L_{n,n-r}$$

30. Dimostrare che il prodotto di m numeri interi consecutivi è divisibile pel prodotto $1.2.3\ldots m$.

31. Dimostrare le due eguaglianze

$$L_{n,o} + L_{n,1} + L_{n,2} + \ldots + L_{n,n-1} + L_{n,n} = 2^n$$
$$L_{n,o} - L_{n,1} + L_{n,2} - \ldots - (-1)^n L_{n,n-1} + (-1)^n L_{n,n} = 0$$

32. Dimostrare che, se x è minore di 1, la somma

$$(1+x)^{529} + (1-x)^{529}$$

è minore di 2^{529}.

33. Dimostrare che, nello sviluppo di $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$ è un termine indipendente da x, e trovare questo termine.

34. Nello sviluppo di $(a+b)^n$ i termini terzo, quarto e quinto sieno eguali rispettivamente a 4320, 5760, 3840: trovare a, b ed n.

35. Trovare a, b ed n colla condizione che quattro termini consecutivi nello sviluppo di $(a+b)^n$ sieno eguali rispettivamente a 2916, 4860, 4320, 2160.

36. Dimostrare che, posto

$$P_n = 1.2.3\ldots n$$

la potenza $(a+b)^n$ è eguale alla somma di tutti i valori che si deducono dalla formola

$$\frac{P_n}{P_\alpha . P_\beta} a^\alpha b^\beta$$

quando s'attribuiscano ad α e β tutti i valori interi e positivi, non escluso lo zero, tali che sia $\alpha + \beta = n$, e s'intenda sostituita l'unità al simbolo P_0.

37. Nello sviluppo della settima potenza di $h + c$ porre $h = a + b$, poi sviluppare le potenze di $a + b$, e ordinare secondo le potenze decrescenti di a.

38. Sviluppare $(a + b + c)^9$ secondo le potenze decrescenti di a, e provare che lo sviluppo è eguale alla somma di tutti i termini che si deducono dalla formola

$$\frac{P_9}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma} a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

quando si attribuiscano ad α, β, γ tutti i valori interi positivi, non escluso lo zero, tali che sia

$$\alpha + \beta + \gamma = 9.$$

39. Dimostrare che la potenza

$$(a + b + c)^n$$

è eguale alla somma di tutti i termini che si deducono dalla formola

$$\frac{P_n}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma} a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

quando si attribuiscano ad α, β, γ tutti i valori interi e positivi, non escluso lo zero, tali che la loro somma sia eguale ad n.

40. Dimostrare che la potenza

$$(a + b + c + d + \ldots)^n$$

è eguale alla somma di tutti i termini che si deducono dalla formola

$$\frac{P_n}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma . P_\delta \ldots} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$$

quando si attribuiscano ad α, β, γ tutti i valori interi e positivi, non escluso lo zero, tali che sia

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = n$$

41. Assegnare il numero dei termini dello sviluppo della potenza n^a d'un trinomio.

42. Assegnare il numero dei termini dello sviluppo della potenza n^a d'un quadrinomio.

43. Assegnare il numero dei termini dello sviluppo della potenza n^a d'un polinomio di m termini.

44. Applicare il teorema proposto al N. 40 al quadrato, al cubo ed alla quarta potenza d'un polinomio di m termini.

45. Verificare l'identità

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \left(-\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} d\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} d\right)^2 + \left(\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} d\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} d\right)^2$$

46. Verificare l'identità

$$(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(a-b+c)^3-(-a+b+c)^3=24\,abc$$

47. Verificare l'identità

$$\left.\begin{array}{r}(a+b+c+d)^4-(a+b+c-d)^4-\\-(a+b-c+d)^4-(a-b+c+d)^4-\\-(-a+b+c+d)^4+(-a+b+c-d)^4+\\+(-a+b-c+d)^4+(-a-b+c+d)^4\end{array}\right\}=192\,abcd$$

48. Trovare il coefficiente di x^4 nello sviluppo di

$$(1+x+x^2)^3$$

49. Trovare il coefficiente di x^7 nello sviluppo di

$$(1+2x+3x^2+4x^3)^4$$

50. Qual'è il cofficiente di x^8 nello sviluppo di

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{10})^2?$$

D. Besso.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 23 e 24

23 *Dato un triangolo ABC si costruisca un secondo triangolo $A_1B_1C_1$ coi lati B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 eguali rispettivamente ai segmenti AA', BB', CC' che uniscono i vertici A, B, C con i punti A', B', C' dei lati ad essi opposti, o dei loro prolungamenti, determinati dalle*

$$\frac{\mathrm{BA'}}{\mathrm{A'C}}=\frac{\mathrm{CB'}}{\mathrm{B'A}}=\frac{\mathrm{AC'}}{\mathrm{C'B}}=m,$$

in cui m *significa un numero positivo o negativo. Sia $A_2B_2C_2$ il triangolo derivato, con analoga costruzione, dal triangolo $A_1B_1C_1$, e $A_3B_3C_3$ quello derivato da $A_2B_2C_2$. Provare: 1° che esistono tre valori di* m *per ciascuno dei quali il triangolo $A_2B_2C_2$ è simile al triangolo ABC; 2° che esistono sei valori di* m *per ciascuno dei quali il triangolo $A_3B_3C_3$ è simile al triangolo ABC.*

D. Besso.

Soluzione del Prof. *S. Catania* (*).

Si dicano a, b, c i numeri che misurano i lati del triangolo fondamentale, rispettivamente opposti agli angoli A, B, C, ed egual significato abbiano a_1, b_1, c_1 rispetto al primo triangolo derivato, a_2, b_2, c_2 rispetto al secondo, e a_3, b_3, c_3 rispetto al terzo.

(*) Altre soluzioni di questa questione vennero inviate dai Sigg. Prof.ri *G. Riboni, F. Viaggi.*

Dall'essere

$$\frac{\mathrm{BA'}}{\mathrm{A'C}} = m \quad \text{si trae} \quad \mathrm{A'C} = \frac{a}{m+1}$$

e dal triangolo AA'C si deduce:

$$\mathrm{AA'^2} = \mathrm{AC^2} + \mathrm{A'C^2} - 2\,\mathrm{AC}\,.\,\mathrm{A'C}.\cos \mathrm{C}.$$

Esprimendo cos C in funzione di a, b, c, e tenendo conto delle notazioni sopra indicate, dopo facili riduzioni si ha:

$$(m+1)^2\, a_1^2 = b^2 m^2 + (b^2 + c^2 - a^2)\, m + c^2.$$

Similmente si ottiene:

$$(m+1)^2\, b_1^2 = c^2 m^2 + (c^2 + a^2 - b^2)\, m + a^2$$
$$(m+1)^2\, c_1^2 = a^2 m^2 + (a^2 + b^2 - c^2)\, m + b^2.$$

Nello stesso modo partendo dal triangolo $A_1 B_1 C_1$ si esprimono a_2, b_2, c_2 in funzione di a_1, b_1, c_1, ai quali ultimi numeri sostituendo i valori dati dalle tre precedenti formole si ha:

$$(m+1)^4\, a_2^2 = c^2 m^4 + 2\,(c^2 + a^2 - b^2)\, m^3 + (5a^2 - b^2 - c^2)\, m^2 + \\ + 2\,(a^2 + b^2 - c^2)\, m + b^2$$

$$(m+1)^4\, b_2^2 = a^2 m^4 + 2\,(a^2 + b^2 - c^2)\, m^3 + (5b^2 - c^2 - a^2)\, m^2 + \\ + 2\,(c^2 + b^2 - a^2)\, m + c^2$$

$$(m+1)^4\, c_2^2 = b^2 m^4 + 2\,(b^2 + c^2 - a^2)\, m^3 + (5c^2 - a^2 - b^2)\, m^2 + \\ + 2\,(c^2 + a^2 - b^2)\, m + a^2.$$

Ora il triangolo A B C può essere simile ad $A_2B_2C_2$ o a $B_2C_2A_2$ o a $C_2A_2B_2$, dove le lettere che occupano uno stesso posto sono vertici omologhi a quelli indicati dalle lettere di egual posto nel triangolo A B C.

Nel primo caso per la similitudine devono sussistere le relazioni

$$\frac{a_2}{a} = \frac{b_2}{b} = \frac{c_2}{c}$$

Quadrando, sostituendo per a_2^2, b_2^2, c_2^2 i valori ora trovati, togliendo i denominatori, trasportando, riducendo e ordinando rispetto ad m, le dette relazioni si riducono a

$$\mathrm{A}\, m^4 + 2\,(\mathrm{A} - \mathrm{B})\, m^3 - (\mathrm{A} + \mathrm{B})\, m^2 - 2\,(\mathrm{A} - \mathrm{B})\, m + \mathrm{B} = o$$
$$\mathrm{C}\, m^4 + 2\,(\mathrm{C} - \mathrm{D})\, m^3 - (\mathrm{C} + \mathrm{D})\, m^2 - 2\,(\mathrm{C} - \mathrm{D})\, m + \mathrm{D} = o$$

dove

$$b^4 - a^2 c^2 = \mathrm{A}\,,\ a^4 - b^2 c^2 = \mathrm{B}\,.\ c^4 - a^2 b^2 = \mathrm{C}\,,\ c^2 b^2 - a^4 = \mathrm{D}.$$

Queste due equazioni ammettono evidentemente le due soluzioni comuni 1 e — 1. La soluzione $m = -1$ deve considerarsi come estranea. Abbassando le due equazioni precedenti al secondo grado, col dividerne i primi membri per $m^2 - 1$, si ottengono due equazioni quadratiche le quali non ammettono nessun'altra soluzione in comune.

Nel secondo caso si hanno altre due equazioni di quarto grado a cui deve soddisfare il valore di m, le quali ammettono soltanto il fattor comune $m^2 + 2m$. Escludendo la soluzione $m = o$, che non corrisponde a nessuna costruzione, si ha $m = -2$.

Nel terzo caso si ha $m = -\frac{1}{2}$.

Dunque esistono tre valori di m, e sono $1, -2, -\frac{1}{2}$, per ciascuno dei quali il secondo triangolo derivato riesce simile al triangolo fondamentale.

Partendo dal triangolo $A_2 B_2 C_2$ si possono esibire a_3, b_3, c_3 in funzioni di a_2, b_2, c_2, e poi, per mezzo delle formole precedenti, in funzione di a, b, c. Così si ha:

$$(m+1)^6 a_3^2 = a^2 m^6 + 3(a^2 + b^2 - c^2) m^5 + 3(4b^2 - c^2 - a^2) m^4 +$$
$$+ (9c^2 - 11a^2 + 9b^2) m^3 + 3(-a^2 - b^2 + 4c^2) m^2 + 3(-b^2 + c^2 + a^2) m + a^2$$

ecc., ecc.

Anche qui, come precedentemente, il triangolo A B C può essere simile al triangolo $A_3 B_3 C_3$ in tre maniere diverse. La prima maniera dà luogo a due equazioni, a cui i valori di m devono soddisfare, le quali non ammettono nessuna soluzione comune. La seconda, dopo facili riduzioni, dà luogo alle due condizioni seguenti a cui m deve soddisfare:

$$\mathrm{A}(m^6 + 3m^5 - 3m^4 - 11m^3 - 3m^2 + 3m + 1) +$$
$$+ \mathrm{C}(3m^5 + 3m^4 - 9m^3 - 12m^2 - 3m) = o$$
$$\mathrm{B}(m^6 + 3m^5 - 3m^4 - 11m^3 - 3m^2 + 3m + 1) +$$
$$+ \mathrm{A}(3m^5 + 3m^4 - 9m^3 - 12m^2 - 3m) = o$$

le quali sono soddisfatte dalle soluzioni comuni alle due equazioni

$$(1) \qquad m^6 + 3m^5 - 3m^4 - 11m^3 - 3m^2 + 3m + 1 = o$$
$$(2) \qquad 3m^5 + 3m^4 - 9m^3 - 12m^2 - 3m = o.$$

La seconda essendo divisibile per 3 ed ammettendo le soluzioni $m = o$, $m = -1$ che non verificano la prima, si riduce a

$$m^3 - 3m - 1 = o.$$

Il primo membro di questa equazione è un divisore esatto del primo membro dell'equazione (1), onde le (1) e (2) ammettono tre soluzioni comuni, che sono quelle dell'equazione cubica

$$m^3 - 3m - 1 = o.$$

Quest'equazione ha tutte e tre le sue radici reali, le quali si possono trovare col metodo esposto a pag. 266 della trigonometria del Serret, traduzione italiana di *A. Ferrucci*, 1856. Applicando questo metodo si trovano per m i tre valori seguenti:

$$m' = 2\,sen\,70^\circ\ ,\ m'' = -2\,sen\,10^\circ\ ,\ m''' = -2\,sen\,50^\circ.$$

La terza maniera di essere simili i triangoli A B C, $A_3 B_3 C_3$ dà luogo all'equazione cubica

$$m^3 + 3m^2 - 1 = 0.$$

le cui radici sono le reciproche di quelle dell'equazione precedente.

Dunque esistono sei valori di m, e sono i tre ora trovati ed i loro reciproci, per ciascun dei quali il terzo triangolo derivato riesce simile al triangolo fondamentale.

Si può inoltre notare che dalla definizione di m risulta che se un valore di m dà un triangolo derivato simile al fondamentale, anche il valore reciproco dà un triangolo derivato simile ad A B C.

Infine la costruzione del triangolo $A_1B_1C_1$ si eseguisce nel seguente modo: Da A′ si guidi la parallela a BB′, nello stesso senso di BB′ ed eguale a BB′. Detto E l'altro estremo di questo segmento parallelo a BB′, unendo A con E, sarà AA′E il primo triangolo derivato.

24. *Se* a, b, c, f *rappresentano numeri positivi e si ha*

$$ax^2 + bxy + cy^2 = f \text{ e } v^2 = x^2 + y^2$$

dimostrare elementarmente che i valori massimo e minimo di v^2 *sono dati dall'equazione* $(b^2 - 4ac)\, v^4 + 4f\,(a + c)\, v^2 - 4f^2 = o$.

A. LUGLI.

Dimostrazione del Prof. *M. Rocchetti* (*).

Dall'equazione $x^2 + y^2 = v^2$ si ha $x^2 = v^2 - y^2$; questo valore si sostituisce nella prima equazione e, tolto il radicale, si ottiene

$$y^4\,[b^2 + (a - c)^2] - y^2 \left\{v^2\,[b^2 + 2a\,(a - c)] - 2f\,(a - c)\right\} + \\ + a^2v^4 - 2afv^2 + f^2 = o.$$

Perchè il valore di y^2 sia reale, deve verificarsi la relazione

$$\left\{v^2\,[b^2 + 2a\,(a - c)] - 2f\,(a - c)\right\}^2 - \\ - 4\,[b^2 + (a - c)^2]\,(a^2v^4 - 2afv^2 + f^2) \geqq o;$$

sviluppando e riducendo, si ottiene

$$(b^2 - 4ac)\, v^4 + 4f\,(a + c)\, v^2 - 4f^2 \geqq o. \tag{1}$$

I valori che annullano il primo membro della (1) sono

$$v_1^2 = \frac{2f}{(a + c) - \sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \tag{2}$$

$$v_2^2 = \frac{2f}{(a + c) + \sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \tag{3}$$

Se $b^2 - 4ac = o$ il primo membro della (1) si annulla soltanto per $v^2 = \dfrac{f}{a + c}$, che rappresenta il minimo.

Se $b^2 - 4ac < o$, il valore (2) rappresenta il massimo e il valore (3) il minimo.

Se $b^2 - 4ac > o$, il valore (2) rappresenta il minimo e il valore (3) il massimo.

Dunque in tutti i casi i valori massimo e minimo di $x^2 + y^2$ sono dati dai valori (2) e (3), che annullano il primo membro della (1).

(*) Altre dimostrazioni vennero inviate dai Sigg. Prof.ri *S. Catania, F. Viaggi, U. Scarpis.*

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

A. I. G. T.

(A PROPOSITO DI UN LIBRO RECENTE)

Già da parecchi anni fu fondato in Inghilterra e ivi prospera un sodalizio (Association for the Improvement of Geometrical Teaching, o brevemente A. I. G. T.), avente per iscopo di promuovere e dirigere gli studii atti a far progredire i metodi d' insegnamento della Geometria, e, in particolare, di tener viva un'agitazione pacifica contro l' uso esclusivo nelle scuole degli *Elementi* di Euclide (1). Nell'epoca in cui esso venne istituito — quantunque centinaia di insegnanti non dissimulassero che sarebbero stati lieti di surrogare con qualche testo moderno quello del vecchio Alessandrino — i supremi Corpi esaminatori si ostinavano a esigere non solo che le proposizioni di Geometria elementare si studiassero nell'ordine adottato da Euclide, ma anche che si dimostrassero in modo identico a quello che egli aveva proposto. Per vincere questa resistenza l'A. I. G. T. ottenne l'appoggio dell'Associazione Britannica per l'avanzamento della Scienza: infatti al Congresso che questa tenne a Bradford nel 1873 fu letta una relazione (2) favorevole in massima alle idee dell'*Association*, in cui però è detto che in quel tempo non esisteva ancora un libro avente tale autorità da poter bandire Euclide, sono poi espresse alcune idee sull' indirizzo che tale libro dovrebbe avere (3) ed è preso impegno di

---

(1) Il discorso inaugurale fu pronunziato dal prof. HIRST e si legge tradotto in italiano, assieme al resoconto della prima seduta, a pag. 180-187 del T. IX (1871) del *Giornale di Matematiche*.

Si veggano anche sullo stesso argomento i due lavori:

HIRST. *Discorso sull'Introduzione agli Elementi di Geometria del Prof. Wright* (*Giornale di Matematiche*, T. VI (1868), pag. 369).

WILSON. *Euclide come testo di Geometria elementare* (l. c., pag. 361).

L'esempio della rivolta contro Euclide venne dall'alto. Infatti nel discorso pronunciato nel 1869 da Sylvester per l' inaugurazione del Congresso dell'Associazione Britannica leggiamo i periodi: « Io mi rallegrerei.... di vedere Euclide sepolto onorevolmente negli scaffali a una profondità maggiore di quella a cui può arrivare qualunque scandaglio, fuori della portata di qualunque scolaro..... Il primo studio di Euclide mi fece odiare la Geometria; ciò spero varrà a scusarmi se il modo con cui ho parlato di esso come libro di testo ha urtate le opinioni di alcuni fra i presenti (e so che ve ne sono alcuni che collocano Euclide come secondo in santità solo rispetto alla Bibbia e lo considerano come una delle basi della costituzione inglese). »

Quale contrasto fra questa opinione e l'ammirazione sconfinata che si è professata per Euclide durante tanto tempo, della quale fanno fede le parole che, a tredici secoli di distanza, scrissero il commentatore Proclo [« Se ad essi (gli *Elementi* di Euclide) tu vuoi aggiungere o togliere qualcosa, riconoscerai che ti allontani dalla Scienza e ti lasci fuorviare verso l'errore o l'ignoranza »] e Lagrange [« La geometria è una lingua morta, e colui che non la studia in Euclide fa lo stesso di chi volesse apprendere il Greco ed il Latino leggendo le opere moderne scritte in queste due lingue »]!

(2) Report of the Committee appointed to consider the possibility of Improvement in the Methods of Instructions in Elementary Geometry, the Committee consisting of Prof. Sylvester, Prof. Cayley, Prof. Hirst, Rev. Prof. B. Price, Prof. H. I. S. Smith, Dr. Spottiswoode, Mr. R. B. Hayward, Dr. Salmon, Rev. Prof. Townsend, Prof. Fuller, Prof. Kelland, Mr. J. M. Wilson and Prof. Clifford (secretary) (*Report of British Association*, 1873, p. 459-460).

(3) Non sarà forse senza interesse per il lettore il sapere che il principale fra i suggerimenti dati consiste nel consigliare di premettere all'insegnamento della Geometria pura quella disciplina che apparve nelle nostre scuole col nome di Geometria intuitiva, e che questo consiglio venne seguito.

ritornare sull'argomento quando questo libro fosse stato compiuto. L'A. I. G. T. — che fin dal 1873 aveva schizzato tale lavoro — non rimase insensibile a questo invito, e tre anni dopo fu in grado di presentare un *Syllabus of Plane Geometry*, sul quale nel 1876 fu fatta una relazione (1) lusinghiera al Congresso tenuto a Glasgow dall'Associazione Britannica (2); le conclusioni di questa relazione si rilevano dal seguente periodo che ci piace riportare: " La Commissione non esita a dare come risultato dell'esame complessivo che essa fece del *Syllabus*, che questo si manifesta redatto con tanta cura e con tali riguardi verso le condizioni essenziali del problema, da rendere desiderabilissimo che esso venga analizzato dettagliatamente da deputazioni autorizzate delle Università e degli altri grandi Istituti di istruzione del Regno onde deciderne l'adozione come testo degli esami di Geometria elementare dopo avervi introdotte quelle modificazioni che il detto esame può eventualmente dimostrare necessarie. „ Incoraggiata da questo successo, l'A. I. G. T. prese l'iniziativa di una petizione alle autorità di Cambridge e Oxford per ottenere una maggiore libertà nell'insegnamento della Geometria; questa petizione fu firmata da un gran numero di persone competenti ed ebbe per effetto l'autorizzazione di sostituire nell'insegnamento le dimostrazioni euclidee con altre del pari soddisfacenti.

Un permesso analogo fu concesso dagli altri Istituti. Onde oggidì in Inghilterra, un candidato a un esame, per rendere palese la verità di un teorema di Geometria, può adoperare qualsiasi ragionamento, purchè sintetico e basato su proposizioni che, anche nel testo Greco, precedono quella da dimostrare. Si può quindi dire che gli sforzi dell'A. I. G. T. siano stati coronati da esito soddisfacente per quanto concerne i rudimenti della Scienza dell'estensione.

A facilitare il raggiungimento del proprio scopo l'A. I. G. T. intraprese una serie di pubblicazioni.

La prima di esse è il *Syllabus* (London, Macmillan), a cui sopra si alluse e contiene in sunto ristrettissimo ciò che si deve sostituire ai primi sei Libri di Euclide: il disegno ivi schizzato fu eseguito sia dall'Associazione stessa coll'opera *The Elements of Plane Geometry* (London, Sonnenschein), sia dal Wilson coll'*Elementar Geometry* (London, Macmillan).

Ma questi lavori, per quanto pregevoli, non hanno un grande interesse per noi Italiani, che possediamo già parecchi buoni trattati i quali, pur essendo informati al metodo euclideo, insegnano il modo di arrecare agli *Elementi* quei miglioramenti che lo stato attuale della Scienza esige e i programmi ufficiali consentono. Per converso è stato recentemente pubblicato dalla stessa A. I. G. T. un nuovo opuscolo (*A Syllabus of Modern Plane Geometry*, 32 p., London, Macmillan) che può interessare noi pure, perchè esso non ha un esatto riscontro (per quanto so) nella letteratura nostra, potendosi designare come un riassunto di Geometria complementare.

Dopo un'*Introduzione*, in cui si trovano le nozioni sui segmenti rettilinei,

(1) V. *Report of British Association*, 1876, p. 8-13.

(2) La Commissione era la stessa di prima, coll'aggiunta del Prof. Henrici e dei Sigg. J. W. L. Glaisher e Hayward (relatore).

esso contiene un interessantissimo capitolo sulle *Proprietà dei Triangoli*, ove sono raccolti i teoremi fondamentali della teoria delle trasversali con molteplici applicazioni, e le proprietà fondamentali dei punti, rette, circonferenze connesse a un triangolo e che i moderni (specialmente Brocard, Lemoine, Taylor e Tucker) hanno per primi considerate. Segue poi un capitolo sulle *Forme armoniche* e uno sulle *Proprietà armoniche del quadrangolo e del quadrilatero completi*. I due capitoli seguenti concernono i *Cerchii* (poli e polari, cerchii ortogonali, assi radicali, centri di similitudine); il successivo alcuni *Problemi di massimo e minimo* trattati geometricamente e i due ultimi un cenno sui *Rapporti anarmonici* e il *Metodo della projezione*.

Ci sia permesso di chiudere questo articolo con due osservazioni.

L'una si riferisce a quanto nel *Syllabus* è detto intorno al principio di dualità. A nostro avviso, anche in un primo insegnamento della Geometria projettiva si può dimostrare che per ogni proposizione della Geometria di posizione ne esiste un'altra — che si dirà correlativa della prima — di cui enunciato e dimostrazione si ottengono dall'enunciato e dalla dimostrazione della prima mediante certi scambi di parole: basta infatti notare che ogni ragionamento che si fa nella Geometria di posizione nasce combinando opportunamente i postulati dello spazio relativi all'incidenza di punti, rette, piani, e che questi postulati sono a due a due correlativi, fatta eccezione per quelli che sono correlativi a sè stessi. Per conseguenza quanto è detto a pag. 15-16 dell'opuscolo in questione può rendersi più completo ed esatto. Esempi opportuni si potranno addurre per scemare le difficoltà che la precedente dimostrazione del principio di dualità può presentare ad un principiante a cagione della generalità di essa.

L'altra osservazione concerne gli elementi imaginarii. L'introdurre la nozione di punti imaginarii unicamente come un artificio per evitare la distinzione dei varii casi di una stessa figura, non ci sembra un sistema degno del patrocinio di un'Associazione pel progresso dell'insegnamento geometrico, anzi sembrerebbe meritevole di venir combattuto da essa. Noi possediamo già dei mezzi per definire e studiare gli elementi imaginarii, sia considerati in coppie sia presi separatamente, mezzi i quali non lasciano nulla a desiderare e per rigore e per chiarezza, e ai quali non manca che una maggior diffusione per divenire patrimonio di tutti. Già in Italia si è cominciato ad adottarli vuoi nell'insegnamento universitario vuoi nei trattati migliori; or non sarebbe forse un compito nobilissimo per l'A. I. G. T. quello di ottenerne l'adozione anche in Inghilterra? E questo compito è di tanto più grave momento inquantochè in alcune produzioni geometriche contemporanee si nota una rilassatezza di rigore, che — è forza riconoscerlo! — si riscontra assai più di rado in quelle di Analisi e alla diffusione della quale è urgente di opporsi: uno dei modi più efficaci perciò è secondo noi appunto il cacciare dal santuario della Geometria pura le ordinarie trattazioni degli elementi immaginarii (e, aggingiamo, degli elementi all'infinito) alle quali molti perdonano la deficiente esattezza grazie alla loro maggiore intelligibilità.

Genova, 23 Maggio 1889.

Gino Loria.

Associazione postale.

ANNO IV. SETTEMBRE-OTTOBRE 1889. FASCICOLO V.

PERIODICO

DI

MATEMATICA

PER

L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

DIRETTO

DA

DAVIDE BESSO

PROFESSORE DI CALCOLO INFINITESIMALE NELLA R. UNIVERSITÀ DI MODENA

AURELIO LUGLI

PROFESSORE DI MATEMATICA NEL R. ISTITUTO TECNICO DI ROMA

SOMMARIO:

Con una tavola litografata.

ROMA

TIPOGRAFIA ELZEVIRIANA

nel Ministero delle Finanze

1889

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par GUSTAV ENESTROM. Stockholm; N. 1 et 2, 1889.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. BATTAGLINI. Vol. XXVII. Maggio-Giugno. Napoli, B. Pellerano editore, 1889.

Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au ba calauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. DE LONGCHAMPS, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, LUCIEN LÉVY, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'Ecole preparatoire de Saint-Barbe. 3e Serie, Treizième année. N. 6, 7, Juin-Juillet. Paris, Librairie Ch. Delagrave, 1889.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par H. VUIBERT. 13e anné . N. 17, 18, 19, 20. Paris, M. Nony et Cie, 17 Rue des Ecoles, 1889.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo Dr F. GOMES TEIXEIRA professor na Academia Polytechnica do Porto. Vol. IX, n. 2. Coimbra, 1889.

Le Scuole secondarie, eco dell'Associazione nazionale fra gli insegnanti delle Scuole secondarie. Anno VI, n. 16, 17. Milano, 1889.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. MANSION, professeur à l'Université de Gand, et J. NEUBERG, professeur à l'Université de Liège. Tome neuvième. Juin-Juillet, 1889.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2a, Vol. 3, Fasc. 5, 6: Maggio, Giugno 1889.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo III, Fasc. 3, Maggio-Giugno 1889.

Rivista Scientifico-industriale compilata da GUIDO VIMERCATI. Anno XXI, n. 6 a 11. Firenze, 1889.

AGAMENNONE (G.) — Registratore di terremoti a doppia velocità (Rend. R. Acc. Lincei, 1889).

BARDELLI (G.) — Baricentri e momenti d'inerzia di superficie e di solidi di rotazione (Rend. R. Istituto Lom., 1889).

BELTRAMI (E.) — Sul principio di *Huygens* (Rend. R. Istituto Lom., 1889) — Sull'estensione del principio di D'Alembert all'elettrodinamica (Rend. R. Acc. Lincei, 1889) — Note fisico matematiche (Rend. Circolo mat. Palermo, 1889) — Sulla funzione potenziale della circonferenza (Id. id.).

BIGIAVI (C.) — Sulle equazioni differenziali lineari (Rend. R. Acc. Lincei, 1889).

CLASEN (B.-I.) — Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires e sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants. (Paris, Gauthier-Villars, 1889).

FAZZINI (U.) — *Elementi di Geometria* ad uso delle scuole industriali, agrarie e professionali. Scuola agraria di Scandicci presso Firenze, editrice, 1889.

GARDENGHI (G.) — Teoria matematica della previdenza. Parma, 1889 — Prezzo L. 6.

GIUDICE (F.) — Sulle funzioni iperboliche e circolari (Giorn. di Mat. di Battaglini. Vol. XXVII, 1889).

GUGLIUZZO FAZIO (A.) — Caratteri di divisibilità per 7, 13, 17 e pei numeri della forma $q.10+1$. Appunti. Palermo, Libreria L. Pedone Lauriel, 1889. — Prezzo: cent. 50.

LALBALETTRIER (G.) — *Trigonométrie rectiligne* suivie des principes de la nouvelle *Géométrie du triangle* à l'usage des Candidats aux Baccalauréats ès sciences et aux écoles du Gouvernement. Librairie Croville-Morant, Paris.

LONGCHAMPS (G. DE) — Sur le cercle de Joachimsthal (Mathesis, t. IX).

PADOVA (E.) — La teoria di Maxwell negli spazii curvi (Rend. R. Acc. Lincei, 1889).

PEANO (G.) — I principii di Geometria logicamente esposti (Torino, Bocca, 1889).

PONCINI (G.) — Lotto e lotterie. Parma, 1885. — Prolusione ad un corso libero di calcoli finanziari tenuto nella R. Università di Parma durante l'anno 1888-89. Parma, 1889.

TEIXEIRA (F. G.) — Sur le développement des fonctions implicites (Journal de math. Liouville-Resal-Jordan, 1889).

VIVANTI (G.) — Fondamenti della teoria dei tipi ordinati (Annali di mat., 1889).

Sopra una proprietà dei fuochi delle coniche

Sia F un fuoco di una conica fissa, e sia P un punto qualunque fisso nel piano di essa. Per F e per P facciamo passare una conica qualunque, che incontrerà la prima in quattro punti A, B, C, D. Se chiamo α, β, γ, δ gli angoli che la retta F P fa con le rette che congiungono F con A, B, C, D, mi propongo di dimostrare la seguente relazione che esiste fra questi angoli:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \text{costante}.$$

L'equazione della conica fissa in coordinate polari, prendendo F come polo e la retta F P come asse, è della forma

$$\rho = p \frac{1}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \quad (1)$$

in cui ρ è il raggio vettore, p è un parametro costante per una stessa conica, e è l'eccentricità, θ è il modulo ed ω è infine l'angolo che la retta F P fa con l'asse maggiore.

Ora cerchiamo l'equazione polare della conica variabile che passa per F e P. L'equazione generale di una conica in coordinate polari è

$$\rho^2 (a \cos^2 \theta + h \operatorname{sen} \theta \cos \theta + b \operatorname{sen}^2 \theta) + \rho (g \cos \theta + f \operatorname{sen} \theta) + c = o.$$

Ora, siccome questa conica passa pel polo F, dovrà essere evidentemente $c = o$, e l'equazione si riduce alla seguente:

$$\rho (a \cos^2 \theta + h \operatorname{sen} \theta \cos \theta + b \operatorname{sen}^2 \theta) + g \cos \theta + f \operatorname{sen} \theta = o. \quad (2)$$

Se vogliamo ora esprimere che la conica medesima passa per P, siccome P sta sull'asse polare, basterà fare $\theta = o$ nell'equazione (2), per ottenere la lunghezza F P. Si ricava F P $= \frac{-g}{a} =$ costante, la quale espressione indica che relazione deve esistere fra i coefficienti a e g.

Per trovare i punti d'incontro della conica fissa con la conica mobile, basterà dunque risolvere il sistema di due equazioni (1) e (2) a due incognite ρ e θ. Sostituendo il valore di ρ della (1) nella (2), avremo una equazione che contiene solamente la θ:

$$p\,\frac{(a\cos^2\theta + h\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + b\,\mathrm{sen}^2\theta)}{1 + e\cos(\theta - \omega)} + g\cos\theta + f\,\mathrm{sen}\,\theta = o. \quad (3)$$

Quest'equazione risoluta rispetto a θ darà i quattro valori α, β, γ, δ. Anzitutto moltiplichiamola per $1 + e\cos(\theta - \omega)$, e ponendo poi $\cos(\theta - \omega) = \cos\theta\cos\omega + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\omega$ con semplici riduzioni si perviene all'equazione:

$$\cos^2\theta\,(p\,a + e\,g\cos\omega) + \mathrm{sen}^2\theta\,(p\,b + e\,f\,\mathrm{sen}\,\omega) + \quad (4)$$
$$+ \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,(h\,p + e\,f\cos\omega + e\,g\,\mathrm{sen}\,\omega) + g\cos\theta + f\,\mathrm{sen}\,\theta = o.$$

Ora esprimiamo $\mathrm{sen}\,\theta$ e $\cos\theta$ in funzione della tangente dell'angolo $\frac{1}{2}\theta$. Si hanno le formole:

$$\cos\theta = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\theta}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\theta} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\theta}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\theta}.$$

Sostituendo questi valori e togliendo i denominatori si giunge finalmente alla seguente:

$$\left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\theta\right)^2\left(p\,a + e\,g\cos\omega\right) + h\,\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\theta\left(p\,b + e\,f\,\mathrm{sen}\,\omega\right) +$$
$$+ 2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\theta\left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\theta\right)\left(h\,p + e\,f\cos\omega + e\,g\,\mathrm{sen}\,\omega\right) +$$
$$+ g\left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\theta\right)\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\theta\right) + 2\,f\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\theta\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\theta\right) = o. \quad (5)$$

Questa equazione è di quarto grado in $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\theta$, e risoluta dà i valori $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha$, $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta$, $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma$, $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\delta$. Ma si vede facilmente che nella (5) il termine noto è $(p\,a + e\,g\cos\omega + g)$, ed il coefficiente di $\mathrm{tg}^4\frac{1}{2}\theta$ è $(p\,a + e\,g\cos\omega - g)$. Dunque per la teoria delle equazioni si ha:

$$\frac{p\,a + e\,g\cos\omega + g}{p\,a + e\,g\cos\omega - g} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta. \qquad (6)$$

Ora si è visto che $FP = \frac{-g}{a}$. Se chiamiamo M questo valore di FP, si ha $g = -a\,M$, e sostituendo nella (6) si ha finalmente:

$$\frac{p - M(e\cos\omega + 1)}{p - M(e\cos\omega - 1)} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta. \qquad (7)$$

Ma questa formola dimostra il teorema, perchè nel primo membro p, M, ω, e sono costanti.

Questo teorema è molto generale; infatti una conica è determinata da cinque condizioni. Ora la conica mobile è sottoposta a due sole condizioni, cioè di passare per F e P. Vi sarà dunque un numero di coniche tre volte infinito che soddisfa al teorema.

La conica mobile può essere un circolo, anzi vi saranno infiniti circoli che soddisfano al teorema, che sono quelli che passano per i due punti F e P.

Analogamente la conica fissa può essere un cerchio, ed in tal caso il fuoco F sarà il centro del cerchio.

Se la conica mobile fosse evanescente, cioè si riducesse a due rette, il teorema dovrebbe sussistere ancora. Una delle rette passerà per F ed una per P. Quella che passa per F incontri la conica nei punti A e B. Evidentemente si ha $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = 1$, e quindi rimane $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta$ = costante. Il quale teorema si può enunciare così: Se in una conica una retta passa per un punto fisso P incontrando la conica in coppie di punti C D, si ha:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}PFC\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}PFD = \text{costante. (*)}$$

Se FP fosse zero, nella formola (7) bisognerà porre $M = o$, e si può enunciare il seguente teorema: Se una conica qualunque passa per il fuoco F di una conica fissa, incontrandola in punti A, B, C, D, se chiamo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gli angoli che la tangente in F fa con

(*) Teorema di Mac Cullagh V. Salmon, *Sezioni coniche*, pag. 202, es. 8.

le rette che uniscono F con A, B, C, D, si ha sempre la relazione:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = 1. \qquad (8)$$

Questo teorema somministra un'elegante costruzione per risolvere il problema: Costruire una conica quando sieno dati tre punti ed un fuoco della medesima.

Sieno A, B, C i tre punti ed F il fuoco.

Per F conduco una retta qualunque F D. Mi propongo di trovare uno dei punti D in cui questa retta taglia la conica incognita.

Congiungiamo i punti A, B, C con F, e costruiamo un cerchio col centro in F e di raggio qualunque, il quale incontrerà le rette F A, F B, F C, F D rispettivamente nei punti A′, B′, C′, D′. Se descrivo la conica determinata dai cinque punti A′, B′, C′, D′, F, per il teorema antecedente se chiamo α, β, γ, δ gli angoli che fa la tangente in F a questa conica, colle quattro rette che partono da F, abbiamo:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = 1.$$

Se ora consideriamo la conica che passa per i tre punti A, B, C, e che è tangente in F alla conica ora costruita, questa incontrerà la conica incognita in quattro punti A, B, C, D′, tali che

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta' = 1$$

cioè

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta'.$$

o, ciò che è lo stesso, il punto D′ coinciderà col punto D, e sarà il punto d'incontro della retta F D colla conica ora descritta. Così si potranno trovare altri punti della conica da descriversi.

È facile vedere che senza bisogno di costruire le coniche di cui ho parlato, si può condurre la tangente in F, e determinare il punto d'incontro della retta F D con costruzioni semplicissime e colla sola riga, servendosi del notissimo teorema di Pascal sull'esagono iscritto.

Un altro corollario che si deduce dal teorema (8) è il seguente: Se i quattro punti d'incontro della conica mobile colla conica fissa

A, B, C, D sono infinitamente vicini, od in altre parole, se le due coniche hanno un contatto di terz'ordine, si avrà: $\mathrm{tg}^4 \frac{1}{2} \alpha = 1$, da cui $\alpha = \frac{\pi}{2}$; il che si enuncia dicendo:

Se una conica ha un contatto di terz' ordine con un' altra, e passa per il fuoco F di quest'ultima, la tangente in F è perpendicolare alla retta che congiunge F col punto di contatto.

I teoremi ora esposti hanno i loro corrispondenti col metodo delle polari reciproche. Ora indicherò soltanto il teorema reciproco al teorema (8).

Prendendo F per polo, alla conica fissa corrisponde un cerchio, essendo F il fuoco della conica medesima. Alla conica mobile corrisponderà una parabola, e la direzione della tangente in F corrisponderà alla direzione dell'asse della parabola. Dunque si può enunciare il teorema seguente:

Se quattro tangenti comuni ad un cerchio e ad una parabola fanno coll'asse di quest'ultima degli angoli $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, fra essi esiste la relazione

$$\mathrm{tg} \frac{1}{2} \alpha \ \mathrm{tg} \frac{1}{2} \beta \ \mathrm{tg} \frac{1}{2} \gamma \ \mathrm{tg} \frac{1}{2} \delta = 1.$$

Il teorema (7) ed i seguenti ammettono la reciproca.

Infatti se nella (6) poniamo

$$\frac{p\,a + e\,g \cos \omega + g}{p\,a + e\,g \cos \omega - g} = \text{costante},$$

si ricava immediatamente $\frac{-g}{a} =$ costante, il che dimostra che la conica mobile passa costantemente per un punto fisso P, la cui distanza da F avevamo chiamata con M.

Per terminare osservo che se la conica fissa è un cerchio, $p = \mathrm{R}$ raggio ed $e = o$, si ha

$$\mathrm{tg} \frac{1}{2} \alpha \ \mathrm{tg} \frac{1}{2} \beta \ \mathrm{tg} \frac{1}{2} \gamma \ \mathrm{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{\mathrm{R} - \mathrm{M}}{\mathrm{R} + \mathrm{M}}.$$

A. SAUVE.

SULLA TEORIA DELLE PARALLELE

È noto che se esiste un triangolo in cui la somma degli angoli sia eguale a due angoli retti, altrettanto avviene per qualsivoglia altro triangolo rettilineo, ed il postulato delle parallele, ossia che da un punto qualunque non può condursi che una sola parallela ad una retta data, è verificato. Per una via diversa si giunge qui ad una proposizione equivalente, sussistendo la quale, il postulato delle parallele è parimenti verificato. E senz'altro entro in materia, non presupponendo altre cognizioni all'infuori di quelle che d'ordinario si sogliono premettere alla teoria, e cioè dei soli primi teoremi dell'Euclide.

Teorema 1° — Due rette perpendicolari ad una medesima non possono incontrarsi.

Dimostrazione. — Se è possibile che le due rette A C, B D (Tav. III, fig. 1) s'incontrino in O, allora nella sovrapposizione del piano a sè stesso mediante una mezza rotazione attorno ad A B, le due rette C C′ e D D′ verrebbero ad avere un altro punto comune O′ dall'altra parte di A B senza coincidere, il che è contrario all'assioma della retta.

Teorema 2° — Due rette che fanno con una terza angoli ordinatamente uguali, non possono incontrarsi.

Dimostrazione. — Tirisi pel punto di mezzo della A B (fig. 2) la O G perpendicolare a C F, e si prolunghi fino ad incontrare l'altra retta D E nel punto H. Risulteranno i due triangoli O G A, O B H che dico essere congruenti: infatti essi hanno i lati O A ed O B uguali per ipotesi, e questi lati sono adiacenti ad angoli rispettivamente uguali, gli uni come opposti al vertice, gli altri per ipotesi. Sarà perciò, nei due triangoli, l'angolo in H uguale all'angolo in G, cioè la retta G H perpendicolare anche alla D E, e le due rette C F, D E perpendicolari ad una medesima non potranno incontrarsi.

Scolio 1° — Dalla uguaglianza di una coppia degli angoli formati attorno ai punti A e B (di due angoli *corrispondenti*), deriva quella degli angoli delle rimanenti coppie, e quella degli angoli *alterni* (tanto interni che esterni), e infine l'uguaglianza della somma degli angoli interni dalla stessa parte a due angoli retti.

Scolio 2° — Per un punto C (fig. 3), esterno ad una retta A B, si può dunque condurre almeno una retta E F che non incontri la A B, quale è ad esempio la perpendicolare alla retta C D, che sia condotta alla sua volta da C ad angolo retto sulla stessa A B. Ora: o la E F è l'unica retta del piano, fra tutte quelle tirate per C, che non incontri la retta data A B, o non lo è. Nel primo caso avverrà che qualsivoglia altra retta per C, facente colla E F un angolo qualunque, anche piccolissimo, incontrerà la A B (da una parte o dall'altra del punto D), e la E F stessa potrà dirsi costituire la posizione limite di una retta che ruoti in qualunque senso attorno a C, in modo da incontrare la A B successivamente in punti sempre più lontani da D; che se invece vi sono altre rette per C, oltre la E F, che non incontrano la A B, allora queste saranno necessariamente in numero infinito, e cioè, com'è manifesto, tutte quelle comprese in un certo angolo (che avrà E F per bisettrice), i cui lati sieno le ultime rette, a partire dalla E F stessa e dalle due parti di questa, che non incontrano la A B. Siano H K ed H′ K′ le due rette nominate, per modo che qualsivoglia retta per C non compresa entro l'angolo H C H′ e nel suo opposto, incontri la A B da una banda o dall'altra del punto D, e precisamente a distanza tanto maggiore da D quanto minore è la inclinazione sua sulla H K o sulla H′ K′: si potrà allora dire anche qui che ciascuna di queste due rette è la posizione limite di una retta mobile che da C si diriga successivamente a punti sempre più lontani della retta A B.

Esprimeremo questo fatto dicendo con ardita ma comoda metafora che la E F nell'un caso, o le H K ed H′ K′ nell'altro, incontrano la retta data A B a *distanza infinita*.

Definizione. — Due rette che s'incontrano a distanza infinita diconsi *parallele:* e deriva dalle considerazioni precedenti, che per un punto C esterno ad una retta data A B o si potrà condurre a questa una sola parallela, o se ne potranno condurre due (una per ciascun verso), simmetriche rispetto alla perpendicolare calata da C sulla A B.

Teorema 3° — Se il punto di concorso di due rette (di cui una sia fissa e l'altra ruoti attorno ad un punto) si allontana indefinitamente, l'angolo da esse formato finisce col divenire più piccolo di qualunque angolo dato.

Dimostrazione. — Siano le rette A B, C L (fig. 4) fra loro parallele, e sia ω un angolo piccolo a piacere: una retta condotta per C, e che faccia colla C L l'angolo ω, incontrerà per l'ipotesi la retta A B in un punto M. Prendasi ora su questa, a partire da M, un segmento M N uguale a C M e tirisi la C N; sarà allora, nel triangolo C M N, l'angolo in N uguale all'angolo M C N, e però minore dell'angolo ω.

Una retta C M che ruoti attorno a C, in modo che il suo punto d'intersezione colla A B vada successivamente ed indefinitamente allontanandosi, può quindi fare con questa un angolo minore di ogni angolo dato, C. V. D.

Teorema 4° — Una parallela alla retta A B in C, è parallela alla stessa in ogni altro suo punto.

Dimostrazione. — Sia C D (fig. 5) una parallela ad A B condotta per il punto C: dico che la parallela ad A B (nello stesso senso in cui lo è la C D, per esempio verso destra) tirata per un altro punto qualunque M od M' della C D, coincide con questa retta.

Si tiri infatti per M una retta che faccia colla C D un angolo ω piccolo a piacere, e congiungasi C con un punto qualunque E della detta retta situato al di sopra della A B: sarà per ipotesi la C E una secante della A B, ed a maggior ragione lo sarà la M E che dovrà incontrare la A B in un punto situato a sinistra di quello in cui concorrono la A B stessa e la C E. Che se il punto considerato è M', alla sinistra di C, si tiri per esso la M' E' che faccia colla M' C un angolo ω' piccolo a piacere, e se è possibile essa non incontri la A B, rimanendo cioè tutta al di sopra di questa retta (nel caso della figura). Allora se si conduce per C la C F facente colla C D un angolo uguale ad ω', questa (Teorema 2°) non incontrerà la M' E', ossia sarà tutta da una stessa parte, e precisamente al di sopra (nel caso nostro) della medesima, e però non potrà incontrare neppure la A B che rispetto alla M′ E′ stessa giace dall'altra parte. Non sarebbe dunque C D la parallela alla A B tirata pel punto C e nel verso A-B, come è stato supposto: è perciò necessario l'ammettere che la M′ E′ tirata comunque per M′ e al di sotto della M′ C D, incontri la retta data A B.

Concludendo: le parallele alla retta A B, nel verso da A a B, passanti per M od M′, sono adunque le M D ed M′ D′ coincidenti con la C D parallela in C, C. V. D.

Corollario. — Se la C D è l'unica parallela ad A B che si possa tirare per C, ossia se è parallela ad A B in entrambi i sensi A B e B A, anche per ogni altro punto della C D passerà una retta unica parallela ad A B, che sarà la stessa C D. Ma se questa è l'unica parallela ad A B per M, essa sarà perpendicolare alla M L condotta per M ad angolo retto sulla A B, laonde « *Se due rette* A B, C D *perpendicolari ad una medesima retta* C H *sono parallele, qualunque altra retta* M L *perpendicolare ad una di esse è perpendicolare anche all'altra* ».

Teorema 5° — Se un quadrangolo è rettangolo, i suoi lati opposti sono fra di loro uguali.

Dimostrazione. — Sia il quadrangolo L M M′ L′ (fig. 6) avente, per ipotesi, tutti gli angoli retti, e, se è possibile, sia la M L maggiore della M′ L′: allora sovrapponendo il rettangolo a sè stesso dopo averlo rovesciato, e posto L L′ sovra L′ L, dovrebbe il punto M cader fuori della L′ M′ ed il punto M′ entro il segmento L M, in guisa che la M M′, nella nuova posizione, traverserebbe il lato M′ M del rettangolo primitivo, e però non sarebbe perpendicolare alle L M, L′ M′ contrariamente all'ipotesi.

Analogamente si dimostrerebbe l'uguaglianza degli altri due lati opposti.

Corollario. — Da questo teorema e dal precedente corollario deriva immediatamente la proposizione « *Se due rette sono parallele fra di loro in entrambe le loro opposte direzioni, esse sono dappertutto ugualmente distanti, ossia si possono condurre loro delle perpendicolari comuni, le quali sono uguali* ».

Reciprocamente abbiamo il teorema seguente.

Teorema 6° — Se due rette ammettono due perpendicolari comuni, esse sono parallele in entrambe le loro opposte direzioni.

Dimostrazione. — Sieno le A C, B D (fig. 7) perpendicolari, per ipotesi, all'una e all'altra delle A B, C D: per il teorema precedente sarà A C = B D ed A B = C D. Condotta allora la diagonale C B, si avranno i due triangoli congruenti A B C e D C B, ne' quali saranno perciò uguali gli angoli A B C e B C D opposti ai lati uguali A C e B D. Adunque la diagonale C B del rettangolo dato forma coi lati opposti di questo angoli alterni interni uguali. Ma con la giusta posizione di due, tre, ecc., rettangoli congruenti ad A B D C, come è indicato nella figura, si formano altri rettangoli A E F C, A G H C, ecc., della stessa natura, nei quali cioè le diagonali C E, C G, ecc., formano angoli uguali coi lati opposti; e d'altronde aumentando indefinitamente il numero dei rettangoli, l'angolo C G A finisce col diventare più piccolo di ogni angolo dato (Teorema 3°): dunque anche l'angolo G C H, uguale a C G A, ha la stessa proprietà, e la retta C H essendo la posizione limite della diagonale C G allorchè il punto G si allontana indefinitamente sulla A B è parallela ad A B.

Che poi la C H sia parallela a questa retta anche nella direzione opposta B A, si deduce dal fatto che essa è perpendicolare ad A C, donde segue che quanto avviene da una parte di questa retta, si ripete simmetricamente dall'altra parte. Laonde le due rette A B, C D perpendicolari, per ipotesi, alle due A C, B D, sono parallele in entrambe le loro direzioni, C. V. D.

Scolio 1° — Se in un quadrangolo A B D C i due angoli A e B sono retti, ed i lati opposti A C, B D ed A B, C D sono fra di loro uguali, eziandio i rimanenti angoli del quadrangolo saranno retti, ed i suoi lati opposti saranno perciò paralleli.

Scolio 2° — Nelle ipotesi dello scolio precedente, tirando la diagonale A D, deriva inoltre che i triangoli A B D, D C A sono tra loro uguali, e però che in ciascuno la somma dei tre angoli è uguale a due retti. Ma se ciò avviene, il postulato euclideo delle parallele è vero, come fu avvertito: sicchè quando sieno verificate le sopradette ipotesi, si può affermare senz'altro l'esistenza o la verità del postulato medesimo.

Sassari, 18 febbraio 1889.

A. Suini.

ESEMPI GEOMETRICI DI LIMITI

Nel secondo fascicolo di questo periodico il signor Benucci ha mostrato un esempio geometrico di limite, considerando la serie dei triangoli, ciascuno dei quali ha per lati le mediane di quello che lo precede.

Io mi propongo con questa Nota di generalizzare quello studio, giovandomi anche di alcuni risultati ottenuti dal signor Besso nella Nota inserita in questo periodico « Di alcune proprietà del triangolo » anno II, fascicolo I.

1. Sia dato il triangolo ABC (Tav. III, fig. 8ª), si dividano i lati AB, BC, CA nei punti C′, A′, B′, in modo che sia

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B} = m$$

essendo m un numero dato qualsivoglia, che riterremo positivo quando A′, B′, C′ sieno sui lati, negativo quando sui loro prolungamenti.

Da A′ si conduca A′D eguale e parallela alla BB′; il triangolo AA′D dico che ha per lati i tre segmenti AA′, BB′, CC′.

Infatti si congiunga D con B′ e si prolunghi fino ad incontrare in P il lato AB; sarà DB′ eguale e parallela a BA′, ed inoltre si avrà:

$$\frac{BP}{PA} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{BA'}{A'C} = m,$$

da cui risulta che la figura A′CB′P è un parallelogrammo, e però

$$A'C = B'P \quad \text{e} \quad BC = DP.$$

Essendo BC eguale e parallela a DP, sarà pure BP eguale e parallela a CD, e poichè $BP = AC'$ (non potendosi dividere un segmento in un rapporto dato che in un sol modo rispetto alla grandezza delle parti) sarà AC' eguale e parallela a CD, e però anche AD eguale e parallela a CC'. c. d. d.

2. Dal punto M, in cui la $A'D$ incontra il lato AC, si conduca la parallela a BC fino ad incontrare in N il lato AB; dico che il triangolo AMN è ottenuto da $A'AD$ nello stesso modo come questo fu ottenuto da ABC (bisogna però pensare di percorrere il contorno in senso opposto a quello con cui si è percorso il primo).

Infatti essendo

$$\Delta\,.\,A'MC \sim MB'D$$

si ha

$$\frac{DM}{MA'} = \frac{DB'}{A'C} = \frac{BA'}{A'C} = m$$

e però il lato AM del triangolo AMN ha la proprietà enunciata.

Il lato AA' è segato in Q dalla DP in modo che

$$(1) \qquad \frac{A'Q}{QA} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{PQ}{QB'} = m,$$

ed inoltre si ha che

$$(2) \qquad \frac{PN}{NB} = \frac{B'M}{MC} = m,$$

per cui combinando la (1) colla (2) si ha

$$PN : NB = PQ : QB'.$$

Quest'ultima proporzione mostra che la NQ è parallela alla BB', e quindi anche alla $A'D$, e che il quadrilatero $MNQD$ è un parallelogrammo, e quindi $MN = DQ$.

Per provare che anche il terzo lato AN è eguale al segmento $A'S$, che nel triangolo $A'AD$ congiunge il vertice A' col punto S dividente il lato AD nel rapporto m, si osservi che essendo

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AS}{SD} = m$$

la $A'S$ è parallela ad AB; inoltre si ha

$$\frac{BC'}{BN} = \frac{AP}{BN} = \frac{AB'}{MC} = \frac{m+1}{m} = \frac{BC}{BA'},$$

e però NA' sarà parallela a CC' e quindi ad AD; allora essendo il quadrilatero $NA'SA$ un parallelogrammo, si conchiude che

$$AN = A'S. \qquad \text{c. d. d.}$$

3. Si noti che il triangolo AMN è simile ad ABC, e che applicando ripetutamente questo procedimento si formerà una serie indefinita di triangoli ABC, $AA'D$, AMN, ecc., ecc., che indicheremo brevemente con

$$\alpha) \qquad T \quad T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad \ldots\ldots$$

tali che quelli di posto dispari saranno simili fra di loro, e così pure quelli di posto pari.

4. Stabiliamo geometricamente il rapporto del triangolo $AA'D$ al triangolo dato ABC, e però quello di uno qualunque della serie (α) al suo precedente.

Dalle proporzioni

$$\frac{MC}{MB'} = \frac{AB'}{B'C} = \frac{1}{m}$$

si ricava componendo

$$\frac{MC}{B'C} = \frac{1}{m+1} \qquad \frac{B'C}{AC} = \frac{m}{m+1}$$

e però

$$\frac{MC}{AC} = \frac{m}{(m+1)^2}.$$

Ora

$$\frac{\Delta\,.\,A'MC}{\Delta\,.\,A'AC} = \frac{MC}{AC} = \frac{m}{(m+1)^2}, \quad \frac{\Delta\,.\,A'AC}{\Delta\,.\,ABC} = \frac{A'C}{BC} = \frac{1}{m+1}.$$

Quindi, moltiplicando membro a membro queste proporzioni, si ha

$$(\beta) \qquad \frac{\Delta\,.\,A'MC}{\Delta\,.\,ABC} = \frac{m}{(m+1)^3}.$$

Ma dalla

$$\frac{\mathrm{A\,C}}{\mathrm{M\,C}} = \frac{(m+1)^2}{m}$$

dividendo si ottiene:

$$\frac{\mathrm{A\,M}}{\mathrm{M\,C}} = \frac{m^2+m+1}{m}$$

e quindi

$$\frac{\Delta\,.\,\mathrm{A\,M\,A'}}{\Delta\,.\,\mathrm{A'\,M\,C}} = \frac{\mathrm{A\,M}}{\mathrm{M\,C}} = \frac{m^2+m+1}{m}, \quad \frac{\Delta\,.\,\mathrm{A'\,A\,D}}{\Delta\,.\,\mathrm{A'\,M\,A}} = \frac{\mathrm{A'\,D}}{\mathrm{A'\,M}} = m+1.$$

Moltiplicando membro a membro si ha

$$(\gamma) \qquad \frac{\Delta\,.\,\mathrm{A'\,A\,D}}{\Delta\,.\,\mathrm{A'\,M\,C}} = \frac{(m^2+m+1)\,(m+1)}{m}.$$

Moltiplicando di nuovo la (β) per la (γ) si ha

$$(\delta) \qquad \frac{\Delta\,.\,\mathrm{A'\,A\,D}}{\Delta\,.\,\mathrm{A\,B\,C}} = \frac{\mathrm{T_1}}{\mathrm{T}} = \frac{m^2+m+1}{(m+1)^2}.$$

Si riconosce facilmente, ponendo eguale ad y l'espressione $\frac{m^2+m+1}{(m+1)^2}$, e risolvendo poi l'equazione di secondo grado in m così ottenuta, che l'espressione stessa diventa minima per $m = 1$, cioè quando ogni triangolo della serie (α) abbia per lati le mediane di quello che lo precede; essa non ha alcun massimo, potendo annullarsi il denominatore per $m = -1$, nel qual caso le rette A A′, B B′, C C′ diventano parallele rispettivamente ai lati opposti.

5. Quando il valore del rapporto (δ) sia < 1, si potrà considerare il limite a cui tende la somma di tutti i triangoli della serie (α); ora condizione necessaria e sufficiente affinchè $\frac{m^2+m+1}{(m+1)^2} < 1$ è che sia $m > o$, ossia che i punti A′ B′ C′ sieno sui lati del triangolo A B C; in questo caso se si prende come unità di misura il triangolo stesso ABC, si ha

$$S = 1 + \frac{m^2+m+1}{(m+1)^2} + \frac{(m^2+m+1)^2}{(m+1)^4} + \ldots\ldots$$

e però

$$\lim S = \frac{m^2+2m+1}{m} = \frac{(m+1)^2}{m}.$$

Nella stessa ipotesi di $m > o$ si potrebbero determinare separatamente i limiti a cui tendono le due somme di triangoli simili di posto pari e dispari nella serie (α).

6. La formola $\frac{m^2+m+1}{(m+1)^2}$ non cambia di valore se in luogo di m si pone $\frac{1}{m}$, il che significa che se i lati del triangolo ABC si dividono nel rapporto m percorrendo il perimetro in senso opposto a quello tenuto finora, il triangolo formato con le nuove rette AA′, BB′, CC′ sarà equivalente a quello formato coi primitivi segmenti.

Si osservi che questi triangoli equivalenti non saranno in generale eguali, poichè si riconosce facilmente che il triangolo ABC dovrebbe essere equilatero.

Volendo studiare la variazione dei triangoli della serie (α) basterà restringere la variazione di m fra i limiti -1 e $+1$; a due valori differenti di m compresi in quest' intervallo corrispondono differenti valori per i triangoli, giacchè l'equazione $\frac{m^2+m+1}{(m+1)^2}=k$, dove k è una costante, dà due radici reciproche per m, alle quali corrispondono, per ciò che si è detto, triangoli equivalenti. Al variare di m da -1 a $+1$ i triangoli decrescono da valori infinitamente grandi, fino ai $\frac{3}{4}$ del triangolo dato quando $m=1$. Al valore $m=o$ corrisponde il triangolo dato ABC.

7. Fissato il valore di m sarà facile calcolare i lati dei triangoli simili al dato ABC, che nella serie (α) occupano i posti dispari; chiamando x il lato omologo di $a=BC$, nel triangolo T_2, si avrà:

$$\frac{T_2}{T}=\frac{x^2}{a^2}=\frac{(m^2+m+1)^2}{(m+1)^4},$$

da cui

$$x=a\,\frac{m^2+m+1}{(m+1)^2}.$$

Anche nella serie dei lati omologhi pei triangoli simili che occupano il posto dispari nella (α) si potrà considerare il limite della somma quando $m > o$; si avrà:

$$S = a\,\frac{m^2 + m + 1}{(m+1)^2} + a\,\frac{(m^2 + m + 1)^2}{(m+1)^4} + \ldots\ldots$$

$$\lim S = \frac{a\,(m^2 + m + 1)}{m}.$$

E poichè i perimetri di triangoli simili stanno come due lati omologhi, indicando con $\sum p$ la somma dei perimetri de' triangoli simili che nella serie (α) occupano posto dispari, avremo

$$\sum p : \frac{a\,(m^2 + m + 1)}{m} = (a + b + c) : a$$

e però

$$\lim \sum p = \frac{(a + b + c)\,(m^2 + m + 1)}{m}.$$

Pavia, 18 aprile 1889.

FRANCESCO PANIZZA.

SULLA RICERCA DEL VOLUME DELLA PIRAMIDE TRIANGOLARE
quando sono date le lunghezze dei suoi spigoli

La formola che dà il volume di una piramide triangolare in funzione delle lunghezze dei suoi spigoli si trova in una Memoria di *Eulero* del 1758, in una di *Lagrange* del 1773, nell'opera di *Mascheroni:* « Problemi per gli agrimensori », Pavia, 1793, in una nota della Geometria di *Legendre*, ed in molti libri moderni. Essa si suole ricavare da quella che esprime il volume d'una piramide triangolare in funzione delle lunghezze di tre spigoli contigui e degli angoli ch'essi formano due a due, la quale si ottiene applicando delle formole di trigonometria sferica.

Ma il calcolo del volume d'una piramide triangolare, date le lunghezze dei suoi spigoli, era stato già effettuato dal *Tartaglia,* e nel seguente modo, che è molto elementare (*). Sia S A B C (Tav. III, fig. 9) una piramide triangolare e sieno date le lunghezze de'suoi spigoli. Condotta la S D perpendicolare ad A B, e la C E pure perpendicolare ad A B, e da D la parallela a C E fino al punto H, in cui essa incontra la parallela ad A B condotta per C, e infine, nel piano D S H, la S M perpendicolare a D H, sarà S M l'altezza della piramide quando si prenda per base la faccia A B C. Ora, essendo noti i lati dei due triangoli A B C, S A B, si possono calcolare, applicando proposizioni di Euclide, i segmenti B E, B D e le due altezze C E, S D; così sarà nota la C H, eguale alla differenza di quei due segmenti, e saranno pur noti i due lati S D, D H del triangolo S D H. Il terzo lato di questo triangolo si ricaverà poi dal triangolo S C H, rettangolo in H, del quale sono noti il cateto C H e la ipotenusa S C. Calcolati così i tre lati del triangolo, si potrà valutarne l'altezza S M.

D. Besso.

(*) *La quarta parte del general trattato de' numeri et misure*, di Nicolò Tartaglia; nella quale si riducono in numeri quasi la maggior parte delle figure, così superficiali, come corporee della Geometria: et oltre a ciò s'applicano alla materia, o si metteno in atto prattico, cose molto utile a tutte le qualità delle persone, et infinitamente desiderate dei studiosi delle Divine Mathematice. Venezia, 1560.

SOLUZIONE DELLE QUISTIONI 24, 25, 26

24. *Se* a, b, c, f *rappresentano numeri positivi e si ha:*

$$a x^2 + b x y + c y^2 = f \quad ed \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

dimostrare elementarmente che i valori massimo e minimo di r^2 *sono dati dall'equazione*

$$(b^2 - 4 a c) r^4 + 4 f (a + c) r^2 - 4 f^2 = 0.$$

A. Lugli.

Altra soluzione del Prof. *F. Viaggi.*

Si supporrà che a, b, c, f siano semplicemente numeri reali.

Se $f = 0$, la prima equazione si scinde in due lineari omogenee a coefficienti reali, se $b^2 - 4 a c \geqq 0$, o complessi, se $b^2 - 4 a c < 0$; e secondo che si verifichi l'uno o l'altro caso r^2 ammette due valori minimi eguali a 0, o non ne ammette; valore massimo non ne ha in nessun caso.

Se f è diverso da zero, possiamo supporlo positivo, senza togliere con ciò nulla alla generalità; e tale ipotesi faremo. Ricorrendo alla variabile θ legata alle x, y dalle relazioni

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta$$

(le quali possono sostituire la seconda equazione proposta), ed eliminando x, y tra esse e la prima equazione data, si ottiene

$$r^2 = \frac{f}{a \cos^2 \theta + b \operatorname{sen} \theta \cos \theta + c \operatorname{sen}^2 \theta}$$

e da questa, con l'aiuto dell'angolo ausiliario ψ determinato dalle

$$\operatorname{sen} \psi = \frac{a - c}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \qquad \cos \psi = \frac{b}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}$$

dopo agevoli trasformazioni si deduce

$$r^2 = \frac{2 f}{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \operatorname{sen} (\psi + 2 \theta)}$$

dalla quale, se chiamiamo r_1^2, r_2^2 il massimo e il minimo di r^2,

$$r_1^2 = \frac{2 f}{a + c - \sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \quad r_2^2 = \frac{2 f}{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \qquad (\alpha)$$

che son radici dell'equazione

$$(b^2 - 4 a c) r^4 + 4 f (a + c) r^2 - 4 f^2 = 0.$$

Per accettare i valori di r_1^2. r_2^2 bisogna evidentemente che essi sieno positivi: quindi

$$\begin{array}{lllll}
\text{se} & a+c<0 & \text{e} & b^2-4ac<0, & r^2 \text{ non ha nè massimo nè minimo} \\
» & a+c<0 & » & b^2-4ac>0 & \multirow{3}{*}{$\left.\right\}$, r^2 ha solo minimo} \\
» & a+c=0 & & & \\
» & a+c>0 & » & b^2-4ac>0 & \\
» & a+c>0 & » & b^2-4ac<0, & r^2 \text{ ha massimo e minimo.}
\end{array}$$

Nel caso $b^2 - 4ac = 0$, del quale non ci siamo occupati nello specchietto precedente, si ha la formola seguente:

$$r^2 = \frac{2f}{a + c + [a + c]' \operatorname{sen} (\psi + 2\theta)}$$

nella quale $[a + c]'$ sta a rappresentare il valore assoluto di $a + c$; se a (e quindi c) è negativo, r^2 ha sempre valore negativo, quindi r immaginario ed r^2 non ha nè massimo nè minimo; se a (e quindi c) è positivo, si possono accettare le formole (α).

25. *Dato un cerchio ed un triangolo circoscritto al medesimo, condurre una coppia di tangenti al cerchio che stacchi dai lati del triangolo dato segmenti proporzionali ai tre segmenti dati.*

A. Sauve.

Soluzione del Prof. *F. Palatini* (*).

Cominciamo dallo studiare il luogo dei punti tali, che la coppia di tangenti che da ognuno di essi può condursi ad una conica data stacchi sopra due tangenti fisse della medesima segmenti proporzionali a due segmenti dati.

Sia K la conica data, che supporremo dotata di centro, e siano m_1, m_2 i due segmenti dati e supponiamo dapprima che le tangenti fisse t_1, t_2 siano parallele fra loro. Si vede allora senza veruna difficoltà che il luogo cercato è costituito dalle quattro rette parallele a t_1, t_2, le quali tagliano internamente ed esternamente la distanza delle due tangenti date nel rapporto m_1, m_2.

Ma siano ora comunque poste le due tangenti date t_1, t_2 e sia la t_1 destinata a contenere i segmenti corrispondenti ad m_1. Conducendo per un punto qualunque S del piano un fascio di raggi e facendo corrispondere fra loro i due punti d'incontro di ciascun raggio colla curva data, otteniamo sopra questa due forme punteggiate projettive, e conducendo le tangenti alla K in tutti i suoi punti e facendo corrispondere fra loro le tangenti che toccano la curva in punti corrispondenti delle due punteggiate, otteniamo due fasci di raggi del secondo

(*) Un altra soluzione di questa quistione, oltre le due che qui si pubblicano, venne inviata dal Sig. Prof. *S. Catania*.

ordine projettivi. Se poi seghiamo uno di questi due fasci colla tangente t_1 e l'altro colla t_2, otteniamo sopra queste tangenti due punteggiate projettive. I punti d'incontro delle coppie di raggi corrispondenti dei due fasci del secondo ordine si trovano evidentemente in linea retta, cioè sulla polare s di S; siccome poi i fasci stessi oltre ad essere projettivi sono anche in involuzione, così si vede che nelle nostre due punteggiate sopra t_1, t_2 sono segmenti determinati da punti corrispondenti quelli staccati sulle due rette dalla coppia di tangenti alla nostra curva uscenti da un punto qualunque della s. Le nostre due punteggiate sopra t_1, t_2 sono simili, cioè hanno proporzionali i segmenti corrispondenti, se si corrispondono fra loro i punti all'infinito delle medesime. Ora questi punti all'infinito si corrisponderanno, quando vi saranno due tangenti uscenti da un punto di s parallele alle due tangenti t_1, t_2, ciò che avviene evidentemente quando s contiene il polo L (v. Tav. III, fig. 10) della retta DE parallela alla corda di contatto BC di t_1, t_2 e simmetrica a questa corda rispetto al centro della curva, cioè quando s contiene il punto L simmetrico ad A (punto d'incontro di t_1, t_2) rispetto al centro della curva, giacchè le tangenti che escono da tal punto L sono precisamente parallele alle t_1, t_2.

Da quanto abbiamo fin qui detto possiamo adunque concludere: ogni retta passante per L è tale, che le coppie di tangenti che escono dai punti di essa determinano sulle t_1, t_2 segmenti proporzionali, e solo punti posti sopra una di tali rette godono di questa proprietà. Dunque il luogo da noi cercato sarà o una retta od un sistema di rette passanti per L. Sia g la retta od una delle rette che costituiscono il nostro luogo, per cui ogni coppia di tangenti condotta da un punto di g alla K segna sopra t_1, t_2 due segmenti x, y tali che:

$$x : y = m_1 : m_2 .$$

Quindi se sono $R S$, $H K$ i due segmenti determinati dalle tangenti alla curva, parallele alla g, sulle t_1, t_2, avremo:

$$\mathrm{RS : HK = RS : QT} = m_1 : m_2.$$

Ma i triangoli Q P R, S P T sono evidentemente simili, per cui si ha:

$$\mathrm{QT : PT = RS : PS}$$

e siccome per la simiglianza dei triangoli P S T, M L N si ha:

$$\mathrm{PT : PS = MN : ML}$$

così risulterà infine:

$$\mathrm{ML : MN = RS : QT} = m_1 ; m_2$$

Dunque se g è una delle rette i cui punti soddisfano al problema, essa deve tagliare t_2 in un pun'o tale, che sia:

$$\mathrm{ML : MN} = m_1 : m_2$$

Reciprocamente è facile vedere che ogni retta la quale passi per L e seghi t_2 nel modo anzidetto è tale, che le tangenti alla K ad essa parallele determinano sopra t_1, t_2 due segmenti che stanno fra loro come $m_1 : m_2$. Difatti sia g una tal retta, R S ed H K = Q T siano i segmenti determinati rispettivamente sopra t_1, t_2 dalle due tangenti parallele alla g. Essendo simili i triangoli P S T, Q P R, M L N, avremo:

$$\mathrm{SR : QT = PS : PT = ML : MN} = m_1 : m_2.$$

E siccome noi abbiamo dimostrato che, data una retta qualunque passante per L, ogni coppia di tangenti condotte da un suo punto qualunque alla curva stacca sopra t_1, t_2 due segmenti di rapporto costante, così si vede che la retta g la quale passa per L ed il cui punto all'infinito soddisfa al problema, è una retta che appartiene al luogo che stiamo studiando.

Ora sulla t_2 vi sono due punti N tali, che sia:

$$\mathrm{ML : MN} = m_1 : m_2$$

perciò il nostro luogo è l'insieme di due rette passanti per L e che si costruiscono nel modo indicato. Notiamo che di queste due rette una è esterna e l'altra è interna all'angolo P L M, per cui una di esse taglia e l'altra non taglia la curva.

Se poi si vuole che il rapporto delle coppie di segmenti determinati sopra t_1, t_2 dalle coppie di tangenti che soddisfano al problema sia eguale a quello di m_1, m_2 senz'altra specificazione, cioè senza determinare su quali delle due tangenti fisse si devono trovare i segmenti che corrispondono ad m_1 e su quale quelli che corrispondono ad m_2, allora naturalmente il luogo si compone di un'altra coppia di rette passanti per L e che si ottengono con costruzione analoga a quella indicata per le altre due rette già considerate.

Risolto così questo problema, noi possiamo risolvere molte altre questioni riguardanti la costruzione di coppie di tangenti che stacchino sopra certe rette date, tangenti ad una o a più coniche, segmenti con dati rapporti, e fra tali questioni entra appunto la 25ª proposta nel Periodico e che noi tratteremo, come abbiamo fatto per il problema sopra risolto, considerando una conica qualunque dotata di centro, invece di un cerchio.

Sia dunque A B C (fig. 11) il dato triangolo circoscritto alla nostra conica K e si voglia condurre una coppia di tangenti tali, che i segmenti determinati sopra A B, B C, C A stiano fra loro ordinatamente come tre segmenti dati m_1, m_2, m_3. Perciò costruisco le due rette L M, L N, luogo dei punti dai quali tirando le coppie di tangenti alla curva, esse determinano sopra A B, B C coppie di segmenti che stanno fra loro come $m_1 : m_2$. Poi costruisco le due rette P Q, P R luogo dei punti, dai quali tirando alla curva le coppie di tangenti, esse determinano sopre B C, C A coppie di segmenti che stanno fra loro come $m_2 : m_3$. Le due coppie di rette così costruite si tagliano in quattro punti. Sia H uno di questi punti, da cui si conduca la coppia di tangenti alla curva e siano ordinatamente a, b, c i segmenti che essa stacca dai lati A B, B C, C A. Allora si ha evidentemente:

$$a : b = m_1 : m_2, \qquad b : c = m_2 : m_3$$

cioè:

$$a : b : c = m_1 : m_2 : m_3.$$

Evidentemente le due rette, luogo dei punti dai quali conducendo le coppie di tangenti alla curva, esse staccano sopra A B, A C segmenti proporzionali ad m_1, m_3 devono passare per i quattro punti E, F, G, H d'intersezione delle due coppie di rette prima considerate, cioè saranno le diagonali del quadrangolo semplice E F G H. Dunque si vede che in generale vi sono quattro coppie di tangenti che soddisfano al problema. Se poi osserviamo che delle due rette L M, L N una taglia la curva e l'altra no, ciò che avviene pure delle altre due rette P Q, P R, vediamo che almeno tre dei punti E, F, G, H cadono sempre fuori della curva, (potendo essere interno solo quello in cui si tagliano le due rette che segano la conica) e quindi tre coppie di tangenti che soddisfano al problema esistono sempre (sono sempre reali), mentre la quarta può non esistere (essere immaginaria).

Prima di chiudere notiamo che, applicando le considerazioni svolte nel risolvere il nostro primo problema al caso in cui la conica data sia un'iperbole e le tangenti fisse t_1, t_2 i suoi assintoti, osservando che il punto L simmetrico ad A (che in questo caso è il centro della curva) rispetto al centro della conica è A stesso, si può facilmente concludere che in ogni iperbole, tirata una retta qualunque per il centro, le coppie di tangenti che dai punti di questa possono condursi alla curva determinano sui due assintoti segmenti proporzionali. E siccome le due punteggiate projettive simili, che abbiamo considerato sopra t_1, t_2 nel risolvere quel problema, in questo caso hanno unito il loro punto d'intersezione, così si vede pure che queste due punteggiate sono prospettive e perciò le rette che ne congiungono i punti corrispondenti formano un fascio di raggi, il cui centro dovrà giacere evidentemente all'infinito.

Soluzione del Prof. *F. Viaggi.*

Lemma. — « Se una circonferenza è inscritta in una striscia e da un punto « qualunque del suo piano si conducono le tangenti, il segmento da esse stac- « cato su un lato della striscia è quarto proporzionale dopo la distanza del « punto dall'altro lato, l'altezza della striscia, e il segmento d'una delle tangenti « compreso tra il punto di contatto e quello scelto. »

Sia O la circonferenza che tocchi in X, Y i lati XX′, YY′ d'una striscia; le tangenti condotte da un punto V incontrino in M, N il lato XX′, e la VM incontri in S l'altro lato e tocchi in T la circonferenza; sia I il punto all'infinito dei lati della striscia.

Fissato il senso positivo della rotazione, si hanno le seguenti eguaglianze d'angoli:

$$\mathrm{N\,O\,V} = \mathrm{X\,O\,M} = \mathrm{M\,O\,T} = \mathrm{I\,O\,S} = \frac{1}{2}\mathrm{X\,O\,T}$$

perciò i fasci O (N X M I), O (V M T S) sono eguali e

$$(\mathrm{N\,X\,M\,I}) = (\mathrm{V\,M\,T\,S});$$

dalla quale eguaglianza di rapporti anarmonici, ricordando che I è punto all'infinito e osservando che X M = M T, si deduce

$$\mathrm{N\,M} = \frac{\mathrm{V\,T} \cdot \mathrm{M\,S}}{\mathrm{V\,S}}$$

e questa dimostra il lemma, perchè M S, V S sono proporzionali all'altezza della striscia e alla distanza di V dal lato Y Y'.

Corollario. « Date due tangenti fisse d'un cerchio, il luogo geometrico dei « punti tali che le coppie di tangenti condotte da essi stacchino sulle tangenti « fisse segmenti proporzionali a segmenti dati, coincide col luogo dei punti le « cui distanze dalle tangenti parallele alle fisse sono inversamente proporzionali « ai segmenti dati: risulta quindi di due rette, delle quali una segante del cer- « chio l'altra no ».

Ciò premesso, occupiamoci del problema proposto.

Del triangolo dato si costruisca il simmetrico rispetto al centro del cerchio; le coppie di tangenti condotte dai quattro punti, le cui distanze dai lati del secondo triangolo sono inversamente proporzionali ai segmenti dati, risolvono il problema.

I quattro punti sono o tutti e quattro esterni o tre esterni e uno interno alla circonferenza: quindi le soluzioni possono essere quattro o tre.

26. *Se una piramide ha per base un poligono regolare, la somma dei quadrati degli spigoli laterali è eguale a tante volte la somma dei quadrati della congiungente il vertice col centro della base e del raggio del cerchio circoscritto al poligono base, quanti sono i lati di questo poligono.*

Soluzione del Prof. *A. de Zolt* (*).

Sia A B C... la base, V il vertice della piramide, M la projezione normale di V sul piano della base, O il centro di questa.

(*) Altre soluzioni vennero inviate dai Sig. Prof. *L. Bosi*, *S. Catania*, *F. Palatini*, *G. Russo*, *U. Scarpis*, *F. Viaggi* e dal Sig. *L. Tessari*.

Dai triangoli O A M, O B M, ecc.; si hanno le n eguaglianze

$$AM^2 = MO^2 + OA^2 - 2MO.OA\cos AOM,$$

$$BM^2 = MO^2 + OB^2 - 2MO.OB\cos BOM,$$

. . . .

che, sommate membro a membro, danno l'eguaglianza

$$\sum AM^2 = nMO^2 + nOA^2 - 2MO\sum OA\cos AOM.$$

Ora, un poligono, i cui lati siano equipollenti ai segmenti O A, O B, O C,... è chiuso, è quindi nulla la sua projezione su qualunque retta, in particolare sulla O M; ossia è

$$\sum OA\cos AOM = 0,$$

e però

$$\sum AM^2 = nMO^2 + nOA^2.$$

Infine, aggiungendo ai due membri di questa eguaglianza nMV^2, si ha, per il teorema pitagorico

$$\sum AV^2 = nOV^2 + nOA^2;$$ c. d. d.

QUISTIONI PROPOSTE. (*)

27. Dimostrare che, se l'equazione

$$t^4 - 4t^3 + \alpha t^2 - 4t + \beta = 0$$

ha le quattro radici positive, dev'essere

$$\alpha = 6, \quad \beta = 1.$$

28*. Se da un punto, interno ad un poligono equilatero, si guidano segmenti terminati ai lati, uno per ciascun lato, e tutti egualmente inclinati sui rispettivi lati, la somma di tutti questi

---

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono specialmente destinate agli alunni delle nostre Scuole secondarie e di esse si pubblicheranno soltanto le soluzioni inviate dagli alunni stessi.

segmenti è indipendente dalla posizione di quel punto, e, per un dato poligono, essa è minima quando i segmenti sono perpendicolari ai rispettivi lati.

29'. Se nella formola

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

si moltiplicano i due termini della frazione per $1 - \cos a$, e poi si sostituisce al coseno il suo valore in funzione del seno, si trova

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \pm\frac{1\mp\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}}{\operatorname{sen} a},$$

la quale dà quattro valori per $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$, mentre si può dimostrare a priori che, quando è dato $\operatorname{sen} a$, la tangente di $\frac{a}{2}$ ha due soli valori distinti; come si spiega l'apparente contraddizione?

30'. Se nella eguaglianza $\operatorname{tang}(\pi - a) = -\operatorname{tang} a$ si pone $a = \frac{\pi}{2}$, si ottiene $\operatorname{tang}\frac{\pi}{2} = -\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}$, da cui $\operatorname{tang}\frac{\pi}{2} = 0$; dove sta l'errore?

31'. Il volume d'una sfera supera d'un decimetro cubo quello del tetraedro regolare in essa inscritto; calcolare la lunghezza del raggio a meno d'un millimetro.

32'. L'angolo al vertice d'un triangolo isoscele è di 178° 50'; calcolare a meno di $\frac{1}{1000000}$, e senza valersi di tavole trigonometriche, il rapporto della base al perimetro.

D. Besso.

33. Esprimere in funzione del raggio della sfera circoscritta al dodecaedro (icosaedro) regolare, la somma dei quadrati delle rette che congiungono un vertice del dodecaedro (icosaedro) con quelli che non fanno parte delle facce concorrenti al vertice scelto.

34'. L'area di un triangolo qualunque è uguale al prodotto dei segmenti che il cerchio inscritto, o uno dei cerchi ex-iscritti, determina su uno dei lati del triangolo, per la cotangente della metà dell'angolo opposto.

G. Russo.

35*. I numeri della forma $4a + 1$ divengono quadrati perfetti per $a = 0, 2, 6, 12, 20, \ldots$

P. Montesano.

36*. Se m è pari ed a è un numero dispari qualunque, il binomio $a^m + 1$ diviso per 4 e 8 dà sempre per resto 2.

37*. Trovare il resto della divisione per 13 di 7^{100}.

38*. Dimostrare che se in un poligono $A_1 A_2 \ldots\ldots A_n$ si dividono i lati, nel medesimo senso, internamente od esternamente nei punti $A'_1, A'_2, \ldots\ldots A'_n$ in modo che sia

$$A_1 A'_1 : A'_1 A_2 = A_2 A'_2 : A'_2 A_3 = \ldots\ldots, = A_n A'_n : A'_n A_1,$$

i due poligoni $A_1 A_2 \ldots\ldots A_n$, $A'_1 A'_2 \ldots\ldots A'_n$ hanno lo stesso centro di gravità.

A. Lugli.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Arithmetices principia nova methodo exposita a JOSEPH PEANO in R. Accademia militari professore, Analysin infinitorum in R. Taurinensi Atheneo docente (Torino, Bocca, 1882; pag. XVI-20).

Una delle idee più grandiose e geniali di Leibnitz è il progetto di creare una scrittura simbolica universale, nella quale tutti i concetti complessi fossero espressi, secondo regole fisse, mediante i segni convenzionali di pochi concetti elementari. Di questa scrittura simbolica universale, destinata ad essere un modo di esprimersi indipendente dalle varie lingue e analogo a quello usato nella numerazione scritta, egli credeva potersi trarre per la Logica, la Metafisica e qualunque altra scienza astratta, dei vantaggi simili a quelli che dal calcolo algebrico ottenne la Matematica. Guidato dall'analogia, egli credeva che con questi simboli, partendo dalle più semplici relazioni scambievoli delle idee, si potesse trasformarle, combinarle e giungere così a nuove relazioni, si potessero cioè trarre delle conseguenze e formulare dei giudizii; la cui verità dipenderebbe unicamente dall'avere applicato a dovere il calcolo logico. E, quasi trascinato dall'affascinante suo sogno, egli soggiungeva: In questa lingua non si potrebbe esprimere che la verità!

Io non so se vi sia finora stato qualcuno dotato di sufficiente vigoria intellettuale per mettere ad esecuzione con tutta questa ampiezza il concetto di Leibnitz, nè ho gran fiducia che la mente umana abbia ancora raggiunto un livello abbastanza alto per poter creare uno strumento con cui chiunque possa ragionare sempre esattamente. Ma invece, ridotto il disegno di Leibnitz a più modeste proporzioni, si può asserire che esso fu attuato dai cultori di quell'importante disciplina che si chiama Logica matematica o Calcolo della logica (*). Questa dottrina, esatta quanto la Matematica, ma più astratta, e però suscettibile di più numerose applicazioni, fu coltivata con successo dal Boole e da altri in Inghilterra, dallo Schröder in Germania, e fece il suo ingresso in Italia or fa un anno colla pubblicazione, per parte del Peano, dell'opera *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann preceduto dalle operazioni della Logica deduttiva* (Torino, Bocca, 1888).

Quello però che — almeno per quanto sappiamo — non era ancora stato fatto, era di mostrare come il Calcolo della logica si potesse vantaggiosamente applicare all'esposizione completa di qualche teoria: finora si avevano soltanto esempi sparsi di ragionamenti eseguiti con quel metodo, i quali, appunto per essere stati scelti evidentemente ad arte, potevano difficilmente persuadere i più restii ad ammettere la bontà del metodo stesso. Quindi nessuna argomentazione più persuasiva avrebbe potuto arrecare il Peano per far bene accogliere la dottrina ch'egli ha patrocinata presso di noi, del presentare l'opuscolo al quale è consacrata questa nota bibliografica.

In questo lavoro sono anzitutto riassunti, sotto forma concisa ma lucidissima, quei principii di Logica matematica necessari per l'intelligenza di ciò che segue. È della massima importanza che il lettore si sforzi di impadronirsene, anzi di famigliarizzarsi con essi; fissi specialmente la sua attenzione sull'ultima parte (pag. XIII-XVI) dell'introduzione (intitolata *Logicae notationes*), ove troverà esposta sotto forma nuova la teoria delle rappresentazioni di cui il Dedekind fece sì largo uso nell'opuscolo *Was sind und was wollen die Zahlen?* (**)

Dopo di ciò il Peano entra in argomento. Egli non si occupa, come fece Dedekind, di pervenire alla nozione di numero col puro ragionamento; ma ammette l'esistenza di enti, che chiama *numeri*, definiti da certe proprietà caratteristiche, le quali bastano e per generare tutto il gruppo partendo da un suo elemento (l'*unità*) e per stabilire tutte le proprietà del gruppo stesso. I teoremi sull'addizione formano il principal soggetto del § 1 degli *Arithmetices principia;* invece la sottrazione, la moltiplicazione, l'elevazione a potenza e la divisione sono studiate risp. nei §§ 2, 4, 5 e 6; le dimostrazioni, esposte tutte con i simboli logici, hanno per caratteristica comune un'applicazione dell'induzione completa. Nel § 7 sono raccolti, sotto il titolo di *Theoremata varia* gli enunciati di alcune proposizioni della teoria dei numeri, la dimostrazione delle quali è consigliata al lettore come esercizio utilissimo. Il § 8, ispirato agli stessi con-

---

(*) Sull'importanza della Logica matematica io mi sono già espresso in questo stesso periodico (T. III, pag. 115, nota) e nel mio discorso *I Poligoni di Poncelet* (Torino, 1889, pag. 47 e 48).

(**) Cf. questo periodico, T. III, pag. 155.

cetti che informano il Libro VII di Euclide, ha per iscopo i *Numerorum rationes*, cioè studia le proprietà dei rapporti e le operazioni su di essi. Il § 3 è dedicato ai teoremi sui numeri massimi e minimi di una classe. Dei due rimanenti (§ 9, *Rationalium systemata. Irrationales.* § 10, *Quantitatum systemata*) l'uno ha per iscopo di estendere ai numeri irrazionali i teoremi già dimostrati per gli interi e i rapporti, l'altro contiene una serie di teoremi relativi alla teoria di Cantor dei gruppi lineari di punti. Nell'introdurre i numeri irrazionali, l'A. si attiene in sostanza al ben noto procedimento che porta ordinariamente il nome di Dedekind; perciò egli introduce anzitutto (pag. 15) la nozione di limite superiore di una classe di numeri razionali e definisce la natura delle relazioni fra un numero razionale e un limite superiore espresse dai segni

$$> \quad = \quad < ;$$

la definizione di irrazionale si può leggere poi nella prop. 5, § 9, che dice:

Quantità è ogni ente il quale si possa identificare al limite superiore d'una classe di numeri razionali, classe che non sia nulla e tale che esistano dei numeri razionali maggiori di tutti i suoi elementi. Nelle quantità sono compresi tutti i numeri reali positivi, razionali e irrazionali, eccettuati 0 e ∞.

Nel terminare questo annuncio (che, se tempo e spazio non ci fossero mancati, avremmo trasformato in un commento) degli *Arithmetices principia* non possiamo a meno di avvertire il lettore a non scoraggiarsi per le difficoltà che gli presenterà l'intelligenza del metodo usato dall'A. e di consigliarlo a tradurre in linguaggio comune gli enunciati delle proposizioni e le loro dimostrazioni (*): così facendo, non solo egli potrà persuadersi *ad oculo* dei vantaggi nella concisione che il Calcolo della logica offre, ma potrà anche farne nuove applicazioni ad altri argomenti a cui esso è evidentemente applicabile (**).

Mantova, 27 giugno 1889.

GINO LORIA.

GIUSEPPE GARDENGHI — *Teoria matematica della previdenza.* — Parma, Tip. Battei, 1889. — Prezzo L. 6.

Fino dal 1886 il Prof. Giuseppe Gardenghi pubblicò negli Annali di previdenza del Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio un molto lodato studio *Sull'ordinamento tecnico delle Società di mutuo soccorso*, nel quale si risolvevano, col semplice sussidio dell'Aritmetica e in base a certe ipotesi di mortalità e morbosità, i problemi che più interessano la previdenza. Quello studio fece nascere nella mente dell'A. il concetto di altro lavoro di maggior mole, in cui i problemi stessi fossero trattati colla generalità, che si raggiunge soltanto col-

(*) Aggiungiamo qui l'indicazione di alcuni errori di stampa che potrebbero sfuggire a qualche lettore inesperto:

pag.	XII,	linea	2,	invece di	$[\chi]\ \varepsilon\ a$	si legga	$[\chi\ \varepsilon]\ a$
»	»	»	23,	»	$[\varepsilon\ \alpha]\ y$	»	$[\varepsilon]\ \alpha\ y$
»	XIII,	»	18,	»	ɜ	»	ε
»	1,	prop.	3,	»	a, b, c	»	a, b
»	»	»	4,	»	a, b	»	a, b, c
»	12,	»	21,	»	D (a, b)	»	Q (a, b).

(**) Tale è tutta la Geometria di Euclide.

l'uso del calcolo algebrico, e fossero svolte, come l'A. medesimo dice, *nuove considerazioni, che difficilmente si potrebbero esporre col solo sussidio dell'Aritmetica.*

Questo nuovo ed importante lavoro, che ci sta ora davanti in una bella e corretta edizione del Battei di Parma, non è puramente teorico, come il suo titolo potrebbe far credere, ma teorico-pratico, in quanto vi si trovano non soltanto le discussioni e le formule teoriche, ma ben'anche tutti i sussidi di tavole e di esempi numerici, che possono facilitare l'uso pratico delle formule stesse; e queste sono sempre ridotte alle espressioni più opportune per le applicazioni numeriche. Però, sebbene la parte pratica del libro, pel fine a cui mira, sia della maggiore importanza, e, per la competenza grande dell'A. sulla materia, sia riescita altamente lodevole per accuratezza e lucidità, e gli abbia imposto un lavoro considerevole e spesso ingrato, l'indole di questo periodico consiglia di prendere in esame speciale soltanto ciò che si trova in esso di interessante sotto l'aspetto teorico. Per questa ragione non mi tratterrò qui nè sulle numerose tabelle di calcoli numerici, di cui l'A. ha opportunamente e pazientemente corredato il suo libro, nè sull'ultima parte del suo lavoro, che è di vitale interesse per le società di mutuo soccorso, come quella che concerne il loro ordinamento economico e in cui si sviluppano, corredandoli di esempi, diversi metodi per la formazione dei loro bilanci tecnici, dai quali soltanto si possono dedurre un giudizio sicuro sul loro stato economico e le norme per i provvedimenti, che potessero essere necessari a garantire ai soci l'adempimento degli impegni presi verso di loro.

L'A. premette una introduzione, nella quale sono esposte con brevità e chiarezza le nozioni e i teoremi elementari del calcolo delle probabilità, dei quali si dovranno fare applicazioni nel corso del libro. Opportunamente, a raggiungere la chiarezza nella esposizione di concetti complessi, qui e dovunque occorre, egli fa uso, anzi che di molte parole, di esempi pratici bene scelti come quello, con cui, dopo avere accennato alle probabilità di tener conto dei gradi differenti di indecisione di tutti gli avvenimenti possibili per calcolare la probabilità matematica di uno qualunque di essi, chiarisce come gli avvenimenti stessi possono decomporsi in altri, ciascuno dei quali abbia un egual grado di indecisione.

Il calcolo delle probabilità non è rigorosamente applicabile agli avvenimenti sociali, perchè non si conoscono a priori nè il numero dei casi possibili, nè quello dei favorevoli ad un dato avvenimento, nè è dato apprezzare i loro gradi relativi di indecisione. Si può soltanto, mediante ripetute osservazioni, avere del rapporto, che dà il valore della probabilità matematica di uno qualunque di essi, una cognizione tanto più approssimata, quanto è maggiore il numero delle osservazioni fatte, come si deduce dalla *legge dei grandi numeri*. Con ciò l'A. nel § 2 prova la necessità e chiarisce il significato delle tavole statistiche relative agli avvenimenti sociali, che si hanno a considerare; tavole, il grado di attendibilità delle quali dipenderà, a tenore delle cose esposte, da due elementi, cioè dal numero degli avvenimenti osservati e dalla omogeneità loro. Le tavole di mortalità e di sopravvivenza difettano spesso grandemente per amendue le parti, ed è perciò utile fare uso dei metodi di correzione e di interpolazione, che l'A. svolge nei §§ 4 e 5 dopo avere nel § 3 date le note definizioni del quoziente di mortalità relativo ad un dato periodo di tempo e del quoziente istantaneo di mortalità, nonchè quello del quoziente di vitalità da lui introdotto.

Il metodo di correzione delle tavole di mortalità esposto tanto graficamente quanto algebricamente consiste nel tener successivamente conto di diverse serie di osservazioni fatte tutte ad eguali intervalli di tempo e nel completarle mediante l'interpolazione per sostituire poi ai risultati diretti della osservazione le medie aritmetiche di quelli, che si riscontrano nelle diverse serie così completate. — Quanto al metodo di interpolazione, l'A. parte dall'ipotesi che, almeno entro limiti abbastanza vicini, il quoziente istantaneo di mortalità aumenti in progressione geometrica d'anno in anno, e giunge per una via nuova e spedita alla formula nota del Gompertz, che contiene, come si sa, tre costanti da determinare quando siano noti i numeri dei superstiti in tre età differenti. Della bontà di questa formula, cioè del vantaggio, che si ha a farne uso, si ha una riprova nel § 9, in cui da un confronto fatto tra i risultati ottenuti colla formula stessa, quando i tre numeri necessari per la determinazione delle costanti siano tutti desunti da una certa tavola di mortalità, e i dati di diverse tavole, si rileva come quelli differiscano dai dati della tavola prescelta meno che questi fra di loro.

Col § 6, che definisce scientificamente i concetti di *vita probabile* di una persona e di *vita media* di un gruppo di persone, si chiude la parte generale e preparatoria del libro.

L'A., che, mirando principalmente all'utilità pratica del suo lavoro, ha voluto metterlo al livello delle colture matematiche più limitate, ha avuto ricorso al calcolo infinitesimale allora soltanto che questo era necessario a completare teoricamente un concetto, e lo ha fatto in guisa che le parti della monografia, in cui del calcolo medesimo si fa uso e che (quando non sono rimandate in nota o contraddistinte da annotazioni speciali) sono, per comodo del lettore, impresse in carattere minuto, possono essere tralasciate, in quanto tutto il rimanente costituisce un insieme completo ed intelligibile per sè. Gli elementi del calcolo delle probabilità, le tavole di mortalità e morbosità e le formule note dell'interesse composto costituiscono per il resto, a un di presso, i fondamenti ed il materiale tutto, con cui l'A. procede ad edificare la propria teoria, nella quale egli discute e risolve colla maggiore chiarezza e generalità tutti i problemi di previdenza, che si attengono direttamente all'uomo, e ai quali provvedono le società di mutuo soccorso. Così nei §§ 7, 10 e 13 si trovano le espressioni dei valori attuali per le singole età di un contributo vitalizio costante e di un'annualità vitalizia immediata a favore dei viventi al principio, alla metà e alla fine di ogni anno; nel § 11, premesse alcune considerazioni e formule relative all'interesse continuo, si tratta delle annualità o meglio rendite vitalizie pagabili per intervalli eguali ad $\frac{1^{\text{simo}}}{m}$ di anno e, trovando il limite per $m = \infty$ e facendo uso della formula di Eulero, che esprime un integrale definito per mezzo di una somma, si ottiene una espressione approssimata della rendita vitalizia continua; nei §§ dal 14 al 18 inclusivamente si trovano le espressioni analitiche delle annualità vitalizie differite (pensioni di vecchiaia) e si dimostrano alcuni teoremi interessanti ed originali, dai quali risulta come, calcolate le pensioni vitalizie decorribili da una data età, se ne possano dedurre immediatamente quelle relative ad un'altra decorrenza qual si voglia. Nei §§ dal 19 al 22 i teoremi relativi alla probabilità composta sono applicati a calcolare il valore attuale di una pensione a favore di due individui da pagarsi fin che entrambi siano morti, e delle probabilità composte medesime si dà una nuova ed elegante rappresentazione geometrica. La determinazione di una legge ausiliare di sopravvivenza con individui fittizi, per ciascuno dei quali la probabilità di sopravvivere dopo un certo intervallo di tempo sia eguale alla probabilità che sopravviva almeno una tra due persone di data età, non è nuova, ma è ottenuta qui con metodo nuovo e praticamente utile. I problemi relativi alla assicurazione della vita vengono risoluti in alcuni dei capitoli seguenti nella loro maggiore generalità, ed è notevole la espressione data nel § 28 del valore attuale di una somma da pagarsi al momento della morte di una persona in funzione di quello di una rendita vitalizia continua. Le numerose questioni relative alle casse per le vedove sono trattate nei §§ dal 29 al 31, nei quali si dimostrano, fra altro, alcune relazioni tra i valori dei diversi sussidi, le quali giovano in pratica perchè facilitano ed abbreviano i calcoli numerici. Nel § 32 l'A., da una questione propostasi, prende opportunità a trattare con larghezza notevole la nota teoria delle annualità ordinarie. Finalmente si determinano le espressioni dei valori attuali dei sussidi in caso di malattia in base ad una legge di morbosità data dall'A. medesimo nel volume, che ho avuto già occasione di ricordare; ed anche le formule relative a tali sussidi sono ridotte a quelle per le annualità vitalizie, il che permette di estendere ai sussidi stessi la maggior parte delle conclusioni, a cui si è giunti parlando delle pensioni di vecchiaia. E non posso qui omettere di notare come nel libro le formule, relative ai valori attuali di un contributo vitalizio costante, siano opportunamente collegate con quelle, che danno i valori attuali dei sussidi riferibili ai diversi casi considerati, per modo che i calcoli numerici fatti per gli uni servono in parte per gli altri e reciprocamente.

Le matematiche applicate ai problemi sociali hanno ancora pochi cultori in Italia e più nel campo degli economisti che in quello dei matematici. È da augurarsi che il Gardenghi, il quale colla monografia, che abbiamo rapidamente esaminata, ha senza dubbio aggiunto ai molti, che già aveva, un nuovo e grande titolo di benemerenza verso le società di mutuo soccorso, ne acquisti pure un altro verso la scienza dando nel nostro paese un forte e durevole impulso a questo ramo di matematiche, che ha un così grande avvenire.

GREGORIO RICCI.

Pubblicazioni ricevute dalla Direzione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par GUSTAV ENESTRÖM. Stockholm: n. 3, 1889.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. BATTAGLINI. Vol. XXVII. Luglio-Agosto. Napoli, B. Pellerano editore, 1889.

Journal de Mathématique élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. DE LONGCHAMPS, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, LUCIEN LÉVY, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'Ecole préparatoire de Saint-Barbe. 3e Serie, Treizième année. N. 8, 9. Août-septembre. Paris, libraire Ch. Delagrave, 1889.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2a, Vol. III, Fasc. 7, 8. Luglio, Agosto 1889.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion, professeur à l'Université de Gand, et J. Neuberg, professeur à l'Université de Liège. Tome neuvième. Août-Septembre, 1889.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo III, Fasc. 4 e 5, luglio-agosto e settembre-ottobre, 1889.

Bustelli (A. M.) — L'insegnamento dell'aritmetica e della geometria secondo i nuovi programmi ufficiali per le scuole primarie e popolari. S. Lapi, Città di Castello, 1889 — Prezzo L. 1. 40.

Carrara (B.) — La coincidenza dei due metodi d'approssimazione di Newton e Lagrange nelle radici quadrate irrazionali dei numeri interi. Torino, Paravia, 1889.

Carrozzini (A.) — Introduzione allo studio dell'algebra. Opera ad uso delle scuole secondarie. Urbino, 1889 — Prezzo L. 2. 50.

D'Ocagne (M.) — Quelques proprietés de l'ellipse, deviation, écart normal. — Détermination du rayon de courbure de la courbe intégrale. — Solution de la question de mathématiques élémentaires proposée au concours général de 1887 (Nouvelles annales de mathématiques, 1888) — Calcul direct des termes d'une réduite de rang quelconque d'une fraction continue périodique (C. R. Académie des sciences, mars, 1889). — Sur certaines courbes qu'on peut adjoindre aux courbes plates pour l'étude de leurs propriétés infinitésimales (Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes. Lisboa, 1889). — Note sur les systèmes de péninvariants principaux des formes binaires (Bruxelles, 1888).

D'Ocagne et Neuberg. — Remarques sur une transformation biquadratique. Bruxelles, 1889.

Fazzini (U.) — Sopra alcune rappresentazioni di una funzione di una variabile reale per serie d'integrali definiti. Firenze, 1889.

Francavilla (F.) — Elementi d'aritmetica razionale ad uso delle scuole ginnasiali e tecniche. Cesena, Tip. Nazionale, 1889 — Prezzo L. 2.

Gatti (S.) — Del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo di due o più numeri. Bari, 1889.

Gerbaldi (F.) — Sul sistema di due coniche (Annali di matem., 1889).

Giudice (F.) — Sui numeri poliedrici (Rend. cir. mat. Palermo, tomo III, 1889) — Sulla possibilità di funzioni di stesso valore, equivalenti, non identiche (Id. id.).

Grassi (F.) — Trattato di Trigonometria piana e sferica di G. A. Serret. Tradotto sulla 6a edizione francese e coll'aggiunta di 800 esercizii. Torino, Bocca, 1889 — Prezzo L. 3. 25.

Ingrami (G.) — Sulle funzioni implicite d'una variabile reale. — Sulla rappresentazione analitica per una funzione reale di due variabili reali (Rend. R. Acc. delle Scienze di Bologna, 1889).

Loria (G.) — Di due rappresentazioni univoche dello spazio rigato su una forma lineare di quarta specie (Gior di mat. di Battaglini, vol. XXVII, 1889). — Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet (Bib mathematica di G. Eneström).

Maggi (G. A.) — Sui principî della teorica della funzione potenziale (Rend. R. Istituto lomb. 1889).

Nicoli (F.) — Interpretazione geometrica del campo delle soluzioni di una equazione lineare a quattro variabili (Memorie R. Acc. di Scienze di Modena).

Ricci (G. B.) — Sintesi delle nozioni di aritmetica prescritta agli alunni del ginnasio inferiore. Roma, Spellani, 1889.

DEI POLIGONI

CHE CORRISPONDONO AI TRIANGOLI RETTANGOLI ED AGLI ACUTANGOLI

ed alcune questioni relative di probabilità

---

1. Nella sua nota: *La rottura del diamante,* apparsa nel volume XXIV (1886) del *Giornale di Battaglini,* l'illustre Prof. Cesàro solve, incidentalmente, e con semplicissima rappresentazione geometrica, la questione:

Un triangolo, preso ad arbitrio, è piuttosto ottusangolo acutangolo?

Per comodo del lettore rammenterò la suaccennata soluzione che è punto di partenza per questo breve scritto.

Il Prof. Cesàro comincia ad osservare che in un triangolo equilatero la somma delle distanze da un punto interno ai lati è costante, ed eguale all'altezza. Se quindi si rappresentano con segmenti ad esse proporzionali i tre angoli di un triangolo, in guisa che l'angolo retto sia rappresentato dalla metà dell'altezza di un triangolo equilatero ABC, ciascun punto P nell'interno del triangolo rappresenterà, mediante le sue distanze, dai lati, i tre angoli di un certo triangolo, cioè una *possibile forma di triangolo;* e viceversa, ogni forma di triangolo avrà il suo rappresentativo in un punto P nell'interno di ABC.

Tutti e soli i triangoli acutangoli vengono così rappresentati dai punti interni al triangolo PQR formato congiungendo i punti medî dei lati di ABC, essendochè per essi soltanto le tre distanze dai lati sono inferiori alla metà dell'altezza. E poichè la superficie di PQR è $\frac{1}{4}$ di quella di ABC, si deduce tosto che:

La probabilità che un triangolo preso ad arbitrio sia acutangolo è $\frac{1}{4}$, e $\frac{3}{4}$ quindi quella che esso sia ottusangolo.

2. Considerando questo esempio mi parve non inutile ricercarne,

comecchè potesse sembrar molto ovvio, alcune conseguenze e generalizzazioni; e pervenni infatti a risultati che mi sembrano curiosi.

Ritornando anzitutto sull'esempio precedente, osservo che il contorno del triangolo $P\,Q\,R$ rappresenta i triangoli rettangoli (la cui probabilità rispetto agli ottusangoli ed agli acutangoli è, naturalmente, nulla), le tre altezze rappresentano i triangoli isosceli, e i lati di $A\,B\,C$ rappresentano triangoli con un angolo nullo (con due lati paralleli). L'esame del rapporto delle lunghezze di queste linee rappresentative, ci conduce alle facili conseguenze:

« *La probabilità che un triangolo preso a capriccio sia isoscele è maggiore di quella che sia rettangolo; e precisamente le due probabilità stanno fra loro* $:: \sqrt{3} : 1$. »

« *Prese a capriccio tre rette di un piano è più facile* (2 *contro* 1) *che due di queste siano parallele anzichè perpendicolari.* »

Finalmente i vertici di $A\,B\,C$ rappresentano triangoli con due angoli nulli, i punti P, Q, R triangoli isosceli rettangoli, e il centro del triangolo rappresenta i triangoli equilateri. Onde si deduce:

« *La probabilità che un triangolo sia isoscele rettangolo è tripla di quello che esso sia equilatero.* »

« *Gettate tre rette a capriccio su un piano, è più facile* (3 *contro* 1) *che vengano ad essere parallele, anzichè a formare angoli eguali* (*un triangolo equilatero*). »

Non è poi forse ozioso osservare che questi risultati, a cui si è data forma più concreta colla considerazione dei tre angoli di un triangolo, concernono sostanzialmente tre grandezze la cui somma sia costante, ossia le tre parti di una stessa grandezza. Onde si potrebbe ad esempio dire:

« *Diviso a caso un segmento in tre parti, è più probabile che una sia maggiore della metà del segmento, anzichè tutte minori.* »

« *Presi due punti a caso su un segmento è più probabile* (2 *contro* 1) *che uno di essi cada a un estremo, anzichè nel punto di mezzo: ed è più facile che tutti e due cadano agli estremi, anzichè dividano il segmento in parti eguali. Ecc.* »

3. Volendo estendere queste ricerche ai quadrilateri, e in gene-

rale ai poligoni, trovai necessario introdurre un nuovo elemento angolare - variabile da poligono a poligono - che potesse considerarsi come il correspettivo dell'angolo retto per il triangolo. Le analogie cui questo elemento dà luogo sono davvero notevoli, come apparirà dagli sviluppi seguenti.

Osservando che in un triangolo 2 angoli almeno devono essere inferiori a un retto, nasce spontanea la domanda se sia possibile fissare per il *massimo* numero di angoli di un poligono un *limite superiore* (naturalmente inferiore a due retti).

Se n è il numero dei lati del poligono (convesso o no, ma non intrecciato) la somma de' suoi angoli sarà $= 2R(n-2)$. Si può quindi tosto concludere che un angolo almeno deve essere $\leqq \frac{2R(n-2)}{n}$, che due almeno devono essere inferiori od al più eguali a $\frac{2R(n-2)}{n-1}$. Per tre angoli non si può dire altro che devono essere tutti $\overline{\overline{<}} \frac{2R(n-2)}{n-2}$ cioè di $2R$, e a *fortiori* un limite superiore (che sia minore di due retti non si può assegnare a quattro, cinque,... angoli.

Se ne deduce che l'angolo che risponde alla proposta questione, e che noi indicheremo con R', è $= \frac{2R(n-2)}{n-1}$. E si vede che due angoli almeno del poligono non possono superare R', mentre per altro dei *due più piccoli angoli del poligono* uno almeno può evidentemente accostarsi a questo limite finchè si vuole; basta infatti assumere l'altro angolo piccolissimo e i rimanenti $n-2$ poco superiori ad R'.

Si noti poi che si ha:

$$(1) \qquad R' = \frac{2R(n-2)}{n-1} = \frac{2R\left[2(n-1)-2\right]}{2(n-1)}$$

epperò è l'angolo al perimetro del poligono regolare di $2(n-1)$ lati.

Onde possiamo concludere che,

« *I due più piccoli angoli del poligono di* n *lati, e questi*
« *due soltanto*, DEVONO *essere entrambi inferiori all'angolo* R',
« *che è poi l'angolo del poligono regolare di* $2(n-1)$ *lati.* »

Od anche:

« *Al più $n-2$ angoli del poligono* POSSONO *eguagliare o su-*
« *perare il valore di* R′. »

In particolare adunque:

Un angolo al più di un triangolo può essere $\geqq 90°$, angolo del quadrilatero regolare.

Due angoli al più di un quadrilatero possono essere $\geqq 120°$, angolo dell'esagono regolare.

Tre angoli al più di un pentagono possono essere $\geqq 135°$, angolo dell'ottagono regolare.

I poligoni che contengono il maggior numero possibile di angoli $= R'$, ossia che ne hanno $n-2$, vanno considerati come analoghi al triangolo rettangolo; e li diremo *poligoni R' — angoli*. Come analoghi ai triangoli acutangoli vanno considerati quelli che hanno tutti gli angoli inferiori ad R', e che diremo *acuminati*.

Così un quadrilatero sarà R' angolo se ha due angoli $= 120°$; acuminato, se tutti gli angoli sono inferiori a $120°$.

4. Occupiamoci ora in particolare dei quadrilateri, e cominciamo a vedere se un quadrilatero preso a capriccio sia piuttosto acuminato o no. Domanda questa analoga a quella propostasi dal Prof. Cesàro e cui si risponde con una rappresentazione analoga.

Ricordiamo che la somma delle distanze fra le facce e un qualunque punto interno a un tetraedro regolare è costante, ed eguale all'altezza: proposizione del resto evidente quando si osservi che il tetraedro può concepirsi come somma di 4 piramidi aventi il vertice in quel punto e per base le facce.

Assumiamo un tetraedro regolare T, di cui A, B, C, D, siano i vertici. Le altezze cadranno nei baricentri A', B', C', D' delle facce e questi punti determineranno un nuovo tetraedro, che diremo T'; il quale ha le facce parallele alle omonime di T e situate da esse ad una distanza eguale a $\frac{1}{3}$ dell'altezza h di T. Se la quarta parte di h si assume come rappresentativa dell'angolo retto, ogni punto nell'interno di T potrà rappresentare, per mezzo delle sue distanze dalle facce, i quattro angoli di un certo quadrilatero, e viceversa.

Allora i punti interni a T' rappresenteranno tutti e soli i quadrilateri ***acuminati,*** perchè per essi soltanto le distanze dalle facce sono minori di $\frac{1}{3}h$. I quadrilateri acuminati hanno così rappresentazione affatto analoga ai triangoli acutangoli; ad anche sotto questo punto di vista l'angolo R' appare come l'analogo dell'angolo retto.

Poichè T' ha uno spigolo eguale a $\frac{1}{3}$ di quello di T, e quindi volume eguale a $\frac{1}{27}$ di esso, si ha:

« *La probabilità che un quadrilatero preso a caso* (*convesso*
« *o no*) *sia acuminato piuttosto che no, è* $\frac{1}{27}$. »

Volendo poi distinguere i convessi dagli altri, troviamo le regioni di T che rappresentano gli uni e gli altri.

I piani condotti per i punti di mezzo delle altezze parallelamente alle rispettive basi tagliano da T' quattro tetraedri aventi spigolo metà e quindi complessivamente volume $\frac{1}{8}$ di esso, e rimane un solido O — evidentemente un ottaedro regolare — ogni punto interno al quale, avendo dalle facce di T distanze minori di $\frac{h}{2}$ (e rappresentanti quindi angoli minori di $\frac{4\,R}{2}$), sarà rappresentativo di un quadrilatero convesso. I punti invece di T esterni ad O rappresentano quadrilateri non convessi. E poichè O risulta, per il detto, la metà di T, si deduce tosto:

« *È egualmente probabile che un quadrilatero preso a caso*
« *sia convesso, quanto che non lo sia.* »

« *La probabilità che un quadrilatero convesso sia acuminato è* $\frac{2}{27}$. »

Un quadrilatero non convesso non può, naturalmente, essere acuminato: nella rappresentazione si vede appunto che T' è tutto interno ad O, e quindi fuori dalle regioni di T rappresentative di quadrilateri concavi.

5. Alla divisione volgare dei triangoli in acutangoli, rettangoli, ottusangoli, corrisponderebbe per i quadrilateri una assai più minu-

ziosa. Essendo affatto ozioso creare per tutte le ***diverse forme possibili*** di quadrilateri nomi speciali, ci limiteremo a disegnare con simboli significativi i diversi tipi.

Ossorviamo che due angoli al certo sono inferiori ad R', in questo caso $= 120^{\circ}$; gli altri due potranno essere minori, eguali, o maggiori di R', ed uno anche potrebbe eguagliare o superare $2\,R'$. Abbiamo così 8 tipi, che disegneremo chiudendo tra parentesi i valori dei due angoli maggiori:

I. tipo: $(> 2\,R')\,(< R')$; II. tipo: $(= 2\,R')\,(< R')$;
III. tipo: $(> R')\,(> R')$; IV. tipo: $(> R')\,(= R')$;
V. tipo: $(> R')\,(< R')$; VI. tipo: $(= R')\,(= R')$;
VII. tipo: $(= R')\,(< R')$; VIII. tipo: $(< R')\,(< R')$;

dove è sottinteso che l'angolo disegnato col simbolo $> R'$ sia per altro $< 2\,R'$.

Fondandosi sulla rappresentazione data precedentemente, è facile vedere quali regioni del tetraedro T rappresentino questi diversi tipi, e così dedurne le relative probabilità. Ommettendo figure e dimostrazioni, che condurrebbero a sviluppi tanto noiosi quanto facili, accenneremo ai risultati.

I tipi I, III, V, VIII sono rappresentati da volumi; e dirò quindi che le probabilità relative ad essi *sono a 3 dimensioni.*

I tipi II, IV, VII sono rappresentati da superficie; le probabilità relative *sono a 2 dimensioni,* e nulle rispetto alle precedenti.

Il tipo VI è rappresentato da linee.

6. Consideriamo anzitutto i tipi a probabilità 3 — dimensionali.

I. Tipo: $(> 2\,R')\,(< R')$ — I quadrilateri di questo tipo sono rappresentati da 4 tetraedri aventi lo spigolo eguale a $\frac{1}{3}$ di quello di T, e volume $= \frac{1}{27}$ di T. Si ottengono segando T con piani paralleli alle facce e distanti dai vertici di $\frac{1}{3}\,h$. La probabilità relativa è quindi $\frac{4}{27}$.

III. Tipo $(> R')(> R')$ — Sono rappresentati da 6 tetraedri eguali a T', e aventi rispettivamente uno spigolo a comune con esso. Questi tetraedri si ottengono prolungando le facce di T', e considerando le regioni di T che restano contemporaneamente al di là di due facce di T'. (Dicendo che un punto è al di là di un piano parallelo a una faccia, intendo che giaccia in quella delle due regioni del tetraedro che contiene il vertice opposto a questa faccia). Così la faccia $B' C' D'$, prolungata, sega T in un triangolo equilatero composto di $B' C' D'$ stesso e di altri tre eguali ad esso. Questi tre triangoli sono basi di altrettanti tetraedri eguali a T' (terminati ognuno dal prolungamento di due facce di T' e da porzioni di due facce di T). Per ogni faccia di T' si hanno così tre di questi tetraedri; ma ognuno appoggia a due facce, per cui i distinti sono in numero di $\frac{4 \times 3}{2} = 6$.

La probabilità dunque relativa a questo tipo è $\frac{6}{27}$.

V. Tipo: $(> R')(< R')$ — Sono rappresentati dalle regioni di T che restano contemporaneamente al di là di una faccia, e al di qua di un'altra faccia di T'. Esse si riducono a 4 ottaedri regolari aventi rispettivamente a comune una faccia con T', 3 con i tetraedri del caso precedente, 1 con quelli del primo caso, e 3 situate sulle facce di T.

Così al di sopra della faccia $B' C' D'$ esiste l'ottaedro di cui tre vertici sono i punti B', C', D', e gli altri 3 sono sugli spigoli di T che partono da A, e a $\frac{1}{3}$ di essi; il suo volume è manifestamente $\frac{1}{2}$ del tetraedro che ha lo spigolo $\frac{2}{3}$ di quello di T, cioè è $\frac{1}{2} \times \frac{8}{27}$ di T. La probabilità relativa è quindi $\frac{4}{27} \times 4 = \frac{16}{27}$.

VIII. Tipo: $(< R')(< R')$. Sono rappresentati, come dicemmo, da T', e la relativa probabilità è quindi $\frac{1}{27}$.

Concludendo possiamo dire:

« In un quadrilatero preso a caso, ma non intrecciato, la pro-
« babilità che tutti gli angoli siano inferiori a 120° è $\frac{1}{27}$; quella che

« uno solo superi 120°, ma non 240°, è $\frac{16}{27}$; quella che due superino « 120° è $\frac{6}{27}$; e finalmente quella che un angolo superi 240° è $\frac{4}{27}$. »

Queste sono le probabilità per un quadrilatero qualunque. Facile è dedurne le probabilità per i quadrilateri convessi o non convessi soltanto.

Cominciamo dai convessi.

I quadrilateri del tipo I non sono convessi.

I quadrilateri del tipo III, e convessi, sono rappresentati dalle parti delle regioni considerate nel caso generale che rimangono nell'interno dell'ottaedro O. Da ognuno dei 6 tetraedri allora considerati l'ottaedro esclude due tetraedri di spigolo metà e di volume quindi $\frac{1}{8}$ di essi; la probabilità è quindi $\frac{3}{4}$ di quella generale, cioè $\frac{3}{4} \times \frac{6}{27} = \frac{1}{6}$.

Riguardo ai quadrilateri del tipo V si osservi che di ognuno dei 4 ottaedri rappresentativi del caso generale una metà rimane nell'interno di O; poichè le 4 faccie di O che non poggiano sulle faccie di T (ma lo segano a distanza $\frac{1}{2} h$ dai vertici) passano per i centri di quei 4 ottaedri. La probabilità relativa a questo caso, per i quadrilateri convessi, è quindi $\frac{1}{2} \times \frac{16}{27} = \frac{8}{27}$.

Finalmente i quadrilateri del tipo VIII sono sempre convessi, epperò la probabilità è sempre $\frac{1}{27}$.

Così, trattate separatamente le probabilità dei convessi, se ne possono ottenere, con semplici differenze, quelle degli altri. E si ha il seguente quadro:

TIPO	PROBABILITÀ RELATIVA PER UN QUADRILATERO					
	qualunque		convesso		non convesso	
	Valori assoluti	Numeri proporzionali	Valori assoluti	Numeri proporzionali	Valori assoluti	Numeri proporzionali
$(>2R')(<R')$	$\frac{4}{27}$	4	. .	. .	$\frac{4}{27}$	8
$(>R')(>R')$	$\frac{6}{27}$	6	$\frac{1}{6}$	9	$\frac{3}{54}$	3
$(>R')(<R')$	$\frac{16}{27}$	16	$\frac{8}{27}$	16	$\frac{8}{27}$	16
$(<R')(<R')$	$\frac{1}{27}$	1	$\frac{1}{27}$	2	. .	. .
Somme delle probabilità	1	27	$\frac{1}{2}$	27	$\frac{1}{2}$	27

Il lettore potrà dedurne confronti curiosi. Così ad es. la probabilità che un angolo solo sia maggiore di 120° (V tipo) è eguale tanto per i quadrilateri convessi e per i non convessi; quella che due siano maggiori di 120° è tripla per il convesso, ecc.

7. Proseguendo nell'esame degli altri tipi, non distingueremo, per non entrare in troppe minuzie, i quadrilateri convessi dagli altri. Si trova:

II Tipo: $(=2R')(<R')$. I quadrilateri di questo tipo sono rappresentati dai 4 triangoli ottenuti segando T con piani paralleli alle facce, a distanza $\frac{1}{3}h$ dai vertici. Detta I la superficie di una faccia di T, sarà $\frac{4}{9}$ la complessiva di questi triangoli.

IV. Tipo: $(>R')(=R')$ — VII Tipo: $(=R')(<R')$. — Il caso generico che un angolo sia eguale ad R' è rappresentato da 4 triangoli, sezioni di T con piani a distanza $\frac{2}{3}h$ dai vertici; e la cui superficie complessiva è $\frac{16}{9}$; di ognuno di questi triangoli la parte che rappresenta il tipo VII è la quarta parte (una faccia di T'').

Le probabilità relative di questi tre tipi II, IV, VII, stanno quindi fra loro : : 1 : 3 : 1 ; onde ad es. si avrebbe:

« È egualmente probabile che l'angolo maggiore di un qua-
« drilatero preso a caso sia $= 240°$, quanto che sia $= 120°$. »

Finalmente i quadrilateri del VI tipo, cioè: $(= R')$ $(= R')$ sono rappresentati dagli spigoli di T'. La probabilità relativa, nulla rispetto a quella dei tipi precedenti, si potrebbe paragonare colle altre lineari, per es. con quella dei quadrilateri aventi tre angoli eguali (rappresentati dalle altezze del tetraedro T) oppure quella dei quadrilateri aventi due angoli nulli (rappresentati dagli spigoli di T). E si troverebbe che le probabilità relative a questi tre casi stanno : : $1 : \sqrt{\frac{8}{3}} : 3$. Si vede così in particolare che è più probabile che un quadrilatero abbia tre angoli eguali, anzichè due di $120°$ ciascuno.

8. Un poligono R' — angolo, quello cioè che ha $n - 2$ angoli eguali a $\frac{2(n-2)R}{n-1}$, è da considerarsi, sotto il nostro punto di vista, come la generalizzazione del triangolo rettangolo. Esso è determinato quando siano dati gli $n - 1$ lati $a_1, a_2, \ldots . a_{n-1}$ degli angoli R'; e l'ultimo lato a_n si può esprimere in termini degli altri (e, s'intende, dell'angolo R'), mercè una relazione, che è da considerarsi come la generalizzazione di quella di Pitagora.

Essa si può dedurre immediatamente dall'equazione fondamentale della poligonometria, stabilita da Lescell.

Posto $\alpha = 180° - R' = \frac{180°}{n-1}$, si ricava:

$$\begin{aligned}
a_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{n-1}^2 &+ 2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{n-2} a_{n-1}) \cos\alpha \\
&+ 2(a_1 a_3 + a_2 a_4 + \ldots . + a_{n-3} a_{n-1}) \cos 2\alpha \\
&+ 2(a_1 a_4 + a_2 a_5 + \ldots . + a_{n-4} a_{n-1}) \cos 3\alpha \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + 2\, a_1 a_{n-1} \cos (n-2)\, \alpha.
\end{aligned}$$

Questa relazione per $n = 3$ dà il teorema pitagorico, per $n = 4, 5$ rispettivamente dà eguaglianze, che si ricavano dalle figure immediatamente, prescindendo da considerazioni trigonometriche. Posto poi $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = a_{n-1}$ fornisce il diametro di un poligono regolare di $2(n-1)$ lati, in funzione del suo lato.

9. La rappresentazione delle possibili forme di poligoni di n lati si può fare ricorrendo a spazî ad $n-1$ dimensioni, in modo analogo a quello che abbiamo veduto per i casi particolari di $n=3, 4$. Ma non entreremo in questo argomento, che non è nell'indole del *Periodico*. Ci basti accennare che la probabilità che un poligono sia acuminato si trova così in generale data da $1:(n-1)^{n-1}$.

Dott. VITTORIO MURER.

LE PROPRIETÀ DEI PRODOTTI E DEI QUOZIENTI

ESTESE AI MONOMI ALGEBRICI.

1. Si dice *prodotto di due numeri* la somma di tante parti eguali al primo (*moltiplicando*) quante sono le unità del secondo (*moltiplicatore*); e *prodotto di più numeri* (*fattori*) il risultato che si ottiene moltiplicando il prodotto dei primi due per il terzo, il prodotto dei primi tre per il quarto e così di seguito fino all'ultimo numero.

Da ciò risulta che il prodotto è sempre omogeneo col moltiplicando e che l'unità a cui si riferisce il secondo fattore è il primo, quella a cui si riferisce il terzo fattore è il prodotto dei primi due, quella a cui si riferisce il quarto è il prodotto dei primi tre, e così via.

2. Il prodotto di più fattori gode, come la somma, della proprietà commutativa e della associativa.

La proprietà commutativa può dimostrarsi così: abbiamo per definizione:

$$abc = (ab) + (ab) + \ldots\ldots + (ab) =$$

$$\begin{array}{r|r|l} a & +a & + \ldots + a = (ac) + (ac) + \ldots\ldots + (ac) = acb \\ +a & +a & \quad\;\; +a \\ \cdot & \cdot & \quad\;\; \cdot \\ +a & +a & \quad\;\; +a \end{array}$$

Dunque

(1) $$a\,b\,c = a\,c\,b.$$

E si vede allora che, potendosi cambiare di posto due fattori consecutivi, si potrà, ripetendo più volte la stessa operazione, invertire i fattori d'un prodotto nel modo che più piace. Dunque:

Un prodotto non si altera, cambiando l'ordine dei suoi fattori. È bene però avvertire che, nel cambiare l'ordine dei fattori d'un prodotto, ciascuno di essi non si riferisce più alla unità di prima, ma a quella relativa al posto che va ad occupare, conforme a quanto è stato detto sopra.

3. La proprietà associativa è in parte contenuta nella definizione stessa del prodotto di più fattori, ed in parte si può dimostrare in questo modo: abbiamo, invertendo,

(2) $$a\,(b\,c) = (b\,c)\,a = b\,c\,a = a\,b\,c$$

cioè:

Un prodotto non si altera, sostituendo a due o più dei suoi fattori un fattore unico; oppure, sostituendo ad uno dei suoi fattori, altri fattori di cui esso sia il prodotto.

4. Esaminiamo ora le proprietà del quoziente.

Si dice *quoziente di due numeri* un terzo numero che moltiplicato per il secondo (divisore) riproduce il primo (dividendo).

Quindi abbiamo:

$$(a : b)\,b = a$$
$$(a\,b) : b = a$$

da cui si vede che *il valore d'un numero non si altera, prima dividendo e poi moltiplicando, oppure prima moltiplicando e poi dividendo successivamente per un altro numero.*

Può accadere che i numeri dati siano omogenei fra loro; in tal caso il quoziente si dice più propriamente *rapporto* dei due numeri, e l'unità a cui esso si riferisce è il divisore stesso o un'altra quantità equivalente. Può invece accadere che il dividendo ed il divisore non siano omogenei; ed allora il quoziente è sempre omogeneo col dividendo, ed equivale ad una parte aliquota del medesimo.

Osserveremo infine che il quoziente di due numeri non ha significato altro che quando il dividendo è un multiplo del divisore.

Ciò posto, vediamo altre proprietà dei prodotti e dei quozienti.

5. *La moltiplicazione e la divisione sono operazioni invertibili;* dico cioè che le due espressioni $(a\,b):c$ e $(a:c)\,b$ hanno sempre lo stesso valore, allorchè a è multiplo di c.

Abbiamo infatti:

$$(a:c)\,b\,c = (a:c)\,c\,b = a\,b;$$

onde si deduce che

$$(a\,b):c = (a:c)\,b, \tag{3}$$

come dovevasi dimostrare.

Le espressioni della forma $a\,.\,b:c:d\,.\,e:f$ si dicono *monomi*, e, finchè hanno significato, essi godono sempre della proprietà commutativa.

La (3) può scriversi in quest'altro modo:

$$b\,(a:c) = (b\,a):c \tag{4}$$

e dimostra in parte che i monomi godono anche della proprietà associativa, e quindi di tutte le altre proprietà che da essa derivano. In particolare abbiamo che:

Il prodotto di più monomi vale un monomio unico formato coi fattori e divisori di ciascuno.

Di qui si trae la nota regola per la moltiplicazione dei monomi.

6. Allo scopo di stabilire la regola della divisione dei monomi, occorre dimostrare le due seguenti eguaglianze:

$$a:(b\,c) = (a:b):c \tag{5}$$

$$a:(b:c) = (a:b).\,c \tag{6}$$

Ciò si fa partendo dall'idea di quoziente. Infatti abbiamo:

$$(a:b):c\,(b\,c) = (a:b):c\,.\,c\,.\,b = (a:b)\,b = a$$

e quindi la (5) è vera.

Similmente, si ha:

$$\begin{aligned}(a:b).c.(b:c) &= (a:b).c.b:c\\ &= (a:b)\,b.c:c\\ &= (a:b)\,b = a\end{aligned}$$

donde si deduce che anche la (6) è vera.

7. Dalla (5) e dalle proprietà dei monomi avanti dimostrate ricavasi che:

$$a:b.c.d:e:f = (a.c.d):(b.e.f)$$

cioè: *Un monomio vale il quoziente del prodotto dei suoi fattori diviso per il prodotto dei suoi divisori.*

Dalla (5) e dalla (6) si deduce pure che:

$$(a:b.c:d):(e.f:g) = a:b.c:d:e:f.g$$

cioè: *Il quoziente di due monomi vale un monomio unico formato coi termini del primo, col segno che hanno, e coi termini del secondo, col segno mutato; cioè i divisori convertiti in fattori e i fattori in divisori.*

8. Le eguaglianze (2), (3), (4) e (5) sussistono finchè le divisioni, ivi indicate, sono possibili; volendo renderle generali, converrà estendere ancora l'idea di numero. A tale scopo ammetteremo che l'unità possa dividersi in un numero qualunque di parti eguali, e chiameremo *frazione o numero frazionario* quello che si ottiene contando una o più di queste parti. Sicchè in ogni frazione si distingueranno sempre due termini: *il numeratore*, che indica quante parti eguali dell'unità si sono contate; ed il *denominatore* che indica in quante parti eguali è stata divisa l'unità. La frazione di numeratore a e denominatore b si indica con $\frac{a}{b}$.

9. Si può subito dimostrare che, colle frazioni, qualsivoglia divisione di numeri interi è resa possibile, e propriamente che:

Il quoziente di due numeri interi è sempre una frazione che ha per numeratore il dividendo e per denominatore il divisore.

Questa verità si desume facilmente dalla proprietà commutativa del prodotto. Abbiamo infatti che $a\,b = b\,a$, qualunque sia l'unità a cui il primo fattore si riferisce; onde se l'unità fosse $\frac{1}{b}$, si avrebbe:

$$\frac{a}{b}\,b = \frac{b}{b}\,a = a\,;$$

da cui, per la definizione di quoziente,

$$a : b = \frac{a}{b}\,. \tag{7}$$

10. Dal concetto di prodotto, nel caso che il moltiplicatore sia intero, si ha

$$\frac{a}{c}\,b = \frac{a\,b}{c}\,;$$

e quindi per la (7)

$$(a : c)\,b = (a\,b) : c$$

donde si vede che la (3) vale qualunque siano i numeri interi a, b e c.

11. Per generalizzare la (4), dove comparisce un moltiplicatore frazionario, bisogna estendere il significato di prodotto. Diremo quindi *prodotto di due numeri un terzo numero che è formato col moltiplicando come il moltiplicatore si origina dall'unità.*

Questa definizione, che comprende quella data ragionando di soli numeri interi, applicata ad un moltiplicatore frazionario, ci dà:

$$a\,.\,\frac{b}{c} = (a : c)\,b$$

e, per la (3), essendo $(a : c)\,b = (a\,b) : c$, verrà

$$a\,.\,\frac{b}{c} = (a\,b) : c$$

la quale, può anche scriversi,

$$a\,.\,(b : c) = (a\,b) : c\,;$$

e così si dimostra che la (4) vale per tutti i numeri interi.

12. Se ora osserviamo, che un numero qualunque a può considerarsi equivalente al prodotto $b\,c\,a$ riferito all'unità frazionaria $\frac{1}{b\,c}$; esso sarà divisibile per b, per c e per il prodotto $b\,c$; onde si può ritenere che anche la (5) valga senza restrizioni.

La (6) poi vale pur essa in ogni caso, perchè è conseguenza delle eguaglianze precedenti.

13. Passiamo a considerare il prodotto ed il quoziente di numeri frazionari.

Il prodotto di due o più frazioni è una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

Abbiamo infatti, per la (7) e per la definizione di prodotto,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (a : b) : d \,.\, c = (a : b) \,.\, c : d$$

$$= a \,.\, c : b : d = a \,.\, c : (b\, d) = \frac{a\, c}{b\, d}.$$

Similmente si trova: $\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c\, a}{b\, d}$; e quindi

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

La quale eguaglianza ci dimostra che anche il prodotto di frazioni gode della proprietà commutativa. E quindi dell'associativa, perchè anche per le frazioni si può ripetere la dimostrazione del n. 3.

Il quoziente di due frazioni è una frazione che ha per numeratore il prodotto del numeratore della prima per il denominatore della seconda, e per denominatore il prodotto dei termini rimanenti.

Si ha infatti:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a\, d}{b\, c},$$

perchè $\frac{a\, d}{b\, c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\, d\, c}{b\, c\, d} = \frac{a}{b} \,.\, d : d \,.\, c : c = \frac{a}{b}$; onde abbiamo identicamente $\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

Adunque, se il prodotto ed il quoziente di numeri frazionari conservano le loro proprietà fondamentali, si può dire che le eguaglianze (3), (4), (5) e (6) valgono qualunque siano i numeri rappresentati dalle lettere che vi compariscono.

14. Tutto ciò riguarda il valore assoluto dei numeri. Volendo

avere riguardo anche al segno, si vedrà che nessuna delle cose dette viene a variare.

Dal concetto di prodotto apparisce chiaro che, se il moltiplicatore è positivo, il prodotto è positivo o negativo, secondochè il moltiplicando è rispettivamente positivo o negativo; se al contrario il moltiplicatore è negativo, il prodotto è positivo o negativo, secondochè il moltiplicando è negativo o positivo. Onde si deduce che: *fattori di segno eguale danno un prodotto positivo, e fattori di segno differente danno un prodotto negativo.*

Applicando questo risultato ad un prodotto di molti fattori si vedrà che esso è *positivo,* quando il numero dei fattori negativi è pari; è *negativo, quando lo stesso numero è dispari.*

Da ciò si deduce subito che, l'inversione di posto dei fattori, non altera il segno del prodotto; per la qual cosa, un prodotto di numeri qualunque, positivi o negativi conserva sempre le sue proprietà.

15. Riguardo al quoziente di due numeri qualunque è facile vedere che, dopociò che si è stabilito intorno al prodotto, esso esiste sempre ed è positivo, se i numeri hanno segno eguale, è negativo, se i numeri hanno segno differente. Onde si può ritenere che le eguaglianze (1), (2), (3), (4), (5) e (6) sussistano per tutti i numeri: positivi, negativi, interi o frazionari.

16. Siamo ora in grado di concludere quello che ci siamo proposti di dimostrare, cioè: se colla parola monomio comprendiamo un'espressione della forma $a \,.\, b : c : d \,.\, e : f$, la quale (convenendo di rappresentare con $\frac{a}{b}$ il quoziente $a : b$ qualunque siano i numeri a e b anche se non interi e positivi ambedue) può sempre ridursi all'altra $\frac{a\,b\,e}{c\,d\,f}$, dove le lettere stanno a rappresentare numeri qualunque; possiamo affermare che i monomi godono di tutte le proprietà dei prodotti e dei quozienti, e che possono ad essi applicarsi tutte le regole di calcolo valevoli per questi.

M. Gremigni.

TEMI DI MATEMATICA

PER LA LICENZA D'ISTITUTO TECNICO

NELLA SEZIONE *FISICO-MATEMATICA*

(Continuazione e fine).

ESTATE 1885, I). — *Trovare i rapporti dei lati d'un triangolo nel quale gli angoli stanno come* $3:4:5$.

Risposta: $a:b:c = 2 : \sqrt{6} : (\sqrt{3}+1)$.

ESTATE 1885, II). — *Un grave è lanciato verticalmente: è dato il tempo trascorso dall'istante in cui esso passa per una data posizione all'istante in cui esso ritorna, scendendo, in quella stessa posizione. Trovare la velocità iniziale.*

Chiamisi v_0 la velocità iniziale cercata, T il tempo della durata del moto di ascesa, uguale a quello del moto di discesa, a cui corrisponde lo spazio s, $2t$ il tempo dato ed s' lo spazio percorso dal mobile prima che incominci il tempo $2t$. Sarà $v_0 = gT$ ed

$$s = v_0 T - \frac{1}{2} g T^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

onde, osservando che anche gli spazii percorsi, in tempi uguali, nel moto di ascesa e discesa sono uguali:

$$s' = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{2} g t^2,$$

da cui deducesi

$$v_0 = \sqrt{2g\left(s' + \frac{1}{2} g t^2\right)}.$$

ESTATE 1887, I). — *Trovare le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo sapendo che il perimetro misurato col metro è 1,20 e che la distanza del vertice dell'angolo retto dall'ipotenusa è 0,24.*

Soluzione algebrica. S'indichi in generale con $2p$ il perimetro del triangolo e con h l'altezza relativa all'ipotenusa. Se x, y rappresentano i cateti e z l'ipotenusa del triangolo cercato, le equazioni che servono alla risoluzione del problema sono

$$x + y + z = 2p; \quad xy = hz; \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Dalle due ultime si deduce: $(x+y)^2 = 2hz + z^2$ e dalla prima $(x+y)^2 = (2p - z)^2$, onde

$$2hz + z^2 = (2p - z)^2 \text{ da cui } z = \frac{2p^2}{h + 2p}.$$

Tenendo conto di questo valore si ha

$$(x+y)^2 = \frac{4p^2(h+p)^2}{(h+2p)^2} \text{ ossia } x + y = + \frac{2p(h+p)}{h+2p}$$

e $xy = \dfrac{2p^2 h}{h + 2p}$.

Conoscendo ora la somma e il prodotto dei due cateti, questi saranno dati dalle radici dell'equazione di 2° grado

$$X^2 - \frac{2p(h+p)}{h+2p} X + \frac{2p^2 h}{h+2p} = 0,$$

ossia

$$x = \frac{p(h+p) + p\sqrt{p^2 - 2ph - h^2}}{h+2p}; \quad y = \frac{p(h+p) - p\sqrt{p^2 - 2ph - h^2}}{h+2p}.$$

Perchè questi valori siano reali occorre che sia

(1) $\qquad p^2 - 2ph - h^2 > 0$, ovvero $\left(\frac{p}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{p}{h}\right) - 1 > 0$.

Ed osservando che le radici dell'equazione:

$$\left(\frac{p}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{p}{h}\right) - 1 = 0$$

sono $\frac{p}{h} = 1 \pm \sqrt{2}$ si deduce che i valori di $\frac{p}{h}$ pei quali la disuguaglianza (1) è soddisfatta debbono essere o maggiori di $1 + \sqrt{2}$ o minori di $1 - \sqrt{2}$. Questi ultimi però sono da respingere, il rapporto $\frac{p}{h}$ dovendo essere positivo, onde si hanno soltanto da considerare quelli pei quali $\frac{p}{h} > \sqrt{2} + 1$.

Si ha poi il teorema: Se l'altezza d'un triangolo rettangolo, rispetto all'ipotenusa, è data ed è $= h$, il minimo perimetro $2p$ che può avere questo triangolo si ha quando $\frac{p}{h} = \sqrt{2} + 1$. Se il perimetro d'un triangolo rettangolo è dato ed è $= 2p$, la massima altezza di questo triangolo rispetto all'ipotenusa si ha quando

$$\frac{h}{p} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1.$$

Nel caso particolare considerato dall'enunciato i lati del triangolo cercato sono:

$$x = \text{m. } 0{,}4\,; \quad y = \text{m. } 0{,}3\,; \quad z = \text{m. } 0{,}5.$$

Soluzione geometrica. Si costruisca un triangolo che abbia per base il perimetro e per altezza l'altezza data, e in cui l'angolo al vertice sia $\frac{3}{2}$ di un angolo retto, quindi si tirino dal vertice delle rette formanti coi lati che concorrono in esso, angoli uguali agli angoli alla base del primo triangolo.

ESTATE 1887, II). — *Un punto* M *è dato per mezzo delle sue distanze* p, q *da due rette* O P, O Q *fra loro perpendicolari. Condurre per* M *una retta* P M Q *in modo che la somma dei quadrati dei segmenti* P M, Q M *sia uguale ad un quadrato dato. Discutere qualche caso particolare, per esempio quello in cui* q = p.

Siano N, S i piedi delle perpendicolari calate da M su OP, OQ, onde $MN = OS = p$, $ON = SM = q$. Posto $OP = x$, sarà:

$$NP = x - q\,;\; QS = \frac{qp}{x-q}\,;\; OQ = \frac{xp}{x-q}$$

e perciò

$$MP^2 = p^2 + (x-q)^2\,;\; MQ^2 = q^2 + \frac{q^2p^2}{(x-q)^2},$$

sicchè indicando con a il lato del quadrato dato, alla determinazione di x servirà l'equazione

$$(x-q)^2 + p^2 + q^2 + \frac{q^2p^2}{(x-q)^2} = a^2.$$

Per risolverla pongasi $(x-q)^2 = z$. Con ciò essa riducesi alla seguente

$$z^2 + (p^2 + q^2 - a^2)\,z + p^2q^2 = 0 \tag{1}$$

da cui si ha

$$z = \frac{a^2 - p^2 - q^2 \pm \sqrt{(a^2 - p^2 - q^2)^2 - 4\,p^2\,q^2}}{2} =$$

$$= \frac{a^2 - p^2 - q^2 \pm \sqrt{[a^2 - (p+q)^2][a^2 - (p-q)^2]}}{2}.$$

Trovata z si ha x dall'equazione $x = q \pm \sqrt{z}$.

Perchè i valori di z e quelli pure d' x sieno reali basta che sia soddisfatta l'unica condizione $a > p + q$. Invero deducendosi dalla medesima che $a^2 > (p+q)^2$ ed a *fortiori* $a^2 > p^2 + q^2$, si ha allora che le radici della (1) sono reali e per di più positive, onde anche i valori di x sono reali. Alla x corrispondono poi quattro valori, i quali, indicando con z', z'' le radici della (1), sono :

$$q + \sqrt{z'},\ q + \sqrt{z''},\ q - \sqrt{z'},\ q - \sqrt{z''}.$$

Determinata x per completare la soluzione del problema, basta portare da O verso P o in direzione opposta, secondochè x è positiva o negativa, un segmento $= x$ poi congiungerne l'estremità con M e prolungare la congiungente fino ad incontrare $O\,Q$ od il suo prolungamento.

Se $p = q$ risulta

$$x = q \pm \sqrt{\frac{a^2 - 2\,p^2 \pm a\sqrt{a^2 - 4\,p^2}}{2}}$$

onde il minimo valore che può avere a, perchè i valori di x siano reali, si ha quando $a = 2p$ e quindi $x = 2p$. In tal caso la retta $P\,M\,Q$ forma angoli uguali con $O\,P$, $O\,Q$.

AUTUNNO 1887, I a). — *Per mezzo di* a *e* b, *misure delle basi d'un trapezio, si esprima il valore di quella retta la quale, essendo parallela alle basi, divide il trapezio in due parti equivalenti.*

Risposta: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

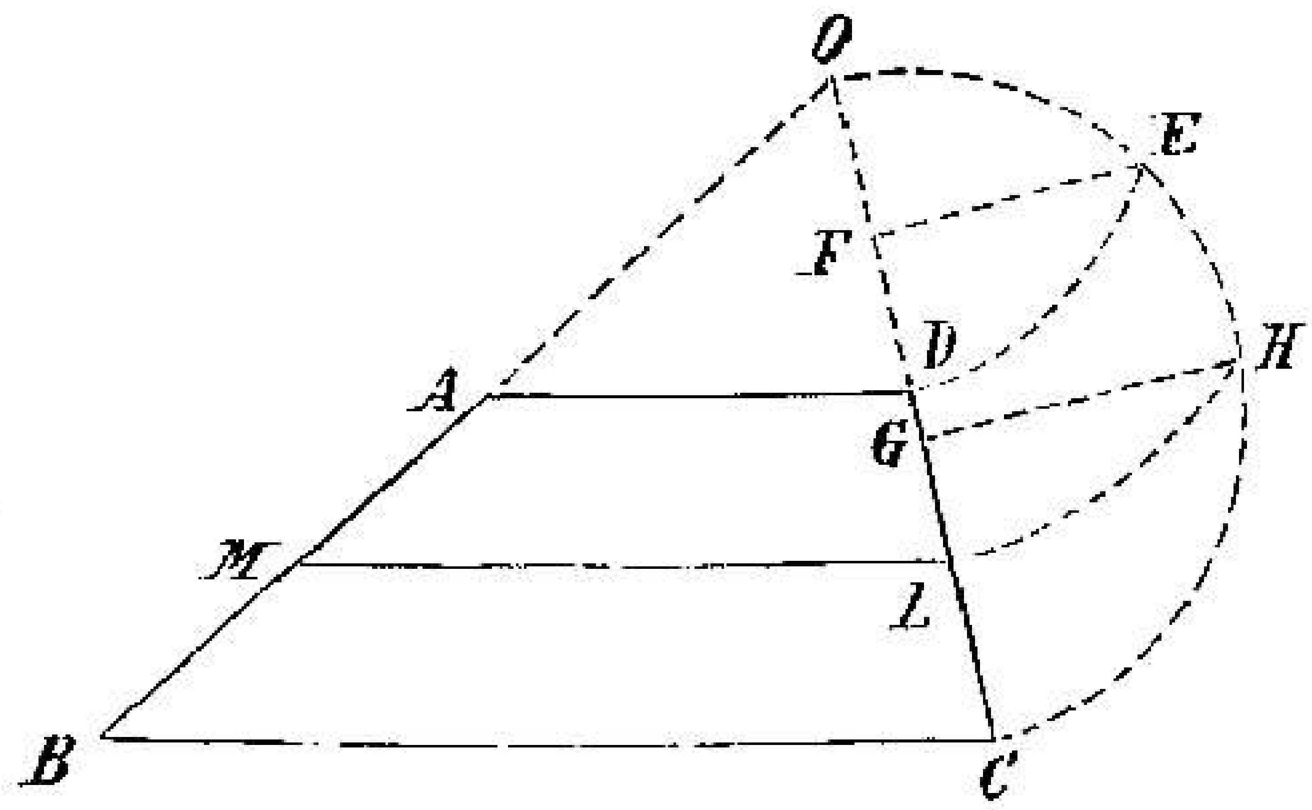
Ossèrvazione. — La soluzione di questo quesito è analoga a quella del quesito dell'autunno 1882. — Trattando la questione più generalmente, ossia richiedendo solo che le due parti abbiano il rapporto $m : n$, si trova per valore della retta x cercata

$$x = \sqrt{\frac{ma^2 + nb^2}{m+n}} = \sqrt{b^2 + m\,\frac{(a+b)(a-b)}{m+n}}.$$

Se m, n, a, b sono segmenti dati, si può facilmente costruire x colle seguenti operazioni: 1° trovando un segmento c quarto proporzionale dopo $m + n$, $a + b$, $a - b$; 2° costruendo un quadrato, di lato d, equivalente al rettangolo di c ed m; 3° trovando l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo di lati b e d.

AUTUNNO 1887, I b). — *Si risolva geometricamente il problema: dividere un trapezio in due parti equivalenti con una retta parallela alle sue basi.*

Sia $ABCD$ il trapezio dato e si voglia dividere con una retta parallela alle basi in due che siano fra loro come due segmenti dati m, n.



Si prolunghino i lati concorrenti BA, CD finchè s'incontrino in O, su OC come diametro si descriva una semicirconferenza e nella medesima s'inscriva una corda $OE = OD$ e da E si cali la perpendicolare EF ad OC. Dividasi internamente FC in G così che sia $FG : GC = m : n$, s'innalzi da G la perpendicolare ad OC fino ad incontrare la semicirconferenza in H e su OC si porti $OL = OH$. Finalmente tirisi per L la LM parallela alle basi del trapezio, il quale resta così diviso come si voleva.

Infatti dai triangoli simili OML, OAD, OBC, si ha:

$$\Delta\, OML : \Delta\, OAD = OL^2 : OD^2 = OG : OF;\ \Delta\, OBC : \Delta\, OML = OC : OG$$

e dividendo

$$\text{trap. } AMLD : \Delta\, OML = FG : OG;\ \text{trap. } MBCL : \Delta\, OML = GC : OG$$

e quindi, essendo uguali i conseguenti:

$$\text{trap. } AMLD : \text{trap. } MBCL = FG : GC = m : n.$$

Se $m = n$ il punto G è il centro di FC.

AUTUNNO 1887, II a e b). — *Si trovino i coseni degli angoli d'un trapezio isoscele, dato che le basi del trapezio siano misurate da* a *e* b *e le diagonali da* d. *Si trovino gli angoli del trapezio supponendo* a $= 8$; b $= 3$; d $= 7{,}5$.

Risposta. Chiamando α uno degli angoli alla base $a > b$ del trapezio, si ha: $\cos\alpha = \frac{1}{2}\frac{a-b}{\sqrt{d^2 - ab}}$.

Se $a = 8$, $b = 3$; $d = 7{,}5$ risulta: $\alpha = 65°.\ 27'.\ 59''$.

Estate 1888, I). — *Trovare i lati d'un parallelogrammo che ha un angolo semiretto, quando si conoscono l'area e il perimetro. Quand'è che il problema è possibile?*

Risposta. Indicando l'area e il perimetro con a^2 e $2p$, due lati consecutivi del parallelogrammo saranno:

$$\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - a^2\sqrt{2}};\quad \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - a^2\sqrt{2}}.$$

Perchè il problema sia possibile conviene che sia $\frac{p^2}{4} \geq a^2\sqrt{2}$. Anzi dato p il massimo valore che può avere a^2 si ha quando $a^2 = \frac{p^2}{4\sqrt{2}}$, mentre data a^2 il minimo valore che può avere p si ha quando $p = 2a\sqrt[4]{2}$.

Estate 1888, II). — *Data la differenza di due numeri e data la differenza dei loro cubi, trovare i due numeri. Discutere la soluzione.*

Risposta. Chiamando d la differenza dei due numeri, a^3 quella dei loro cubi, i numeri cercati sono

$$\frac{d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a^3 - d^3}{3d}};\ -\frac{d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a^3 - d^3}{3d}},$$

dove, pel radicale, vanno presi insieme i segni superiori o gli inferiori. Il problema ha perciò due soluzioni le quali sono reali se $4a^3 \geq d^3$, immaginarie nel caso contrario.

Data d il minimo valore che può avere a^3 si ha quando $a^3 = \frac{d^3}{4}$ e data a^3 il massimo valore che può avere d si ha per $d = a\sqrt[3]{4}$. Nel caso del massimo e del minimo, ossia di $4a^3 = d^3$, si trova poi che i due numeri sono uguali e di segno contrario.

Osservazione. — La soluzione di questo quesito, di quello della Estate 1879, II a), e di quelli analoghi, può farsi dipendere, fino al caso delle quinte potenze, dalla risoluzione d'una equazione di 1° o 2° grado, in virtù delle seguenti identità:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2\,ab$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)^3 \mp 3\,ab\,(a \pm b)$$
$$a^4 + b^4 = (a + b)^4 - 4\,ab\,(a + b)^2 + 2\,a^2\,b^2$$
$$a^5 \pm b^5 = (a \pm b)^5 \mp 5\,ab\,(a \pm b)^3 \pm 5\,a^2\,b^2\,(a \pm b),$$

come fu altrove notato per un caso particolare (*V.* Oss. che accompagna la soluzione del tema dell'Estate 1879, II a)). Tali identità sono poi incluse nella seguente formula generale di Waring

$$a^n + b^n = (a + b)^n - n\,ab\,(a + b)^{n-2} + \frac{n\,(n-3)}{1\,.\,2}\,(ab)^2\,(a+b)^{n-4} + \dots$$
$$+ (-1)^m\,\frac{n\,(n-2\,m+1)\;(n-2\,m+2)\,\dots\,(n-m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,m}\,(a\,b)^m\,(a+b)^{n-2m} + \dots$$

che può dimostrarsi facilmente col metodo di conclusione da n ad $n+1$.

Autunno 1888, I). — *I lati di un triangolo circoscritto ad un circolo di raggio dato sono in progressione aritmetica, la cui differenza è uguale alle quarta parte del raggio. Trovare i lati.*

Indicando con x il lato di grandezza media e con r il raggio del cerchio inscritto nel triangolo, gli altri lati saranno $x - \frac{r}{4}$, $x + \frac{r}{4}$ e si avrà: area $\Delta = \frac{3\,r\,x}{2}$. Ma l'area del triangolo, per una nota formola, è anche espressa da

$$\sqrt{\frac{3\,x}{2}\,.\,2\,x\,\left(2\,x + \frac{r}{4}\right)\left(2\,x - \frac{r}{4}\right)}\,\cdot$$

onde uguagliando, e risolvendo rispetto ad x l'equazione che si ottiene, risulta $x = \frac{r}{8}\,\sqrt{13}$. I lati del triangolo sono perciò espressi da $\frac{r}{8}\,(\sqrt{13} - 2)$: $\frac{r}{8}\,\sqrt{13}$: $\frac{r}{8}\,(\sqrt{13} + 2)$.

A. Lugli.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
27, 33, 34, 35 e 36

27. *Dimostrare che, se l'equazione*

$$t^4 - 4t^3 + \alpha t^2 - 4t + \beta = 0$$

le quattro radici positive, dev'essere $\alpha = 6$, $\beta = 1$.

D. Besso.

Dimostrazione del Prof. *G. Frattini* (*).

Supponiamo che l'equazione

$$t^4 - 4t^3 + \alpha t^2 - 4t + \beta = 0$$

bia le quattro radici positive. Le tre radici della derivata

$$2t^3 - 6t^2 + \alpha t - 2 = 0$$

'anno positive; e avranno una somma eguale a 3 e un prodotto eguale a 1. ı è noto che, se la somma di tre numeri positivi è 3, il loro prodotto è nore di 1, ed eguale ad 1 solo quando i tre numeri siano eguali fra loro, conseguentemente all'unità. Perciò le radici della precedente equazione saranno te e tre eguali fra loro e all'unità. Ciò prova che $\alpha = 6$. Pertanto l'equane si potrà scrivere

$$(t-1)^4 = 1 - \beta.$$

radici di questa, quando $1 - \beta$ non sia zero, sono o tutte e quattro immanarie (se $1 - \beta$ è negativo) o due reali e due immaginarie (se $1 - \beta$ è positivo). rchè adunque siano tutte e quattro reali, dovrà essere $1 - \beta = 0$, cioè $\beta = 1$.

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi*.

Pongo

$$6 - \alpha = m \qquad 1 - \beta = n. \tag{1}$$

ano t_1, t_2, t_3, t_4, le quattro radici supposte positive, della equazione; essendo

$\overline{\beta}$ la loro media geometrica ed 1 la loro media aritmetica dev'essere

$\overline{\beta} \leqq 1$ e quindi $\beta \leqq 1$: inoltre

$\leqq (t_1 - t_2)^2 + \ldots + (t_3 - t_4)^2 = 3(t_1 + \ldots + t_4)^2 - 8(t_1 t_2 + \ldots + t_3 t_4) = 8(6 - \alpha) = 8m.$

(*) Altre soluzioni di questa questione pervennero dai Sig. Prof. *S. Catania, S. Gatti, F. Paini, U. Scarpis* e *G. Tolomei*.

Si può adunque conchiudere che, se le radici della equazione sono tutte positive,

$$6 > m \geqq 0 \qquad 1 > n \geqq 0.$$

Notisi che una delle quantità m, n s'annulla solo quando le quattro radici sono eguali tra loro; perciò esse sono ambedue eguali a zero o ambedue maggiori di zero.

Se m, n sono eguali a zero, ossia se $\alpha = 6$ e $\beta = 1$, la proposta equazione ha evidentemente le quattro radici eguali ad 1.

Supponiamo invece, se è possibile, m ed n maggiori di zero. Se s'indica con $f(t)$ il primo membro della data equazione, si ha, tenuto conto delle (1),

$$f(t) = (1-t)^4 - (mt^2 + n)$$

e poichè se t si fa crescere da 0 ad 1, $f(t)$ decresce continuamente dal valore positivo $1 - n$ al negativo $-(m+n)$, l'equazione $f(t) = 0$ ammette una e una sola radice tra 0 ed 1. Inoltre poichè la differenza $\left(t'' + \frac{1}{t''}\right) - \left(t' + \frac{1}{t'}\right) =$ $= \left(t'' - t'\right) \frac{t'\,t'' - 1}{t'\,t''}$ è positiva, quando $1 \leqq t' < t''$, e quindi la funzione $t + \frac{1}{t}$ cresce, quando t cresca da 1 a $+\infty$, la funzione

$$f(t) = t^2 \left\{ \left(t + \frac{1}{t} - 2\right)^2 - m \right\} - n$$

cresce dal valore negativo $-(m+n)$ a $+\infty$, quando t si faccia crescere da 1 a $+\infty$: perciò l'equazione $f(t) = 0$ ammette una sola radice tra 1 e $+\infty$. L'ipotesi adunque che m, n sieno maggiori di zero va rifiutata, perchè essa condurrebbe a conchiudere che la equazione proposta ha due sole radici positive, contrariamente a quanto si suppone nel testo.

33. *Esprimere in funzione del raggio della sfera circoscritta al dodecaedro (icosaedro) regolare, la somma dei quadrati delle rette che congiungono un vertice del dodecaedro (icosaedro) con quelli che non fanno parte delle facce concorrenti al vertice scelto.*

G. Russo.

Soluzione del Prof. *F. Viaggi.*

Sieno A, B vertici opposti: qualunque altro vertice del poliedro insieme con essi forma un triangolo rettangolo di cui AB è ipotenusa.

Caso del dodecaedro.

I tre pentagoni, che passano per B, contengono i 10 vertici non situati con A su una stessa faccia; di questi 1 è B, 3 congiunti con B formano costole del poliedro, 6 congiunti con B dànno diagonali delle facce: quindi chiamando r, c, d i numeri che misurano raggio, costola del poliedro e diagonale a faccia, la somma domandata è

$$4\,r^2 + 3\,(4\,r^2 - c^2) + 6\,(4\,r^2 - d^2) = (26 + 2\,\sqrt{5})\,r^2,$$

ndo $$d = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,c, \quad c = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\,r.$$

Caso dell'icosaedro.

I cinque triangoli che passano per B contengono i 6 vertici non situati A su una stessa faccia; di questi 1 è B e 5 congiunti con B dànno co- del poliedro: quindi chiamando r, c i numeri che misurano raggio e costola icosaedro, e ricordando che $c = r\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$, la somma domandata è

$$4\,r^2 + 5\,(4\,r^2 - c^2) = (14 + 2\,\sqrt{5})\,r^2.$$

34*. ***L'area di un triangolo qualunque è uguale al prodotto dei nenti che il cerchio inscritto, o uno dei cerchi ex-iscritti determina uno dei lati del triangolo, per la cotangente della metà dell'angolo sto.***

G. Russo

Dimostrazione del Sig. *A. Restifa* allievo del R. Liceo di Acireale.

Indicando con r il raggio del cerchio inscritto nel triangolo ABC, con l punto in cui questo cerchio è tangente a BC, si ha $BM = r \cot \frac{B}{2}$, $= r \cot \frac{C}{2}$ onde $BC = a = r\left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}\right)$ e similmente

$$b = r\left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}\right), \qquad c = r\left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}\right).$$

Rammentando ora che l'area T del triangolo ABC uguaglia il prodotto semiperimetro pel raggio del cerchio inscritto, addiziono le tre uguaglianze ne, divido per 2 e moltiplico per r e così trovo

$$T = r^2\left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}\right).$$

Ma se $A + B + C = \pi$ si ha

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \text{ (*)},$$

que sarà

$$T = r^2 \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = BM \,.\, MC \cot \frac{A}{2}.$$

(*) V. Trigonometria del *Serret*, esercizi al libro II.

Ove si chiami poi M' il punto in cui il cerchio ex-inscritto, tangente ai lati dell'angolo A, tocca BC, avendosi $BM' = MC$, $M'C = BM$, è chiaro che si ha pure $T = BM' \,.\, M'C \cot \frac{A}{2}$.

35*. *I numeri della forma* $4a+1$ *divengono quadrati perfetti per* $a = 0, 2, 6, 12, 20, \ldots$ (*).

P. MONTESANO.

Dimostrazione del Sig. *P. Marano* alunno del R. Istituto nautico di Catania.

I numeri della forma $4a+1$ sono dispari e perciò non possono essere che quadrati di numeri dispari. Adunque se vi è un numero di cui $4a+1$ sia il quadrato, tale numero sarà della forma $2n+1$, n rappresentando un intero positivo, compreso zero. Se $2n+1$ soddisfa alla questione, dovrà essere

$$4a+1 = 4n^2+4n+1$$

da cui: $a = n(n+1)$. Così tutti i numeri di questa forma ed essi soli sostituiti ad a fanno diventare $4a+1$ un quadrato perfetto. E poichè per $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ si ha $a = 0, 2, 6, 12, 20, \ldots$, il teorema è dimostrato.

Dimostrazione del Sig. *A. Longo* alunno del R. Liceo di Acireale. (**)

Si consideri in generale una serie di numeri

$$n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots\ldots n_p$$

tale che si abbia $n_2 - n_1 = \delta$, $n_3 - n_2 = 2\delta$; ...... $n_p - n_{p-1} = (p-1)\delta$. Sommando ottengo:

$$n_p - n_1 = \delta\,[1+2+\ldots\ldots+(p-1)] = \delta\,\frac{p(p-1)}{2}.$$

E poichè i numeri $0, 2, 6, 12, 20, \ldots$ formano una serie consimile, nella quale $n_1 = 0$, $\delta = 2$, così si ha in questo caso $n_p = p(p-1)$. Sostituendo ora ad a in $4a+1$ il valore generale $p(p-1)$, di un termine qualunque di quest'ultima serie, si ottiene

$$4a+1 = 4p(p-1)+1 = (2p-1)^2, \text{ c. d. d.}$$

36*. *Se* m *è pari ed* a *è un numero dispari qualunque, il binomio* a^m+1 *diviso per 4 e 8 dà sempre per resto 2.*

A. LUGLI.

Dimostrazione del Sig. *G. Piuma* alunno nel R. Liceo Colombo di Genova. (***)

Pongasi $a = 2n+1$ ed $m = 2h$. Essendo a dispari, anche a^h sarà dispari

---

(*) Il Prof. *G. Russo* osserva che questa questione potrebbe essere generalizzata così « I numeri della forma $n\,a+1$ divengono quadrati perfetti per $a = 0$, $n+2$, $(2n+2)\,2$, $(3n+2)\,3, \ldots\ldots$ ».

(**) Inviarono altre dimostrazioni i Signori: *A. Baldassare* e *S. Jovino* alunni del R. Istituto tecnico di Bari; *S. Lopriore* alunno del R. Liceo di Bari.

(***) Altre dimostrazioni vennero inviate dai Signori *P. Marano* alunno del R. Istituto nautico di Catania ed *A. Baldassare* alunno del R. Istituto tecnico di Bari.

r cui ponendo $a^h = 2\,k + 1$, si avrà:

$$a^m = a^{2h} = (a^h)^2 = 4\,k^2 + 4\,k + 1 \quad \text{e} \quad a^m + 1 = 4\,k\,(k+1) + 2.$$

Manifestamente $4\,h\,(k+1)$ è un multiplo di 4, onde $a^m + 1$ diviso per
dà per resto 2.

Ora k è pari o dispari. In ogni caso uno dei fattori del prodotto $k\,(k+1)$
multiplo di 2 cosicchè $4\,k\,(k+1)$ è divisibile per 8. Segue che $a^m + 1$ di-
o per 8 dà pure per resto 2.

QUISTIONI PROPOSTE. (*)

39. Trovare il numero delle radici reali dell' equazione

$$a\,x^4 + 4\,x^3 + 2\,a\,x^2 - 4\,x + a = 0$$

cui a è compreso fra 0 ed 1, e separarle.

40. Eliminare x, y, z dalle tre equazioni

$$A\,x + B\,y + C\,z = 0$$

$$\frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{y} + \frac{C_1}{z} = 0$$

$$A_2\,x^2 + B_2\,y^2 + C_2\,z^2 = 0.$$

41*. Se con $\binom{m}{r}$ s'indica il numero delle combinazioni di m ele-
ti ad r ad r, ha luogo la relazione

$$\binom{n-1}{2\,r} + \frac{n-1}{2\,r-1}\binom{n-2}{2\,r-2} = \binom{n}{2\,r}.$$

D. Besso.

42*. Se in un esagono $AB'CA'BC'$ inscritto in un cerchio,
ette AA', BB', CC' che uniscono i vertici opposti, si incontrano in
unto, il prodotto dei lati di posto dispari è uguale al prodotto dei
di posto pari. Si ha cioè $AB'.\,CA'.\,BC' = A'B.\,C'A.\,B'C$.

A. Sauve.

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono specialmente destinate
alunni delle nostre Scuole secondarie e di esse si pubblicheranno soltanto
luzioni inviate dagli alunni stessi.

43*. Dei tre quadrati inscritti in un triangolo il maggiore è quello che appoggia al lato minore. — La proposizione ammette eccezioni?

44*. Se si circoscrive un cerchio ad un triangolo equilatero ABC, dimostrare geometricamente: 1° che la somma delle distanze di un punto qualunque P, dell' arco BC, ai vertici B e C è uguale a PA; 2° che la somma $PA + PB + PC$ è massima quando P è il punto medio dell' arco BC.

45. Se A' è il punto del lato BC di un triangolo ABC pel quale si ha $BA' : A'C = m$ e P il punto in cui AA' incontra la circonferenza circoscritta al triangolo, dimostrare: 1° che

$$PA + PB + PC = \frac{c\,(a+c) + mb\,(a+b)}{\sqrt{(1+m)\,(mb^2+c^2) - a^2 m}};$$

2° che il valore massimo della somma delle tre distanze del punto P ai tre vertici del triangolo si ha quando questa somma uguaglia

$$2\sqrt{R\,(R+2r_1)},$$

dove R e r_1 indicano il raggio del cerchio circoscritto al triangolo e quello del cerchio ex-inscritto relativo al lato a.

A. Lugli.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA (*)

BELLINO CARRARA — *La coincidenza dei due metodi di approssimazione di Newton e Lagrange nelle radici quadrate irrazionali dei numeri interi.* — Torino, G. B. Paravia, 1889.

Il metodo delle successive approssimazioni del Newton, applicato al calcolo della radice positiva della equazione $x^2 - N = 0$, in cui si supponga N numero positivo, conduce a formare la serie

$$a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ldots\ldots,\ a_{m-1}\,,\ a_m\,,\ \ldots$$

nella quale a_0 è un valore approssimato di $\sqrt{N}$, e un termine qualunque si deduce dal precedente per mezzo della relazione: $a_m = \frac{1}{2}\left(a_{m-1} + \frac{N}{a_{m-1}}\right)$.

Il metodo del Lagrange invece fornisce il valore della radice sotto forma di frazione continua, nella quale, se N è numero intero, un certo numero, che

(*) Per deficienza di spazio si rimette al fascicolo I. dell' anno venturo un altro articolo bibliografico dei Prof. *R. De Paolis* e *G. Frattini* su di un libro del Prof. Anton Maria Bustelli.

suppongo n, di quozienti incompleti, a cominciare dal secondo, si ripete periodicamente. In tale ipotesi sieno:

$$u_0\,,\ u_1\,,\ u_2\,,\ \ldots\ldots,\ u_m\,,\ \ldots$$

le ridotte della frazione continua formate adoperando kn, $2kn$, $4kn$, . ., $2^m kn$,... quozienti incompleti.

Si ha il teorema: se $a_0 = u_0$, è anche $a_m = u_m$.

Tale coincidenza, segnalata già nell'Algebra del Serret, come dichiara lo stesso Prof. Carrara, in quella si presenta come corollario d'una teoria alquanto complicata: ora il Prof. Carrara ha avuto la buona idea di dimostrare il teorema per via diretta, corredandolo di qualche altro teorema notevole, d'una tavola che dà gli sviluppi in frazione continua delle radici quadrate dei primi 78 numeri naturali, e di opportune considerazioni. Delle quali la più importante dal lato pratico è la seguente: se, scelto v_0 come primo termine della serie delle a, a_m è eguale alla frazione irreducibile $\frac{\alpha}{\beta}$, è $a_m - \sqrt{N} < \frac{1}{\beta}$.

In una nota a pagina 8 si legge che il metodo del Newton *non assicura per se stesso senza ulteriori discussioni l'avvenuta approssimazione verso il valore della radice;* e, in fine dell'opuscolo, che *nel calcolo delle radici quadrate irrazionali dei numeri interi* il metodo del Newton *riceve* da quello del Lagrange *la sicurezza d'una ben definita approssimazione.* Ora se, come appare dal ravvicinamento dei due passi citati, l'egregio A. ha inteso dire che senza la coincidenza da lui messa in luce rimangono incogniti i limiti degli errori che si commettono prendendo a_1, a_2, ... come valori approssimati di $\sqrt{N}$, io credo che si apponga male. E invero, sia N *intero o no*, se è p l'errore per eccesso o per difetto del primo valore a_0 che si assume, si dimostra per via elementare che l'errore di a_m è

$$a_m - \sqrt{N} = \left(\frac{p}{2}\right)^{2m} \cdot \frac{2}{a_{m-1}\, a^2_{m-2}\, a^4_{m-3} \ldots\ a_0^{2^{m-1}}}$$

dalla quale si ricava la seguente limitazione:

$$2I\left(\frac{p}{2I}\right)^{2^m} < a_m - \sqrt{N} < 2i\left(\frac{p}{2i}\right)^{2^m}$$

in cui i è approssimato per difetto a $\sqrt{N}$ ma non maggiore di a_0, I eguale al maggiore dei due numeri a_0, a_1.

F. Viaggi.

Pubblicazioni ricevute dalla Direzione del Periodico

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. Battaglini. Vol. XXVII. Settembre-Ottobre. Napoli, B. Pellerano editore, 1889.

Journal de Mathématique élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. DE LONGCHAMPS, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, LUCIEN LÉVY, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'Ecole préparatoire de Saint-Barbe. 3^a Série, Treizième année. N. 10, 11. Octobre, novembre. Paris, libraire Ch. Delagrave, 1889.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par H. VUIBERT. 14 année. N. 1, 2, 3, 4, 5. Paris, M. Nony et C., 17 rue des Écoles, 1889.

Jornal de Sciencias mathematicas e astronomica publicado pelo Dott. F. GOMES TEIXEIRA, professor na Academia Polytechnica do Porto. Vol. IX, n. 3. Coimbra, 1889.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. MANSION, professeur à l'Université de Gand, et J. NEUBERG, professeur à l'Université de Liège. Tome neuvième. Octobre, novembre, 1889.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2^a, Vol. III, Fasc. 9, 10, 11. Settembre, ottobre, novembre 1889.

AMANZIO (D.) — Trattato di aritmetica teorica. 2^a edizione. Napoli, Morano editore, 1889. Prezzo L. 3, 75.

BIGIAVI (C.) — Sopra una classe di equazioni differenziali lineari a coefficienti doppiamente periodici (Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa, 1889).

BOSI (L.) — Soluzione della questione 67^a, proposta nel giornale di Battaglini, volume XXVII.

CATANIA (S.) — Sulle cubiche gobbe (Atti Acc. Gioenia di Scienze Naturali in Catania, 1885). — Sulle curve piane algebriche del quarto ordine. Catania, 1883.

DEMCZYNSKI (G.) — Elementi di aritmetica teorico-pratica ad uso delle Scuole secondarie del Regno. 2^a edizione. Milano, Cesana, 1890. Prezzo L. 2, 50.

FRATTINI (G.) — Aritmetica pratica ad uso delle Scuole elementari del Regno. Parte I, 3^a edizione: cent. 40; parte II. 2^a edizione: cent. 45; parte III, 2^a edizione: cent. 50. G. B. Paravia e C.

GOMES TEIXEIRA (F.) — Curso de Analyse infinitesimal: Calculo integral (primeira parte). Porto, typografia occidental, 1889.

GRABLOVITZ (G.) — Metodo per determinare le costanti della marea lunare con con una o due singole osservazioni al giorno (Annali dell'Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica, Roma, 1889).

GRILLI (R.) — Saggio di un nuovo trattato d'algebra elementare per i Licei. Correggio, 1889.

MILLOSEVICH (E.) — Orbita definitiva della cometa 1888-III (Memorie degli Spettroscopisti italiani, 1889). — Sulla difficoltà di determinare esattamente una differenza di longitudine in estrema prossimità ai poli (Annuario dell'Istituto cartografico italiano, 1889).

NICOLI (F.) — Intorno ad un'interpretazione geometrica dei sistemi di equazioni lineari (Atti della R. Acc. di Scienze lettere ed arti in Modena, 1875). — Intorno ad un caso di movimento di una figura piana la quale scorre nel suo piano e varia rimanendo simile a sè stessa (Id. id. 1881). — Intorno ad un caso di movimento di una figura piana che si conserva simile a sè stessa (Id. id. 1882). — Intorno a due casi di movimento di una figura solida che rimane simile a sè stessa (Id. id. 1882). — Intorno agli elementi uniti di due forme geometriche collineari (Id. id. 1889).

N. N. — Studio riassuntivo della funzione $F(x) = ax^2 + bx + c$. Lecce. Prezzo cent. 20.

RAZZABONI (A.) — Sulla rappresentazione di una superficie su di un'altra al modo di Gauss (Giornale di matematiche di Battaglini. Vol. XXVII, 1889).