ANNO III. Gennaio–Febbraio 1888. FASCICOLO I.

PERIODICO DI MATEMATICA PER L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

DIRETTO DA

DAVIDE BESSO
PROFESSORE DI CALCOLO INFINITESIMALE NELLA R. UNIVERSITÀ DI MODENA

AURELIO LUGLI
PROFESSORE DI MATEMATICA NELLA R. SCUOLA TECNICA F. METASTASIO IN ROMA

SOMMARIO:

con una tavola litografata

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
Via Lata, N. 3.
1888

AVVERTENZA. — L'ufficio del « Periodico » è trasportato in Via della Minerva, 46. — Roma.

Indice Articoli Anno 1888

ALCUNE FORMOLE
OTTENIBILI SEMPLICEMENTE
CHE POSSONO SERVIRE AL CALCOLO APPROSSIMATO
DELLE FUNZIONI CIRCOLARI

1. — Si ha:

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \operatorname{sen}x + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$2^2\operatorname{sen}\frac{x}{2^2} = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2} + 2^2\operatorname{sen}\frac{x}{2^2}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2^2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n} = 2^{n-1}\operatorname{sen}\frac{x}{2^{n-1}} + 2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2^n}\right).$$

Addizionando queste eguaglianze, membro a membro, e sopprimendo i termini comuni a primo e secondo membro, si ottiene:

$$2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n} = \operatorname{sen}x + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2}\right) + 2^2\operatorname{sen}\frac{x}{2^2}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2^2}\right)+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + 2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2^n}\right).$$

Per essere

$$\left(\lim\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\right)_{\lim n=\infty} = 1$$

avremo quindi

$$a)\quad x = \operatorname{sen}x + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right) + 2^2\operatorname{sen}\frac{x}{2^2}\left(1-\cos\frac{x}{2^2}\right)+\ldots\ldots$$

Ora è

$$\frac{2^m\operatorname{sen}\frac{x}{2^m}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2^m}\right)}{2^{m-1}\operatorname{sen}\frac{x}{2^{m-1}}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2^{m-1}}\right)} = \frac{1}{2\cos\frac{x}{2^m}\cdot\left(1+\cos\frac{x}{2^m}\right)}$$

epperò

$$2^n \operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{2\cos\frac{x}{2^n}\left(1+\cos\frac{x}{2^n}\right)}\cdot\frac{1}{2\cos\frac{x}{2^{n-1}}\left(1+\cos\frac{x}{2^{n-1}}\right)}\times\ldots$$

$$\ldots\ldots\times\frac{1}{2\cos\frac{x}{2^2}\left(1+\cos\frac{x}{2^2}\right)}\cdot 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right).$$

Ma, se $\frac{x}{2^{m-2}}$ non supera $\frac{\pi}{2}$, è

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{2\cos\frac{x}{2^m}\left(1+\cos\frac{x}{2^m}\right)}<\frac{1}{2\cos\frac{x}{2^{m-1}}\left(1+\cos\frac{x}{2^{m-1}}\right)}\leqq\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

onde sarà per ogni arco x non maggiore di $\frac{\pi}{2}$:

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{\left[2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\right]^{n-1}}>2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\left(1-\cos\frac{x}{2^n}\right)$$

$$2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\left(1-\cos\frac{x}{2^n}\right)>2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{4^{n-1}}.$$

Per la a) e per ciò che è noto sulle progressioni geometriche decrescenti avremo adunque

$$x>\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{4}{3}$$

$$x<\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)-1}$$

ossia

$$b)\quad\frac{1}{3}\left(8\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\operatorname{sen}x\right)<x<\operatorname{sen}x\cdot\left\{1+\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)-1}\right\}\ *)$$

*) Mediante le limitazioni :

2. — Si ha:

$$\operatorname{sen}x \cdot \left\{1 + \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)-1}\right\} = \operatorname{sen}x \cdot \frac{1+2\cos\frac{x}{2}}{\cos x + 2\cos\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{1+2\cos\frac{x}{2}}{\cos x + 2\cos\frac{x}{2}} > \frac{2\cos\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}$$

Da ciò e dal numero precedente risulta che: I valori dati dalla b) come limiti dell'arco x sono, rispettivamente, compresi fra il seno e l'arco e fra questo e la sua tangente.

3. — Ponendo nella b)

$$x = \frac{\pi}{60}$$

ed osservando essere:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = 0{,}258819045102\ldots$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = 0{,}965925826289\ldots$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = 0{,}3090169943749474\ldots$$

$$\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = 0{,}951056516295\ldots$$

$$\frac{x}{2}-\frac{x^3}{48}+\frac{x^5}{120.32}-\frac{x^7}{5040.128} < \operatorname{sen}\frac{x}{2} < \frac{x}{2}-\frac{x^3}{48}+\frac{x^5}{120.32}$$

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040} < \operatorname{sen}x < x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

si trova che, per x non maggiore di 1, la differenza

$$x-\frac{1}{3}\left(8\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\operatorname{sen}x\right)$$

è minore di $\frac{x^5}{479}$, e quindi anche di $\frac{\operatorname{tang}^5 x}{479}$.

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{60} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{12}\right) = 0{,}05233595624\ldots.$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{120} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{60}} - \sqrt{1-\operatorname{sen}\frac{\pi}{60}}\right) = 0{,}026176948\ldots.$$

$$\cos\frac{\pi}{120} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{60}} + \sqrt{1-\operatorname{sen}\frac{\pi}{60}}\right) = 0{,}999657324\ldots.$$

si trova:

$$3{,}1415925 < \pi < 3{,}1415928$$

onde

$$\pi = 3{,}141592\ldots..$$

4. — Avendo un valore approssimato di π, la b) può servire per la determinazione approssimata, in gradi, dell'arco di cui è dato il seno.

Così, posto

$$\operatorname{sen}x = 0{,}0001$$

si ha

$$\operatorname{sen}x < x,\quad \operatorname{sen}\frac{x}{2} < 0{,}00006,\quad 2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right) > 3$$

epperò:

$$0{,}0001 < x < 0{,}0001 + \frac{2\ .\ 0{,}0001\ .\ (0{,}00006)^2}{2}$$

ossia:

$$0{,}0001 < x < 0{,}00010000000036$$

Indicando con g la misura in gradi dell'arco il cui seno è 0,0001 e la misura del quale fatta col raggio indicammo con x, avremo:

$$g = \frac{180^\circ\ .\ x}{\pi}$$

onde:

$$\frac{180^\circ\ .\ 0{,}0001}{3{,}1415928} < g < \frac{180^\circ . 0{,}00010000000036}{3{,}1415925}.$$

Eseguendo i calcoli si trova:

$$20'',6264 < g < 20'',6265$$

epperò:

$$g = 20'',6264\ldots\ldots$$

5. — Per ciò che precede, e particolarmente per la b), si ha per ogni arco x minore di $\frac{\pi}{2}$:

$$x > \operatorname{sen}x > x - \frac{2\operatorname{sen}x \,.\, \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)-1}.$$

Ma la frazione $\dfrac{2\operatorname{sen}x\,\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)-1}$, che è eguale a $\dfrac{4\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}+\cos x}$, è minore di $\dfrac{x^3}{2}\cdot\dfrac{1}{2+\dfrac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}}}$, e inoltre il rapporto $\dfrac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}}$, che è eguale alla differenza $\cos\frac{x}{2}-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2}$, diminuisce sempre quando x cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$; perciò, se x non è maggiore di $\frac{\pi}{3}$, si ha

$$\frac{2\operatorname{sen}x\,\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)-1} < \frac{x^3}{2}\cdot\frac{1}{2+\frac{\sqrt{3}}{3}} < \frac{x^5}{5},$$

e in conseguenza

$$\operatorname{sen}x > x - \frac{x^3}{5}$$

... dalla

$$2\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \mathrm{tg}x - \mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}$$

... processo analogo a quello che condusse alla *a*)
... che

$$\left\{\lim \frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\right\}_{\lim n = \infty} = 1$$

$$... \mathrm{tg}x - \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\ \mathrm{tg}^2\frac{x}{2^2} - 2^2\mathrm{tg}\frac{x}{2^2}\ \mathrm{tg}^2\frac{x}{2^3} - \ldots.$$

... — Dal punto D della bisettrice dell'angolo acuto ACB ... le DE, DB perpendicolari ai lati: prolunghiamo ... incontrare in A il lato CA e sulla DE, prolungata, ... DF eguale ad AD.

... ACB, che è doppio dell'angolo FAE, sia la ... parte di un retto. L'angolo CAB sarà precisamente ... FAE onde sarà

$$ED > 2nFE, \quad BA < 2BD + \frac{1}{2n}BD.$$

... Se con x s'indica un angolo non maggiore della $(n+1)^{ma}$ parte d'un retto, si ha:

$$2\mathrm{tg}\frac{x}{2} < \mathrm{tg}x < \left(2 + \frac{1}{2n}\right)\mathrm{tg}\ \frac{x}{2}.$$

... — Per l'ultima formula e per la *d*) abbiamo:

$$x < \mathrm{tg}x - \mathrm{tg}x.\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\cdot\left[1 + 2\left(\frac{1}{2+\frac{1}{2n}}\right)^3 + 2^2\left(\frac{1}{2+\frac{1}{2n}}\right)^6 + \ldots\ldots\right]$$

$$x > \mathrm{tg}x - \mathrm{tg}x.\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\cdot\left[1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2^2\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \ldots\ldots\right]$$

ossia, per ciò che è noto sulle progresssioni decrescenti, e perchè $\operatorname{tg}x\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, avremo:

$$e)\quad \frac{(4n+1)^3}{(4n+1)^3-16n^3}\cdot 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{16n^3\cdot\operatorname{tg}x}{(4n+1)^3-16n^3}>x>\frac{8}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{tg}x$$

dove supporremo

$$n \overline{\overline{>}} 1,\quad (n+1)x \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}$$

9. — **Partendo dalla**

$$\cot x = 2\cot 2x + \operatorname{tg}x$$

e seguendo un processo simile a quello che condusse alla *a*), si trova:

$$f)\quad \frac{1}{x}=\cot x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\frac{1}{2^3}\operatorname{tg}\frac{x}{2^3}+\ldots\ldots$$

Da questa, per quanto fu detto al numero 7, segue:

$$g)\quad \cot x+\frac{4n+1}{3n+1}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}<\frac{1}{x}<\cot x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot$$

Qui pure supporremo

$$n \overline{\overline{>}} 1.\quad (n+1)x \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}\cdot\ (^*)$$

FRANCESCO GIUDICE.

(*) Le *e*), *g*) possono servire agli stessi usi a cui serve la *b*).

Le *a*), *d*), *f*) hanno i secondi membri convergenti per tutti i valori dell'arco x perchè nei medesimi il rapporto del termine n^{esimo} al termine $(n-1)^{esimo}$, crescendo indefinitamente n ha per limite $\frac{1}{4}$.

La *f*) è proposta come esercizio di sviluppo in serie da CHARLES DE COMBEROUSSE « *Cours de Mathématiques* — Tome 3.e — Algèbre supérieure — première partie — p. 724 ».

PICCOLO CONTRIBUTO
ALLA TEORIA GEOMETRICA DELL'EQUIVALENZA

Il teorema, che serve di fondamento a questa nota è molto antico, benché non ne sia fatto cenno nei nostri trattati di Geometria elementare; fra le dimostrazioni conosciute alcune sono elementari (*), altre riposano sopra teorie della matematica superiore (**); da quella di *Pappo*, qui riprodotta, io mi propongo di dedurre come corollari teoremi noti molto importanti, che finora credo non sieno stati considerati sotto questo aspetto comprensivo e che perciò stimo potranno essere utili nelle nostre scuole secondarie.

Teorema. — *Sia* ABC *un triangolo* (Fig. 1, tav. I), ABDE, ACFG *due parallelogrammi qualunque costruiti su* AB *ed* AC; H *il punto comune a* DE, FG; *la somma dei due paralleg. è equivalente al parallelog. costruito con due segmenti eguali e paralleli a* BC *ed* AH.

Dimostrazione. — Dai punti B e C si conducano le parallele alla HA sino ad incontrare in K ed N le DH ed FH; si unisca K con N e si prolunghi la HA sino ad incontrare in O e in P le KN e BC (***). Dico che si ha

$$\text{paralg. BN} = \text{paralg. BE} + \text{paralg. CG}.$$

Infatti

$$\text{paralg. BE} = \text{paralg. AK} = \text{paralg. KP}$$

$$\text{paralg. CG} = \text{paralg. AN} = \text{paralg. NP}$$

quindi

$$\text{paralg. BE} + \text{paralg. CG} = \text{paralg. KP} + \text{paralg. NP} = \text{paralg. BN}.$$

(*) *Pappi*. — Math. collec., IV, th. I.

(**) *Laisant*. — Introduction à la méthode des quaternions.

(***) Se il punto P non cade fra B e C ma sul prolungamento di BC, il processo della dimostrazione fa vedere che il rettangolo delle BC ed AH sarebbe equivalente alla differenza dei due parallelogrammi.

Corollario 1° — Sopra i lati AB, AC di un triangolo si costruiscano due triangoli qualunque e pei vertici di questi, opposti ad AB ed AC, si conducano le parallele a questi lati fino ad incontrarsi in H; la somma dei due triangoli è equivalente al triangolo avente per lati in grandezza e direzione BC ed AH.

Corollario 2° — Sia A un angolo retto e sui cateti AB ed AC si costruiscano i quadrati ABDE, ACFG. (Fig. 2).

Per il teorema dimostrato la somma dei due quadrati è equivalente al paralg. contenuto dalle BC ed AH; ma il triangolo AEH ≡ ABC quindi HA = BC, inoltre da questa eguaglianza si ricava ancora che la somma dei due angoli BAM, ed ABM è eguale ad un retto e perciò la AH è anche perpendicolare alla BC; allora il paralg. della BC ed AH non è altro che il quadrato della BC e con ciò è dimostrato il teorema di Pitagora.

Corollario 3° — Sia ancora A un angolo retto e si immagini ridotta nulla la distanza della DE alla AB e si costruisca (Fig. 3) il quadrato sul cateto AC; per il teorema generale questo è equivalente al paralg. BN contenuto dalle BC ed AG. Ma se dai vertici N ed A si abbassano le perpendicolari AP, NQ sull'ipotenusa BC si ottengono i due triangoli eguali NQC e CPA perciò

$$NQ = PC$$

e quindi l'altezza del paralg. BN è eguale alla proiezione del cateto AC sull'ipotenusa, e con ciò è dimostrato che il quadrato costruito su di un cateto è equivalente al rettangolo contenuto dall'ipotenusa e dalla proiezione di quel cateto sopra di essa.

Lemma. — *In un triangolo qualunque i due rettangoli contenuti da uno qualunque dei lati di un angolo A e dalla proiezione dell'altro sopra di essi, sono equivalenti.* (*)

(*) Ecco un' altra dimostrazione di questo stesso teorema del quale si

1° Caso. — Sia A un angolo ottuso; BB' perpendicolare ad AC, CC' perpendicolare a BA: si avrà

$$\text{q.d. } BB' + \text{q. } B'C = \text{q. } CC' + \text{q. } BC'$$

ma (*)

$$\text{q.}BC' = \text{q.}AB + \text{q.}AC' + 2\text{retg.}AB.AC'$$

$$\text{q.}B'C = \text{q.}AB' + \text{q.}AC + 2\text{retg.}AB'.AC$$

quindi sostituendo ed osservando che

$$\text{q.}BB' + \text{q.}B'A = \text{q.}AB, \qquad \text{q.}CC' + \text{q.}AC' = \text{q.}AC,$$

si avrà, dopo aver tolto le figure comuni,

$$\text{retg.}AC.AB' = \text{retg.}AB.AC'.$$

2° Caso. — Sia A un angolo acuto, fatte le medesime costruzioni, comunque cadano i punti B' e C' o sui lati o sui loro prolungamenti si ha

$$\text{q.}BC' + \text{q.}CC' = \text{q.}BB' + \text{q.}B'C,$$

---

ripeterà l'enunciato nel modo seguente:
In un triangolo ABC *in cui l'angolo* A *è ottuso* [*fig.* 9^a] (*acuto* [*fig.*
10^a]), *il rettangolo* ABEL *di* AB *e della proiezione* AH *di* AC *su* AB, *è*
equivalente al rettangolo CAIN *di* AC *e della proiezione* AM *di* AB *su* AC.
Si prolunghi BA finchè incontri IN in Q e si tiri per C la CO paral-
lela ad AB fino ad incontrare IN, il parallelogrammo risultante AO
sarà equivalente al rettangolo AN, ma il parallelogrammo AO è al-
tresì equivalente al rettangolo AD onde i due rettangoli AN, AD (AN,
AVDQ) saranno equivalenti. Si trasformi ora il rettangolo AD in un rettan-
golo equivalente con un lato uguale ad AH; per ciò fare basta prolungare
AC finchè incontri QD in V, tirare VS parallela ad AB e compiere il ret-
tangolo avente per base AH e per altezza QV (o tirare HV e prolungarla
finchè incontri QD in Q', quindi Q'A' parallela ad AB, finalmente compiere
il rettangolo avente per base VC e per altezza DQ'). E facile ora provare
che AS è uguale ad AB (VA' uguale ad AB). Infatti prolungata BM finchè
incontri il prolungamento di LA in T, i due triangoli rettangoli TMA, QIA
risultano uguali, essendo AM = IA e <MAT = <IAQ, quindi QA è uguale
ad AT. Ora i due triangoli TBA, AVQ (TBA, A'VQ') sono pure eguali
giacchè AT = AQ (AT = AQ = A'Q') e <ABT = <QVA (<ABT = <MAT
= <HVA = <A'VQ'), segue da ciò che AS = QV = AB (VA' = AB).
Ma il rettangolo SH è equivalente ad AN (CA' equivalente ad AN), sicchè,
essendo uguali i due rettangoli SH, BL (CA', BL), anche i due rettangoli
BL, AN saranno equivalenti. (A. Lugli).

(*) *Euclide*. — per *Betti* e *Brioschi*. — Libro 2° prop. IV.^{a}

ma (*)

$$q.BC' = q.AB + q.AC' - 2retg.AB.AC'$$

$$q.B'C = q.AC + q.AB' - 2retg.AC.AB'$$

quindi sostituendo nella prima equivalenza ed osservando che

$$q.AC' + q.C'C = q.AC, \quad q.AB' + q.BB' = q.AB,$$

si otterrà, dopo aver tolto le figure eguali,

$$retg.AB.AC' = retg.AC.AB'.$$

Corollario 1.° – Sia ABC un triangolo ottuso in A (Fig. 4) dal vertice A si abbassi la perpendicolare AL sul lato BC e si prolunghi al di là del vertice; prendasi AH = BC, si conducano per H le parallele ad AB ed AC e su questi lati si costruiscano i rettangoli ABDE, ACFG terminati a quelle parallele; si traccino le AP ed AQ proiezioni di ciascuno dei lati AB ed AC sull'altro.

I triangoli AEH, BQC sono eguali per avere eguale l'ipotenusa e l'angolo acuto EAH = QBC perciò sarà AE = BQ e poichè in ogni caso è BQ > AB sarà anche AE > AB.

Si seghi allora dalla AE la EM = AB e si completi il quadrato DM o della AB; il segmento rimanente MA = AQ rappresenta la proiezione di AC sulla AB e però si avrà

$$retg.ABDE = q.AB + retg.AB.AQ \qquad (a)$$

e analogamente

$$retg.ACFG = q.AC + retg.AC.AP. \qquad (b)$$

Ma per il lemma precedente

$$retg.AB.AQ = retg.AC.AP$$

e per il teorema generale

$$retg.ABDE + retg.ACFG = q.BC,$$

quindi sommando membro a membro le (*a*) e (*b*) si avrà

$$q.BC = q.AB + q.AC + 2retg.AC.AP.$$

(*) *Euclide.* — Libro 2°, prop. VII.ª

Corollario [illegible] l'angolo in A del triangolo ABC sia acuto; fatte le [illegible] costruzioni si dimostra come nel corollario precedente che i due triangoli AEH, BQC sono eguali, qualunque sia la posizione del punto Q (sul lato AB o sul suo prolungamento), per avere l'ipotenusa eguale per costruzione, ed un angolo acuto eguale.

Ora se il punto L, piede della perpendicolare calata da A sopra BC, cade fra B e C (Fig. 5) sarà sempre $AE < AB$ ed $AG < AC$; si prolunghino allora le AE ed AG in modo che sia $AM = AB$ ed $AN = AC$ e si completino i quadrati delle AB ed AC; con ciò si è aggiunto a ciascuno dei rettangoli ABDE, ACFG un rettangolo formato da un lato dell'angolo A e dalla proiezione dell'altro sopra di esso, quindi per il lemma precedente e per il teorema generale si ha

$$q.BC = retg.ABDE + retg.ACFG = q.AB + q.AC - 2retg.AC.AP.$$

Se il punto L cade sul prolungamento di BC allora si prolunghi la AE di una lunghezza $EM = AB$ e la AG in modo che $AN = AC$ e si completino il rettangolo ed il quadrato (Fig. 6); allora si avrà per il teorema generale

$$q.BC = retg.ACFG - retg.ABDE$$ (Nota al teorema generale)

ma

$$retg.ACFG = q\,AC - retgAC.AP$$

$$retg.ABDE = retg.AC.AP - q.AB$$

quindi sostituendo si ha

$$q.BC = q.AB + q.AC - 2\,retg.AC.AP.$$

Corollario [illegible] — Sia dato il parallelog. AA'HH' (Fig. 7); si costruiscano i quadrati sui quattro lati e si consideri il triangolo ABC determinato dai due lati dei quadrati concorrenti in A; esso è eguale al triangolo AH'H e però si avrà $BC = AH$, ma per essere l'angolo BAN complementare di HAH' ed anche di ABC ne risulta che AH è anche perpendicolare a BC. Allora se da H si conducono le parallele ai lati AB ed AC, si formeranno due rettangoli ABDE, ACFG la cui somma, per il teorema generale, sarà equivalente al quadrato della diagonale AH.

Analogamente se si considera il triangolo A'B'C' si avrà B'C' eguale e perpendicolare ad A'H', per cui conducendo per H' le parallele alle A'B', A'C' si otterranno due rettangoli A'B'D'E', A'C'F'G' la cui somma sarà equivalente al quadrato della diagonale A'H'.

Ma la somma dei quattro rettangoli considerati forma i quattro quadrati costruiti sui lati del parallelogrammo quindi la somma dei quadrati dei lati di un parallelogrammo è equivalente alla somma dei quadrati delle diagonali.

Osservazione. — Dal corollario precedente si ricava quest'altro teorema che « la somma dei quadrati di due lati di un triangolo è equivalente al doppio della somma dei dei quadrati costruiti sulla metà del terzo lato e sulla mediana ad esso corrispondente ».

Corollario 7º — Sia dato (fig. 8) un quadrangolo inscrivibile AELG; sui lati AE, AG si costruiscano i rettangoli contenuti dai lati opposti e sieno ABDE, ACFG. Il triangolo ABC è eguale ad LEG ed inoltre LA è perpendicolare alla BC; ma l'angolo in H formato dall'incontro delle DE, FG è eguale all'angolo in L del quadrangolo e però il punto H sarà sulla circonferenza ad esso circoscritta ed AH ne sarà il diametro, cosicchè l'angolo ALH è retto e però LH è parallela alla BC.

Ma per il teorema generale la somma dei due rettangoli costruiti è equivalente al parallelogrammo contenuto da rette eguali e parallele a BC ed AH, e questo, per le considerazioni fatte, è equivalente al rettangolo delle diagonali, quindi (teorema di Tolomeo) « il rettangolo delle diagonali di un quadrangolo inscrivibile è equivalente alla somma dei rettangoli contenuti dai lati opposti ».

Alessandria, 7 Dicembre 1887. F. Panizza.

FORMULE SULLE ANNUALITÀ
IN PROGRESSIONE ARITMETICA

Avviene nella pratica che il Calcolatore e più particolarmente il Ragioniere, sieno chiamati a risolvere quistioni relative alle annualità in progressione aritmetica. — In simili casi essi devono ricorrere ad una lunga serie d'operazioni, il che implica sempre una grande perdita di tempo e presenta la facilità di incorrere in errori di conteggio. — Le formule seguenti hanno per iscopo di risolvere tali questioni con sole cinque o sei operazioni aritmetiche.

Formula 1.ª) $$\Sigma_1 = \alpha a \pm \frac{d}{q-1}\left(\alpha - \frac{n}{q^n}\right).$$

Questa formola esprime il valore presente di annualità in progressione aritmetica, pagabili per n anni alla fine di ciascun anno. Infatti se si indica con a l'annualità da pagarsi alla fine del primo anno, con d la ragione aritmetica con cui crescono o diminuiscono le annualità successive, con r il tasso dell'interesse per ogni lira di capitale, con q la somma $1+r$ e con Σ_1 il valore richiesto, si ha:

$$\Sigma_1 = \frac{a}{q} + \frac{a \pm d}{q^2} + \frac{a \pm 2d}{q^3} + \ldots + \frac{a \pm (n-2)d}{q^{n-1}} + \frac{a \pm (n-1)d}{q^n}$$

in cui ciascun termine rappresenta il valore attuale della corrispondente annualità. Si ha ancora:

$$\Sigma_1 = a\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \ldots + \frac{1}{q^n}\right)$$
$$\pm \frac{q}{d}\left(\frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \ldots + \frac{n-2}{q^{n-2}} + \frac{n-1}{q^{n-1}}\right)$$
$$= a\,\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} \pm \frac{d}{q-1}\left(\frac{q^{n-1}-1}{q^{n-1}(q-1)} - \frac{n-1}{q^n}\right)$$
$$= a\,\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} \pm \frac{d}{q-1}\left(\frac{q^n-1}{q^n(q-1)} - \frac{n}{q^n}\right)$$

e ponendo $\frac{q^n - 1}{q^n (q-1)} = \alpha$, coefficiente che trovasi calcolato nei manuali (*), si ha:

$$\Sigma_1 = \alpha a \pm \frac{d}{q-1}\left(\alpha - \frac{n}{q^n}\right)$$

formola che permette di calcolare il valore presente, ecc. con sei operazioni aritmetiche.

Formula 2) $\Sigma_2 = \frac{a}{q^0} + \frac{a \pm d}{q} + \frac{a \pm 2d}{q^2} + \ldots\ldots + \frac{a \pm (n-1)d}{q^{n-1}} = \Sigma_1\, q.$

In questa formola si sono conservate le notazioni precedenti, e Σ_2 esprime il valore attuale di annuità in progressione aritmetica, pagabili per n anni al principio di ciascun anno.

Formula 3) $\Sigma_3 = \gamma a \pm \frac{d}{q-1}(\gamma - n).$

Questa formola esprime l'ammontare alla fine di n anni, di annuità in progres. aritm., versate e messe a frutto alla fine di ciascun anno.

Facendo uso delle precedenti notazioni ed indicando con Σ_3 l'ammontare suddetto, si ha:

$$\Sigma_3 = aq^{n-1} + (a \pm d)q^{n-2} + (a \pm 2d)q^{n-3} + \ldots\ldots + (a \pm (n-2)d)q + (a \pm (n-1)d)q^0$$
$$= a(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1) \pm d(q^{n-2} + 2q^{n-3} + \ldots + (n-2)q + (n-1)q^0)$$

od anche:

$$\Sigma_3 = a\frac{q^n-1}{q-1} \pm d\left(\frac{1-q^{n-1}}{1-q} + \frac{1-q^{n-2}}{1-q} + \ldots + \frac{1-q^2}{1-q} + \frac{1-q}{1-q}\right)$$
$$= a\frac{q^n-1}{q-1} \pm \frac{d}{q-1}(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q - (n-1))$$
$$= a\frac{q^n-1}{q-1} \pm \frac{d}{q-1}\left(\frac{q^n-1}{q-1} - n\right).$$

Ponendo $\frac{q^n-1}{q-1} = \gamma$, coefficiente che trovasi calcolato nei manuali, si ha:

(*) Vedi p. es. Colombo.

$$\Sigma_3 = \gamma a \pm \frac{d}{q-1}(\gamma - n).$$

Formula 4):

$$\Sigma_4 = aq^n + (a \pm d)q^{n-1} + (a \pm 2d)q^{n-2} + \ldots + (a \pm (n-2)d)q^2 + (a \pm (n-1)d)q$$

ossia $\Sigma_4 = \Sigma_3 q$. Questa formola serve a calcolare l'ammontare alla fine di n anni, di annuità in progressione aritmetica, versate e messe a frutto al principio di ciascun anno.

Si notino le seguenti relazioni semplicissime fra le quattro formole esposte.

$$\Sigma_2 = \Sigma_1 q$$
$$\Sigma_3 = \Sigma_1 q^n = \Sigma_2 q^{n-1}$$
$$\Sigma_4 = \Sigma_3 q = \Sigma_2 q^n = \Sigma_1 q^{n+1}.$$

È bene anche notare che si perviene agli stessi risultati applicando, nei quattro differenti casi, la formola che si ricava nella ricerca del termine sommatorio dei prodotti che si ottengono moltiplicando i termini corrispondenti di due progressioni, l'una aritmetica e l'altra geometrica, e cioè la formola:

$$\Sigma = a_1 q_1 \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \pm \frac{dq_1}{1-q}\left[\frac{q(1-q^{n-1})}{1-q} - (n-1)q^n\right]$$

in cui a_1 e d rappresentano rispettivamente il primo termine e la ragione della progressione aritmetica; q_1 e q il primo termine e la ragione della progressione geometrica; n il numero dei termini comune ad entrambe.

Un esempio chiarirà meglio in quali casi può tornar utile l'impiego di queste formole ed il modo di applicarle.

Problema. — Un Consorzio attualmente ha un debito di Lire 164000 rappresentato da 820 obbligazioni al portatore di Lire 200 ognuna, fruttifere il 5 %, oltre la tassa di ricchezza mobile a proprio carico in ragione del 13,6224 % sul reddito e la tassa di circolazione in ragione di L. 0,60 ‰, più L. 1 sulle prime mille lire.

Questo debito si estingue in 41 anni, pagando annualmente L. 4000 ovvero 20 obbligazioni, gli interessi maturati e la tassa di ricchezza mobile corrispondente ad essi, nonchè la tassa di circolazione sull'ammontare del debito. Viene quindi alla fine di ogni anno a ridursi la somma degli interessi e delle tasse, proporzionatamente alla diminuzione che subisce il capitale.

Ora il Consorzio potrebbe riscattare le 820 obbligazioni a L. 192, ovvero pagando L. 15744 e avrebbe trovato il sovventore della somma che la cederebbe a questa condizione: Estinzione in 50 anni, verso il pagamento di tante rate annuali, ciascuna di L. 9446, 40, comprendendo in esse, frutto, quota d'ammortamento, tassa ricchezza mobile, ecc..

Si chiede se al Consorzio convenga fare il riscatto delle sue obbligazioni accettando le condizioni del mutuo, oppure se gli torni più vantaggioso mantenere l'estinzione come attualmente ha fissato coi pesi relativi; e a quanto ascende l'utile o la perdita che risulta dalla liquidazione del prestito fatta, come sopra si è detto, per contanti.

Soluzione. — Per sapere quale di questi due contratti sia il più conveniente, bisogna portarli sopra una base di confronto comune. Nel caso che si considera, questa base di confronto non può essere che l'attualità, o l'ammontare delle somme che si sborserebbero nei due casi, alla fine del periodo più lungo.

Prendiamo prima per base di confronto l'attualità e proponiamoci di trovare il valore attuale del debito del Consorzio ed il valore attuale di quello che incontrerebbe accettando l'offerta del sovventore.

1° Contratto. — Valore attuale del debito del Consorzio:

Anno	Obbligazioni in circolazione	Importo delle obbligazioni estinte in ciascun anno	Interessi annui		Tassa di ricchezza mobile		Tassa di circolaz.		Importo delle diverse annualità		Differenza costante fra due annualità successive
1887	820	4000	8200	00	1117	036	99	40	13416	436	229.664
1888	800	4000	8000	00	1089	792	97	00	13186	792	(*)
1889	780	4000	7800	00	1062	547	94	60	12957	147	

(*) La differenza 229,644 nel nostro caso si può trovare anche in un altro modo. Indicando con a l'importo delle obbligazioni che si estinguono

In questo caso si ha:

$$a = \text{L. } 13416{,}436;\ d = 229{,}644;\ n = 41;\ q = 1{,}05.$$

Nei manuali si trova:

$$\overline{1{,}05}^{41} = 7{,}39198815 \quad \text{e} \quad \alpha = 17{,}29436.$$

Applicando la formola 1) si ha:

$$\sum\nolimits_1 = 17{,}29436 \times 13416{,}436 - 4592{,}88 \left(17{,}29436 - \frac{41}{7{,}39198815}\right)$$

$$= 232028{,}674 - 53956{,}327 = 178072{,}347.$$

2° Contratto. — Valore attuale del debito che il Consorzio incontrerebbe accettando l'offerta del sovventore.

Qui bisogna far uso della formula $C = \alpha a = \dfrac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}\, a$.

Si trova:

$$C = \frac{9446{,}40 \times 10{,}46739979}{11{,}46739979 \times 0{,}05} = \text{L. } 172452{,}77.$$

Il guadagno attuale che avrebbe il Consorzio accettando l'offerta del sovventore per riscattare le sue obbligazioni sarebbe di L. 5619,577. Questa somma impiegata agli interessi composti per cinquant'anni, deve dare l'utile che si ha alla fine di questo periodo.

Indicando con c questo utile si ha:

$$c = aq^n = 5619{,}57 \times 11{,}46739979 \qquad c = \text{L. } 64443{,}14.$$

Ora per controllare quest'ultimo risultato e per vedere il modo d'applicazione della formola 3) prendiamo per base di confronto l'ammontare delle somme che si sborserebbero nei due casi, alla fine del periodo più lungo.

---

ogni anno, con r l'interesse di una lira di capitale, con b la tassa di ricchezza mobile per ogni lira di reddito, con c quella di circolazione per ogni lira di capitale e con x la differenza cercata si ha:

$$x = a\,(r + br + c).$$

In questo caso

$$x = 4000\,(0{,}05 + 0{,}136224 \times 0{,}05 + 0{,}0006) = 229{,}644.$$

1° Contratto: $\sum_3 = 127{,}839763 \times 13416{,}436 - 4592{,}88 \times 86{,}839763$,
giacchè nei manuali si trova

$$\gamma = \frac{\overline{1{,}05}^{41} - 1}{1{,}05 - 1} = 127{,}839763.$$

Eseguendo le operazioni si ha:

$$\sum_3 = 1316309{,}388.$$

Alla fine di cinquant'anni questo capitale ammonterebbe a:

$$\sum = 1316309{,}388 \times \overline{1{,}05}^9 = 2042027{,}90.$$

2° Contratto. — Impiegando la formola $\gamma = a\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ si ha:

$$\gamma = \frac{9446{,}40 \times 10{,}46739070}{0{,}05} = 1977584{,}76.$$

L'utile che avrebbe il Consorzio alla fine dei cinquant'anni, accettando l'offerta del sovventore e riscattando le sue obbligazioni sarebbe ancora di L. 2042027,90 — 1977584,76 = L. 64443,14.

Mollini Ing. Maurelio.

ESERCIZI PER LA SCUOLA
ARITMETICA

Divisibilità dei numeri.

1. Qual'è la forma generale dei numeri che divisi per 7 danno per resto 3?
2. Qual'è la forma generale dei numeri che divisi per 7 danno per resto 3 e per 9 danno per resto 7?

3. Qual'è la forma generale dei numeri che divisi per 5 danno per resto 2, divisi per 6 danno per resto 5 e per 9 danno per resto pure 5?

4. Qual'è la forma generale dei numeri che divisi per 5 danno per resto 2, per 7 danno per resto 4, per 9 danno per resto 5 e sono inoltre divisibili esattamente per 8?

5. Dimostrare che la forma generale dei numeri che divisi per 5, 7, 9 danno per resti rispettivamente i numeri r_1, r_2, r_3 è:

$$315.k + 126.r_1 + 225.r_2 + 280.r_3,$$

dove k rappresenta un intero qualunque.

6. In qualsiasi sistema di numerazione, la condizione di disibilità di un numero per un divisore della base diminuita dell'unità è che sia divisibile per questo divisore la somma dei valori assoluti delle cifre del numero.

Così ad es. avendosi $10^4 - 1 = 9999 = 3^2.11.101$ e considerando il numero 137057 riferito al sistema di numerazione di base 10^4, si avrà che il numero stesso sarà divisibile per 101 se $7057 + 13$ è divisibile per 101.

7. In qualsiasi sistema di numerazione, la condizione di divisibilità di un numero per un divisore della base aumentata dell'unità è che sia divisibile per questo divisore la differenza fra la somma delle cifre di posto impari e quella delle cifre di posto pari.

Così avendosi $10^4 + 1 = 10001 = 73.137$, il numero 2524997 sarà divisibile per 73 e 137 se è divisibile per questi numeri la differenza $4997 - 252$.

8. Indicando con a, b, c, d, e, f, ... ordinatamente le cifre di un numero a cominciare da quella delle unità, dimostrare che se

$$(a + 3b + 2c) - (d + 3e + 2f) + \ldots\ldots$$

è divisibile per 7, lo stesso accade per il numero dato.

Applicare il teorema precedente a verificare che i numeri 63483; 7483273; 84325164, sono divisibili per 7.

9. Indicando con a la cifra delle unità di un numero e con b il numero che si deduce da esso sopprimendo la cifra a, dimostrare che se la quantità $b - 2a$ o $2a - b$, secondochè $b \gtreqless 2a$, è divisibile per 7, anche il numero dato è divisibile per 7.

Dedurre dalla regola precedente che il numero 34125 è divisibile per 7 poichè formando la successione di numeri $3412 - 10 = 3402$; $340 - 4 = 336$, $33 - 12 = 21$, l'ultimo di questi è divisibile per 7.

10. Indicando, come precedentemente, con a la cifra delle unità di un numero e con b la parte rimanente di questo numero, se $b + 4a$ è divisibile per 13, anche il numero dato è divisibile per 13.

Il numero 47346 è divisibile per 13 poichè, formando la serie dei numeri: $4734 + 24 = 4758$; $475 + 32 = 507$; $50 + 28 = 78$; $7 + 32 = 39$, l'ultimo di questi è divisibile per 13.

11. Indicando con a, b, c, d, e, f,.... ordinatamente le cifre di un numero cominciando da quella a delle unità, dimostrare che essendo divisibile per 13 la quantità:

$$(a + 10b + 9c) - (d + 10e + 9f) + \ldots\ldots,$$

anche il numero dato è divisibile per 13.

Verificare che i numeri 74854; 2647350; 864752100 sono divisibili per 13.

12. Indicando con a la cifra delle unità di un numero e con b la rimanente parte di questo numero, se $b + 2a$ è divisibile per 19, anche il numero dato è divisibile per 19.

Il numero 62035 è divisibile per 19 poichè nella serie dei numeri $6203 + 10 = 6213$; $621 + 6 = 627$; $62 + 14 = 76$; $7 + 12 = 19$; l'ultimo è divisibile per 19.

13. Rappresentando con a il numero formato dalle due prime cifre a destra di un numero dato e con b la parte di questo che si ottiene sopprimendo a, si hanno le seguenti proprietà :

1° Se $a + 2b$ è divisibile per 7, anche il numero dato è divisibile per 7.

2° Se $a - 2b$ o $2b - a$, secondochè $a > 2b$ od $a < 2b$, è divisibile per 17, anche il numero dato è divisibile per 17.

3° Se $a + 8b$ è divisibile per 23, anche il numero dato è divisibile per 23.

4° Se $7a + 4b$ è divisibile per 29, anche il numero dato è divisibile per 29.

5° Se $5a + 4b$ è divisibile per 31, anche il numero dato è divisibile per 31.

6° Se $b - 3a$ o $3a - b$, secondochè $b \gtrless 3a$, è divisibile per 43, anche il numero dato è divisibile per 43.

7° Se $a + 6b$ è divisibile per 47, anche il numero dato è divisibile per 47.

8° Se $6b - a$ o $a - 6b$, secondochè $6b \gtrless a$, è divisibile per 53, anche il numero dato è divisibile per 53.

Così ad es : — il numero 34125 è divisibile per 7 perchè l'ultimo dei numeri $682 + 25 = 707$; $14 + 7 = 21$, è divisibile per 7 — il numero 58684 è divisibile per 17 perchè l'ultimo dei numeri $1172 - 84 = 1088$, $88 - 20 = 68$, è divisibile per 17 — il numero 74773 è divisibile per 23 poichè nella serie dei numeri $73 + 5976 = 6049$; $49 + 480 = 529$, $29 + 40 = 69$, l'ultimo è divisibile per 23 — il numero 942906 è divisibile per 29 poichè nella serie dei numeri $37716 + 42 = 37758$; $1508 + 406 = 1914$; $76 + 98 = 174$, l'ultimo è divisibile per 29 — il numero 1007934 è divisibile per 31 perchè formando la serie dei numeri $40316 + 170 = 40486$; $1616 + 430 = 2046$; $80 + 230 = 310$, l'ultimo è divisibile per 31 — il numero 139793 è divisibile per 43 perchè l'ultimo dei numeri $1397 - 279 = 1118$; $54 - 11 = 43$, è divisibile per 43 — il numero 152797 è divisibile per 47, poichè nella serie dei numeri $9162 + 97 = 9259$; $552 + 59 = 611$; $36 + 11 = 47$, l'ultimo è divisibile per 47 — il numero 172303 è divisibile per 53 poichè nella serie dei numeri $10338 - 3 = 10335$; $618 - 35 = 583$; $83 - 30 = 53$, l'ultimo è divisibile per 53.

14. Indicando con a la cifra delle unità di un numero e con b la parte rimanente di esso, se $4a + 3b$ è divisibile per 37, anche il numero dato è divisibile per 37.

Il numero 126577 è divisibile per 37 poichè nella serie dei numeri $37071 + 28 = 37099$; $11397 + 36 = 11433$; $3429 + 12 = 3441$; $1032 + 4 = 1036$, $809 + 24 = 333$, $99 + 12 = 111$; $33 + 4 = 37$, l'ultimo è divisibile per 37.

15. Indicando con a il numero formato dalle prime tre cifre a destra di un numero dato e con b la parte rimanente di questo numero, se $2b - 5a$ o $5a - 2b$, secondochè $2b \gtreqless 5a$, è divisibile per 41 o 61 anche il numero dato è divisibile per 41 o 61.

Il numero 1330491 è divisibile per 41 poichè $2660 - 2455 = 205$, è divisibile per 41 — il numero 4484232 è divisibile per 61, poichè nella serie dei numeri $8968 - 1160 = 7808$; $4040 - 14 = 4026$; $130 - 8 = 122$, l'ultimo è divisibile per 61.

16. Indicando con a il numero formato dalle prime quattro cifre a destra di un numero dato e con b la parte rimanente di questo numero, che si ottiene sopprimendo a, se $b - 2a$ o $2a - b$, secondochè $b \gtreqless 2a$, è divisibile per 59, anche il dato numero è divisibile per 59.

Il numero 136585 è divisibile per 59, poichè nella serie dei numeri $13170 - 13 = 13157$, $6314 - 1 = 6313$, l'ultimo è divisibile per 59.

Riepilogando si può formare la seguente tabella delle condizioni di divisibilità di un numero pei numeri primi 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 61.

a unità del numero, b parte rimanente	se $b-2a$ o $2a-b$	è divisibile per	7	lo stesso accade	del num°
	se $b+4a$	»	13	»	»
	se $b+2a$	»	19	»	»
	se $4a+3b$	»	37	»	»
a numero formato da unità e decine, b parte rimanente	se $a+2b$	»	7	»	»
	se $2b-a$ o $a-2b$	»	17	»	»
	se $a+8b$	»	23	»	»
	se $7a+4b$	»	29	»	»
	se $5a+4b$	»	31	»	»
	se $b-3a$ o $3a-b$	»	43	»	»
	se $a+6b$	»	47	»	»
	se $6b-a$ o $a-6b$	»	53	»	»
a numero formato da da unità, dec., cent., b parte restante.	se $2b-5a$ o $5a-2b$	»	41 o 61	»	»

A. Lugli.

DIMOSTRAZIONE DEL 2° DEI TEOREMI PROPOSTI a Pag. 156. (Periodico, 1887).

Se un triangolo ABC *ruota intorno ad un punto* O *del suo piano, e sia* A'B'C' *una qualunque delle posizioni che esso prende in questa rotazione; se inoltre* a, b, c *sono i punti d'incontro dei lati corrispondenti dei due triangoli* ABC *ed* A'B'C', *si hanno le seguenti proprietà:*

1° *Se il punto* O *è il centro del cerchio circoscritto al triangolo* ABC, *sarà anche il punto d'incontro delle altezze del triangolo* abc.

2° *Se il punto* O *è il punto d'incontro delle altezze del triangolo* ABC, *sarà anche il centro del cerchio inscritto nel triangolo* abc.

3° *Se il punto* O *è il centro del cerchio inscritto nel* *triangolo* ABC, *sarà anche il centro del cerchio circoscritto al triangolo* abc.

4.° *Se il punto* O *è situato sulla circonferenza circoscritta al triangolo* ABC, *i punti* a, b, c *saranno in linea retta, cioè i triangoli* ABC *e* A'B'C' *saranno omologici.*

A. Sauve.

Dimostrazione del Prof. *G. Riboni.* (*)

1.° Poichè l'arco $AA' = CC'$, il triangolo CbA' è isoscele e la perpendicolare condotta da b su CA', cadendo nel punto medio di questa, passerà per O. Si è ridotti così a dimostrare che ac è parallela a CA', perchè allora la perpendicolare anzidetta è l'altezza del triangolo abc relativamente ad ac. — I punti a, c, B, B' e C', A', B, B' essendo sopra una circonferenza, e B', a, C' per diritto, gli angoli Bca, $BA'C'$ supplementari dello stesso angolo $BB'a = BB'C'$ saranno uguali, ossia $< BcB' + B'ca = BA'B' + B'A'C + CA'C'$, ma $< BcB' = BA'B' + cBA' = BA'B' + CA'C'$, onde $< B'ca = B'A'C$. Le ac, $A'C$ sono perciò parallele c.d.d. — Similmente per le altre due altezze.

2.° Basterà dimostrare che bO è bisettrice dell'angolo abc. — Tanto i punti c, A', A, O che c, A', A, b sono in una circonferenza, ossia la circonferenza $cA'A$ passa per b e per O: perciò $< cAO = cbO$. Similmente si dimostra $< aCO = abO$ e poichè $< cAO = aCO$, perchè entrambi complementari dell'angolo ABC, è pure $< cbO = abO$ ossia Ob è bisettrice dell'$< abc$ c.d.d. — Similmente dicasi di cO, aO.

3.° Come precedentemente si ha che i cinque punti O, c, A', A, b sono in una circonferenza e poichè $< cAO = bAO$, gli archi bO e cO di questa circonferenza saranno uguali e quindi anche le corde corrispondenti, cioè O è equidistante da b e c. — Similmente si dimostra che $Ob = Oa = Oc$, ossia O è il centro del cerchio circoscritto al triangolo abc.

(*) Dimostrazioni analoghe, salvo l'aggiunta relativa al 4.° caso, vennero inviate dai Signori *J. Beyens*, *F. Viaggi*.

4.º Per essere $< cBa = cB'a$ (come supplementi degli angoli uguali ABC, A'B'C') i quattro punti c, B', B, a sono in una circonferenza, inoltre per essere $< OBc = OB'c$ (per l'eguaglianza dei triangoli OBA, OB'A') i quattro punti O, c, B', B sono in una circonferenza che è quella precedente e contiene quindi anche a. Così i cinque punti O, c, b, A, A' e O, a, C, C', b sono in una circonferenza. – Ora $< aOb = BOA$, perchè entrambi supplementari di ACB, togliendo l'angolo comune BOb rimane $< aOB = bOA$, ma $< aOB = acB$ e $< bOA = bcA$, perciò $< acB = bcA$ e poichè cB e cA sono in linea retta, anche ca e cb saranno in linea retta c.d.d.

Giova ora studiare, relativamente a questo caso, la legge del movimento dei centri e degli assi d'omologia del triangolo iniziale colle sue posizioni successive, al che servono i seguenti teoremi:

I.º *Il luogo dei centri d'omologia è la circonferenza circoscritta al triangolo* ABC *e precisamente per ogni nuova posizione* A'B'C' *del triangolo* ABC *il centro d'omologia dei due triangoli è il secondo punto d'intersezione delle circonferenze circoscritte ad* ABC *ed* A'B'C' *(il primo punto d'intersezione è sempre* O).

Infatti siano A'B'C', A''B''C'' (fig. 11ª, tav. I) due nuove posizioni del triangolo ABC. È chiaro che $< OBB' = OAA'$ ed anche $< OBB'' = OAA''$ e sottraendo: $< B'BB'' = A'AA''$, da cui, chiamando M ed M' i centri di omologia di ABC con A'B'C' ed A''B''C'', si deduce facilmente che $< AMB = AM'B$, cioè il centro d'omologia è vertice d'un angolo costante i cui lati passano per A e B. D'altra parte se si ritorna il triangolo nella posizione iniziale le AA' e BB' (formanti quest'angolo di grandezza costante) diventano le tangenti in A e B agli archi descritti dai medesimi punti A e B col centro O: il loro angolo è perciò uguale ad $< AOB$: e quindi anche $< AMB = AOB$, dunque il punto M si muove sull'arco AOB capace dell'$<$ AOB. Ruotando il triangolo nel senso opposto, il punto M descrive l'arco rimanente AB. Il centro d'omologia si muove così sulla circonferenza ABC. — Di più si osservi che si può considerare come posizione iniziale il triangolo $A'B'C'$ ed allora con analogo ragionamento si proverebbe che il centro d'omologia di ABC ed $A'B'C'$ deve appartenere alla circonferenza $A'B'C'$, perciò il centro stesso sarà l'intersezione delle due circonferenze c.d.d.

II.° *Gli assi d'omologia dei medesimi triangoli inviluppano una parabola, alla quale il triangolo* ABC *è circoscritto, e di cui il punto* O *è il fuoco.*

Infatti se cab e $c'a'b'$ sono gli assi d'omologia del triangolo ABC coi triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$, si osservi che per essere i punti c, B, O, a su una circonferenza segue $< cOa = cBa$ e per la stessa ragione $< c'Oa' = cBa$ onde $< cOa = c'Oa'$: si ha dunque l' $< cOa$ di grandezza costante che ruota intorno al vertice: allora i fasci $[O.\ c,\ c' \ldots\ldots]$ ed $[O.a,\ a', \ldots]$ sono proiettivi e proiettive anche le punteggiate $c, c' \ldots.$ ed $a, a' \ldots.$ Le congiungenti i punti corrispondenti, ca, $c'a' \ldots$ inviluppano per conseguenza una conica che è tangente alle rette AB, BC su cui giacciono le punteggiate stesse. Similmente, considerando le punteggiate $a, a' \ldots$ $b, b' \ldots.$, si mostrerebbe come la stessa conica è tangente alla AC. Questa conica poi è una parabola perchè dopo un mezzo giro intorno ad O il triangolo ABC diventa simmetrico della sua posizione iniziale e perciò l'asse d'omologia, tangente alla conica, è all'infinito. Da ultimo si osservi che l' $< cOa$ sotteso dalla porzione ca di tangente mobile compresa fra le tangenti fisse AB e BC è uguale ad $<$ ABC e quindi supplementare dell' $<$ CBD che si ottiene prolungando in D il lato AB, il quale è l'angolo delle due tangenti fisse (*), e di più il punto O è sul cerchio circoscritto al triangolo ABC (formato da tre tangenti alla parabola (**); dunque il punto O è il fuoco della parabola stessa c.d.d.

(*) V. Salmon. — *Trattato delle sezioni coniche.* Cap. XII, n.° 223, corol. 3.°
(**) Idem — Cap. XII, n.° 223, corol. 4.°

QUISTIONI PROPOSTE

1. Dati in un piano due triangoli ABC, DEF ed un punto, se le rette congiungenti questo punto con i vertici A, B, C, D, E, F segano i lati rispettivamente opposti ad essi nei punti A', B', C', D', E', F', i tre punti nei quali le rette AD, BE, CF tagliano ordinatamente le rette $A'D'$, $B'E'$, $C'F'$ sono situati in una stessa retta.

2. Dati due tetraedri ABCD, EFGH ed un punto, se le rette congiungenti questo punto con i vertici A, B, C, D, E, F, G, H segano le facce rispettivamente opposte ad essi nei punti A', B', C', D', E', F', G', H', i quattro punti nei quali le rette AE, BF, CG, DH tagliano ordinatamente le rette $A'E'$, $B'F'$, $C'G'$, $D'H'$ sono situati in uno stesso piano.

F. Nicoli.

3. Dimostrare che, se un emisfero è diviso in due parti equivalenti da un piano parallelo alla sua base, il rapporto della distanza del piano segante dalla base al raggio della sfera è eguale a 2 sen10°.

4. Risolvere il sistema di equazioni

$$x - yz = a\ \sqrt{1-y^2}\ \sqrt{1-z^2}$$

$$y - zx = b\ \sqrt{1-z^2}\ \sqrt{1-x^2}$$

$$z - xy = c\ \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-y^2}$$

5. Sia dato un triangolo sferico, e si costruisca un altro triangolo sferico coi vertici nei punti medii dei lati del primo. Se la somma degli angoli del primo triangolo è eguale a 360°, ciascun lato del secondo è di 90.° E se il secondo triangolo ha un lato di 90°, la somma dei tre angoli del primo è eguale a 360°.

D. Besso.

6. Dato un triangolo si conducano le bisettrici dei suoi angoli BAC, CBA, ACB, e sui loro prolungamenti si prendano i punti A_1 B_1 C_1 ad un'eguale distanza x dai lati BC, CA, AB e in modo che i segmenti AA_1, BB_1, CC_1 sieno attraversati dai corrispondenti lati BC, CA, AB. Esprimere la distanza x in funzione dei lati del triangolo ABC e dell'area del triangolo $A_1B_1C_1$.

F. Verde.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Die Elemantargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, systematisch und kritisch behandelt von D.r Otto Rausenberger. Leipzig, 1887, p. VI e 236.

È opinione del Sig. Rausenberger che i trattati recenti di Geometria elementare non siano che nuove edizioni, aumentate e migliorate, degli *Elementi* di Euclide; i moderni secondo lui non fecero che apportare qualche lieve contribuzione al contenuto, qualche piccolo miglioramento nella distribuzione delle materie, qualche semplificazione in certe dimostrazioni. Noi invece crediamo che, se ciò è vero per molti, non è vero per tutti i libri che vennero pubblicati in questi ultimi anni; e siamo sicuri che se il Sig. Rausenberger cercherà più accuratamente nella letteratura della dotta sua patria o nella nostra, troverà dei lavori che il geometra Greco non riconoscerebbe certamente come emanazioni della sua grande Opera.

La consuetudine di seguire tanto fedelmente il metodo antico è, secondo il precitato scienziato, da biasimarsi perchè con ciò la Geometria appare, non come un tutto organico, ma piuttosto come un agglomeramento di teoremi e problemi succedentisi in un ordine logico bensì, ma non tale che renda palese essere essi sufficienti a risolvere tutte le principali questioni che appartengono alla teoria a cui si riferiscono. A nostro avviso in questa affermazione vi è qualche cosa di vero, ma essa non è totalmente conformealla verità; chè in molti casi è evidente che i trattatisti pensarono di potersi dispensare dal cementare le varie proposizioni con osservazioni opportune lasciando questo còmpito alla parola del maestro o alla meditazione individuale. — Col libro di cui più sopra sta scritto il titolo, l'A. si è proposto di ovviare all'inconveniente testè accennato; e noi vogliamo segnalarlo all'attenzione di quei lettori di questo *Periodico* che occupano qualche cattedra nell'insegnamento secondario, sicuri che la lettura di esso renderà loro più facile lo svelare gli intimi legami che si possono dimostrare fra varie parti della Geometria elementare.

Non già che noi dividiamo totalmente i modi di vedere dell'A. chè in certi punti della sua esposizione è troppo evidente la tendenza del suo spirito a ricorrere a considerazioni analitiche; p. es. la distinzione fra relazione algebrica e relazione trascendente che ricorre assai spesso, la considerazione speciale di certe quantità come radici di equazioni algebriche, la introduzione degli infinitesimi di varii ordini e simili, non sarebbero certamente da adottarsi nelle scuole in cui vengono insegnati i rudimenti della Geometria perchè non verrebbero certamente compresi.

Nè questi sono gli unici elementi di disaccordo fra noi e il Sig. Rausenberger, ma per brevità omettiamo gli altri.

Invece ci sembra consigliabile seguirlo nell'introdurre la Trigonometria piana come un capitolo della Geometria metrica piana e la Trigonometria sferica come uno della Geometria metrica dello spazio; infatti lo scopo ultimo di queste discipline non è forse di risolvere certe questioni che si presentano spontanee accanto a quelle che l'ordinaria Geometria risolve ma la cui soluzione richiede mezzi di cui essa non dispone? Il farne, come si suole, due dottrine a parte, non è quindi stabilire delle divisioni contrarie alla natura delle cose?

Un altro vantaggio che molti trarranno dallo studio del libro del Sig. Rausenberger è la conoscenza di certi complementi importanti che i moderni fecero alle parti più elementari della Geometria; citeremo come esempio le ricerche di Geometria non euclidea (a proposito della quale l'A. fa alcune critiche, che ci sembrano fondate, al noto sistema di G. Bolyai) e l'estensione della teoria dei poliedri a poliedri molteplicemente connessi. – Ma anche qui però non crediamo che l'A. abbia saputo conservare una giusta misura; chi crederebbe, ad esempio, di trovare nel libro di cui parliamo dopo l'esposizione della teoria degli elementi all'infinito quale è considerata dall'ordinaria Geometria di posizione, un cenno del modo in cui si sogliono considerare distribuiti tali elementi nella rappresentazione geometrica dei numeri complessi? e chi non si meraviglierà di incontrare anche le coordinate baricentriche e la nozione che il teorema sull'esagono inscritto in due rette è caso particolare, non solo del teorema di Pascal, ma anche di quello che dice: tre cubiche piane aventi otto punti comuni ne hanno in conseguenza un nono?

Malgrado queste mende, malgrado la redazione ineguale, in certi punti inesatta ed evidentemente affrettata, noi crediamo che il libro del Sig. Rausenberger potrà essere utile a molti, specialmente per l'azione suggestiva che ci sembra avere sui lettori. Vi sono certe parti della Scienza che, per esser state da noi studiate in un'epoca della nostra vita in cui lo spirito critico non era peranco sufficientemente sviluppato, e per non esser poi state il soggetto di nuove meditazioni, vengono considerate in un modo unico a cui non pensiamo ad apportare le modificazioni che uno studio rinnovato manifesterebbe necessarie; quindi la lettura di un libro che obblighi a ripensarvi, che insegni spesso a rimediare ai difetti che in quelle parti della Scienza esistono, sarà certamente opportuno per chiunque opini essere i metodi per istudiare una disciplina suscettibili di progresso quanto la disciplina stessa.

Genova, 18 Novembre 1887.

GINO LORIA.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1887; N. 4.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche pubblicato da *B. Boncompagni*. Tomo XX. Marzo, Aprile 1887. Roma.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXV. Settembre e Ottobre. Napoli, 1887.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lèvy*, Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 3e série. Onzième année. N. 11, 12. Paris, 1887; douzième année: N. 1, Paris 1888.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*. 12e Année. N. 4, 5, 6, 7, 8, 9. Paris, M. Nony et C.ie, 17 Rue des Écoles, 1887.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira*. Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VIII, n. 2. Coimbra, 1887.

Le Scuole Secondarie eco dell'Associazione nazionale fra gl'insegnanti delle scuole secondarie. Anno V. N. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Milano 1877.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome septième: novembre, décembre, 1877: Tome huitième: janvier 1888.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). — Anno XXV, 1886. — Serie 2.a Vol. 1. 1887. Napoli.

Rivista didascalica. Organo della società didascalica italiana. — Anno I, Novembre, Dicembre 1887, fasc. 8, 9, 10. Roma, 1887.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XIX. N. 18 al 24. Firenze, 1887.

AMODEO F. — Sopra un particolare connesso (2, 2) con due punti singolari e due rette singolari.

BELTRAMI (E.) — Sulla teoria delle onde (Rendiconti Ist.° Lomb.° 1886) — Sulle funzioni sferiche d'una variabile (id. id. 1877). — Sulle funzioni complesse (id. id. id.) — Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore. Bologna, 1887.

CASORATI F. — Sopra le *coupures* del Sig. Hermite, i *Querschnitte* e le superficie di Riemann, ed i concetti d'integrazione sì reale che complessa (Annali di Matematica 1887).

DAINELLI U. — Sulla rettificazione della cicloide (1881) — Sopra la velocità e l'accelerazione d'un punto soggetto ad una forza centrale. Bologna 1884. Sul movimento di un punto pesante sopra rette inclinate nel vuoto e senz'attrito. Bologna 1886. — Del moto di un punto materiale libero sollecitato da una forza diretta costantemente ad una retta fissa. Bologna 1877.

DE LONGCHAMPS G. — Sur le trifolium (Journal de mathématiques spéciales, 1887). — Rapprochement entre la Trisectrice de Mac-Laurin et la Cardioïde (1877) — Sur une trisectrice remarquable (Mathesis, 1888).

D'OCAGNE M. — Les cordonnées parallèles de points (Nouvelles annales de Mathématiques, 1877). — Sur une quartique unicursale (1886). — Sur les courbes algébriques de degré quelconque (Paris 1887). — Monographie de la symédiane.

GUCCIA G. B. — Théorème sur les pointes singuliers des surfaces algébriques (1887).

GUIMARAES R. — Semelhança e rectificação dos arcos ellipticos. Porto, 1887.

JAMET V. — Essai d'une nouvelle théorie élémentaire des logarithmes. — Paris, Librairie Nony e C, 1888.

JUNG G. — Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque (Annali di matematica, 1888).

MARTINI T. — Sulla velocità del suono nei liquidi. — Venezia, 1886.

RICCARDI P. — Saggio di una bibliografia euclidea. Parte I e II, (Rendiconti R. Acc. Bologna, 1877).

(Il seguito al prossimo fascicolo).

Errata-Corrige. — In luogo del numero 3330667 nella penultima e sestultima linea a pag. 174 del Vol. II, 1887, si legga 333667.

In luogo del fattore $\frac{q}{d}$ nella terzultima formola a pag. 14 di questo fascicolo, leggasi $\frac{d}{q}$.

SULL'ESTRAZIONE DI RADICE
APPROSSIMATA
DAI NUMERI ARITMETICI

1. Dalla

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a})\,(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}\times\sqrt[n]{a}+\dots\dots+\sqrt[n]{a^{n-1}})}{(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\,(\sqrt[n]{b^{n-1}}+\sqrt[n]{b^{n-2}}\times\sqrt[n]{a}+\dots\dots+\sqrt[n]{a^{n-1}})}$$

si ricava

$$\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}+(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\times\frac{x-a}{b-a}\times\frac{(\sqrt[n]{b^{n-1}}+\dots\dots+\sqrt[n]{a^{n-1}})}{(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\dots\dots+\sqrt[n]{a^{n-1}})}.$$

Da quest'ultima, supposto

$$0<a<x<b$$

segue la limitazione:

$$\alpha)\quad \sqrt[n]{a}+(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\,\frac{x-a}{b-a}<\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{a}+(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\frac{x-a}{b-a}\,\frac{\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}.$$

Parimenti dalla

$$\frac{b-x}{b-a}=\frac{(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{x})\;(\sqrt[n]{b^{n-1}}+\dots\dots+\sqrt[n]{x^{n-1}})}{(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\;(\sqrt[n]{b^{n-1}}+\dots\dots+\sqrt[n]{a^{n-1}})}$$

segue la

$$\beta)\quad \sqrt[n]{b}-(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\,\frac{b-x}{b-a}<\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{b}-(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\,\frac{b-x}{b-a}\,\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}$$

2. Se $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$ sono numeri razionali, che limitano $\sqrt[n]{x}$; partendo da quelli si possono ottenere due nuovi limiti per questa quantità.

Le formole α) *e* β) *danno lo stesso limite inferiore*, essendo

$$\left[\sqrt[n]{a}+(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\;\frac{x-a}{b-a}\right]-\left[\sqrt[n]{b}-(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\,\frac{b-x}{b-a}\right]=0.$$

Il valore di esso limite inferiore, *che è maggiore di* $\sqrt[n]{a}$, come si vede immediatamente nella α), risponderebbe all'ipotesi che le differenze dei numeri fossero proporzionali a quelle delle loro potenze dello stesso grado.

Il limite superiore dato dalla β) *è minore di* $\sqrt[n]{b}$. Quello dato dalla α) può risultare maggiore.

3. Pongasi

$$D = \sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a}$$

$$D_1 = \left[\sqrt[n]{a} + (\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a})\frac{x-a}{b-a}\frac{\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}\right] - \left[\sqrt[n]{a} + (\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a})\frac{x-a}{b-a}\right]$$

$$D_2 = \left[\sqrt[n]{b} - (\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a})\frac{b-x}{b-a}\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}\right] - \left[\sqrt[n]{b} - (\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a})\frac{b-x}{b-a}\right]$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}} = 1 - \omega \quad \text{epperò} \quad \frac{\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} = 1 + \frac{\omega}{1-\omega}$$

e si avrà:

$$\gamma) \qquad D_1 = D \times \frac{x-a}{b-a} \times \frac{\omega}{1-\omega}$$

$$\delta) \qquad D_2 = D \times \frac{b-x}{b-a} \times \omega$$

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{x-a}{b-x} \times \frac{1}{1-\omega} = \frac{x-a}{b-x} : \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}.$$

Ora, il limite superiore dato dalla α) è minore, eguale o maggiore, di quello dato dalla β) secondo che D_1 è minore, eguale o maggiore di D_2, onde segue che: *Il limite superiore dato dalla* α) *è minore, eguale o maggiore, di quello dato dalla* β) *secondo che* $\frac{x-a}{b-x}$ *è minore, eguale o maggiore, di* $\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}$.

Essendo

$$\omega = 1 - \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}, \quad \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}} > \frac{a}{b}$$

segue che: *Se è* $\frac{x-a}{b-x} \overline{\overline{<}} \frac{a}{b}$, *la* α) *dà un limite superiore più piccolo di quello che dà la* β).

E segue ancora $\omega < \frac{b-a}{b}$, epperò

$$\gamma') \qquad D_1 < D \times \frac{x-a}{a}$$

$$\delta') \text{ (*)} \quad D_2 < D \times \frac{b-x}{b}.$$

4. Da quanto precede si riconosce che entrambe le formule α) e β) si prestano al calcolo approssimato delle radici aritmetiche. Usando le medesime si può impicciolire indefinitamente l'intervallo comprendente $\sqrt[n]{x}$. Le formule γ) e δ) fanno conoscere a priori la riduzione che si viene a portare a tale intervallo. Qualunque sia la formula che si vuol usare, occorre calcolare $\sqrt[n]{a^{n-1}}$ e $\sqrt[n]{b^{n-1}}$, quantità razionali come lo sono per supposto $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$. Conviene adoperare la α), oppure la β), secondo che $\frac{x-a}{b-x}$ è minore, oppure maggiore, di $\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}$. Sarebbe indifferente usare l'una o l'altra se fosse $\frac{x-a}{b-x} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}$.

5. Per mettere in evidenza la grande convenienza pratica delle formule date sopra, le applichiamo a due esempi.

Calcolo approssimato di $\sqrt[3]{97}$.

In questo caso è $x = 97 \quad n = 3$. Ponendo nella β)

$$a = 4^3 = 64 \quad b = 5^3 = 125$$

si trova

$$4,54\ldots. < \sqrt[3]{97} < 4,70\ldots..$$

(*) Il nuovo intervallo, comprendente $\sqrt[n]{x}$, che si ottiene applicando la α), oppure la β), ha all'intervallo precedente rapporto minore dell'errore relativo che si commetterebbe prendendo x per a, oppure per b.

Ponendo nella β)

$$a = 4{,}5^3 = 91{,}125 \qquad b = 4{,}6^3 = 97{,}336$$

si trova

$$4{,}5945\ldots < \sqrt[3]{97} < 4{,}5948\ldots\ldots$$

Ponendo, ancora nella β)

$$a = 4{,}594^3 = 96{,}955616584 \qquad b = 4{,}595^3 = 97{,}018944875$$

si trova

$$4{,}5947008\ldots\ldots < \sqrt[3]{97} < 4{,}5947009\ldots\ldots$$

È $$4{,}5947009^3 = 97{,}000000493558008121729$$

onde $$\sqrt[3]{97} = 4{,}5947008\ldots\ldots$$

Si riconosce dalla δ') che la β) darebbe ora, in una volta, $\sqrt[3]{97}$ con almeno sedici cifre decimali esatte.

Calcolo approssimato di $\sqrt{78963}$.

In questo caso è $x = 78963$ $n = 2$. Ponendo nella β)

$$a = 200^2 = 40000 \qquad b = 300^2 = 90000$$

si trova

$$277{,}926 < \sqrt{78963} < 285{,}284.$$

Ponendo nella α)

$$a = 280^2 = 78400 \qquad b = 290^2 = 84100$$

si trova

$$280{,}987\ldots < \sqrt{78963} < 281{,}022\ldots$$

Ponendo nella α)

$$a = 281^2 = 78961 \qquad b = 281{,}01^2 = 78966{,}6201$$

si trova

$$281{,}0035586\ldots\ldots < \sqrt{78963} < 281{,}0035587\ldots\ldots$$

È $$281{,}0035587^2 = 78963{,}00000206434569$$

onde $$\sqrt{78963} = 281{,}0035586\ldots\ldots$$

Dalla δ') si riconosce che la β) darebbe ora, in una volta, $\sqrt{78963}$ con almeno diciotto cifre decimali esatte.

Voghera, 11 settembre 1887.

Prof. Francesco Giudice.

COSTRUZIONE DI TRIANGOLI ISOBARICENTRICI CON UN DATO

Il Sig. Besso in una sua nota « Su alcune proprietà del triangolo » ed il Sig. Pesci in un'altra « Trasversali nel triangolo » entrambe pubblicate in questo Periodico (Anno II, Fascicolo I e III) hanno indicato come sia possibile costruire geometricamente triangoli aventi lo stesso centro di gravità di un dato.

In questa Nota io mi propongo di estendere la serie dei triangoli isobaricentrici con un dato e costruibili geometricamente, dimostrando il seguente teorema:

« Se sopra i lati di un triangolo ed esternamente ad esso si costruiscono triangoli simili e similmente disposti, i tre vertici di questi, opposti ai tre lati, formano un triangolo isobaricentrico col dato ».

Sia ABC il triangolo dato, ed A_1, B_1, C_1 i vertici dei triangoli simili, opposti rispettivamente a BC, CA, AB; indico con α gli angoli in A_1, B_1, C_1 e con β, γ gli altri due; con a, b, c la misura dei lati opposti ad A, B, C. Dai punti A, A_1, B_1, C_1, si abbassino le perpendicolari Aa', A_1a_1, B_1b_1, C_1c_1, sul lato BC; basterà, per una nota proprietà del baricentro, dimostrare che la somma algebrica delle tre perpendicolari A_1a_1 B_1b_1 C_1c_1 è eguale ad Aa', poichè ripetendo allora la dimostrazione per gli altri lati AB ed AC resterà provato che i triangoli ABC, $A_1B_1C_1$ hanno lo stesso centro di gravità.

Ora si ha

$$B_1b_1 = B_1C.\text{sen}(C+\beta), \qquad B_1C = \frac{b\,\text{sen}\gamma}{\text{sen}\alpha}$$

quindi

$$B_1b_1 = \frac{b\,\text{sen}\gamma(\text{sen}C\cos\beta + \cos C\,\text{sen}\beta)}{\text{sen}\alpha}$$

ma $b\text{sen}C = Aa'$, quindi

$$(1)\qquad B_1b_1 = \frac{Aa'.\text{sen}\gamma\cos\beta + b\cos C.\text{sen}\gamma.\text{sen}\beta}{\text{sen}\alpha}.$$

In modo analogo si ha

$$C_1c_1 = C_1B.\text{sen}(B+\gamma), \quad C_1B = \frac{c\,\text{sen}\beta}{\text{sen}\alpha}$$

$$(2)\qquad C_1c_1 = \frac{Aa'.\text{sen}\beta\cos\gamma + c\,\text{sen}\beta.\text{sen}\gamma\cos B}{\text{sen}\alpha}$$

sommando la (1) e la (2) si ha

$$(3)\qquad B_1b_1 + C_1c_1 = \frac{Aa'.\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta\,\text{sen}\gamma.a}{\text{sen}\alpha} = Aa' + \frac{a\,\text{sen}\beta\,\text{sen}\gamma}{\text{sen}\alpha}.$$

Ma dal triangolo BCA_1 si ha

$$A_1a_1 = A_1B.\text{sen}\beta, \quad A_1B = \frac{a\,\text{sen}\gamma}{\text{sen}\alpha}$$

quindi

$$(4)\qquad A_1a_1 = \frac{a\,\text{sen}\gamma\,\text{sen}\beta}{\text{sen}\alpha}.$$

Sottraendo la (4) dalla (3) risulta

$$B_1b_1 + C_1c_1 - A_1a_1 = Aa'.$$

Corollario 1° — Colla medesima costruzione si può dal triangolo $A_1B_1C_1$ dedurne un nuovo e così via indefinitamente.

Corollario 2° — Se dai vertici del triangolo A,B,C si conducono le parallele ai lati opposti, si forma un triangolo che ha lo stesso centro di gravità del dato, poichè allora i tre triangoli costruiti sopra i lati sono eguali, si potranno anche dividere per metà e poi di nuovo suddividere indefinitamente i lati del triangolo dato, e si arriverà così come caso limite al baricentro comune.

Corollario 3° — Se sopra i lati di un triangolo si costruiscono triangoli isosceli collo stesso angolo al vertice, i tre vertici formano un triangolo isobaricentrico col dato.

Corollario 4° — Se sopra i tre lati di un triangolo, esternamente ad esso, si costruiscono tre archi di cerchi capaci del medesimo angolo ($\leqq 90°$), i loro centri determinano un triangolo isobaricentrico col dato.

Alessandria 1° Luglio, 1887.

Prof. F. PANIZZA.

SOPRA UN TEOREMA DELLA DIVISIONE ALGEBRICA

Il prof. Sadun ha dato nel fascicolo sesto (anno II) di questo *Periodico* una dimostrazione rigorosa del teorema: Il resto della divisione del polinomio

$$P_n = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + dx^2 + ex + f$$

per $x - y$ è $ay^n + by^{n-1} + \ldots + dy^2 + ey + f$. Mi sembra che questo teorema possa anche dimostrarsi nel modo seguente che ha il vantaggio di dare al tempo stesso e la forma del resto e quella del quoziente nella divisione di P_n per $x - y$.

Riteniamo come dimostrato che la trasformazione $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$ (A e B polinomi interi in x ed R di grado inferiore a B) non possa farsi che in un sol modo, e ammettiamo che sia

$$(1)\quad P_n = \{ax^{n-1} + (ay+b)x^{n-2} + \ldots + (ay^{n-1} + by^{n-2} + \ldots + dy + e)\}(x-y)$$
$$+ ay^n + by^{n-1} + \ldots + dy^2 + ey + f.$$

Vogliamo dimostrare che questa legge di formazione del quoziente e del resto della divisione di P_n per $x - y$ si verifica anche per il polinomio

$$P_{n+1} = ax^{n+1} + bx^n + \ldots + dx^3 + ex^2 + fx + g$$

del grado $(n+1)$.$^{\text{esimo}}$ Moltiplicando i due membri della (1) per x e aggiungendo poi g, si ha

$$P_{n+1} = \{ax^n + (ay+b)\,x^{n-1} + \ldots + (ay^{n-1} + by^{n-2} + \ldots + dy + e)\,x\}\,(x-y)$$

$$+ (ay^n + by^{n-1} + \ldots + dy^2 + ey + f)\,x + g.$$

Aggiungendo e togliendo al secondo membro

$$ay^{n+1} + by^n + \ldots + dy^3 + ey^2 + fy,$$

avremo, fatte le riduzioni, $P_{n+1} =$

$$= \{ax^n + (ay+b)x^{n-1} + \ldots + (ay^{n-1} + by^{n-2} + \ldots + dy + e)x + ay^n + by^{n-1} + \ldots + dy^2 + ey + f\}(x-y)$$

$$+ ay^{n+1} + by^n + \ldots + dy^3 + ey^2 + fy + g \qquad \text{c.d.d.}$$

La legge di formazione, facile a verificarsi per $n = 1, 2$ etc. vale quindi per qualunque valore di n.

Un'altra dimostrazione rigorosa per la forma del resto, si ha pure alla pag. 86 nella *Theorie der analytischen Functionen* del Prof. Biermann; però questa presuppone noto il quoziente $\dfrac{x^n - y^n}{x - y}$, nè può ricavarsene la forma del quoziente di P_n per $x - y$.

Giulio Giuliani.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

Sul concetto di limite.

1. Cosa avviene delle frazioni $y = \frac{n}{n+10}$, $z = \frac{n+10}{n}$ quando si danno ad n valori sempre più grandi? Assegnare un valore di n pel quale ciascuna delle differenze $1 - y$, $z - 1$ sia minore di $\frac{1}{1000000}$. Si può dare ad n un valore tale che queste differenze sieno minori di qualunque numero arbitrariamente piccolo?

2. Cosa avviene delle frazioni $\frac{1000}{n}$, $\frac{n}{1000}$, quando si danno ad n valori sempre più grandi? Si può dare ad n un valore tale che la prima di esse sia minore di $\frac{1}{10^{50}}$?

3. Cosa avviene delle frazioni $\frac{n}{a}$, $\frac{a}{n}$, $\frac{n+a}{n}$ quando si danno ad n valori sempre più grandi, nell' ipotesi che a sia indipendente da n?

4. Cosa avviene delle frazioni $\frac{n^2}{n}$, $\frac{\sqrt{n}}{n}$, $\frac{n+\sqrt{n}}{n}$, quando si danno ad n valori sempre più grandi?

5. Cosa avviene delle frazioni $\frac{x}{a}$, $\frac{a}{x}$, $\frac{x+a}{x}$ quando si danno ad x valori sempre più piccoli, nell' ipotesi che a sia indipendente da x? Si può dare ad x un valore tale che la frazione $\frac{0,000000001}{x}$ risulti maggiore di 10^{30}?

6. Cosa avviene del quoziente $\frac{x+2x^3}{2x+x^3}$ quando si danno ad x valori sempre più piccoli?

7. Assegnare un valore di x pel quale la differenza $\frac{x+2x^3}{2x+x^3}-\frac{1}{2}$ sia minore di $\frac{1}{1000000}$.

8. Cosa avviene del quoziente $\frac{1-x^2}{1-x^3}$ quando si danno ad x valori sempre più vicini ad 1?

9. Provare che, se x è positivo e minore di 1, la differenza $\frac{1-x^2}{1-x^3}-\frac{2}{3}$ è positiva; ed assegnare un valore di x pel quale essa sia minore di $\frac{1}{10000}$. Si può dare ad x un valore tale che quella differenza risulti minore di $\frac{1}{10^{1000}}$?

10. Cosa avviene dei quozienti $\frac{(1-x)^2}{1-x^3}$, $\frac{1-x^2}{(1-x)^3}$ quando si danno ad x valori sempre più vicini ad 1?

11. Cosa avviene del prodotto $x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$ quando si danno ad x valori sempre più piccoli?

12. La stessa quistione pei due prodotti $x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$, $x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$.

13. Cosa avviene della differenza $(x+2)^3-(x+1)^3$ quando si danno ad x valori sempre più grandi?

14. La stessa quistione per le due differenze $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, $\sqrt{x+1000000}-\sqrt{x}$.

15. La stessa quistione per la differenza $\sqrt{x^2+x}-x$.

16. Cosa avviene della differenza $(a+h)^2-a^2$ quando si danno ad h valori sempre più piccoli nell'ipotesi che a sia indipendente da h? Si può dare ad h un valore tale che quella differenza sia minore di $\frac{1}{10^{10}}$?

17. La stessa quistione per le differenze $(a+h)^3-a^3$, $\sqrt{a+h}-\sqrt{a}$.

18. La stessa quistione per la differenza $\frac{1}{1-a+h}-\frac{1}{1-a-h}$.

Cosa avviene quando a è eguale ad 1.

19. Cosa avviene dei quozienti $\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$, $\frac{(a+h)^3-a^3}{h}$, $\frac{(a+h)^m-a^m}{h}$, quando si danno ad h valori sempre più piccoli, nell' ipotesi che a sia indipendente da h ed m sia un intero positivo pure indipendente da h?

20. La stessa quistione pei quozienti $\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$, $\frac{\sqrt[3]{a+h}-\sqrt[3]{a}}{h}$.

21. Trovare una potenza di 1,0001 la quale sia maggiore di 600.

22. Provare che la potenza 8192$^{\text{ma}}$ di 0,999 è minore di 0,0004.

23. Mediante l'identità

$$a^n-1=(a-1)(1+a+a^2+\dots\dots+a^{n-1})$$

provare che, quando a è maggiore di 1 e indipendente da n, la potenza a^n si può rendere grande quanto si voglia, purchè si attribuisca ad n un valore abbastanza grande.

24. Assegnare un valore di n pel quale la potenza $(1{,}000001)^n$ sia maggiore di 1000000.

25. Dimostrare che, se b è minore di 1 e indipendente da n, la potenza n^{ma} di b si può rendere arbitrariamente piccola purchè si attribuisca ad n un valore abbastanza grande.

26. Cosa avviene della somma $1+x+x^2+\dots+x^{n-1}$ quando si danno ad n valori sempre più grandi ed x è indipendente da n? Distinguere i casi di $0<x<1$, $x=1$, $x>1$, $-1<x<0$, $x<-1$, ed $x=-1$.

27. Dimostrare che la somma $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\dots+\frac{1}{2.3\dots n}$ è sempre minore di 1.

28. Dimostrare che la potenza $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, in cui n significa un numero intero e positivo, è sempre minore di 3.

29. Dimostrare che la differenza $\sqrt[8192]{51678}-1$ è minore di $\frac{1}{500}$.

30. Trovare un valore di n pel quale la differenza $1-\sqrt[n]{0{,}0000157}$ sia minore di $\frac{1}{100000}$.

31. Provare che, se a è maggiore di 1, posto $\sqrt[n]{a}-1=d$, si ha $d<\frac{a}{n}$ (23).

32. Dimostrare che se a e b sono indipendenti da n, ma il primo numero sia maggiore e il secondo minore dell'unità, ciascuna delle due differenze $\sqrt[n]{a}-1$ e $1-\sqrt[n]{b}$ è positiva, e si può rendere arbitrariamente piccola purchè si attribuisca ad n un valore abbastanza grande.

33. Provare che, per $n>10$, si ha $\frac{10^n}{1.2.3\ldots n}<\frac{10^{10}}{1.2.3\ldots10}\left(\frac{10}{11}\right)^{n-10}$

34. Si può dare ad n un valore tale che il valore corrispondente della frazione $\frac{10^n}{1.2.3\ldots n}$ sia minore di $\frac{1}{1000000}$?

35. Provare che, se a è indipendente da n, la frazione $\frac{a^n}{1.2.3\ldots n}$ si può rendere piccola quanto si voglia, purchè si attribuisca ad n un valore abbastanza grande.

36. Mediante la disuguaglianza $(\sqrt{a})^n>1+n(\sqrt{a}-1)$, che vale per $a>1$, dimostrare che il quoziente $\frac{n}{a^n}$ è minore di $\frac{1}{n(\sqrt{a}-1)^2}$. Cosa avviene di quel quoziente quando si danno ad n valori sempre più grandi, nell'ipotesi che a sia indipendente da n?

37. Ricavare una formola per la somma $1+2+3+\ldots+n$ mediante le n eguaglianze che si deducono dalla

$(a+1)^2 - a^2 = 2a+1$, ponendovi prima $a=1$, poi $a=2$, ecc. e in ultimo $a=n$.

Dimostrare poi che il quoziente $\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$ è maggiore di $\frac{1}{2}$ ed assegnare il valore della differenza per $n=1000000$. Si può dare ad n un valore tale che quella differenza sia minore di $\frac{1}{10^{1000000}}$?

38. Ricavare una formola per la somma $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ dalle n eguaglianze che sono comprese nella $(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1$, per $a=1, =2, =3, \ldots =n$.

39. Dimostrare che la differenza $\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}-\frac{1}{3}$ è positiva e minore di $\frac{1}{n}$.

40. Ricavare una formola per la somma $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ mediante le n eguaglianze che si deducono dalla $(a+1)^4-a^4=4a^3+6a^2+4a+1$ attribuendo ad n successivamente i valori $1, 2, 3, \ldots n$.

41. Dimostrare che la differenza $\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n^4}-\frac{1}{4}$ è positiva; ed assegnare un valore di n pel quale essa sia minore di $\frac{1}{1000000}$.

42. Dimostrare che, per b positivo ed h intero e positivo, si hanno le diseguaglianze

$$(b+1)^{h+1}-b^{h+1}<(h+1)(b+1)^h, \quad (b+1)^{h+1}-b^{h+1}>(h+1)b^h$$

43. Mediante le precedenti diseguaglianze dimostrare che la differenza $\frac{1^h+2^h+3^h+\ldots+n^h}{n^{h+1}}-\frac{1}{h+1}$ è positiva, e che essa è minore di

$$\frac{1}{h+1}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{h+1}-1-\frac{1}{n^{h+1}}\right\}$$

44. Dimostrare: 1) che la differenza $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{h+1}-1-\frac{1}{n^{h+1}}$ è minore di $\frac{2^{h+1}-2}{n}$; 2) che la differenza $\frac{1^h+2^h+3^h+\ldots+n^h}{n^{h+1}}-\frac{1}{h+1}$ è minore di $\frac{2^h-1}{n}$.

45. Assegnare un valore di n pel quale la differenza $\frac{1^7+2^7+3^7+\ldots+n^7}{n^8}-\frac{1}{8}$ sia minore di $\frac{1}{1000000000}$.

46. Cosa avviene di ciascun termine del quoziente $\frac{1^{13}+2^{13}+3^{13}+\ldots+n^{13}}{n^{14}}$, e cosa avviene del quoziente stesso, quando si danno ad n valori sempre più grandi?

47. Cosa avviene di ciascun termine della somma

$$\frac{1^9}{n^{10}}+\frac{2^9}{n^{10}}+\frac{3^9}{n^{10}}+\ldots+\frac{n^9}{n^{10}},$$

e cosa avviene della somma stessa, quando si attribuiscano ad n valori sempre più grandi?

48. Cosa avviene di ciascun termine della somma

$$\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^3}+\frac{3}{n^3}+\ldots+\frac{n}{n^3},$$

e cosa avviene della somma stessa, quando si danno ad n valori sempre più grandi?

49. Cosa avviene di ciascun termine della somma

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}+\frac{2}{n\sqrt{n}}+\frac{3}{n\sqrt{n}}+\ldots\ldots+\frac{n}{n\sqrt{n}}$$

e cosa avviene della somma stessa, quando si attribuiscono ad n valori sempre più grandi?

50. I numeri a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ dipendono da n, e in modo che, per n abbastanza grande, si possono rendere piccoli quanto si voglia. Cosa si può dire della somma $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$?

51. Sieno x ed y due numeri i i quali dipendano dal numero n ed A e B due numeri indipendenti da n, e si supponga che il valore assoluto di ciascuna delle differenze $x - A$, $y - B$ si possa rendere piccolo quanto si voglia, purchè si attribuisca ad n un valore abbastanza grande. Dimostrare che la stessa proprietà spetta alle differenze $(x + y) - (A + B)$, $(x - y) - (A - B)$, $xy - AB$.

52. Nella stessa ipotesi, e supponendo inoltre che B sia diverso da zero, dimostrare che il valore assoluto della differenza $\frac{x}{y} - \frac{A}{B}$ si può rendere piccolo quanto si voglia purchè si attribuisca ad n un valore abbastanza grande.

53. Mediante le diseguaglianze $\alpha \cos\alpha < \operatorname{sen}\alpha < \alpha$, provare che la differenza $1 - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$ è positiva e che essa si può rendere piccola quanto si voglia, purchè si attribuisca ad α un valore abbastanza piccolo. Assegnare un valore di α pel quale questa differenza sia minore di $\frac{1}{1000000}$.

54. Dimostrare che la differenza $\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\alpha} - 1$ ha la stessa proprietà.

55. Cosa avviene del quoziente $\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}$ quando si danno ad x valori sempre più piccoli, nell'ipotesi che a sia indipendente da x?

56. Cosa avviene del prodotto $n \operatorname{sen}\left(\frac{a}{n}\right)$ quando si danno ad n valori sempre più grandi, nell'ipotesi che a sia indipendente da n?

57. Cosa avviene delle differenze

$$\operatorname{sen}(a + h) - \operatorname{sen}(a - h), \quad \cos(a - h) - \cos(a + h),$$

quando si danno ad h valori sempre più piccoli, nell'ipotesi che a sia indipendente da h?

58. La stessa quistione per la differenza $\operatorname{tang}(a-h)-\operatorname{tang}(a+h)$. Esaminare il caso in cui a è eguale ad un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$.

59. Cosa avviene dei quozienti

$$\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}a}{h}, \quad \frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}$$

quando si attribuiscono ad h valori sempre più piccoli ed a è indipendente da h?

60. La stessa quistione pel quoziente $\frac{\operatorname{tang}(a+h)-\operatorname{tang}a}{h}$ nell'ipotesi che a non sia un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$.

61. Posto $z=\operatorname{sen}y$, assegnare due valori di y, entrambi maggiori di 1000000, e tali che per uno di essi sia z positivo, e, per l'altro, sia z negativo.

62. Cosa avviene di $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ quando si danno ad x valori sempre più piccoli? E cosa avviene, nella stessa ipotesi, del prodotto $x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$?

63. Ricavare una formola per la somma

$$S=\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}(2\beta)+\operatorname{sen}(3\beta)+\ldots+\operatorname{sen}(n\beta)$$

moltiplicando i due membri dell'eguaglianza per $2\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)$, e poi trasformando i prodotti di seni in differenze di coseni.

64. In modo analogo ricavare una formola per la somma

$$\cos\beta+\cos(2\beta)+\cos(3\beta)+\ldots+\cos(n\beta).$$

65. Cosa avviene del quoziente

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{2a}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{3a}{n}\right)+\ldots+\operatorname{sen}\left(n\frac{a}{n}\right)}{n}$$

quando si danno ad n valori sempre più grandi nell'ipotesi che a sia indipendente da n?

6. La stessa quistione pel quoziente

$$\frac{\cos\left(\frac{a}{n}\right) + \cos\left(\frac{2a}{n}\right) + \cos\left(\frac{3a}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\frac{na}{n}\right)}{n}$$

7. Mediante le n diseguaglianze che si deducono dalla $\operatorname{sen}\alpha < \alpha$, quando in luogo di α si pongano successivamente i numeri $\frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n} \ldots \frac{na}{n}$, dimostrare che $\cos a$ non può essere minore di $1 - \frac{a^2}{2}$.

8. Per mezzo del precedente teorema dimostrare, in modo analogo, che $\operatorname{sen} a$ non può essere minore di $a - \frac{a^3}{6}$.

9. Appoggiandosi all'ultimo teorema dimostrare, in modo analogo, che $\cos a$ non può essere maggiore di $1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}$.

0. Dimostrare in modo analogo: 1) che $\operatorname{sen} a$ non può essere maggiore di $a - \frac{a^3}{6} + \frac{a^5}{120}$; 2) che $\cos a$ non può essere minore di $1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} - \frac{a^6}{720}$.

1. A quali risultati si perviene quando si prosegua nella via indicata? Dimostrare che ciascuna delle differenze

$$\operatorname{sen} a - \left(a - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5} - \ldots - \frac{a^{4n-1}}{1.2.3\ldots(4n-1)}\right)$$

$$\cos a - \left(1 - \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^4}{1.2.3.4} - \ldots - \frac{a^{4n-2}}{1.2.3\ldots(4n-2)}\right)$$

è positiva, e si può rendere piccola quanto si voglia, purchè si attribuisca ad n un valore abbastanza grande.

2. Dato un triangolo, si costruisca un secondo triangolo coi lati eguali alle mediane del primo, poi un terzo triangolo coi lati eguali alle mediane del secondo, e così si prosegua. Assegnare il rapporto della somma delle aree

primi n triangoli così costruiti all'area del primo di essi. A qual numero si avvicina sempre più questo rapporto quando si danno ad n valori sempre più grandi?

In un cono retto è inscritta una sfera; una seconda sfera è tangente alla prima ed alla superficie conica; una terza sfera è tangente alla seconda ed alla superficie conica; ecc. ecc. Trovare il rapporto della somma dei volumi delle prime n sfere così costruite al volume della prima di esse. A qual numero si avvicina sempre più questo rapporto quando si attribuiscono ad n valori sempre più grandi?

Dimostrare che, se A è indipendente da n, e se hanno luogo le diseguaglianze

$$2-\frac{1}{n}<A<2+\frac{1}{n},$$

qualunque sia l'intero positivo n, dev'essere $A=2$.

Siano U e V due numeri dipendenti da n ed A un numero indipendente da n. Se le diseguaglianze $U<A<V$ sussistono qualunque sia n, e se esiste un numero L tale che ciascuna delle due differenze $L-U$, $V-L$ si possa rendere piccola quanto si voglia, purchè si attribuisca ad n un valore abbastanza grande, dev'essere $A=L$.

Sia $ABB'A'$ un trapezio con gli angoli retti in A e B, $BB'>AA'$, e siano $H_1, H_2, \dots H_{n-1}$ i punti del lato AB che dividono questo lato in n parti eguali, e $M_1, M_2, \dots M_{n-1}$ i punti in cui le perpendicolari ad AB condotte per $H_1, H_2, \dots H_{n-1}$ incontrano il lato $A'B'$. Si calcoli la somma delle aree dei rettangoli *inscritti* che hanno per basi i segmenti $AH_1, H_1H_2, \dots H_{n-1}B$ e per altezze le $AA', H_1M_1, \dots H_{n-1}M_{n-1}$; e la somma delle aree dei rettangoli *circoscritti* che hanno quelle stesse basi, e per altezze le $H_1M_1, H_2M_2, \dots BB'$. Si confrontino poi le due somme coll'area del trapezio, e da tale confronto si deduca il valore di quest'area.

7. La stessa quistione nell'ipotesi che i segmenti AH_1, H_1H_2, $H_2H_3 \ldots H_{n-1}B$ sieno proporzionali ai numeri 1, 2, 3, ... n.

8. La stessa quistione nell'ipotesi che, posto $AB = c$ e $q = \sqrt[n]{c+1}$, i punti H_1, H_2, ... H_{n-1} sieno determinati dalle formole

$$AH_1 = q - 1,\ H_1H_2 = q^2 - q,\ H_2H_3 = q^3 - q^2, \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots H_{n-2}H_{n-1} = q^{n-1} - q^{n-2},\ H_{n-1}B = q^n - q^{n-1}$$

9. Dimostrare che, comunque sieno scelti i punti H_1, $H_2 \ldots H_{n-1}$, purchè ciascuno dei segmenti AH_1, H_1H_2, ... $H_{n-1}B$ si possa rendere arbitrariamente piccolo quando si prende n abbastanza grande, la differenza fra l'area del trapezio e la somma delle aree dei rettangoli inscritti si può rendere piccola quanto si voglia.

80. Sia A un punto della base minore di un dato tronco di piramide triangolare e B la sua projezione sul piano della base maggiore, e sieno H_1, H_2, ... H_{n-1} i punti che dividono la AB in n parti eguali. Da questi punti si conducano i piani paralleli alle basi, e in ciascuno degli n tronchi che ne risultano si costruisca un prisma, una base del quale sia la base minore del tronco, e uno spigolo laterale del quale sia parte d'uno degli spigoli laterali del tronco dato, di guisa che l'altra base del prisma sia contenuta nella base maggiore del tronco corrispondente; si costruiscano poi altrettanti prismi di altezze eguali a quelle dei tronchi con gli spigoli laterali paralleli a quelli dei precedenti, e una base di ciascuno di questi altri prismi sia la base maggiore del corrispondente tronco. Valutare la somma dei volumi dei prismi *inscritti* e la somma dei volumi dei prismi *circoscritti*; e dal confronto di queste somme col volume del tronco di piramide dedurre la formola che dà la misura di questo volume.

81. La stessa quistione nell'ipotesi che i segmenti AH_1, H_1H_2, ...$H_{n-1}B$ sieno proporzionali ai numeri 1, 2, ... n.

[illegible] quistione nell' ipotesi che, posto $AB = a$ e [illegible], i punti H_1, H_2, ... H_{n-1} sieno determinati [illegible] formole

$$H_1H_2 = q^2 - q, \quad H_2H_3 = q^3 - q^2, \ldots \ldots H_{n-1}B = q^n - q^{n-1}$$

[illegible] un segmento sferico a due basi una delle quali [illegible] circolo massimo. Dai punti che dividono l'altezza [illegible] parti eguali sono condotti piani paralleli alle basi; [illegible] dei segmenti sferici così ottenuti è *inscritto* [illegible] cilindro retto una base del quale è la base minore [illegible] segmento, ed a ciascuno degli stessi segmenti è [illegible] un cilindro retto una base del quale è la [illegible] maggiore di quel segmento. Valutare la somma dei [illegible] dei cilindri inscritti e la somma dei volumi dei [illegible] circoscritti; e dal confronto di queste due somme [illegible] del segmento sferico ricavare la formola che [illegible] la misura.

[illegible] un punto d'una generatrice d'un cilindro retto, [illegible] il punto in cui essa incontra la circonferenza della [illegible] della quale O sia il centro e COD il diametro perpendicolare ad OB. Valutare il volume del corpo compreso [illegible] piano ACD, il semicircolo CBD e la superficie ci[illegible] (Scomporre quel corpo mediante piani paralleli [illegible] OAB condotti pei punti che dividono il diametro COD in $2n$ parti eguali).

[illegible] la misura di quella porzione della superficie [illegible] che è compresa fra il piano CAD e la semi[illegible]ferenza CBD.

[illegible] OA, OB due raggi d'un circolo fra loro perpendicolari, D sia un punto dell'arco BA e C il piede della perpendicolare da esso condotta al raggio OA. Diviso il [illegible] BDCO in n parti mediante rette fra loro equi[illegible] e perpendicolari ad OA, si costruiscano gli n [illegible] *inscritti* e gli n rettangoli *circoscritti*. Posto [illegible] $OC = c$ si esprima in funzione di a, c, n la somma delle aree dei rettangoli inscritti e la somma delle aree dei rettangoli circoscritti, e si confrontino le due somme coll'area del segmento. Cosa avviene del quoziente

$$\frac{\sqrt{a^2-\frac{c^2}{n^2}}+\sqrt{a^2-\frac{2^2c^2}{n^2}}+\sqrt{a^2-\frac{3^2c^2}{n^2}}+\ldots+\sqrt{a^2-\frac{n^2c^2}{n^2}}}{n}$$

quando si attribuiscono ad n valori sempre più grandi?

87. Un circolo ruota intorno ad una retta situata nel suo piano e che non l'attraversa. Valutare il volume del corpo che da tale rotazione viene generato.

88. Valutare il volume del corpo generato dalla rotazione d'un segmento di circolo intorno alla sua corda.

89. In un piano è data una retta Oa e in essa un punto O. Dai punti della Oa si conducano le perpendicolari a questa retta da una stessa banda di essa, e si prendano su queste perpendicolari segmenti proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal punto O: sia OB un pezzo della curva luogo dei punti estremi di quei segmenti, e il punto B corrisponda alla perpendicolare condotta dal punto A della Oa, e sia C il punto in cui la parallela ad Oa condotta per B incontra la perpendicolare alla Oa passante per O. Valutare: 1) l'area OAB; 2) il volume del corpo generato dalla rotazione del segmento OBC intorno alla OC.

90. Valutare il volume del corpo generato dalla rotazione del segmento OCB intorno alla CB.

91. È dato un circolo del quale O è il centro, AA', BB' sono due diametri fra loro perpendicolari. Sia MM' una qualunque delle corde perpendicolari al diametro A'A la quale incontri quel diametro nel punto P, e si prendano in essa a partire da P, e dalle due bande del diametro, due segmenti eguali PR, PR' in modo che il rapporto di ciascuno di essi a PM sia eguale al rapporto

[illegible] minore di OA, ad OA. Valutare [illegible] che è il luogo dei punti R, R'

[illegible] della curva considerata al nu- [illegible] da una stessa banda del dia- [illegible] delle perpendicolari da essi [illegible]: 1) il volume del corpo ge- [illegible] del segmento LQL'Q' intorno al [illegible]lume del corpo limitato dalla su- [illegible] dalla rotazione dell'intera curva [illegible]

[illegible] b e altezza a viene diviso, me- [illegible] lati, in mn rettangoli eguali, [illegible] base l'm^a parte di b e, per [illegible] n. Si faccia la somma dei pro- [illegible] di questi rettangoli per la di- [illegible] interno qualunque dalla base, [illegible] somma all'area dell'intero ret- [illegible] di questo rapporto quando i nu- [illegible] sempre più grandi?

[illegible] triangolo in n parti eguali, e dai [illegible] condotte tante parallele alla base, si [illegible] trapezii, altrettanti rettangoli, [illegible] dei prodotti dell'area di ciascun [illegible] d'un suo punto interno qua- [illegible] avviene del rapporto di questa [illegible], quando si attribuiscono ad n [illegible] grandi?

[illegible] trapezio.

[illegible] piramide triangolare in n parti [illegible] divisione condotti altrettanti piani [illegible] nei risultanti tronchi inscritti al- [illegible] la somma dei prodotti del vo- [illegible] per la distanza d'un suo punto [illegible] base. Cosa avviene del rapporto di questa somma al volume della piramide quando si attribuiscono ad n valori sempre più grandi?

97. Dai punti che dividono in n parti eguali un segmento sferico ad una base sono condotti piani paralleli alla base, e, negli $n-1$ segmenti a due basi così ottenuti, sono inscritti altrettanti cilindri retti. Si valuti la somma dei prodotti del volume di ciascuno di questi cilindri per la distanza di un suo punto interno qualunque dal piano, parallelo alla base del segmento, e passante pel centro della sfera. Cosa avviene del rapporto di questa somma al volume del segmento, quando si attribuiscono ad n valori sempre più grandi?

98. Sieno N ed N' due punti d'una data circonferenza di centro O situati nel quadrante determinato dai raggi OA e OB, e sieno P e P' i piedi delle perpendicolari condotte da quei due punti su OA, R il punto in cui la NN' prolungata incontra la OA, e T il punto in cui la stessa OA è incontrata dalla tangente alla circonferenza nel punto N. Dimostrare che l'angolo TNR si può rendere piccolo quanto si voglia, purchè sia abbastanza piccolo il segmento PP'.

99. Sia N un punto della curva OB, considerata al n.º 89, N' sia un altro suo punto, P e P' sieno i piedi delle perpendicolari condotte da quei due punti sulla Oa, ed R il punto in cui la NN' prolungata incontra la Oa. Dimostrare che esiste una retta NT passante per N, tale che l'angolo RNT si possa rendere piccolo quanto si voglia quando sia abbastanza piccolo il segmento PP'. Trovare la distanza del punto O dal punto T in cui quella retta incontra la Oa.

100. Dimostrare che la curva considerata al n.º 91 ha la stessa proprietà, per ogni suo punto N, ed assegnare la distanza del punto O dal punto T, in cui la retta NT incontra il diametro AA'.

D. Besso.

QUISTIONI PROPOSTE

... *che, se un emisfero è diviso* ... *un piano parallelo alla sua* ... *distanza del piano segante dalla* ... *è eguale a* 2sen10°. (D. BESSO).

... lio Laudati Losapio, studente

... due parti equivalenti da un ... si vuol dimostrare che il rap-

... essendo d la distanza del piano ... raggio della sfera. Chiamando ... minore del segmento di sfera, ... di raggio R, e con V, il vo- ... mo dalla geometria che

$$\ldots \frac{\pi r^2 d + \pi R^2 d}{2}.$$

... alla 4ª parte del volume della ... divide l'emisfero in due parti ... stabilire l'equazione:

$$\ldots \frac{\pi R^2 d}{2} = \frac{\pi R^3}{3};$$

... tori e dividendo ambi i mem-

$$\ldots \frac{d}{R} + 3\frac{d}{R} = 2$$

... quindi $\frac{r}{R} = \cos\alpha$,

$\ldots \alpha + 1 = 0$ (1).

... dal Sig. *Leogrande Vincenzo*, studente ... *Beyens*, *R. Badia* e *F. Panizza*.

Ponendo in quest' ultima equazione $\operatorname{sen}\alpha = 2x$, e quindi dividendo ambo i membri per 8, otteniamo:

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0. \qquad (2)$$

Ora quest'equazione è della forma $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{b}{4} = 0$, nella quale il nostro b è $\frac{1}{2}$; e noi sappiamo dalla trigonometria che se b è in valore assoluto non maggiore di 1, e quindi si ponga $b = \operatorname{sen}\beta$, le radici della (2) sono date da $x' = \operatorname{sen}\frac{\beta}{3}$, $x'' = \operatorname{sen}\left(60^\circ - \frac{\beta}{3}\right)$, $x''' = -\operatorname{sen}\left(60^\circ + \frac{\beta}{3}\right)$.

Nel caso nostro essendo $b = \frac{1}{2}$, e quindi $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}$, e sapendo che l'arco del 1° quadrante il cui seno è $\frac{1}{2}$ è uguale a 30°, si deduce che il nostro β è uguale a 30°, e quindi le radici della (1) sono:

$$x' = \operatorname{sen}10^\circ, \quad x'' = \operatorname{sen}50^\circ, \quad x''' = -\operatorname{sen}70^\circ.$$

Donde ancora, per aver posto $\operatorname{sen}\alpha = 2x$, sarà: $\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}10^\circ$.

Gli altri valori $\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}50^\circ$, $\operatorname{sen}\alpha = -2\operatorname{sen}70^\circ$ non rispondono alla nostra questione, giacchè $2\operatorname{sen}50^\circ$ e $-2\operatorname{sen}70^\circ$ sono in valore assoluto maggiori di 1. — Resta quindi dimostrato che $\operatorname{sen}\alpha$ ossia $\frac{d}{R} = 2\operatorname{sen}10^\circ$; il che è quanto si voleva.

Il Sig. Cap. *J. Beyens* osserva che il teorema può essere generalizzato: Se il rapporto del segmento ad una base all'emisfero è $\frac{m}{n}$, si trova che il rapporto dell'altezza di quello a due basi al raggio è eguale a $2\operatorname{sen}\frac{1}{3}\left(\operatorname{arsen}\frac{n-m}{n}\right)$.

(4) (pag. 28) *Sia dato un triangolo sferico e si costruisca un altro triangolo sferico coi vertici nei punti medi dei lati del primo. Se la somma degli angoli del primo triangolo è uguale a 360°, ciascun lato del secondo è di 90°. E se il secondo triangolo ha un lato di 90°, la somma dei tre angoli del primo è eguale a 360°.* (D. Besso).

...ne del prof. *R. Badia* (*).

... con A, B, C gli angoli del primo triangolo, con ... essi opposti, con a' quello fra i lati del se... che ha per estremi i punti di mezzo dei lati ... A + B + C = 2P, si ha:

$$\ldots a' = \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos A$$

$$\ldots\sqrt{\frac{\ldots P - A)\cos(P-C)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C}} \qquad \operatorname{sen}\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-B)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C}}$$

$$\ldots\sqrt{\frac{\ldots P - A)\cos(P-B)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}} \qquad \operatorname{sen}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-C)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}}$$

... che $\cos(P-A)$ è positivo e che $\cos P$ è nega... dalle (β)

$$\ldots\frac{\ldots(P-A)}{\operatorname{sen}A}\cos\frac{a}{2}, \qquad \operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2} = -\frac{\cos P}{\operatorname{sen}A}\cos\frac{a}{2},$$

... nella (α)

$$\ldots = \frac{\cos\frac{a}{2}}{\operatorname{sen}A}\left\{\cos(P-A) - \cos P\right\} = \cos\frac{a}{2}\operatorname{sen}P.$$

... la somma degli angoli del primo triangolo è ... sarà $\cos a' = 0$ e quindi $a' = 90°$. E quando sia ... essere $\cos\frac{a}{2}\operatorname{sen}P = 0$ e in conseguenza $A+B+C = 360.°$

... due teoremi risulta, come osserva il Sig. Cap. ... seguente corollario:

... mezzo dei lati d'un triangolo sferico sono i ... triangolo sferico, il quale, o non ha alcun ... oppure ha tutti e tre i lati di 90°.

... *Dato un triangolo si conducano le biset... angoli* BAC, CBA, ACB, *e sui loro prolun... prendano i punti* A_1, B_1, C_1 *ad un'eguale di... lati* BC, CA, AB *e in modo che i segmenti ... sieno attraversati dai corrispondenti lati*

(*) ... dimostrazione venne inviata dal Sig. Cap. *J. Beyens.*

BC, CA, AB. *Esprimere la distanza* x *in funzione dei lati del triangolo* ABC *e dell'area del triangolo* $A_1B_1C_1$. (F. VERDE).

Soluzione del Prof. *R. Badia.*

Si indichino, con O il punto comune alle tre bisettrici, con A_0, B_0, C_0 i punti nei quali esse incontrano ordinatamente i lati BC, CA, AB, con a, b, c i numeri che misurano questi lati, con α l'angolo sotto il quale la bisettrice AA_1 taglia il lato BC e pongasi

$$a+b+c=2p$$

$$\text{area } ABC = S\,; \quad \text{area } A_0B_0C_0 = S_0\,; \quad \text{area } A_1B_1C_1 = S_1\,.$$

Conducansi, per O, una retta parallela a BC e da A_1 una perpendicolare a questa retta. Per le relazioni fondamentali esistenti tra gli elementi di un triangolo rettangolo e per una relazione notissima che esiste tra il raggio del cerchio inscritto in un triangolo, l'area ed il perimetro di questo, si avrà evidentemente

$$x = OA_1 \operatorname{sen}\alpha - \frac{S}{p}\,; \quad \frac{S}{p} = OA_0 \operatorname{sen}\alpha$$

quindi

$$x = \frac{S}{p}\cdot\frac{OA_1}{OA_0} - \frac{S}{p}.$$

È chiaro che, ripetendo lo stesso ragionamento rispetto alle altre due bisettrici, si otterrebbero espressioni analoghe della x, le quali differirebbero da questa soltanto per lo scambio dei segmenti OA_1, OA_0 con i segmenti OB_1, OB_0 ed OC_1, OC_0. Ma x non varia, qualunque sia la bisettrice che si considera, S e p sono costanti, dunque deve essere

$$\frac{OA_1}{OA_0} = \frac{OB_1}{OB_0} = \frac{OC_1}{OC_0}$$

ossia i triangoli $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$ sono omotetici e perciò simili. Sostituendo pertanto al rapporto dell'omotetia quello delle radici quadrate delle loro aree si avrà

$$x = \frac{S}{p}\sqrt{\frac{S_1}{S_0}} - \frac{S}{p} \qquad (1)$$

L'espressione di S_0 per mezzo dei lati del triangolo ABC si può ottenere trovando prima quelle dei segmenti OA_0, OB_0,

OC_0 e sommando quindi le aree dei tre triangoli nei quali è diviso da questi segmenti il triangolo $A_0B_0C_0$.

Dalle relazioni

$$\frac{A_0C}{BA_0} = \frac{b}{c} \qquad \frac{A_0C}{b} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A}{\operatorname{sen}\alpha}$$

eliminando i segmenti nei quali la bisettrice divide il lato BC, si ottiene

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b+c}{a}\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}}$$

e quindi, per mezzo della seconda delle relazioni richiamate in principio,

$$OA_0 = \frac{a}{b+c}\sqrt{\frac{bc\,(p-a)}{p}}.$$

Deducendo da questa le espressioni analoghe di OB_0 e di OC_0, ed osservando che

$$\operatorname{sen}(B_0OC_0) = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(B+C) = \cos\tfrac{1}{2}A$$
$$\operatorname{sen}(A_0OC_0) = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+C) = \cos\tfrac{1}{2}B$$
$$\operatorname{sen}(A_0OB_0) = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+B) = \cos\tfrac{1}{2}C$$

si trova

$$S_0 = S\frac{2abc}{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}.$$

Sostituendo nella (1) si avrà x in funzione di a, b, c, S, S_1, e quindi anche in funzione di a, b, c, S_1.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

D. Amanzio. — *Trattato di Aritmetica teorica.* — Stabilimento tipografico di Aniello Eugenio, Napoli, 1887. — p. 500 — prezzo: L. 3,50.

A ragione l'A. ha intitolato questo suo libro trattato di aritmetica teorica, in quanto esso è condotto con scrupoloso rigore. Il medesimo non è poi da considerare come un rimpasto degli ordinari manuali d'aritmetica, ma è un libro la cui individualità apparisce presto spiccata al lettore. È con un senso di compiacenza sincera che ne teniamo parola poichè, come altra volta avemmo occasione di dichiarare, la pubblicazione del Sig. Amanzio è una prova di più che ogni dì si fa maggiormente viva quella corrente che induce persone di coltura elevata ad interessarsi del progresso delle nostre scuole, preparando per esse dei libri che onorano non solo chi li ha compilati ma ben anche il nostro paese. Ed invero chi esamini con occhio imparziale il largo tributo portato alla nostra letteratura scolastica in breve volgere d'anni, in materia di scienze (e con ciò non si esclude che altrettanto avvenga nell'altre materie), è condotto senz'altro a riconoscere che non è più il caso di essere tributari pei bisogni delle nostre scuole alle colte nazioni d'oltralpe, ma si trova in casa nostra ciò che ci abbisogna ed anche più di questo.

Per tornare al libro il cui titolo è scritto avanti, diremo che esso è singolarmente pregevole sotto due rispetti, il primo de'quali è l'estesa collezione di esercizi che terminano ciascun paragrafo, la cui scelta non saprebbesi abbastanza elogiare, sia per l'originalità degli esercizi stessi, sia perchè l'A. ha ivi condensato molte importanti proprietà dei numeri. Si potrebbe soltanto osservare che taluno dei medesimi riuscirà difficilmente accessibile ad un lettore inesperto, ma in fondo l'A. non ne è responsabile una volta che ha giustamente chiamato *teorico* il suo libro ed appartiene al professore che questo adottasse per la propria scuola il rimuovere quelle difficoltà da reputarsi insormontabili per l'alunno.

L'altro riguardo che rende il libro del Prof. Amanzio degno dell'attenzione degli insegnanti è ancor più importante e consiste a nostro modo di vedere nella trattazione ch'egli ha fatto dei *numeri irrazionali* seguendo i concetti svolti dal chiarissimo prof. Dini nella sua importantissima opera: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, concetti sviluppati altresì in altre opere ragguardevoli straniere, come ad es. i: *Grundlagen der Analysis* del Signor Lipschitz, uno dei cultori delle moderne teoriche dell'analisi rigorosa nella dotta Germania.

Una tale trattazione, in parte rispondente ad un bisogno mente sentito, abbraccia il terzo libro, esteso per oltre un centinaio di pagine e ci sembra metta conto parlarne con qualche diffusione.

L'A. introduce nella medesima i *sistemi di due classi di grandezze* definendo come tali « due serie di grandezze una crescente, l'altra decrescente, tali che ogni grandezza della prima serie sia minore di qualunque grandezza della seconda, e che sia sempre possibile trovare una grandezza nell'una ed una grandezza nell'altra in modo che la differenza fra queste due grandezze sia minore di una quantità piccola quanto si vuole, ma non nulla » e subito dopo il concetto di *grandezza di separazione o confine* delle due serie chiamandola « una grandezza non minore di nessuna delle grandezze della prima serie, nè maggiore di nessuna delle grandezze della seconda serie, e che può essere avvicinata indefinitamente dalle grandezze di una almeno delle due serie ». Partendo da queste definizioni l'A. dimostra quindi che « un sistema di due classi di grandezze ammette sempre un confine ed un solo », poi che « ogni grandezza incommensurabile con l'unità si può sempre considerare come confine di due classi di grandezze commensurabili con l'unità ». Considera in seguito i corrispondenti *sistemi di due classi di numeri* e il *numero di separazione o confine* di due serie di numeri, il che lo conduce alla definizione del numero *irrazionale* ossia di quel « numero di separazione di due classi per le quali non esiste alcun numero intero o frazionario che ne segni il confine ». — Sviluppa in seguito, ampliando i concetti accennati dal prof. Dini nella citata opera, i criteri d'eguaglianza e disuguaglianza dei numeri irrazionali, considerandoli originati nell'accennato modo, e quindi le operazioni con numeri irrazionali; finalmente applica le cose precedenti alla dimostrazione di alcune proprietà elementari appartenenti alle frazioni decimali con un numero illimitato di cifre decimali.

Una cosa non abbiamo trovato nel libro di cui si tratta che ci parebbe meritevole di attuazione, ossia un'esplicita separazione della teoria del minimo comune multiplo da quella dei numeri primi, analoga a quella che si suol fare riguardo al massimo comun divisore, e la quale abbiamo cercato invano nelle opere scolastiche d'aritmetica che sono a nostra

:onoscenza. A questa separazione risponde la seguente di-
nostrazione del

Teorema. — Il minimo comune multiplo di due numeri ı e b è uguale al prodotto di uno di essi pel quoziente lella divisione dell'altro pel loro massimo comun divisore m.

Dimostra. — Ponendo $a = ma_1$, $b = mb_1$ è chiaro intanto :he il prodotto ma_1b_1 è multiplo comune di a e b; per pro- ɾare ora che esso è il minimo dei multipli comuni, si ap- ɔlichi ai numeri dati il processo necessario per trovare il oro m. c. d., ottenendo così la serie seguente dei

dividendi	divisori	quozienti	resti	
a	b	q_1	r_1	
b	r_1	q_2	r_2	
. . .	. . .	. . .	. . .	
r_{n-3}	r_{n-2}	q_{n-1}	r_{n-1}	$(=m)$
r_{n-2}	m	q_n	0	

e quindi le eguaglianze:

$$\imath=b.q_1+r_1,\ b=r_1.q_2+r_2, \ldots\ldots\ r_{n-3}=r_{n-2}.q_{n-1}+r_{n-1},\ r_{n-2}=mq_n$$

la cui, moltiplicando per un numero arbitrario n, si deducono e altre:

$$an = bq_1n + r_1n,\ bn = r_1q_2n + r_2n, \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots r_{n-3}\,n = r_{n-2}\,q_{n-1}\,n + r_{n-1}\,n,\ r_{n-2}\,n = mq_nn.$$

Pongasi ora la condizione che il multiplo na di a sia ınche multiplo di b, le eguaglianze precedenti dimostrano :he anche r_1n, r_2n, ... $r_{n-2}n$, $r_{n-1}n = mn$ sono multipli di ɔ e poichè $b = mb_1$ segue che, se na è multiplo di b, an- :he mn è multiplo di mb_1 e quindi n multiplo di b_1, ɔssia n multiplo di $b : m$. Ma il più semplice multiplo di b_1 b_1 stessa, onde il minimo multiplo na di a divisibile per ɔ, sarà ab_1 c.d.d.

Corollario. Ogni multiplo di due numeri a e b è anche nultiplo del loro m.c.m.

Termineremo questa rivista avvertendo il lettore che, nolto opportunamente, l'A. ha aggiunto alle solite materie lei trattati di aritmetica razionale anche un § in cui svi- uppa i più elementari teoremi sulle congruenze, ricavandone n uno successivo i caratteri ordinari di divisibilità, ciò che gli permette di aggiungere una serie d'importanti esercizi lcuni dei quali non avrebbero trovato altrimenti conveniente ede nel suo libro.

A. Lugli.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXV. Novembre e Dicembre 1887, Vol. XXVI. Gennaio e Febbraio. Napoli, 1888.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy*, Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe 3e série. Douzième année. N. 2, 3. Février, Mars. Paris, 1888.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*. 12e Année. N. 10, 11, 12, 13. Paris, M. Nony et C.ie, 17 Rue des Écoles, 1888.

Le Scuole Secondarie eco dell'Associazione nazionale fra gl'insegnanti delle scuole secondarie. Anno V. N. 8, 9, 10, 11, 12, 13. Milano 1888.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome huitième: février, mars, avril 1888.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). — Serie 2.a Vol. 2. — Gennaio e Febbraio 1888.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XX. N. 1, 2, 3, 4, 5, 6. Firenze, 1888.

ARZELA' (C.) — Sulla teoria delle funzioni analitiche. Bologna 1888.

BACHELET (A.) — Nozioni di geometria elementare. — G. B. Paravia e Comp., 1888.

BARDELLI (G.) — Proprietà stereometriche di un sistema di forze (Rendiconti del R. Ist. Lomb. 1888).

FAZZARI (G.) — Alcuni teoremi sulle coniche. Napoli, 1884. — Momenti d'inerzia di un sistema di masse rispetto a rette nello spazio. Napoli, 1886. Alcuni teoremi di massimi e minimi relativi alle coniche (Giornale di Battaglini, 1887).

GIUDICE (F.) — Sopra la determinazione di funzioni d'una variabile definite per mezzo d'una equazione con due variabili. Un osservazione relativa alla costante che compare negli svilnppi in serie delle funzioni circolari (Rend. del Circolo matematico di Palermo, Tomo II, 1887). — Trigonometria rettilinea ad uso delle Scuole liceali. — Torino, Ermanno Loescher, 1887: L. 1,50.

PEANO (G.) — Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva. Torino, Bocca, 1888.

PINCHERLE (S.) — Sopra certi integrali definiti (Rend. R. Acc. dei Lincei, 1888) — Sur une généralisation des fonctions eulériennes (1888).

SADUN (E.) — Sulla risoluzione in numeri positivi, interi o nulli, delle equazioni:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n = r, \quad 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \dots + n\lambda_n = n$$

(Annali di Matematica, 1887).

SANNIA (A.) e D'OVIDIO (E.) — Elementi di Geometria. 7a edizione riveduta e corretta, Napoli, Libreria di B. Pellerano, 1888.

SOARDI (O.) — Sopra un caso particolare di ammortamento. Roma 1888.

SQUARZINA (G.) — Dell'insegnamento dell'aritmetica del sistema metrico e della geometria nelle scuole elementari. Faenza, 1887.

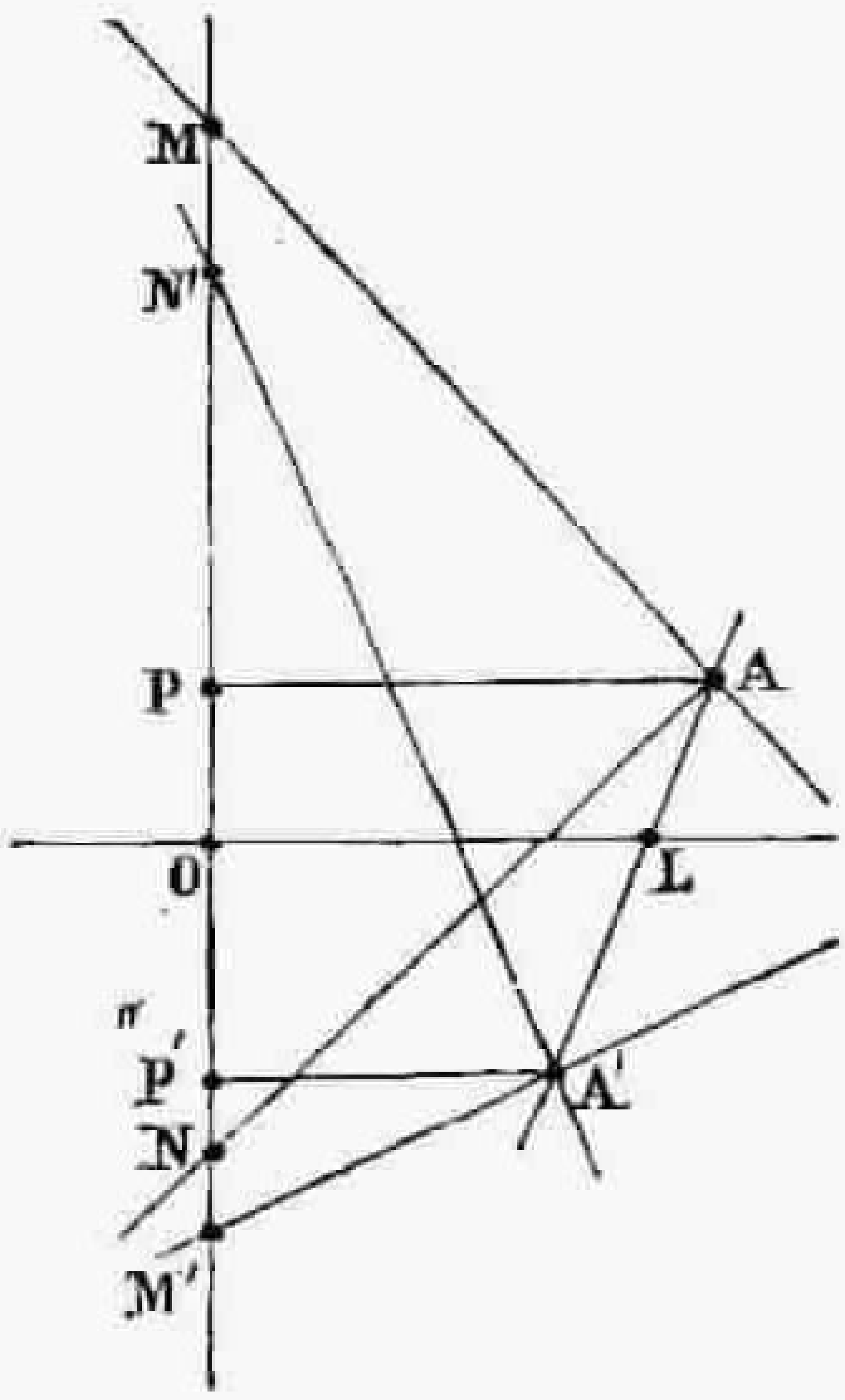
TEIXEIRA F. GOMES. — Curso de Analyse infinitesimal (Calculo differencial). Porto, Typographia occidental, 1887.

CONTRIBUZIONE
ALLA TEORIA DELLE CONICHE

Credo non riuscirà discaro ai colleghi, lettori del Periodico, il conoscere alcuni teoremi interessanti intorno alle coniche, che conducono alla costruzione geometrica più semplice ed elegante che per avventura possa desiderarsi dei centri e dei raggi di curvatura di queste celebri curve, così notevoli per sè e per le molteplici loro applicazioni. Ci serviamo, per la dimostrazione, dei principi, e delle cognizioni più ovvie di Geometria Proiettiva, che ormai si possono dire alla portata di tutti gli studiosi delle Matematiche.

Teorema. – I segmenti determinati sopra una corda di una conica da un asse, stanno fra loro in ragione reciproca dei segmenti determinati sull'altro asse dalle tangenti negli estremi della corda, ed in ragione diretta dei segmenti di questo stesso asse determinati dalle normali negli estremi medesimi.

Dimostrazione. – Siano OX, OY gli assi di una conica,



A ed A' due punti della medesima, AM ed A'M', AN ed A'N' le tangenti e le normali nei detti punti: sia infine tracciata anche la corda AA', incontrata dall'asse OX in L, e le due rette AP, A'P' parallele all'asse stesso. Nella involuzione determinata sull'asse OY dalle coppie di rette coniugate ortogonali, i punti M, N, ed M' N' sono conjugati ed O è il punto centrale, onde $OM.ON = OM'.ON'$, ossia $\frac{OM}{OM'} = \frac{ON'}{ON}$. (1)

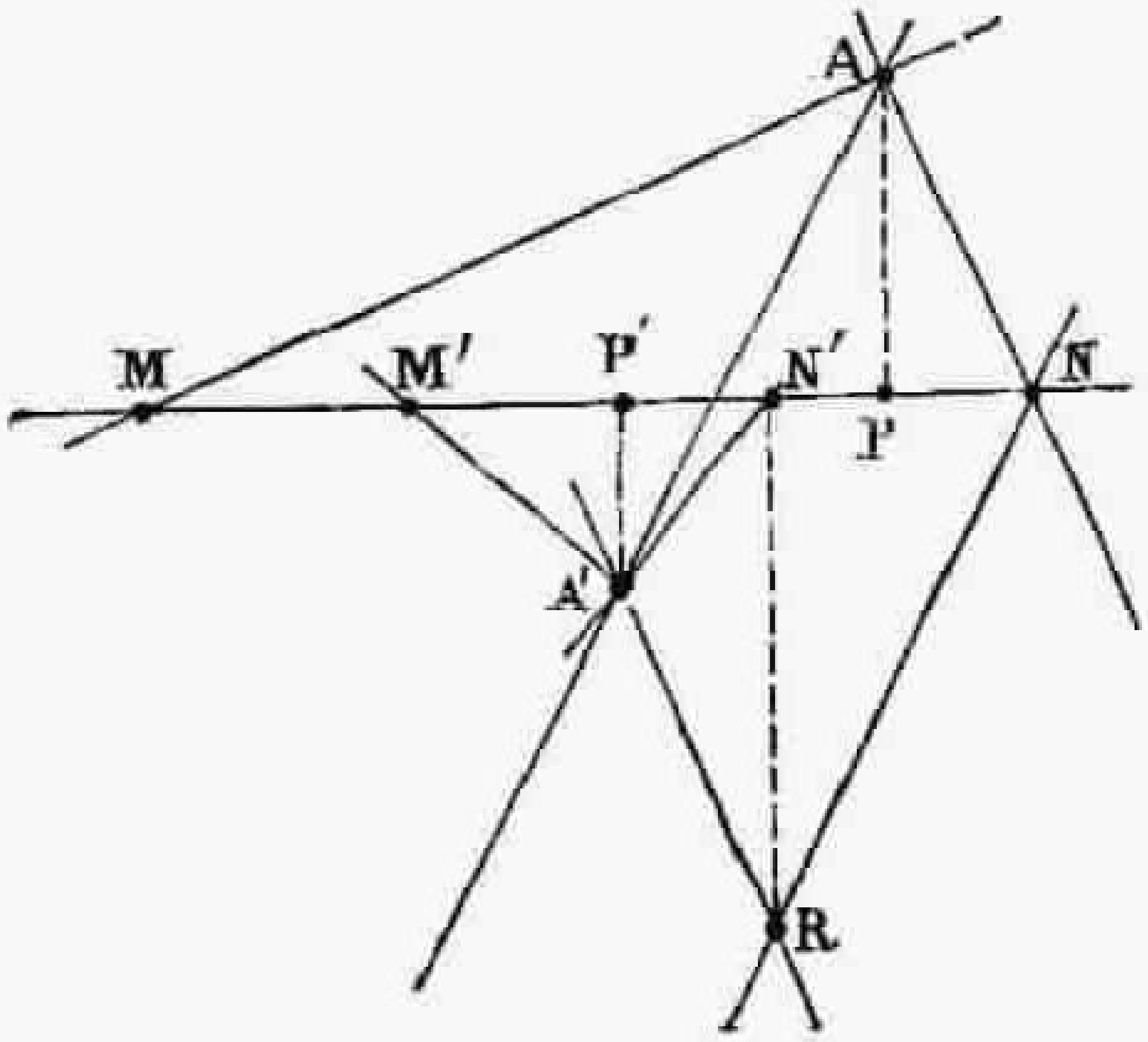
Nell'altra involuzione determinata sullo stesso asse OY dalle coppie di punti conjugati rispetto alla conica, i punti M e P, come pure i M' e P' sono coniugati, ed O è sempre il punto centrale, laonde $OM.OP = OM'.OP'$ od anche $\frac{OM}{OM'} = \frac{OP'}{OP}$ (2). Ma si ha pure evidentemente $\frac{OP'}{OP} = \frac{LA'}{LA}$, per cui infine sarà $\frac{LA'}{LA} = \frac{OM}{OM'} = \frac{ON'}{ON}$ come si era asserito.

Corollario. — Dal teorema ora dimostrato deriva che la conica che tocca le 5 rette OY, OX, AN, A'N', AA' è una parabola, perchè le punteggiate proiettive determinate su due di esse, cioè sulle OY ed AA', dalle altre tre, sono fra di loro simili, avendosi per il detto $\frac{ON}{LA} = \frac{ON'}{LA'}$ = Costante; si ha dunque il teorema: « *le normali in due punti di una conica, la corda che unisce questi punti, e gli assi determinano una parabola, che è toccata dalle* 5 *rette* ».

Corollario 2.° — Se il punto A' è infinitamente vicino ad A, la retta AA' è la tangente nel punto A, ed il punto d'incontro delle due normali infinitamente vicine è il punto di contatto della AN colla parabola inviluppata dalle 5 rette del corollario precedente; segue adunque la proposizione: « *la tangente e la normale in un punto di una conica ed i due assi, toccano una determinata parabola, il cui punto di contatto colla normale è il centro di curvatura della conica data nel punto che si considera* ».

Teorema. — Le normali in due punti di una parabola, la corda che unisce i due punti e l'asse, toccano una nuova parabola il cui asse è perpendicolare a quello della parabola data.

Dimostrazione. — Siano ancora A, A' due punti di una parabola, il cui asse è MN: e sia condotta la corda AA', nonchè le tangenti AM, A'M' e le normali AN, A'N' nei punti A ed A'. I punti M ed N, come pure M' ed N' sono equidistanti dal fuoco: sarà quindi $MM' = N'N$, vale a dire che « il segmento determinato sull'asse di una parabola dalle tangenti in due punti di essa, è uguale a quello compreso fra le normali nei punti stessi ». Condotte le AP, A'P' perpendicolari all'asse, i punti M e P come pure i due M' e P' sono quindi equidistanti dal vertice della parabola, onde MM'=P'P, e quindi anche N'N=P'P



e PN=P'N', ossia « nella parabola la sotto-normale è costante, ed uguale al doppio della distanza fra il fuoco ed il vertice, od anche uguale al raggio di curvatura della parabola nel vertice » e ciò perchè per il vertice la sotto-normale è uguale alla distanza di questo punto, da quello in cui l'asse è incontrato dalla normale nel punto infinitamente vicino al vertice stesso. — Ora le 4 tangenti AA', A'N', N'N, AN determinano una parabola, e la direzione dei diametri si ottiene conducendo A'R parallela ad AN, ed NR parallela ad AA', e congiungendo N' con R; ma la PN è la proiezione normale sull'asse della AN uguale e parallela ad A'R, per cui la P'N' sarà la proiezione della stessa A'R, ossia la N'R sarà perpendicolare all'asse, come volevano dimostrare.

Corollario. — Se A' si suppone infinitamente vicino ad A, si ha il teorema: « *la tangente e la normale in un punto di una parabola, e l'asse di questa, toccano una certa parabola avente per tangente al vertice l'asse della parabola data: il punto di contatto della parabola così determinata colla normale, è il centro di curvatura della curva data nel punto che si considera* ».

Scolio. — Dalle cose dette si ricava appunto quel metodo

La correlazione che io mi propongo di far notare consiste in ciò che, dato un teorema sulla somma, collo scambio di somma in prodotto, di termine in fattore, di multiplo in potenza, di coefficiente in esponente, si ha un teorema sulla moltiplicazione; oppure, dato un teorema sulla sottrazione, collo scambio di sottraendo in dividendo, sottrattore in divisore e resto in quoziente, si ha un teorema della divisione. La dimostrazione dei secondi teoremi si ricava colla stessa legge di correlazione dalla dimostrazione dei primi, in modo che dimostrati i primi non vi è bisogno di fare una diversa dimostrazione per i secondi.

In questa nota io ho disposti i teoremi in due colonne, ponendo l'uno a fianco all'altro i teoremi correlativi, e mi sono limitato a dare le dimostrazioni dei teoremi a sinistra, quando la correlazione è perfetta. Di alcuni teoremi per brevità non ho dato dimostrazione, per altri intendo di riferirmi a quella che trovasi per essi nell'aritmetica del prof. G. Moreno o in quella del prof. D. Amanzio. (*)

Una correlazione àvvi pure fra i teoremi della somma e quelli della sottrazione, e quindi fra quelli della moltiplicazione e della divisione, ma le dimostrazioni più che correlative sono inverse, e quindi non hanno molta affinità, salvo in qualche caso che ho citato a suo luogo; mi limito perciò a notare volta per volta i teoremi che si corrispondono in tal modo.

Il vantaggio di ridurre le dimostrazioni dei teoremi non è il solo che si ricava da questa nota, con questo metodo si trovano già fatti i teoremi che riguardano la moltiplicazione e la divisione delle frazioni, quando si sia dimostrato che la frazione è uguale ad un quoziente. Ma vi è ancora dippiù, l'ordine assegnato ai teoremi e le dimostrazioni date sono tali che si possono applicare senz'altra moficazione [eccetto che per il teorema *e*) del n. 2] ai teoremi

(*) V. Moreno. — Aritmetica, 8ª ediz. Napoli 1886 = Amanzio. — Trattato di Aritmetica teorica, Napoli 1887.

sopra i numeri frazionari. E così resta semplificata con molto vantaggio degli alunni, la teoria dei numeri frazionari, che si studia nella quinta classe ginnasiale.

I.

Operazioni dirette.

1. S'intende per *somma di più numeri* il risultato che si ottiene aggiungendo al primo numero le unità contenute nel secondo, al numero ottenuto le unità contenute nel terzo, e così di seguito fino all'ultimo numero.

I numeri che compongono la somma diconsi *termini*.

Postulato. – Ammetteremo solamente che una serie di più unità disposte in fila si può contare da sinistra verso destra, o da destra verso sinistra senza che il risultato cambi.

2. Teorema 1.° a). – *La somma di due termini non si altera se si scambia l'ordine dei termini.*

Difatti $3 + 4 = (1 + 1 + 1) + 1 + 1 + 1 + 1$ e leggendo da destra a sinistra $= 4 + 3$.

Coroll. – Con analoga dimostrazione si ha: *La somma di più termini non si altera se si scrivono i termini nell'ordine inverso.*

b) *La somma di più termini è indipendente dall'ordine dei primi due termini.*

1. S'intende per *prodotto di più numeri* il risultato che si ottiene moltiplicando il primo numero per il secondo, il risultato ottenuto per il terzo, e così di seguito fino all'ultimo numero.

I numeri che compongono il prodotto diconsi *fattori*.

Postulato. – Ammetteremo che un quadro rettangolare di unità disposte per linee orizzontali e verticali, si possa contare per orizzontali, o per verticali senza che il risultato cambi (*)

2. Teorema 1.° a). *Il prodotto di due fattori non si altera se si scambia l'ordine dei fattori.*

Difatti
$$3 \times 4 = \begin{array}{l} 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 \end{array}$$
e leggendo per verticali $= 4 \times 3$

b) *Il prodotto di più fattori è indipendente dall'ordine dei primi due fattori.*

(*) Le operazioni a sinistra si possono considerare come eseguite negli

Dico che $3 + 4 + 5 + 6 = 4 + 3 + 5 + 6$. Difatti $3 + 4 = 4 + 3$, ed aggiungendo prima 5, poi 6 a queste due somme eguali si hanno pure somme eguali.

c). *La somma di più termini è indipendente dall'ordine dei due ultimi termini.*

Difatti $5 + 2 + 3 + 4$ pel Corol. del teor. *a*) $= 4 + 3 + 2 + 5$ e pel teor. *b*) $= 3 + 4 + 2 + 5$ e pel corol. $= 5 + 2 + 4 + 3$.

d). *La somma di più termini non cambia se s'inverte l'ordine di due termini intermedî consecutivi.*

c). *Il prodotto di più fattori è indipendente dall' ordine dei due ultimi fattori.*

Difatti indicando con P il prodotto dei fattori che precedono i due ultimi, si ha $5 \times 2 \times 3 \times 4 = P \times 3 \times 4$

$$= \begin{array}{l} P + P + P \\ P + P + P \\ P + P + P \\ P + P + P \end{array}$$

e leggendo per verticali $= P \times 4 \times 3 = 5 \times 2 \times 4 \times 3$.

d). *Il prodotto di più fattori non cambia se s' inverte l'ordine di due fattori intermedî consecutivi.*

Dico che $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 2 + 3 + 5 + 4 + 6$. Difatti $2 + 3 + 4 + 5 = 2 + 3 + 5 + 4$ pel teor. *c*), ed aggiungendo 6 a queste somme eguali, si hanno pure somme eguali.

e). *La somma di più termini è indipendente dall'ordine dei termini.*

3. Teorema 2° — *In una somma di più termini si può a due o più termini sostituire la loro somma effettuata.*

Coroll. — *In una somma di più termini si può ad uno dei termini, che sia la somma di più numeri, sostituire questi numeri come termini.*

e). *Il prodotto di più fattori è indipendente dall' ordine dei fattori.*

3. Teorema 2° — *In un prodotto di più fattori si può a due o più fattori sostituire il loro prodotto effettuato.*

Coroll. — *In un prodotto di più fattori si può ad uno dei fattori, che sia il prodotto di più numeri, sostituire questi numeri come fattori.*

---

spazii ad una dimensione, e quelle di destra negli spazii a due dimensioni; sotto questo punto di vista si possono ritenere correlativi i postulati e le dimostrazioni dei teor. *a*) e *c*) del n. 2. Se le operazioni di destra si considerano eseguite negli spazii ad una dimensione si adotterà per questi teoremi la dimostrazione fondata sul teorema del n. 10 e si annulla il postulato di destra.

4. Teorema 3.° — *Per aggiungere ad una somma un numero basta aggiungerlo ad uno dei termini della somma.*

4. Teorema 3.° — *Per moltiplicare un prodotto per un numero basta moltiplicare uno dei fattori del prodotto pel numero.*

Difatti $(2+3+4+5)+7=2+3+4+5+7$ e pel teorema 2.° $=2+(3+7)+4+5$.

5. Teorema 4.° — *Per aggiungere ad un numero una somma si possono aggiungere successivamente al numero i termini della somma nell'ordine che piace.*

5. Teorema 4.° — *Per moltiplicare un numero per un prodotto si può moltiplicare il numero successivamente per i fattori del prodotto nell'ordine che piace.*

Difatti $2+(3+4+5)$ per il corol. del teor. 2° $=2+3+4+5$

6. Teorema 5.° — *La somma di più somme è eguale ad un'unica somma che ha per termini tutti i termini di ciascuna somma data.* (*)

6.° Teorema 5° — *Il prodotto di più prodotti è eguale ad un unico prodotto che ha per fattori i fattori di ciascun prodotto dato.*

Difatti $(2+3)+(4+5+6)+(7+8+9)$ pel corollario del teor. 2° $=2+3+4+5+6+7+8+9$.

7. Dicesi *multiplo* di un numero la somma di due o più *termini* tutti eguali a quel numero.

Il termine dicesi *base* del numero oppure *moltiplicando*; il numero che rappresenta quanti termini sono nella somma dicesi *moltiplicatore* o *coefficiente*.

7. Dicesi *potenza* di un numero il prodotto di due o più *fattori* tutti eguali a quel numero.

Il fattore dicesi *base* della potenza; il numero che rappresenta quanti fattori sono nel prodotto dicesi *esponente*.

(*) I teoremi a sinistra dei n. 2, 3, 4, 5, 6 collo stesso ordine e con identiche dimostrazioni si possono tradurre nei teoremi sulla somma di più segmenti, e di più angoli della Geometria, evitando in tal modo l'inconveniente di dover fare del teorema del n. 3 la distinzione pel caso in cui i termini sono consecutivi e pel caso in cui non lo sono. (V. Il primo libro di Euclide, esposto dal prof. E. D'Ovidio, § 9, 6° e 10°).

Il multiplo di un numero si dice anche *prodotto* del *moltiplicando* pel *moltiplicatore*.

Invece di scrivere $3+3+3+3+3$ si scriverà in modo abbreviato 3×5 ovvero 3.5.

8. Teorema 6.° – *La somma di due o più multipli della stessa base è un multiplo della stessa base che ha per coefficiente la somma dei coefficienti di ciascun multiplo.*

Invece di scrivere $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ si scriverà in modo abbreviato 3^5.

8. Teorema 6.° – *Il prodotto di due o più potenze della stessa base, è una potenza della stessa base che ha per esponente la somma degli esponenti di ciascuna potenza.*

Difatti $8 \times 2 + 8 \times 3 + 8 \times 4 = (8+8)+(8+8+8)+(8+8+8+8)$ e pel teorema 5.° $8+8+8+8+8+8+8+8+8 = 8 \times (2+3+4)$.

9. Teorema 7.° Viceversa. – *Il multiplo di un numero si può scomporre in una somma di più multipli dello stesso numero, i cui coefficienti abbiano per somma il coefficiente del multiplo dato.*

Ovvero: *Il prodotto di un numero per una somma è eguale alla somma dei prodotti del numero per ciascun termine della somma.*

10. Teorema 8.° – *Un multiplo di una somma è eguale alla somma degli stessi multipli dei suoi singoli termini.*

Ovvero: *Il prodotto di una somma per un numero è eguale alla somma dei prodotti del numero per ciascun termine della somma.*

9. Teorema 7.° – Viceversa. *La potenza di un numero si può scomporre nel prodotto di più potenze dello stesso numero, i cui esponenti abbiano per somma l'esponente della potenza data.*

10. Teorema 8.° – *La potenza di un prodotto è eguale al prodotto delle stesse potenze dei suoi singoli fattori.*

Difatti $(8+6+4)\times 3=(8+6+4)+(8+6+4)+(8+6+4)$ e per il teorema 5° $=8+6+4+8+6+4+8+6+4$ e per il teorema 2° $=(8+8+8)+(6+6+6)+(4+4+4)=8\times 3+6\times 3+4\times 3$,

11. Teorema 9° – Viceversa: *La somma di più multipli che hanno lo stesso coefficiente è eguale ad un unico multiplo che ha per base la somma delle basi, e per coefficiente lo stesso coefficiente.*

12. Teorema 10° – *Il prodotto di una somma per una somma è eguale alla somma dei prodotti di ciascun termine del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore.* (*)

11. Teorema 9° – Viceversa: *Il prodotto di più potenze che hanno lo stesso esponente è eguale ad un'unica potenza che ha per base il prodotto delle basi, e per esponente lo stesso esponente.*

12. Teorema 10° – *La potenza che ha per base un prodotto e per esponente una somma è eguale al prodotto delle potenze di ciascun fattore della base elevato ad un esponente eguale a ciascun termine dell'esponente.*

(Il seguito al prossimo fascicolo).

F. Amodeo.

PROPRIETA' DELLE CIRCONFERENZE CONCENTRICHE RISPETTO ALL'EQUIVALENZA GEOMETRICA

1. — Sia ABC un triangolo acutangolo in C e BD la sua altezza relativa al lato AC, si avrà:

$$q(AB) = q(BC) + q(AC) - 2r\,(CA,\ CD).$$

Si descriva la circonferenza ABD, di centro O, e conducasi la CO, mediana del triangolo ABC rispetto al lato AB, segue:

$$q(BC) + q(AC) = 2q(CO) + 2q(AO)\,;$$

(*) I teoremi dei n. 8, 9, 10, 11, 12 possono considerarsi come teoremi della moltiplicazione ed allora essi non avrebbero teoremi correlativi a sinistra, e dovrebbero precedere il teorema 1° a destra.

onde, a motivo dell'eguaglianza precedente, si ha:

$$r(CA, CD) = q(CO) - q(AO) = q(CA_1),$$

dove CA_1 rappresenta la tangente condotta da C alla circonferenza ABD.

Possiamo dunque enunciare il noto teorema:

Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono a questa quante si vogliono secanti, è costante il rettangolo di una di esse e della sua parte esterna, ed è equivalente al quadrato della tangente condotta dallo stesso punto alla circonferenza.

2. – Sia ABC un triangolo ottusangolo in C e BD la sua altezza relativa al lato AC, si avrà:

$$q(AB) = q(BC) + q(AC) + 2r(CA, CD).$$

Si descriva la circonferenza ABD, di centro O, e conducasi la CO mediana del triangolo ABC rispetto al lato AB, segue:

$$q(BC) + q(AC) = 2q(CO) + 2q(AO)$$

quindi, sostituendo nell'eguaglianza precedente:

$$r(CA, CD) = q(AO) - q(CO) = q(CA_1),$$

dove CA_1 rappresenta la metà della corda perpendicolare a CO.

Cioè il noto teorema:

Se per un punto interno ad una circonferenza si conducono a questa quante si vogliono corde, è costante il rettangolo dei segmenti di una di esse compresi fra il punto e la circonferenza, ed è equivalente al quadrato della metà della corda che risulta divisa per metà dal punto stesso.

3. – Dai teoremi precedenti segue immediatamente che:

Due circonferenze concentriche godono della proprietà che, conducendo per un punto qualunque di una qualunque di esse una retta fino ad avere due punti in comune coll'altra, il rettangolo dei due segmenti è costante.

Di analoga proprietà godono anche due sfere concentriche.

4. – Siano due circonferenze di comune centro O; nella circonferenza minore si conduca un diametro qualunque AB e si congiungano i punti A e B con un punto qualunque C della circonferenza maggiore; condotta la mediana BO, si avrà:

$$q(AC) + q(BC) = 2q\,(AO) + 2q(CO).$$

Analogamente nella circonferenza maggiore si conduca un diametro qualunque A′B′ e si congiungano i punti A′ e B′ con un punto qualunque C′ della circonferenza minore, condotta la mediana C′O, si avrà:

$$q(A'C') + q(B'C') = 2q(A'O) + 2q(C'O);$$

e poichè $AO = C'O$ e $CO = A'O$, si ha il teorema:

Due circonferenze concentriche godono della proprietà che, conducendo da un punto qualunque di una qualunque di esse due rette fino a terminare in due punti diametralmente opposti dell' altra, la somma dei quadrati dei due segmenti è costante.

Si può osservare che detta somma costante, essendo equivalente al doppio della somma dei quadrati dei raggi, è pure equivalente alla somma dei due quadrati inscrittibili nelle stesse circonferenze.

Di analoga proprietà godono anche due sfere concentriche.

5. – Considerando due circonferenze concentriche, è chiaro che tutti i punti della minore, ed essi soli, godono della proprietà di dividere le corde della maggiore in modo che il rettangolo dei due segmenti sia equivalente ad un quadrato determinato; mentre tutti i punti della maggiore, ed essi soli, godono della proprietà che le secanti da essi condotte alla minore e le rispettive parti esterne contengono un rettangolo equivalente allo stesso quadrato; se dunque tre circonferenze di comune centro O sono tali che, conducendo da un punto P della circonferenza intermedia la tangente alla stessa fino ad incontrare in Q la maggiore, e conducendo pure da P la tangente PR alla minore, riescano uguali le due tangenti PQ e PR, si avrà per una secante

qualunque AB la cui origine è un punto A della maggiore e che interseca la media in B e C:

$$r(AB,\ AC) = q(PQ),$$

per una corda qualunque $C'B'$ della media intersecante la minore in A':

$$r(A'B',\ A'C') = q(PR),$$

e quindi:

$$r(AB, AC) = r(A'B',\ A'C'),$$

e si potrà enunciare il teorema:

Data una circonferenza, il luogo geometrico dei punti (del piano) tali che, conducendo per uno di essi una retta qualunque fino ad avere due punti in comune colla circonferenza, il rettangolo dei due segmenti compresi fra detto punto e la circonferenza sia equivalente al quadrato di un dato segmento, è in generale un sistema di due circonferenze concentriche alla data, l'una interna e l'altra esterna. Il raggio della circonferenza interna è cateto di un triangolo rettangolo avente per ipotenusa e per cateto rispettivamente il raggio della circonferenza data ed il segmento dato; il raggio della circonferenza esterna è ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti il raggio della circonferenza data ed il segmento dato.

Se il segmento dato è minore del raggio della circonferenza data, il luogo geometrico dei punti in discorso è, come si è detto, il sistema delle due circonferenze sopra accennate; se il segmento è uguale al raggio della circonferenza data, la circonferenza interna si riduce al centro; se infine il segmento dato è maggiore del raggio della circonferenza data, la circonferenza interna non esiste.

Si può osservare che, condotta per un punto A'' della circonferenza intermedia una secante qualunque $A''B''$ alla circonferenza minore, intersecante la media in C'', e condotta per un punto A''' della circonferenza intermedia una corda qualunque $B'''C'''$ alla circonferenza maggiore, si ha sempre:

$$r(A''B'',\ A''C'') = q(PR)$$

$$r(A'''B''',\ A'''C''') = q\ (PQ)$$

e quindi :

$$r(A''B'',\ A''C'') = r(A'''B''',\ A'''C''')\ ;$$

il che ci dice che la circonferenza intermedia gode rispetto alle altre due della stessa proprietà di cui godono le altre due rispetto alla prima.

Il teorema vale anche per tre sfere concentriche aventi i raggi nelle condizioni anzidette.

6. — Se data una circonferenza qualunque di centro O e di raggio OA che chiameremo r, si conduce in A la tangente AA_1 uguale ad un dato segmento a, si conduce OA_1 e s'innalza ad essa la perpendicolare $A_1A_2 = a$, si conduce la OA_2, e così di seguito, ovvero fatto centro in A con raggio uguale ad a si descrive una circonferenza ed a questa si conduce la tangente OA', fatto centro in A' con raggio uguale ad a si descrive una circonferenza ed a questa si conduce la tangente OA'', e così di seguito, le circonferenze di centro O e di raggio OA, OA_1, OA_2,......, OA', OA''...... si trovano a tre a tre prese consecutivamente nelle condizioni indicate dal teorema precedente.

Le lunghezze dei raggi OA sono date dalla formula $R = \sqrt{r^2 + na^2}$ quando si faccia successivamente n uguale a 0, 1, 2, 3, ... — 1, — 2, — 3, ... Mentre però per n positivo non dobbiamo porre alcuna limitazione, altrettanto non si può dire pei valori negativi i quali evidentemente dovranno soddisfare alla condizione $r^2 + na^2 \geq 0$. È chiaro infine che quando a^2 sia una parte aliquota di r^2, e solo in questo caso, R potrà divenire nullo.

Analogo ragionamento può farsi per una serie di sfere concentriche aventi i raggi nelle condizioni anzidette.

Diego Dott. Fellini.

NOTA
SUI POLIEDRI REGOLARI E SEMI-REGOLARI CONVESSI

Negli ordinari trattati di Geometria si suole dimostrare nel capitolo sui poliedri, colla definizione e con teoremi molto semplici, che non possono esistere più di cinque specie di poliedri regolari. In alcuni poi (Legendre – Sannia e D'Ovidio) si costruiscono questi cinque poliedri e con ciò si conchiude che realmente esistono cinque soli poliedri regolari.

Ora in nessuno di quei trattati elementari si usa dar ragione del numero delle facce di cotesti poliedri e giustificarne il nome avuto; che se la costruzione implicitamente determina cotesto numero, non mi pare però razionale l'arbitrarietà che si presenta all'origine della questione. È ben vero che il Baltzer nella sua eccellente Stereometria toccò in modo generale questo argomento stabilendo molte relazioni fra il numero delle facce, dei vertici e degli spigoli di un poliedro qualunque e deducendone importanti conseguenze, ma quella trattazione per la soverchia generalità esce dai limiti di un insegnamento secondario e per la soverchia concisione poco si addatta a una mente giovane. D'altra parte questo argomento dei poliedri regolari e semi-regolari mi sembra molto conforme allo scopo che deve avere l'insegnamento della matematica, specialmente nelle scuole secondarie classiche, poichè oltre ad esercitare la fantasia geometrica, mette in chiaro come da semplici definizioni e poche verità dimostrate si possa arrivare ad importanti risultati.

Io mi propongo con questa nota di colmare questa lacuna, dimostrando con mezzi molto elementari quanti e quali sieno i poliedri possibili regolari e semi-regolari convessi. A fondamento di queste ricerche sta la formula di Eulero $f + v = s + 2$ e il teorema che in un poliedro qualunque il numero degli spigoli è la metà di quello degli angoli piani.

Poliedri regolari (Platonici).

Le facce dei poliedri regolari non possono essere che triangoli equilateri, o quadrati o pentagoni regolari, i primi possono riunirsi intorno a un vertice a tre a tre, a quattro a quattro, a cinque a cinque, i secondi e i terzi di necessità a 3 a 3, dovendo la somma degli angoli piani di un angoloide essere minore di 4 retti.

1° Caso

Triangoli equilateri a 3 a 3 intorno a un vertice.

Se x è il numero delle facce, $3x$ dovrà essere il numero degli angoli piani, $\frac{3x}{2}$ quello degli spigoli, x quello dei vertici, e questi valori posti nella formola di Eulero danno

$$2x = \frac{3x}{2} + 2, \quad x = 4.$$

Poliedro regolare a 4 facce, 4 vertici, 6 spigoli. — *Tetraedro regolare.*

2° Caso.

Triangoli equilateri a 4 a 4 intorno a un vertice.

facce	angoli piani	spigoli	vertici
x	$3x$	$\frac{3x}{2}$	$\frac{3x}{4}$

$$x + \frac{3x}{4} = \frac{3x}{2} + 2, \quad x = 8.$$

Poliedro regolare ad 8 facce triangolari, 12 spigoli, 6 vertici. — *Ottaedro regolare.*

3° Caso

Triangoli equilateri a 5 a 5 intorno a un vertice

facce	angoli piani	spigoli	vertici
x	$3x$	$\frac{3x}{2}$	$\frac{3x}{5}$

$$x + \frac{3x}{5} = \frac{3x}{2} + 2, \quad x = 20$$

Poliedro regolare a 20 facce triangolari, 30 spigoli, 12 vertici. – *Icosaedro regolare.*

4° Caso

Quadrati a 3 a 3 intorno a un vertice.

facce	angoli piani	spigoli	vertici
x	$4x$	$2x$	$\frac{4x}{3}$

$$x + \frac{4x}{3} = 2x + 2, \quad x = 6$$

Poliedro regolare a 6 facce quadrate, 12 spigoli, 8 vertici. – *Esaedro regolare o Cubo.*

5° Caso

Pentagoni regolari a 3 a 3 intorno a un vertice

facce	angoli piani	spigoli	vertici
x	$5x$	$\frac{5x}{2}$	$\frac{5x}{3}$

$$x + \frac{5x}{3} = \frac{5x}{2} + 2, \quad x = 12$$

Poliedro regolare a 12 facce pentagone e regolari, 30 spigoli, 20 vertici. – *Dodecaedro regolare.*

FRANCESCO PANIZZA.

(Il seguito al prossimo fascicolo).

ESERCIZI PER LA SCUOLA

Sui pentagoni regolari (*).

1. Nel Pentagono regolare convesso ogni angolo è diviso in tre parti eguali dalle diagonali che partono dal suo vertice.
2. Dei due angoli adiacenti che formano le diagonali del P.*r.c.* alla loro reciproca intersezione, uno eguaglia l'angolo del Pentagono, l'altro ne è i due terzi.
3. Le diagonali del P.*r.c.* si dividono due a due in parti disuguali, di cui la maggiore eguaglia il lato.
4. La congiungente il punto d'incontro di due diagonali del P.*r.c.* col vertice per cui non passano codeste diagonali, passa per il centro del Pentagono (centro della circonferenza inscritta o circoscritta).
5. Determinare colla sola riga il centro di un dato P.*r.c.*
6. Nel P.*r.c* le diagonali si dividono due a due in sezione aurea, il cui segmento maggiore eguaglia il lato.
7. La parte minore della sezione aurea (interna) fatta sul segmento somma della diagonale e del lato di un P.*r.c.* eguaglia il lato stesso.
8. Il segmento che si ottiene aggiungendo alla differenza tra la diagonale ed il lato di un P.*r.c.* la parte maggiore della sezione aurea (**) fatta su di essa differenza, eguaglia il lato del Pentagono.
9. Costruire il P.*r.c.* *a)* dato il lato, oppure *b)* data la diagonale, oppure *c)* data la somma o la differenza della diagonale e del lato.

(*) « **ABCDE** è un Pentagono regolare convesso (**P.*r.c.***); le sue diagonali formano il **P.*r.*** stellato (**P.*r.st.***) **AFBGCH**.... che ha per lati esse diagonali. Chiameremo *inviluppo* e *corpo* della stella rispettivamente i Pentag.$r^i.c^i$ **ABCDE**, **FGHIK**; *angoli salienti* o semplicemente *salienti* gli angoli **FBG**, **GCH**, **HDI**...., ed *angoli rientranti* o semplicemente *rientranti* gli angoli **AFB**, **BGC**, **CHD**,....; *punte* della stella i triangoli isosceli che hanno per angolo al vertice i salienti e per basi i lati del corpo. Considerando poi quali diagonali del Pent.*st.* le congiungenti due vertici non messi sullo stesso lato, le indicheremo coi simboli Dg^s, Dg^r, Dg^{rs} a seconda che uniscono i vertici di due salienti, o di due rientranti, o di un saliente e di un rientrante ».

(**) Senz'altra indicazione intendasi « sezione aurea interna ».

10. La diagonale di un *P.r.c.* eguaglia il segmento maggiore della sezione aurea esterna fatta sul lato.
11. Su AD, segmento maggiore della sezione aurea di AB, si è costruito il triangolo isoscele ADE cogli altri due lati eguali ad AB. Si è prolungato DA del segm. AG = AB, ed EA del segm. AF = AD, e centro nei punti G, E si sono descritti due archi di raggio AB le cui intersezioni sono A ed H. Dimostrare che HEDFG è il *P.r.c.* di lato AB.
12. Costruire il *P.r.st.* *a*) dato il Perimetro, oppure *b*) data la Dg^s, oppure *c*) data la Dg^r, oppure *d*) uno qualunque dei segmenti determinati su ciascun lato dalla reciproca loro intersezione.
13. In una circonferenza, il cui centro è O, prolungato il raggio OA della sua metà da A in L, e descritto su OL quale diametro la circonferenza, si è portata su LO da L in M la distanza del punto L dalle intersezioni delle due circonferenze. Prolungato poscia OL, dall'altra parte del centro, di OF = OM, si è condotta la corda BC perpendicolare ad AF nel suo punto medio. Dimostrare che ciascuno degli archi (minori) AB, AC è quinta parte della circonferenza.
14. Indicando r il valore del raggio della circonferenza data nell' esercizio precedente, dimostrare che i valori delle corde AB, BC, sono rispettivamente $\frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\frac{1}{2}r\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.
15. Dividere una circonferenza data in 5 parti eguali.
16. Se r e ρ indicano i raggi di due *Pent.r'c'* di cui uno è quello formato dalle diagonali dell'altro, si hanno le relazioni $\rho^2 + r^2 = 3r\rho$, $(\rho - r)^2 = r\rho$.
17. Dato un segmento, determinarne un altro tale che il rettangolo dei due equivalga il quadrato della loro differenza. Quante soluzioni ammette il Problema?
18. Costruiscasi il triangolo rettangolo con un cateto eguale al raggio di un dato *P.r.st.* e coll'ipotenusa eguale a tre metà dello stesso raggio. La differenza tra l'ipotenusa e l'altro cateto eguaglia il raggio del corpo del *P.r.st.*

dato, e la somma eguaglia il raggio dell'altro P.r.st formato prolungando i lati dell'inviluppo in quello dato.

19. Il quadrato del raggio d'un *P.r.c.* equivale il rettangolo del raggio dell'altro *P.r.c.* formato dalle diagonali del primo, e del raggio del *P.r.st.* formato prolungando i lati in quello dato.

20. Divisa una circonferenza in 5 parti eguali, se si conducono le rette per ogni due dei punti di divisione, il luogo delle intersezioni reciproche di queste rette è il sistema di tre circonferenze concentriche, quella di mezzo essendo la data, i cui tre raggi formano una proporzione continua.

21. Inscritto in una circonferenza il *P.r.c.* ABCDE, determinata l'intersezione L del prolungamento di due lati non consecutivi AE, CD, e l'intersezione D delle diagonali AD, EC che passano per gli estremi di codesti lati, dimostrare che la circonferenza è il luogo dei punti tali che il rapporto delle distanze di ciascuno di essi alle intersezioni suaccennate è costante.

22. Il diametro di una circonferenza il quale passa per il punto d'incontro di due diagonali del *P.r.c.* inscritto, è diviso armonicamente da questo punto e dall'intersezione coi due lati che terminano agli estremi di quello a cui esso diametro è perpendicolare.

23. Coi dati dell'esercizio 21 dimostrare che i punti di contatto delle tangenti condotte per L alla circonferenza, sono le intersezioni colla circonferenza stessa della perpendicolare in D alla DL.

24. Costruire il *P.r.c.* *d*) dato il raggio *e*) dato l'apotema.

25. Costruire il *P.r.st.* *e*) dato il raggio, *f*) dato l'apotema, *g*) dato il raggio del corpo.

26. Ad una data circonferenza inscrivere e circoscrivere i Pentagoni regolari convessi e stellati.

27. Centro un vertice A del *P.r.c.* ABCDE, e raggio la distanza tra A e DC si è descritta la circonferenza. Di-

mostrare che l'arco FG di questa circonferenza compreso fra le intersezioni colle diagonali AD, AC è la decima parte della circonferenza.

28. Il rapporto tra il lato ed il raggio del Dec *r.c.* eguaglia quello tra la diagonale ed il lato del P.*r.c.*

29. Nel Dec.*r.c.* il lato eguaglia il segmento maggiore della sezione aurea fatta sul raggio; ed il segmento maggiore della sezione aurea fatta sul lato eguaglia la differenza tra il lato stesso ed il raggio.

30. Il raggio d'un circolo eguaglia il segmento maggiore della sezione aurea esterna fatta sulla corda corrispondente all'angolo al centro di 36°.

31. Dividere una data circonferenza in 10 parti eguali.

32. Costruire il Dec.*r.c.* *a*) dato il lato, *b*) dato il raggio, *c*) data la somma o la differenza del lato e del raggio.

33. Costruire il P.*r.st.* *h*) data la Dg.*re*, *i*) data l'altezza delle punte.

34. Nel P.r.c. ABCDE, prolungato un lato DC del segmento CM tale che DC + CM = diagonale, e preso sulla perpendicolare AN a DC il punto H in maniera che AH = NM, si tagli in K il prolungamento di DM con la circonferenza di centro O, punto medio di HN, e di raggio OA. Provare che NK è il lato del quadrato equivalente al Pent. dato.

35. Un P.*r.st.* è equivalente al rettangolo del semiperimetro del corpo per il raggio.

36. Costruire il P.*r.* convesso o stellato equivalente ad un dato poligono qualunque.

37. Se *a* ed *r* indicano rispettivamente l'apotema ed il raggio di un P.*r.c.* si ha

$$\text{Perimetro} = 10a\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \tfrac{5}{2}\,r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$
$$\text{Diagonale} = a\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \tfrac{1}{2}\,r\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$
$$\text{Raggio} = a(\sqrt{5}-1)$$
$$\text{Apotema} = \tfrac{1}{4}r(\sqrt{5}+1)$$

38. Se α e ρ indicano ordinatamente apotema e raggio d'un P.*r.st.* si ha

$$\text{Perimetro} = \tfrac{5}{2}\,\rho\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 10\alpha\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$Dg^{s} = \tfrac{1}{2}\,\rho\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \alpha\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$Dg^{r} = \rho\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \alpha\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$Dg^{rs} = \tfrac{1}{2}\,\rho(5-\sqrt{5}) = 2\alpha\sqrt{5}$$

$$\text{lato delle Punte} = \rho\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \alpha\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\text{lato del Corpo} = \tfrac{1}{2}\,\rho\sqrt{50-22\sqrt{5}} = 2\alpha\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$\text{Raggio} \;\;\text{»}\;\; = \tfrac{1}{2}\,\rho(3-\sqrt{5}) = \alpha(\sqrt{5}-1)$$

$$\alpha = \tfrac{1}{4}\,\rho(\sqrt{5}-1)$$

39. Verificare le seguenti relazioni tra gli elementi dei Pentagoni regolari (a ed r indicando apotema e raggio dei convessi, α e ρ gli elementi omonimi degli stellati) valutando in decimali, a meno di $\frac{1}{10^7}$ in difetto, quelle formole, dedotte da proprietà geometriche le quali danno ciascun elemento in funzione diretta del raggio o dell'apotema.

$$\text{P.}r.c.\begin{cases} \text{Perimetro} = r.5{,}8778525 = a.7{,}2654252 \\ \text{Diagonale} = r.1{,}9021130 = a.2{,}3511410 \\ \text{Apotema} = r.0{,}8090169 \\ \text{Raggio} = \ldots\ldots = a.1{,}2360679 \\ \text{Area} = r^2.2{,}3776412 = a^2 3{,}6327126 \end{cases}$$

$$
\text{P.}r.st.\left\{
\begin{aligned}
\text{Perimetro} &= \rho.9,5105651 = \alpha.30,7768353\\
\text{Dg}^{s} &= \rho.1,1755705 = \alpha.\ 3,8042260\\
\text{Dg}^{r} &= \rho.0,7265425 = \alpha.\ 2,3511410\\
\text{Dg}^{rs} &= \rho.1,3819660 = \alpha.\ 4,4721359\\
\text{Apotema} &= \rho\ 0,3090169\\
\text{Raggio} &= \ldots\ldots\ \alpha.\ 3,2360679\\
\text{Altezza delle punte} &= \rho.0,6909830 = \alpha.\ 2,2360679\\
\text{Lato del Corpo} &= \rho.0,4490279 = \alpha.\ 1.4530850\\
\text{Raggio del Corpo} &= \rho.0,3819660 = \alpha.\ 1,2360679\\
\text{Area del Corpo} &= \rho^2.0,3468932 = \alpha.\ 3,6327126\\
\text{Area d'ogni punta} &= \rho^2.0,1551353 = \alpha.\ 1,6245984\\
\text{Area totale} &= \rho^2.1,1225699 = \alpha.\ 11,7557050.
\end{aligned}\right.
$$

G. Scoto.

RISPOSTA ALLE QUISTIONI 1, 2, 4 PROPOSTE A PAG. 28.

(1) *Dati in un piano due triangoli* ABC, DEF *ed un punto, se le rette congiungenti questo punto con i vertici* A, B, C, D, E, F *segano i lati rispettivamente opposti ad essi nei punti* A', B', C', D', E', F', *i tre punti nei quali le rette* AD, BE, CF *tagliano ordinatamente le rette* A'D', B'E', C'F' *sono situati in una stessa retta.*

F. Nicoli.

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi.*

Sia P il punto preso nel piano; i due quadrangoli PABC, PDEF considerati come appartenenti a due sistemi piani σ, σ' sovrapposti, individuano la proiettività tra i due sistemi, nella quale P è punto unito, e quindi sono prospettive le coppie di punteggiate PAA'....., PDD'....., PEE'..... ; PCC'.....,

PFF'..... E però basterà dimostrare che i tre centri di prospettiva sono in linea retta.

Sieno J, J_1, J_2 i punti limiti delle punteggiate PAA', PBB', PCC' e I', I'_1, I'_2 i punti limiti delle punteggiate corrispondenti: i punti J, J_1, J_2 sono sulla retta limite di σ, e I', I'_1, I'_2 su quella di σ'.

Al punto all'infinito di JJ_1J_2, considerato come appartenente a σ, corrisponde il punto all'infinito di $I'I'_1I'_2$; perciò le rette condotte da P parallelamente a JJ_1 e $I'I'_1$ sono corrispondenti nei sistemi σ, σ' e quindi sezionando i fasci proiettivi $P(ABC....)$, $P(DEF....)$ rispettivamente con le rette JJ_1 e $I'I'_1$ si hanno le punteggiate JJ_1J_2 e $I'I'_1I'_2$..... simili, come quelle in cui i punti all'infinito si corrispondono.

Essendo esse simili, i punti medi delle congiungenti i punti corrispondenti sono allineati, e allineati sono pure i simmetrici di P rispetto a tali punti medi, ossia proprio i centri di prospettiva delle punteggiate.

(2) *Dati due tetraedri* ABCD, EFGH *ed un punto, se le rette congiungenti questo punto con i vertici* A, B, C, D, E, F, G, H *segano le facce rispettivamente opposte ad essi nei punti* A', B', C', D', E', F', G', H', *i quattro punti nei quali le rette* AE, BF, CG, DH *tagliano ordinatamente le rette* $A'E'$, $B'F'$, $C'G'$, $D'H'$ *sono situati in uno stesso piano.*

F. Nicoli.

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi.*

Sia P il punto scelto nello spazio: i due pentagoni gobbi PABCD, PEFGH considerati come appartenenti a due spazi Σ, Σ' individuano la proiettività, nella quale P è punto unito e quindi sono prospettive le coppie di punteggiate PAA'...., PEE'....; PBB'...., PFF'....; PCC'...., PGG'....; PDD'...., PFF'.... . Perciò basterà dimostrare che i quattro centri di prospettiva sono in uno stesso piano.

Sieno J, J_1, J_2, J_3 i punti limiti delle punteggiate PA...., PB...., PC...., PD.... e I', I'_1, I'_2, I'_3 i punti limiti delle corrispondenti: i punti J, J_1, J_2, J_3 sono sul piano limite di Σ, e gli altri sul piano limite di Σ'.

Alla retta all'infinito del piano $JJ_1J_2J_3$. considerato come appartenente allo spazio Σ, corrisponde la retta all'infinito del piano $I'I'_1I'_2I'_3$, perciò i piani paralleli a tali piani limiti condotti per P sono corrispondenti negli spazi Σ, Σ', dunque sezionando le stelle proiettive P(ABCD....), P(EFGH....) rispettivamente coi piani $JJ_1J_2J_3$ e $I'I'_1I'_2I'_3$, si hanno i sistemi piani $JJ_1J_2J_3$...., $I'I'_1I'_2I'_3$.... simili, come quelli in cui le rette all'infinito si corrispondono. Essendo essi simili, i punti medi delle congiungenti i punti corrispondenti sono su uno stesso piano, e in uno stesso piano pure i simmetrici del punto P rispetto a tali punti medi, ossia proprio i centri di prospettiva delle punteggiate.

(4). — *Risolvere il sistema di equazioni*

$$x - yz = a\sqrt{1-y^2}\ \sqrt{1-z^2}$$
$$y - zx = b\sqrt{1-z^2}\ \sqrt{1-x^2}$$
$$z - xy = c\sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-y^2}$$

D. Besso.

Risoluzione del Prof. *F. Viaggi* (*).

Dal porre eguale a 1 il valore assoluto d'una delle incognite si ottengono le seguenti soluzioni

$$\left.\begin{array}{c|c|c|c|c} x & +1 & -1 & -1 & +1 \\ y & +1 & -1 & +1 & -1 \\ z & +1 & +1 & -1 & -1 \end{array}\right\} \text{(I)}.$$

valide quali che siano i valori delle costanti; e le altre subordinate a valori speciali di qualche costante:

$$\left.\begin{array}{lll} x = 1 & y = z = \frac{0}{0}, & \text{se } a = 1; \\ x = -1 & y = -z = \frac{0}{0}, & \text{se } a = -1; \end{array}\right\} \text{(II)}$$

(*) Altre soluzioni furono inviate dai Signori *J. Beyens*, *R. Badia*, *A. de Zeltiry*, *A. Massa*, *M. Rocchetti*.

e analoghe.

Risolute le equazioni rispetto alle costanti, si ha:

$$a=\frac{x-yz}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}}, \quad b=\frac{y-zx}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-x^2}}, \quad c=\frac{z-xy}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}$$

e di quì:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{1-a^2}&=\frac{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2+2xyz}}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}},\\ \sqrt{1-b^2}&=\frac{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2+2xyz}}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-x^2}},\\ \sqrt{1-c^2}&=\frac{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2+2xyz}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}.\end{aligned}\right\}\quad(\alpha)$$

Dalle sei ultime equazioni si deducono le

$$a+bc=\frac{x(1-x^2-y^2-z^2+2xyz)}{(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}}, \quad \sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}=\frac{1-x^2-y^2-z^2+2xyz}{(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}},$$

dalle quali si ha la 1ª delle seguenti e analogamente le altre:

$$x=\frac{a+bc}{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}}; \quad y=\frac{b+ca}{\sqrt{1-c^2}\sqrt{1-a^2}}, \quad z=\frac{c+ab}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}}. \quad \text{(III)}$$

In generale (I) e (III) danno le soluzioni del sistema proposto. Le (III) sono state ottenute nella tacita ipotesi che nessuno dei binomi $1-a^2$, $1-b^2$, $1-c^2$ sia zero. Se è nullo uno o due dei binomi, ma non tutti e tre, i valori delle incognite (conf. (α)) debbono annullare il polinomio $1-x^2-y^2-z^2+2xyz$, ma insieme almeno uno dei binomi $1-x^2$, $1-y^2$, $1-z^2$; dunque (I), (III) danno le soluzioni del sistema.

Se sono nulli tutti e tre i binomi $1-a^2$, $1-b^2$, $1-c^2$, oltre le soluzioni (I), (II) il sistema ammette anche le soluzioni di $1-x^2-y^2-z^2+2xyz=0$ che non annullino alcuno dei binomi $1-x^2$, $1-y^2$, $1-z^2$.

QUISTIONI PROPOSTE

7. — È dato il volume complessivo delle pareti laterali e del fondo di un vaso della forma di un parallelepipedo retto rettangolo, e sono date la grossezza uniforme delle pareti e la grossezza uniforme del fondo. Determinare le dimensioni del vaso in modo che sia massima la sua capacità.

8. — Sè un pentagono ha la proprietà che le congiungenti i vertici ai punti di mezzo dei lati rispettivamente opposti passino per uno stesso punto, e sieno in questo punto divise in modo che il rapporto delle sue distanze da un vertice e dal punto di mezzo del lato opposto sia eguale per tutte, quel pentagono è regolare.

9. — Se due triangoli diseguali hanno cinque elementi eguali, il rapporto del maggiore dei tre lati al minore è, in ciascuno dei due triangoli, minore di $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

10. — Esiste un triangolo nel quale il centro del circolo circoscritto e il punto d'incontro delle altezze sieno ambedue situati sulla circonferenza inscritta?

D. Besso.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Giulio Giuliani. — Elementi di Algebra ad uso dei Licei e degli Istituti tecnici. — Torino — Ermanno Loescher — 1887.

Intorno a questo libro, che per il contenuto e per l'ordine col quale gli argomenti vi son trattati non si discosta notevolmente dagli altri che sono in uso nelle nostre scuole, mi limiterò a fare alcune poche osservazioni.

Il § 1 « Numeri positivi e negativi », può esser posto a confronto colla Nota « sopra i numeri negativi » che 'illustre professor *Betti* ha aggiunto al trattato del *Bertrand*; na è da dubitare se, come fa il *Giuliani*, sia felice la sostituzione del concetto puramente geometrico di determinare listanze di punti sopra una linea retta, all'altro elementare : più generico di contare in avanti e indietro una moltitudine di oggetti disposti in linea. Oltredichè l'insigne nostro Maestro nell'affermare che « l' introduzione nell' algebra di numeri ai quali si attribuiscono proprietà di convenzione e che non hanno significato, *può* far nascere qualche difficoltà in chi comincia lo studio di questa scienza e *non sembrare* abbastanza giustificata dallo scopo di render più semplici alcuni resultati », ha, se non erro, avuto in mira di opporsi all' *abuso* delle convenzioni che talvolta si suol fare nella teoria dei numeri negativi, ma non di chiudere l'adito a chi voglia tenere una via di mezzo, la quale consiste nel proporsi d'estendere il concetto di numero al fine di dar significato all'operazione $a - b$ quando a è minore di b, traendo esempio da quanto già è stato fatto per introdurre i numeri frazionari. Assicurata così ai nuovi numeri (da chiamarsi poi *negativi*) una definizione esclusivamente aritmetica, sarà ammissibile qualunque metodo che si voglia adottare per rendere intuitive sia la possibilità della introduzione, sia le leggi che devono regolare il calcolo coi numeri negativi.

Per dar esempio (n.° 11) del metodo di dimostrazione per *induzione da* n *ad* n + 1, non trovo convenientemente scelto il teorema del binomio di Newton, se non si spiega il passaggio dai coefficienti interi ottenuti mediante le moltiplicazioni successive, a quelli espressi sotto forma di quozienti. — Al principio del § 4 (n.° 13) ove si tratta della divisione di due monomi sarebbero necessari maggiori schiarimenti per evitare che sia frainteso il confronto fatto dall' A. tra le lettere nell'algebra e i numeri primi nell'aritmetica.

Nè tutti forse approveranno (n° 15) la sostituzione di formule e d'uguaglianze ai ragionamenti semplici e rigorosi coi quali si dimostrano ordinariamente i due teoremi che servono di fondamento alla divisione dei polinomi. V'ha anche qualche obiezione a fare, e in senso assoluto e per l' esempio scelto, quando afferma che il quoziente di 45948 diviso per 547 si deduce da quello dei due polinomi corrispondenti per

$x-a$, se vero è che insieme colle *analogie* vanno notate anche le *differenze* tra la divisione aritmetica e la divisione dei polinomi. Sorvolo sul n° 16 che contiene la censurata dimostrazione relativa alla divisione d'un polinomio per $x-a$, perchè l'A. stesso, con una sua recente pubblicazione, dà promessa di modificarla, e passo senz'altro al § 10 in cui si tratta dei principii fondamentali della teoria delle equazioni. Mi piace il teorema del n° 43 dal quale discende il *metodo di paragone o di confronto* per la risoluzione d'un sistema d'equazioni: noto soltanto che si potrebbero risolvere *tutte* le equazioni rispetto ad x, anzichè limitarsi alle prime due. Anche a ciò che riguarda le soluzioni negative delle equazioni di primo grado converrebbe dar maggior rilievo di quel che l'A. non faccia col parlarne brevemente nella risoluzione di due semplici problemi.

Esaurite, nella prima metà del libro, le questioni che si riferiscono alle equazioni e diseguaglianze di primo grado, si presenta la teoria dei numeri irrazionali trattata così ampiamente e rigorosamente da far deplorare che vi si trovi qualche *lapsus calami*, come l'ennunciato del teorema (n.° 52): « Se *a non è* potenza n^{esima} di un *altro* numero, *non esiste* nessun numero *b*, nè intero nè fratto che sia radice n^{esima} di *a* », dov'è evidente che la tesi è inclusa nell'ipotesi. Così pure non è generalmente vero quanto leggesi a pag. 55, cioè che « se i due numeri $\alpha = (A, A')$,, $\beta = (B, B')$ sono irrazionali, uno solo o tutti e due, si chiamerà somma dei due numeri α e β il numero (*irrazionale*) definito dalle due classi $A + B$, $A' + B'$ » potendo in infiniti casi la somma di due numeri irrazionali essere razionale. Queste son però lievi mende, tolte le quali rimane, come ho già detto, una teorica svolta esattamente anche nei minimi particolari. Ma si può domandare: Conviene veramente il presentarla ai principianti con tanta generalità e sì gran copia di notazioni e di diseguaglianze? Ed è poi necessario, per non contravvenire al rigore, di mettersi per una via così scabrosa? A me pare di no. La dimostrazione che vi sono infiniti numeri che non ammettono radice d'un determinato indice n, insieme coll'altra dell'esistenza di numeri razionali la cui potenza n^{esima} differisce da un numero, che non è potenza n^{esima}, di una quantità piccola ad arbitrio, è fondamento sufficiente per intraprendere la spiegazione dell'algoritmo mediante il quale si determinano le radici dei numeri. E colla *costruzione effettiva* delle due serie di numeri razionali, si giungerà in modo naturale alla *conclusione* che tali serie debbono essere prese per *definizione* del simbolo $\sqrt[n]{}$ nei casi in cui esso sarebbe privo di significato. A questo punto poi potrebbe opportunamente essere richiamato quanto di analogo pei numeri razionali viene ad esser fatto, per esempio, nella teoria delle frazioni periodiche: e da tale ravvicinamento scaturirebbe di per sè chiaro il concetto di definire un numero mediante classi d'infiniti altri numeri. Poche e semplici considerazioni dovrebbero pure bastare per avviare con sicurezza gli alunni alle operazioni di calcolo coi numeri irrazionali, e molti invece e bene scelti dovrebbero essere gli esempi, senza i quali si corre il rischio di aver deficienti nell'applicazione anche coloro che sono riusciti a rendersi sufficiente ragione della teoria.

Dopo quanto ho detto dei numeri negativi è facile argomentare che anche per i numeri complessi preferisco che si domandi alla geometria una *rappresentazione* anzichè la *definizione*: osservo, ad ogni modo, che nè l'una nè l'altra posson dirsi complete se si tralascia d'introdurvi le funzioni trigonometriche.

Non pretendo che il valente A. concordi in tutte queste mie opinioni, e mi terrò pago se, pubblicando una nuova edizione del suo libro, mostrerà di averle tenute in qualche conto.

ELCIA SADUN.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1888; N. 1.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche pubblicato da *B. Boncompagni*. Tomo XX. Maggio—Settembre 1887. Roma.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXVI. Marzo-Aprile, Napoli, 1888.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy*, Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe, 3e série. Douzième année. N. 4, 5, 6. Avril, Mai, Juin. Paris, 1888.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*. 12e Année, N. 14, 15, 16, 17, 18. Paris, M. Nony et C.ie, 17 Rue des Écoles, 1888.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira*. Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VIII, n. 3 e 4. Coimbra, 1888.

Le Scuole Secondarie eco dell'Associazione nazionale fra gl'insegnanti delle scuole secondarie. Anno V. N. 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21. Milano 1888.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome huitième: mai, juin 1888.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). — Serie 2.a Vol. 2. — Marzo—Maggio 1888.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. — Tomo II. Fascicoli 1, 2, 3.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XX. N. 7, 8, 9 e 10. Firenze, 1888.

Agamennone (G.) — Il terremoto nel vallo cosentino del 3 dicembre 1887. (Rend. R. Accademia Lincei, 1888).

Agamennone (G.) e Cancani (A.) — Contributo alla storia ed allo studio dell'igrometria. — Annali della Meteo. italiana. — Parte I. — 1885.

Amanzio (D.) — Aritmetica pratica ad uso delle scuole ginnasiali e tecniche e dei collegi militari. Cav. A. Morano, editore. Napoli 1886. — Prezzo L. 3.

—— Sette lezioni di algebra ad uso degli alunni d'Istituto tecnico. B. Pellerano, editore. Napoli 1881. — Prezzo L. 2,80.

—— Sullo sviluppo in serie delle radici di un'equazione algebrica di grado qualunque (Rendiconti dell'Acc. delle Scienze. Napoli 1877). — Di alcune trasformazioni del simbolo d'operazione $V\frac{d}{dx}\cdot U\frac{d}{dx}\cdots\cdots Z\frac{d}{dx}\cdot Y\frac{d}{dx}\cdot X\frac{d}{dx}$ e proprietà di alcuni determinanti che derivano da queste trasformazioni (Gior. di Battaglini. Vol. XXI). — Intorno ad una funzione isobarica (Atti dell'Acc. Pontoniana. Vol. XVII). — Sopra alcune formole (Gior. di Battaglini. Vol. XV).

Bernardi (G.) — Tavole dei quadrati e dei cubi dei numeri interi da 1 a 1000, con un teorema nuovo sopra la radice quadrata e sulla radice cubica. — Parma, tip. Ferrari e Gamberini, 1888. — Prezzo L. 1,50.

Bertini (E.) — Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche (Rend. Ist. lomb. 1888).

Bettazzi (R.) — Sulla derivata totale delle funzioni di due variabili reali e sull'inversione delle derivazioni (Gior. di Battaglini. Vol. XXVI). — Su una corrispondenza fra un gruppo di punti ed un continuo ambedue lineari (Annali Matema. 1888).

Casorati (F.) — Sopra le *coupures* del Sig. Hermite, i *Querschnitte* e le superficie di Riemann, ed i concetti d'integrazione sì reale che complessa. Articolo secondo (Annali matema. 1888).

Frattini (G.) — Aritmetica pratica ad uso delle scuole elementari del Regno. — Parte I, 2a ediz. — G. B. Paravia e C.a — Prezzo: L. 0,40.

Jung (G.) — Sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di genere qualunque (Rend. Ist. Lomb. 1888). — A propos des deux récents Communications de M. J. Bertrand « Sur la probabilité du tir à la cible » (Comptes rendus, Avril 1888).

Maggi (G. A.) — Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropo (Annali mat. 1888).

(Il seguito al prossimo fascicolo).

SULL'APPROSSIMAZIONE DELL'ORDINARIA INTERPOLAZIONE NELLE TAVOLE DI LOGARITMI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

Mi propongo in questa nota di determinare per via elementare un limite superiore dell'errore derivante dall'ordinario metodo d'interpolazione nelle tavole logaritmiche delle funzioni goniometriche.

I.

1. Premetterò alcuni teoremi, che servono a determinare un limite superiore dell'errore, di cui è affetto il logaritmo di un numero a, il suo logaritmo-seno e logaritmo-tangente, essendo noto di a un valore a' approssimato a meno di α.

Qualsiasi l'intero positivo m e il numero $x < \frac{1}{m}$, si ha sempre:

$$(1) \qquad 1 + mx < (1 + x)^m < \frac{1}{1-mx} \qquad (*)$$

(*) Dall'identità

$$a^m - b^m = (a - b)\,(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots\ldots + b^{m-1})$$

si ricava, supponendo $a > b$:

$$a^m - b^m > mb^{m-1}(a - b) \qquad (1$$

$$a^m - b^m < ma^{m-1}(a - b) \qquad (2$$

ossia:

$$b^m > a^{m-1}\,(\,a - m\,(a - b)\,)$$

Posto nella (1) $b = 1$, $a = 1 + x$, si ottiene

$$(1 + x)^m > 1 + mx.$$

L'altra limitazione della potenza $(1 + x)^m$ si ottiene ponendo nella (2)

$$a = 1, \;\; b = \frac{1}{1+x}, \; m = n + 1\,;$$

si ha così

$$\frac{1}{(1 + x)^{n+1}} > 1 - (n + 1)\,\frac{x}{1 + x}$$

la quale, dopo averne moltiplicati i due membri per $(1 + x)$, quando sia $nx < 1$, si potrà porre, dividendo per $1 - nx$, sotto la forma

$$(1 + x)^n < \frac{1}{1 - nx}$$

Indicando con μ un numero positivo qualunque e con r un intero positivo > 1, si ha dalla (1)

$$\left(1+\frac{1}{r\mu}\right)^r > 1+\frac{1}{\mu}$$

e quindi,

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu < \left(1+\frac{1}{r\mu}\right)^{r\mu} \tag{2}$$

Nel caso di μ intero, si ha dalla (1)

$$\left(1+\frac{1}{r\mu}\right)^\mu < \frac{r}{r-1};$$

epperciò sarà

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu < \left(\frac{r}{r-1}\right)^r,$$

qualunque sia l'intero r, purchè maggiore di 1. Posto $r = 1001$ risulterà

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu < \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1001} < 2{,}73 \tag{3}$$

Se μ è compreso fra gli interi consecutivi n ed $n+1$ sarà $r\mu$ compreso fra rn e $rn+r$, e posto $r\mu = \rho n$, sarà

$$r < \rho < r+1,$$

nell'ipotesi di $r < n$. In conseguenza si avrà dalla (2)

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu < \left\{\left(1+\frac{1}{n\rho}\right)^n\right\}^\rho;$$

ma dalla (1) risulta

$$\left(1+\frac{1}{n\rho}\right)^n < \frac{\rho}{\rho-1},$$

perciò sarà

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu < \left(1+\frac{1}{\rho-1}\right)^\rho$$

o anche

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu < \left(\frac{r}{r-1}\right)^{r+1}$$

Supposto $\mu > 1001$, si potrà prendere $r = 1001$ e quindi

$$(4) \qquad \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu} < \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1002} < 2{,}73.$$

Infine se è $\mu < 1001$, ma maggiore di 1, sarà $1001\mu > 1001$ e quindi in forza della (2)

$$(5) \qquad \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu} < \left(1 + \frac{1}{1001\mu}\right)^{1001\mu} < \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1002} < 2{,}73.$$

Dalle (3) (4) (5) risulta che, qualunque sia il numero positivo $h < 1$, si ha

$$(1 + h)^{\frac{1}{h}} < 2{,}73$$

dalla quale, prendendo il logaritmo nel sistema a base 10, risulta

$$\log_{10}(1 + h) < \frac{9}{20}\, h < \frac{1}{2}\, h.$$

2. Se a' è un valore approssimato di a a meno di α, si ha per definizione

$$a' - \alpha < a < a' + \alpha$$

o

$$a'\left(1 - \frac{\alpha}{a'}\right) < a < a'\left(1 + \frac{\alpha}{a'}\right)$$

od anche, essendo per $\frac{\alpha}{a'} < 1$

$$1 + \frac{\alpha}{a'} < \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{a'}},$$

$$a' : \frac{a'}{a' - \alpha} < a < a' . \frac{a'}{a' - \alpha}.$$

Dalle quali, prendendo i logaritmi in un sistema di base maggiore dell'unità, si ricava

$$\log a' - \log \frac{a'}{a' - \alpha} < \log a < \log a' + \log \frac{a'}{a' - \alpha}$$

e poichè

$$\frac{a'}{a'-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{a'-\alpha},$$

è

$$\log_{10} a' - \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{a'-\alpha} < \log_{10} a < \log_{10} a' + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{a'-\alpha}.$$

Siamo così in grado di enunciare il teorema: « *Se* a' *è un valore approssimato di* a *a meno di* α, *sarà* log*a'* *un valore approssimato di* log*a* *a meno di* $\log\frac{a'}{a'-\alpha}$, *i logaritmi essendo presi in un sistema di base superiore a* 1, *o anche, quando sieno presi nel sistema a base* 10, *a meno di* $\frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{a'-\alpha}$ ».

3. Perchè $\log_{10} a'$ sia un valore approssimato di $\log_{10} a$ a meno di $\frac{1}{10^m}$, basterà determinare α in modo che in valore assoluto soddisfi alla disuguaglianza

$$\frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{a'-\alpha} < \frac{1}{10^m}$$

la quale, poichè $a' > a - \alpha$, è verificata a maggiore ragione quando sia

$$\frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{a-2\alpha} < \frac{1}{10^m}$$

o

$$\alpha < \frac{2}{10^m+4}\,.\,a,$$

e, poichè

$$\frac{2}{10^m+4} > \frac{1}{10^m},$$

basterà che sia

$$\alpha < \frac{1}{10^m}\,.\,a.$$

A questa si soddisfa evidentemente prendendo α minore di una unità dell'ordine della $(m+1)^{esima}$ cifra di a. In generale è dunque *necessario conoscere una cifra di più nel numero di quelle che vogliansi avere nella mantissa del logaritmo.*

4. Il Ch. Prof. Davide Besso (*) ricercò per via elementare un limite dell'errore nel calcolo del logaritmo d'un numero dato, non compreso nella tavola, e del numero corrispondente ad un logaritmo dato, coll'ordinario metodo di interpolazione. Egli dimostrò il seguente teorema che richiamo dovendolo applicare in seguito:

« I.° *Dati i logaritmi dei numeri* a e a + d *a meno di* g, *l'errore totale del logaritmo di un numero, compreso fra* a *e* a + d, *calcolato colla solita proporzione, è sempre minore di*:

$$\mathrm{g} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}} \log\left(1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}}\right) \text{ ».}$$

Per quanto abbiamo detto al n° 1 la limitazione dell'errore nel calcolo del logaritmo di un numero dato, risultante dal teorema precedente, può prendersi sotto la forma

$$g + \frac{1}{2}\frac{d^2}{a^2}.$$

Noteremo ancora esplicitamente, che la parte g di detta limitazione è dovuta solo agli errori di cui sono affetti $\log(a+d)$ e $\log a$ della tavola; mentre l'altra parte di essa è dovuta all'applicazione del principio della parte proporzionale.

5. Sia a' un valore approssimato di a $\left(a < \frac{\pi}{2}\right)$, a meno di α, sia, cioè,

$$a' - \alpha < a < a' + \alpha,$$

sarà

$$\operatorname{sen}(a' - \alpha) < \operatorname{sen} a < \operatorname{sen}(a' + \alpha)$$

(*) Sulla approssimazione dell'ordinaria interpolazione nelle tavole di logaritmi. Annuario del R. Istituto Tecnico di Roma 1883.

od anche

$$\mathrm{sen}a' - \{\mathrm{sen}a' - \mathrm{sen}(a' - \alpha)\} < \mathrm{sen}a < \mathrm{sen}a' + \{\mathrm{sen}(a' + \alpha) - \mathrm{sen}a'\},$$

donde ricavasi

$$\mathrm{sen}a' - 2\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\left(a' - \frac{\alpha}{2}\right) < \mathrm{sen}a < \mathrm{sen}a' + 2\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\left(a' + \frac{\alpha}{2}\right)$$

e poichè

$$\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} \text{ e } \cos\left(a' - \frac{\alpha}{2}\right) > \cos\left(a' + \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\mathrm{sen}a' - \alpha\cos\left(a' - \frac{\alpha}{2}\right) < \mathrm{sen}a < \mathrm{sen}a' + \alpha\cos\left(a' - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Da qui rilevasi, che $\mathrm{sen}a'$ è un valore di $\mathrm{sen}a$, approssimato a meno di $\alpha\cos\left(a' - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Dal n.° 2 risulta quindi che $\log_{10}\mathrm{sen}a'$, sarà un valore di $\log_{10}\mathrm{sen}a$, approssimato a meno di

$$\frac{1}{2}\frac{\alpha\cos\left(a' - \frac{\alpha}{2}\right)}{\mathrm{sen}a' - \alpha\cos\left(a' - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

e quindi, essendo

$$\mathrm{sen}\left(a' - \frac{\alpha}{2}\right) < \mathrm{sen}a',$$

a meno anche di

$$\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\mathrm{tang}\left(a' - \frac{\alpha}{2}\right) - \alpha}.$$

6. Sia sempre

$$a' - \alpha < a < a' + \alpha$$

con $a' < \frac{\alpha}{2}$, sarà

$$\mathrm{tang}(a' - \alpha) < \mathrm{tang}a < \mathrm{tang}(a' + \alpha)$$

od anche

$$\mathrm{tang}a' - \{\mathrm{tang}a' - \mathrm{tang}(a' - \alpha)\} < \mathrm{tang}a < \mathrm{tang}a' + \{\mathrm{tang}(a' + \alpha) - \mathrm{tang}a'\}$$

E, poichè

$$\operatorname{tang} a' - \operatorname{tang}(a' - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos(a' - \alpha)\cos a'}$$

$$\operatorname{tang}(a' + \alpha) - \operatorname{tang} a' = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos(a' + \alpha)\cos a'}$$

e

$$\cos(a' - \alpha) > \cos(a' + \alpha),$$

avremo

$$\operatorname{tang} a' - \frac{\alpha}{\cos a' \cos(a' + \alpha)} < \operatorname{tang} a < \operatorname{tang} a' + \frac{\alpha}{\cos(a' + \alpha)\cos a'}.$$

È dunque *tang*a' *un valore di tang*a, *approssimato a meno di* $\frac{\alpha}{\cos a' \cos(a' + \alpha)}$.

Sempre pel n° 2 si ha che $\log_{10} \operatorname{tang} a'$ è un valore di $\log_{10} \operatorname{tang} a$, approssimato a meno di

$$\frac{1}{2}\ \frac{\alpha}{\operatorname{sen} a' \cos(a' + \alpha) - \alpha}.$$

È inoltre

$$2\operatorname{sen} a' \cos(a' + \alpha) = \operatorname{sen}(2a' + \alpha) - \operatorname{sen}\alpha, \quad \operatorname{sen}\alpha < \alpha,$$

epperò sarà $\log_{10} \operatorname{tang} a'$, un valore di $\log_{10} \operatorname{tang} a$, approssimato anche a meno di

$$\frac{\alpha}{\operatorname{sen}(2a' + \alpha) - 3\alpha}.$$

Ettore Ricordi.

(Il seguito al prossimo fascicolo).

CORRELAZIONE FRA I TEOREMI DELLE OPERAZIONI SUI NUMERI INTERI

II.

Operazioni inverse

13. Dicesi *resto* o *differenza* di due numeri il risultato che si ottiene diminuendo

13. Dicesi *quoziente* di un numero per un altro quel numero che indica quanti ter-

il numero maggiore di tante unità quante ne contiene il numero minore. — Oppure, quel numero che aggiunto al *diminutore* riproduce il *diminuendo*.

mini eguali al secondo sono contenuti nel primo.

Oppure, quel numero che moltiplicato per il *divisore* riproduce il *dividendo*.

I teoremi che andiamo ad esporre sono limitati alla possibilità di avere resti positivi e quozienti interi.

14. Teorema 1° — *Per sottrarre da una somma uno dei suoi termini basta sopprimere questo termine nella somma.*

14. Teorema 1° — *Per dividere un prodotto per uno dei suoi fattori basta sopprimere questo fattore nel prodotto.*

Difatti $(2+3+4+5)-3$ per il teorema 1° del n. 2 $=2+4+5+3-3=2+4+5$.

15. Teorema 2° — *Per sottrarre da una somma un numero basta sottrarlo da uno dei termini della somma.*

15. Teorema 2° — *Per dividere un prodotto per un numero basta dividere uno solo dei fattori pel numero.*

Difatti $(2+10+4+5)-7$ per il teorema 2° del n° 3 $=(2+3+7+4+5)-7$ e, pel n. 14, $=2+3+4+5=2+(10-7)+4+5$.

16. Teorema 3° — *Se si aumenta il diminuendo o si diminuisce il diminutore di un numero, senza alterare l'altro termine della sottrazione, il resto viene aumentato dello stesso numero.*

16. Teorema 3° — *Se si moltiplica il dividendo o si divide il divisore per un numero, senza alterare l'altro termine della divisione, il quoziente viene moltiplicato per lo stesso numero.*

Sia $12-5=7$, dico 1° che $(12+3)-5=7+3$, e 2° che $12-(5-3)=7+3$.

1° Difatti, $12=5+7$ e quindi per un assioma e per il teor. 3° del n. 4, $12+3=5+(7+3)$ e perciò $(12+3)-5=7+3$.

2° Difatti, essendo $12=5+7$, si ha pure, per un assioma e per il teorema del n. 15, $12=(5-3)+7+3$ e perciò $12-(5-3)=7+3$.

Corollario. — *Per aggiungere ad una differenza un numero si può aggiungere il numero al sottraendo oppure sottrarlo, se si può, dal sottrattore.*

17. Teorema 4°. — *Se si diminuisce il diminuendo o si aumenta il diminutore di un numero, senza alterare l'altro termine della sottrazione, il resto viene diminuito dello stesso numero.*

Corollario. — *Per moltiplicare un quoziente per un numero si può moltiplicare il dividendo oppure dividere il divisore, se si può, per quel numero.*

17. Teorema 4°. — *Se si divide il dividendo o si moltiplica il divisore per un numero, senza alterare l'altro termine della divisione, il quoziente viene diviso per lo stesso numero.*

La dimostrazione è correlativa alla precedente.

Corollario. — *Per sottrarre da una differenza un numero si può aggiungere il numero al sottrattore oppure sottrarlo dal sottraendo.* (*)

18. Teorema 5°. — *Se si aumenta o si diminuisce il sottraendo ed il sottrattore di uno stesso numero il resto non si altera.*

Corollario. — *Per dividere un quoziente per un numero si può moltiplicare il divisore oppure dividere il dividendo per quel numero.*

18. Teorema 5°. — *Se si moltiplica o si divide il dividendo ed il divisore per uno stesso numero il quoziente non si altera.*

Sia $12-5=7$, dico che $(12+3)-(5+3)=7$, e che $(12-3)-(5-3)=7$.

Difatti, $12=5+7$, e quindi $12+3=(5+3)+7$ e perciò $(12+3)-(5+3)=7$.

E correlativamente: essendo $12=5+7$ è pure $12-3=(5-3)+7$ e perciò $(12-3)-(5-3)=7$.

Questo teorema si può anche fare dipendere dai due precedenti.

19 Teorema 6°. — *Per sottrarre da un numero una somma si possono sottrarre dal numero successivamente i singoli termini della somma nell'ordine che piace.*

19. Teorema 6°. — *Per dividere un numero per un prodotto si può dividere il numero successivamente per i singoli fattori del prodotto nell'ordine che piace.*

(*) Il teorema 2° ed i corollari dei teoremi 3° e 4° sono correlativi del teorema del n. 4 della rispettiva colonna.

Dico che $21-(5+6+7)=21-5-6-7$.

Difatti $21-(5+6+7)$, per il teorema del n. 18 e per quello del n. 14, $=(21-5)-(6+7)=(21-5-6)-7=21-5-6-7$.

20. Teorema 7.° – *Per aggiungere ad un numero una differenza si può aggiungere al numero il sottraendo, e sottrarre dal risultato il sottrattore.*

20. Teorema 7.° – *Per moltiplicare un numero per un quoziente si può moltiplicare il numero per il dividendo, e dividere il risultato per il divisore.*

Difatti $21+(5-3)$ per il teor. 1° del n. 2 $=(5-3)+21$ e pel Corollario del n. 16 $=(21+5)-3$.

21. Teorema 8.° – *Per sottrarre da un numero una differenza si può aggiungere il sottrattore, e sottrarre dal risultato il sottraendo.* (*)

21. Teorema 8.° – *Per dividere un numero per un quoziente si può moltiplicare il numero pel divisore e dividere il risultato pel dividendo.*

Difatti $21-(5-3)$ per il teor. del n.° 18 $=(21+3)-(5-3+3)$ $=(21+3)-5$.

22. Teorema 9.° – *La somma di due o più differenze è eguale ad un'unica differenza che ha per sottraendo la somma dei sottraendi e per sottrattore la somma dei sottrattori.*

22. Teorema 9.° – *Il prodotto di due o più quozienti è eguale ad un unico quoziente che ha per dividendo il prodotto dei dividendi e per divisore il prodotto dei divisori.*

Considerando solo il caso di due differenze, dico che $(8-2)+(5-3)=(8+5)-(2+3)$.

Difatti, $(8-2)+(5-3)$ per il teorema del n. $20=[(8-2)+5]-3$ e pel corollario del n. $16=[(8+5)-2]-3$ e pel corollario del n. $17=(8+5)-(2+3)$.

23. Teorema 10.° – *La differenza di due differenze è eguale ad un unica differenza*

23. Teorema 10.° – *Il quoziente di due quozienti è eguale ad un'unico quoziente*

(*) I teoremi 6°, 7° e 8° sono correlativi del teorema del n. 5 della rispettiva colonna.

che ha per sottraendo la somma del sottraendo della prima e del sottrattore della seconda, e per sottrattore la somma degli altri due termini. (*)

che ha per dividendo il prodotto del dividendo del primo per il divisore del secondo, e per divisore il prodotto degli altri due termini.

La dimostrazione è correlativa alla precedente.

I teoremi che seguono sono correlativi rispettivamente ai teoremi dei n. 8, 9, 10, 11 della rispettiva colonna.

24. Teorema 11.° — *La differenza di due multipli della stessa base è un multiplo della stessa base che ha per coefficiente l'eccesso del coefficiente del sottraendo su quello del sottrattore.*

24. Teorema 11.° — *Il quoziente di due potenze della stessa base è una potenza della stessa base che ha per esponente l'eccesso dell'esponente del dividendo su quello del divisore.*

Difatti $(8 \times 5) - (8 \times 3) = (8 + 8 + 8 + 8 + 8) - (8 + 8 + 8)$ e per il teorema del n. 19. $= 8 + 8 = 8 \times (5 - 3)$.

25. Teorema 12.° Viceversa: *Il multiplo di un numero si può scomporre in una differenza di due multipli dello stesso numero, i cui coefficienti abbiano per differenza il coefficiente del multiplo dato.*

Ovvero: *Il prodotto di un numero per una differenza è eguale alla differenza dei prodotti del numero per ciascun termine della differenza.*

25. Teorema 12.° — *La potenza di un numero si può scomporre nel quoziente di due potenze dello stesso numero, i cui esponenti abbiano per differenza l'esponente della potenza data.*

26. Teorema 13.° — *Un multiplo di una differenza è eguale alla differenza dei multipli dei suoi singoli termini.*

26. Teorema 13.° — *La potenza di un quoziente è eguale al quoziente delle potenze dei suoi singoli termini.*

(*) I teoremi 9° e 10° sono correlativi del teorema del n. 6 della stessa colonna.

Ovvero. — *Il prodotto di una differenza per un numero è eguale alla differenza dei prodotti di ciascun termine della differenza pel numero.*

Difatti $(7-5)\times 3 = (7-5)+(7-5)+(7-5)$ e per il teorema del n. 22 $= (7+7+7)-(5+5+5) = 7\times 3 - 5\times 3$.

27. Teorema 14.° Viceversa: *La differenza di due multipli, che hanno lo stesso coefficiente ma basi differenti, è eguale ad un multiplo che ha per base la differenza delle basi e per coefficiente lo stesso coefficiente.*

27. Teorema 14.° Viceversa: *Il quoziente di due potenze, che hanno lo stesso esponente e basi differenti, è eguale ad una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente.*

Per brevità tralasciamo di trascrivere il correlativo del teorema del n. 12.

Nell' ipotesi della nota del n. 12 i teoremi dei n. 10 e 26, considerati come teoremi della moltiplicazione, avrebbero per correlativi i seguenti nella divisione:

a) *Il quoziente di una somma per un numero è eguale alla somma dei quozienti di ciascun termine della somma pel numero.*

b) *Il quoziente di una differenza per un numero è eguale alla differenza dei quozienti di ciascun termine della differenza per il numero.*

Napoli, Dicembre 1887.

F. Amodeo.

NOTA
SUI POLIEDRI REGOLARI E SEMI-REGOLARI CONVESSI
(Continuazione).

Poliedri semi-regolari od Archimedici.

In questi poliedri le facce devono essere regolari ma non tutte dello stesso numero di lati; gli angoloidi devono essere od eguali o simmetrici; perciò non se ne potranno avere che di due specie, la prima avente per facce due poligoni regolari con diverso numero di lati, la seconda tre. (Se i quattro poligoni regolari più semplici concorressero in ogni vertice la somma degli angoli piani supererebbe già 4 Retti). La prima di queste due specie si suddivide in 3 gruppi, a seconda che le facce si riuniscono intorno ad ogni vertice a 3 a 3, o a 4 a 4, o a 5 a 5; non è possibile che le facce si riuniscano in numero maggiore poichè il caso che si presenterebbe il più semplice di 5 triangoli equilateri e un quadrato intorno a un vertice darebbe già una somma di angoli piani maggiore di 4 Retti. La seconda poi in due gruppi, a seconda che le facce si riuniscono intorno ad ogni vertice a 3 e 3 od a 4 a 4.

Si presenta perciò naturale in questa ricerca della possibilità di poliedri semi-segolari, di combinare in ciascuna specie in tutti i modi possibili i vari poligoni regolari cominciando dai più semplici e di esprimere con una incognita opportunamente scelta i numeri da sostituirsi nella formola di Eulero.

Poliedri semi-regolari della 1ª Specie con facce regolari di due numeri diversi di lati.

I° Gruppo

Le facce concorrono a 3 a 3 nei vertici.

In questo Gruppo è inutile considerare quei poliedri, nei vertici dei quali concorrono tre facce aventi tutte e tre od anche due solamente un numero dispari di lati, poichè in ambedue i casi scegliendo quel poligono che in ogni vertice compare due volte e cercando di disporre le facce intorno ai suoi vertici a partire da un primo, si riconosce percorrendo il contorno che nel vertice di partenza dovrebbero per il numero dispari dei lati concorrere due poligoni dell' altra specie, contro l'ipotesi.

Perciò non avremo a considerare in questo Gruppo i casi, in cui concorrano in un vertice due triangoli equilateri e un quadrato, oppure due triangoli e un pentagono, o due pentagoni e un quadrato, o due pentagoni e un esagono, due pentagoni e un ottagono e due ettagoni e un quadrato; escludendo questi casi avremo in ordine di semplicità da considerare i seguenti.

1.° Caso

Un triangolo e due quadrati intorno a un vertice.

Se x è il numero degli angoli piani appartenenti ai triangoli, $2x$ sarà quello degli angoli appartenenti ai quadrati, quindi $3x$ il numero totale degli angoli piani; $\frac{3x}{2}$ sarà quindi il numero degli spigoli, e poichè ogni terna di angoli piani x determina un triangolo, ed ogni quaderna degli angoli $2x$ determina un quadrato, sarà $\frac{x}{3}$ il numero delle facce triangolari e $\frac{x}{2}$ il numero dei quadrati; sostituendo questi valori nella formola di Eulero, avremo

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{2}+x=\frac{3x}{2}+2 \qquad x=6.$$

Poliedro semi-regolare a 6 facce, 2 triangolari e 4 quadrate — spigoli 9 — vertici 6. Questo poliedro non può essere che un prisma a base triangolare e si può facilmente costruire.

Osservazione I.ª — In questo primo Gruppo della prima specie rientrano tutti i prismi retti a basi regolari con facce laterali quadrate; quello considerato nel caso 1° sarebbe il più semplice di essi; ometteremo per ciò in seguito di esaminare questi poliedri che formano una serie illimitata di questo 1.º Gruppo.

Osservazione II.ª — Due triangoli equilateri non possono concorrere in un vertice con un esagono regolare o con un poligono di un numero maggiore di lati, poichè la somma di due angoli piani di ogni angoloide sarebbe eguale o minore del terzo.

2.º Caso

In un vertice concorrono un triangolo equilatero e due esagoni regolari.

Rappresentando con x il numero degli angoli piani appartenenti ai triangoli, $2x$ sarà quello degli angoli appartenenti agli esagoni, e con una analisi simile a quella tenuta nel caso 1° si avrà

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$x + 2x$	x	$\frac{3x}{2}$	$\frac{x}{3} + \frac{x}{3}$.

$$\frac{2x}{3} + x = \frac{3x}{2} + 2 , \qquad x = 12.$$

Poliedro semi-regolare ad 8 facce, 4 triangolari e 4 esagonali — vertici 12 — spigoli 18.

Tetraedro–tronco di Kepler (1). Per il modo di ottenere questo e gli altri poliedri Archimedici dai regolari si veda la — Genetische Geometrie von Heinze. Pag. 155.

3° Caso

In un vertice concorrono un triangolo equilatero e due ottagoni regolari.

Chiamando x il numero dei vertici, x sarà pure il nu-

(1) Kepler. Harmonia mundi.

mero degli angoli piani appartenenti ai triangoli, $2x$ quello degli angoli appartenenti agli ottagoni e si avrà

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$x + 2x$	x	$\frac{3x}{2}$	$\frac{x}{3} + \frac{x}{4}$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + x = \frac{3x}{2} + 2, \qquad x = 24.$$

Poliedro semi-regolare di 14 facce, 8 triangolari e 6 ottagonali – spigoli 36 – vertici 24.

Cubo tronco di Kepler. — Si può ottenere con smussamenti dall'esaedro regolare. (1)

4° Caso.

In un vertice concorrono un triangolo equilatero e due decagoni regolari.

Rappresentando con x il numero dei vertici si ha

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$x + 2x$	x	$\frac{3x}{2}$	$\frac{x}{3} + \frac{x}{5}$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + x = \frac{3x}{2} + 2, \qquad x = 60.$$

Poliedro semi-regolare a 32 facce – 20 triangolari e 12 decagone – vertici 60 – spigoli 90.

Dodecaedro tronco di Kepler. – Si ottiene con smussasamenti dal dodecaedro regolare.

Osservazione 1ª – Non è possibile in questo Gruppo l'esistenza di altri poliedri semi-regolari con facce triangolari, poichè proseguendo nell'ordine tenuto, la somma delle facce degli angoloidi sarebbe maggiore di quattro retti.

Osservazione 2.ª – La riunione di due quadrati con un

(1) Collo smussamento si segano tutti gli spigoli di un angoloide e si tralascia la piramide così determinata. Colle sfaldature si fanno sezioni parallele agli spigoli e si tralasciano i cunei così determinati.

pentagono regolare o un esagono ecc., intorno a un vertice, darebbe un poliedro semi-regolare della famiglia dei prismi.

5° Caso

In un vertice concorrono un quadrato e due esagoni.

Rappresentando con x il numero dei vertici, si ha

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$x + 2x$	x	$\frac{3x}{2}$	$\frac{x}{4} + \frac{x}{3}$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + x = \frac{3x}{2} + 2, \quad x = 24.$$

Poliedro semi-regolare a 14 facce, 6 quadrate ed 8 esagonali – vertici 24 – spigoli 36.

Ottaedro-tronco di Kepler. – Si ottiene con smussamenti dall'ottaedro regolare.

Osservazione. – Non sono possibili altri poliedri semi-regolari di questo gruppo a facce quadrate (esclusi i prismi) poichè il caso più semplice dopo i considerati, quello cioè di un quadrato e di due ottagoni intorno a un vertice, darebbe già per somma degli angoli piani di ogni angoloide 4 angoli retti.

6° Caso

In un vertice concorrono due esagoni e un pentagono

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$x + 2x$	x	$\frac{3x}{2}$	$\frac{x}{5} + \frac{x}{3}$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + x = \frac{3x}{2} + 2, \quad x = 60.$$

Poliedro semi-regolare a 32 facce – 12 pentagonali e 20 esagonali – vertici 60 – spigoli 90.

Icosaedro tronco di Kepler. – Si ottiene con smussamenti dall'icosaedro regolare.

Osservazione. – Non sono possibili nel 1° Gruppo altri poliedri semi-regolari, poichè il caso più semplice dopo quelli considerati, quello cioè di un pentagono regolare e due ottagoni regolari intorno a un vertice darebbe in ogni angoloide una somma di angoli piani maggiore di 4 angoli retti; in questo gruppo abbiamo quindi, oltre la classe illimitata dei prismi retti, cinque poliedri Archimedici.

II° Gruppo

Le facce concorrono a quattro a quattro in un vertice

1° Caso

In un vertice concorrono tre triangoli equil. ed un quadrato.

Rappresentando con x il numero dei vertici si ha:

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$x + 3x$	x	$2x$	$\frac{x}{4} + x$

$$\frac{x}{4} + 2x = 2x + 2, \quad x = 8.$$

Poliedro semi-regolare a 10 facce, 2 quadrate ed 8 triangolari — vertici 8 — spigoli 16.

Osservazione. — Questo poliedro è il più semplice fra quelli che Heinze nominò — Antiprismi — che si dedurrebbero dai prismi retti a base regolare, facendo ruotare una delle basi intorno al suo centro e facendo poi corrispondere, ad ogni vertice dell'una, due vertici successivi dell'altra in modo da formare i triangoli laterali. È chiaro che il poliedro trovato deve avere i due quadrati paralleli e quindi appartiene a questa classe; come quella dei prismi semi-regolari, anche questa degli Antiprismi semi-regolari è illimitata; perciò in seguito ci dispensiamo dalla ricerca di poliedri così fatti.

2° Caso

In un vertice concorrono due triang. equil. e due quadrati

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$2x + 2x$	x	$2x$	$\frac{2x}{3} + \frac{x}{2}$

$$\frac{2x}{3} + \frac{x}{2} + x = 2x + 2\,, \quad x = 12.$$

Poliedro semi-regolare a 14 facce, 6 quadrate, 8 triangolari — vertici 12 — spigoli 24.

Cubottaedro di Kepler. — Si può dedurre con sfaldature dal cubo e dall'ottaedro regolare.

3.° Caso

In un vertice concorrono 3 quadrati e un triangolo equilatero.

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$x + 3x$	x	$2x$	$\frac{x}{3} + \frac{3x}{4}$

$$\frac{x}{3} + \frac{3x}{4} + x = 2x + 2, \quad x = 24.$$

Poliedro semi-regolare a 26 facce, 8 triangolari e 18 quadrate — vertici 24 — spigoli 48.

Rombicubottaedro di Kepler. — Si può ottenerlo con sfaldature dal cubo o dall'ottaedro regolare.

4.° Caso

In un vertice concorrono due triangoli equilateri e due pentagoni regolari.

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$2x + 2x$	x	$2x$	$\frac{2x}{3} + \frac{2x}{5}$

$$\frac{3x}{3} + \frac{2x}{5} + x = 2x + 2, \quad x = 30.$$

Poliedro semi-regolare a 32 facce — 20 triangolari — 12 pentagone — 30 vertici — 60 spigoli.

Icosidodecaedro di Kepler. — Si può dedurre con smussamenti dall'icosaedro o dal dodecaedro regolare. Non sono possibili altri poliedri semi-regolari in questo secondo gruppo (esclusi gli Antiprismi), il caso di un triangolo e 3 pentagoni è impossibile (somma delle facce $>$ 4 Retti) — quello di 3 triangoli con un pentagono od un esagono dà un Antiprisma — quello di due triangoli e due esagoni dà una somma di angoli piani in ogni angoloide = 4 Retti — così pure tutti gli altri casi in cui le facce non siano triangolari. Al II° Gruppo appartengono quindi 3 poliedri Archimedici.

III° Gruppo

Le facce concorrono a 5 a 5 a formare i vertici.

In questo Gruppo non sono possibili che due poliedri semi-regolari, quello avente quattro triangoli equilateri e un quadrato intorno ad ogni vertice, e quello di quattro triangoli equilateri e un pentagono.

1° Caso

Intorno a un vertice 4 triangoli equilateri e un quadrato.

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$x + 4x$	x	$\frac{5x}{2}$	$\frac{x}{4} + \frac{4x}{3}$

$$\frac{x}{4} + \frac{4x}{3} + x = \frac{5x}{2} + 2, \quad x = 24.$$

Poliedro semi-regolare a 38 facce — 6 quadrate — 32 triangolari — vertici 24 — spigoli 60.

Cubo-simo di Kepler.

2° Caso

In un vertice concorrono 4 triangoli equilateri ed un pentagono.

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$4x + x$	x	$\frac{5x}{2}$	$\frac{4x}{3} + \frac{x}{5}$

$$\frac{4x}{3} + \frac{x}{5} + x = \frac{5x}{2} + 2, \quad x = 60.$$

Poliedro semi-regolare a 92 facce — 12 pentagonali — 80 triangolari — vertici 60 — spigoli 150.

Dodecaedro-simo di Kepler.

Nella prima specie sono dunque possibili, oltre ai prismi ed antiprismi semi-regolari, solo 10 poliedri semi-regolari, 5 appartenenti al I° Gruppo, 3 al II° e 2 al III°

II^a Specie

In un vertice concorrono poligoni regolari con 3 numeri diversi di lati.

I° Gruppo

In un vertice concorrono 3 poligoni regolari.

Per l'osservazione già fatta nel I.° Gruppo della I^a Specie sarà inutile tener conto di quei poliedri, nei vertici dei quali concorrono od una sola o due facce regolari con numero dispari di lati, il caso di 3 poligoni regolari con numero dispari di lati non è del pari ammissibile, quindi in ordine di semplicità otteniamo:

1° Caso

Concorrono in un vertice un quadrato, un esagono e un ottagono regolare.

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$3x$	x	$\frac{3x}{2}$	$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+\frac{x}{8}$

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+\frac{x}{8}+x=\frac{3x}{2}+2, \quad x=48.$$

Poliedro semi-regolare a 26 facce, 12 quadrate – 8 esagonali – 6 ottagonali – vertici 48 – spigoli 72.

Cubottaedro-tronco di Kepler. – Si può dedurre con sfaldature dall' ottaedro e dall'esaedro regolare.

2° Caso

In un vertice concorrono un quadr. – un esag. – un decag.

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$3x$	x	$\frac{3x}{2}$	$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+\frac{x}{10}$, $x=120$.

Poliedro semi-regolare con 62 facce – 30 quadrate – 20 esagonali – 12 decagone – vertici 120 – spigoli 180.

Icosidodecaedro-tronco di Kepler. – Si ottiene con sfaldature dall' icosaedro e dal dodecaedro.

In questo 1.° Gruppo della 2^a specie non sono chiaramente possibili altri poliedri semi-regolari.

II° Gruppo

Le facce concorrono a 4 a 4 a formare un vertice.

In questo Gruppo non possono figurare poliedri nei vertici dei quali concorre un numero dispari di facce con un numero dispari di lati, poichè in tal caso il numero degli angoli piani sarebbe dispari, mentre, dovendo essere doppio del numero degli spigoli esso è di necessità un numero pari; quindi non dovremo considerare i due casi in cui concorrano in un vertice due triangoli equilateri, un quadrato e un pentagono, oppure un triangolo equilatero, un quadrato e due pentagoni — resta quindi un caso solo nel Gruppo.

Caso unico

Intorno a un vertice concorrono un triangolo equilatero, due quadrati, un pentagono regolare.

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$4x$	x	$2x$	$\frac{x}{3}+\frac{x}{2}+\frac{x}{5}$

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+x=2x+2, \quad x=60.$$

Poliedro semi-regolare con 62 facce — 20 triangol. — 30 quadrate — 12 pentagone — vertici 60 — spigoli 120.

Rombicosidodecaedro di Kepler. — Si può ottenere con sfaldatura dall'icosaedro e dal dodecaedro. Sono quindi possibili in questa IIa Specie tre soli poliedri semi-regolari — in totale abbiamo quindi ottenuto oltre le due classi di prismi e di Antiprismi che contengono un numero illimitato di poliedri semi-regolari, 13 soli poliedri semi-regolari (Archimedici) convessi,

Alessandria, 1° Giugno 1887.

Francesco Panizza.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

Sulla media aritmetica.

1. Confrontare la media aritmetica dei quadrati di due numeri col quadrato della loro media aritmetica.
2. Confrontare la media aritmetica delle radici quadrate di due numeri colla radice quadrata della loro media aritmetica.
3. Confrontare la media aritmetica dei cubi di due numeri col cubo della loro media aritmetica.
4. Confrontare la media aritmetica delle radici cubiche di due numeri colla radice cubica della loro media aritmetica.
5. Dimostrare che, per a e b positivi ed m intero e positivo, si ha
$$\frac{a^m + b^m}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^m,$$
e che l'eguaglianza ha luogo nel solo caso di $a = b$. (Porre $a = c + \beta$, $b = c - \beta$, ed applicare il teorema del binomio).
6. Confrontare la media aritmetica delle radici m^{me} di due numeri colla radice m^{ma} della loro media aritmetica.
7. Confrontare la media aritmetica di due numeri positivi colla loro media geometrica.
8. Dimostrare che il logaritmo della media aritmetica di due numeri è maggiore della media aritmetica dei loro logaritmi.
9. Dimostrare che il seno della media aritmetica di due angoli acuti è maggiore della media arimetica dei loro seni.
10. Dimostrare che la tangente della media aritmetica di due angoli acuti è minore della media aritmetica delle loro tangenti.
11. Verificare l'identità:
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \tfrac{1}{2}(a+b+c)\left\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right\}$$
12. Mediante la precedente identità dimostrare che la media

aritmetica di tre numeri positivi non è mai minore della loro media geometrica, e che le due medie sono eguali nel solo caso in cui i tre numeri sieno fra loro eguali. *)

13. Trovare i valori positivi di x, y, z che soddisfanno alle due equazioni

$$x + y + z = 15$$
$$(x + y + z)^3 - 27xyz = 0.$$

14. Provare che, se la somma di tre numeri positivi è eguale a 24, il loro prodotto non può essere maggiore di 64.
15. Quando è massimo il prodotto di tre numeri positivi la somma dei quali è eguale ad un numero dato?
16. Quando è minima la somma di tre numeri positivi il prodotto dei quali è eguale ad un numero dato?
17. Fra tutti i triangoli di dato perimetro trovare quello di massima area.
18. Fra tutti i parallelepipedi retto rettangoli di data superficie totale, trovare quello di massimo volume.
19. Fra tutti i parallepipedi retto rettangoli di dato volume, trovare quello che ha la minima superficie totale.
20. Sieno x e y due numeri positivi tali che la loro somma sia eguale ad un numero dato. Quando è massimo il prodotto x^2y ?
21. Sieno x e y due numeri positivi tali che il prodotto x^2y sia eguale ad un numero dato. Quando è minima la somma di quei due numeri?
22. Fra tutti i cilindri retti inscritti in una data sfera trovare quello di massimo volume.
23. Dato il volume d'un cilindro retto, determinare le sue dimensioni in modo che la sfera ad esso circoscritta abbia la minima superficie.

---

*) Il teorema vale per quanti si vogliano numeri, ed è stato dimostrato da *Cauchy* nel suo *Cours d'Analyse*. Un'altra dimostrazione si trova nella memoria intitolata: *Teoremi elementari sui massimi e minimi*, inserita nell'Annuario del R. Istituto tecnico di Roma, anno 1879.

24. Confrontare la lunghezza del segmento, equidistante dalle basi d'un trapezio e terminato ai lati non paralleli, colla media aritmetica delle due basi.

25. Confrontare l'area d'un trapezio colla media aritmetica delle aree dei due rettangoli di eguale altezza che hanno le basi eguali rispettivamente alla base maggiore ed alla base minore del trapezio.

26. Confrontare l'area della sezione determinata in un tronco di piramide dal piano equidistante dalle basi: 1) colla media aritmetica delle aree delle basi; 2) colla loro media geometrica.

27. Confrontare l'area della sezione, determinata in un segmento sferico a due basi dal piano equidistante dalle basi, colla media aritmetica delle aree delle basi.

28. Confrontare il volume d'un tronco di piramide colla media aritmetica dei due prismi d'eguale altezza aventi le basi eguali rispettivamente alla base maggiore ed alla base minore del tronco.

29. Un prismatoide ha per basi due rettangoli e per facce laterali dei trapezi. Confrontare l'area della sezione, determinata dal piano equidistante dalle basi, colla media aritmetica delle aree delle basi.

30. Confrontare il volume del prismatoide considerato nel precedente esercizio: 1) col volume del prisma di eguale altezza l'area della cui base è la semisomma delle aree dei due rettangoli; 2) col volume di un prisma d'eguale altezza avente per base quel rettangolo le cui dimensioni sono: la media aritmetica di due lati paralleli delle due basi del prismatoide, e la media aritmetica di altri due lati paralleli, a quelli rispettivamente contigui.

D. Besso.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 7, 9, 10 PROPOSTE A PAG. 92.

(7) *È dato il volume complessivo delle pareti laterali e del fondo di un vaso della forma di un parallelepipedo retto rettangolo, e sono date la grossezza uniforme delle pareti e la grossezza uniforme del fondo. Determinare le dimensioni del vaso in modo che sia massima la sua capacità.*

D. BESSO.

Soluzione del Prof. *F. Viaggi.*

Sieno a, b, c le differenze tra le dimensioni di un parallelepipedo retto rettangolo e quelle d'un altro, $abcd$ quella dei loro volumi: a, b, c, d costanti positive. Se ax, by, cz sono le dimensioni del parallelepido minore e quindi $a(x+1)$, $b(y+1)$, $c(z+1)$ quelle del maggiore si ha:

$$(x+1)(y+1)(z+1) - xyz = d \quad . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

che può scriversi anche così:

$$x(y+1) + y(z+1) + z(x+1) = d - 1,$$

in cui ad x, y, z vanno attribuiti valori positivi.

Ora essendo costante la somma dei tre numeri positivi $x(y+1)$, $y(z+1)$, $z(x+1)$, funzioni di due variabili indipendenti, il loro prodotto, $xyz(x+1)(y+1)(z+1)$, diventa massimo quando

$$x(y+1) = y(z+1) = z(x+1),$$

cioè quando

$$x = y = z;$$

infatti nel penultimo sistema d'equazioni eliminando un'incognita, p. e. z, si ha:

$$(x-y)(xy+x+1) = 0,$$

donde, non potendo il secondo fattore del primo membro annullarsi per valori positivi delle variabili, risulta $x = y$; e così analogamente $y = z$.

In virtù della (α) si ha:

$$xyz(x+1)(y+1)(z+1) = (xyz)^2 + d(xyz),$$

da cui, ricordando che le lettere rappresentano valori positivi,

$$xyz = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{4xyz(x+1)(y+1)(z+1)+d^2}-d\right\},$$

la quale relazione mostra che le due funzioni xyz e $xyz(x+1)(y+1)(z+1)$ assumono lo stato di massimo per gli stessi valori delle variabili, quando cioè $x=y=z$; il che torna quanto dire che il parallelepido minore (e anche quello maggiore che ne differisce per una costante) diventa massimo quando le sue dimensioni sono proporzionali ad a, b, c.

Nel caso particolare del problema proposto, si vede che il vaso ha la massima capacità quando il fondo è un quadrato e il suo lato sta all'altezza del vaso come la doppia grossezza delle pareti alla grossezza del fondo: qui le dimensioni del vaso le intendiamo prese o tutte sulla superficie esterna o tutte sulla interna.

(9) *Se due triangoli diseguali hanno cinque elementi eguali, il rapporto del maggiore dei tre lati al minore è, in ciascuno dei due triangoli, minore di* $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

D. Besso.

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi*.

I cinque elementi eguali non possono essere che i tre angoli e due lati; i due triangoli dunque sono simili. Sieno a, b, c i lati d'un triangolo, che suppongo disposti nell'ordine di grandezza decrescente, sieno a', b', c' gli omologhi nell'altro: suppongo che i lati del primo sieno rispettivamente maggiori degli omologhi. Dovendo due lati dell'uno essere uguali a due dell'altro, bisogna porre $b=a'$, $c=b'$; quindi la proporzione $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ tra lati omologhi dà luogo all'altra $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, donde $b^2=ac$. E poichè un lato d'un triangolo è maggiore della differenza degli altri due, così

(*) Un'altra dimostrazione è stata inviata dal prof. *A. Matteucci*.

$b^2 > (a - c)^2$ e, per l' eguaglianza precedente, $ac > (a - c)^2$, da cui si desume

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < \frac{a}{c} < \frac{3 + \sqrt{5}}{2};$$

la prima diseguaglianza è superflua perchè inclusa nell'altra, fatta per ipotesi, $\frac{a}{c} > 1$.

Si possono ottenere le altre diseguaglianze:

$$\frac{c'}{b'} = \frac{b'}{a'} = \frac{c}{b} = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c}{a}} > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

che possono enunciarsi così: in ciascuno dei due triangoli ciascun lato supera il segmento aureo del lato immediatamente maggiore.

Il Prof. *Matteucci* insegna poi a costruire due triangoli che si trovino nella condizione dell' enunciato, operando come appresso. — Poichè in tali triangoli il lato di media grandezza è medio proporzionale fra gli altri due, assume un triangolo ABC, il cui lato medio sia AB, pel quale si abbia BC : BA = BA : AC e preso sopra AB, a partire da A, un segmento AD = AC, conduce una parallela a BC fino ad incontrare AC in E; oppure presa su AC a partire da C, una lunghezza CF = AB, conduce una parallela ad AB fino ad incontrare BC in G. I due triangoli ottenuti ADE, FGC hanno con ABC cinque elementi uguali, senza essere congruenti con esso, e sono gli unici che godano di tale proprietà, com'è facile verificare.

(10) *Esiste un triangolo nel quale il centro del circolo circoscritto e il punto d'incontro delle altezze sieno ambedue situati sulla circonferenza inscritta?* D.ʳ Besso.

Soluzioni del Prof. *F. Viaggi.*

Soluzione geometrica. — Sia ABC un triangolo acutangolo; AA', BB', CC' sieno le sue altezze che s'incontrino in H; M, O i centri del cerchio circoscritto e dell' inscritto; A'', B'', C'' i punti medi dei lati.

Se esiste un triangolo inscritto in una circonferenza M e circoscritto ad un circolo O, un punto qualunque della circonferenza M può esser vertice d'un triangolo pure inscritto in M e circoscritto ad O (conseguenza del teorema a § 14, 4 Plan. del Baltzer).

Ora se il centro M si trova sulla circonferenza O, conducendo il diametro di M tangente ad O e per gli estremi pure le tangenti ad O, le tre tangenti formano un triangolo isoscele rettangolo. Quindi condizione necessaria e sufficiente perchè il centro della circonferenza circoscritta sia sulla circonferenza inscritta, è che si possa costruire un triangolo isoscele rettangolo inscritto nella prima e circoscritto alla seconda.

Suppongo ora anche H situato sulla circonferenza O. Questa viene divisa dai punti di contatto in tre archi: ed H, M o cadono su uno dei tre archi, p. e. su quello che volge la convessità ad A; o su due di essi, p. e. su quelli che volgono la concavità ad A; in ciascuna di queste ipotesi (delle quali, propriamente, si può dimostrare ammissibile solo la seconda) essendo i triangoli rettangoli AHC', AMB'' equiangoli, e quindi AH, AM egualmente inclinati sulle tangenti condotte da A ad O, essi segmenti sono eguali. Perciò i triangoli AHC', AMB'' sono eguali, ed eguali i lati $C'H$, MB''; ma MB'' è metà di BH, perchè i triangoli $MA''B''$, HAB sono omotetici e $A''B''$ metà di AB; dunque $C'H$ è metà di BH, donde si deduce che l'angolo HBC', ossia $B'BA$, è la terza parte di un retto, e l'angolo A del triangolo proposto due terzi di retto. Con le stesse considerazioni fatte in ordine inverso si vede che se l'angolo in A è due terzi d'angolo retto i segmenti AH, AM egualmente inclinati sui lati AB, AC sono eguali, e quindi se uno dei due punti H, M si trova sulla circonferenza O anche l'altro si trova su essa.

Ciò premesso: in un triangolo isoscele rettangolo inscrivo la circonferenza O e circoscrivo la circonferenza M; e descrivo il luogo geometrico dei punti da cui O è veduta sotto l'angolo eguale a due terzi di retto, il qual luogo, come è agevole provare, incontra la circonferenza M; assumendo una delle intersezioni come vertice d'un triangolo inscritto in M e circoscritto ad O, si ottiene un triangolo che soddisfa alle condizioni del problema; e ogni triangolo che risponde al problema si può ottenere con costruzione analoga.

Soluzione trigonometrica. – Sia ABC il triangolo che risponde al problema. Il cerchio circoscritto ad ABC, quello inscritto in esso e quello inscritto nel triangolo che ha i vertici nei piedi delle altezze di ABC, abbiano rispettivamente i centri in M, O, H e per raggi R, r, ρ: H è anche il punto d'incontro delle altezze.

In generale si ha: $OM^2 = R^2 - 2Rr$, $OH^2 = 2r^2 - 2R\rho$ (cf. Baltzer Plan. § 14, 4 e Trig. § 4, 14), e, dovendo essere per ipotesi $OM = OH = r$, si hanno le due equazioni

$$r^2 = R^2 - 2\,Rr\,, \qquad r^2 = 2R\rho\,,$$

dalle quali si deducono le altre:

$$\frac{r}{R} = \sqrt{2} - 1, \quad \frac{\rho}{R} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2};$$

e poichè in un triangolo qualunque si hanno le relazioni

$$r = 4R\ \text{sen}\frac{A}{2}\,.\,\text{sen}\frac{B}{2}\,.\,\text{sen}\frac{C}{2}\,,\quad \rho = 2R\cos A\,.\,\cos B\,.\,\cos C$$

(cf. Baltz. Trig. §4, 13 e 14), così si hanno per gli angoli del triangolo che si considera le due equazioni:

$$\text{sen}\frac{A}{2}\,.\,\text{sen}\frac{B}{2}\,.\,\text{sen}\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{4} \qquad (1$$

$$\cos A\,.\,\cos B\,.\,\cos C = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}, \qquad (2$$

Dall'identità

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\text{sen}\frac{A}{2}\,\text{sen}\frac{B}{2}\,\text{sen}\frac{C}{2}$$

vera per gli angoli d'un triangolo qualunque, combinata con (1), si ricava

$$\cos A + \cos B + \cos C = \sqrt{2}. \qquad 3)$$

In (1) esprimendo i seni in funzione dei coseni degli angoli doppi, e combinando il risultato con (2), (3) si ottiene:

$$\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{4} . \qquad 4)$$

Le relazioni (3) (4) (2) mostrano che $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ sono le radici dell'equazione cubica

$$x^3 - \sqrt{2}\, x^2 + \frac{5 - 2\sqrt{2}}{4}\, x - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} = 0 ,$$

epperciò hanno i valori:

$$\tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{4}\left\{2\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{12\sqrt{2} - 15}\right\}.$$

Uno degli angoli del triangolo è quindi di 60° e gli altri, a meno di $1''$, sono di $36^\circ\, 5'\, 39''$, $83^\circ\, 54'\, 21''$.

QUISTIONI PROPOSTE

11. — Dimostrare che, per n intero e positivo, si ha

$$\frac{1}{n+1} - \frac{n}{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \ldots + (-1)^n \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}$$

12. — Dimostrare che la potenza n^a della media aritmetica delle radici n^{me} di più numeri positivi diminuisce al crescere di n.

D. Besso.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1888; N. 2.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche pubblicato da *B. Boncompagni*. Tomo XX. Ottobre e Novembre 1887. Roma.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Vol. XXVI. Maggio-Giugno, Napoli, 1888.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy*, Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 3e série. Douzième année. N. 7, 8, Juillet, Août. Paris, 1888.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*. 12e Année. N. 19, 20. Paris. M. Nony et C.ie, 17 Rue des Écoles, 1888.

Le Scuole Secondarie eco dell'Associazione nazionale fra gl'insegnanti delle scuole secondarie. Anno V. N. 21. Milano 1888.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome huitième: Juillet, Août-Septembre 1888.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). — Serie 2.ª Vol. 2. — Giugno 1888.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. — Tomo II. Fascicolo 4.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XX. N. 11 e 12. Firenze, 1888.

Agamennone (G.) e Bonetti (F.) — Sopra un nuovo modello di barometro normale. Nota I. (Rend. R. Acc. Lincei, 1888).

Giuliani (G.) — Alcune osservazioni sopra le funzioni sferiche di ordine superiore al secondo e sopra altre funzioni che se ne possono derivare (Giorn. di Batt., Napoli 1888).

Lozzi (G.) — Nota sull'art. 32 del Regolamento 23 ott. 1884 per le Scuole classiche. Modica, 1888.

Magrini (F). — Ricerche intorno alla magnetizzazione del ferro. Nota preliminare. (Nuovo Cimento. Vol. XXIII, 1888).

Marcolongo (R.) — Sull'analisi indeterminata di 2° grado. Nota II (Gior. di Battaglini, Vol. XXVI) — Sulla rappresentazione conforme della Pseudosfera e sue applicazioni (Rend. R. Acca. Napoli, 1888).

Millosevich (E.) — Orbita della cometa 1879 IV (Hartwig *e* 1879). (Mem. Soc. Spettroscopisti, 1888). — Benedetto IX e l'eclisse di Sole del 29 giugno 1033. (Rend. R. Acc. Lincei, 1888). — Intorno ad alcuni problemi geografici e cronologici collegati coi movimenti della terra (Boll. Società geografica, 1888).

Mollini (M.) — Formole sulle rendite periodiche e sulle annualità in progressione. Tipografia Azzoguidi, Bologna. — Prezzo: L. 1.

Murer (V.) — Generazione della superficie d'ordine n con retta $(n-2)$-*pla* (Rend. Circ. mat. Palermo, Tomo II).

Padova (E.) — Sull'uso delle coordinate curvilinee in alcuni problemi della teoria matematica della elasticità (Padova, 1888).

Panizza (F.) — Nota su alcune somme di potenze e di prodotti (Gior. della Società di Lettura e Convers. scientifiche. Genova, 1888).

Pincherle (S.) — Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des équations différentielles linéaires (Journal für Mathematik, Bd. 103).

Riccardi (P.) — Ancora del trattato *De quadratura circuli* di G. B. della Porta (Bull. di Bibl. e Storia delle Scien. mat. e fisiche, tomo XX).

Ricordi (E.) — I movimenti infinitesimi nella generale determinazione di misura proiettiva (Viterbo, 1882). — Una generalizzazione del teorema dei nove punti di Feuerbach nella geometria non-Euclidea (Reggio-Emilia, 1886).

Righi (A.) — Sulla forza elettromotrice del selenio (Padova, 1888).

Torelli (G.) — Alcune formole relative agli integrali ellittici (Annali R. Ist. tecnico Napoli, 1887). — Su qualche proprietà delle curve piane del terz'ordine fornite di un punto doppio (id. id, 1888).

Errata-Corrige. — A pag. 88 nell'ultima linea in luogo di PAA'..., PDD',..., PEE'..; leggasi PAA'..., PDD'..; PBB'..., PEE'..; a pag. 91 sestultima linea in luogo di — dunque (I). (III) — leggasi — dunque (I), (II).

CONDIZIONI DI DIVISIBILITÀ D'UN POLINOMIO PER UN BINOMIO

DELLA FORMA $x^r - a^r$

1.

Nella mia Nota « *su alcuni teoremi relativi alla divisione algebrica* » pubblicata in questo Periodico (*), ho dimostrato come, senza eseguire direttamente la divisione per D d'un polinomio

$$P = P_1 P_2 \ldots . P_m + a_n ,$$

si giunge a stabilire la formula:

$$P = D(K + q) + (R + a_n) \quad (^{**})$$

È facile vedere che la condizione allora fissata, di essere a_n indipendente dalla x, può cangiarsi, senza nulla alterare nella dimostrazione, in un'altra più generale, cioè in quella d'essere un polinomio di grado inferiore a D. Scriveremo dunque:

$$P = D\,(K + q) + (R + p_n),$$

dove, all'infuori di p_n, tutte le altre lettere conservano il significato già loro attribuito.

Riprendiamo a considerare il caso particolare di $m = 2$, e siano ora:

$$P_1 = a_0 x^{n-r} + a_1 x^{n-r-1} + \ldots\ldots + a_{n-r-1}\, x + a_{n-r}, \quad P_2 = x^r$$

$$p_n = a_{n-r+1}\, x^{r-1} + a_{n-r+2}\, x^{r-2} + \ldots . + a_{n-1}\, x + a_n .$$

Avremo

$$P = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}\, x + a_n = P_1 P_2 + p_n = P_1 x^r + p_n ;$$

od anche, per tener presente il grado dei polinomi:

$$P^{(n)} = P^{(n-r)}\, x^r + p_n .$$

(*) Anno II. Fascicolo VI.

(**) I valori di K, q, R sono definiti dalle relazioni:

$$P_s = DQ_s + R_s , \quad P = (DQ_1 + R_1)\,(DQ_2 + R_2) \ldots (DQ_m + R_m) + a_n$$
$$= DK + R_1 R_2 \ldots R_m + a_n , \quad R_1 R_2 \ldots R_m = Dq + R.$$

Si prenda per divisore

$$D = x^r - a^r.$$

Indicando d'or innanzi con Q_s e R_s il quoziente ed il resto che provengono dalla divisione per D del polinomio $P^{(s)}$, l'applicazione del metodo generale al nostro caso darà:

$$P^{(n-r)} = (x^r - a^r)\, Q_{n-r} + R_{n-r}$$
$$x^r = (x^r - a^r) + a^r$$

e perciò dopo aver sostituito e fatte tutte le riduzioni:

$$P^{(n)} = (x^r - a^r)\,[Q_{n-r}\, x^r + R_{n-r}] + [R_{n-r}\, a^r + p_n].$$

Dunque abbiamo

$$Q_n = Q_{n-r}\, x^r + R_{n-r}$$
$$R_n = R_{n-r}\, a^r + p_n$$

e si vede intanto, — come estensione della proprietà già nota, quando avevasi $D = x - a$, — che R_n è formato con R_{n-r} ed a^r nella stessa guisa che $P^{(n)}$ è composto di $P^{(n-r)}$ e di x^r.

Sia

$$n = kr + h \qquad (h < r);$$

il quoziente Q_n sarà del grado $n - r = (k-1)r + h$ e potrà calcolarsi in funzione delle R_{n-sr} $(s = 1, 2, \ldots. (k-1))$. Infatti avendosi:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & Q_{n-tr} = Q_{n-(t+1)r}\, x^r + R_{n-(t+1)r} \quad (t = 0, 1, 2, \ldots. (k-2)) \\ & Q_{n-(k-1)r} = a_0 x^h + a_1 x^{h-1} + \ldots\, a_{h-1}\, x + a_h \end{aligned} \right.$$

se ne dedurrà moltiplicandole ordinatamente, — ad incominciare dalla seconda —, per $x^r, x^{2r}, \ldots. x^{(k-1)r}$ e poi sommando e riducendo:

$$(2) \qquad Q_n = a_0 x^{(k-1)r+h} + a_1 x^{(k-1)r+h-1} + \ldots.$$
$$+ a_h x^{(k-1)r} + R_{n-(k-1)r}\, x^{(k-2)r} + R_{n-(k-2)r}\, x^{(k-3)r} + \ldots\ldots +$$
$$+ R_{n-2r}\, x^r + R_{n-r}.$$

Analogamente per il calcolo di R_n si trova:

$$
(3)\left\{\begin{array}{l}
R_{n-tr} = R_{n-(t+1)r}\, a^r + p_{n-tr} \qquad (t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (k-2)) \\
R_{n-(k-1)r} = a_{h+1}\, x^{r-1} + a_{h+2}\, x^{r-2} + \ldots\ldots + a_{r-1}\, x^{h+1} \\
\qquad + (a_0 a^r + a_r)\, x^h + (a_1 a^r + a_{r+1})\, x^{h-1} + \ldots\ldots \\
\ldots\ldots + (a_{h-1}\, a^r + a_{r+h-1})\, x + (a_h a^r + a_{r+h}) \qquad (^*)
\end{array}\right.
$$

e da queste, moltiplicando la 2ª, 3ª, ... k^{ma}, per a^r, a^{2r}, ... $a^{(k-1)r}$, sommando e facendo le riduzioni:

$$
\begin{aligned}
R_n &= \left[a_{h+1}\, x^{r-1} + \ldots\ldots + (a_h a^r + a_{r+h})\right] a^{(k-1)r} \\
&+ p_{n-(k-2)r}\, a^{(k-2)r} + p_{n-(k-3)r}\, a^{(k-3)r} + \ldots\ldots + p_{n-r}\, a^r + p_n.
\end{aligned}
$$

Ora si osservi che, per definizione, si ha:

$$
p_{n-tr} = a_{n-(t+1)r+1}\, x^{r-1} + a_{n-(t+1)r+2}\, x^{r-2} + \ldots\ldots + a_{n-tr-1}\, x + a_{n-tr}
$$

ove t ha i valori 0, 1, 2, ... $(k-2)$; per cui intanto:

$$
\begin{aligned}
& p_{n-(k-2)r}\, a^{(k-2)r} + \ldots\ldots + p_{n-r}\, a^r + p_n = \\
& (a_{n-(k-1)r+1}\, a^{(k-2)r} + a_{n-(k-2)r+1} a^{(k-3)r} + \ldots + a_{n-2r+1} a^r + a_{n-r+1}) x^{r-1} \\
+ & (a_{n-(k-1)r+2}\, a^{(k-2)r} + a_{n-(k-2)r+2} a^{(k-3)r} + \ldots + a_{n-2r+2} a^r + a_{n-r+2}) x^{r-2} \\
+ & \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
+ & (a_{n-(k-2)r-1} a^{(k-2)r} + a_{n-(k-3)r-1} a^{(k-3)r} + \ldots + a_{n-r-1} a^r + a_{n-1}) x \\
+ & (a_{n-(k-2)r}\, a^{(k-2)r} + a_{n-(k-3)r}\, a^{(k-3)r} + \ldots + a_{n-r}\, a^r + a_n).
\end{aligned}
$$

Per avere il valore di R_n non manca altro che aggiungere convenientemente a questa somma i termini che provengono da:

$$
\left[a_{h+1} x^{r-1} + \ldots + (a_h a^r + a_{r+h})\right] a^{(k-1)r}
$$

e, – avendo riguardo alla relazione $h = n - kr$, ed alle altre che da questa dipendono per $h+1$, $h+2$, $h-1$, $r+h-1$, $r-h$, – si vede subito che si troverà:

$$
\begin{aligned}
(4)\ R_n = & (a_{n-kr+1} a^{(k-1)r} + a_{n-(k-1)r+1} a^{(k-2)r} + \ldots\ldots + a_{n-2r+1}\, a^r + a_{n-r+1})\, x^{r-1} \\
+ & (a_{n-kr+2} a^{(k-1)r} + a_{n-(k-1)r+2} a^{(k-2)r} + \ldots\ldots + a_{n-2r+2} a^r + a_{n-r+2}) x^{r-2} \\
+ & \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
+ & (a_{n-kr-1}\, a^{kr} + a_{n-(k-1)r-1}\, a^{(k-1)r} + \ldots\ldots + a_{n-r-1}\, a^r + a_{n-1}) x \\
+ & (a_{n-kr}\, a^{kr} + a_{n-(k-1)r}\, a^{(k-1)r} + \ldots\ldots + a_{n-r}\, a^r + a_n).
\end{aligned}
$$

(*) Questa espressione di $R_{n-(k-1)r}$ si ottiene dalla relazione:

$$
R_{n-(k-1)r} = P^{[n-(k-1)r]} - (x^r - a^r)\, Q_{n-(k-1)r}
$$

sostituendo a $Q_{n-(k-1)r}$ il suo valore valore dato dall'ultima delle (1).

L'analisi di questa formula mostra con quanta facilità potrà essere stabilita in ogni caso particolare. Così se, ad esempio, si ha $n=17$, $r=5$, vale a dire se trattasi del resto della divisione per x^5-a^5 del polinomio:

$$a_0x^{17}+a_1x^{16}+a_2x^{15}+\ldots.+a_{15}x^2+a_{16}x+a_{17}$$

si porrà dapprima questo polinomio sotto la forma:

$$\begin{gathered}(a_{17}+a_{12}x^5+a_7x^{10}+a_2x^{15})+x(a_{16}+a_{11}x^5+a_6x^{10}+a_1x^{15})\\ +x^2(a_{15}+a_{10}x^5+a_5x^{10}+a_0x^{15})+\\ +x^3(a_{14}+a_9x^5+a_4x^{10})+x^4(a_{13}+a_8x^5+a_3x^{10}),\end{gathered}$$

e la sostituzione di a^5 ad x^5 o, ciò ch'è lo stesso, di a ad x nei polinomi in parentesi darà immediatamente:

$$\begin{gathered}R_{17}=(a_3a^{10}+a_8a^5+a_{13})x^4+(a_4a^{10}+a_9a^5+a_{14})x^3\\ +(a_0a^{15}+a_5a^{10}+a_{10}a^5+a_{15})x^2+\\ +(a_1a^{15}+a_6a^{10}+a_{11}a^5+a_{16})x+(a_2a^{15}+a_7a^{10}+a_{12}a^5+a_{17}).\end{gathered}$$

È altresì evidente che le formule (3) servono pure al calcolo dei valori di R_{n-r}, R_{n-2r} .... $R_{n-(k-1)r}$ che compariscono nell'espressione data dalla (2) per il quoziente Q_n, del quale si potranno in tal modo rendere indipendenti dalla x ed espressi per le a_s e a^r tutti i coefficienti.

Per l'esempio scelto di $n=17$, $r=5$, la (2) dà subito

$$Q_{17}=a_0x^{12}+a_1x^{11}+a_2x^{10}+R_7x^5+R_{12},$$

e poichè

$$\begin{gathered}R_7=a_3x^4+a_4x^3+(a_0a^5+a_5)x^2+(a_1a^5+a_6)x+(a_2a^5+a_7)\\ R_{12}=(a_3a^5+a_8)x^4+(a_4a^5+a_9)x^3+(a_0a^{10}+a_5a^5+a_{10})x^2\\ +(a_1a^{10}+a_6a^5+a_{11})x+(a_2a^{10}+a_7a^5+a_{12})\end{gathered}$$

avremo, sostituendo:

$$\begin{gathered}Q_{17}=a_0x^{12}+a_1x^{11}+a_2x^{10}+a_3x^9+a_4x^8+(a_0a^5+a_5)x^7\\ +(a_1a^5+a_6)x^6+(a_2a^5+a_7)x^5+\\ +(a_3a^5+a_8)x^4+(a_4a^5+a_9)x^3+(a_0a^{10}+a_5a^5+a_{10})x^2+(a_1a^{10}+a_6a^5+a_{11})x+\\ +(a_2a^{10}+a_7a^5+a_{12}).\end{gathered}$$

In generale il quoziente è dato da:

$$
\begin{aligned}
Q_n = {} & a_0 x^{n-r} + a_1 x^{n-r-1} + \dots\dots + a_{r-1} x^{n-2r+1} + \\
& + (a_0 a^r + a_r) x^{n-2r} + (a_1 a^r + a_{r+1}) x^{n-2r-1} + \dots + (a_{r-1} a^r + a_{2r-1}) x^{n-3r+1} + \\
& + (a_0 a^{2r} + a_r a^r + a_{2r}) x^{n-3r} + \dots + (a_{r-1} a^{2r} + a_{2r-1} a^r + a_{3r-1}) x^{n-4r+1} + \\
& + \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\; + \\
& + (a_0 a^{(k-2)r} + \dots + a_{(k-2)r}) x^{n-(k-1)r} + \dots + (a_{r-1} a^{(k-2)r} + \dots + a_{(k-1)r-1}) x^{n-kr+1} + \\
& + (a_0 a^{(k-1)r} + \dots + a_{(k-1)r}) x^h + \dots + (a_h a^{(k-1)r} + \dots + a_{(k-1)r+h})
\end{aligned}
$$

dove in una linea qualunque t^{ma}, che è della forma:

$$
\begin{aligned}
& (a_0 a^{(t-1)r} + a_r a^{(t-2)r} + \dots + a_{(t-1)r}) x^{n-tr} + \\
& + (a_1 a^{(t-1)r} + a_{r+1} a^{(t+2)r} + \dots + a_{(t-1)r+1}) x^{n-tr-1} + \\
& + \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\; + \\
& + (a_{r-1} a^{(t-1)r} + a_{2r-1} a^{(t-2)r} + \dots + a_{tr-1}) x^{n-(t+1)r+1}
\end{aligned}
$$

si trovano raggruppati r termini e solo nell'ultima ve ne sono $h+1$, a meno che non si abbia $h = r-1$.

2.

Quando per determinati valori di a, tutti i coefficienti di R_n si annullano, si trovano soddisfatte le condizioni necessarie e sufficienti affinchè il polinomio

$$P^{(n)} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1} x + a_n$$

sia divisibile per $x^r - a^r$.

Si comprende dunque come possa essere conveniente la considerazione del sistema di polinomi:

$$
(5)\quad \left\{
\begin{array}{l}
a_{n-kr+1} x^{(k-1)r} + a_{n-(k-1)r+1} x^{(k-2)r} + \dots\dots + a_{n-2r+1} x^r + a_{n-r+1} \\
a_{n-kr+2} x^{(k-1)r} + a_{n-(k-1)r+2} x^{(k-2)r} + \dots\dots + a_{n-2r+2} x^r + a_{n-r+2} \\
.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\
a_{n-kr-1} x^{kr} + a_{n-(k-1)r-1} x^{(k-1)r} + \dots\dots + a_{n-r-1} x^r + a_{n-1} \\
a_{n-kr} x^{kr} + a_{n-(k-1)r} x^{(k-1)r} + \dots\dots + a_{n-r} x^r + a_n
\end{array}
\right.
$$

in questioni relative alla riduttibilità del polinomio $P^{(n)}$ o, in particolare, all'abbassamento del grado dell'equazione $P^{(n)} = 0$.

Notiamo di passaggio che quando i polinomi (5) sono tutti identicamente nulli per $x = a$, tale sarà anche la loro somma ottenuta dopo averli moltiplicati ordinatamente per a^{r-1}, a^{r-2}, ..., a^1, a^0; e questa somma, che combina con ciò che diviene R_n per $x = a$, altro non è che il resto della divisione di $P^{(n)}$ per $x - a$. Di singolare semplicità è poi il risultato della sostituzione di ± 1 ad x nei polinomi (5), perchè si riducono a somme algebriche dei coefficienti. Così nel citato esempio, le condizioni necessarie e sufficienti affinchè il polinomio $P^{(17)}$ sia divisibile per $x^5 - 1$ sono date da:

$$a_3 + a_8 + a_{13} = 0$$
$$a_4 + a_9 + a_{14} = 0$$
$$a_0 + a_5 + a_{10} + a_{15} = 0$$
$$a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16} = 0$$
$$a_2 + a_7 + a_{12} + a_{17} = 0$$

che potranno in facil modo essere dedotte anche dal quadro:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_5 & a_{10} & a_{15} \\ a_1 & a_6 & a_{11} & a_{16} \\ a_2 & a_7 & a_{12} & a_{17} \\ a_3 & a_8 & a_{13} & . \\ a_4 & a_9 & a_{14} & . \end{array}$$

supposto scritto per colonne. È d'altronde chiaro che il coefficiente a_0 sarà sempre il primo in uno dei polinomi (5) e precisamente nell'$(h+1)^{mo}$, contando dal basso, il quale è della forma

$$a_{n-kr-h}\, x^{kr} + a_{n-(k-1)r-h}\, x^{(k-1)r} + \ldots.. + a_{n-r-h}\, x^r + a_{n-h}$$

ossia:

$$a_0 x^{kr} + a_r x^{(k-1)r} + \ldots.. + a_{(k-1)r}\, x^r + a_{kr}.$$

Il sistema dei polinomi (5) contiene in tutto $n+1$ termini, e generalmente se ne trovano k in ciascuno dei primi $r - (h+1)$ e $k+1$ in ognuno degli $h+1$ polinomi rimanenti. V'è però un caso in cui *tutti* gli r polinomi contengono $k+1$ termini ed ha luogo quando sussiste la relazione:

$$(k+1)r = n+1$$

dalla quale si rileva

$$r = n - kr + 1 = h + 1.$$

Vedesi allora che il termine iniziale $a_{n-kr+1}\, x^{(k-1)r}$ del primo dei polinomi (5) dovrà essere il secondo di quello che incomincia per a_0; e che perciò il sistema (5) sarà immediatamente deducibile del seguente quadro:

$$\begin{array}{cccccc}
a_0 & a_r & a_{2r} & . & . & a_{kr} \\
a_1 & a_{r+1} & a_{2r+1} & . & . & a_{kr+1} \\
a_2 & a_{r+2} & a_{2r+2} & . & . & a_{kr+2} \\
. & . & . & . & . & . \\
a_{r-1} & a_{2r-1} & a_{3r-1} & . & . & a_n ;
\end{array}$$

Un caso particolare, che si collega coll'esempio precedente, si ha prendendo $r = 5$, $n = 19$.

3.

I divisori interi della forma $x^r - a^r$ appartenenti al polinomio $P^{(n)}$ ridotto ad avere il coefficiente del primo termine uguale all'unità ed interi tutti gli altri, si possono determinare con una regola del tutto analoga a quella di *Bezout*. Stabilendo, difatti, l' uguaglianza:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{r-1} x^{n-r+1} + a_r x^{n-r} + \ldots + a_{n-1} x + a_n =$$
$$(x^r - a^r)(x^{n-r} + b_1 x^{n-r-1} + b_2 x^{n-r-2} + \ldots.$$
$$+ b_{r-1}\, x^{n-2r+1} + b_r x^{n-2r} + \ldots. + b_{n-r-1}\, x + b_{n-r})$$

si trovano le relazioni:

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l}
a_1 = b_1\,,\ a_2 = b_2,\ \ldots\ldots\ a_{r-1} = b_{r-1}\,, \\
a_r = b_r - a^r,\ a_{r+1} = b_{r+1} - b_1 a^r,\ \ldots,\ a_{n-r} = b_{n-r} - b_{n-2r}\, a^r, \\
a_{n-r+1} = -b_{n-2r+1} a^r, a_{n-r+2} = -b_{n-2r+2} a^r,\ \ldots.\ a_n = -b_{n-r}\, a^r
\end{array} \right.$$

che servono al calcolo delle b. Dalle ultime r delle (6) si rileva che a^r dev'essere un divisore di tutti gli r coefficienti

$$a_{n-r+1}\,,\ a_{n-r+2},\ \ldots.\ a_n\,;$$

donde una limitazione ai numeri interi da provare. Così è possibile che il polinomio

$$P^{(7)} = x^7 - 2x^6 - 7x^5 - 13x^4 + 13x^3 + 56x^2 + 40x + 24$$

ammetta il divisore $x^3 - 2^3$, perchè i tre ultimi coefficienti decomposti in fattori primi sono

$$56 = 7.2^3,\ \ 40 = 5.2^3,\ \ 24 = 3.2^3.$$

E poichè anche tutte le altre condizioni imposte dalle (6) si trovano soddisfatte, abbiamo effettivamente:

$$P^{(7)} = (x^3 - 8)\ (x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 5x - 3).$$

Osserviamo inoltre che fra i divisori degli ultimi r coefficienti sono da escludere quelli che non dànno un quoziente intero per resultato della divisione $\dfrac{f(\pm 1)}{a^r \mp 1}$ (dove si suppone $f(x) = P^{(n)}$), come rilevasi dall'eguaglianza identica

$$(7) \qquad f(x) = (x^r - a^r)\,\varphi(x)$$

che deve aver luogo quando $x^r - a^r$ è un divisore di $f(x)$. In questa stessa ipotesi la (7) mostra in generale, che il numero $f(m)$, qualunque sia il valore intero di m, dev'essere divisibile per $m^r - a^r$; vale a dire che deve aversi – con riguardo al segno di $\varphi(m)$ il quale può essere positivo o negativo –,

$$(8) \qquad m^r - a^r = \pm d$$

indicando con d uno qualunque dei divisori positivi di $f(m)$. Ma dalla (8) si trae

$$a^r = m^r \mp d$$

e perciò costruendo i numeri della forma $m^r \mp d$ col dare ad m successivamente valori interi scelti ad arbitrio, i soli numeri a^r comuni a queste serie potranno dar luogo ai divisori $x^r - a^r$. Anche questa regola è un'estensione di quella data da *Newton* per la ricerca dei divisori razionali della forma $x - a$.

Altre conseguenze particolari, qui tralasciate per brevità, potrà il lettore agevolmente dedurre dalle proprietà generali sovraesposte.

Roma, Luglio 1888.

Elcia Sadun.

SULL'APPROSSIMAZIONE DELL'ORDINARIA INTERPOLAZIONE NELLE TAVOLE DI LOGARITMI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

II.

7. Veniamo ora a risolvere la questione propostaci. Perciò dimostriamo la formula seguente

$$\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}a = h\cos(a+\theta h),$$

essendo $0<\theta<1$, ossia, essendo $a+\theta h$ un valore compreso fra a e $(a+h)$.

Supponiamo dapprima h positivo. Si ha

$$\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}a = 2\operatorname{sen}\frac{h}{2}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)$$

e, poichè è

$$\operatorname{sen}\frac{h}{2}<\frac{h}{2},\quad \cos\left(a+\frac{h}{2}\right)<\cos a,$$

sarà

$$\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}a}{h}<\cos a,$$

Così, essendo

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}>\cos\frac{h}{2}$$

sarà

$$\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}a}{h}>\cos\frac{h}{2}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)$$

e, a fortiori,

$$\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}a}{h}>\cos(a+h)$$

Il rapporto

$$\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}a}{h}$$

rappresenta quindi il valore del coseno di un angolo $a+\theta h$ compreso fra a e $a+h$.

Se h è negativo ed h_1 è il suo valore assoluto, avremo, posto $a-h_1=b$

$$\frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen}(a-h_1)}{h_1} = \frac{\operatorname{sen}(b+h_1) - \operatorname{sen} b}{h_1}$$

ma, per quanto si è detto prima

$$\operatorname{sen}(b+h_1) - \operatorname{sen} b = h_1 \cos(b+\theta h_1) \ ,$$

con $0<\theta<1$, o

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen}(a-h_1) = h_1 \cos[a-(1-\theta) h_1]$$

e posto $1-0=\theta_1$ sarà

$$\operatorname{sen}(a-h_1) - \operatorname{sen} a = -h_1 \cos(a-\theta_1 h_1)$$

con $1>\theta_1>0$.

8. Dati i logaritmi di $\operatorname{sen} a$ e $\operatorname{sen}(a+d)$ $\left(a<\frac{\pi}{2}\right)$, se il logaritmo del seno dell'angolo $(a+h)$ compreso fra a e $a+d$ viene calcolato colla proporzione

$$\frac{\log \operatorname{sen}(a+h) - \log \operatorname{sen} a}{\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a} = \frac{h}{d}$$

vale a dire si calcola $\log \operatorname{sen}(a+h)$ colla formula

$$\log \operatorname{sen}(a+h) = \log \operatorname{sen} a + \frac{h}{d}\{\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a\} \ ,$$

si commette un errore, il quale si compone di due parti. Una di queste E_1 è dovuta agli errori di cui sono affetti i logaritmi di $\operatorname{sen} a$ e $\operatorname{sen}(a+d)$, l'altra parte è la differenza

$$E_2 = \log \operatorname{sen}(a+h) - \log \operatorname{sen} a - \frac{h}{d}[\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a]$$

Se $\log \operatorname{sen}(a+d)$ e $\log \operatorname{sen} a$ sono approssimati a meno di g l'errore E_1 nel calcolo di

$$\log \operatorname{sen}(a+h) = \left(1-\frac{h}{d}\right) \log \operatorname{sen} a + \frac{h}{d} \log \operatorname{sen}(a+d)$$

sarà minore di

$$\frac{h}{d}g+\left(1-\frac{h}{d}\right)g$$

ossia minore di g.

Per determinare una limitazione di E_2, potremo scrivere tale differenza sotto la forma

$$E_2 = \log \operatorname{sen}(a+h) - \log \operatorname{sen} a -$$
$$-\frac{h\cos(a+\theta_1 h)}{d\cos(a+\theta_2 d)}\{\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a\}+$$
$$+\frac{h}{d}\left\{\frac{\cos(a+\theta_1 h)}{\cos(a+\theta_2 d)}-1\right\}\{\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a\}$$

ove $h\cos(a+\theta_1 h)$ e $d\cos(a+\theta_2 d)$, stanno ad indicare gli aumenti subìti dall'argomento $\operatorname{sen} a$ dei logaritmi, corrispondenti agli aumenti h e d di a. La differenza

$$\log \operatorname{sen}(a+h) - \log \operatorname{sen} a - \frac{h\cos(a+\theta_1 h)}{d\cos(a+\theta_2 d)}\{\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a\}$$

è pel I° dei teoremi ricordati al n° 1, in valore assoluto minore di

$$\frac{d\cos(a+\theta_2 d)}{\operatorname{sen} a}\log\left\{1+\frac{d\cos(a+\theta_2 d)}{\operatorname{sen} a}\right\}$$

e quindi anche, essendo

$$\cos a > \cos(a+\theta_2 d)$$

minore di

$$\frac{d}{\operatorname{tang} a}\log\left(1+\frac{d}{\operatorname{tang} a}\right)$$

Cerchiamo ora una limitazione della seconda parte di E_2.

Dalla

$$\frac{\operatorname{sen}(a+d)}{\operatorname{sen} a} = 1 + \frac{d\cos(a+\theta_2 d)}{\operatorname{sen} a}$$

si ricava

$$\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a = \log\left(1+\frac{d\cos(a+\theta_2 d)}{\operatorname{sen} a}\right)$$

e quindi, quando i logaritmi sieno presi in una base maggiore di 1,

$$\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a < \log\left(1 + \frac{d}{\operatorname{tang} a}\right)$$

Ma, riducendo ad una frazione unica, trasformando di questa il numeratore nel prodotto di due funzioni goniometriche, si ha

$$\frac{\cos(a+\theta_1 h)}{\cos(a+\theta_2 d)} - 1 = \frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta_2 d - \theta_1 h)\operatorname{sen}\left(a + \frac{\theta_1 h + \theta_2 d}{2}\right)}{\cos(a+\theta_2 d)}$$

e quindi, poichè sono

$$\theta_2 d - \theta_1 h < d, \quad 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\theta_2 d - \theta_1 h) < d, \quad \cos(a+d) < \cos(a+\theta_1 d),$$

sarà

$$\frac{\cos(a+\theta_1 h)}{\cos(a+\theta_2 d)} - 1 < d \operatorname{tang}(a+d)$$

Abbiamo dunque in valore assoluto

$$E_2 < d\left\{\frac{1}{\operatorname{tang} a} + \operatorname{tang}(a+d)\right\}\log\left(1 + \frac{d}{\operatorname{tang} a}\right)$$

Se i logaritmi si prendono nel sistema a base 10, nell'ipotesi

$$\operatorname{tang} d < \frac{1}{10 \operatorname{tang} a} \qquad (1)$$

si ha

$$\operatorname{tang}(a+d) < \frac{10\operatorname{tang}^2 a + 1}{9 \operatorname{tang} a}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tang} a} + \operatorname{tang}(a+d) < \frac{10}{9}\frac{1}{\operatorname{sen} a \cos a}$$

Sarà in conseguenza

$$E_2 < d\,\frac{10}{9}\,\frac{1}{\operatorname{sen} a \cos a}\,\log_{10}\left(1 + \frac{d}{\operatorname{tang} a}\right)$$

(1) A questa diseguaglianza, posto $d = 10''$ soddisfano tutti gli angoli $a < 89^\circ\, 58'\, 20''$, mentre posto $d = 1'$ soddisfano gli angoli $a < 89^\circ 50'$.

ma, come è stato dimostrato al n.° 1, si ha

$$\log_{10}\left(1+\frac{d}{\tan g a}\right)<\frac{9}{20}\frac{d}{\tan g a}$$

epperò sarà

$$E_2<\frac{1}{2}\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a}$$

L'errore totale E sarà in valore assoluto inferiore a

$$g+\frac{1}{2}\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a} \qquad (1)$$

9. Determiniamo ora l'errore dell'angolo corrispondente ad un logaritmo-seno dato.

Sia il logaritmo dato compreso fra $\log\operatorname{sen}(a+d)$ e $\log\operatorname{sen} a$;

---

(1) Notiamo che col sussidio dell'analisi algebrica si dimostra che $E_2<\frac{1}{8}\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a}$, epperò

$$E<g+\frac{1}{8}\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a}$$

Colle tavole logaritmiche a sette decimali si ha $g<\frac{5}{10^8}$; però, quando, come nelle tavole del Sig. Ludwig Schrön, sia noto se ogni logaritmo è dato per eccesso o per difetto, si potrà rendere $g<\frac{2.5}{10^8}$. Riducendo il $\log\operatorname{sen}(a+h)$, calcolato col principio delle parti proporzionali, alle sue prime sette cifre decimali, si commette un nuovo errore che non può raggiungere $\frac{5}{10^8}$ e questo con g dà $\frac{7.5}{10^8}$, quindi dato d, volendo di $\operatorname{sen}(a+h)$ un valore approssimato a meno di $\frac{1}{10^7}$ bisognerà prendere a in modo che sia

$$\frac{1}{8}\;\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a}<\frac{2.5}{10^8}\quad \text{o}\quad \operatorname{sen} a>d.10^3\sqrt{5}$$

Affinchè si possa applicare con piena fiducia l'ordinario metodo di interpolazione, si dovrebbe quindi adoperare una tavola per i logaritmi-seni

di 1'' in 1'' da 1° a 6° 30'
di 10'' in 10'' da 6°30' a 45°

Il Signor Brühns adotta una consimile disposizione nel suo manuale logaritmico, dando i logaritmi seni di 1'' in 1'' per i primi sette gradi del quadrante.

Per le tavole a 5 decimali dovrebbero calcolarsi i logaritmi — seni

di 10'' in 10'' da 1.° a 4°
di 1' in 1' da 4° a 45°

indicando con $(a+h)$ l'angolo, a cui corrisponde il logaritmo seno dato, si calcoli h colla proporzione

$$\frac{h}{d}=\frac{\log \operatorname{sen}(a+h)-\log \operatorname{sen} a}{\log \operatorname{sen}(a+d)-\log \operatorname{sen} a}$$

L' errore commesso nel computo di h si compone di due parti, una delle quali è la differenza

$$\Sigma_1=d\,\frac{\log \operatorname{sen}(a+h)-\log \operatorname{sen} a}{\log \operatorname{sen}(a+d)-\log \operatorname{sen} a}-h$$

ossia

$$\Sigma_1=d\,\frac{E_2}{\log \operatorname{sen}(a+d)-\log \operatorname{sen} a}$$

ove ad E_2 è stato attribuito lo stesso significato che al numero precedente, epperò, essendo in valore assoluto

$$E_2<\frac{1}{2}\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a}$$

sarà il valore assoluto di Σ_1 minore di

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{\log \operatorname{sen}(a+d)-\log \operatorname{sen} a}\cdot\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a}$$

L'altra parte è dovuta agli errori dei logaritmi delle tavole e all'eventuale errore del logaritmo-seno dato. Se quelli sono approssimati a meno di g e questo a meno di ε il quoziente

$$\frac{\log \operatorname{sen}(a+h)-\log \operatorname{sen} a}{\log \operatorname{sen}(a+d)-\log \operatorname{sen} a}$$

potrà essere calcolato a meno di

$$\frac{\varepsilon+g}{\log \operatorname{sen}(a+d)-\log \operatorname{sen} a-2g}\ \cdot \quad (*)$$

Dunque l'errore totale Σ nel calcolo di un angolo cor-

(*) V. la nota sulle approssimazioni numeriche nella trigonometria del Prof. D. Besso.

rispondente a un dato logaritmo-seno di cui si conosce un valore a meno di ε compreso fra $\log \operatorname{sen}(a+d)$ e $\log \operatorname{sen} a$, noti a meno di g è inferiore a

$$\frac{d}{\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a - 2g} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a} + \varepsilon + g \right\} \quad (*)$$

Quindi nel caso che si faccia uso di tavole a sette decimali, supposto

$$\varepsilon = 0, \quad a + d \leq 6°30, \quad a > 1°, \quad d = 1''$$

si ha

$$\sum < 0'', 0004$$

mentre per $a \overline{\overline{>}} 6°30'$ e $d = 10''$ si ha

$$\sum < 0'',003$$

10. Determiniamo ora una limitazione dell'errore nel calcolo del logaritmo tangente di un angolo non compreso nelle tavole.

Dati i logaritmi di $\operatorname{tang} a$ e $\operatorname{tang}(a+d)$, se il logaritmo della tangente di un angolo $(a+h)$, non compreso nelle tavole viene calcolato colla proporzione

$$\frac{\log \operatorname{tang}(a+h) - \log \operatorname{tang} a}{\log \operatorname{tang}(a+d) - \log \operatorname{tang} a} = \frac{h}{d}$$

vale a dire se si calcola $\log \operatorname{tang}(a+h)$ colla formula

$$\log \operatorname{tang}(a+h) = \log \operatorname{tang} a + \frac{h}{d} \{ \log \operatorname{tang}(a+d) - \log \operatorname{tang} a \}$$

si commette un errore di cui la parte, dovuta agli errori di cui sono affetti $\log \operatorname{tang} a$ e $\log \operatorname{tang}(a+d)$, è minore di g se questi logaritmi sono entrambi dati a meno di g. L'altra parte E è misurata dalla differenza

$$\log \operatorname{tang}(a+h) - \log \operatorname{tang} a - \frac{h}{d} [\log \operatorname{tang}(a+d) - \log \operatorname{tang} a]$$

(*) Per quanto è stato detto nella nota al n.º precedente potrà ridursi

$$\Sigma < \frac{d}{\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a - 2g} \left\{ \frac{1}{8} \frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a} + \varepsilon + g \right\}$$

che può porsi anche sotto la forma

$$\log \operatorname{sen}(a+h) - \log \operatorname{sen} a - \frac{h}{d}\left[\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a\right] -$$

$$- \left\{ \log \cos(a+h) - \log \cos a - \frac{h}{d}\left[\log \cos(a+d) - \log \cos a\right] \right\}$$

Ma per quanto si è detto al n. 9 i due termini di questa differenza sono inferiori in valore assoluto rispettivamente a

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{\cos^2 a}\,;$$

sarà quindi in valore assoluto

$$E < \frac{2d^2}{\operatorname{sen}^2 2a}$$

L'errore totale sarà quindi in valore assoluto inferiore a

$$g + \frac{2d^2}{\operatorname{sen}^2 2a} \quad (^*)$$

11. La determinazione dell'angolo corrispondente ad un dato logaritmo-tangente si compie in modo analogo a quello tenuto pel seno e si giunge a stabilire che un tale errore è inferiore a

$$\frac{d}{\log \operatorname{tang}(a+d) - \log \operatorname{tang} a - 2g}\left\{ \frac{2d_1^2}{\operatorname{sen}^2 2a} + \varepsilon + g \right\}$$

ove ε, g e d hanno significati analoghi a quelli loro attribuiti al n° 10.

Ettore Ricordi.

(*) Facendo uso del valore dato nella nota al n° 8 questo errore potrà rendersi minore di

$$g + \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 2a}$$

ESERCIZI PER LA SCUOLA (*)

1. I numeri positivi a, b, c, sono legati dalla relazione

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 = 0.$$

Esiste un triangolo coi lati misurati da quei tre numeri?

2. Se i numeri a, b, c misurano i tre lati d'un triangolo, il polinomio

$$a^3 + b^3 + c^3 - ab(a + b) - bc(b + c) - ca(c + a) + 2abc$$

è negativo. È vera la reciproca?

3. I tre lati d'un triangolo sono misurati dai numeri a, b, c fra i quali ha luogo la relazione

$$a^2(b - c) + b^2 (c - a) + c^2(a - b) = 0.$$

Dimostrare che quel triangolo è isoscele.

4. Se i numeri a, b, c che misurano i tre lati d'un triangolo sono legati dalla relazione

$$a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2 = 0,$$

quel triangolo dev'essere equilatero.

5. Se i numeri a, b, c che misurano i tre lati d'un triangolo sono legati dalla relazione

$$a^4+b^4+c^4-2ab(a^2+b^2)-2bc(b^2+c^2)-2ca(c^2+a^2)+3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=0,$$

quel triangolo dev'essere equilatero.

6. Se i numeri positivi a, b, c sono legati dalla relazione

$$a^6+b^6+c^6-a^2b^2(a^2+b^2)-b^2c^2(b^2+c^2)-c^2a^2(c^2+a^2)+2a^2b^2c^2=0,$$

essi misurano i lati d'un triangolo rettangolo.

7. Se i numeri positivi a, b, c sono legati dalla relazione

$$a^3 = b^3 + c^3,$$

esiste un triangolo acutangolo coi lati misurati da quei trè numeri.

(*) Le proposizioni che sono quì enunciate si riferiscono, per la maggior parte, a trasformazioni di alcuni polinomi in prodotti di più fattori o in somme di potenze di più binomi, e ad alcuni teoremi di geometria elementare.

8. I tre lati d'un triangolo sono misurati dai numeri, a, b, c il maggiore dei quali è a; i tre lati d'un altro triangolo sono misurati dai numeri a_1, b_1, c_1 il maggiore dei quali è a_1 e questi numeri verificano la relazione:

$$a^5+b^5+c^5-a^2b^2(a+b)-a^2c^2(a+c)+b^2c^2(c+b)=a_1^2-b_1^2-c_1^2.$$

Dimostrare che se il primo triangolo è rettangolo dev'essere tale anche il secondo. È vera la reciproca?

9. I numeri a e b, che misurano il maggior lato d'un triangolo e il segmento che unisce il suo punto di mezzo al vertice dell'angolo opposto, sono legati al numero c dalla relazione

$$a^5-a^3(4b^2-6b)+8a^2b^2-24ab^3-32b^4=c(a^3+6ab+8b^3).$$

Si domanda se il triangolo sia rettangolo, acutangolo od ottusangolo.

10. I cateti d'un triangolo rettangolo sono misurati dai numeri a, b, e quelli d'un altro triangolo rettangolo dai numeri m, n. Dimostrare che, se questi quattro numeri sono legati dalle relazioni

$$a+b=2-(m+n) \qquad ab=2+mn-2(m+n),$$

i circoli circoscritti ai due triangoli devono essere uguali.

11. Gli angoli ai vertici di due triangoli isosceli sono misurati dai numeri a, b fra i quali ha luogo la relazione

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}=\sqrt{2a};$$

la base del primo triangolo è doppia di quella del secondo. Assegnare il rapporto del rapporto dei perimetri dei due triangoli a quello delle loro aree.

12. I tre lati d'un triangolo sono misurati dai numeri a, b, c, i tre lati d'un altro triangolo dai numeri a_1, b_1, c_1, e questi numeri sono legati dalla relazione

$$4a^2b_1^2+4a_1^2b^2+9a^2c_1^2+9a_1^2c^2=8aba_1b_1+18aca_1c_1.$$

Dimostrare che, se uno dei due triangoli è rettangolo, dev'essere tale anche l'altro.

13. I cinque angoli d'un pentagono inscritto in un circolo sono misurati dai numeri a, b, c, d, e. Dimostrare che il pentagono dev'essere regolare se questi numeri sono legati dalla relazione

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=ab+bc+cd+de+ea.$$

14. I sei lati d'un esagono inscritto in un circolo sono misurati dai numeri a, b, c, d, e, f i quali verificano le relazioni

$$b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=bc+cd+de+ef+fb$$

$$(a-b+c)\,(a-b-c)=b\,(d-c-f).$$

Assegnare il rapporto del perimetro dell'esagono alla maggiore delle sue diagonali.

15. Due lati consecutivi d'un quadrilatero circoscritto ad un circolo sono misurati dai numeri a, b i quali sono legati dalla relazione

$$3a^5+2a^4b+a^2-3ab^4-2b^5-b^2=0.$$

Dimostrare che le diagonali di quel quadrilatero sono fra loro perpendicolari.

D. Besso.

SOLUZIONE DELLE QUISTIONI 11 E 12 PROPOSTE A PAG. 127.

(11) *Dimostrare che, per* n *intero e positivo, si ha*:

$$\frac{1}{n+1}-\frac{n}{(n+1)(n+2)}+\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\ldots+(-1)^n\frac{n(n-1)\ldots.2.1}{(n+1)(n+2)\ldots.(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}$$

D. Besso.

Dimostrazione del Prof. *G. Frattini* (*).

Per verificare la precedente eguaglianza trasporto nel 2°

(*) Una dimostrazione consimile è stata inviata dal Sig. *A. De Zettiry*.

membro il 1.° termine del 1° membro, riduco nel nuovo 2° membro e sopprimo il fattore comune $\frac{n}{n+1}$ nei due membri. Ottengo:

$$(A)\quad -\frac{1}{n+2}+\frac{n-1}{(n+2)(n+3)}-\ldots+(-1)^n\frac{(n-1)\ldots .2.1}{(n+2)\ldots(2n+1)}=-\frac{1}{2n+1}.$$

Questa eguaglianza è quella nella quale si muta l'eguaglianza da verificare, quando nei numeratori e nei denominatori dei singoli termini del suo 1° membro si sopprima il 1° fattore e nel medesimo tempo si cambi segno al 2° membro (purchè si convenga di non considerare il termine $\frac{1}{n+1}$ nel numeratore del quale il fattore soppresso sarebbe l'unità). Di nuovo: trasportiamo nel 2° membro il 1° termine del 1.° membro dell'eguaglianza (A), riduciamo nel nuovo 2° membro e sopprimiamo il fattore comune $\frac{n-1}{n+2}$. Otterremo quella eguaglianza nella quale si muta la (A) quando nei numeratori e nei denominatori dei singoli termini del 1.° membro si sopprima il 1.° fattore (colla convenzione ecc.), e si cambi segno al 2° membro.

Dopo n operazioni il 1° membro si troverà ridotto a un solo termine e precisamente al termine $(-1)^n.\frac{1}{2n+1}$ ed, evidentemente, il 2.° membro al termine medesimo. L'eguaglianza è così verificata.

Dimostrazione del Prof' *F. Viaggi.*

Da una formola notissima del calcolo combinatorio si deducono le seguenti eguaglianze:

$$\left|\begin{matrix}2n+1\\ n\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}2n\\ n\end{matrix}\right|+\left|\begin{matrix}2n\\ n-1\end{matrix}\right|$$

$$-\left|\begin{matrix}2n+1\\ n\end{matrix}\right|=-\left|\begin{matrix}2n\\ n-1\end{matrix}\right|-\left|\begin{matrix}2n\\ n-2\end{matrix}\right|$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$(-1)^{n-1}\left|\begin{matrix}2n+1\\1\end{matrix}\right|=(-1)^{n-1}\left|\begin{matrix}2n\\1\end{matrix}\right|+(-1)^{n-1}\left|\begin{matrix}2n\\0\end{matrix}\right|$$

$$(-1)^{n}\left|\begin{matrix}2n+1\\0\end{matrix}\right|=(-1)^{n}\left|\begin{matrix}2n\\0\end{matrix}\right|$$

Addizionando membro a membro, e riducendo, si ha l'identità:

$$(\alpha)\quad \left|\begin{matrix}2n+1\\n\end{matrix}\right|-\left|\begin{matrix}2n+1\\n-1\end{matrix}\right|+\left|\begin{matrix}2n+1\\n-2\end{matrix}\right|-\ldots+(-1)^n\left|\begin{matrix}2n+1\\0\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}2n\\n\end{matrix}\right|.$$

Dalla quale, sostituendo ai simboli d'Euler le frazioni equivalenti e moltiplicando tutti i termini per $\dfrac{n(n-1)\ldots.2.1}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)}$, dopo facili semplificazioni si ricava l'identità proposta.

Osservazione. — L'identità (α) si potrebbe ottenere anche facilmente sviluppando nella identità $(1-x)^{2n+1}(1-x)^{-1}=(1-x)^{2n}$ le potenze ascendenti d'x ed eguagliando i coefficienti d'x^n nei due membri.

(12) — *Dimostrare che la potenza* n^a *della media aritmetica delle radici* n^e *di più numeri positivi diminuisce al crescere di* n.

D. Besso.

Dimostrazione del Prof. *G. Frattini.*

Dobbiamo dimostrare che:

$$\left(\frac{\sqrt[n+1]{a_1}+\sqrt[n+1]{a_2}+\ldots+\sqrt[n+1]{a_m}}{m}\right)^{n+1}\overline{\gtreqless}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n,$$

ovvero che:

$$\text{(A)}\qquad \left(\sqrt[n+1]{a_1}+\ldots+\sqrt[n+1]{a_m}\right)^{n+1}\overline{\gtreqless}\, m\left(\sqrt[n]{a_1}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}\right)^n.$$

I. Per $n=1$ la (A) è vera. Infatti essa diviene:

$$\text{(B)}\qquad (\sqrt{a_1}+\ldots+\sqrt{a_m})^2\,\overline{\gtreqless}\, m(a_1+\ldots+a_m).$$

Ora, se scriviamo gli m^2 termini del prodotto della quantità $\sqrt{a_1}+\ldots+\sqrt{a_m}$ per sè stessa, e se invece di $\sqrt{a_u}.\sqrt{a_v}$ (termine qualsivoglia) poniamo la quantità non minore $\dfrac{a_u+a_v}{2}$, poichè ciascuno dei radicali $\sqrt[n]{a_1}$, $\sqrt[n]{a_2}$, ... $\sqrt[n]{a_m}$ è fattore $2m$ volte ne' vari termini del prodotto, il 1.° membro della (B) si muterà in $2m\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}+\ldots+\frac{a_m}{2}\right)$ ossia in $m(a_1+a_2+\ldots+a_m)$, divenendo identico al 2.°

II. Dimostriamo ora che, se la proprietà (A) è vera per un certo valore di n, essa è anche vera pel valore $n+1$. Intanto, ponendo $\sqrt[n(n+1)]{a_i}=x_i$, la (A), supposta vera, ci dà:

$$\text{(C)}\quad (x_1^n+x_2^n+\ldots+x_m^n)^{n+1} \overline{\overline{<}}\, m(x_1^{n+1}+x_2^{n+1}+\ldots+x_m^{n+1})^n.$$

Ma si ha ancora:

$$\text{(D)}\qquad (x_1^{n+1}+x_2^{n+1}+\ldots+x_m^{n+1})^2$$
$$\overline{\overline{<}}\,(x_1^n+x_2^n+\ldots+x_m^n)(x_1^{n+2}+x_2^{n+2}+\ldots+x_m^{n+2})$$

perchè, sviluppando il quadrato del 1° membro, a ciascun doppio prodotto $(2x_p^{n+1}\,x_q^{n+1})$ dello sviluppo corrisponde nel 2° membro il binomio $x_p^n\,x_q^{n+2}+x_q^n\,x_p^{n+2}$ (che non ne è minore, essendo $x_p^2+x_q^2 \overline{\overline{>}}\, 2x_px_q$), mentre le parti restanti dei due membri sono le medesime.

Elevando i due membri della (D) alla potenza $(n+1)^a$, moltiplicando la diseguaglianza che si ricava per la (C), si ottiene, fatte le riduzioni:

$$(x_1^{n+1}+\ldots+x_m^{n+1})^{n+2} \overline{\overline{<}}\, m(x_1^{n+2}+\ldots+x_m^{n+2})^{n+1}.$$

E qui ponendo: $x_i=\sqrt[(n+1)(n+2)]{a_i}$, si ha finalmente:

$$\left(\sqrt[n+2]{a_1}+\ldots+\sqrt[n+2]{a_m}\right)^{n+2} \overline{\overline{<}}\, m\left(\sqrt[n+1]{a_1}+\ldots+\sqrt[n+1]{a_m}\right)^{n+1} \quad (*)$$

(*) Un altra dimostrazione di questo teorema, diversa dalla presente, del Sig. Prof. *Viaggi*, verrà pubblicata nel venturo fascicolo.

QUISTIONI PROPOSTE

13. Assegnare, senza il sussidio del calcolo differenziale, il limite al quale tende la funzione

$$y = \frac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}$$

quando la variabile x tende ad 1.

14. Dimostrare che, posto

$$1^{h+1} - 2^{h+1} + 3^{h+1} - \ldots + (-1)^{n-1}\, n^{h+1} = s_n \; ,$$

si ha, qualunque sia l' intero positivo h, purchè indipendente da m,

$$\lim\left(\frac{s_{2m} + s_{2m+1}}{m^h}\right)_{m=\infty} = (h + 1)\, 2^{h-1}.$$

15. Dimostrare che il numero dei modi nei quali un intero positivo n può essere formato, per via di addizione, coi numeri 1, 2, 3, è dato dalla formola

$$\frac{(n + 3)^2}{12} + \frac{(-1)^n}{8} - \frac{7}{72} + \frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}.$$

16. Dedurre il postulato delle parallele dalla proposizione: Il quadrato del numero che misura l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo è eguale alla somma dei quadrati dei numeri che misurano i due cateti.

D. Besso.

17. Preso un punto sulla bisettrice di un angolo retto e condotta per questo punto una secante ai lati, determinare la posizione che deve avere la secante affinchè sia minima

1.° la somma dei segmenti staccati dai lati dell'angolo a partire dal vertice,

2.° la porzione della secante limitata ai lati,

3.° l'area del triangolo formato dalla secante e dai lati dell'angolo.

18. Se col simbolo $S^m(x)$ s'indica la somma delle potenze m^{esime} dei primi x numeri interi e positivi e $a, b, c, \ldots l$ sono numeri primi due a due, dimostrare che

$$\frac{S^n(abc\ldots l)}{abc\ldots l} - \frac{S^n(a)}{a} - \frac{S^n(b)}{b} - \frac{S^n(c)}{c} - \ldots\ldots - \frac{S^n(l)}{l}$$

è un numero intero.

19. Se col simbolo $S^m(x)$ s'indica la somma delle potenze m^{esime} dei primi x numeri interi e positivi; $a, b, c, \ldots l$ sono numeri primi due a due ed $n, \alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ numeri interi positivi arbitrari, dimostrare che

$$\frac{S^{2n}(a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots l^\lambda)}{a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots l^\lambda} - \frac{S^{2n}(a)}{a} - \frac{S^{2n}(b)}{b} - \frac{S^{2n}(c)}{c} - \ldots\ldots - \frac{S^{2n}(l)}{l}$$

è un numero intero.

A. Lugli.

Correzione. — Il teorema n. 8 proposto a pag. 92 dev'essere così enunciato:

8. Se un pentagono ha la proprietà che le congiungenti i vertici ai punti di mezzo dei lati rispettivamente opposti passino per uno stesso punto, e sieno in questo punto divise in modo che il rapporto delle sue distanze da un vertice e dal punto di mezzo del lato opposto sia eguale per tutte, quel rapporto deve avere lo stesso valore che gli corrisponde nel pentagono regolare convesso o stellato.

D. Besso.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Was sind und was sollen die Zahlen? *Von* RICHARD DEDEKIND. (p. XV–58; Braunschweig, F. Vieweg u. S.; 1888).

Uno dei caratteri più salienti della Matematica del nostro secolo e specialmente della seconda metà di esso, è il complesso di ricerche sui fondamenti della Scienza; mentre un tempo gli scienziati accettavano, quasi senza discuterle, le dottrine classiche e si proponevano unicamente di perfezionarle e di accrescerle, i moderni non le pongono a fondamento di ulteriori deduzioni senza averle prima discusse e trovate legittime. È appunto al desiderio di rendere pienamente rigorosi i principî fondamentali che sono dovute le accurate indagini che i geometri fecero sulla natura degli elementi all'infinito e degli elementi imaginari e che gli analisti fecero sull'estensione successiva dell'idea di numero. È a questo stesso spirito critico che son dovute quelle belle ricerche sui fondamenti della Matematica che hanno per iscopo di determinare quali proposizioni sia indispensabile dedurre dall'esperienza ed assumere come postulati per fondare una Scienza dell'estensione e una Scienza dei numeri. Per quanto riguarda la Geometria, è inutile che ci arrestiamo a rammentare le ricerche fatte in questa direzione da Riemann, Helmholtz, Beltrami ed altri, le quali fortunatamente sono conosciute anche dai meno dotti fra i cultori delle Scienze esatte. Meno note son quelle che si propongono l'analogo problema per l'Aritmetica e di cui le più recenti son dovute a Helmholtz (1), Krone-

(1) HELMHOLTZ. *Zählen und Messen erkenntnisstheoretisch betrachtet* (*Sammlung der an* E. ZELLER *gerichteten philosophischen Aufsätzen*, Leipzig 1887). Cfr. il sunto di questo lavoro che trovasi nella *Revue scientifique* dell'anno corrente.

Le linee seguenti, che estragghiamo dalla memoria di Helmholtz, possono servire a dare un'idea del contenuto di essa:

« In alcuni lavori precedenti mi sono sforzato di mostrare come gli assiomi della Geometria non siano proposizioni date *a priori*, ma siano anzi da sostenere o da rigettare con argomenti forniti dalla esperienza... Ora è chiaro che la teoria empiristica da me adottata, se nega agli assiomi della Geometria il carattere di proposizioni indimostrabili e non aventi bisogno di dimostrazione, deve rendersi conto anche degli assiomi dell'Aritmetica i quali stanno in una relazione analoga col nostro modo di concepire il tempo ».

cker (1) e Dedekind (2).

Per quanto pregevoli siano i lavori dei primi due fra questi scienziati, non esitiamo a dichiararli meno interessanti di quello dell'ultimo dal punto di vista della Scienza pura; quelli per giungere all'idea di numero e alle operazioni sui numeri invocano le successioni che ci presenta la natura nello spazio e nel tempo, mentre questo riuscì a stabilire il concetto di numero senza ricorrere a fatti materiali (3) e alla domanda « Che cosa sono i numeri e qual'è il loro ufficio? » potè rispondere « I numeri sono creazioni volontarie della mente umana, essi servono come mezzo per concepire più facilmente ed esattamente le differenze fra le cose ».

Gli è del lavoro del Sig. Dedekind che vogliamo occuparci in questa rivista; ci sforzeremo di caratterizzare il metodo tenuto dall'a., il quale metodo – diciamolo subito per giustificare la lunghezza di questa bibliografia – se è ingegnosissimo è in pari tempo molto artificioso (4), e, per l'astrattezza delle considerazioni su cui poggia, difficile, malgrado la perfezione dello stile dell'a.. A ragione il Sig. Dedekind congettura che la complicazione della soluzione è probabilmente dovuta alla natura del problema da risolvere; a noi però sia concesso lo sperare che su questo argomento non sia ancora stata detta l'ultima parola, chè altrimenti farebbe d'uopo rinunciare all'idea d'insegnare l'Aritmetica senza invocare il sussidio di rappresentazioni sullo spazio o nel tempo.

Si consideri un *complesso* di cose (indicate colle lettere $a, b, c, \dots, s, \dots$) che siano *elementi* di uno o più *sistemi* indicati colle lettere $A, B, C, \dots, S, \dots$). Di fondamentale importanza è la relazione che intercede fra due sistemi A, S quando ogni elemento di A è elemento di S; si dice allora

(1) Kronecker. *Ueber den Zahlbegriff* (*Philosophische Aufsätze* già citati oppure *Journal f. d. r. u. a. Mathematik*, T. C).

(2) Il titolo del lavoro di Dedekind è scritto in testa del presente articolo.

(3) Questi fatti non hanno alcuna parte nei ragionamenti del Sig. Dedekind, ma servono però a additar loro lo scopo da raggiungere.

(4) L'a. stesso lo riconobbe implicitamente nella prefazione asserendo che « molti riconosceranno appena nelle oscure figure che egli presenta quei numeri che furono loro amici intimi e fedeli durante tutta la vita ».

che A è una *parte* di S; se in particolare A è diverso da S, A si dirà *parte propria* di S. Altrettanto importanti sono le nozioni di *sistema composto di più altri* A, B, C,... e di *parte comune a più sistemi*; il primo sistema risulta da tutte quelle cose che sono elementi o di A, o di B, o di C ecc.; l'altra da quelle cose che sono contemporaneamente elementi di A, di B, di C ecc.; è chiaro che mentre più sistemi dànno sempre luogo a un sistema composto, essi possono non avere alcuna parte comune.

Conviene esprimere queste relazioni mediante simboli: il sistema composto dei sistemi A, B, C, ... s'indicherà con $A + B + C + \dots$, mentre la parte comune ad essi con ABC...; la scrittura $A \leq S$ significherà che A è parte di S e la $A < S$ che è A è parte propria di S (1).

Un'altra nozione di capitale importanza — che anzi può dirsi la chiave di volta di tutto l'edificio del Sig. Dedekind — è quella di *rappresentazione* φ di un sistema su un altro; con questo nome si indica una legge secondo la quale ad ogni elemento s di un sistema S si fa corrispondere una determinata cosa, che si chiamerà *imagine* di s e si indicherà con $\varphi(s)$. Se T è una parte di S, $\varphi(T)$ sarà il sistema avente per elementi le imagini degli elementi di T. Qualunque sia la rappresentazione φ sussisteranno le seguenti proprietà:

I. Se $A \leq B$ sarà $\varphi(A) \leq \varphi(B)$;

II. $\varphi(A + B + C + \dots) = \varphi(A) + \varphi(B) + \varphi(C) + \dots$

III. $\varphi(ABC \dots) \leq \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\dots$

Come dal sistema S si passa al sistema $\varphi(S)$ mediante la rappresentazione φ, da questo si giungerà a un altro sistema mediante un'altra rappresentazione ψ: la rappresentazione con cui si passa da S a quest'ultimo sistema si chiamerà *composta* di φ e ψ e si indicherà con $\varphi\psi$; le rappresentazioni $\varphi\psi$ e $\psi\varphi$ sono generalmente differenti.

(1) Questi simboli sono diversi da quelli del Sig. Dedekind; e furono scelti coi criteri seguiti nelle trattazioni matematiche della Logica; mi sembra questa scelta consigliabile perchè essa porge delle enunciazioni simboliche espressive di quasi tutti i teoremi che dobbiamo riportare e porge un nuovo esempio della utilità che si trae anche in questo caso dal Calcolo della logica.

Fra le rappresentazioni φ di un sistema S son degne di speciale menzione quelle (che chiameremo *simili*) tali che due elementi diversi a, b di S hanno per imagini due elementi diversi $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$ del sistema $\varphi(S) = S'$ (1). Una rappresentazione di tal fatta ne ammette una *inversa*; esiste cioè una legge tale che ad ogni elemento di S' corrisponde una cosa di S che ne è l'imagine. Quando φ è una rappresentazione simile, se $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ sarà $A \leq B$ e se $\varphi(A) = \varphi(B)$ sarà $A = B$; inoltre $\varphi(ABC\ldots) = \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\ldots$.

La nozione di rappresentazioni simili conduce a quella di *sistemi simili*: due sistemi si diranno simili se esiste una rappresentazione dell'uno che sia simile all'altro.

È frequente il caso in cui un sistema venga rappresentato sopra sè medesimo. Un sistema C tale che sia $\varphi(C) \leq C$, si dirà una *catena* (si noti che la proprietà di un sistema di essere una catena è legata sempre alla considerazione di una determinata rappresentazione φ). Considerando sempre la stessa rappresentazione, l' imagine di una catena è un'altra catena e lo stesso può dirsi del sistema composto di più catene e della parte comune ad esse. Se A è una parte del sistema S il simbolo A_0 o $\varphi_0(A)$ rappresenterà la parte comune a tutte le catene del sistema S che contengono il sistema A e s'indicherà col nome di *catena del sistema* A.

Premesse queste definizioni e questi teoremi si hanno elementi sufficienti per fare una distinzione di gran peso.

Un sistema dicesi *infinito* se è simile a una sua parte propria: altrimenti si dice *finito*. È facile far vedere con degli esempi l'esistenza di sistemi di queste due specie; si può poi facilmente mostrare che « due sistemi simili sono contemporaneamente finiti o infiniti », che « ogni sistema il quale sia parte di un sistema finito o sia simile a una tale parte è un sistema finito » e che « se togliendo un elemento da un sistema S si ottiene un sistema finito, S è pure finito ».

Un sistema N dicesi *semplicemente infinito* se esiste una rappresentazione φ di N su sè stesso tale che N si presenti come catena di un elemento non contenuto in $\varphi(N) = N'$. Questo elemento si indicherà col nome di *elemento fondamen-*

(1) Lo scrivere a' invece di $\varphi(a)$ è lecito solo quando non possa nascer dubbio sulla rappresentazione in virtù della quale a' è imagine di a.

tale e col simbolo 1; si dirà inoltre che **N** è *ordinato* mediante la rappresentazione φ. Servendosi dei simboli introdotti si può dire che il sistema N è semplicemente infinito se esiste una rappresentazione φ e un elemento 1 di N tali che sussistano le quattro relazioni seguenti:

α. $N' \leq N$

β. $N = 1_0$

γ. 1 non è contenuto in N'

δ. φ è una rappresentazione simile.

Se in un sistema semplicemente infinito N ordinato mediante una rappresentazione φ si prescinde completamente dalle proprietà specifiche degli elementi e si tien conto unicamente della possibilità di distinguerli gli uni dagli altri e delle relazioni che fra essi intercedono grazie a quella rappresentazione φ, questi elementi si chiamano *numeri naturali* o *numeri ordinali* o semplicemente *numeri*; l'elemento fondamentale 1 si chiama *elemento fondamentale della serie dei numeri*. Còmpito della *Scienza dei numeri* o *Aritmetica* è il dedurre dalle proprietà α., β., γ., δ. le leggi che regolano gli enti così definiti e le loro scambievoli relazioni.

Stabilito per tal modo il concetto di numero, è agevole, applicando le proposizioni generali esposte, di dimostrare un gran numero di teoremi d'Aritmetica, di definire che cosa s'intende per numero maggiore o minore di un altro, di stabilire criteri atti a distinguere le porzioni finite della serie dei numeri dalle infinite, ecc..

Per giungere poi alle operazioni (dirette) sui numeri è necessario premettere il Teorema generale seguente (1):

« Data ad arbitrio una rappresentazione θ di un sistema Ω su sè stesso e dato inoltre in Ω un determinato elemento ω, esiste una rappresentazione ψ della serie di numeri N sodisfacente, qualunque sia il numero n, alle condizioni:

I. $\psi(N) \leq \Omega$

II. $\psi(1) = \omega$

III. $\psi(n') = \theta\psi(n)$ ».

(1) Questo teorema sembra di grande importanza non solo nell'attuale ricerca ma in molte altre, p. e. in certe questioni della teoria dei gruppi.

Come conseguenze di essa notiamo anzitutto le due proposizioni: « Tutti i sistemi semplicemente infiniti sono simili fra loro »; « Tutti i sistemi simili ad un sistema semplicemente infinito sono pure semplicemente infiniti ».

Ecco ora in qual modo, servendosi del teorema generale or ora riportato, si giunge alle tre operazioni dirette.

Del sistema N noi conosciamo già una rappresentazione simile, quella che serve a ordinarne gli elementi; quindi potremo applicare quel teorema generale nell'ipotesi che Ω sia la serie N e θ sia questa rappresentazione. Per determinare completamente la rappresentazione ψ fa ancora mestieri fissare in N l'elemento corrispondente ad 1: sia tale elemento il numero m diverso da 1.

Siccome la rappresentazione ψ dipende dalla scelta di questo numero m, così noi sostituiremo al simbolo $\psi(n)$ dell'imagine di n un simbolo in cui compaia m e precisamente $m+n$. Chiameremo questo numero *somma* ottenuta dall'*addizione* del numero n al numero m. La condizione I del teorema generale è soddisfatta e le altre due sono espresse nel nostro caso così:

$$m + 1 = m', \quad m + n' = (m + n)';$$

da queste seguono le relazioni

$$m + n = n + m, \; (l + m) + n = l + (m + n)$$

che esprimono le proprietà fondamentali dell'addizione.

Supponiamo ora nel teorema generale che il sistema Ω sia come prima la serie dei numeri N, ma che la rappresentazione θ sia quella individuata dall'eguaglianza $\theta(n) = m + n = n + m$ ove m è un numero fissato ad arbitrio; è ancora arbitraria la scelta dell'imagine di 1, per semplicità noi assumeremo che sia m. La rappresentazione ψ è così determinata. Per mettere in evidenza il numero m da cui essa dipende noi indicheremo con $m \times n$ o con $m.n$ o con mn l'imagine di n e la chiameremo *prodotto* ottenuto colla *moltiplicazione* del numero n pel numero m. Le due ultime condizioni del teorema generale divengono quindi

$$m \,.\, 1 = m', \quad mn' = mn + m;$$

da queste derivano le eguaglianze

$$1.n = n,\ mn = nm,\ l(m + n) = lm + ln,\ (lm)\,n = l(mn).$$

espressioni simboliche delle particolarità della moltiplicazione.

Finalmente supponiamo che nel teorema generale, sempre supponendo $\Omega = N$, si faccia $\theta(n) = an$ (a essendo un numero arbitrario) e $\omega = a$. Nasce così una rappresentazione ψ, in grazia della quale l'imagine di n è un certo numero che (per mettere in evidenza il numero a da cui dipende ψ) si indicherà colla scrittura a^n e col nome di *potenza* della base a di *esponente* n. Le eguaglianze II e III del teorema generale diverranno nel caso attuale:

$$a^1 = a,\ a^{n'} = aa^n = a^n a$$

da queste poi scaturiscono come corollari le altre

$$a^{m+n} = a^m a^n,\ (a^m)^n = a^{mn},\ (ab)^n = a^n b^n.$$

Il procedimento tenuto per definire successivamente l'addizione, la moltiplicazione e l'elevamento a potenza è suscettibile di altre applicazioni; esso conduce, p. e., alla quarta operazione diretta, poi alla quinta, e così via all'infinito.

Ma poichè queste operazioni non sono ancora strumenti abituali per l'analista, non è il caso di fermarcisi. È invece interessante lo stabilire la nozione di « numero degli elementi di un sistema finito » lo si può fare colla definizione seguente:

Se Σ è un sistema finito esiste sempre uno e un solo numero n tale che tutti i numeri della serie N non superiori a n formino un sistema simile a Σ; si dice allora che Σ *consta di* n *elementi* o che n è il *numero degli elementi* di Σ. È facile desumere da questa definizione che « tutti i sistemi simili contengono lo stesso numero di elementi » e che « se il sistema A consta di m elementi e il sistema B di n, il sistema composto A + B ne conterrà $m + n$ se A e B non hanno alcun elemento comune, ne conterrà di meno in caso diverso. » Quest'ultima proposizione permette di passare dalla definizione di addizione precedentemente esposta alla definizione ordinaria.

Vena d'Oro (Belluno), 26 Luglio 1888.

GINO LORIA.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par *Gustav Eneström.* Stockholm, 1888; N. 3.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane pubblicato per cura del professore *G. Battaglini.* Vol. XXVI. Luglio-Agosto, Napoli, 1888.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy*, Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 3e série. Douzième année. N. 9, 10, Septembre, Octobre. Paris, 1888.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert.* 13e Année. N. 1, 2. Paris. M. Nony et C.ie, 17 Rue des Écoles, 1888.

Le Scuole Secondarie eco dell'Associazione nazionale fra gl'insegnanti delle scuole secondarie. Anno V. N. 22, 23, 24. Milano 1888.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). — Serie 2.a Vol. 2. — Luglio, Agosto 1888.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. — Tomo II. Fascicolo 5.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati.* Anno XX. N. 13—16. Firenze, 1888.

AGAMENNONE (G.) e BONETTI (F.) — Sopra un nuovo modello di barometro normale. Nota II. (Rend. R. Acc. Lincei, 1888).

BUSTELLI (A. M.) — L'insegnamento dell'aritmetica della geometria e delle scienze naturali secondo i nuovi programmi ufficiali per le Scuole primarie. — Discorso pronunziato in occasione delle conferenze pedagogiche in Assisi il 14 settembre 1888.

GERBALDI (F.) — Sui sistemi di cubiche gobbe o di sviluppabili di 3a classe stabiliti col mezzo di due cubiche punteggiate proiettivamente (Atti R. Acc. Torino, 1880). — Sopra il significato geometrico del covariante di 9° ordine di una forma cubica ternaria (id. id.). — La superficie di Steiner studiata nella sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche (id. 1881). — Sulla realità dei punti e delle tangenti comuni a due coniche (Cir. mat. Palermo, 1887).

GIULIANI (G.) — Aggiunte ad una memoria del Sig. Kummer (Gior. Battaglini, Vol. XXVI, 1888).

LONGCHAMPS (G. DE). — Sur la transformation orthotangentielle dans le plan et dans l'espace (Buletin de la Société royale des Sciences de Bohème, 1888).

LORIA (G.) — Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque (Gior. Battaglini, Vol. XXVI, 1888). — Notizie storiche sulla Geometria numerativa (Bibliotheca mathematica di G. Eneström, 1888).

LOZZI (G.) — Osservazioni al Regolamento 23 Ottobre 1884 pei ginnasi ed i licei del Regno. Modica 1888.

MARGOLONGO (R.) — Sull'equilibrio di un filo flessibile ed inestensibile (Rend. R. Acc. Napoli, 1888). — Sul teorema di Poisson (id. id.)

MULLER PETTI (G. D.) — Elementi di aritmetica ad uso delle Scuole tecniche, normali e superiori — G. B. Paravia e C. 1889. — Prezzo L. 2.

REGGIO (G. B.) — Complementi d'Algebra per gli allievi degli Istituti tecnici (2° biennio) — Ditta G. B. Paravia e Com. 1888. — Prezzo L. 3,50.

CORREZIONE-AGGIUNTA. — Nella quistione 18 a pag. 152, alla 3a linea, dopo le parole: $a, b, c, \ldots l$ sono numeri primi due a due — si aggiunga — ed n è intero e positivo,.

LE PROPRIETÀ
DELLA SOMMA E DELLA DIFFERENZA ESTESE AI POLINOMI ALGEBRICI.

1. Ammessa la serie naturale dei numeri, si diranno *maggiori* d'un numero dato tutti quei numeri che vengono dopo i esso; e *minori* tutti quelli che gli stanno avanti.

Si dirà *somma* di due numeri quel numero che si ottiene ontando in seguito al primo le unità del secondo; e *somma li più numeri* il resultato che si ottiene contando in seguito alla somma dei primi due le unità del terzo, in seguito alla somma dei primi tre le unità del quarto, e così ia fino all'ultimo numero.

I diversi numeri che compongono una somma diconsi *ermini* o *parti* di essa.

Si chiamerà invece *differenza* di due numeri il resultato che si ottiene contando indietro al primo, denominato *minuendo*, le unità del secondo, detto *sottraendo*.

2. Ciò posto, dalla definizione di somma resulta subito che, se in seguito ad un numero si contano successivamente le unità di molti altri, si ottiene lo stesso risultato che si ricava contando la somma di essi; si ha cioè l'eguaglianza:

$$(1) \qquad a + (b + c) = a + b + c\,;$$

la quale in linguaggio ordinario, enunciasi in questa guisa:

Una somma non si altera, sostituendo ad un termine le sue parti; e, reciprocamente:

Una somma non si altera, sostituendo un termine unico a due o più dei suoi termini.

Questa proprietà dicesi: *proprietà associativa* della somma.

3. Un'altra proprietà della somma è la *commutativa* che si esprime così:

Una somma non si altera cambiando l'ordine delle sue parti.

Tale proposizione, quando si tratti della somma di due soli termini, la si ammette facilmente, considerando che le unità d'un numero, essendo identiche fra loro, *tanto vale contarle in un senso, quanto vale contarle in senso contrario* (*).

Quando invece si tratta della somma di più di due termini, allora la detta proposizione si può dimostrare servendosi della proprietà associativa e della commutativa di due termini, in questa maniera:

$$a + b + c = a + (b + c) = a + (c + b) = a + c + b$$

4. Da queste due proprietà ne derivano altre, tra cui ricorderemo solamente la seguente.

La somma di due o più somme vale la somma unica composta colle parti di ciascuna.

5. Dalla definizione di differenza si ricava: prima, che essa è impossibile quando il sottraendo è maggiore del minuendo; poi, che se alla differenza di due numeri si aggiunge il sottraendo ne vien per somma il minuendo; e, reciprocamente, se un numero è somma di altri due, ciascuno di questi è differenza fra la somma e l'altro numero. Onde si conclude che *una differenza è sempre caratterizzata dalla proprietà di dare il minuendo sommata che sia col sottraendo.*

È quindi abbiamo identicamente:

$$(a - b) + b = a$$

$$(a + b) - b = a;$$

cioè: *il valore d'un numero non si altera aggiungendo prima e poi togliendo, oppure prima togliendo e poi aggiungendo ed esso un altro numero.*

(*) Nel fascicolo III di quest'anno, pag. 71, il *Prof. Amodeo* si è servito di questo Postulato per dimostrare il teorema: *La somma di più termini non si altera se si scrivono i termini nell'ordine inverso.* Sembra a noi che, data la definizione di somma, com'egli l'ha posta al n. 1, ciò non si possa rigorosamente fare senza includere la verità del teorema 2°

6. *L'addizione e la sottrazione sono operazioni invertibili.* Dico cioè che le due espressioni $(a+b)-c$; $(a-c)+b$ hanno sempre lo stesso valore, essendo $a>c$. Ciò si prova aggiungendo c alla seconda espressione e verificando se la somma eguaglia $a+b$. Abbiamo infatti:

$$(a-c)+b+c=(a-c)+c+b=a+b;$$

ond'è vera l'eguaglianza:

$$2) \qquad (a+b)-c=(a-c)+b,$$

finchè $a>c$.

Da essa deriva che, se chiamiamo *polinomi* le espressioni della forma $a+b-c-d+e-f$, ove le sottrazioni si suppongono sempre possibili, anche questi polinomi, come la somma di più termini, godono della proprietà commutativa.

7. E godono anche della proprietà associativa, perocchè abbiamo:

$$3) \qquad a+(b-c)=a+b-c$$

dove $b>c$. Infatti, dalla prima espressione invertendo i termini, si ha:

$$a+(b-c)=(b-c)+a;$$

e, per la proprietà commutativa dei polinomi:

$$(b-c)+a=(b+a)-c=a+b-c;$$

sicchè la 3) risulta dimostrata.

Concludiamo perciò che i polinomi, finchè hanno signignificato, godono delle stesse proprietà delle somme di più termini; talchè per essi sussiste il teorema analogo a quello del n. 4, e cioè:

La somma di due o più polinomi vale un polinomio unico composto coi termini di ciascuno.

8. Questo teorema contiene in sè la regola per l'addizione dei polinomi; vediamo ora di stabilire quella per la sottrazione dei medesimi. A tal uopo basterà dimostrare la verità delle due seguenti eguaglianze:

$$4) \qquad a-(b+c)=a-b-c$$

$$5) \qquad a-(b-c)=a-b+c\,;$$

la qual cosa faremo servendoci della proprietà caratteristica d'una differenza. Si ha infatti:

$$\begin{aligned}(a-b-c)+(b+c)&=a-b-c+b+c\\&=a-b+b-c+c=a\end{aligned}$$

dunque la 4) è giusta.

Abbiamo inoltre:

$$\begin{aligned}(a-b+c)+(b-c)&=a-b+c+b-c\\&=a-b+b+c-c=a\end{aligned}$$

onde è vera anche la 5).

9. Dalla 4) e dalle proprietà dei polinomi ricavasi che:

$$a-b+c+d-e-f=(a+c+d)-(b+c+f)\,;$$

cioè: *Un polinomio vale la differenza tra la somma dei termini preceduti dal segno + e quella dei termini preceduti dal segno −.*

Dalla 4) e dalla 5) insieme ricavasi:

$$(a-b+c-d)-(e+f-g)=a-b+c-d-e-f+g$$

cioè: *La differenza di due polinomi vale un polinomio unico composto dei termini del primo, col segno che hanno, e dei termini del secondo, col segno mutato.*

10. Le eguaglianze 1), 2), 3), 4), 5) sussistono finchè le sottrazioni, ivi indicate, sono possibili. Onde renderle generali converrà dunque vincere quest'impossibilità; la qual cosa faremo estendendo l'idea di numero.

Osserviamo intanto, che la differenza di due numeri si può trovare in due modi: o partendo dal minuendo e contando indietro le unità del sottraendo; o partendo dal sottraendo e contando in avanti tante unità quante ne occorrono per giungere al minuendo. Ora è chiaro che, mentre il primo di questi metodi non è effettuabile che quando il minuendo è maggiore del sottraendo, il secondo invece è sempre effettuabile: contando dal sottraendo al minuendo in avanti, quando il primo è maggiore del secondo. Di maniera che se nell'idea di numero includeremo il verso secondo cui si contano le unità, sarà facile rendere possibili tutte le sottrazioni.

Distingueremo quindi i numeri in *positivi* e *negativi*, chiamando positivi quelli le cui unità si contano in avanti, e, negativi, quelli che risultano da unità contate indietro; e stabilendo d'indicare i primi cogli stessi segni usati fin qui, fatti però precedere dal segno +, espresso o sottinteso; ed i secondi, cogli stessi segni preceduti invece dal segno −. Onde i segni + e − vengono ora ad acquistare un doppio significato: *operativo*, quando indicano l'addizione e la sottrazione; *effettivo*, quando simboleggiano i numeri positivi e negativi.

La serie dei numeri si estenderà ora indefinitamente in un senso coi numeri positivi o assoluti; e, nel senso opposto, coi numeri negativi.

Fra gli uni e gli altri stà lo zero. Con tal serie è evidente che la differenza di due numeri positivi qualunque è sempre possibile.

11. Reso più vasto il significato di numero, conviene estendere anche i concetti di somma e di differenza.

Diremo *somma di due numeri, il risultato che si ottiene, contando a partire dal primo le unità del secondo nello stesso verso secondo cui esso è stato formato*; quindi, in avanti, se il numero è positivo, e, indietro, se il numero è negativo. Nel primo di questi casi, non havvi nulla di diverso da ciò che fu già stabilito col primitivo significato di somma; e, nel secondo caso trovasi questo risultato: *l'addizione d'un numero negativo equivale alla sottrazione del suo valore assoluto*, cioè:

$$a + (-b) = a - b,$$

qualunque sia a.

Si chiamerà invece *differenza di due numeri il resultato che si ottiene contando il secondo, dopo il primo, in senso opposto a quello secondo cui esso è stato formato*. Quindi, se il numero che si vuol sottrarre è positivo, lo conteremo indietro, come nel primitivo significato di differenza; e, se è negativo, lo conteremo in avanti; onde avremo *che la sottrazione d'un numero negativo equivale all'addizione del suo valore assoluto*, cioè:

$$a - (-b) = a + b,$$

qualunque sia a.

E poichè, tanto nel primo come nel secondo caso, la differenza aggiunta al sottraendo produce sempre il minuendo, si conclude *che la proprietà caratteristica d'una differenza rimane invariata*.

12. È necessario vedere ora se anche le proprietà della somma continuano sempre a sussistere. Osserviamo intanto che qualunque somma di numeri positivi e negativi si riduce ad un polinomio di valori assoluti, come quelli già studiati al n. 6 e seguenti, colla differenza che ora tali polinomi hanno sempre un significato. Di guisa che se riusciremo a dimostrare come questi polinomi godono sempre delle due proprietà commutative ed associative, riterremo senz'altro che la somma conserva tutte le sue proprietà, anche col significato più generale che ora le si è attribuito.

La questione dipende totalmente dalla 2). Quest'eguaglianza vale, come già si è visto, finchè $a > c$; quando invece fosse a qualunque, cioè positivo minore di c o negativo, allora è facile vedere che la dimostrazione fatta al n. 6, può sempre ripetersi, quando si ammetta vera l'eguaglianza 1) qualunque sia a; cioè, quando si ammetta che, *qualunque sia il numero positivo o negativo da cui si parte, valga lo stesso contare successivamente in avanti più valori assoluti come contare la loro somma*.

Fatta quest'ammissione, si può ritenere che la 2) valga qualunque sia a, e che quindi i polinomi di valori assoluti godano della proprietà commutativa. Ripetendo poi la dimostrazione del n. 7, si vedrà che gli stessi polinomi godono pure della proprietà associativa.

13. Giunti a questo punto, si dimostra subito che la proprietà commutativa della somma di numeri qualunque sussiste sempre.

Abbiamo infatti:

$$a + (-b) + (-c) + d = a - b - c + d = a - c + d - b$$
$$= a + (-c) + d + (-b).$$

Avendosi inoltre:

$$a + [(-b) + (-c) + d] = [(-b) + (-c) + d] + a$$
$$= (-b) + (-c) + d + a$$
$$= a + (-b) + (-c) + d,$$

si deduce che anche la proprietà associativa sussiste sempre.

Laonde, avendo già veduto che le eguaglianze 1), 2), 3), 4), 5) con tutte le conseguenze che se ne ricavano, si deducono dalle proprietà fondamentali della somma e della differenza, senza stare ora a riportare le stesse dimostrazioni che hanno servito a stabilirle, riterremo che le dette eguaglianze valgano per tutti i numeri, positivi e negativi.

E allora, se colla parola *polinomio* intendiamo qualunque espressione della forma $a + b - c - d + e$, dove le lettere stanno a rappresentare numeri qualunque, positivi o negativi, diremo che questi polinomi godono della proprietà commutativa ed associativa, e che per essi valgono tutte le proprietà dei polinomi di valori assoluti, e quindi anche le regole d'addizione e di sottrazione dei medesimi.

M. Gremigni.

TEMI DI MATEMATICA
PER LA LICENZA D'ISTITUTO TECNICO
NELLA SEZIONE *FISICO-MATEMATICA* (*)

ESTATE 1872, 1°). — *È dato un recipiente avente la forma di un cono retto, il quale contiene dell'acqua che s'innalza fino ad un'altezza pure data.* D = 8^m *ed* H = 3^m *sono rispettivamente il diametro della base e l'altezza del cono,* h = 1^m *è l'altezza dell'acqua.*

Si domanda il raggio x *d'una sfera di metallo che immersa nel liquido ne faccia sollevare il piano di livello fino a che questo divenga tangente alla sfera medesima.*

Il volume dell'acqua nel recipiente sarà: $\frac{\pi h^3 D^2}{12 H^2}$, quello della sfera: $\frac{4}{3}\pi x^3$. L'altezza h_1 dell'acqua dopo l'immersione della sfera potrà ottenersi osservando che coll'immaginare una sezione meridiana del cono si ha un triangolo rettangolo di cui un vertice A è il vertice del cono, un altro vertice B (quello dell'angolo retto) è il punto di tangenza della superficie di livello dell'acqua colla sfera e il terzo vertice è uno dei punti C in cui la traccia di questa sezione incontra il lato del cono, nel quale la retta congiungente C col centro O della sfera è bisettrice dell'angolo ACB. Sarà quindi:

$$AB : x = AC + CB : CB = D + \sqrt{D^2 + 4H^2} : D$$

donde:

$$AB = h_1 = \frac{x}{D}\left(D + \sqrt{D^2 + 4H^2}\right) = \frac{x}{D} \cdot \alpha.$$

(*) Crediamo fare cosa grata ai professori ed alunni degli Istituti tecnici [publ]icando quei temi proposti per esame di licenza dalla sezione *fisico-matematica* che ci parvero maggiormente meritevoli di sviluppo, scegliendoli fra [quel]li della collezione purtroppo incompleta che possediamo.

Il raggio della base del cono d'acqua, dopo l'immersione della sfera, essendo poi $\frac{h_1 D}{2H}$, l'equazione che serve alla determinazione di x sarà:

$$h_1^3 D^2 = 16H^2 x^3 + h^3 D^2,$$

ovvero sostituendo ad h_1 il valor precedente poi ricavando x:

$$x = \frac{hD}{\sqrt[3]{\alpha^3 - 16H^2 . D}}.$$

Questa formola mostra che x è sempre reale, ma è facile anche vedere che $x > 0$. Infatti si ha:

$$\alpha^3 = [D + \sqrt{D^2 + 4H^2}]^3 = 12H^2 D + 4H^2\sqrt{D^2 + 4H^2} + 4D^3 + 4D^2\sqrt{D^2 + 4H^2}$$

e poichè $\sqrt{D^2 + 4H^2} > D$, segue $\alpha^3 > 16H^2 D$.

Il raggio della sfera pel caso numerico proposto è $0^m,4772$.

Estate, 1877, Ia). — *La longitudine di Roma all' ovest di Berlino è* 0,003, *e quella di Vienna all'est della stessa città è* 0,008: *supposte le longitudini espresse in parti decimali del giorno* (= 360°). *Le latitudini di Roma e Vienna, espresse in gradi e parti decimali di grado, sono rispettivamente* 41,902 *e* 48,210. — *Calcolare la minima distanza tra Roma e Vienna, nell'ipotesi che la superficie terrestre sia sferica.*

Risposta: Cm. 765, 123.

Estate 1877, IIb), — *Dimostrare che i punti di concorso delle mediane delle facce d'un tetraedro sono i vertici d'un altro tetraedro, simile al dato — Trovare il rapporto dei loro volumi.*

Sia ABCD un tetraedro e conducansi le mediane BC'', BD'' delle due facce ABD, ABC, sarà $C''D''$ parallela a DC ed uguale ad $\frac{1}{2}$DC. Se si prendono ora sulle due mediane considerate, quei punti C', D' tali che $BC' = 2C'C''$, $BD' = 2D'D''$, C' e D' saranno i baricentri delle facce ABD, ABC, e vertici dell' altro tetraedro, e si avrà $C'D'$ parallela a $C''D''$ e $C'D' = \frac{2}{3} C''D''$, onde $C'D'$ parallela a CD ed $= \frac{1}{3}$ DC. In modo analogo si dimostra che gli altri spigoli del nuovo tetraedro sono tutti paralleli ai rispettivi altri spigoli del primo e perciò i due tetraedri hanno le facce simili e sono simili l'uno all' altro.

Il rapporto dei volumi dei due solidi, uguale a quello del cubo degli spigoli omologhi, sarà $\overline{C'D'}^3 : \overline{CD}^3 = 1 : 27$.

Estate, 1878, IIb). — *In quanti triangoli differenti può esser diviso un poligono di n lati per mezzo di diagonali, un lato almeno del poligono essendo sempre uno dei lati dei triangoli?*

Risposta: $n(n-3)$.

Autunno 1878, Ib). — *Dividere un numero 2a in due parti tali, che la somma dei quozienti di ciascuna parte divisa per l'altra sia un minimo.*

Chiamando s la somma dei quozienti di ciascuna parte divisa per l' altra ed x una delle parti, l' equazione dalla quale si determinerà x, sarà: $\frac{x}{2a-x} + \frac{2a-x}{x} = s$, da cui $x = a \pm \sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{2+s}}$. Ora poichè x sia reale conviene che si abbia $\frac{4}{2+s} \leqq 1$, ovvero $s \geqq 2$. Al minimo valore 2 di s corrispondendo ora i valori $x = a$, $2x - a = a$, segue che « Un numero è diviso in due parti tali che la somma dei quozienti di ciascuna parte divisa per l'altra è un minimo, quando queste parti sono uguali ».

Estate 1879, Ia). — *Trovare una progressione per quoziente, data la somma de' suoi termini, la somma dei loro quadrati, e la somma dei loro cubi.*

Sia a il primo termine della progressione, q la ragione, n il numero dei termini, A la loro somma, B quella dei loro quadrati e C quella dei loro cubi. Sarà:

$$A = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}; \quad B = \frac{a^2(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1}, \quad C = \frac{a^3(q^{3n} - 1)}{q^3 - 1},$$

talchè dall' eliminazione di a si avranno le equazioni:

$$\frac{B}{A^2}=\frac{q^n+1}{q^n-1}\cdot\frac{q-1}{q+1}=\frac{z+1}{z-1}\cdot\frac{q-1}{q+1};$$

$$\frac{C}{A^3}=\frac{q^{2n}+q^n+1}{q^{2n}-2q^n+1}\cdot\frac{(q-1)^2}{q^2+q+1}=\frac{z^2+z+1}{z^2-2z+1}\cdot\frac{(q-1)^2}{q^2+q+1},$$

avendo posto $q^n=z$.

Ricavando z dalla prima si ha:

$$q^n=z=\frac{B(q+1)+A^2(q-1)}{B(q+1)-A^2(q-1)},$$

e sostituendo questo valore nella seconda risulta l'equazione:

$$4AC\,(q^2+q+1)=3B^2(q+1)^2+A^4(q-1)^2$$

che è di secondo grado rispetto a q e dalla quale può ricavarsi questa quantità. Facendo il calcolo si ottiene:

$$(1)\qquad q=\frac{3B^2-2AC-A^4\pm 2\sqrt{3A(B^2-AC)(C-A^3)}}{4AC-3B^2-A^4}.$$

Il primo termine a si deduce immediatamente dalla $a=\frac{A(q-1)}{q^n-1}$, sostituendo a q^n il valore precedentemente determinato ed ha per espressione

$$a=\frac{B(q+1)-A^2(q-1)}{2A}.$$

Il numero dei termini potrà finalmente dedursi dalla relazione

$$n\log q=\log\frac{B\dfrac{q+1}{q-1}+A^2}{B\dfrac{q+1}{q-1}-A^2}$$

sostituendo a $\log q$ il valore che si ha prendendo il logaritmo del 2^o membro della (1) ed a q il valore (1) medesimo.

La condizione da soddisfare affinchè il valore di q sia reale è che si abbia o $B^2>AC>A^4$ oppure $B^2<AC<A^4$, quella

da verificarsi perchè n sia intero è evidentemente che $\frac{B(q+1)+A^2(q-1)}{B(q+1)-A^2(q-1)}$ sia una potenza intera positiva di q.

Estate 1879, IIa). — *Trovare due numeri di cui è data la somma* 2s, *e la somma o la differenza delle loro quarte potenze* 2q.

a). Chiamando x uno dei numeri cercati, l'equazione a cui dà luogo il problema è, nel caso in cui sia data la somma delle loro quarte potenze:

$$x^4 + (2s - x)^4 = 2q$$

ovvero:

$$x^4 - 4sx^3 + 12s^2x^2 - 16s^3x + 8s^4 = q.$$

Per risolvere quest' equazione di quarto grado si faccia scomparire il termine di 3° grado ponendo $x = y + z$ poi determinando convenientemente z. Con la sostituzione si ricava:

$$y^4 + 4(z-s)\,y^3 + 6(z^2 - 2sz + 2s^2)\,y^2 + 4(z^3 - 3sz^2 + 6s^2z - 4s^3)y \\ + z^4 - 4sz^3 + 12s^2z^2 - 16s^3z + 8s^4 = q,$$

onde il valore da darsi a z è quello che annulla il coefficiente di y^3, ossia $z = s$, talchè $x = y + s$. L'equazione precedente diviene dopo ciò

$$y^4 + 6s^2y^2 + s^4 = q,$$

quindi

$$x = y + s = s \pm \sqrt{-3s^2 \pm \sqrt{8s^4 + q}}.$$

Dei quattro valori compresi nella formola precedente quelli corrispondenti al segno — davanti al secondo vincolo radicale sono da rifiutare poichè darebbero per x valori immaginari. Rimangano quindi a considerare i due seguenti:

$$x = s \pm \sqrt{-3s^2 + \sqrt{8s^4 + q}}.$$

Perchè questi siano reali conviene intanto che si abbia $q \geq s^4$. Consideriamo i due casi. Se $q = s^4$ risulta $x = s$, onde i due numeri sono uguali. Quando poi sia $q > s^4$ allora i valori di x sono reali e differenti e ponendo $q = s^4 . \alpha$, dove $\alpha > 1$, essi possono scriversi:

$$x = s\left\{1 \pm \sqrt{-3+\sqrt{8+\alpha}}\right\},$$

onde i due numeri cercati saranno

$$s\left\{1 + \sqrt{-3+\sqrt{8+\alpha}}\right\}, \quad s\left\{1 - \sqrt{-3+\sqrt{8+\alpha}}\right\}.$$

b). Nel caso poi in cui sia data la differenza delle quarte potenze dei due numeri l'equazione del problema è:

$$x^4 - (2s - x)^4 = 2q,$$

dove x rappresenta il numero maggiore, ovvero

$$4sx^3 - 12s^2x^2 + 16\, s^3x - 8s^4 = q.$$

Facendo sparire il termine di 2° grado col porre, come precedentemente, $x = y + s$, per determinare y si ha l'equazione cubica

$$(1) \qquad y^3 + s^2y - \frac{q}{4s} = 0.$$

Per risolverla col metodo di *Tartaglia*, pongasi $y = u + v$, poi si determini v in modo che scompaia il secondo termine dell'equazione risultante, ossia facciasi $v = -\dfrac{s^2}{3u}$. Con ciò l'equazione proposta si riduce alla seguente

$$u^3 + v^3 - \frac{q}{4s} = 0 \qquad \text{ossia:} \qquad u^6 - \frac{q}{4s}u^3 - \frac{s^6}{27} = 0,$$

quindi

$$u^3 = \frac{q}{8s} \pm \sqrt{\frac{q^2}{64s^2} + \frac{s^6}{27}}, \qquad v^3 = \frac{q}{4s} - u^3 = \frac{q}{8s} \mp \sqrt{\frac{q^2}{64s^2} + \frac{s^6}{27}},$$

da cui deducesi $uv = -\dfrac{s^2}{3}$.

Le radici della (1) sono per conseguenza

$$y = x - s = \left\{\frac{q}{8s} + \sqrt{\frac{q^2}{64s^2} + \frac{s^6}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{\frac{q}{8s} - \sqrt{\frac{q^2}{64s^2} + \frac{s^6}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

Siccome ogni quantità ha tre radici cubiche, sarebbero nove i valori che si otterrebbero per x, ma tre soli sono accettabili. Per determinare questi ultimi basta come è noto osservare che posto $\beta = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$, le tre radici cubiche di 1 sono 1, β e β^2, onde dinotando con m una delle radici cubiche di u^3, ossia di $\frac{q}{8s} + \sqrt{\frac{q^2}{64s^2} + \frac{s^6}{27}}$ le due altre saranno $m\beta$ ed $m\beta^2$ e dinotando con n una delle radici di v^3 le altre saranno $n\beta$ ed $n\beta^2$. Supponendo che m ed n siano prese in modo da soddisfare la condizione che sia $uv = -\frac{s^2}{3}$, come richiede il procedimento seguìto, i valori di y da accettare saranno solo quelli corrispondenti alle coppie seguenti di valori per u e v:

$$u = m,\ v = n\,;\ u = \beta m,\ v = \beta^2 n\,;\ u = \beta^2 m,\ v = \beta n.$$

Ora essendo reali le espressioni di u^3 e v^3, poichè la quantità sotto ai vincoli radicali è necessariamente positiva, i valori cercati di x si riducono a quello solo che si ha prendendo $u = m$, $v = n$ nell'ipotesi che m ed n rappresentino i valori aritmetici delle radici cubiche di u^3 e v^3, giacchè per le due altre coppie di valori di u e v, x sarebbe immaginaria e non può essere $\frac{q^2}{64s^2} + \frac{s^6}{27} = 0$. Il problema anche in questo caso ha dunque un'unica soluzione, quella per la quale i numeri cercati hanno i valori:

$$s + m + n\,;\quad s - m - n.$$

Osservazione. — Il primo caso del problema, quello cioè in cui è data, oltre alla somma dei due numeri, la somma delle loro quarte potenze, potevasi anche far dipendere dalla risoluzione d'una equazione di 2° grado in modo più elementare, osservando che

$$(x+y)^4 = x^4+y^4+4x^3y+4xy^3+6x^2y^2 = x^4+y^4+4xy(x+y)^2-2x^2y^2,$$

onde chiamando x ed y i numeri cercati, si può determinare xy risolvendo l'equazione di 2° grado

$$16s^4 = 2q + 16s^2\,(xy) - 2(xy)^2.$$

Trovato xy si conosce la somma ed il prodotto dei due numeri ed allora è facile avere i numeri stessi. A. Lugli.

TEOREMI SUL TRONCO DI PRISMA

I.

Sia il quadrilatero convesso ABCD la base d' un tronco di prisma retto, e sieno $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$, $DD_1 = d$ gli spigoli laterali; sia inoltre P il punto d' incontro delle diagonali della base, e OO_1 il segmento parallelo agli spigoli laterali e terminato ai due piani ABCD e $A_1B_1C_1D_1$. Posto

$$\text{area ABCD} = S, \quad \frac{OC}{OA} = h, \quad \frac{OD}{OB} = k,$$

sarà

$$\text{area DCB} = \frac{h}{h+1} S, \quad \text{area ADB} = \frac{1}{h+1} S,$$

$$\text{area ADC} = \frac{k}{k+1} S, \quad \text{area ACB} = \frac{1}{k+1} S,$$

epperciò, indicando con V il volume del tronco, si troverà

$$V = \frac{h}{h+1} S \cdot \frac{b+c+d}{3} + \frac{1}{h+1} S \cdot \frac{a+b+d}{3} \qquad (1)$$

ed anche

$$V = \frac{k}{k+1} S \cdot \frac{a+c+d}{3} + \frac{1}{k+1} S \cdot \frac{a+b+c}{3} \qquad (2)$$

Eguagliando queste due espressioni di V si ottiene, dopo alcune riduzioni,

$$\frac{c+ah}{1+h} = \frac{d+bk}{1+k} \qquad (3)$$

la quale relazione si può altresì dimostrare eguagliando le due espressioni del segmento OO_1 che si ricavano dai due trapezi ACA_1C_1, BDB_1D_1; e questa seconda dimostrazione è indipendente dall'ipotesi che gli spigoli laterali AA_1, BB_1, CC_1 DD_1 sieno perpendicolari alla base ABCD.

Ora se la base è un parallelogramma si ha $h = k = 1$, e dalle (3) (1) si ricava

$$a + c = b + d, \quad V = S\,\frac{a + b + c + d}{4};$$

si hanno così i due teoremi:

1. *Nel tronco di parallelepipedo la somma di due spigoli laterali opposti è eguale alla somma degli altri due spigoli laterali.*

2. *Il volume d'un tronco di parallelepipedo retto è dato dal prodotto dell' area della base per la media aritmetica degli spigoli laterali.*

Supponiamo ora che il quadrilatero ABCD sia diviso dalla diagonale BD in due triangoli equivalenti, e che il volume del tronco sia dato dal prodotto dell' area della base per la media aritmetica degli spigoli laterali. In tali ipotesi sarà

$$h = 1, \quad V = S.\,\frac{a + b + c + d}{4}$$

epperciò si avrà dalla (1)

$$S.\,\frac{a + b + c + d}{4} = \frac{1}{2}\,S.\,\frac{b + c + d}{3} + \frac{1}{2}\,S.\,\frac{a + b + d}{3}$$

cioè

$$a + c = b + d,$$

e in conseguenza la (3) diverrà

$$\frac{d + bk}{k + 1} = \frac{b + d}{2}$$

ossia

$$(d - b)\ (k - 1) = 0,$$

la quale richiede che sia $k = 1$, oppure $d = b$; perciò si ha il teorema:

3.° *Se la base d'un tronco di prisma retto quadrangolare è divisa da una diagonale in due triangoli equivalenti, e se il volume di quel tronco è dato dal prodotto dell'area della base per la media aritmetica degli spigoli laterali, la base dev'essere un parallelogramma, oppure devono es-*

sere eguali fra loro i due spigoli laterali che partono dagli estremi di quella diagonale.

Sia ABCD un trapezio del quale sieno AB e CD i lati paralleli, e si supponga inoltre che il volume del tronco sia dato dal prodotto dell'area della base per la media aritmetica degli spigoli laterali. Dall' ipotesi risulta

$$k = h, \qquad 2V = S \cdot \frac{a+b+c+d}{2};$$

perciò addizionando le (1) (2) si avrà

$$\frac{h}{h+1}\,S \cdot \frac{a+b+2c+2d}{3} + \frac{1}{h+1}\,S \cdot \frac{c+d+2a+2b}{3} = S \cdot \frac{a+b+c+d}{2}$$

e quindi

$$(h-1)\,(c+d) = (h-1)\,(a+b).$$

Perciò escluso il caso di $h = 1$, nel quale la base sarebbe un parallelogramma, dovrà essere

$$c+d = a+b.$$

Si ha dunque il teorema :

4. *Se un tronco di prisma retto ha per base un trapezio, e se il suo volume è dato dal prodotto dell'area della base per la media aritmetica degli spigoli laterali, la somma di due spigoli laterali passanti per gli estremi d'uno dei lati paralleli di quel trapezio dev'essere eguale alla somma degli altri due spigoli laterali.*

II.

5. *Se la base d'un tronco di prisma retto è un poligono di numero pari di lati nel quale i lati opposti sieno a due a due eguali e paralleli, il volume di quel tronco si ottiene moltiplicando l'area della base per la media aritmetica degli spigoli laterali.*

Sia ABC . . . A'B'C' . . . la base, e sieno $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$, . . . $A'A'_1 = a_1$, $B'B'_1 = b_1$, $C'C'_1 = c_1$, . . . gli spigoli laterali. Poichè i lati opposti del poligono base sono eguali e paralleli, le congiungenti i vertici opposti passeranno per uno stesso punto O, punto medio di ciascuna di esse; perciò indicando con m la misura di quel segmento OO_1 parallelo agli spigoli laterali, che parte da O ed è terminato al piano della sezione obliqua, i trapezi $AA'A_1A'_1$, $BB'B_1B'_1$, $CC'C_1C'_1$, . . . daranno

$$2m = a + a_1 = b + b_1 = c + c_1 = \ldots.$$

dalle quali risulta

$$4m = a + b + a_1 + b_1 = b + c + b_1 + c_1 = \ldots$$

e risulta pure che m è la media aritmetica delle a, b, c, . . a_1, b_1, c_1 . .

Ora considerando i tronchi di prismi triangolari $OABO_1A_1B_1$, $OA'B'O_1A'_1B'_1$, $OBCO_1B_1C_1$, $OB'C'O_1B'_1C'_1$, ecc. si ottiene

$$\text{Vol. } OABO_1A_1B_1 + \text{Vol. } OA'B'O_1A'_1B'_1 = \tfrac{1}{3}\,\text{area}\, OAB.(a+b+a_1+b_1+2m)$$
$$= 2\,\text{area}\, OAB.m,$$

$$\text{Vol. } OBCO_1B_1C_1 + \text{Vol. } OB'C'O_1B'_1C'_1 = 2\,\text{area}\, OBC.m,$$

e l'altre analoghe; perciò è chiaro che il volume del tronco $ABC \ldots A'B'C'A_1B_1C_1 \ldots A'_1B'_1C'$, sarà dato dal prodotto

$$\text{area } ABC..A'B'C'.m$$

6. *Se una base d'un tronco di prisma è un poligono regolare, il segmento parallelo agli spigoli laterali, condotto pel centro di quel poligono e terminato alle due basi, è eguale alla media aritmetica degli spigoli laterali.*

Se la base ha un numero pari di lati, il teorema risulta da quanto è stato dimostrato al N.° precedente. Sia ora la base un poligono regolare di un numero dispari di lati, p. e. il pentagono ABCDE. Sia O il centro del poligono e sieno A', B', C'. . . i punti in cui le congiungenti il centro coi vertici A, B, C . . . incontrano i lati rispettivamente opposti CD, DE, EA, . . Considerando il trapezio $AA_1A'A'_1$ nel quale è il segmento OO_1 parallelo ai lati paralleli, e ponendo

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{BO}{OB'} = \ldots = k,$$

si ottiene

$$\frac{m - a}{A'A'_1 - m} = k\,,$$

ma dal trapezio CDC_1D_1, essendo A′ il punto medio di CD, risulta

$$A'A'_1 = \frac{c + d}{2}$$

perciò sarà

$$\frac{m - a}{\frac{c + d}{2} - m} = k$$

e quindi

$$m\,(1 + k) = a + \frac{k}{2}\,(c + d).$$

Si otterrà in modo analogo

$$m\,(1 + k) = b + \frac{k}{2}\,(d + e)$$

$$m\,(1 + k) = c + \frac{k}{2}\,(e + a)$$

$$m\,(1 + k) = d + \frac{k}{2}\,(a + b)$$

$$m\,(1 + k) = e + \frac{k}{2}\,(b + c)$$

le quali cinque eguaglianze addizionate, danno

$$5m(1 + k) = a + b + c + d + e + \frac{k}{2}\,(2a + 2b + 2c + 2d + 2e)$$

cioè $$5m = a + b + c + d + e.$$

7. *Se un tronco di prisma retto ha per base un poligono regolare, il suo volume è dato dal prodotto dell'area della base per la media aritmetica degli spigoli laterali.*

Questo è un caso particolare del teorema 5. quando la base ha un numero pari di lati. Quando la base ha un numero dispari di lati il teorema si dimostra mediante la decomposizione nei prismi triangolari $OABO_1A_1B_1$, $OBCO_1B_1C_1$, ... e l'applicazione del teorema 6.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

Sui triangoli simili.

1. Dal punto B′, medio del lato AB del triangolo ABC, è condotta la parallela al lato BC la quale incontra il lato AC in C′, e dal punto C′ la parallela al lato AB la quale incontra BC in A′. Provare che i due triangoli AB′C′, CC′A′ sono fra loro eguali.
2. Dai punti B′ e B″ che dividono in tre parti eguali il lato AB del triangolo ABC sono condotte le parallele al lato BC le quali incontrano il lato AC nei punti C′ e C″. Provare che i segmenti AC′, C′C″, C″C sono fra loro eguali. In quale caso i segmenti AC′, C′C″, C″C sono eguali ai segmenti AB′, B′B″, B″B?
3. Sulla retta LM sono i segmenti fra loro eguali AB, BC, CD, DE, ... e dai punti A, B, C, D, .. sono condotte tante rette fra loro parallele fino ad incontrare in A′, B′, C′, D′... la retta L′M′. Provare che i segmenti A′B′, B′C′, C′D′, .. sono tutti fra loro eguali. Quando accade che i segmenti A′B′, B′C′, ... sieno eguali ai segmenti AB, BC, CD, ...?
4. Dai punti ABC della retta LM sieno condotte tre rette fra loro parallele fino ad incontrare in A′, B′, C′ l'altra retta L′M′. Provare: 1) che se BC è $\frac{7}{15}$ di AB, dev'essere anche B′C′ $\frac{7}{15}$ di A′B′; 2) che se la BC è maggiore del segmento che contiene 397 volte la millionesima parte della AB, ma minore di quello che la contiene 398 volte, anche B′C′ dev'essere maggiore di 397 volte la millionesima parte di A′B′ e minore di 398 volte questa millionesima parte.
5. Dal punto B′ del lato AB del triangolo ABC sia condotta la parallela al lato BC fino al punto C′ in cui essa incontra il lato AC. Provare che se la AB′ contiene 17 volte la ventinovesima parte della BB′, la B′C′ deve contenere 17 volte la quarantaseiesima parte della BC.
6. Nei triangoli ABC, A′B′C′ sia l'angolo A = A′, e l'angolo B = B′. Provare che, se il triangolo A′B′C′ viene collo-

cato in modo che i lati A'B', A'C' cadano rispettivamente sulle rette AB, AC, la B'C' risulta parallela alla BC.

7. Due triangoli isosceli hanno eguale l'angolo al vertice, e la base dell'uno è $\frac{17}{29}$ di quella dell' altro. Trovare il rapporto delle altezze dei due triangoli, e quello dei loro perimetri.

8. Sia ABC un triangolo rettangolo in B, e dal punto L del cateto BC si conduca la LH perpendicolare all' ipotenusa AC. Dati: $AB = 7$, $LH = 3$, $LC = 6$, trovare la lunghezza della AC.

9. Dal vertice A dell' angolo retto d' un triangolo rettangolo BAC si guida la AM perpendicolare all'ipotenusa. Date le lunghezze: $AC = 60$, $AB = 80$, trovare quelle dei due segmenti BM e CM, e della perpendicolare AM.

10. Dagli estremi A e B d'un segmento si guidano ad esso, ma da bande opposte, le perpendicolari, le quali vengono incontrate nei punti A' e B' da una retta passante per un punto C del segmento AB. Date: $A'C = 3$, $CB' = 7$, $AB = 30$, calcolare le lunghezze AC e CB.

11. Dimostrare che il rapporto di due lati d'un triangolo è l'inverso del rapporto delle corrispondenti altezze.

12. Nei triangoli ABC, A'B'C' sia l'angolo $A = A'$, AB eguale a $\frac{7}{18}$ di A'B', e $AC = \frac{7}{18}$ di A'C'. Provare che, trasportato il triangolo A'B'C' in guisa che il lato A'B' cada sulla AB e il lato A'C' sulla AC, la B'C' deve risultare parallela a BC.

13. Sieno i punti D, E l'uno sul lato AB del triangolo ABC, e l'altro sul lato AC. Se il rapporto di AD ad AC è eguale al rapporto di AE ad AB, è necessario che la DE sia parallela alla BC?

14. Sia BAC un triangolo rettangolo in A e DEF un triangolo rettangolo in D, e sia AB eguale a $\frac{17}{25}$ di DE, e AC eguale a $\frac{17}{25}$ di DF. Se la EF viene divisa in 100 parti eguali, quante di esse saranno contenute nella BC?

15. Un cateto d'un triangolo rettangolo è $\frac{7}{25}$ dell'ipotenusa;

in un altro triangolo rettangolo il rapporto d'un cateto all'ipotenusa è $\frac{24}{25}$. Provare che il minor angolo del primo triangolo è eguale al minor angolo del secondo.

16. Nei triangoli ABC, $A'B'C'$ sia AB eguale a $\frac{18}{8}$ di $A'B'$, BC eguale a $\frac{18}{8}$ di $B'C'$, e CA eguale a $\frac{18}{8}$ di $C'A'$. Provare che, se il triangolo $A''B''C''$ ha l'angolo $A'' = A'$, $A''B'' = AB$, e $A''C'' = AC$, quel triangolo dev'essere eguale al triangolo ABC.

17. Nei triangoli ABC, DHL sia AB eguale a $\frac{19}{20}$ di HL, BC eguale a $\frac{19}{20}$ di LD, e HD eguale a $\frac{20}{19}$ di AC. Provare che l'angolo A è eguale all'angolo H, e l'angolo B all'angolo L.

18. Gli angoli del triangolo ABC sono eguali a quelli del triangolo DEF, ed è il lato AB eguale al lato DE. È necessario che i due triangoli sieno eguali?

19. Trovare due triangoli diseguali i quali abbiano cinque elementi eguali.

20. Nei triangoli ABC, DEF è l'angolo $A = D$, l'angolo $B = E$, e il lato BC doppio di EF. Decomporre il triangolo ABC in quattro triangoli eguali a DEF.

21. Nei triangoli ABC, DEF è l'angolo $A = D$, l'angolo $B = E$, e il lato BC triplo di EF. Provare che il triangolo ABC contiene nove triangoli eguali a DEF.

22. Gli angoli del triangolo ABC sono eguali a quelli del triangolo DEF, e il maggior lato del primo triangolo è $\frac{8}{7}$ del maggior lato del secondo. Trovare il rapporto dell'area ABC all'area DEF.

23. Gli angoli del triangolo ABC sono eguali a quelli del triangolo DEF, e il maggior lato del primo contiene n volte il maggior lato del secondo. Provare che il triangolo ABC contiene tanti triangoli eguali a DEF quant'è la somma

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1),$$

e che questa somma è eguale ad n^2.

24. Un triangolo rettangolo ha un angolo di 32° e l'ipotenusa di 25 metri; un altro triangolo rettangolo ha pure un angolo di 32° ma l'ipotenusa di 42 metri. Se il pe-

rimetro del primo triangolo è diviso in 100 parti eguali, quante di esse saranno contenute nel perimetro del secondo? Se l'area del primo triangolo è divisa in 10000 parti eguali, quante di esse saranno contenute nell'area del secondo?

25. Un triangolo isoscele ha l'angolo al vertice di 37° 15′ e l'area di m.q. 1,5625; un altro triangolo isoscele ha pure l'angolo al vertice di 37°15′, ma l'area di decimetri quadrati 187,69. Se la base del primo triangolo è divisa in 1000 parti eguali, quante di esse saranno contenute nella base del secondo?

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 8, 12, 13 E 14.

(8) — *Se un pentagono ha la proprietà che le congiungenti i vertici ai punti di mezzo dei lati rispettivamente opposti passino per uno stesso punto, e sieno in questo punto divise in modo che il rapporto delle sue distanze da un vertice e dal punto di mezzo del lato opposto sia eguale per tutte, quel rapporto deve avere lo stesso valore che gli corrisponde nel pentagono regolare convesso o stellato.* (D. Besso).

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi* (*):

Sia $A_1A_2 .. A_5$ il pentagono; $B_1, B_2, . . , B_5$ i punti di mezzo dei lati che si oppongono ad $A_1, A_2, ..., A_5$; O il il punto in cui concorrono le A_1B_1, A_2B_2,... e sia

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2} = ... = k$$

essendo k una costante positiva o negativa.

I pentagoni $A_1A_2 .. A_5$ e $B_1B_2 . B_5$ sono omotetici direttamente o inversamente secondo che $k \gtrless 0$, e quindi $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = k$; ma nel triangolo $A_3A_4A_5$, $\frac{B_1B_2}{A_3A_5} = \frac{1}{2}$ dunque $\frac{A_1A_2}{A_3A_5} = \frac{k}{2}$: così

(*) Una dimostrazione consimile è stata inviata dal Prof. *G. Riboni.*

ogni lato del pentagono è parallelo ad una diagonale e tra loro sussistono le seguenti proporzioni vere pei valori algebrici dei segmenti

$$\frac{A_1A_2}{A_3A_5}=\frac{A_2A_3}{A_4A_1}=\frac{A_3A_4}{A_5A_2}=\frac{A_4A_5}{A_1A_3}=\frac{A_5A_1}{A_2A_4}=\frac{k}{2}\qquad(\alpha)$$

Se k è negativa A_1A_5, A_2A_3 sono paralleli e diretti nello stesso senso di A_2A_4, A_1A_4, dunque i cinque vertici sono in uno stesso piano e A_1, A_3 cadono con A_4 dalla stessa banda del lato A_1A_2; se k è positiva, cadono da bande opposte: la quale osservazione ripetuta pei singoli lati permette di conchiudere che il pentagono proposto è piano, e convesso o stellato secondo che $k \lesseqgtr 0$.

Se le diagonali A_1A_3, A_2A_5, prolungate se è necessario, si tagliano in S, il quadrangolo $A_3A_4A_5S$ è parallelogramma, quindi SA_5 è equipollente ad A_3A_4 e da (α)

$$\frac{SA_5}{A_5A_2}=\frac{k}{2};$$

e poichè A_1A_2, A_3A_5 sono parallele, i triangoli A_1A_2S, A_3A_5S sono simili e per (α)

$$\frac{A_2S}{A_5S}=\frac{A_1A_2}{A_3A_5}=\frac{k}{2}.$$

Le ultime proporzioni permettono di scrivere

$$\frac{A_2S}{A_5S}=\frac{SA_5}{A_5A_2}=\frac{k}{2}\qquad(\beta)$$

da cui, essendo $A_2S+SA_5=A_2A_5$,

$$\frac{A_2A_5}{A_5S+A_5A_2}=\frac{k}{2},$$

quindi, invertendo e componendo,

$$\frac{A_5S}{A_2A_5}=\frac{k+2}{k}$$

e confrontando con (β)

$$\frac{k}{2}=\frac{k+2}{k}$$

epperciò $k = \sqrt{5} + 1$ oppure $k = 1 - \sqrt{5}$ secondo che k è positiva o negativa.

In un pentagono piano regolare convesso o stellato si verificano le condizioni supposte nel teorema, dunque in esso k ha il valore testè determinato.

(12) — *Dimostrare che la potenza* n^{a} *della media aritmetica delle radici* n^{e} *di più numeri positivi diminuisce al crescere di* n. (D. Besso).

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi*:

Sia n intero e positivo, a, b positivi e $a > b$. Pongo

$$F = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}, \quad x = \frac{(a-b)b^n}{a^n + b^n}, \quad y = \frac{(a-b)a^n}{a^n + b^n}.$$

Dividendo membro a membro la prima per la seconda delle seguenti identità

$$a^n - F^n = (a - F)\ (F^{n-1} + aF^{n-2} + \ldots + a^{n-1})$$
$$F^n - b^n = (F - b)\ (F^{n-1} + bF^{n-2} + \ldots + b^{n-1}),$$

e notando che

$$\frac{a - F}{F - b} = \frac{x}{y} = \frac{b^n}{a^n},$$

si ottiene

$$\frac{a^n - F^n}{F^n - b^n} = \frac{b^n F^{n-1} + ab^n F^{n-2} + \ldots + a^{n-1}b^n}{a^n F^{n-1} + a^n b F^{n-2} + \ldots + a^n b^{n-1}}.$$

La frazione che costituisce il secondo membro si può considerare ottenuta dividendo la somma dei numeratori per la somma dei denominatori delle frazioni

$$\frac{b^n F^{n-1}}{a^n F^{n-1}}, \quad \frac{ab^n F^{n-2}}{a^n b F^{n-2}}, \ldots, \frac{a^{n-1}b^n}{a^n b^{n-1}}$$

tutte minori dell' unità, nell'ipotesi fatta $a > b$; è quindi compresa tra la maggiore e la minore di queste ultime, epperò essa stessa è minore dell'unità, ossia

$$\frac{a^n - F^n}{F^n - b^n} < 1,$$

dalla quale si deduce

$$\frac{a^n + b^n}{2} < \left(\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}\right)^n,$$

e da questa

$$\left(\frac{a^n + b^n}{2}\right)^{n+1} < \left(\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}\right)^n.$$

Se nell'ultima diseguaglianza si ponga $a = \sqrt[n]{\alpha}$, $b = \sqrt[n]{\beta}$, e si estragga la radice $(n+1)^{ma}$ dai due membri si ottiene

$$(1) \qquad \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}} < \frac{\alpha^{\frac{n+1}{n}} + \beta^{\frac{n+1}{n}}}{2}$$

nella quale α, β sono numeri positivi diseguali.

Applicando ripetutamente tale diseguaglianza si dimostra che

$$(2) \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m-1} + \alpha_m}{m}\right)^{\frac{n+1}{n}} < \frac{\alpha_1^{\frac{n+1}{n}} + \ldots + \alpha_{m-1}^{\frac{n+1}{n}} + \alpha_m^{\frac{n+1}{n}}}{m}$$

nall'ipotesi che le α sieno numeri positivi non tutti eguali tra loro ed m potenza del 2. Supposta la (2) dimostrata per un certo valore di m è facile dimostrare che essa è vera per $m - 1$: infatti, supponendo

$$\alpha_m = \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}}{m - 1},$$

il primo membro della (2) si riduce ad $\alpha_m^{\frac{n+1}{n}}$ e, semplificando, la (2) dà luogo alla diseguaglianza

$$\alpha_m^{\frac{n+1}{n}} < \frac{\alpha_1^{\frac{n+1}{n}} + \ldots + \alpha_{m-1}^{\frac{n+1}{n}}}{m - 1}$$

ossia

$$\left(\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}}{m - 1}\right)^{\frac{n+1}{n}} < \frac{\alpha_1^{\frac{n+1}{n}} + \ldots + \alpha_{m-1}^{\frac{n+1}{n}}}{m - 1}$$

il che prova l'asserto.

Si può dunque ritenere la (2) vera per un valore qualunque di m: in essa ponendo $\alpha_i = \sqrt[n+1]{a_i}$ ed elevando poi i due membri alla potenza n^a si ha

$$(3)\quad \left(\frac{\sqrt[n+1]{a_1}+\sqrt[n+1]{a_2}+\ldots+\sqrt[n+1]{a_m}}{m}\right)^{n+1}<\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n,$$

la quale diseguaglianza bisognava dimostrare.

Nota. — Addizionando alla (3) membro a membro le altre diseguaglianze che se ne deducono ponendo in luogo di n successivamente

$$n+1,\ n+2,\ \ldots,\ p-1\ (p>n+1)$$

si ottiene

$$\left(\frac{\sqrt[p]{a_1}+\ldots+\sqrt[p]{a_m}}{m}\right)^p<\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n;$$

da questa, ponendo una volta $\sqrt[n]{a_i}=\beta_i$ ed estraendo dai due membri la radice p^a, un'altra volta ponendo $\sqrt[p]{a_i}=\gamma_i$ ed estraendo la radice n^a, si ricavano le due diseguaglianze:

$$\frac{\beta_1^{\frac{n}{p}}+\ldots+\beta_m^{\frac{n}{p}}}{m}<\left(\frac{\beta_1+\ldots+\beta_m}{m}\right)^{\frac{n}{p}}$$

$$\left(\frac{\gamma_1+\ldots+\gamma_m}{m}\right)^{\frac{p}{n}}<\frac{\gamma_1^{\frac{p}{n}}+\ldots+\gamma_m^{\frac{p}{n}}}{m}$$

le quali possono scriversi così:

$$(4)\quad \frac{\alpha_1^k+\ldots+\alpha_m^k}{m}\lesseqgtr\left(\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_m}{m}\right)^k$$

secondo che

$$k\lesseqgtr 1$$

essendo le α e k numeri positivi qualunque. Se k è un numero negativo $-k'$, essendo k' intero o frazionario, ricordando che la media aritmetica di numeri positivi diseguali supera la media geometrica, si può scrivere

$$\frac{a^{k'}+b^{k'}}{2}\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k'}>\sqrt{a^{k'}b^{k'}}.\,(\sqrt{ab})^{k'}=(ab)^{k'}$$

da cui

$$\frac{a^{k'}+b^{k'}}{2}>\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^{k'}$$

e se α, β sono i valori reciproci di a, b,

$$\frac{\alpha^k + \beta^k}{2} > \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^k.$$

Con lo stesso procedimento con cui da (1) si è dedotta (2), dalla precedente si ricava

$$(5) \qquad \frac{\alpha_1{}^k + \ldots + \alpha_m{}^k}{m} > \left(\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m}{m}\right)^k$$

se

$$k < 0$$

Delle formole (4) (5) si trova nell'aggiunte ai Complementi d'Algebra del Sig. Todhunter una dimostrazione fondata sullo sviluppo del binomio con un esponente qualunque.

(13) *Assegnare, senza il sussidio del calcolo differenziale, il limite al quale tende la funzione*

$$y = \frac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}$$

quando la variabile x *tende ad* 1. (D. Besso.)

Soluzione del Prof. *G. Riboni*:

Seguendo le norme suggerite dal Bertrand nel suo *Trattato d'Algebra elementare*, Cap. XXII, n. 293, si ha

$$\frac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}} = \frac{(\sqrt{2x - x^4} - \sqrt{1}) - (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{1})}{\sqrt[4]{1} - \sqrt[4]{x^3}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt{1}}{2x - x^4 - 1} \cdot \dfrac{2x - x^4 - 1}{x - 1} - \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{1}}{x - 1}}{\dfrac{\sqrt[4]{1} - \sqrt[4]{x^3}}{1 - x^3} \cdot \dfrac{1 - x^3}{x - 1}} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2x - x^4} + \sqrt{1}}(1 - x^3 - x^2 - x) - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1}}}{\dfrac{1}{\sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^6} + \sqrt[4]{x^9}}(-x^2 - x - 1)}$$

che per $x = 1$ diventa

$$\frac{\frac{1}{2}\times(-2)-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}\times(-3)}=\frac{16}{9}.$$

Soluzione del Prof. *F. Viaggi*:

Posto $\sqrt[12]{x}=z$, sarà, dopo facili trasformazioni,

$$y=\frac{z^4}{z^8+z^7+\ldots+z+1}\cdot\frac{\sqrt{2z^4-z^{40}}-1}{1-z}=$$

$$=\frac{z^4}{z^8+z^7+\ldots+z+1}\cdot\frac{z^{40}-2z^4+1}{(z-1)\left(\sqrt{2z^4-z^{40}}+1\right)},$$

e liberando i due termini dell'ultima frazione dal fattor comune $z-1$, si avrà

$$y=\frac{z^4}{z^8+z^7+\ldots+z+1}\cdot\frac{(z^3+z^2+z+1)\,(z^{36}+z^{32}+\ldots+z^4-1)}{\sqrt{2z^4-z^{40}}+1}$$

quindi

$$\lim_{x=1}y=\lim_{z=1}y=\frac{1}{9}\cdot\frac{4.8}{2}=\frac{16}{9}$$

(14) *Dimostrare che, posto*

$$1^{h+1}-2^{h+1}+3^{h+1}-\ldots+(-1)^{n-1}\,n^{h+1}=s_n\,,$$

si ha, qualunque sia l'intero positivo h, *purchè indipendente da* m,

$$\lim\left(\frac{s_{2m}+s_{2m+1}}{m^h}\right)_{m=\infty}=(h+1)\,2^{h-1}.$$

D. Besso.

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi*:

Se s'indica col simbolo $S^h_{(m)}$ la somma delle potenze h^{me} dei primi m numeri naturali, è noto che

$$\lim_{m=\infty}\frac{S^h_{(m)}}{m^{h+1}}=\frac{1}{h+1}$$

(cfr. *Baltzer* Aritmetica generale § 12,6), e quindi

$$\lim_{m=\infty}\frac{S^h_{(m)}}{m^p}=0 \quad \text{se } p \geqq h+2$$

Ciò premesso, nella identità

$$(2k+1)^{h+1}-(2k)^{h+1}=\binom{h+1}{1}2^h k^h+\binom{h+1}{2}2^{h-1}k^{h-1}+\ldots.$$

ponendo successivamente $k=0, 1, 2, \ldots, m$ e addizionando le eguaglianze risultanti, si ottiene

$$s_{2m+1}=\binom{h+1}{1}2^h S^h{}_{(m)}+\binom{h+1}{2}2^{h-1}S^{h-1}{}_{(m)}+\ldots+\binom{h+1}{h+1}S^0{}_{(m)}\quad(\alpha)$$

E ponendo nell'identità

$$(2k-1)^{h+1}-(2k)^{h+1}=-\binom{h+1}{1}2^h k^h+\binom{h+1}{2}2^{h-1}k^{h-1}-\ldots.$$

successivamente $k=1, 2, \ldots, m$ e addizionando le eguaglianze risultanti, si ha

$$s_{2m}=-\binom{h+1}{1}2^h S^h{}_{(m)}+\binom{h+1}{2}2^{h-1}S^{h-1}{}_{(m)}-\ldots.\quad(\beta)$$

Addizionando (α) e (β) e dividendo per m^h si ricava

$$\frac{s_{2m}+s_{2m+1}}{m^h}=h(h+1)2^{h-1}.\frac{S^{h-1}{}_{(m)}}{m^h}+\binom{h+1}{4}2^{h-2}.\frac{S^{h-3}{}_{(m)}}{m^h}+\ldots.$$

Ora se m tende all'infinito, pei limiti ricordati a principio, il primo termine del secondo membro tende ad $(h+1)2^{h-1}$ e gli altri a 0, dunque sarà

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{s_{2m}+s_{2m+1}}{m^h}\right)=(h+1)2^{h-1}.$$

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Breve cenno sulle principali operazioni di finanza e di previdenza e sulle loro più elementari soluzioni del prof. dott. Enrico de Montel. Reggio d'Emilia 1885.

Operazioni di borsa e di commercio del prof. dott. Enrico de Montel. Reggio d'Emilia 1886.

Queste due opere del prof. de Montel, che si aggirano sopra argomenti, i quali fanno parte dell'insegnamento di matematica applicata delle sezioni commerciali degli istituti tecnici e delle scuole superiori di commercio, furono pubblicate con intendimenti diversi. La prima, scritta nell'occasione che, istituita in Genova una scuola superiore di commercio, era stato aperto un concorso per una cattedra di matematica applicata, è una rapida esposizione delle applicazioni dell'aritmetica generale alle quistioni finanziarie, colla quale l'autore mostra di pienamente conoscere i lavori più recenti degli attuari francesi ed inglesi; ma la fretta colla quale egli ha dovuto procedere alla pubblicazione di questo libro non gli ha concesso di dargli una forma didattica. Se però non possiamo consigliare quest'opera come libro di testo, tanto più che in alcuni punti sono nel lettore supposte cognizioni che non si riscontrano negli alunni degli istituti tecnici, la possiamo raccomandare agli insegnanti che vi troveranno raccolti molti risultati, che spesso occorrono, con brevi ed esatte dimostrazioni. Ne diamo perciò il sommario: Interesse — Parità dei valori — Sulle tavole di mortalità — Vitalizii — Assicurazioni sulla vita — Riscatto — Riserva — Assicurazioni marittime, contro gli incendi ecc. — Teoria dei conti correnti.

Il breve trattato sulle operazioni di borsa e di commercio è destinato invece a fare entrare nella pratica commerciale l'uso sistematico della rappresentazione grafica delle operazioni di banca e di commercio. Scritto con stile facile e scorrevole, basato sulle più elementari nozioni di geometria, questo libro può tranquillamente esser posto fra le mani degli studenti, i quali, oltre all'accennata rappresentazione grafica, utile nei casi di operazioni complesse, vi troveranno chiare spiegazioni, date da persona che si mostra assai pratica e competente nella materia, delle molteplici operazioni che si fanno alla borsa. Sotto questo punto di vista il libro del dott. de Montel completa quello del prof. Martini già in questo stesso periodico raccomandato.

E. Padova