PERIODICO

DI

MATEMATICA

PER

L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

DIRETTO

DA

DAVIDE BESSO
PROFESSORE DI MATEMATICA
NEL R. ISTITUTO TECNICO DI ROMA

AURELIO LUGLI
PROFESSORE DI MATEMATICA
NELLA R. SCUOLA TECNICA *PIETRO METASTASIO*
IN ROMA

ANNO II.
1887

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
Via Lata, N. 3.
1887

Digitalizzato da Google

Indice Articoli Anno 1887

DI ALCUNE PROPRIETÀ DEL TRIANGOLO

In questa Nota sono esposte alcune proprietà del triangolo, le quali si riferiscono ai punti dei tre lati che dividono questi in tre coppie di segmenti di eguale rapporto.

1. Indicando con a, b, c, S i numeri che misurano i tre lati e l'area d'un triangolo, la quantità

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - (a^4 + b^4 + c^4)$$

è positiva ed eguale, com'è notissimo, a $16\,S^2$.

Reciprocamente, se i numeri positivi a, b, c soddisfanno alla diseguaglianza

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - (a^4 + b^4 + c^4) > 0$$

esiste un triangolo coi lati misurati da a, b, c.

Infatti questa diseguaglianza equivale alla

$$(a + b + c)\ (b + c - a)\ (a + c - b)\ (a + b - c) > 0$$

per soddisfare alla quale dev'essere positivo il prodotto

$$(b + c - a)\ (a + c - b)\ (a + b - c)$$

e in conseguenza ciascuno dei tre fattori, perchè, se due di essi fossero negativi, dovrebb'essere negativo uno dei numeri a, b, c.

2. Sui tre lati BC, CA, AB del triangolo ABC sieno i tre punti A', B', C' così situati che abbiano luogo le eguaglianze di rapporti

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B} = m$$

nelle quali m significa un numero qualunque positivo o negativo.

Indicando con a_1, b_1, c_1 i tre segmenti AA', BB', CC', si troverà

$$a_1^2 = \frac{1}{1+m}\left(mb^2 + c^2 - \frac{m}{1+m}\,a^2\right)$$

$$b_1^2 = \frac{1}{1+m}\left(mc^2 + a^2 - \frac{m}{1+m}\,b^2\right)$$

$$c_1^2 = \frac{1}{1+m}\left(ma^2 + b^2 - \frac{m}{1+m}\,c^2\right)$$

mediante le quali si ottiene

$$a_1^4 + b_1^4 + c_1^4 = \frac{(m^2+m+1)^2}{(m+1)^4}\,(a^4 + b^4 + c^4)$$

$$a_1^2\,b_1^2 + b_1^2\,c_1^2 + c_1^2\,a_1^2 = \frac{(m^2+m+1)^2}{(m+1)^4}\,(a^2\,b^2 + b^2\,c^2 + c^2\,a^2),$$

e in conseguenza

$$2(a_1^2\,b_1^2 + b_1^2\,c_1^2 + c_1^2\,a_1^2) - (a_1^4 + b_1^4 + c_1^4)$$
$$= \frac{(m^2+m+1)^2}{(m+1)^4}\left\{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)\right\}$$

Da quest'eguaglianza è manifesto (1) che esiste un triangolo coi lati eguali ai tre segmenti AA′, BB′, CC′, e che, indicando con S l'area di questo triangolo, si ha la proporzione

$$\frac{S'}{S} = \frac{m^2+m+1}{(m+1)^2}$$

la quale, nel caso di $m = 1$, esprime una nota proprietà delle mediane. È questo il caso nel quale il rapporto $\frac{S'}{S}$ ha il minimo valore, come si rileva facilmente risolvendo la precedente eguaglianza rispetto ad m.

3. Indicando con a_2, b_2, c_2 i tre segmenti B′C′, C′A′, A′B′, si ha

$$a_2^2 = \frac{1}{(1+m)^2}\left\{(1-m)\,b^2 + (m^2-m)\,c^2 + ma^2\right\}$$

$$b_2^2 = \frac{1}{(1+m)^2}\left\{(1-m)\,c^2 + (m^2-m)\,a^2 + mb^2\right\}$$

$$c_2^2 = \frac{1}{(1+m)^2}\left\{(1-m)\,a^2 + (m^2-m)\,b^2 + mc^2\right\}$$

mediante le quali formole si trova che il rapporto dell'area del triangolo $A'B'C'$ all'area del triangolo ABC è

$$\frac{m^2 - m + 1}{(m+1)^2}$$

Anche questo rapporto è minimo nel caso di $m = 1$.

4. S'indichino ordinatamente con A_1, B_1, C_1 i punti d'incontro delle tre coppie di rette (BB', CC'), (CC', AA'), (AA', BB'). Applicando il teorema di Menelao al triangolo ABA' tagliato dalla trasversale CC', ed al triangolo ACA' tagliato dalla trasversale BB', si hanno le relazioni

$$\frac{AB_1}{B_1A'} \cdot \frac{A'C}{CB} \cdot \frac{BC'}{C'A} = -1$$

$$\frac{AC_1}{C_1A'} \cdot \frac{A'B}{BC} \cdot \frac{CC'}{B'A} = -1$$

dalle quali si ricava

$$\frac{AB_1}{B_1A'} = m(m+1), \quad \frac{AC_1}{C_1A'} = \frac{m+1}{m^2}$$

e in conseguenza

$$\frac{B_1C_1}{AA'} = \frac{m^2-1}{m^2+m+1}.$$

In modo analogo si dimostreranno le eguaglianze

$$\frac{C_1A_1}{BB'} = \frac{A_1B_1}{CC'} = \frac{m^2-1}{m^2+m+1}.$$

Perciò il triangolo che ha per vertici i punti $A_1B_1C_1$ è simile a quello che ha i lati eguali ai tre segmenti AA', BB', CC'. È chiaro inoltre (2) che il rapporto dell'area del triangolo $A_1B_1C_1$ all'area del triangolo ABC è dato dalla formola

$$\frac{(m-1)^2}{m^2+m+1}.$$

5. Se con a, b, c, a', b', c' s'indicano le proiezioni dei punti A, B, C, A', B', C' sopra una retta qualunque u del piano del triangolo ABC, si ha la proporzione

$$\frac{A'a' - Bb}{Cc - A'a'} = \frac{BA'}{A'C}$$

dalla quale si ricava:

$$A'a' = \frac{1}{m+1} Bb + \frac{m}{m+1} Cc$$

In modo analogo si troverà:

$$B'b' = \frac{1}{m+1} Cc + \frac{m}{m+1} Aa,$$

$$C'c' = \frac{1}{m+1} Aa + \frac{m}{m+1} Bb,$$

e in conseguenza sarà

$$A'a' + B'b' + C'c' = Aa + Bb + Cc$$

cioè la somma delle distanze dei punti A′ B′ C′ da una retta qualunque del piano del triangolo ABC è eguale alla somma delle distanze dei vertici di questo triangolo dalla retta stessa. Di qui risulta che i triangoli ABC, A′B′C′ hanno lo stesso centro di gravità.

6. Reciprocamente, se i punti A′, B′, C′ dei lati BC, CA, AB sono così situati che il centro di gravità del triangolo A′B′C′ coincida col centro di gravità del triangolo ABC, dev'essere

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B}$$

Infatti, indicando con m, n, p questi tre rapporti, si hanno le eguaglianze

$$A'a' = \frac{1}{m+1} Bb + \frac{m}{m+1} Cc$$

$$B'b' = \frac{1}{n+1} Cc + \frac{n}{n+1} Aa$$

$$C'c' = \frac{1}{p+1} Aa + \frac{p}{p+1} Bb$$

dalle quali risulta

$$A'a' + B'b'\ C'c' = \left(\frac{1}{p+1} + \frac{n}{n+1}\right) Aa +$$

$$+ \left(\frac{1}{m+1} + \frac{p}{p+1}\right) Bb + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{m}{m+1}\right) Cc$$

Perciò supponendo

$$A'a' + B'b' + C'c' = Aa + Bb + Cc$$

si avrà l'eguaglianza

$$\frac{n-p}{(n+1)\ (p+1)}\, Aa + \frac{p-m}{(p+1)\,(m+1)}\, Bb + \frac{m-n}{(m+1)\ (n+1}\, Cc = 0$$

la quale dev'essere verificata per ogni posizione della retta u sulla quale si proiettano i punti A, B, C, A', B', C', quindi anche quando essa coincide con uno qualunque dei tre lati; e in conseguenza sarà

$$m = n = p.$$

7. Indicando con a_1, b_1, c_1 le projezioni dei punti A_1, B_1, C_1 sulla retta u si ha

$$\frac{B_1 b_1 - Aa}{A'a' - B_1 b_1} = \frac{AB_1}{B_1 A'}$$

ossia (4)

$$B_1 b_1 = \frac{1}{m^2 + m + 1}\ Aa + \frac{m(m+1)}{m^2+m+1}\ A'a'$$

Si troverà analogamente

$$C_1 c_1 = \frac{1}{m^2 + m + 1}\ Bb + \frac{m(m+1)}{m^2+m+1}\ B'b'$$

$$A_1 a_1 = \frac{1}{m^2 + m + 1}\ Cc + \frac{m(m+1)}{m^2+m+1}\ C'c'$$

e queste tre eguaglianze addizionate daranno (5)

$$A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1 = Aa + Bb + Cc$$

Dunque anche i triangoli $A_1B_1C_1$, ABC hanno lo stesso centro di gravità.

8. Quando m è positivo, nel quale caso il triangolo $A_1B_1C_1$ è interno al triangolo ABC, effettuando in quello la costruzione che è stata fatta in questo, cioè determinando sui suoi lati i punti A'_1, B'_1, C'_1 così che sia

$$\frac{B_1A'_1}{A'_1C_1} = \frac{C_1B'_1}{B'_1A_1} = \frac{A_1C'_1}{C'_1B_1} = m$$

e indicando con A_2, B_2, C_2 i punti d'incontro delle tre coppie di rette (BB_1', C_1C_1'), (C_1C_1', A_1A_1'), (A_1A_1', B_1B_1'), poi operando analogamente sul triangolo $A_2B_2C_2$, e così continuando, i vertici dell' n^{mo} triangolo così costruito tendono a coincidere col centro di gravità del triangolo ABC.

Questa proprietà è un' ovvia conseguenza di quella dimostrata al numero precedente.

D. Besso.

ALCUNI TEOREMI SULLA EQUIVALENZA
STABILITI COL METODO INTUITIVO

1. Il principio fondamentale su cui riposano le seguenti considerazioni, è il segnente:

Data una superficie limitata, per es. un foglio di carta di forma qualunque disteso o no su di un piano; se sopra di esso poniamo delle figure che, senza sovrapporsi, ricuoprano una parte del foglio, l'area del foglio che rimane scoperta, è sempre la stessa comunque sieno poste le figure su di esso.

Se adunque le parti restanti per le diverse posizioni delle figure hanno una facile espressione geometrica, otterremo ogni volta un teorema, relativo all'equivalenza. E poichè tutti i teoremi sull'equivalenza, si riducono a dimostrare un'eguaglianza di aree, sarà dimostrato uno di questi teoremi, quando il foglio e le figure sieno tali, che, poste queste convenientemente e successivamente sul foglio una prima ed una seconda volta, rimangano scoperte rispettivamente le aree scritte nel 1° e 2° membro dell'eguaglianza.

2. È da osservare peraltro, che questo metodo mal si presterebbe per quelle dimostrazioni in cui tutti e due o uno solo dei membri dell'eguaglianza, contenessero dei termini negativi; in tal caso gioverà, per mezzo della trasposizione dei termini, renderli positivi, e poi dimostrare questa nuova eguaglianza.

Teorema I.

I rettangoli dei cateti non omologhi di due triangoli rettangoli simili, sono equivalenti fra loro ed equivalenti anche al rettangolo costruito sull'ipotenusa dell'uno e sull'altezza dell'altro triangolo (Tav. 1ª, Fig. 1ª).

Siano ABC e CDE i due triangoli rettangoli simili; si vuol dimostrare che il rettangolo dei due cateti non omologhi BC e CD è equivalente al rettangolo degli altri due cateti AB e DE, e che ognuno di essi è equivalente al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa dell'uno, per es. AC e l'altezza DF dell'altro.

Si prenda per *quadro* un triangolo rettangolo AGE, di cui i cateti sieno rispettivamente le somme dei cateti omologhi dei due triangoli dati.

Il triangolo CDE è scomposto in due DEF e DFC, per mezzo dell'altezza DF.

Ecco come si dimostra ora il teorema. Quando i triangoli dati hanno sul quadro la posizione ABC e CDE, rimane scoperta la figura BCDG che è il rettangolo dei due cateti non omologhi BC e DC; ma se si porta il triangolo ABC in HGD, facendolo scorrere col lato AB lungo il lato AG del quadro finchè B giunga in G; e il triangolo DFC si porta in HMA, facendolo scorrere col lato FC lungo il lato EA del quadro finchè C giunga in A, rimane scoperta

perta nel quadro la figura HDFM che è il rettangolo dell'ipotenusa AC del triangolo ABC, e dell'altezza DF dell'altro triangolo EDC.

Si porti poi il triangolo DFE in HML, facendolo scorrere col lato EF lungo la EA e il triangolo HGD in LIE facendolo scorrere col lato GD lungo la GE; dopo questi due ultimi cambiamenti rimane scoperta la figura GHLI che è il rettangolo costruito sopra gli altri due cateti non omologhi: il teorema resta in tal modo completamente dimostrato.

Corollari. Se DC fosse eguale CB, i due triangoli ABC e CDE, potrebbero riguardarsi come i due triangoli rettantangoli secondo i quali viene scomposto per mezzo dell' all'altezza il triangolo rettangolo che ha per cateti AC e CE, per altezza $CB = CD$; e per ipotenusa $AB + DE$, come si può riconoscere immediatamente facendo ruotare il triangolo CDE intorno a C, finchè la CD coincida con CB.

In questa ipotesi, cogli stessi movimenti, si viene a dimostrare il teorema:

« Il quadrato costruito sull'altezza di un triangolo ret-
» tangolo, è equivalente al rettangolo dei due segmenti in
» cui l'ipotenusa vien divisa dal piede dell'altezza, ed equi-
» valente ancora al rettangolo di uno dei cateti e della pro-
» iezione dell'altezza su questo cateto ».

Teorema II.

Dati due triangoli rettangoli simili, la somma dei parallelogrammi che hanno due lati adiacenti uguali a due cateti omologhi, e l'angolo compreso uguale ad uno degli angoli acuti dei triangoli dati, è equivalente al parallelogrammo che ha un angolo uguale allo stesso angolo acuto ed i lati che lo comprendono uguali alle ipotenuse dei due triangoli dati (Fig. 2).

Sieno ACB e DCE i due triangoli simili e rettangoli dati; stabiliamo che l'angolo acuto dei parallelogrammi sia l'angolo ABC = CED. Si pongano i due triangoli col vertice dell'angolo retto in comune, e in modo che CE risulti parallelo all'ipotenusa AB; si compiano i parallelogrammi ECBF ed ACDG: si vuol dimostrare che la somma di questi due parallelogrammi è equivalente al parallelogrammo delle due ipotenuse AB e DE, coll'angolo acuto eguale ad ABC.

Infatti, se il triangolo DCE si fa scorrere col lato DE lungo la DF finchè abbia preso la posizione LBF; se si trasporta ACB in GDL, e finalmente se si fa scorrere il triangolo LFB col lato BF lungo la FH, finchè abbia presa la posizione GMA, rimarrà scoperto nel quadro il parallelogrammo GLFM che è appunto quello che ha per lati le due ipotenuse, coll'angolo acuto eguale ad ABC = AFL.

Corollario. – Se il triangolo DCE (Fig. 3) avesse l'altezza CP eguale al cateto CB dell'altro triangolo si vede subito che DP è uguale ad AC e CD eguale ad AB, vale a dire che ognuno dei tre parallelogrammi di cui si fa menzione nell'enunciato del teorema ha la base eguale all'altezza, sicchè trasformando questi parallelogrammi in rettangoli si ottiene la dimostrazione del teorema di Pitagora.

Lascio alla cura del lettore d'interpretrare la fig. 3 che contiene appunto la dimostrazione del suddetto teorema. Questa dimostrazione non differisce in sostanza da quella di *Zaliwski* (Comptes Rendus, 1865).

Teorema III.

Il quadrato costruito sopra un lato di un triangolo, opposto ad un angolo ottuso, è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, aumentata di due volte il rettangolo costruito sopra uno di questi ultimi lati e sulla proiezione dell' altro su di esso. (Fig. 4).

Sia ABC il triangolo dato e BD la proiezione di AB su BC; vogliamo dimostrare che il quadrato di AC è uguale al quadrato di BC, più il quadrato di AB, più due volte il rettangolo che ha per lati BC e BD.

Si costruisca sopra AC il quadrato ACMI e si prenda per *quadro* il quadrato che ha per lato DC + AD.

I triangoli rettangoli ADC, AEI, IFM, MGC, son tutti eguali fra loro.

La dimostrazione si fa nel modo seguente: Si trasporti ABC in ILM; il triangolo MCG si faccia scorrere col lato CG lungo la GD finchè venga in LNB; il triangolo IHA si trasporti in LPB e infine il triangolo ADB, scorrendo col lato AD sulla DE, si trasporti in HQP. L'area che rimane scoperta si compone del quadrato ILPH, che è il quadrato costruito sulla AB; del rettangolo QPBD, che è quello costruito sopra rette eguali a BC e BD; del rettangolo LMGN, che ha il lato ML eguale a CB e il lato MG = CD, e quindi si compone del quadrato della CB e del rettangolo delle due rette CB e BD: il teorema è adunque dimostrato.

Teorema IV.

Il quadrato costruito sopra un lato di un triangolo, opposto ad un angolo acuto, è uguale alla somma dei quadrati costruiti sopra gli altri due lati, diminuita di due volte il rettangolo che ha per lati uno di questi ultimi lati e la proiezione dell'altro su di esso. (Fig. 5),

Sia ABC il triangolo dato e AQ la proiezione di AC sopra AB; si tratta di dimostrare che il quadrato costruito sulla CB è uguale alla somma dei quadrati di AB e di AC, diminuita di 2 volte il rettangolo di AB ed AQ. Per l'osservazione fatta al n. 2 dimostreremo invece che il 1° quadrato aumentato dei due rettangoli, è uguale alla somma degli altri due quadrati.

Le figure che formano la 1ª parte dell'eguaglianza si dispongano nel modo seguente: si costruisca su CB il quadrato CBDR; su AB il rettangolo ABFG, col lato BF = AQ, infine si faccia in LEDP un altro rettangolo eguale al precedente essendo LP = AB, LE = AQ. Si riconosce facilmente che la figura RDPN è uguale a DBFE, il triangolo BFE = AQC è il triangolo DBE = BCA.

Per dimostrare il teorema si cambiano le figure nel modo seguente:

Si porta il triangolo FEB in GHA; ABC in HEI; EDB in IRC; e il quadrilatero PDRN in LEIM. L'Area che rimane scoperta si compone dei due quadrati AHIC e IMNR, che sono appunto costruiti respettivamente sui lati AC e RI = AB del triangolo dato.

Teorema V.

La somma dei quadrati costruiti sopra due lati di un triangolo, è uguale al doppio quadrato costruito sulla metà del terzo lato, aumentato del doppio quadrato costruito sulla mediana relativa a questo lato (Fig. 6).

Sia ABC il triangolo dato, e BP la sua mediana; vogliamo dimostrare che

$$AB^2 + BC^2 = 2AP^2 + 2PB^2$$

Si prenda il triangolo DBE, eguale al triangolo ABT, ossia eguale alla metà del parallelogrammo ABCT, e si ponga in modo che i suoi lati DB e BE risultino rispettivamente perpendicolari ad AB, e BC; si compiano i quadrati ABDL ed EBCM; si prenda il triangolo LDI = APB e il triangolo EHM = CPB e infine si compia il parallelogrammo FGHE. È facile dimostrare che FB è perpendicolare ad AC; MH e LI a DE; ID e EH ad FB.

Assumiamo come quadro la figura irregolare ACMHGFDILA della quale l'area scoperta sia rappresentata dai due quadrati ABDL e BCME; dimostreremo che la somma di questi due quadrati è equivalente al doppio quadrato di BP aumentato del doppio quadrato di AP. Si porti DBF in LAQ; BEF in CSM; LID in AUB; EFGH in RIDF; EMH in FSG e finalmente tutta la figura AUBC in QRFS.

L'area che rimane scoperta è composta dei due quadrati QRIL e SGHM il cui lato è uguale alla mediana, e del rettangolo QSCA i cui lati sono AC e la metà di AC, e che quindi equivale al doppio quadrato di AC. Il teorema resta in tal modo dimostrato.

Teorema VI.

In un triangolo qualunque il quadrato della mediana che parte dal vertice di un angolo acuto è equivalente al quadrato della metà del lato su cui cade la mediana, più il rettangolo costruito sopra uno dei rimanenti lati e sulla proiezione dell'altro su di esso (Fig. 7).

Sia ABC il triangolo dato; AD la sua mediana e NB (parallela ad AC) eguale alla proiezione di AB sopra AC. Voglio dimostrare che $AD^2 = BD^2 + AC.NB$.

Si prendano quattro figure, eguali al trapezio ACBN, e si dispongano in ACBN; OBEP; HEFI, LFCM, in modo che BCFE resulti un quadrato (equivalente a 4 volte il quadrato fatto sulla BD). Si prolunghino i lati AN, OP, HI, LM dei quattro trapezi: è facile dimostrare che la figura che si ottiene TQRS è un quadrato, e che NBOT, PEHQ, IFLR, MCAS sono 4 rettangoli eguali, costruiti sopra lati eguali ad AC e BN. Abbiamo dunque che l'area del quadrato TQRS diminuita dei 4 trapezi, è equivalente a 4 volte l'area scritta nel 2.° membro dell'eguaglianza che vogliamo dimostrare; il teorema sarà quindi dimostrato quando avremo fatto vedere che quest'area è equivalente al quadruplo quadrato di AD o anche equivalente al quadrato costruito su di una retta doppia di AD.

Si porti la figura ACBN in SMWJ; la MLFC in UXHZ; la EHJF in WXVM e finalmente la BEPO in ZHQY: l'area che rimane scoperta è composta dei due quadrati VRUX e JXYT, la cui somma, pel teorema di Pitagora, è uguale al quadrato di SX, e per conseguenza a 4 volte il quadrato di SK che è appunto un segmento di lunghezza doppia della mediana perchè diagonale del parallelogrammo SWXM.

Se la mediana si conduce pel vertice di un angolo ottuso il teorema si enuncia nel modo seguente:

In un triangolo qualunque il quadrato della mediana che parte dal vertice di un angolo ottuso è uguale al quadrato della metà del lato su cui cade la mediana, diminuito del rettangolo costruito sopra uno dei rimanenti lati e sulla proiezione dell'altro su di esso.

DUE TEOREMI SULL'ESTRAZIONE DI RADICE

I.

Nell'estrazione della radice n.ª *da un numero approssimato, il numero delle cifre della cui parte intera non sia un multiplo dell'indice* n, *si può contare su tante cifre esatte nella radice quante ne ha il radicando. Se poi il numero delle cifre del radicando è multiplo di* n, *si può contare parimenti sopra tante cifre esatte quante ne ha il radicando se l'ultimo gruppo di* n *cifre a sinistra costituisce un numero maggiore di* $\left(\frac{10}{\sqrt[n-1]{n}}\right)^n$

Sia N il numero approssimato dato ed α l'errore assoluto del numero. Consideriamo dapprima il caso in cui α è in difetto e diciamo ε l'errore corrispondente nella radice n^{esima} di N. Possiamo stabilire, per ipotesi, l'eguaglianza seguente:

$$N + \alpha = (\sqrt[n]{N} + \varepsilon)^n,$$

da cui

$$\alpha > n\sqrt[n]{N^{n-1}}\,\varepsilon,$$

ossia

$$\varepsilon < \frac{\alpha}{n\sqrt[n]{N^{n-1}}}.$$

Si faccia

$$N \geq G.\ 10^{mn},$$

dove G è il primo gruppo di cifre a sinistra ed m è il numero dei gruppi successivi di n cifre ciascuno e contati nella parte intera.

Abbiamo

$$\sqrt[n]{N} \leq \sqrt[n]{G}.\ 10^{m}$$

e quindi

$$(1) \qquad \varepsilon < \frac{\alpha}{n\sqrt[n]{G^{n-1}}.\ 10^{mn-m}}$$

Se il gruppo G ha un numero di cifre eguale ad $n-k$, potremo scrivere

$$G \geq 10^{n-k-1}$$

e, sostituendo nella (1), avremo

$$(2) \qquad \varepsilon < \frac{\alpha}{n\sqrt[n]{10^{(n-k-1)(n-1)}}\ 10^{mn-m}}.$$

Ma ora si trova che

$$n\sqrt[n]{10^{(n-k-1)(n-1)}} > 10^{n-k-1}; \ [\text{per } k \geq 1]$$

infatti questa disuguaglianza è conseguenza della

$$n^n > 10^{n-k-1}$$

la quale è sempre vera per $k \geq 1$. *) Pertanto, sostituendo nella (2), possiamo scrivere, a fortiori,

---

*) È evidente che basta provare la diseguaglianza

$$n^n > 10^{n-2} \qquad (a)$$

la quale si verifica subito per $n = 2, = 3, = 4$.
Ora dalla:

$$(n+1)^{n+1} = (n^n + n\,.\,n^{n-1} + \ldots.)\ (n+1)$$

si ricava

$$(n+1)^{n+1} > (2n+2)n^n,$$

e in conseguenza, per $n \geqq 4$,

$$(n+1)^{n+1} > 10\ n^n$$

Percio, ammessa la (a) per un valore di $n \geqq 4$ sarà a fortiori

$$(n+1)^{n+1} > 10^{n-1}$$

cioè la (a) dovrà essere verificata da quel valore di n aumentato di 1.

$$(3) \qquad \varepsilon < \frac{\alpha}{10^{(m+1)(n-1)-k}}$$

e, supponendo $\frac{1}{10} \leq \alpha < 1$, vale dire supponendo che l'errore di N affetti soltanto la cifra dei decimi, si ottiene

$$\varepsilon < \frac{1}{10^{(m+1)(n-1)-k}},$$

la quale ci mostra che si potrà contare nella radice fino ad $(m+1)(n-1)-k$ cifre decimali esatte, oltre ad $m+1$ cifre, che si trovano nella sua parte intera, cosicchè avremo in totale $(m+1)n-k$ cifre sicure, precisamente tante quante ne ha il numero proposto.

Quando α diventa minore di $\frac{1}{10}$, di $\frac{1}{100}$, in generale di $\frac{1}{10^p}$, ossia, in altri termini, quando l'errore di N si porta sui centesimi, sui millesimi, in generale sulla cifra decimale di $(p+1)^{esimo}$ ordine verso destra, evidentemente, per la formola (3), anche il valore di ε diminuisce con α e si trasporta verso destra di uno, di due, in generale di p posti. Così si dica nel caso in cui α aumenta.

Nel caso in cui k è eguale a zero, supponendo

$$G \geq \left(\frac{10}{\sqrt[n-1]{n}}\right)^n$$

risulta dalla (1)

$$\varepsilon < \frac{\alpha}{10^{(m+1)(n+1)}}$$

che dimostra la seconda parte del teorema quando il radicando sia approssimato per difetto.

Supponiamo ora che il numero N sia approssimato per eccesso e indichiamo con m il numero delle sue cifre esatte. Allora sostituendo con altrettanti zeri le cifre che seguono queste cominciando dalla $(m+1)^{esima}$, otterremo evidentemente un numero N' approssimato per difetto e che ha, come il primo, *m* cifre esatte. Pertanto estraendo la radice n^{esima} di N' siamo condotti al caso precedente ed il teorema resta dimostrato in via generale.

Corollario 1.° — *La radice quadrata di un numero approssimato ha tante cifre esatte quante ne ha il radicando quando il numero delle cifre della parte intera del radicando è dispari, ed anche quando, essendo questo numero pari, le prime due cifre a sinistra costituiscano un numero superiore a* 25.

Corollario 2.° — *Nell'estrazione di radice cubica da un numero approssimato si può contare nella radice su tante cifre esatte quante ne ha il radicando quando il numero delle cifre della parte intera non è un multiplo di* 3, *ed anche quando, essendo questo numero un multiplo di* 3, *le prime tre cifre a sinistra costituiscono un numero superiore a* 193.

II.

Se nell'estrazione di radice n^{esima}, *a meno di uno, di un numero dato si divide il resto, a cui si è pervenuti calcolando tante cifre della radice quanto ne ha l'indice oltre alla metà, più una, delle rimanenti, per* n *volte la potenza* (n — 1)^{esima} *del numero formato scrivendo accanto alle cifre già trovate tanti zeri, quante sono quelle che mancano, si ottiene un quoziente, le cui cifre sono quelle della radice, che si cercano.*

Sia N il radicando dato, q il numero delle cifre dell'indice n, e supponiamo in primo luogo che la radice a meno di una unità abbia $2p+q+1$ cifre. Sia r il numero che si otterrebbe sostituendo tanti zeri alle ultime p cifre della radice, ed x la parte razionale od irrazionale, che bisogna aggiungere ad r per avere esattamente la radice n^{esima} di N. Si ha per ipotesi

$$N = (r + x)^n$$

e, pel teorema del binomio,

$$N = r^n + nr^{n-1}\,x + \frac{n.\,(n-1)}{1\,.\,2}\,r^{n-2}\,x^2 + \ldots\ldots$$

Ma $N - r^n$ esprime il resto dell' operazione quando si sono ottenute le prime $p + q + 1$ cifre della radice, perciò chiamandolo R si ha dalla precedente eguaglianza

$$\frac{R}{nr^{n-1}} = x + Q,$$

dove si è posto:

$$Q = \frac{n-1}{2}\,\frac{x^2}{r} + \frac{(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,3}\,\frac{x^3}{r^2} + \ldots\ldots$$

Ora, se si vuole che $r + x$ sia, a meno di una unità, la radice n^{esima} di N, è necessario e sufficiente che x sia, a meno di una unità, il quoziente intero della divisione $\frac{R}{nr^{n-1}}$ e che quindi si dimostri essere $Q < 1$.

Pertanto abbiamo, per ipotesi, che

$$r \geq 10^{2p+q},\quad x^2 < 10^{2p}$$

di guisa che

$$\frac{(n-1)\,x^2}{r} < \frac{(10^q - 1)10^{2p}}{10^{2p+q}} < 1\,,$$

d'onde si ricava

$$\frac{(n-1)x^2}{2r} < \frac{1}{2}.$$

Inoltre abbiamo, a fortiori,

$$\frac{(n-2)x}{3r} < \frac{1}{3}$$

e quindi, moltiplicando membro a membro le due ultime ineguaglianze,

$$\frac{(n-1)\ (n-2)}{2\ .\ 3}\frac{x^3}{r^2} < \frac{1}{2\ .\ 3}.$$

Nello stesso modo si trova

$$\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\ .\ 3\ .\ 4}\ \frac{x^4}{r^3} < \frac{1}{3\ .\ 4}$$

ed in generale

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-i)}{2\ .\ 3\ \ldots\ .\ (i+1)}\ \frac{x^{i+1}}{r^i} < \frac{1}{i(i+1)},$$

di maniera che si ottiene

$$Q < \frac{1}{1\ .\ 2} + \frac{1}{2\ .\ 3} + \frac{1}{3\ .\ 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$$

Ma la somma che sta al secondo membro è uguale a $1 - \frac{1}{n}$; quindi dev'essere $Q < 1$; e ciò dimostra il teorema.

Nel caso in cui la radice in questione abbia $2p + q$ cifre e se ne calcolino coi metodi ordinari le prime $p + q + 1$, il teorema evidentemente resta verificato a più forte ragione.

Osservazione. — Sovente non basta, nel risultato di una operazione, che si sia determinato il valore con un errore minore dell'unità dell'ultima cifra, ma è necessario inoltre che questo errore sia per difetto. A tal uopo, nel caso nostro, converrà calcolare nella radice una cifra in più, quindi sopprimerla senza alterare la precedente.

A. Bassani.

QUISTIONE PROPOSTA

Fra tutti i tetraedri nei quali i segmenti che uniscono i punti di mezzo delle coppie di lati opposti sono eguali fra loro e ad un segmento dato, trovare quello di massimo volume.

D. Besso.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

ARITMETICA

Metodi abbreviati di calcolo numerico (*).

1. Si ottiene il prodotto di un numero per 11, scrivendo al disotto della cifra delle unitá la cifra stessa, al disotto della cifra delle decine le unità semplici risultanti dalla somma di questa cifra e di quella delle unità, al disotto della cifra delle centinaia le unità semplici ottenute addizionando questa cifra con quella delle decine e col riporto (se c'è) della somma precedente e così via. L'ultima cifra del prodotto, a sinistra, è costituita poi dall'ultima del moltiplicando aumentata, se pure è il caso, del riporto proveniente dalla somma precedente.
2. Il prodotto di un numero per 12, 13, 14 .... 18, 19 s'ottiene immediatamente moltiplicando ciascuna cifra del moltiplicando per quella delle unità del moltiplicatore e aggiungendo a questo prodotto la cifra che trovasi alla sua destra e il riporto.
3. Il prodotto di un numero per 21, 31, 41, ... 81, 91 s'ottiene senz'altro moltiplicando per uno la cifra delle unità, del prodotto, quindi successivamente ciascuna cifra del moltiplicando per quella delle decine del moltiplicatore e aggiungendo ogni volta al prodotto la cifra di sinistra e il riporto.
4. Il prodotto di un numero per 111 ha per unitá la cifra delle unità del moltiplicando, per decine la somma della cifra delle decine e delle unità, per centinaia, la somma delle cifre delle centinaia, decine ed unità e il riporto della somma precedente, per migliaia la somma delle migliaia, centinaia e decine del moltiplicando più il riporto e così di seguito (**).

(*) Le semplificazioni di calcolo qui esposte hanno un'importanza teorica affatto secondaria, ma invece un certo interesse pratico essendochè, tutto ciò che vale ad abbreviare il conteggio, ne diminuisce la noia, accresce l'attenzione dell'operatore e in pari tempo la probabilità dell'esattezza. Sotto questo punto di vista le consideri adunque il lettore.

(**) Una regola analoga permette di comporre immediatamente il pro-

5. Il prodotto di un numero per 22, 33, ..., 99 oppure 222, 333, ... in generale per un numero composto di cifre uguali, può ottenersi a norma degli esercizi 1 e 4, raddoppiando, triplicando ecc. ciascuna somma che conduce a trovare le cifre del prodotto prima d'aver aggiunto il riporto.

Ecco ad esempio i calcoli necessari per ottenere il prodotto di 56892 per 333:

$$2.3 = 6;\quad 9 + 2 = 11,\quad 11.3 = 33;\quad 8 + 9 + 2 = 19$$
$$19.3 = 57,\quad 57 + 3 = 60;\quad 6 + 8 + 9 = 23,\quad 23.3 = 69,$$
$$69 + 6 = 75;\quad 5 + 6 + 8 = 19,\quad 19.3 = 57,\quad 57 + 7 = 64;$$
$$5 + 6 = 11,\quad 11.3 = 33,\quad 33 + 6 = 39;\quad 5.3 = 15,\quad 15 + 3 = 18.$$

Per cui

$$56892.333 = 18945036 \ (*).$$

6. Il prodotto di un numero per un altro formato da tutte cifre 9 può ottenersi scrivendo alla destra del moltiplicando tanti zeri quante sono le cifre 9 del moltiplicatore e sottraendo dal numero così ottenuto il moltiplicando stesso.

7. Per moltiplicare un numero per un altro formato da una cifra significativa, diversa da 9, seguita da tutti 9, basta moltiplicarlo per la cifra significativa aumentata di una unità, scrivere alla destra del prodotto ottenuto tanti zeri quanti sono i 9 del moltiplicatore, quindi sottrarre dal numero così ottenuto il moltiplicando stesso.

8. Per moltiplicare per un numero formato da tutte cifre 9, eccezion fatta da quella delle unità, basta scrivere alla destra del moltiplicando tanti zeri quante sono le cifre del moltiplicatore e togliere dal numero ottenuto il pro-

---

dotto anche quando il moltiplicatore sia 1111, 11111,.. in generale un numero costituito da tutte cifre 1.

(*) Va da sè che tutte queste operazioni semplici possono venir fatte a mente.

dotto del moltiplicando per l' eccesso di 10 sulla cifra delle unità.

9. Chiamando a uno qualunque dei numeri contemplati nelle regole 1, 2, 3, 4 e 5, il prodotto d'un numero qualunque per un altro che sia la differenza fra un numero formato da una cifra significativa seguita da zeri ed a, può ottenersi moltiplicando il moltiplicando per la cifra significativa e alla destra del prodotto scrivendo tanti zeri quanti ne ha il minuendo della differenza considerata, finalmente togliendo dal numero così ottenuto il prodotto del moltiplicando per a.

Ed es: essendo $59967 = 60000 - 33$, per moltiplicare per 59967 basterà moltiplicare il moltiplicando per 6, alla destra del prodotto scrivere quattro zeri, quindi applicando la regola n° 5 togliere dal risultato il prodotto del moltiplicando per 33.

10. Il prodotto per un numero di due o più cifre, decomponibile in fattori d'una cifra sola o in fattori della natura di quelli considerati nelle regole 1, 2, 3, 4, 5, può ottenersi moltiplicando il moltiplicando per il primo di questi fattori, il prodotto ottenuto per il secondo e così via fino all'ultimo.

Ad es. dovendo moltiplicare per 72 si moltiplichi prima per 8, quindi il prodotto per 9; dovendo moltiplicare per $781 = 71.11$, si moltiplichi prima per 71, poi il prodotto per 11.

11. Quando il moltiplicatore è decomponibile in gruppi dei quali uno è un numero d'una sola cifra o uno dei numeri degli es. 1, 2, 3, 4, 5 e i gruppi rimanenti sono multipli di esso secondo un numero d'una sola cifra od uno dei numeri degli stessi esercizi 1, 2, 3, 4, 5, per ottenere il prodotto, si può moltiplicare il moltiplicando per il primo gruppo e il prodotto ottenuto per quei numeri secondo i quali i rimanenti gruppi son multipli di questo, scrivendo ogni volta i prodotti parziali in

modo che la prima cifra di ciascuno cada sotto la prima cifra di quel gruppo moltiplicatore che ha servito a produrlo, finalmente eseguendo l'addizione come nell'ordinaria moltiplicazione (*)

Ad es. sia da moltiplicare 3127459864 per 3572849154. Si osservi che il moltiplicatore può essere decomposto nei quattro gruppi (35), (7), (28), (49), (154) pei quali si ha: $35 = 7.5$, $28 = 7.4$, $49 = 7.7$, $154 = 7.22$. Dopo ciò l'operazione può essere eseguita come appresso:

```
                    3 1 2 7 4 5 9 8 6 4
                   (3 5) 7 (2 8) (4 9) (1 5 4)
    ---------------------------------
    2 1 8 9 2 2 1 9 0 4 8
1 0 9 4 6 1 0 9 5 2 4 0
        8 7 5 6 8 8 7 6 1 9 2
          1 5 3 2 4 5 5 3 3 3 3 6
                4 8 1 6 2 8 8 1 9 0 5 6
---------------------------------------
1 1 1 7 3 9 4 2 3 2 9 2 6 1 3 5 5 0 5 6
```

11. Per moltiplicare un numero per 25 o 125 si scrivano 2 o 3 zeri alla sua destra poi si divida il numero risultante per 4 od 8.

12. Il prodotto di due numeri di due sole cifre ciascuno ha per unità il prodotto della cifre delle unità dei fattori, per decine la somma dei prodotti delle decine di ciascun fattore per la cifra delle unità dell'altro più il riporto e per centinaia il prodotto delle cifre delle decine dei due fattori più il riporto. (**)

13. Il prodotto di due numeri che differiscono l'uno in più,

(*) La regola si estende anche al caso in cui alcuni dei gruppi siano multipli di uno dei rimanenti e alcuni altri multipli di un altro dei restanti. Non è necessario che tutte le cifre del moltiplicatore concorrano a formare tali gruppi.

(**) Nel *Trattato d'aritmetica del Bertrand* a p. 35 è esposto un metodo generale di moltiplicazione abbreviata di cui questo è un caso particolare.

l'altro in meno dallo stesso numero formato da una cifra significativa seguita da zeri, può ottenersi facendo il quadrato del numero da cui differiscono e togliendo da questo il quadrato dell'eccesso di detto numero sul minore dei fattori dati.

Ad es: $573 . 627 = 600^2 - 27^2 = 360000 - 729 = 359271$ (*).

14. Il quadrato di un numero qualuque si può ottenere, addizionando il doppio del prodotto di ciascuna cifra per il numero formato dalle seguenti con la somma dei quadrati di tutte le cifre, prestando attenzione nell'operare sulle singole cifre di considerarle seguite da tanti zeri quante sono le cifre che le seguono nel dato numero.

I calcoli mentali da effettuare e la disposizione da dare all'operazioue per comporre il quadrato di 836279, seguono quì appresso:

doppi prodotti delle unità dei diversi ordini prese due a due $\begin{cases} 7.9 = 63\ ,\ 63.2 = 126\ ; \\ 2.9=18,\ 2.18=36,\ 2.7=14,\ 14.2=28,\ 28+3=31\ ; \\ 6.9=54\ ;\ 2.54=108\ ;\ 6.7=42,\ 42.2=84,\ 84+10 \\ =94,\ 6.2=12,\ 12.2=24,\ 24+9=33\ ;\ \text{ecc.} \end{cases}$

somma dei quadrati delle singole unità: $\begin{cases} (64)\ (09)\ (36)\ (04)\ (49)\ (81) \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 836279^2 = \\ \hline 1260 \\ 316 \\ 3348 \\ 37674 \\ 580464 \\ 640936044981 \\ \hline =699362565841 \end{array}$$

15. Il quoziente della divisione d'un numero per 125 può ottenersi moltiplicando il dividendo per 8 e sopprimendo le tre ultime cifre del prodotto. Il resto poi risulta

(*) Il quadrato di 27 può ottenersi senza operazioni ausiliarie applicando la regola dell'es.° 12.

dalla **divisione** (sempre esatta) per 8 del numero trascurato (*).

16. Quando il divisore è un numero decomponibile nei fattori 2,3, . . . 9, 10, 11, 12 per trovare il quoziente si dividerà il dividendo pel primo fattore del divisore (scelgasi il minore), il primo quoziente ottenuto pel secondo fattore (è bene scegliere il minore dei rimanenti), il nuovo quoziente pel terzo fattore e così di seguito. Per avere poi il resto si formerà la somma dei prodotti di ciascun resto per tutti i divisori precedenti. (**)

A. Lugli.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA (3) PROPOSTO A PAG. 99

(3) *Se le coppie di punti* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *sono situate rispettivamente sulle tre rette* BC, CA, AB, *così che le rette* AA_1, BB_1, CC_1 *concorrano in uno stesso punto, e che anche le rette* AA_2, BB_2, CC_2 *concorrano in uno stesso punto, e s'indichino rispettivamente con* α, β, γ *i punti di incontro di* AA_1 *con* B_2C_2, *di* BB_1 *con* C_2A_2 *e di* CC_1 *con* A_2B_2, *le tre rette* $A_2\alpha$, $B_2\beta$, $C_2\gamma$ *concorreranno pure in uno stesso punto*. (D. Besso).

Dimostrazione del prof. *G. Riboni*. (***)

Se si indicano con α_1, β_1, γ_1 i punti di incontro rispettivi di AA_2 con B_2C_2, di BB_2 con C_2A_2 e di CC_2 con A_2B_2,

(*) Sarà utile inoltre che gli alunni siano istruiti a trovare immediatamente (a mente) il quoziente della divisione d'un numero qualsiasi per 11, 12 e 25, il che si conseguirà facilmente quando l'insegnante abbia cura di far loro imparare a memoria i multipli semplici di questi numeri.

(**) L'applicazione di questa regola è specialmente utile nel calcolo dei numeri complessi.

(***) Una dimostrazione simile a questa venne inviata dal Sig. Capitano *I. Beyens*.

sono evidenti le seguenti eguaglianze di rapporti anarmonici

$$\frac{A_2\beta}{C_2\beta} : \frac{A_2\beta_1}{C_2\beta_1} = \frac{CB_1}{AB_1} : \frac{CB_2}{AB_2}$$

$$\frac{C_2\alpha}{B_2\alpha} : \frac{C_2\alpha_1}{B_2\alpha_1} = \frac{BA_1}{CA_1} : \frac{BA_2}{CA_2}$$

$$\frac{B_2\gamma}{A_2\gamma} : \frac{B_2\gamma_1}{A_2\gamma_1} = \frac{AC_1}{BC_1} : \frac{AC_2}{BC_2}$$

dalle quali si ricava

$$\frac{\dfrac{A_2\beta}{C_2\beta} \cdot \dfrac{C_2\alpha}{B_2\alpha} \cdot \dfrac{B_2\gamma}{A_2\gamma}}{\dfrac{A_2\beta_1}{C_2\beta_1} \cdot \dfrac{C_2\alpha_1}{B_2\alpha_1} \cdot \dfrac{B_2\gamma_1}{A_2\gamma_1}} = \frac{\dfrac{CB_1}{AB_1} \cdot \dfrac{BA_1}{CA_1} \cdot \dfrac{AC_1}{BC_1}}{\dfrac{CB_2}{AB_2} \cdot \dfrac{BA_2}{CA_2} \cdot \dfrac{AC_2}{BC_2}}$$

Ma, pel teorema di Ceva, i prodotti che stanno al secondo membro sono entrambi eguali a -1, ed è pure eguale a -1 il prodotto

$$\frac{A_2\beta_1}{C_2\beta_1} \cdot \frac{C_2\alpha_1}{B_2\alpha_1} \cdot \frac{B_2\gamma_1}{A_2\gamma_1};$$

perciò si avrà l'eguaglianza

$$\frac{A_2\beta}{C_2\beta} \cdot \frac{C_2\alpha}{B_2\alpha} \cdot \frac{B_2\gamma}{A_2\gamma} = -1,$$

la quale prova il teorema proposto.

Analogamente si dimostrerebbe che, indicando con a, b, c rispettivamente i punti d'incontro di AA_2 con B_1C_1, di BB_2 con C_1A_1 e di CC_2 con A_1B_1, le rette A_1a, B_1b, C_1c concorrono in uno stesso punto.

DIMOSTRAZIONE ELEMENTARE D'UN TEOREMA SUL CENTRO DI GRAVITÀ D'UN ARCO DI CIRCOLO

1. La somma

$$\cos\beta + \cos 2\beta + \cos 3\beta + \ldots + \cos(n-1)\beta$$

è eguale a

$$\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\beta}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta} - \frac{1}{2}.$$

Infatti, chiamandola S, si ha

$$2\mathrm{S}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta = 2\cos\beta\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta + 2\cos 2\beta\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta + \ldots + 2\cos(n-1)\beta\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta$$

$$= (\operatorname{sen}\tfrac{3}{2}\beta - \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta) + (\operatorname{sen}\tfrac{5}{2}\beta - \operatorname{sen}\tfrac{3}{2}\beta) + \ldots + (\operatorname{sen}(n+\tfrac{1}{2})\beta - \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta)$$

ossia

$$\mathrm{S} = \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\beta}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta} - \frac{1}{2}.$$

2. Sia BAC un arco di circolo di raggio R e centro O e sia A il suo punto di mezzo. Si supponga inscritta in quest'arco una spezzata di $2n$ lati fra loro eguali: sieno $C, C_1, C_2 \ldots\ldots C_{n-1}$, A i vertici di essa situati sull'arco CA, e $D, D_1, D_2, \ldots\ldots D_{n-1}$, A le loro proiezioni sul raggio OA. Il centro di gravità della spezzata sarà un punto G del raggio OA, e, indicando con $2p$ il perimetro della spezzata, si avrà

$$2p.\mathrm{OG} = 2\frac{p}{n}\cdot\left\{\frac{\mathrm{OD}+\mathrm{OD}_1}{2} + \frac{\mathrm{OD}_1+\mathrm{OD}_2}{2} + \ldots + \frac{\mathrm{OD}_{n-1}+\mathrm{OA}}{2}\right\}$$

ossia, indicando con a il rapporto dell'arco AC al raggio

$$\mathrm{OG} = \frac{\mathrm{R}}{2n}(1+\cos a) + \frac{\mathrm{R}}{n}\left[\cos\frac{a}{n} + \cos 2\frac{a}{n} + \ldots + \cos(n-1)\frac{a}{n}\right].$$

In forza del lemma rammentato a principio questa formola diviene

$$\mathrm{OG} = \frac{\mathrm{R}}{2n}(1+\cos a) + \frac{\mathrm{R}}{n}\left\{\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\frac{a}{n}}{2\operatorname{sen}\frac{a}{n}} - \frac{1}{2}\right\}$$

ossia

$$OG = \frac{R}{2n}\cos a + \frac{R}{a}\cdot\frac{\frac{a}{2n}}{\operatorname{sen}\frac{a}{2n}}\cdot\operatorname{sen}\left(a+\frac{a}{2n}\right),$$

e rammentando che il rapporto $\frac{\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ tende ad 1 quando α tende a zero, si avrà

$$\lim OG = \frac{R}{a}\operatorname{sen} a = \frac{\text{corda CB} \times \text{raggio}}{\text{arcoCAB}}.$$

D. Besso.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Genetische Stereometrie von D. Karl Heinze, *weiland Prof. in Cöthen, bearbeitet von Franz Lucke, Gymnasiallehrer in Zerbst* (p. X e 194, con 12 tav. litogr.) Leipzig, Teubner, 1886.

Nei trattati elementari di Geometria solida si sogliono esporre i metodi per determinare i volumi dei prismi e delle piramidi, dei coni e dei cilindri, dei tronchi di coni e cilindri a basi parallele e di alcune porzioni di sfera. Hannovi però molti altri solidi di cui è interessante conoscere la cubatura, sia perchè hanno un'importanza individuale teorica, sia perchè s'incontrano in alcune applicazioni pratiche della geometria (architettura, taglio delle pietre, cristallografia, ecc.) Di una estesa classe di tali solidi, si occupa il trattato (di stereometria in senso stretto) il cui titolo sta scritto in testa di questo articolo. Di esso vogliamo render conto in questo *Periodico*, affinchè più facilmente venga conosciuto dagli insegnanti delle nostre scuole secondarie in genere e da quelli dei nostri Istituti tecnici in ispecie: a raccomandarlo alla loro benevola attenzione basterà il fatto che al concetto suo fondamentale applaudirono gli scienziati tedeschi, anche prima di vederlo attuato. (1)

(1) Senza pretendere di indicare completamente i lavori che prepararono

I solidi studiati dal Sig. Heinze sono generati nel seguente modo. Date in due piani paralleli π_1 π_2 due linee chiuse (curve o poligonali) l_1 l_2, si stabilisca fra i loro punti una corrispondenzaa univoca e si congiungano due punti corrispondenti qualunque con una curva l di specie assegnata; se tutte queste curve (generatrici) si succedono con continuità, esse limitano, assieme alle porzioni di piano (basi) limitate dalle curve l_1 l_2, uno dei solidi da studiare. I volumi V dei più notevoli fra questi corpi si possono esprimere con una formola unica; chiamando, cioè, s_1 e s_2 le aree delle basi e s l'area della sezione fatta nel solido dal piano bisettore dello strato π_1 π_2 e h lo spessore di questo strato, si ha

$$V = \frac{1}{6} h \, (s_1 + 4s + s_2),$$

supposto: 1° che le generatrici siano rettilinee; 2° che le curve l_1 l_2 siano ellissi simili con gli assi paralleli e con i centri su una perpendicolare a π_1 e le generatrici siano coniche con un vertice comune. Il fatto che questa formola insegna a eseguire metodicamente la cubatura di molti solidi, è una delle ragioni del nome « stereometria genetica » dato dall'A. alla sua opera. Essa formola dimostra che, date le curve l_1 l_2 l, il calcolo di V è ridotto a quello di s.

Variando le linee l_1 e l_2, la legge di corrispondenza univoca fra i loro punti e le curve generatrici si otterranno infiniti solidi; lo studio di essi è facilitato da una opportuna classificazione proposta dall'A.: crediamo necessario indicarla qui sommariamente per porre in grado il lettore di giudicare del numero e della varietà di corpi studiati nel libro che analizziamo. (1)

---

l'opera di cui ci occupiamo o aiutarono gli autori nella compilazione di essa,
citerò qui alcuni scritti che hanno con certe parti di questa un' attinenza
strettissima e la cui lettura interesserà chi voglia approfondirsi in questo
genere di studii:

Steiner. — Giornale di Crelle, Vol. XXIII (1842).
Koppe. — Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie (Essen 1843).
Ligowsky. — Inhaltsberechnung der Körper nach einer einzigen Formel. 1847.
Bellavitis. — Lezioni di geometria descrittiva (Padova 1851) p. 143.
E. F. August. — Giornale di Crelle, Vol. XXXXV (1853); cf.
» Giornale di Borchardt, Vol. LX (1862).
Wittstein. — Das Prismatoid (Hannover 1860).
» Archivio di Grunert. Parte XXXIX.

(1) Le numerose e belle figure litografate che accompagnano il testo, permettono al lettore di immaginare, senza troppo gravi difficoltà, anche i solidi di definizione più complicata; sicchè non condividiamo l'opinione del

A) Solidi a generatrici rettilinee.

I. Solidi a basi poligonali.

1. Le due basi sono eguali e hanno i lati omologhi paralleli (Prisma).
2. Le due basi sono simili e hanno i lati omologhi paralleli (Tronco di piramide).
3. Le due basi sono equiangole e hanno i lati omologhi paralleli (Obelisco).
4. Le due basi sono qualunque.
5. Una delle due basi riducesi a un segmento rettilineo (Cuneo).
6. Una delle due basi riducesi a un punto (Piramide).
7. Entrambe le basi sono segmenti rettilinei.
8. Entrambe le basi si riducono a punti.

Riguardo ai solidi di tale specie è da notare che le loro facce possono essere o triangoli o parallelogrammi o trapezii oppure essere limitate dai lati di un quadrilatero gobbo. In quest'ultimo caso, la faccia stessa è il luogo delle posizioni di un segmento rettilineo i cui estremi scorrono su due lati di questo e che è parallelo al piano π_1 (a cui sono paralleli gli altri due lati del quadrilatero); quindi essa è una porzione di paraboloide iperbolico limitata da quattro generatrici, due dell'un sistema e due dell'altro.

II. Solidi a base curvilinee.

Se in ognuna delle sottospecie testè enumerate, si suppone che il numero dei lati delle basi cresca indefinitamente mentre i lati stessi indefinitamente diminuiscano, si otterrà una sottospecie dei solidi a basi curvilinee.

Fra i corpi di cui così si riesce a determinare il volume, noteremo il cilindro e il tronco di cilindro, il cono e il tronco di cono, la tinozza (1), la campana (2), il tronco di iperboloide a una falda di rotazione a basi parallele, ecc.

B. Solidi a generatrici curvilinee.

I. Solidi a basi curvilinee.

1. Le due basi sono ridotte a punti (Es. Sfera, ellissoide).

Sig. Lucke, il quale afferma essere i modelli *conditio sine qua non* per insegnare la Stereometria di Heinze.

(1) Questa corrisponde all'ipotesi che l_1 e l_2 siano due ellissi ad assi paralleli con i centri su una perpendicolare ai loro piani e che l siano rette poste in piani che passano per questa e la incontrano in punti esterni allo strato π_1 π_2.

(2) In questo caso l_1 è un circolo o un'elisse e l_2 una retta ogni punto della quale corrisponde a una coppia di punti di l_1.

2. Una base è ridotta a un punto (Zona a una base di una sfera, di ellissoide rotondo o di un iperboloide rotondo).

3. Le due basi sono simili (Disco).

4. Le due basi sono eguali.

II. Solidi a basi poligonali.

1. Le due basi sono ridotte a punti (Unghie sferiche e ellissoidiche).

2. Una base è ridotta a un punto.

3. Le basi sono simili.

4. Le basi sono eguali.

I risultati ottenuti studiando questi solidi, insegnano a trovare i volumi di molti corpi, che non possono venir compresi nella definizione generale prima riportata, ma che possono decomporsi in parti soddisfacenti questa condizione. Citeremo come esempi i cinque corpi regolari (1) (di Platone), i tredici corpi semiregolari (2) (di Archimede), il toro, alcune volte, ecc. Aggiungeremo che l'A. determina anche la superficie laterale o totale di molti fra i solidi che studia, che spesso nelle formole che ottiene entra un angolo atto a individuare la forma del solido, e che egli in tali casi non manca di studiare che cosa accade al variare di quest'angolo.

Queste indicazioni crediamo sufficienti a porgere un'idea abbastanza esatta del libro di cui trattiamo e non v'ha chi non vegga che largo campo possa trovarvi un abile insegnante nello scegliere quali quistioni possa svolgere egli stesso, quali possa proporre come esercizio ai discienti: onde non si può che tributare larga lode a chi ideò quest'opera e a chi la condusse felicemente a termine. Ma chi credesse di trovarvi quel rigore di metodo e di esposizione che oggidì a ragione si pretende in un libro didattico, dovrebbe ben presto riconoscere di essersi ingannato. A persuadere il lettore della deficienza che da questo lato presenta il trattato dell'Heinze, basti citare due esempii.

Il primo, che è anche il più grave, è offerto dalla proposizione che sta a base della Stereometria genetica. Essa è enunciata dall'A. come segue (p. 2):

« Due solidi sono equivalenti (*inhaltsgleich*) se le sezioni

(1) Di questi l'A. determina, non solo il volume, ma anche le superficie, i raggi delle sfere inscritte e circoscritte e gli angoli diedri.

(2) Queste possono ottenersi con opportune sfaldature dai corpi regolari e hanno la proprietà comune di essere inscrittibili in una sfera di cui l'A. determina in ogni caso il raggio; anche di essi l'A. trova la superficie.

fatte in essi da due piani qualunque paralleli o equidistanti da un piano fisso sono equivalenti (*gleich*) ».

Questa proposizione è chiamata Postulato o Assioma (*Grundsatz*) di Cavalieri e però non viene dimostrata. Si sarebbe tentati di considerarla come una definizione di ciò che s'intende per solidi equivalenti; ma l'autore aggiunge la seguente « spiegazione »:

« Per rendersi ragione di questa proposizione s'imaginino condotti tanti piani aventi la stessa giacitura del dato e vicinissimi fra loro; allora i due solidi saranno divisi in istrati così sottili da poter venir considerati come limiti di corpi; allora non si ha che da aggiungere cose eguali a cose eguali », la quale dimostra che l'A. la considera come una vera proposizione. Ora, si può effettivamente considerarla come un assioma o un postulato? e in caso negativo le ultime parole riportate possono riguardarsi come una dimostrazione di essa?

L'altro esempio che vogliamo citare ci è fornito dalla nota a pag. 64-5, in cui l'A. si propone di dimostrare la eguaglianza (priva di senso) $\infty.0^2 = 0$. Egli dice, perciò, essere $\infty.0^2 = \infty.0.0$, rammenta che $\infty.0$ è eguale a una quantità finita k e conclude $\infty.0^2 = k.0 = 0$. Non aggiungiamo alcun commento, ritenendolo superfluo.

Certamente un lettore provetto nelle dottrine del calcolo infinitesimale, saprà, senza gran fatica, sostituire questi e altri ragionamenti e modi di esprimersi dell'A. con altri esenti da qualsiasi obbiezione: ma altrettanto può forse ripetersi per uno dei lettori ai quali sembra di preferenza destinato il libro dell'Heinze?

Concludiamo pertanto dicendo che l'opera di cui trattiamo potrà essere di utilità grandissima per un maestro che ne sappia usare con molta cautela (1) e augurandoci che il Manuale di Stereometria genetica promessoci dal Sig. Lucke sia esente dai non lievi difetti che si notano nel libro che egli ha ora publicato: solo in tal caso sarà vivamente desiderabile la sua diffusione fra gli allievi delle nostre scuole.

Mantova, 26 Settembre 1886.

GINO LORIA.

---

(1) Consigliamo lo studio della bellissima memoria di Steiner: Ueber einige stereometrische Sätze (Gesammelte Werke, II Bd., p. 311—320) che, per la sostanza ha qualche punto di contatto con la Stereometria genetica, ma che per la forma ne differisce completamente.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXIV. Settembre e Ottobre, Novembre e Dicembre 1886. Napoli, Benedetto Pellerano, editore.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira*. Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VII, n. 3. Coimbra, 1886.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy* Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 2e série. Dixième année. N. 11 et 12. Paris, 1886.

Journal de Mathématiques élementaires publié par *H. Vuibert*. 11e Année. N. 4, 5, 6. Paris, M. Nony, 17. Rue des Écoles, 1886.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome sixième, Novembre et Decembre 1886.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XVIII. N. 21, 22, 23, 24. Firenze, 1886.

Bertini (E.) — Sui fasci di quadriche in uno spazio ad *n* dimensioni. — Sulla geometria degli spazi lineari in uno spazio ad *n* dimensioni (1886).

Bianchi (L.) — Sulle soluzioni comuni a due equazioni a derivate parziali del 2° ordine con due variabili (1886).

Giudice (F.) — Algebra ad uso delle scuole liceali. Palermo. Remo Sandron editore, 1886. — Sulla determinezione delle radici reali delle equazioni a coefficienti numerici reali.

Gerbaldi (F.) — Primi elementi di Aritmetica. Torino, Bocca, 1887.

Jung (G.) — Sulle trasformazioni piane multiple. — Di due trasformazioni multiple associate a ogni trasformazione birazionale. — Di una terza trasformazione di genere p e di grado $p+1$ associata a ogni trasformazione piana birazionale.

Porena (F.) — Sul deperimento fisico della regione italica. — La « Geografia italica » del *Nissen*. — Roma, 1886.

Pittarelli (G.) — Studio algebrico-geometrico intorno alla corrispondenza (1, 2). — Le cubiche con un punto doppio e la corrispondenza (1, 2). Roma, 1886.

Rivelli (A.) — I giuochi matematici illustrati. Napoli, tip. De Angelis, 1886

Rodrigues (I. M.) — Introducçao à theoria da Balistica. Lisboa, 1886.

Sujni (A.) — Teoria generale delle rappresentazioni prospettiche e dei metodi di descrizione grafica dello spazio a tre dimensioni. Milano, tip. degli ingegneri, 1886.

Vigarié (E.) — Propriétés générales des cercles de Tücker. Paris, 1886.

SOLUZIONI IN NUMERI INTERI
DI EQUAZIONI INDETERMINATE DI 1° GRADO

I.

1. Si sa che ogni equazione a coefficienti razionali di 1.° grado a due incognite, che ammetta soluzioni in numeri interi, può ridursi alla forma

$$(1) \qquad a_1 x_0 + a_0 x_1 = k$$

ove a_0, a_1, k sono numeri interi noti, e a_0, a_1 sono inoltre primi tra loro. Di più possiamo supporre che i numeri a_0, a_1 siano positivi, chè, se non fossero, si ridurrebbero tali, cangiando, secondo occorrerà, x_0 in $-x_0$ x_1 in $-x_1$.

Applichiamo ai numeri a_0, a_1 il processo della ricerca del massimo comun divisore; se q_1, q_2, , . . q_n sono i quozienti e a_2, a_3, , . . a_{n+1} i resti che si ottengono successivamente, avremo

$$(2) \quad a_0 = q_1 a_1 + a_2, \; a_1 = q_2 a_2 + a_3, \ldots, a_{n-1} = q_n a_n + a_{n+1},$$

ove, per essere a_0, a_1 primi tra loro, è

$$(3) \qquad a_{n+1} = 1.$$

Moltiplicando la (1) per a_2 e la prima delle (2) per k e sottraendo, risulta

$$a_0 (a_2 x_1 - k) + a_1 (a_2 x_0 + q_1 k) = 0,$$

da cui si deduce che, essendo a_0 primo con a_1, la quantità $a_2 x_0 + q_1 k$ è divisibile per a_0. Ponendo allora

$$a_2 x_0 + q_1 k = a_0 x_2,$$

con x_2 numero intero, la precedente eguaglianza diviene

$$a_2 x_1 + a_1 x_2 = k.$$

Analogamente operando si perviene al seguente sistema d'equazioni

$$(4)\quad \begin{cases} a_1x_0 + a_0x_1 = k \\ a_2x_1 + a_1x_2 = k \\ a_3x_2 + a_2x_3 = k \\ \dots\dots\dots \\ a_{n+1}x_n + a_nx_{n+1} = k, \end{cases}$$

l'ultima delle quali, quando si badi alla (3), è soddisfatta da

$$(5)\qquad x_{n+1} = 0, \quad x_n = k.$$

Moltiplichiamo le (4) rispettivamente pei numeri indeterminati $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e sommiamo; otterremo

$$(6)\quad \lambda_0 a_1 x_0 + (\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_2)x_1 + \dots + (\lambda_{n-1}a_{n-1} + \lambda_n a_{n+1})x_n + \lambda_n a_n x_{n+1} = \\ = (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)\, k$$

Se determiniamo le λ in modo che sia

$$\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_2 = 0, \ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_3 = 0, \dots, \ \lambda_{n-1}a_{n-1} + \lambda_n a_{n+1} = 0,$$

risulterà in generale

$$\lambda_m = \frac{(-1)^m\, a_0 a_1 \lambda_0}{a_m a_{m+1}}.$$

Per questa, per la (3) e per la prima delle (5) si ricava dalla (6)

$$(7)\quad x_0 = a_0 k \left\{ \frac{1}{a_0a_1} - \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} - \dots + \frac{(-1)^n}{a_n \cdot 1} \right\}.$$

Se dalla (4) si esclude la prima e sulle rimanenti si opera in modo analogo al precedente, si trova

$$(8)\quad x_1 = a_1 k \left\{ \frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{a_2a_3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{a_n \cdot 1} \right\},$$

il qual risultato poteva anche ottenersi direttamente col sostituire nella (1) il valore di x_0 più sopra trovato.

2. Le (7), (8) ci danno una soluzione della (1); la soluzione generale, per quello che si sa dall'analisi indeterminata di 1° grado, sarà data dalle formule seguenti:

$$(9)\quad \begin{cases} x_0 = a_0 \left\{ k \left(\dfrac{1}{a_0 a_1} - \dfrac{1}{a_1 a_2} + \dfrac{1}{a_2 a_3} - \dots + \dfrac{(-1)^n}{a_{n-1}} \right) + \theta \right\} \\ x_1 = a_1 \left\{ k \left(\dfrac{1}{a_1 a_2} - \dfrac{1}{a_2 a_3} + \dots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{a_{n-1}} \right) - \theta \right\}, \end{cases}$$

ove θ rappresenta un numero intero qualunque positivo o negativo.

3. Se consideriamo ora la serie dei numeri interi

$$a,\ b,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \dots\ r_n,$$

ove $r_1, r_2, \dots, r_n$ sono i resti che si ottengono col dividere successivamente a per b, b per r_1, r_1 per r_2, ...r_{n-2} per r_{n-1}, e poniamo

$$(10)\qquad \Sigma\frac{1}{ab} = \frac{1}{ab} - \frac{1}{br_1} + \frac{1}{r_1 r_2} - \dots + \frac{(-1)^n}{r_{n-1} r_n},$$

risulteranno le seguenti relazioni

$$(11)\quad \begin{cases} \Sigma\dfrac{1}{ab} + \Sigma\dfrac{1}{ba} = \dfrac{1}{ab} \\ \Sigma\dfrac{1}{ba} = \Sigma\dfrac{1}{br_1}. \end{cases}$$

Infatti se $a < b$, allora $r_1 = a$ e la seconda delle (11) è evidente; inoltre si ha

$$\Sigma\frac{1}{ba} = \Sigma\frac{1}{br_1} = \frac{1}{br_1} - \frac{1}{r_1 r_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{r_{n-1} r_n},$$

che combinata colla (10) ci dà la prima delle (11). Se poi $a > b$, allora il resto della divisione di b per a è la stessa b, epperò

$$\Sigma\frac{1}{ba} = \frac{1}{ba} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{br_1} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{r_{n-1} r_n};$$

e anche in questo caso abbiamo le (11).

4. Per ciò che precede avremo adunque

$$(13)\quad \begin{cases} \sum \dfrac{1}{a_0 a_1} + \sum \dfrac{1}{a_1 a_0} = \dfrac{1}{a_0 a_1} \\[2ex] \sum \dfrac{1}{a_1 a_0} = \sum \dfrac{1}{a_1 a_2}\,; \end{cases}$$

e le (9), badando alla seconda delle precedenti, potranno scriversi

$$(14)\quad \begin{cases} x_0 = a_0\,(k\sum \dfrac{1}{a_0 a_1} + \theta) \\[2ex] x_1 = a_1\,(k\sum \dfrac{1}{a_1 a_0} - \theta). \end{cases}$$

La prima delle (13) ci fa vedere che le (14) soddisfano effettivamente la (1); infatti sostituendo in questa ad x_0, x_1 i valori dati dalle (14), risulta per l'appunto la prima delle (13).

II.

5. Sia ora un'equazione di primo grado con un numero qualunque d'incognite

$$(15)\qquad a_n x_0 + a_{n-1} x_1 + a_{n-2} x_2 + \ldots + a_0 x_n = k,$$

nella quale i numeri k, a_0, a_1, ... a_n sono interi. Inoltre attribuendo i segni dei termini del primo membro alle incognite rispettive, potremo supporre che le a sieno tutte positive; di più, poichè possiamo dividere l'equazione pei fattori di k che sieno comuni a tutte le a, potremo anche supporre che nessun fattore di k sia comune a tutte le a. È poi necessario, affinchè l'equazione (15) ammetta soluzioni in numeri interi, che nessun fattore diverso dall'unità sia comune a tutte le a, chè altrimenti il primo membro dell'equazione sarebbe divisibile per tali fattori e il secondo no.

Applichiamo ora ai numeri a_0, a_1, a_2, ... , a_n il processo della ricerca del massimo comun divisore, che già sappiamo, per l'ipotesi fatta, essere l'unità. A tale scopo sia

δ_1 il massimo comun divisore di a_0, a_1
δ_2 » » » » δ_1, a_2
δ_3 » » » » δ_2, a_3
. . . .
δ_{n-1} » » » » δ_{n-2}, a_{n-1},

sarà poi

t il massimo comun divisore di δ_{n-1}, a_n.

Ponendo allora

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{a_0}{\delta_1}=a'_0\,, & \dfrac{a_1}{\delta_1}=a'_1 \\[2mm] \dfrac{\delta_1}{\delta_2}=\delta'_1\,, & \dfrac{a_2}{\delta_2}=a'_2 \\[2mm] \ldots\ldots, & \ldots\ldots \\[2mm] \dfrac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}}=\delta'_{n-2}, & \dfrac{a_{n-1}}{\delta_{n-1}}=a'_{n-1} \end{cases}$$

il numero a'_0 sarà primo con a'_1, δ'_1 con a'_2, δ'_2 con a'_3, $\ldots\ldots\delta'_{n-2}$ con a'_{n-1}. Se per tanto poniamo in oltre

$$(17)\quad \begin{cases} a'_1\, x_{n-1} + a'_0\, x_n = y_{n-1} \\ a'_2\, x_{n-2} + \delta'_1 y_{n-1} = y_{n-2} \\ a'_3\, x_{n-3} + \delta'_2 y_{n-2} = y_{n-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{n-1}\, x_1 + \delta'_{n-2} y_2 = y_1\,, \end{cases}$$

ognuna di queste equazioni ammetterà soluzioni in numeri interi.

Moltiplicando le (17) rispettivamente per $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_{n-1}$ e sommandole, otteniamo per le (16)

$$a_{n-1}\, x_1 + a_{n-2}\, x_2 + \ldots + a_0\, x_n = \delta_{n-1}\, y_1\,,$$

che, combinata colla (15), ci dà

$$a_n x_0 + \delta_{n-1} y_1 = k.$$

Anche questa equazione, per essere δ_{n-1}, a_n primi tra loro, ammette soluzioni in numeri interi. Applichiamo allora a questa e alle (17) le formule (14); avremo

$$
(18)\quad \begin{cases}
x_0 = \delta_{n-1}\left(k\sum\frac{1}{\delta_{n-1}\,a_n}+\theta_1\right), & y_1 = a_n\left(k\sum\frac{1}{a_n\,\delta_{n-1}}-\theta_1\right)\\
x_1=\delta'_{n-2}\left(y_1\sum\frac{1}{\delta'_{n-1}a'_{n-1}}+\theta_2\right), & y_2=a'_{n-1}\left(y_1\sum\frac{1}{a'_{n-2}\delta'_{n-1}}-\theta_2\right)\\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\
x_{n-1}=a'_0\left(y_{n-1}\sum\frac{1}{a'_0a'_1}+\theta_n\right), & x_n=a'_0\left(y_{n-1}\sum\frac{1}{a'_1a'_0}-\theta_n\right),
\end{cases}
$$

ove le θ sono numeri interi qualunque positivi o negativi.

Queste formule servono al nostro scopo, perchè dandoci esse direttamente i valori di y_1 e x_0, si potranno poi per successive sostituzioni calcolare le rimanenti y e quindi anche le rimanenti x.

6. Abbiamo veduto essere condizione *necessaria* affinchè l'equazione (15) ammetta soluzioni in numeri interi, che, tolti i fattori comuni ai due membri, il massimo comun divisore dei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sia l'unità; ora vediamo che questa condizione è anche *sufficiente*, perchè, quando essa si verifica, le (18) ci danno tutte le soluzioni in numeri interi della proposta equazione.

7. Riprendiamo la serie dei numeri

$$a,\ b,\ r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_n;$$

l'ultimo resto r_n sarà il massimo comun divisore di tutti i numeri della serie. Dividendo questi numeri pel loro massimo comun divisore, è chiaro che otterremo una serie di quozienti

$$a',\ b',\ r'_1,\ r'_2,\ \dots,\ r'_{n-1},\ 1$$

tale che i numeri $r'_1, r'_2, \dots, r'_{n-1}$, 1 saranno rispettivamente i resti delle divisioni di a' per b', di b' per r'_1, di r'_1 per r'_2, ... di r'_{n-2} per r'_{n-1}. Risulterà per tanto

$$\frac{1}{a'b'}-\frac{1}{b'r'_1}+\frac{1}{r'_1r'_2}-\ldots+\frac{(-1)^n}{r'_{n-1}.1}=r_n^2\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{br_1}+\frac{1}{r_1r_2}-\ldots+\frac{(-1)^n}{r_{n-1}r_n}\right)$$

ossia

$$\sum\frac{1}{a'b'}=r_n^2\sum\frac{1}{ab}\,.$$

Per questa eguaglianza, badando alle (16), le (18) divengono

$$(19)\quad\begin{cases} x_0=\delta_{n-1}\left(k\sum\frac{1}{\delta_{n-1}a_n}+\theta_1\right),\quad y_1=a_n\left(k\sum\frac{1}{a_n\delta_{n-1}}-\theta_1\right),\\ x_1=\frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}}\left(y_1\delta^2_{n-1}\sum\frac{1}{\delta_{n-2}a_{n-1}}+\theta_2\right),\quad y_2=\frac{a_{n-1}}{\delta_{n-1}}\left(y_1\delta^2_{n-1}\sum\frac{1}{a_{n-1}\delta_{n-2}}-\theta_2\right),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_{n-1}=\frac{a_0}{\delta_1}\left(y_{n-1}\delta_1^2\sum\frac{1}{a_0a_1}+\theta_n\right),\quad x_n=\frac{a_1}{\delta_1}\left(y_{n-1}\delta_1^2\sum\frac{1}{a_1a_0}-\theta_n\right). \end{cases}$$

8. Se due coefficienti della (15) sono primi tra loro, indicandoli con a_0, a_1, potremo scrivere

$$a_1x_{n-1}+a_0x_n=k-a_nx_0-a_{n-1}x_1-\ldots-a_2x_{n-2}\,,$$

a cui applicando le formule (14) per rispetto alle due incognite x_{n-1}, x_n troveremo

$$(20)\quad\begin{cases} x_{n-1}=a_0\left\{(k-a_nx_0-a_{n-1}x_1-\ldots-a_2x_{n-2})\sum\frac{1}{a_0a_1}+\theta\right\}\\ x_n=a_1\left\{(k-a_nx_0-a_{n-1}x_1-\ldots-a_2x_{n-2})\sum\frac{1}{a_1a_0}-\theta\right\}. \end{cases}$$

Per tanto, assegnando alle x_0, x_1, ... x_{n-2}, θ dei valori interi arbitrari positivi o negativi, risulteranno determinati valori interi per x_{n-1}, x_n.

A questo medesimo risultato si poteva giungere applicando le (19), ove nel caso presente le δ sono tutte eguali all'unità. Essendo infatti

$$\Sigma \frac{1}{\delta a} = \Sigma \frac{1}{1.a} = 0$$

$$\Sigma \frac{1}{a\delta} = \Sigma \frac{1}{a.1} = \frac{1}{a},$$

si trova

$$x_0 = \theta_1, \quad x_1 = \theta_2, \ldots . x_{n-2} = \theta_{n-1},$$

$$x_{n-1} = a_0 \left(\gamma_{n-1} \Sigma \frac{1}{a_0 a_1} + \theta_n\right), \quad x_n = a_1 \left(\gamma_{n-1} \Sigma \frac{1}{a_1 a_0} - \theta_n\right),$$

$$\gamma_1 = k - a_n \theta_1, \; \gamma_2 = \gamma_1 - a_{n-1}\theta_2, \ldots . \gamma_{n-1} = \gamma_{n-2} - a_2 \theta_{n-1},$$

dalle quali si ricava

$$\gamma_{n-1} = k - a_n \theta_1 - a_{n-1}\theta_2 - \ldots - a_2 \theta_{n-1} = k - a_n x_0 - a_{n-1} x_1 - \ldots - a_2 x_{n-2}$$

e quindi anche le (20) quando si ponga $\theta_n = \theta$.

9. Analoghi risultati si otterrebbero se fra i coefficienti della (15), non essendone due primi tra loro, ve ne sia un certo numero m, che hanno l'unità per loro massimo comun divisore; poichè indicando con a_0, a_1, a_2, . . . a_m detti coefficienti sarebbe

$$\delta_m = \delta_{m+1} = \ldots = \delta_{n-1} = 1.$$

Urbino, 18 Novembre 1886.

C. Moriconi.

SULL'INSEGNAMENTO DELLA TRIGONOMETRIA
NELLE SCUOLE SECONDARIE

Gli elementi della trigonometria che da molti anni formavano parte dei programmi dei nostri Licei, vi sono stati tolti pochi anni fa, e poi sono stati rimessi, nei programmi del 1885, ora in vigore. Si capisce da un lato l'opportunità di semplificare, epperò ridurre, la materia che deve essere insegnata, anzi a me piacerebbe che tali riduzioni si facessero in più larga misura, e non soltanto nella matematica; d'altra parte la nozione dei rapporti trigonometrici giova ad intendere alcune leggi fisiche; e gli elementi della trigonometria propriamente detta sono parte essenziale di quel corredo di cognizioni matematiche che è necessario agli ingegneri, di guisa che, se questo insegnamento venisse tolto dai Licei, sarebbe indispensabile che esso venisse impartito nelle Università, ma non facil cosa sarebbe, per la natura sua elementare, e per altre ragioni, che effettivamente si desse in ogni Università; aggiungo che i primi elementi di trigonometria bastano perchè i discenti sieno in grado di rendersi conto, almeno all'ingrosso, di alcuni degli ammirabili risultati ottenuti dagli Astronomi, e p. e. come, mediante certe misure di angoli e di lunghezze, e certi calcoli fondati su quelle, si possa determinare la distanza dalla terra alla luna: e in così fatte nozioni sta principalmente il valore di tale insegnamento nella coltura generale.

2. Per queste considerazioni penso che la superiore Autorità scolastica ha bene operato rimettendo nei Licei l'insegnamento degli elementi di trigonometria piana; ma credo che ancor meglio avrebbe fatto se tale insegnamento avesse limitato alla sua parte essenziale. E per meglio spiegare il mio concetto trascrivo testualmente il programma:

Funzioni circolari e loro variazioni al variare dell'arco — Riduzione degli archi al primo quadrante — Relazioni fra le funzioni circolari di uno stesso arco.

Seno, coseno, tangente e cotangente della somma e della differenza di due archi, del doppio e della metà d'un arco — Relazioni fondamentali fra i lati e gli angoli d'un triangolo rettilineo.

Applicazioni — Uso delle tavole logaritmiche delle funzioni circolari.

Ora pare a me che fra gli elementi d'Algebra e Geometria, quali si insegnano nelle prime due classi del Liceo, e quelli elementi della teoria generale delle funzioni goniometriche, richiesti dal programma della terza classe, sia una lacuna, a coprire la quale gioverebbe uno studio preliminare di queste funzioni limitate all'angolo acuto o, se si vuole, estese anche all'angolo ottuso. Anche in questa, come in altre parti dell'insegnamento, non si deve trascurare del tutto il processo storico, che è quello della generazione delle idee. D'altra parte uno studio elementare del seno e del coseno è sufficiente allo scopo della trigonometria propriamente detta, cioè la risoluzione dei triangoli. E mentre trovo opportuno, per le ragioni sopra avvertite, che la risoluzione dei triangoli, almeno nella sua parte più elementare, sia insegnata nei Licei, mi sembra che senza alcun inconveniente si potrebbe ommettere in quelle scuole la trattazione delle funzioni goniometriche considerate in generale, la quale trova il suo vero posto nel corso d'Analisi algebrica che viene impartito nelle Università.

3. E perchè questo studio riesca veramente efficace, credo che la costruzione e l'uso delle Tavole dovrebbero avervi più larga parte di quella che nella maggior parte dei libri moderni le viene accordata.

Infatti, posto il problema della trigonometria, si vede subito ch'esso si riduce ai due seguenti:

Assegnare, per qualunque valore d'un angolo acuto d'un triangolo rettangolo, il rapporto del cateto ad esso opposto all'ipotenusa.

Dato il valore del rapporto d'un cateto d'un triangolo rettangolo all'ipotenusa, assegnare qualunque sia quello, la misura dell'angolo opposto a quel cateto.

La risoluzione di questi due problemi, che è la cosa più essenziale, suol essere appena accennata, e in quella vece si suol dare il posto d'onore a formole, utili senza dubbio, ma che fanno perdere di vista l'obbiettivo principale.

4. Osservo poi che, per coloro che non sanno ancora abbastanza bene cosa sieno queste funzioni che si chiamano seno, coseno, ecc., nè cosa sia quell'altra funzione che si chiama logaritmo, l'uso delle tavole dei logaritmi dei seni, coseni, ecc. non può assolutamente essere bene inteso. Con sufficiente esercizio esso potrebbe diventare una pratica, punto educativa, ma non inutile per coloro che devono proseguire gli studi matematici, ma quel poco esercizio che a tale uso può essere accordato nell'insegnamento liceale si riduce ad una perdita di tempo.

E quì mi piace riferire un brano d'uno scritto del compianto prof. *Hoüel.* *

« L'enseignement de la trigonometrie est compliqué d'une manière facheuse par l'habitude où l'on est d'introduire dès le début l'usage de Tables contenant les *logarithmes* des fonctions circulaires au lieu des valeurs naturelles de ces fonctions. Il serait infiniment préferable de commencer par exposer, avec très peu de details et en se fondant uniquement sur les bissections successives des angles, la construction des Tables de valeurs naturelles, et ce serait un excellent exercice pour les éléves que de construire eux mêmes, en suivant les prescriptions indiquées, une petite table, a deux

---

* Remarques sur l'enseignement de la trigonometrie par J. Hoüel. Giornale di Battaglini, Vol. XIII.

ou trois decimales et des intervalles assez rapprochés pour que l'interpolation de cette table fut commode. Cette table, corrigée avec soin, devrait être seule mise entre leurs mains; avec son aide, en y joignant le secours de la regle à calcul, ils seraient à même de résoudre toutes les questions de trigonometrie avec une approximation bien superieure à l'exactitudine de leurs constructions graphiques, et beaucoup plus promptement que par l'emploi des logarithmes, surtout quand on complique les formules d'angles auxiliaires, pour les rendre ce qu'on appelle *calculables par logarithmes*.

L'usage prématuré des logarithmes trigonometriques dans un enseignement s'adressant à des jeunes gens encore peu experts dans la pratique du calcul, ne peut que retarder leurs progrès dans cet art et leur en fermer l'intelligence. Le mal est grave surtout lorsqu'on met dans leurs mains novices les grandes Tables qui conviennent seulement aux praticiens exercés, et dont le maniement n'apprend rien de plus, au point de vue de la théorie, que celui des Tables à trois ou quatre figures.

5. In quanto alla costruzione ed all'uso delle tavole si possono seguire diverse vie più o meno elementari. Ma, perchè l'interpolazione non sia troppo incomoda, non basta fondarsi sulle bisezioni successive degli angoli come accenna l'Hoüel. Perciò non mi sembra inutile l'esporre qui un metodo molto elementare col quale si possono calcolare i seni dei multipli di $15'$, con cinque decimali, a meno di $\frac{6}{10^6}$.

Non occorre rammentare i metodi pel calcolo dei seni e coseni dei multipli di $3°$. Mediante questi seni e coseni, dopo avere calcolato il coseno di $1° \frac{1}{2}$, si ricavano agevolmente i seni e coseni dei multipli dispari di $1° \frac{1}{2}$, applicando le formole

$$\operatorname{sen} mb = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(mb+b) + \operatorname{sen}(mb-b)}{2}}{\cos b}, \quad \cos mb = \frac{\dfrac{\cos(mb+b)+\cos(mb-b)}{2}}{\cos b};$$

e per mezzo di queste stesse formole, dopo avere calcolato il coseno di $45'$, si possono calcolare i seni e coseni dei multipli dispari di $45'$. Collo stesso metodo si potrebbero calcolare successivamente i seni e coseni dei multipli di $22'\frac{1}{2}$, di $11'\frac{1}{4}$, ecc; ma, perchè la differenza fra due angoli consecutivi della tavola sia un numero intero di minuti, si dovrebbero poscia applicare quelle formole, pel calcolo di seni e coseni di angoli molto piccoli, che risultano dalle limitazioni del seno e del coseno in funzione del rapporto dell'arco al raggio. Molto più facilmente si raggiunge lo scopo col calcolo di sen 1°, calcolo che si può effettuare colla massima semplicità.

Una figura molto semplice mette in evidenza che il seno della media aritmetica di due angoli acuti è maggiore della media aritmetica dei loro seni. Da questa proposizione si ricavano le disuguaglianze

$$\mathrm{sen}3a - \mathrm{sen}2a > \mathrm{sen}4a - \mathrm{sen}3a$$

$$\mathrm{sen}2a - \mathrm{sen}a > \mathrm{sen}4a - \mathrm{sen}3a$$

$$\mathrm{sen}a > \mathrm{sen}4a - \mathrm{sen}3a$$

dalle quali risulta

$$\mathrm{sen}4a < \tfrac{4}{3}\mathrm{sen}3a.$$

Inoltre dalle disuguaglianze

$$\mathrm{sen}4a - \mathrm{sen}3a > \mathrm{sen}5a - \mathrm{sen}4a$$

$$\mathrm{sen}4a - \mathrm{sen}3a > \mathrm{sen}6a - \mathrm{sen}5a$$

si deduce

$$\mathrm{sen}4a > \mathrm{sen}3a + \tfrac{1}{3}(\mathrm{sen}6a - \mathrm{sen}3a).$$

Così p. e. posto $a = 15'$, colle limitazioni

$$0{,}0130895 < \mathrm{sen}45' < 0{,}0130896$$

$$0{,}0261769 < \mathrm{sen}1°30' < 0{,}0261770$$

si trova

$$0{,}01745194 < \mathrm{sen}1° < 0{,}01745280$$

e in coseguenza

$$\text{sen}\,1^\circ = 0{,}0174524 \quad \text{a meno di } \frac{5}{10^7} \quad {}^{*)}$$

[illegible] poi

$$\left.\begin{array}{l} \cos 1^\circ = 0{,}9998477 \\ \cos 30' = 0{,}9999619 \\ \cos 15' = 0{,}9999905 \end{array}\right\} \text{a meno di } \frac{3}{10^8}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,30' = 0{,}0087265 \\ \text{sen}\,15' = 0{,}0043633 \end{array}\right\} \text{a meno di } \frac{3}{10^7}$$

Ora è molto facile il calcolo dei seni dei multipli di $15'$ compresi fra due multipli consecutivi di $45'$. Si ha p. e.

$$\text{sen}\,17^\circ = \text{sen}\,17^\circ\,15'\cos 15' - \cos 17^\circ\,15'\,\text{sen}\,15',$$

ma dalla tavola dei seni dei multipli di $45'$ si ha:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,17^\circ\,15' = 0{,}296542 \\ \cos 17^\circ\,15' = 0{,}955020 \end{array}\right\} \text{a meno di } \frac{5}{10^7}$$

coi quali valori si trova

$$\text{sen}\,17^\circ = 0{,}29237 \qquad \text{a meno di } \frac{4}{10^6}.$$

Così si possono calcolare i seni e coseni di tutti i multipli di $15'$, con cinque decimali, a meno di $\frac{6}{10^6}$, come facilmente si può dimostrare. Con una tavola così fatta l' errore nel calcolo del seno, coll'ordinaria interpolazione, è sempre minore di $\frac{9}{10^6}$; e l'errore nel calcolo dell' angolo è sempre mi-

*) Questo semplicissimo metodo pel calcolo di sen 1° si trova esposto nell'opera: Les oeuvres mathématiques de *Simon Stevin* de Bruges ou sont insérées les mémoires mathématiques esquelles s'est exercé le très-haut et très illustre Prince *Maurice de Nassau*. Le tout revu, corrigé et augmenté par *Albert Girard*. Leyde, 1634.

nore di $\frac{1}{3}$ di minuto primo quando l'angolo non supera 85° (esso è minore di 2".5 per gli angoli non maggiori di 45°).

Ma qui non credo di dovere entrare in altre particolarità che troverebbero miglior posto in un libro; e mi limito ad esprimere il desiderio che *alcuni* dei calcoli richiesti per la costruzione della tavola, sieno eseguiti dagli allievi, e corredati da un apprezzamento sull'approssimazione conseguita.

6. La confusione che nasce dal comprendere sotto uno stesso nome delle scuole d'indole tanto diversa, quali sono le così dette *sezioni* degli istituti tecnici, non ha poco contribuito al fatto ch'esse per forza procedono insieme, con danno di tutte. Ma qui non è il luogo di discorrere che di un inconveniente che ne deriva nell'insegnamento della trigonometria; e tale inconveniente pare a me che potrebb'essere facilmente eliminato. Non credo che si creda, dagli Autori dei programmi, essere veramente indicato, pei futuri agrimensori e misuratori di fabbriche, lo studio della teoria generale delle funzioni goniometriche, e che il tempo ad esso dedicato non sarebbe più utilmente impiegato in esercitazioni numeriche relative specialmente a problemi quali si possono presentare nella carriera che quei giovani vogliono intraprendere. Ma gli allievi di quella sezione, nella maggior parte degli istituti, si devono trovare, per tale studio, insieme a quelli della sezione fisico-matematica, epperciò il programma di *trigonometria piana* (più esattamente dovrebb'essere detto di goniometria e trigonometria piana) è lo stesso per le due sezioni; e in questo caso i bisogni delle scuole speciali sono sagrificati a benefizio della scuola di coltura generale, mentre in altri casi accade l'opposto. Ora questo inconveniente può essere facilmente tolto, perchè il programma della terza e quarta classe della sezione fisico-matematica può essere diversamente distribuito nelle due classi; e, in particolare, gli elementi della teoria generale delle funzioni goniometriche possono essere insegnati nella

quarta classe, pur continuandosi nella terza classe di quella e nelle terze classi delle sezioni di agrimensura e di costruzioni, l'insegnamento della trigonometria piana propriamente detta.

7. Anche in queste scuole come nei Licei ritengo che, all'uso delle tavole di logaritmi delle funzioni goniometriche, debba essere preferito quello delle tavole delle funzioni *naturali*, il quale può esservi dichiarato in modo che gli allievi riescano ad apprezzare l'approssimazione dei risultati, in forza di teoremi le dimostrazioni dei quali essi possono intendere.

Veramente le formole della trigonometria sferica possono sembrare di assai lunga calcolazione quando non si faccia uso delle tavole di logaritmi delle funzioni goniometriche. Ma esse sono suscettibili di trasformazioni che ne semplificano notevolmente il calcolo. Così p. e. la formola pel calcolo di un angolo quando sono dati i tre lati

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

si trasforma nella

$$\cos A = \frac{2\cos a - \cos(b+c) - \cos(b-c)}{\cos(b-c) - \cos(b+c)}$$

che, pel calcolo numerico, è molto più semplice.

8. Chiuderò con un'osservazione la quale non si riferisce soltanto a questa parte dell'insegnamento della matematica.

Una delle ottime abitudini intellettuali promosse dallo studio della matematica è quella di formare le reciproche delle proposizioni già stabilite, e di porre in questione la loro validità. Ma forse a questa parte del *metodo* non si suol dare tutta l'importanza che merita. Per la qual cosa non stimo inutile di presentare qui due esempi di proposizioni reciproche che si riferiscono alla trigonometria sferica.

La reciproca della proposizione fondamentale è vera, ossia sussiste il teorema:

Se a, b, c, A, B, C sono le misure di angoli comprese fra 0 e 180°, e se hanno luogo le relazioni

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$$

esiste un triangolo sferico coi lati misurati da a, b, c e gli angoli ad essi rispettivamente opposti da A, B, C.

Nel triangolo rettilineo ha luogo la doppia proposizione: Se due lati sono fra loro eguali, devono essere fra loro eguali le mediane corrispondenti; e reciprocamente. Ma non è così nel triangolo sferico. È bensì vero che, se due lati d'un triangolo sferico sono fra loro eguali, devono essere fra loro eguali gli archi mediani corrispondenti; ma la reciproca non è vera. Così p. e. nel triangolo sferico che ha i lati $a = 126°$, $b = 120°$, e il lato c dato dalla $\cos c = -\frac{1}{2} - \operatorname{sen} 27° + \operatorname{sen} 36°$ ($c = 111° 28' 54''$, 43 a meno di $0''$, 15) sono eguali gli archi mediani dei lati a e b. *)

D. Besso.

*) Questa quistione è risolta nella nota: *Di una proprietà del triangolo sferico* (Annuario del R. Istituto tecnico di Roma, 1883).

ESERCIZÎ PER LA SCUOLA

GEOMETRIA

Parallele. — Somma degli angoli del triangolo — Angoli del triangolo isoscele.

1. Da due punti A e B d'una retta sono guidate, da una stessa banda di esse, due rette parallele AA' e BB', sulla prima delle quali si porta un segmento arbitrario AH, e sulla seconda un segmento arbitrario BL, quindi si tira la retta HL, e si trova ch'essa forma colla AH un angolo eguale a $\frac{23}{37}$ d'angolo retto; trovare, in parti d'angolo retto, l'angolo che la retta HL forma colla BL.
2. Sieno le rette AR, BS perpendicolari alla AB, ma situate da bande opposte di questa retta, sia R un punto qualunque dell'una ed S un punto qualunque dell'altra; quale relazione ha luogo fra i due angoli ARS, BSR?
3. In un triangolo, un lato del quale è lungo un centimetro, i rapporti di due angoli all'angolo retto sono $\frac{9}{16}$ e $\frac{7}{24}$; un altro triangolo ha un lato lungo un chilometro, e due angoli di esso sono rispettivamente $\frac{9}{16}$ e $\frac{7}{24}$ d'angolo retto; se l'angolo retto è diviso in 336 parti eguali, quante di queste saranno contenute nel terzo angolo del primo triangolo, e quante nel terzo angolo del secondo triangolo?
4. L'angolo BAM d'un triangolo BAM è $\frac{3}{5}$ d'angolo retto; se l'angolo ABM viene aumentato o diminuito di $\frac{1}{10}$ d'angolo retto, col far girare il lato BM intorno al punto B, cosa avviene del terzo angolo BMA?
5. Due triangoli hanno in comune un angolo, e la somma degli altri quattro angoli eguaglia $\frac{25}{9}$ d'angolo retto; se l'angolo retto è diviso in 54 parti eguali, quante di queste saranno contenute nell'angolo comune ai due triangoli?
6. Dal vertice B d'un triangolo ABC si guida, fuori di esso, una retta BH che forma colla BC un angolo eguale alla

somma dei due angoli ACB, CAB, e su questa retta si prende un segmento BD = 3 metri; se il lato AB è lungo 2 metri, si domanda la lunghezza del segmento AD.

7. Da due punti A,B d'una retta AB sono condotte, da una stessa banda di essa, le rette AA', BB' in modo che l'angolo BAA' è $\frac{2}{3}$ dell'angolo ABB', e che la differenza dei due angoli è $\frac{5}{11}$ dell'angolo retto; provare che le due rette, convenientemente prolungate, si incontrano, e sono fra loro perpendicolari.

8. L'angolo al vertice d'un triangolo isoscele è $\frac{5}{17}$ d'angolo retto: trovare il rapporto d'uno degli angoli alla base all'angolo retto.

9. In un triangolo isoscele uno degli angoli alla base è doppio dell'angolo al vertice; se l'angolo retto è diviso in cinque parti eguali, quante di queste saranno contenute nell'angolo al vertice?

10. È dato un angolo BAC: se da un punto B del suo lato AB si guida, dentro l'angolo, la BH perpendicolare ad AB, è necessario ch'essa incontri il lato AC?

11. Sia BAC un triangolo isoscele col vertice in A: provare che la perpendicolare alla base BC, condotta da un suo punto qualunque, internamente all'angolo ABC, deve incontrare l'altro lato BA di quest'angolo.

12. Nel triangolo BAC, ciascun angolo del quale è minore della somma degli altri due, è condotta, da un punto del lato AB e internamente all'angolo BAC, la perpendicolare a quel lato; provare ch'essa deve incontrare l'altro lato dell'angolo BAC.

13. Nel triangolo ABC l'angolo A è maggiore della somma degli altri due: si può costruire un triangolo rettangolo nel quale la somma dei due angoli acuti sia eguale all'angolo A?

14. Nel triangolo ABC l'angolo A è eguale alla somma degli altri due angoli: se l'angolo A è diviso in due parti

si può costruire un triangolo rettangolo cogli angoli acuti eguali a quelle due parti?

15. È dato un segmento AB, e, nel suo interno, un punto C: come dev' essere un triangolo gli angoli del quale stanno negli stessi rapporti dei segmenti AC, CB, AB?

ARITMETICA

Sulla moltiplicazione delle frazioni.

1. Un segmento AB è lungo 4 metri: trovare le lunghezze dei segmenti che sono rispettivamente il doppio, il triplo, il quintuplo, il settuplo di AB.
2. Trovare le lunghezze dei segmenti che sono rispettivamente un terzo, un settimo, un quindicesimo del segmento AB.
3. Trovare le lunghezze dei segmenti che sono rispettivamente $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{15}$ del segmento AB.
4. Che significa moltiplicare 4 per $\frac{5}{7}$?
5. Un segmento CD è $\frac{3}{5}$ di metro: trovare le lunghezze dei segmenti che sono rispettivamente un quarto, un settimo, un tredicesimo di CD.
6. Trovare le lunghezze dei segmenti che sono rispettivamente $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{13}$ di CD.
7. Che significa moltiplicare $\frac{3}{5}$ per $\frac{4}{7}$?
8. Che significa moltiplicare $\frac{4}{7}$ per $\frac{3}{5}$?
9. Provare che il prodotto di $\frac{3}{5}$ per $\frac{4}{7}$ è eguale al prodotto di $\frac{4}{7}$ per $\frac{3}{5}$.
10. Provare che, moltiplicando per $\frac{2}{9}$ il prodotto di $\frac{3}{5}$ per $\frac{4}{7}$, si ottiene lo stesso prodotto che risulta moltiplicando prima $\frac{4}{7}$ per $\frac{2}{9}$, e poi $\frac{3}{5}$ pel prodotto ottenuto.
11. Eseguire in diversi modi il prodotto delle quattro frazioni $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{6}{13}$.
12. Provare che la somma dei due prodotti $\frac{5}{13} \times \frac{8}{27}$, $\frac{6}{19} \times \frac{8}{27}$ è eguale al prodotto della somma $\frac{5}{13} + \frac{6}{19}$ per $\frac{8}{27}$.
13. Quando accade che il prodotto di un numero per un altro è minore del primo numero?

14. Il prodotto di $\frac{17}{40}$ per un numero è $\frac{18}{41}$: quel numero è maggiore o minore di 1?
15. Il prodotto di $\frac{40}{17}$ per un numero è $\frac{41}{18}$: quel numero è maggiore o minore di 1?
16. Il prodotto di un numero per sè stesso è maggiore o minore di quel numero?
17. Confrontare i prodotti che si ottengono moltiplicando una, due, tre, quattro, cinque volte per sè stessa la frazione $\frac{7}{8}$.
18. Confrontare i prodotti che si ottengono moltiplicando una, due, tre, quattro, cinque volte per sè stessa la frazione $\frac{8}{7}$.
19. Trovare un prodotto di più fattori, tutti eguali a $\frac{9}{10}$, il quale sia minore di $\frac{1}{8}$.
20. Trovare un prodotto di più fattori, tutti eguali a $\frac{10}{9}$ il quale sia maggiore di 5.

DI UNA SERIE

DI PUNTI NOTEVOLI NEL TRIANGOLO

Il centro di gravità, il centro del circolo inscritto e il punto di *Grebe* o di *Lemoine* *) appartengono ad una serie di punti, uno qualunque dei quali è l' incontro d' una terna di rette che congiungono i vertici A, B, C coi punti A', B', C', dei lati rispettivamente opposti, determinati dalle

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{c^\mu}{b^\mu}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{a^\mu}{c^\mu}, \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{b^\mu}{a^\mu}$$

Si dimostra facilmente che le distanze d'uno di questi punti dai tre lati sono proporzionali ai numeri

*) Su questo punto notevole veggasi la Memoria del Sig. *Lemoine* inserita nel *Mathesis* (Maggio 1886).

$$a^{\mu-1},\ b^{\mu-1},\ c^{\mu-1}\ *)$$

Di qui risulta la notevole proprietà che esso è il punto, interno al triangolo, pel quale è minima la somma delle potenze m.^{e} delle distanze dai lati, essendo

$$m = \frac{\mu}{\mu-1}$$

Infatti le distanze d' un punto interno al triangolo dai lati verificano la relazione

$$ax + by + cz = \text{costante},$$

in cui x, y, z sono positive, epperciò la somma

$$x^{\frac{\mu}{\mu-1}} + {}^{\frac{\mu}{\mu-1}} + z^{\frac{\mu}{\mu-1}}$$

è minima quando

$$\frac{x}{a^{\mu-1}} = \frac{y}{b^{\mu-1}} = \frac{z}{c^{\mu-1}}\ **)$$

Questa proprietà era già stata avvertita nel caso di $\mu = 2$, cioè pel punto di *Lemoine*.

D. Besso.

---

*) Questo punto è stato chiamato dal Sig. *De Longchamps*, nel caso di $\mu-1$ intero e positivo « potenziale d'ordine $\mu-1$ ». (Veggasi la sua recente memoria *Généralités sur la Géométrie du triangle*: *Les points réciproques et les potentiels d'ordre p.*)

**) Una dimostrazione elementare di questo teorema trovasi nella memoria :

Teoremi elementari sui massimi e minimi (Annuario del R. Istituto tecnico di Roma, 1879).

SOLUZIONE DELLA QUISTIONE PROPOSTA A PAG. 18.

Fra tutti i tetraedri nei quali i segmenti che uniscono i punti di mezzo delle coppie di lati opposti sono eguali fra loro e ad un segmento dato, trovare quello di massimo volume.

(D. Besso).

Soluzione del prof. *M. Misani* *).

Si consideri un tetraedro SABC e sieno L, L_1; M, M_1; N, N_1 rispettivamente, i punti di mezzo degli spigoli a due a due opposti SA, BC; SB, AC; SC, AB, e $2l$ le lunghezze, per ipotesi fra loro eguali, dei segmenti LL_1, MM_1, NN_1. Questi tre segmenti, com'è noto, si dividono per metà in O baricentro del tetraedro dato. Ora il tetraedro $OM_1N_1L_1$ ha per base il triangolo $M_1N_1L_1$ la cui area è un quarto della base ABC del tetraedro SABC, e per altezza un quarto dell'altezza di questo; e ciò perchè, come si sa, il baricentro, d'un tetraedro divide i segmenti che vanno dai vertici ai baricentri delle facce opposte in due parti che stanno fra loro come 3 ad 1. Risulta da ciò che il volume del tetraedro SABC è sedici volte quello del tetraedro $OM_1N_1L_1$, e quindi il massimo volume del primo corrisponderà al massimo del secondo. Ora il parallelepipedo (romboedro) che ha per uno degli angoli triedri l'angolo in O del tetraedro $OM_1N_1L_1$ e per spigoli i tre spigoli eguali di questo OM_1, ON_1, OL_1 ha il volume sestuplo di quello del tetraedro, e tale volume sarà massimo quando il romboedro diverrà il cubo di lato l, poichè il romboedro di massimo volume costruibile con uno spigolo di data lunghezza è appunto il cubo. Il massimo volume del tetraedro $OM_1N_1L_1$ sarà dunque $\frac{1}{6}l^3$, e quello del dato SABC $\frac{8}{3}l^3$. Siccome poi in questo caso

*) Una soluzione simile a questa ci venne inviata dal Sig. Capitano *J. Beyens*.

del massimo gli angoli M_1ON_1, M_1OL_1, N_1OL_1 sono retti, risultano eguali fra loro i lati M_1L_1, L_1N_1, M_1N_1 e quindi gli spigoli AB, BC, CA; e se si osserva che le figure LNL_1N_1, LML_1M_1, MNM_1N_1 sono quadrati eguali, si ricaverà altresì l'eguaglianza dei tre spigoli SA, SB, SC, fra loro ed ai precedenti, e quindi il tetraedro richiesto di massimo volume è regolare. Il suo lato sarà $2l\sqrt{2}$.

Soluzione del prof. *G. Riboni*.

Anzitutto osservo che, se le congiungenti i punti medii degli spigoli opposti d'un tetraedro sono eguali, il tetraedro ha gli spigoli opposti ortogonali fra loro, perchè queste congiungenti sono le diagonali delle sezioni medie fatte nel tetraedro. Ne segue che il parallelepipedo circoscritto al tetraedro in quistione (ottenuto col condurre per ciascuno spigolo il piano parallelo allo spigolo opposto) ha le facce equilatere, poichè le diagonali di ciascuna sono: uno spigolo del tetraedro, e una retta parallela allo spigolo opposto. Questo parallelepipedo, come si sa, ha un volume triplo del tetraedro inscritto [*]), quindi la quistione è ridotta a trovare il massimo fra i parallelepipedi a facce equilatere di dato spigolo. Ed essendo noto che fra questi il massimo è il cubo, a cui corrisponde il tetraedro regolare, si conclude che questo tetraedro è il massimo cercato.

Soluzione del prof. *R. Badia*.

Indicherò con A, B, C, D i vertici di un tetraedro, nel quale i segmenti che uniscono i punti di mezzo dei lati opposti hanno tutti la stessa lunghezza k, e con E, F, G, H, K, L i punti che dividono rispettivamente in due parti eguali i lati AB, AC, AD, CD, DB, BC.

Se si tolgono i tetraedri AEFG, BEKL, CFHL, DGHK,

---

[*]) *Baltzer*, Stereometria. Traduzione di L. Cremona, pag. 142 della seconda edizione (Genova, 1877).

ciascuno dei quali è l'ottava parte di ABCD, rimarrà l'ottaédro EFGHKL che è la metà del tetraedro dato ed ha per assi i segmenti EH, FK, GL i quali, come è noto, passano per uno stesso punto nel quale si dividono scambievolmente in due parti eguali.

Indicando con α l'angolo sotto il quale due di questi assi si tagliano, con β l'angolo che il terzo asse fa col piano degli altri due, l'espressione del volume doll'ottaedro sarà

$$\tfrac{1}{6} k^3 \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta$$

la quale diviene un *massimo* quando si verificano simultaneamente le eguaglianze

$$\text{sen } \alpha = 1 \qquad \text{sen } \beta = 1$$

cioè quando l'ottaedro, avendo gli assi eguali e rettangolari che si tagliano in un punto equidistante dai loro estremi, è regolare ed ha quindi i lati eguali fra loro.

Dopo ciò, osservando che ciascuno dei lati dell'ottaedro è la metà di uno dei lati del tetraedro preso a considerare, si conclude che anche il volume di questo diviene massimo quando i suoi lati sono eguali fra loro, ossia quando esso è regolare.

Soluzione del prof. *C. Moriconi*.

Sia SABC un tetraedro: si sa che indicando con V il suo volume e con a, b, c, a_1, b_1, c_1 rispettivamente gli spigoli SA, SB, SC, BC, CA, AB, è

$$(1)\quad 144V^2 = a^2a_1^2(b^2+b_1^2+c^2+c_1^2-a^2-a_1^2) + b^2b_1^2(c^2+c_1^2+a^2+a_1^2-b^2-b_1^2)$$
$$+c^2c_1^2(a^2+a_1^2+b^2+b_1^2-c^2-c_1^2) - (b^2c^2a_1^2+c^2a^2b_1^2+a^2b^2c_1^2+a_1^2b_1^2c_1^2).$$

Ma, se L, L$'$ sono i punti di mezzo dei lati opposti SA, BC e si pone $LL' = l$, poichè

$$b^2 + c^2 = 2\overline{SL'}^2 + 2\overline{BL'}^2,$$
$$b_1^2 + c_1^2 = 2\overline{AL'}^2 + 2\overline{BL'}^2,$$
$$\overline{SL'}^2 + \overline{AL'}^2 = 2l^2 + 2\overline{SL}^2,$$

si ha

$$b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 = 4l^2 + a^2 + a_1^2$$

e analogamente

$$c^2 + c_1^2 + a^2 + a_1^2 = 4l^2 + b^2 + b_1^2$$
$$a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 = 4l^2 + c^2 + c_1^2,$$

che insieme alla precedente conducono alle altre

$$(2)\quad a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2 = 4l^2;$$

perciò la (1) diviene

$$36\,\mathrm{V}^2 = a^2b^2c^2 - l^2(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 8l^4(a^2 + b^2 + c^2) - 16l^6.$$

Trasformando questa nella seguente

$$(3)\ 36\,\mathrm{V}^2 = 4l^6 - \{(2l^2-a^2)^2 + (2l^2-b^2)^2 + (2l^2-c^2)^2\}l^2 - (2l^2-a^2)(2l^2-b^2)(2l^2-c^2),$$

sarà facile dedurne che, se qualcuna delle tre quantità a^2, b^2, c^2 è uguale a $2l^2$, senza che lo siano tutte, oppure se una o tutte e tre ne sono minori, si ha

$$36\,\mathrm{V}^2 < 4l^6.$$

E siccome, aggiungendo e togliendo nella (3), la quantità

$$2l^2(2l^2 - b^2)(2l^2 - c^2),$$

si può pervenire alla

$$36\,\mathrm{V}^2 = 4l^6 - \{(2l^2-a^2)^2 + (b^2-c^2)^2\}l^2 - (2l^2-b^2)(2l^2-c^2)(4l^2-a^2),$$

così si conclude che la stessa cosa avviene anche quando una sola delle quantità a^2, b^2, c^2, p. es, la a^2, o tutte e tre sieno maggiori di $2l^2$, perchè, come apparisce dalle (2), la a^2 deve essere minore di $4l^2$. Dunque, eccettuato il caso in cui tutte e tre le quantità a^2, b^2, c^2 sono eguali a $2l^2$, in ogni altro è sempre

$$\mathrm{V} < \frac{l^3}{3}.$$

Il volume V raggiunge questo valore massimo $\left(\frac{l^3}{3}\right)$ soltanto per

$$a^2 = b^2 = c^2 = 2l^2,$$

nel qual caso, come risulta dalle (2), è anche

$$a_1^2 = b_1^2 = c_1^2 = 2l^2.$$

Segue da ciò che il tetraedro richiesto è *regolare*.

QUISTIONI PROPOSTE

Se si dividono i lati d' un poligono rettilineo piano o gobbo, nello stesso senso, in due segmenti aventi il medesimo rapporto, la differenza fra le somme dei quadrati delle distanze di un punto qualunque dello spazio dai vertici del poligono e dai punti di divisione è costante.

A. Lugli.

Fra quali limiti devono essere compresi gli angoli d'un triangolo affinchè si possa costruire un triangolo colle distanze del centro del circolo circoscritto dai tre lati?

Se le rette AA_1, BB_1, CC_1 che uniscono i vertici A, B, C d'un triangolo coi punti A_1, B_1, C_1 dei lati rispettivamente opposti passano per uno stesso punto, e se inoltre gli angoli AA_1C, BB_1A, CC_1B sono fra loro eguali, quelle rette sono le altezze del triangolo.

Se si costruiscono sui tre lati d' un triangolo ABC, o esternamente o dalla banda in cui è il triangolo, tre poligoni regolari di egual numero di lati, le rette AA_1, BB_1, CC_1, congiungenti i vertici A, B, C coi vertici A_1, B_1, C_1 dei poligoni opposti rispettivamente ai lati BC, CA, AB, o coi punti medii dei lati opposti a BC, CA, AB, passano per uno stesso punto.

D. Besso.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Il senso comune nelle scienze esatte **— Esposizione per tutti dei principii delle scienze matematiche — di Guglielmo Kingdon Clifford — Milano F.lli Dumolard 1886.**

Bacone terminava la sua opera immortale avvertendo che essa era soltanto una semplice logica e non un trattato di filosofia positiva; i lettori del libro, che ora vogliamo indicare agli studiosi italiani e che ha per epigrafe l'aforisma XLIV del II libro del *Novum organum*, riconosceranno facilmente che il Clifford, senza fare un trattato di matematica elementare, ha voluto in quest'opera logicamente esporre le basi sulle quali si fondano le varie teorie della matematica, deducendole dalla esperienza quotidiana. Talchè questo libro sarà, a parer nostro, un'ottima guida per coloro che sono chiamati a dare ai giovani un insegnamento fondamentale di matematica. Richiamando la loro attenzione e la loro riflessione sui primi principî, esso servirà a dare una maggiore esattezza e lucidità alle idee che essi già hanno, e non è chi non veda quanta maggiore chiarezza ed attrattiva acquisterà con ciò il loro insegnamento.

Dobbiamo però dichiarare che non tutte le parti del libro ci son sembrate ugualmente meritevoli di lode. E mentre possiamo senza restrizioni lodare il primo capitolo che concerne il numero, dove va specialmente segnalata la elegante e semplice dimostrazione dello sviluppo delle potenze intiere dei binomi, dobbiamo nel capitolo II notare una certa oscurità nel concetto di forma, sul quale pure tanto si insiste, senza che mai venga esattamente definito. Come si può infatti ammettere che le superficie in ogni punto liscio presentino la stessa forma? Basta confrontare un punto ellittico ed uno iperbolico di due superficie per vedere che, pur essendo ambedue punti lisci, le superficie presentano in essi una notevole differenza di forma. Così pure come può dirsi che la forma è un affar d'angoli? Che gli angoli debbano entrare nella definizione di forma nessun dubbio, ma si potrà forse dire che due poligoni non simili, che abbiano gli angoli uguali, hanno la stessa forma? Nella pagina successiva a quella che contiene questa osservazione, troviamo che angoli uguali sono quelli che corrispondono alla stessa apertura di compasso, e qui vi è errore di metodo, non avendo a quel punto ancora dimostrato nessuna delle proprietà del circolo. La definizione della retta e nel Capitolo IV le considerazioni sulla curvatura, ci son pure sembrate oscure e non sempre logicamente rigorose. Ma queste lievi mende sono ben largamente compensate da quel tesoro di osservazioni ingegnose e spesso originali, che si trovano nei capitoli III e IV, ove il metodo dei « passi », svolto con tanta eleganza, conduce così semplicemente alla dimostrazione delle principali proprietà dei numeri complessi. E sono veramente da segnalare all'attenzione del lettore le dimostrazioni ivi date del teorema di Moivre e delle formule di Euler, che legano le funzioni esponenziali alle funzioni circolari.

Condotti alle soglie di tanti rami di scienza, come ad esempio della geometria proiettiva, della teoria delle curve del terzo ordine, del calcolo grafico e dei quaternioni, è da ritenersi, che i giovani lettori, invogliati, vi si addentreranno.

La brevità colla quale nel capitolo V sono esposte le basi della meccanica, fa vivamente desiderare che presto avvenga la pubblicazione degli *Elementi di Meccanica* del Cliffort dei quali si parla nella prefazione. Poichè, convinti per lunga esperienza, che l'insegnamento della meccanica, come dice lo Stallo nel suo libro: *La matière et la physique moderne*, acquisterebbe in chiarezza se vi si potesse diminuire per quanto è possibile l'uso del termine *forza*, saremmo desiderosi di vedere, come il Cliffort, sempre originale e che ammette ancor lui questo vantaggio, abbia potuto fare a meno sistematicamente di questo concetto.

Ma non possiamo terminare questo breve cenno del libro di Cliffort senza rivolgere una parola di encomio all'egregio traduttore, che con tanto amore e tanta scienza, ha curato l'edizione italiana. E ci sia permesso esprimere un nostro desiderio: affidino i coraggiosi editori della Biblioteca scientifica internazionale allo stesso valente scienziato anche la traduzione dell'opera del Mach *Die Mechanik in ihrer Entwickelung*, che fa parte della stessa collezione, e saranno sempre più benemeriti degli studiosi italiani.

E. Padova.

Faifofer (A). — ***Trattato di Aritmetica teorico pratica e principii d'algebra con tavole logaritmiche*** **ad uso delle Scuole tecniche. — p. 220 e XXIII — 6ª *ed.* — Venezia, 1886 — L. 2.**

Il Signor Prof. Faifofer, autore di libri scolastici di matematica assai pregevoli, con questa nuova edizione del suo trattato d'aritmetica, tanto diversa dalle precedenti da potersi considerare come un nuovo libro, ha avuto per scopo di compilare un'operetta che si adattasse ai nuovi programmi per le scuole tecniche. Ed invero il libro di cui trattasi è appropriato agli alunni delle due sezioni del 3° corso, quella che avvia i giovinetti all'istituto tecnico, e l'altra che li conduce alla licenza, e maggiormente per quella che per questa, per una ragione che forse è da ricercarsi più nell'indole dei nuovi ordinamenti che in altro.

Le diverse parti della materia sono trattate con certa sobrietà, com'era utile di fare, e il libro è ricco di esercizi. In fine del medesimo trovasi una tavola di logaritmi volgari a 5 decimali per i numeri da 1 a 1000, con numerazione a parte da potersi staccare dal rimanente. Con ciò l'A. ha ottemperato alla disposizione del programma che prescrive di impartire agli alunni, che mirano alla licenza, qualche nozione sul calcolo con logaritmi per servirsene specialmente nella risoluzione del problema d'interesse composto, disposizione la cui opportunità sembrami assai discutibile, posto che esistono tante e pregevoli tavole che permettono la risoluzione del problema stesso con molta maggiore facilità e speditezza, posto che, in pratica e pei bisogni del commercio, l'uso di tali tavole sarà sempre da preferirsi all'impiego dei logaritmi, posto finalmente che quest'impiego richiede una certa destrezza nel calcolo che non è facile ottenere dalla generalità degli scolari.

Ma per dire più particolarmente del libro è da notare che dopo l'esposizione chiara, semplice e precisa delle quattro operazioni fondamentali, seguono la *divisibilità* e i *numeri primi* coi principali teoremi che vi si riferiscono. E qui l'A. ha seguito il metodo stesso adoperato nei suoi *elementi d'aritmetica* per i ginnasi, scostandosi dagli ordinari testi in ciò che ha voluto premettere la teoria dei numeri primi al massimo comun divisore, conferendo così unità maggiore alla materia.

Ciò è cosa ben fatta, ma qui ingenera la lieve difficoltà, pur da notarsi, che un teorema importante (quello del n.° 96) viene a subirne discapito nella semplicità della dimostrazione, semplicità che deve essere uno dei criteri direttivi dell'insegnamento nelle scuole tecniche.

A titolo di lode per l'A, mi piace poi riconoscere che il libro dimostra all'evidenza la sua cura grandissima di esser semplice, per quanto è possibile, senza pregiudizio dell'esattezza. Così per citare un esempio, per ottenere la generatrice d'una frazione periodica semplice l'A. si fonda sul facile teorema che « *se due frazioni semplici* (della forma $\frac{1}{n}$) *hanno per denominatori due numeri consecutivi, la maggiore è uguale alla minore aumentata del prodotto delle due frazioni* », giungendo agevolmente alla generatrice cercata. Anzi può dirsi in generale che i diversi §§ del libro contengono quanto basta e nulla più. Alcuni cenni sulle progressioni aprono la via ai logaritmi e questi sono trattati assai bene, in vista dello scopo al quale sono destinati a servire.

Terminerò col dire che l'edizione è assai nitida sotto il punto di vista tipografico e veramente economica, ciò che costituisce un pregio rimarchevole ove si ponga mente che le scuole tecniche sono frequentate in genere dai giovanetti appartenenti alle classi che non sono delle più favorite dalla fortuna.

A. Lugli.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica rédigée par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1886; N. 4.
Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXV. Gennaio e Febbraio 1887. Napoli, Benedetto Pellerano, editore.
Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy*. Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 2e série. Onzième année. N. 1 et 2. Paris, 1887.
Journal de Mathématiques élementaires publié par *H. Vuibert*. 11e Année. N. 7, 8, 9, 10, 11. Paris, M. Nony, 17. Rue des Écoles, 1887.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome septième, Janvier et Février 1887.

La lingua tedesca. Periodico mensile ad uso degli insegnanti e degli studenti diretto da *Vittorio Grünwald*, Prof. nel R. Istituto tecnico di Brescia, N. 1. Verona, 1887.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XIX. N. 1, 2, 3. Firenze, 1887.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884, 1885, 1886).

Amodeo (F.) — Sulle coniche bitangenti a due coniche (1886).

Andriani Angelo, Professore nel R. Liceo di Reggio-Calabria. — Elementi di Geometria euclidea esposti con nuovo metodo. Napoli, Pellerano, 1887.

Bellacchi Giacomo, Professore nell'Istituto tecnico Galileo. — Lezioni di Algebra elementare. Parte prima: Aritmetica generale. Vol. I. Firenze, 1869. Vol. II. Firenze, 1884.

Chistoni (C.) — Misurazioni magnetiche in Italia. Roma, 1886.

Eneström (G.) — Bevis för satsen, att den fullständiga integralen till en differens equation af n: te ordningen innehaller n arbiträra konstanter (1886).

Guccia (G. B.) — Sur les transformations Cremona dans le plan (1885). — Sur les transformations géometriques planes birationelles (1885). — Sur une question concernant les points singuliers des courbes algébriques planes. — Formole analitiche di alcune trasformazioni Cremoniane delle figure piane. — Teoremi sulle trasformazioni Cremoniane sul piano (1885). — Generalizzazione di un teorema di Noether (1886).

Guccia (J.) — Sur une classe de surfaces, représentables, point par point, sur un plan (1880).

Faifofer (A.) — Trattato di Aritmetica teorico-pratica e principii d'Algebra con tavole logaritmiche, ad uso delle scuole tecniche. 6ª edizione. — Venezia 1886.

Ferrari (C.) — Influenza dei monti sulla precipitazione. Roma, 1887.

De Longchamps (G.) — Note sur l'intégration d'une équation aux différences finies (1877) — Généralités sur la géométrie du triangle: les points réciproques et les potentiel d'ordre *p*.

Loria (G.) — Nota sulla moltiplicazione di due determinanti (1886).

Millosevich (E.) — Determinazione della latitudine del R. Osservatorio del Collegio Romano. — Appendice — Roma, 1886.

Mucchi (A.) — Elementi di Geometria con una scelta di 300 graduati esercizi ad uso delle scuole tecniche, normali e magistrali. — 3ª edizione. — Roma, 1887.

Rodrigues (J. M.) — Lei da resistencia do ar segundo as experiencias balisticas. — Lisboa 1887.

Sanchis Barrachina (D'Estéban), Catedratico del Instituto Provincial de Valencia. — Tratado de Trigonometria esferica. — Valencia 1881.

Sella Quintino. — Teoria e pratica del Regolo calcolatore. — Seconda edizione italiana. — Ditta G. B. Paravia editrice, 1886.

Serret (J. A.) — Trattato di Trigonometria. — Nuova versione italiana fatta sulla sesta edizione francese, ed autorizzata dall'Autore, con aggiunte di *Luigi Fenoglio*, prof. nel R. Istituto tecnico di Alessandria. — Parte prima: Trigonometria piana e sferica. — G. B. Paravia e C. 1886.

Stiattesi (A.) — Intorno alla vita ed alle opere di Sebastiano Purgotti. Roma, 1884.

TRASVERSALI NEL TRIANGOLO

§ 1. Consideriamo un triangolo qualunque $A_1A_2A_3$, fissiamo sopra ognuno dei lati A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 un punto B_1, B_2, B_3, conduciamo le rette A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2, e chiamiamo rispettivamente

N_1, N_2, N_3 i punti d'incontro di A_2B_2 con A_3B_3, di A_3B_3 con A_1B_1, di A_1B_1 con A_2B_2,

C_1, C_2, C_3 i punti d'incontro di A_1B_1 con B_2B_3, di A_2B_2 con B_3B_1, di A_3B_3 con B_1B_2,

B'_1, B'_2, B'_3 i punti d'incontro di A_2A_3 con B_2B_3, di A_3A_1 con B_3B_1, di A_1A_2 con B_1B_2.

Posto

$$(1) \qquad \frac{A_2B_1}{B_1A_3}=\frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{A_3B_2}{B_2A_1}=\frac{p_2}{q_2}, \quad \frac{A_1B_3}{B_3A_2}=\frac{p_3}{q_3},$$

siccome il triangolo $A_1A_2A_3$ è segato dalla retta $B_3B'_1B_2$, sarà pel teorema di Menelao

$$\frac{A_1B_3}{B_3A_2}\cdot\frac{A_2B'_1}{B'_1A_3}\cdot\frac{A_3B_2}{B_2A_1}=-1,$$

quindi per le (1) avremo la prima delle tre seguenti e in modo analogo le altre due (osservazione che in seguito ci risparmieremo di fare)

$$(2) \qquad \frac{A_2B'_1}{B'_1A_3}=-\frac{q_2q_3}{p_2p_3}, \quad \frac{A_3B'_2}{B'_2A_1}=-\frac{q_3q_1}{p_3p_1}, \quad \frac{A_1B'_3}{B'_3A_2}=-\frac{q_1q_2}{p_1p_2}.$$

Con queste (1) e (2) potremmo facilmente esprimere in funzione delle p e delle q qualunque altro rapporto fra due dei segmenti determinati dai punti A_1, B_3, A_2, B'_3 sulla retta A_1A_2; ci limiteremo ai seguenti perchè ci saranno utili in seguito. Dalle (1) ricaviamo

$$(3) \qquad \frac{A_2B_1}{A_2A_3}=\frac{p_1}{p_1+q_1}, \quad \frac{A_3B_2}{A_3A_1}=\frac{p_2}{p_2+q_2}, \quad \frac{A_1B_3}{A_1A_2}=\frac{p_3}{p_3+q_3}$$

e inoltre

$$(4)\quad \frac{B_1A_3}{A_2A_3}=\frac{q_1}{p_1+q_1}\,,\quad \frac{B_2A_1}{A_3A_1}=\frac{q_2}{p_2+q_2}\,,\quad \frac{B_3A_2}{A_1A_2}=\frac{q_3}{p_3+q_3}$$

Dalle (2) poi

$$(5)\quad \frac{B'_1A_3}{A_2A_3}=\frac{p_2p_3}{p_2p_3-q_2q_3}\,,\quad \frac{B'_2A_1}{A_3A_1}=\frac{p_3p_1}{p_3p_1-q_3q_1}\,,\quad \frac{B'_3A_2}{A_1A_2}=\frac{p_1p_2}{p_1p_2-q_1q_2}$$

e finalmente dalle (4) e dalle (5)

$$(6)\quad \frac{B_1B'_1}{A_2A_3}=-\frac{p_1p_2p_3+q_1q_2q_3}{(p_2p_3-q_2q_3)\,(p_1+q_1)}\,,\quad \ldots\ldots$$

§. 2. Occupiamoci ora dei rapporti fra i segmenti determinati dai punti A_1, C_1, N_2, N_3, B_1 sulla retta A_1B_1.

Il triangolo $A_1A_2B_1$ è segato dalla retta $B_3A_3N_2$, onde sarà

$$\frac{A_1B_3}{B_3A_2}\cdot\frac{A_2A_3}{A_3B_1}\cdot\frac{B_1N_2}{N_2A_1}=-1$$

e quindi per le (1) e per le (4) avremo

$$(7)\quad \frac{B_1N_2}{N_2A_1}=\frac{q_3q_1}{p_3(p_1+q_1)}\,,\quad \frac{B_2N_3}{N_3A_2}=\frac{q_1q_2}{p_1(p_2+q_2)}\,,\quad \frac{B_3N_1}{N_1A_3}=\frac{q_2q_3}{p_2(p_3+q_3)}\,.$$

Il triangolo $A_1B_1A_3$ è segato dalla retta $N_3A_2B_2$, onde sarà

$$\frac{A_1N_3}{N_3B_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2A_3}\cdot\frac{A_3B_2}{B_2A_1}=-1$$

e quindi per le (1) e per le (3) avremo

$$(8)\quad \frac{A_1N_3}{N_3B_1}=\frac{q_2(p_1+q_1)}{p_1p_2}\,,\quad \frac{A_2N_1}{N_1B_2}=\frac{q_3(p_2+q_2)}{p_2p_3}\,,\quad \frac{A_3N_2}{N_2B_3}=\frac{q_1(p_3+q_3)}{p_3p_1}$$

Il triangolo $A_1B_1A_3$ è pure segato dalla retta $C_1B'_1B_2$, onde sarà

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}\cdot\frac{B_1B'_1}{B'_1A_3}\cdot\frac{A_3B_2}{B_2A_1}=-1$$

e quindi per le (1) e per le (5) e (6) avremo

$$(9)\quad \frac{A_1C_1}{C_1B_1}=\frac{q_2p_3(p_1+q_1)}{p_1p_2p_3+q_1q_2q_3}\,,\quad \frac{A_2C_2}{C_2B_2}=\frac{q_3p_1(p_2+q_2)}{p_1p_2p_3+q_1q_2q_3}\,,\quad \frac{A_3C_3}{C_3B_3}=\frac{q_1p_2(p_3+q_3)}{p_1p_2p_3+q_1q_2q_3}\,.$$

Premessa una considerazione analoga a quella fatta alla fine del § prec. osserviamo che dalle (7) e dalle (8) si ricavano

$$(10)\quad \frac{A_1N_2}{A_1B_1}=\frac{p_3(p_1+q_1)}{p_3p_1+p_3q_1+q_3q_1}, \quad \cdots$$

$$(11)\quad \frac{A_1N_3}{A_1B_1}=\frac{q_2(p_1+q_1)}{p_1p_2+p_1q_2+q_1q_2}, \quad \cdots$$

e da queste

$$(12)\quad \frac{N_2N_3}{A_1B_1}=-\frac{(p_1p_2p_3-q_1q_2q_3)(p_1+q_1)}{(p_3p_1+p_3q_1+q_3q_1)(p_1p_2+p_1q_2+q_1q_2)}, \quad \cdots$$

le quali unitamente alle (11) ci danno

$$(13)\quad \frac{N_2N_3}{A_1N_3}=-\frac{p_1p_2p_3-q_1q_2q_3}{q_2(p_3p_1+p_3q_1+q_3q_1)}, \quad \cdots$$

§. 3. Finalmente veniamo a considerare i rapporti fra i segmenti determinati dai punti B_3, C_1, B_2, B'_2 sulla retta B_3B_2.

Il triangolo $A_2B_1B_3$ è segato dalla retta $A_3B'_2A_1$ onde sarà

$$\frac{A_2A_3}{A_3B_1}\cdot\frac{B_1B'_2}{B'_2B_3}\cdot\frac{B_3A_1}{A_1A_2}=-1$$

e quindi per le (3) e per le (4) avremo

$$(14)\quad \frac{B_1B'_2}{B'_2B_3}=-\frac{q_1(p_3+q_3)}{p_3(p_1+q_1)},\quad \frac{B_2B'_3}{B'_3B_1}=-\frac{q_2(p_1+q_1)}{p_1(p_2+q_2)},\quad \frac{B_3B'_1}{B'_1B_2}=-\frac{q_3(p_2+q_2)}{p_2(p_3+q_3)}$$

Il triangolo $A_3B_2B_3$ è segato dalla retta $A_1C_1N_2$, onde sarà

$$\frac{A_3A_1}{A_1B_2}\cdot\frac{B_2C_1}{C_1B_3}\cdot\frac{B_3N_2}{N_2A_3}=-1$$

e quindi per le (4) e per le (8) avremo

$$(15)\quad \frac{B_2C_1}{C_1B_3}=\frac{q_1q_2(p_3+q_3)}{p_3p_1(p_2+q_2)},\quad \frac{B_3C_2}{C_2B_1}=\frac{q_2q_3(p_1+q_1)}{p_1p_2(p_3+q_3)},\quad \frac{B_1C_3}{C_3B_2}=\frac{q_3q_1(p_2+q_2)}{p_2p_3(p_1+q_1)}$$

Premessa la solita considerazione, osserviamo che dalle (14) si ha

$$(16)\quad \frac{B'_2B_3}{B_1B_3} = \frac{p_3(p_1+q_1)}{p_3p_1 - q_3q_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

§. 4. Dalle formule precedenti se ne potrebbero dedurre molte altre, alcune delle quali contengono come casi particolari formule note. Comincieremo ad applicarle alla ricerca dei rapporti, che le aree dei triangoli $N_1N_2N_3$, $B_1B_2B_3$ hanno coll' area del triangolo $A_1A_2A_3$. Indicheremo per brevità con $[A_1A_2A_3]$ l'area del triangolo $A_1A_2A_3$ e analogamente per gli altri; di più fisseremo di prendere le aree positive o negative, secondochè essi si troverebbero alla destra o alla sinistra di chi percorresse il contorno nel senso in cui sono nominati i vertici. Ciò posto si ha

$$[N_1N_2N_3] = \frac{N_1N_2}{A_3N_2}[A_3N_2N_3],$$

ma

$$[A_3N_2N_3] = \frac{N_2N_3}{A_1B_1}[A_3A_1B_1],$$

inoltre

$$[A_3A_1B_1] = \frac{B_1A_3}{A_2A_3}[A_1A_2A_3],$$

onde per le (13), le (12) e le (4) avremo

$$(17)\quad [N_1N_2N_3] = \frac{(p_1p_2p_3 - q_1q_2q_3)^2}{(p_3p_1+p_3q_1+q_3q_1)(p_1p_2+p_1q_2+q_1q_2)(p_2p_3+p_2q_3+q_2q_3)}[A_1A_2A_3].$$

Si ha anche

$$[B_1B_2B_3] = \frac{B_1B_2}{B'_3B_1}[B'_3B_1B_3],$$

ma

$$[B'_3B_1B_3] = \frac{B_3B'_3}{A_1A_2}[A_2B_1A_1]$$

inoltre

$$[A_2B_1A_1] = \frac{A_2B_1}{A_2A_3}[A_1A_2A_3]$$

onde per le (16) per le (6) e per le (1)

$$(18) \qquad [B_1B_2B_3] = \frac{p_1p_2p_3 + q_1q_2q_3}{(p_1+q_1)(p_2+q_2)(p_3+q_3)}[A_1A_2A_3].$$

§. 5. Si potrebbe cercare direttamente anche il rapporto di $[B'_1B'_2B'_3]$ ad $[A_1A_2A_3]$; così pure, se si conducono le rette $B'_1B'_3$, $B'_2B'_1$, $B'_3B'_2$ e si chiamano C'_2, C'_3, C'_1 i punti in cui queste rette incontrano A_2B_2, A_3B_3, A_1B_1 rispettivamente, si potrebbero cercare i valori dei rapporti

$$\frac{B'_2C'_1}{C'_1B'_3},\ \frac{B'_3C'_2}{C'_2B'_1},\ \frac{B'_1C'_3}{C'_3B'_2},$$

ma è evidente, per le (2), che questi valori si possono ottenere dalla (18) e dalle (14) quando a

$$\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\ \frac{p_3}{q_3}$$

si sostituiscano rispettivamente

$$-\frac{q_2q_3}{p_2p_3},\ -\frac{q_3q_1}{p_3p_1},\ -\frac{q_1q_2}{p_1p_2}.$$

Così facendo otteniamo

$$(19) \quad [B'_1B'_2B'_3] = \frac{p_1^2p_2^2p_3^2 - q_1^2q_2^2q_3^2}{(p_2p_3-q_2q_3)(p_3p_1-q_3q_1)(p_1p_2-q_1q_2)}[A_1A_2A_3]$$

$$(20) \quad \frac{B'_2C'_1}{C'_1B'_3} = \frac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3}\cdot\frac{p_3(p_1p_2-q_1q_2)}{q_2(p_3p_1-q_3q_1)},\ \ldots\ldots\ldots$$

§. 6. Se poi si considera il triangolo $B_1B_2B_3$ i cui lati sono divisi dai punti C_3, C_1, C_2 nei rapporti dati dalle (14), si conducono le rette C_2C_3, C_3C_1, C_1C_2, si chiamano D_1, D_2, D_3 rispettivamente i punti d'incontro di C_2C_3 con C_1B_1 ecc. ecc. si possono trovare altrettante formule analoghe alle precedenti e così di seguito.

Altrettanto si dica del triangolo $B'_1B'_2B'_3$ i cui lati sono divisi dai punti C'_3, C'_1, C'_2 nei rapporti dati dalle (20).

§. 7. Fra le formule accennate in principio del §. 4 noteremo

(21) $\dfrac{B_3N_2}{N_2A_3} : \dfrac{B_3N_1}{N_1A_3} = \dfrac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3}$, ...

che si deducono dalle (7) e dalle (8),

(22) $\dfrac{B_2B'_1}{B'_1B_3} : \dfrac{B_2C_1}{C_1B_3} = -\dfrac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3}$, ...

che si deducono dalle (13) e dalle (14),

(23) $\dfrac{B_1N_2}{N_2A_2} + \dfrac{B_1N_3}{N_3A_1} = \dfrac{B_1C_1}{C_1A_1}$, ...

che si deducono dalle (7) dalle (8) e dalle (9),

(24) $$\frac{B_3C_1}{C_1B_2} \cdot \frac{B_1C_2}{C_2B_3} \cdot \frac{B_2C_3}{C_3B_1} = \left(\frac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3}\right)^2$$

che si deduce dalle (14),

(25) $$\frac{B'_2C'_1}{C'_1B'_3} \cdot \frac{B'_3C'_2}{C'_2B'_1} \cdot \frac{B'_1C'_3}{C'_3B'_2} = \left(\frac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3}\right)^4,$$

che si deduce dalle (20).

§. 8. Supponiamo ora in particolare che le tre rette A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 passino per un punto N. Allora, dovendo essere $[N_1N_2N_3] = 0$, la (17) ci dice che sarà

$$\frac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3} = 1$$

e reciprocamente (Teorema di Ceva).

La (19) ci dice che i tre punti B'_1, B'_2, B'_3 sono in linea retta e reciprocamente.

Le (23) ci dicono che

$\dfrac{B_1C_1}{C_1A_1} = 2\,\dfrac{B_1N}{NA_1}$, ...

§. 9. Supponiamo anche che sia

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3} = m$$

allora dalla (17) si ha

$$[N_1N_2N_3] = \frac{(m-1)^2}{m^2+m+1}[A_1A_2A_3],$$

e dalla (18)

$$[B_1B_2B_3] = \frac{m^2-m+1}{(m+1)^2}[A_1A_2A_3].$$

È questo il caso considerato dal Prof. Besso (*) il quale oltre a considerazioni sul triangolo formato coi segmenti A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 (considerazioni che estese al nostro caso danno risultati poco semplici), aggiunge alcune ricerche relative ai centri di gravità dei triangoli $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $N_1N_2N_3$: dimostra cioè che, ammessa la nostra ipotesi, i centri di gravità dei primi due coincidono e viceversa, e di più che coi precedenti coincide anche il centro di gravità del terzo.

Con processo analogo e ricordando le (13) si può dimostrare che ammessa la nostra ipotesi, anche il centro di gravità del triangolo $B'_1B'_2B'_3$ coincide con quello di $A_1A_2A_3$ e viceversa.

Così per mezzo delle (14) e delle (20) si dimostrerebbe analogamente che, ammessa sempre la nostra ipotesi, coi precedenti coincidono pure i centri di gravità di $C_1C_2C_3$, $C'_1C'_2C'_3$ e reciprocamente.

Finalmente tutti i triangoli analoghi ai precedenti che si otterrebbero successivamente colle costruzioni accennate nel §. 6 avrebbero tutti i loro centri di gravità coincidenti con quello di $A_1A_2A_3$.

Giuseppe Pesci.

TEOREMA PROPOSTO

Se i seni dei diedri d'un tetraedro sono proporzionali alle lunghezze dei rispettivi spigoli, quel tetraedro è a facce eguali; e reciprocamente.

G. Giuliani.

(*) V. Fascicolo I, Anno II di questo periodico.

SULLA RICERCA
DELLE RADICI COMMENSURABILI
D'UN EQUAZIONE ALGEBRICA

Suppongo ridotta l'equazione alla forma:

$$(1)\qquad f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$$

essendo $p_1, p_2, \ldots, p_n$ coefficenti interi; il che si può fare, come è noto, sostituendo all'incognita (ove occorra) un multiplo conveniente di essa. In tale ipotesi la (1) non potrà ammettere alcuna radice frazionaria; e la ricerca delle sue radici *razionali* si ridurrà a quella delle *intere* solamente.

Se al posto della x si pone in $f(x)$ un intero qualunque a, la differenza $f(x) - f(a)$ sarà divisibile per $x-a$; laonde, indicando con Q un intero, scriveremo:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = Q$$

identità ogni qualvolta si sostituisca ad x una radice di $f(x) = 0$. Ma allora $f(x)$ è $= 0$, onde si ha

$$x = a - \frac{f(a)}{Q}.$$

Ora se x è intero, per questa eguaglianza dovrà $\frac{f(a)}{Q}$ essere pure un intero; laonde se si cercano tutti i divisori positivi Q di $f(a)$, nella serie

$$(2)\qquad a \pm \frac{f(a)}{Q}$$

saranno comprese tutte le radici intere della data equazione.

Se si assume analogamente un altro numero a', le radici dell'equazione dovranno anche essere comprese nella serie

$$a' \pm \frac{f(a')}{Q'}. \qquad (3)$$

E così si potrebbe proseguire; ma in generale ciò non è necessario. Le due serie (2) e (3) o non hanno alcun numero comune, ed allora l'equazione non ha radici intere; od hanno dei numeri comuni ed allora soltanto fra essi vanno scelte le radici; cosicchè si potranno addirittura sostituire nella data equazione, per verificare se vi soddisfacciano. Questi tentativi si possono ridurre a tanti quante sono le radici realmente esistenti, o poco più, bastando aumentare il numero delle serie (2), (3) ecc. ed escludendo addirittura dalla prova i numeri che non dividono p_n (essendo noto che p_n è eguale a $\pm$ il prodotto delle radici dell'equazione).

Questo metodo è semplice e comodo assai, poichè le serie (2), (3) si possono ottenere facilmente, per essere a, a',... numeri arbitrari, le cui potenze si possono calcolare una volta tanto, per servire a un numero qualunque di equazioni. I vantaggi di questo metodo, che si può applicare fruttuosamente anche senza l'aiuto di altri criteri sulle radici (sui limiti, ecc.) si vedranno da chiunque voglia porlo a confronto con quello di Newton, generalmente adoperato in simili ricerche.

Ne porgeremo qualche esempio.

Sia

$$f(x) = x^3 - 10\, x^2 + 31\, x - 30$$

Si ha $f(1) = -8$, $f(4) = -2$; onde i divisori di 8 essendo 8, 4, 2, 1, e quelli di 2 essendo 2 e 1, le soluzioni intere della equazione $f(x) = 0$ andranno cercate tra i numeri delle due serie

$$1 \pm 8, \;\; 1 \pm 4, \;\; 1 \pm 2, \;\; 1 \pm 1 \;\; \text{e}$$

$$4 \pm 2, \;\; 4 \pm 2$$

le quali non hanno a comune che i numeri 2, 3, 5. Provati questi numeri, si vede che soddisfanno alla equazione.

Sia ancora:

$$f(x) = x^4 - 11x^2 + 14x - 24.$$

Si trova subito:

$$f(1) = -20, \quad f(-1) = -48, \quad f(2) = -24$$

onde si ricavano le tre serie, fra le quali sono da cercare le soluzioni intere di $f(x) = 0$:

1 ± 20, 1 ± 10, 1 ± 5, 1 ± 4, 1 ± 2, 1 ± 1;

-1 ± 48, -1 ± 24, -1 ± 16, -1 ± 12, -1 ± 8, -1 ± 6, -1 ± 4, -1 ± 3, -1 ± 2, -1 ± 1;

2 ± 24, 2 ± 12, 2 ± 8, 2 ± 6, 2 ± 4, 2 ± 3, 2 ± 2, 2 ± 1.

Escluse da queste tre serie addirittura i numeri che non dividono il termine noto -24, restano le tre serie

$+6$, -4, -3, $+3$, -1, $+2$

3, -4, $+2$, -3, $+1$, -2

-6, $+8$, -4, $+6$, -2, -1, $+4$, 3, 1

le quali non hanno a comune che i numeri -3 e -4. Questi, sostituiti nella $f(x)$ la annullano; e sono quindi tutte le radici intere di quell'equazione (Cfr. Compl. di Alg. del Todhunter trad. dal Battaglini, pag. 74: il procedimento qui adoperato si vedrà assai più semplice e breve di quello ivi indicato).

Sia da ultimo l'equazione

$$x^7 - 13x^5 + 2x^3 - x - 72 = 0.$$

Si trova subito che sostituendo ad x il valore 1, il primo membro acquista il valor 61, numero primo; onde, sempre secondo la formola (2), le radici sono a cercarsi nella serie 1 ± 61, 1 ± 1, cioè 62, -60, 2, 0. Esclusi i numeri che non dividono l'ultimo termine, resta il 2. Per questo numero così basso si può eseguire direttamente il calcolo (senza ricorrere ad una seconda serie), per verificare che non è radice; onde subito si è mostrato che l'equazione proposta non ha radici intere.

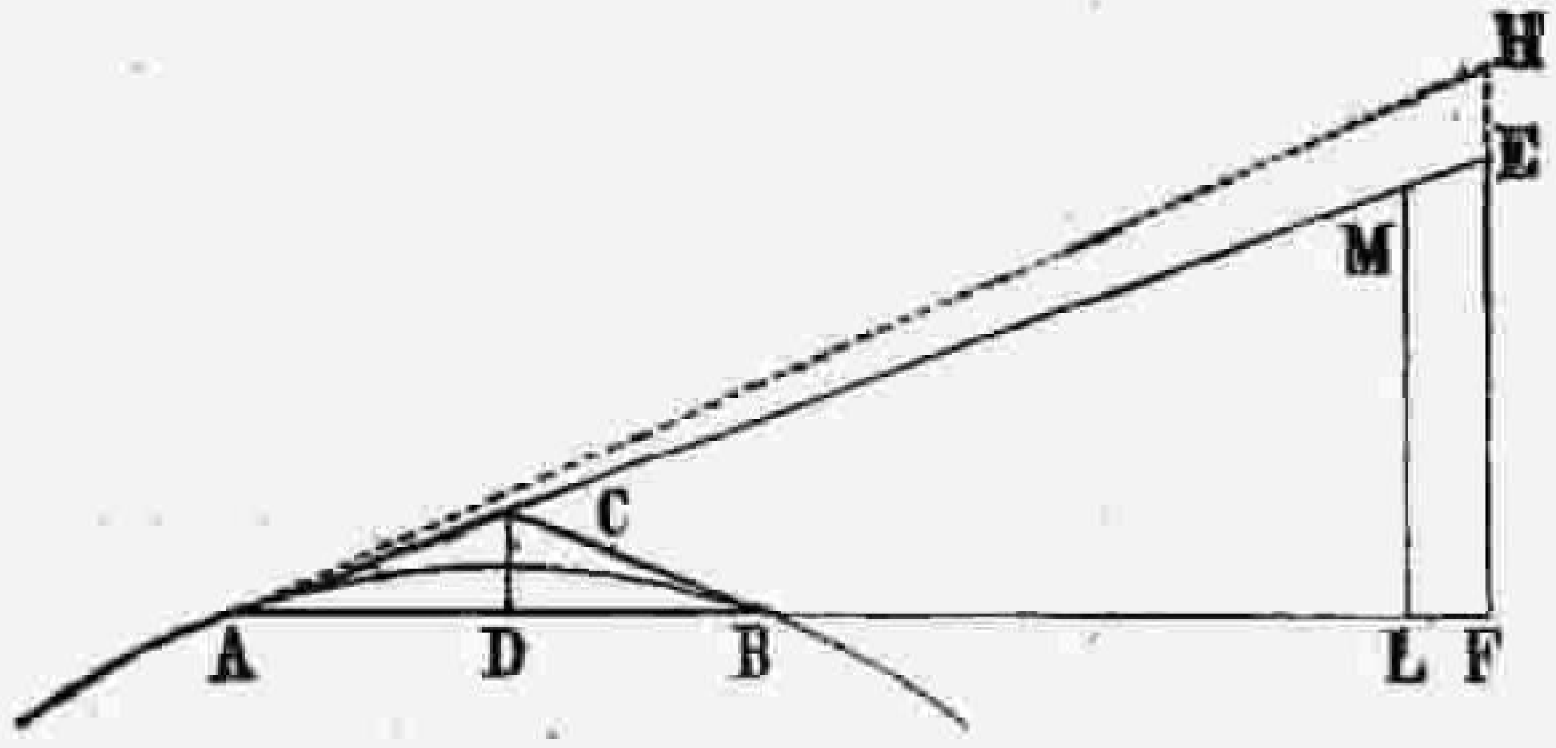
V. Murer.

LEMMI PER LA MISURA DELLA CIRCONFERENZA E DELL'AREA DEL CIRCOLO

Per dimostrare che la circonferenza ed il cerchio sono limiti del perimetro e dell'area del poligono regolare inscritto o circoscritto di n lati quando n tende all'infinito servono i seguenti teoremi che possono, forse con vantaggio, sostituire quelli che si trovano nelle ordinarie Geometrie Elementari per dimostrare che i perimetri e le aree dei poligoni regolari inscritti in una data circonferenza hanno gli stessi limiti dei perimetri e delle aree dei circoscritti quando cresce indefinitamente il numero dei lati di essi poligoni.

1. *La differenza dei perimetri dei poligoni regolari di n lati, l'uno circoscritto e l'altro inscritto alla stessa circonferenza è minore d'un cateto d'un triangolo rettangolo che ha l'altro cateto eguale ad otto raggi e l'angolo acuto adiacente a questo eguale alla n^{ma} parte di due retti o maggiore di questa.*

Sia AB un lato del poligono regolare inscritto di n lati il perimetro del quale indicheremo con P_n. Sia P'_n il perimetro del



poligono regolare circoscritto di n lati. Si faccia AF eguale ad otto raggi. Si conduca la tangente in A alla circonferenza e la perpendicolare in F alla AF; queste s'incontrino in E. L'angolo FAE è la n^{ma} parte di due retti. La tangente in B alla circonferenza incontri in C la AE; e sia CD perpendicolare ad AB. Avremo:

$$P'_n - P_n = n \times (AC + CB - AB) = 2n \times (AC - AD)$$

epperò

$$P'_n - P_n < 2n \times CD.$$

Abbiamo inoltre

$$P_n < AF.$$

Si faccia

$$AL = P_n = n \times AB = 2n . AD.$$

Si conduca LM parallela ad FE e si avrà

$$LM = 2n \times CD \qquad LM < FE$$

epperò

$$P'_n - P_n < FE.$$

Facendo

$$\widehat{FAH} > \widehat{FAE}$$

avremo

$$FE < FH$$

epperò anche

$$P'_n - P_n < FH.$$

2. *Ogni segmento dato piccolo quanto si vuole è maggiore della differenza che esiste fra i perimetri dei poligoni regolari di* n *lati l'uno circoscritto e l'altro inscritto alla medesima circonferenza, se* n *è grande abbastanza.*

Infatti: Si costruisca il triangolo rettangolo FAH coi cateti AF, eguale a quattro diametri della data circonferenza, ed FH eguale al segmento dato. Si formino i multipli dell'angolo FAH. Se si trova che $m \times$ FAH è maggiore di due retti, si avrà

$$P'_n - P_n < FH$$

se sarà

$$n \overline{>} m.$$

3. *La differenza delle superfici dei poligoni regolari di* n *lati, l'uno circoscritto e l'altro inscritto alla stessa circonferenza è minore della superficie d'un triangolo rettangolo che ha un catèto eguale a quattro diametri e l'an-*

golo acuto adiacente a questo eguale alla n^a^ *parte di due retti o maggiore di questa.*

Indicando con S'_n ed S_n le superfici dei poligoni regolari di n lati l'uno circoscritto e l'altro inscritto avremo:

$$S'_n - S_n = 2n \times \overset{\Delta}{ACD} \qquad \overset{\Delta}{ALM} = (2n)^2 \times \overset{\Delta}{ACD}$$

quindi:

$$S'_n - S_n < \overset{\Delta}{ALM} < \overset{\Delta}{AFE} < \overset{\Delta}{AFH}.$$

4. *Ogni superficie data piccola quanto si vuole è maggiore della differenza che esiste fra le superfici dei poligoni regolari di* n *lati, l'uno circoscritto e l'altro inscritto alla medesima circonferenza, se* n *è grande abbastanza.*

Infatti: Si costruisca un triangolo che non superi la sufice σ data e si trasformi in un triangolo equivalente che abbia un cateto eguale a quattro diametri della circonferenza; se risulta adiacente a questo cateto un angolo acuto maggiore della m^a parte di due retti, sarà

$$S'_n - S_n < \sigma \text{ se sarà } n \overline{>} m.$$

Prof.^r^ FRANCESCO GIUDICE.

DIMOSTRAZIONI DI TEOREMI ENUNCIATI A PAG. 59.

Se si dividono i lati d' un poligono rettilineo piano o gobbo, nello stesso senso, in due segmenti aventi il medesimo rapporto, la differenza fra le somme dei quadrati delle distanze di un punto qualunque dello spazio dai vertici del poligono e dai punti di divisione è costante.

A. LUGLI.

Dimostrazione di *Ignacio Beyens*, Capitano del Genio (Cadice). (*)

Sia il poligono $A_1A_2A_3 \ldots\ldots A_p$ e P_1, P_2, P_{p-1}, P_p i punti che soddisfanno alla condizione assegnata, si avrà:

*) Nello stesso modo ha dimostrato il teorema il Sig. Prof. *F. Panizza*. Un'altra dimostrazione è stata inviata dal Sig. Prof. *G. Riboni*.

$$A_1P_1 = \frac{m}{m+n} A_1A_2 \,,\; A_2P_1 = \frac{n}{m+n} A_1A_2 \,; \ldots$$

$$A_pP_p = \frac{m}{m+n} A_1A_p \,,\; A_1P_p = \frac{n}{m+n} A_1A_p \,,$$

e applicando il teorema di *Stewart* ai triangoli OA_1A_2, OA_2A_3, . . . OA_pA_1 aventi il vertice comune O in un punto qualunque dello spazio:

$$OA_1^2 \cdot \frac{n}{m+n} + OA_2^2 \cdot \frac{m}{m+n} = OP_1^2 + \frac{mn}{(m+n)^2} \cdot A_1A_2^2$$

$$OA_2^2 \cdot \frac{n}{m+n} + OA_3^2 \cdot \frac{m}{m+n} = OP_2^2 + \frac{mn}{(m+n)^2} \cdot A_2A_3^2$$

. . . .

$$OA_p^2 \cdot \frac{n}{m+n} + OA_1^2 \cdot \frac{m}{m+n} = OP_p^2 + \frac{mn}{(m+n)^2} \cdot A_pA_1^2$$

le quali addizionate membro a membro danno:

$$OA_1^2+OA_2^2+\ldots+OA_p^2=OP_1^2+OP_2^2+\ldots OP_p^2+\frac{mn}{(m+n)^2}(A_1A_2^2+A_2A_3^2+\ldots+A_pA_1^2)$$

ossia

$$\sum OA_i^2 - \sum OP_i^2 = \frac{mn}{(m+n)^2} \cdot \sum A_iA^2_{i+1} = costante.$$

Se le rette AA_1 BB_1 CC_1 *che uniscono i vertici* A, B, C *di un triangolo coi punti* A_1 B_1 C_1 *dei lati rispettivamente opposti passano per uno stesso punto e se inoltre gli angoli* AA_1C, BB_1A, CC_1B, *sono tra loro eguali, quelle rette sono le altezze del triangolo.*

D. Besso.

Dimostrazione del prof. *F. Panizza* *).

Il quadrangolo A_1OB_1C (O punto di incontro di AA_1, BB_1, CC_1) è inscrivibile essendo $< OA_1C + OB_1C = OB_1C + OB_1A = 2R$. Così pure sono inscrivibili i quadrangoli OB_1AC_1, OC_1BA_1; quindi si avrà:

$$AC \times AB_1 = AA_1 \times AO \,, \quad AB \times AC_1 = AA_1 \,.\, AO.$$

*) Altre dimostrazioni ci sono pervenute dai Signori *J. Beyens* e *G. Ribaut*.

Da queste eguaglianze si deduce

$$AC \times AB_1 = AB \times AC_1 ,$$

quindi anche il quadrangolo BC_1B_1C è inscrivibile e perciò $\angle BC_1C = BB_1C$, ma $\angle BC_1C = BB_1A$ per ipotesi, dunque $\angle BB_1A = BB_1C$ e però BB_1 è perpendicolare ad AC. Nello stesso modo si proverebbe che AA_1, BB_1 sono rispettivamente perpendicolari a BC ed AB. *)

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Prof. RAJOLA PESCARINI. — *Elementi di Aritmetica generale ed algebra.* Napoli, Morano editore, 1884. — L. 4. — *Rapporti esatti ed approssimati e teoria delle proporzioni* ad uso delle Scuole Secondarie. — Napoli, Morano editore — 1886. — L. 1, 50.

Nella prefazione l'A. esprime l'opinione che, sebbene la maggior parte degli autori considerino il numero come il rappresentante del rapporto di due grandezze, anzichè *come elemento di conteggio*, pure è difficile trovarne qualcuno, il quale si mantenga invariabilmente fedele a tal concetto, e che, in ultima analisi, non faccia confusione tra la grandezza ed il numero che ne segna il rapporto. Ed a questo proposito critica alcuni punti dell'Aritmetica del Baltzer.

Afferma inoltre che l'Aritmetica deve fondarsi sulla base della quantità *concreta*, e che, dal non aver fatto questo, dipende il poco profitto delle scuole, dove gli alunni non sanno risolvere un problema elementarissimo, il quale sia immediata applicazione d'una teoria.

Critica anche la definizione della moltiplicazione data dai diversi autori, ed alludendo poi ai molti concetti nuovi introdotti nel suo libro, fa particolare menzione dei concetti di eguaglianza, di numero negativo, di divisione e di radice; e, rispetto a quest'ultimo concetto, afferma di essersi molto occupato delle radici approssimate, perchè sentiva l'obbligo d'una specie di compenso, avendo dato assai poco rilievo alla teoria dei numeri irrazionali.

*) I Signori *J. Beyens*, *F. Panizza*, *G. Riboni* hanno pure dimostrato il terzo dei teoremi enunciati a pag. 59. Una di tali dimostrazioni sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

1. Ciò premesso, facciamo alcune osservazioni di ordine generale. Quanto all'idea di porre a base dell'Aritmetica la quantità, siamo perfettamente d'accordo coll'A. e gliene tributiamo lode per avervi insistito, sebbene l'idea non sia nuova, dappoichè il Bertrand, nel definire le diverse operazioni aritmetiche, le frazioni ed i rapporti, parla sempre di quantità, e non considera il numero che quale rappresentante della quantità stessa; come pure il Bellavitis, nei suoi riassunti d'aritmetica ed algebra, afferma che la quantità costituisce l'oggetto sì dell'una come dell'altra di queste due scienze.

Però quello che non possiamo approvare si è che alla parola quantità l'A. aggiunga l'epiteto di *concreta*, scrivendo *quantità concreta o numero concreto*. A noi sembra che l'idea di quantità sia astratta, come è tale quella di superficie, di linea ed altre. Difatti, allorchè si dice quantità di tempo, di spazio, di forze, ecc. la cosa è per sè evidente, ma anche quando si considera una collezione di oggetti reali, p. e. dei minerali, e diciamo che tale collezione si compone di cento minerali, noi facciamo astrazione di tutte le loro differenze e li consideriamo proprio come identici l'uno all'altro, talmente che uno può sempre essere sostituito in luogo d'un altro; e questo in realtà non può evidentemente accadere, onde l'idea di quantità è astratta. Se poi si parla di numero concreto, la denominazione è anche più inesatta, ma su ciò avremo opportunità di aggiungere in seguito qualche altra considerazione.

A nostro avviso sarebbe invece preferibile il dire *quantità specificata*, quando si volesse aver riguardo alla specie della quantità che si considera, come p. e. quando si dicesse una quantità di monete.

Un' altra cosa poi che l'A. avrebbe dovuto fare, dal momento che si proponeva di pigliare a fondamento dell'aritmetica la quantità, sarebbe stata quella di definire il significato di questa parola o almeno di determinare per quali caratteri essa entra nel dominio dell'aritmetica. Invece egli, in tutto il corso dell'opera, non usa mai la parola quantità, ciò che fa sempre più supporre che essa sia ritenuta come sinonimo di numero concreto.

2. Diciamo ora del modo col quale è stato diviso il libro, premettendo a tale scopo la distinzione che l'A. fa delle eguaglianze.

Un' eguaglianza può essere evidente, come quando si afferma che una quantità è eguale a sè stessa, oppure può essere convenzionale, come quando si scrive $4.3 = 4 + 4 + 4$; ed in questo caso essa non è che l'espressione della definizione d'un determinato segno: tali eguaglianze si chiamano *identità*. Invece, un'eguaglianza può essere il risultato d'una dimostrazione, esprimendo simbolicamente l'enunciato d'un teorema, come quando si scrive $ab = ba$; a questa specie di eguaglianze è assegnato il nome di *equivalenze*. Infine, un' eguaglianza può essere l'espressione d'una condizione imposta ad una data quantità, p. e. $ax = a + x$. Questa terza specie di eguaglianze son dette *equazioni*, le quali sono da considerarsi come la traduzione simbolica delle condizioni espresse in un problema.

Fatta questa distinzione, l'A. dice che scopo dell' *Aritmetica generale* è appunto lo studio delle identità e delle equivalenze, che servono d' introduzione all' *Algebra*; la quale invece ha per oggetto lo studio dellle equazioni. E così il libro viene diviso in due parti: una intitolata Aritmetica generale e l'altra Algebra. Tutto questo è giusto ed esatto, ed ha il vantaggio di segnare una divisione precisa tra l'aritmetica e l'algebra.

Oltre alle due parti precedentemente menzionate, l'opera contiene anche un' appendice nella quale sono svolte, insieme con alcuni problemi fondamentali, le parti principali dell' aritmetica razionale ordinaria, affinchè il libro potesse servire al corso liceale (*).

3. Passiamo all' esame dell' Aritmetica generale, la quale consta di 14 capitoli preceduti da un' introduzione.

In questa, il nostro A., presi a considerare degli oggetti omonimi, capaci però di potere essere aggruppati gli uni cogli altri, uno qualunque di tali oggetti chiama *unità*, ed aggruppando successivamente queste unità ottiene dei gruppi di oggetti che simboleggia in diverse maniere, ma preferibilmente così:

1) M.1 ; M.2 ; M.3 ; . . . .

ove deve leggersi: M preso una volta, M preso due vol-

(*) Qui fa duopo avvertire che la presente pubblicazione fu fatta al tempo del Regolamento Baccelli, il quale prescriveva l' aritmetica razionale al primo corso del liceo.

te, ecc. . . . e dove M non significa altro che il nome dell'oggetto funzionante da unità. E quando questo nome fosse sottinteso, la serie 1) si cangerebbe in quest' altra :

2) 1, 2, 3, 4, ...

la qual cosa però è da evitarsi quando può nascere ambiguità fra due diverse unità.

I simboli delle serie 1) e 2) usati a rappresentare i vari gruppi di unità si chiamano *numeri*, e si dividono in *concreti* ed *astratti* : sono concreti, se l'unità è perfettamente determinata, sia o no espressa ; astratti, quando l'unità è lasciata indeterminata.

Tale definizione di numero è analoga a quella che M. J. Hoüel dà nelle sue *Considérations élémentaires sur la généralisation successive de l'idée de quantité dans l'analyse mathématique* (Paris 1883), dove si legge : « un nombre est le simbole de l'addition de plusieurs quantités, considérées, par définition, comme identiques entre elles et que l'on nomme unités. »

Senza disconoscere l'esattezza di questa definizione, avremmo amato meglio che si mettesse in maggior evidenza che il numero, oltre a rappresentare la quantità, determina sempre una relazione fra due quantità, cioè esprime quante volte la quantità che viene scelta come unità deve prendersi (addizionarsi) onde avere l'altra quantità.

Anche l'Hoüel, non parendo contento della precedente definizione aggiunge : « le nombre est la loi de formation d'une collection d'unités au moyen des unités individuelles ».

Quanto poi alla distizione dei numeri in concreti ed astratti, mi pare da bandirsi, perocchè i numeri son sempre astratti, come è tale anche l'idea di quantità, per le ragioni già dette innanzi. Inoltre, se il numero è un simbolo, qual significato ha la distinzione fra un simbolo concreto ed uno astratto ? Ma c'è di più : quando dovesse chiamarsi concreto quel numero che si riferisce ad una unità determinata, dovrebbe dirsi concreto anche il moltiplicatore d'un prodotto e l'esponente d'una potenza. Invero, quando dicesi p. e. 4 moltiplicato 3, s'intende una somma di 3 parti eguali a 4, ed allora l'unità del 3 è perfettamente determinata nella parte eguale a 4. Dunque l'A. a nostro avviso, avrebbe fatto meglio a parlare di numeri e di quantità piuttosto che di numeri astratti e concreti.

4. Vengono ora le definizioni delle diverse operazioni aritmetiche.

Dato il significato dell' addizione, l' A. avverte che un gruppo qualunque d'unità può essere considerato come una nuova unità, colla quale si possono formare dei gruppi analoghi a quelli avuti colla primitiva unità; cioè si può avere la serie :

3) M.5.1 ; M.5.2 ; M.5.3 ; M.5.4 ; . . . .

ed assegnando al gruppo M.5 il nome N, la stessa serie può rappresentarsi anche in quest' altro modo :

4) N.1 ; N.2 ; N.3 ; . . . .

E quindi allo scopo di distinguere come la N proceda dalla M, quella dicesi *unità secondaria* e questa *unità primaria*.

A ciascuna delle espressioni della serie 3), ove l'unità M può essere sottintesa, si dà il nome di *prodotto*, e *fattori* si chiamano i numeri che vi compariscono.

Rispetto ad un prodotto di due fattori, l'A. preferisce dire ch' esso esprime un gruppo di gruppi dell' unità primaria, piuttosto che affermare che per prodotto deve intendersi una somma di termini eguali; ciò che si poteva fare facilmente essendo già stata data la definizione di *somma* e di *termine*. Ma egli non ha voluto imitare gli altri scrittori, i quali, com' è notato nella prefazione, han dato due *distinte* definizioni della moltiplicazione, una pel caso del moltiplicatore intero e l'altra pel caso del moltiplicatore frazionario. Nel fatto però non sono distinte le due definizioni che si soglion dare della moltiplicazione dagli autori che hanno scritto con qualche competenza della materia; ma sono invece l'una conseguenza dell' altra. Quanto alla prima definizione : *il prodotto è una somma di termini eguali*, sembra a noi molto semplice ed esatta, ed ha il vantaggio di mostrarci come si origina la moltiplicazione; di più si presta assai bene per determinare il significato del moltiplicando e del moltiplicatore. Da essa poi si ricava assai facilmente, come proprietà del prodotto, la seconda definizione: *il prodotto è composto col moltiplicando come il moltiplicatore è formato coll' unità*. E qui è da notarsi che la parola formato non sembra esprimere, come afferma l'A. nella prefazione, un concetto vago ed indefinito, perocchè essa si riferisce alla genesi del numero; il quale, come sappiamo, esprime appunto l'insieme o l'aggregato o più propriamente l'addizione di più unità, oppure di parti dell' unità quando è frazionario.

Ammettendo adunque come definizione la prima proposizione, la seconda ne viene come conseguenza ed esprime una proprietà del prodotto. Invece, se si assumesse come definizione la seconda proposizione, ne verrebbe come conseguenza la prima, che esprimerebbe essa una proprietà del prodotto. Ora finchè si dovesse discorrere soltanto di numeri interi sarebbe proprio indifferente pigliare, come definizione di prodotto, l'una o l'altra delle proposizioni suaccennate, sebbene si dovesse dar sempre la preferenza alla prima per le ragioni sopra esposte. Ma quando si hanno da considerare i numeri frazionari e specialmente un moltiplicatore frazionario, allora, veduto che la seconda definizione può estendersi benissimo ad un moltiplicatore di tale natura, ragion vuole che si adotti la medesima a preferenza della prima, che non gode della stessa proprietà.

Concludendo, quello che a nostro avviso si deve rimproverare agli autori si è che essi non si curino molto di far vedere la dipendenza che esiste fra le due definizioni, e non mettano in chiaro quando è opportuno adottare l'una a preferenza dell' altra.

Il nostro A. si scosta da tutti gli altri, e dà questo nuovo enunciato della moltiplicazione:

Moltiplicare un numero per un altro significa trovarne un terzo che valga il secondo quando è riferito all'unità secondaria espressa dal primo, ove il primo ed il terzo numero debbono intendersi riferiti alla stessa unità primaria.

Siamo d'opinione che questa definizione sarebbe riuscita di più facile intelligenza enunciata dopo la prima definizione, di cui sopra abbiamo parlato; comunque sia però non si può negare ch' essa è ingegnosa ed esatta, e che, se nella sostanza non differisce dalla seconda, nella forma invece ne è senza dubbio superiore.

5. Sul concetto di frazione l'A. si esprime press'a poco così: se M ed N sono legate dalla relazione M. 5 = N, M può considerarsi come ottenuta dalla scomposizione di N in più elementi eguali, e allora se si prende N come unità primaria, M si dovrà considerare come unità secondaria, e perciò a far vedere che M è generata da N si suole scrivere $M = N\,\frac{1}{5}$,

la quale espressione leggesi N *partito in cinque* oppure N *moltiplicato per un quinto*. E qui si vede subito che la parola moltiplicato ha un vero significato di divisione.

Ai simboli della forma $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ .... l'A. assegna il nome di *frazioni semplici* e agli altri della forma $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, ... quello di *frazioni composte*. Quindi aggiunge: anche le espressioni della forma $\frac{1}{4}.\,5$; $3.\,\frac{1}{7}$ diconsi prodotti, cosicchè una frazione composta è il prodotto d'una frazione semplice per un intero. Quanto alla prima espressione, l'A ha perfettamente ragione, ma rispetto alla seconda non può dirsi lo stesso, perchè la medesima non ha peranco ricevuto un significato. Difatti, che cosa vuol dire $3.\,\frac{1}{7}$? Servendosi delle stesse parole del libro vuol dire 3 *partito in* 7, ossia ciò che preso 7 volte dà 3. Ora questo *quid* non è certo fra i numeri interi, ma trovasi fra i numeri frazionari nella frazione $\frac{3}{7}$. Intanto però l'A. non ha ancora dimostrato come una frazione moltiplicata per il proprio denominatore dia per prodotto il numeratore; e poi se si dovesse ritenere l'espressione $3.\,\frac{1}{7}$ come equivalente a $\frac{3}{7}$, sarebbe proprio inutile che a pag. 18, n. 33 si cercasse di dimostrare l'eguaglianza $3.\,\frac{1}{7} = \frac{1}{7}.\,3$, e a pag. 20 si dimostrasse che $3 : 7 = \frac{3}{7}$; dunque al punto in cui siamo, non può dirsi che l'espressione $3.\,\frac{1}{7}$ abbia un significato. Forse l'A. ha creduto che la sua definizione di moltiplicazione bastasse per dare un significato a tutti i prodotti, ma ciò non può essere finchè non si è dimostrato che se un'unità primaria è divisibile in parti, qualsivoglia unità secondaria proveniente da quella è pure divisibile in parti nell'istesso modo, o, in altri termini, finchè non si è dimostrato che ogni frazione è il quoziente del suo numeratore per il corrispondente denominatore.

6. Sul significato di sottrazione non havvi nulla da osservare, laonde si passa subito alla divisione della quale si leggono le tre seguenti definizioni:

1.° *Dividere un numero per un altro significa trovarne un terzo che riferito all'unità secondaria rappresentata dal secondo, valga quanto il primo riferito all'unità primaria*

2.° *Dividere un numero per un altro significa trovarne un terzo, al quale come unità secondaria riferendo il secondo, questo valga quanto il primo riferito all'unità primaria.*

3.° *Dividere un numero per un altro significa trovarne* *un terzo che moltiplicato per il secondo dia un prodotto equivalente al primo.*

È evidente che la terza comprende le prime due, per la qual cosa sarebbe stato ben fatto che queste fossero dedotte da quella come proprietà del terzo numero, chiamato quoziente.

Applicando la prima definizione, l'A, dice che il terzo numero, il quale chiamasi *rapporto*, è astratto; e applicando invece la seconda, è astratto il secondo numero, che chiamasi *divisore*.

Si può qui ripetere la stessa osservazione fatta a proposito del moltiplicatore d'un prodotto e dell'esponente d'una potenza: l'unità a cui si riferisce il rapporto non è una qualunque, ma è il divisore che può per convenzione chiamarsi con un nome qualunque. Per esempio, quando si cerca il numero dei metri di panno che si possono comprare con 20 lire sapendo che un metro costa 4 lire, il rapporto 5 che esprime quante volte il 4 è contenuto nel 20 è riferito al metro come unità, ma non si può negare che il metro è per convenzione equivalente a 4 lire, cioè al divisore.

7. Il Cap. I comincia con questo teorema: *In un prodotto di più fattori, ad alcuni fattori consecutivi sostituendo il loro prodotto effettuato, si ottiene un nuovo prodotto equivalente al primo.*

La dimostrazione di tal teorema non regge, perchè l'A. durante il suo ragionamento ammette senza accorgersene la verità che vuol dimostrare. Difatti, egli dice: « nel prodotto M. 2. 3. 4. 5. 6. 7, ai fattori 3. 4. 5. si può sostituire 60 ed avere

$$M.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7. = M.\ 2.\ 60.\ 6.\ 7$$

In vero, denotando con N l'unità secondaria M. 2, si ha:

$$M.\ 2.\ 60 = N.\ 60$$

come pure

$$M.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5 = N.\ 3.\ 4.\ 5$$

Ma 5) N. 60 = N. 3. 4. 5, dunque . . . . » Ognun vede che il teorema sta tutto nell'eguaglianza 5) e per conseguenza che affermando vera la medesima, si ammette il teorema senza dimostrazione. Poteva benissimo scriversi N. 60 = N (3. 4. 5), ma non come è stato fatto dall'A. E poi come si può ragionevolmente ritenere che la proprieta associativa del prodotto possa dimostrarsi senza aver ricorso ad altre proprietà precedenti o a dei concetti già stabiliti?

8. A pag. 17, n. 31, si dimostra l'eguaglianza: $N.\ 8.\ 5.\ \frac{3}{4}.\ 9 = N.\ 8.\ 5.\ \frac{1}{4}.\ 3.\ 9$; e susseguentemente, al n. 33, si dimostra l'altra: $N.\ 5.\ \frac{1}{4} = N.\ \frac{1}{4}.\ 5$; e per giungere a questa si tien conto della verità della prima. Ora, senza badare che le espressioni, le quali compariscono in queste eguaglianze, non hanno ancora un significato, giacchè per esse potrebbe ripetersi ciò che è stato detto (n. 5) a proposito dell'espressione $3.\ \frac{1}{7}$, si può vedere che la prima eguaglianza è evidente, perchè deriva immediatamente dal significato di frazione, e la seconda, per esser dimostrata vera, non ha bisogno affatto della prima. Difatti risparmiandosi d' impiegare tante sostituzioni di simboli a simboli, si poteva aver ricorso al teorema sull'inversione dei fattori, ragionando in questa maniera: poichè l'eguaglianza

$$M.\ 4.\ 5 = M.\ 5.\ 4$$

è vera qualunque sia M, se questa unità fosse la quarta parte di N, si avrebbe egualmente:

$$N.\ \tfrac{1}{4}.\ 4.\ 5 = N.\ \tfrac{1}{4}.\ 5.\ 4.$$

Ma $N.\ \frac{1}{4}.\ 4$ non è altro che N; $N.\ \frac{1}{4}.\ 5$ è per definizione la frazione $N.\ \frac{5}{4}$, dunque $N.\ 5 = N.\ \frac{5}{4}.\ 4$; cioè la frazione $N.\ \frac{5}{4}$, moltiplicata per 4, dà N. 5; di cui è per conseguenza la quarta parte; e si ha: $N.\ 5 : 4 = N.\ \frac{5}{4}$; o, che è lo stesso,

$$N.\ 5.\ \tfrac{1}{4} = N.\ \tfrac{1}{4}.\ 5.$$

Facendo in tal guisa, l'A. avrebbe subito raggiunto il suo scopo, che, in ultima analisi, si compendia nel teorema: *il quoziente di due numeri interi è equivalente alla frazione che ha per numeratore il dividendo e per denominatore il divisore.*

Non si capisce poi perchè il teorema sopra enunciato sia confinato in un'osservazione, mentre è di capitale importanza; ed inoltre, perchè si asserisce che lo stesso teorema costituisce una *quarta* definizione della divisione, della quale non è evidente l'accordo colle precedenti definizioni. A noi invece sembra che quest'accordo, specialmente colla 3ª definizione, sia evidentissimo, perchè la frazione $N.\ \frac{5}{4}$, moltiplicata per 4, dà N. 5.

9. Al Cap. II, ci occorre subito di fare un'osservazione importante. L'A. dice che, essendo P un'unità determinata, si ha l'identità:

$$6)\quad P.\,4 + P.\,5 = P.\,9$$

e, sottintendendo la P,

$$4 + 5 = 9;$$

onde, sostituendo, ne deriva

$$P.\,4 + P.\,5 = P.\,(4 + 5)$$

E su questa eguaglianza si basa la dimostrazione del teorema: *La somma di due o più prodotti che hanno un fattore comune è equivalente al prodotto del fattore comune per la somma dei fattori rimanenti*; giacchè P può stare a rappresentare un'unità secondaria qualsivoglia.

Questo modo di procedere in una dimostrazione non è certo il più corretto, perchè elimina ogni sorta di ragionamento. La identità 6), può servire a verificare o a intuire il teorema, ma non può tramutarsi rigorosamente in una equivalenza, solamente per uno scambio di simboli. È naturale poi che se al posto del secondo membro d'una identità si mette il primo, la identità si trasforma in una di quelle che sono evidenti di per sè, cioè in una identità di forma e di valore. A noi sembra che la dimostrazione d'un teorema debba sempre poggiare sopra altre verità precedentemente dimostrate, e l'A. avrebbe fatto meglio a servirsi anche in questo caso della proprietà associativa della somma, tanto più se dal teorema sopra enunciato doveva dedursi l'equivalenza

$$(b + c + d)\,a = ba + ca + da$$

Il resto del capitolo procede bene, anzi i diversi teoremi relativi alle somme e alle differenze di due o più numeri vi son trattati con molta chiarezza e precisione, non tralasciando mai di mettere accanto ad ogni proprietà diretta la corrispondente inversa.

10. Un'altra questione importante, quella dei numeri negativi è trattata nel Cap. III. Fin dalla prefazione, l'A. dichiara di voler considerare il numero negativo sotto due distinti punti di vista, cioè quale esso è nei teoremi e nei problemi sopra numeri astratti (o meglio riferibili a grandezze di qualunque genere) e quale esso è nei problemi sopra gran-

dezze determinate e specialmente quale valore dei loro quesiti. Sotto questo secondo aspetto, il numero negativo deve essere studiato in quella parte dell'Algebra che ha per scopo la risoluzione dei problemi; sotto l'altro punto di vista, l'idea di numero negativo deriva spontanea dal concetto di formole equivalenti, di cui, subito, al principio del Cap. III, si trova la seguente definizione, che l'A. chiama generalissima: « *Due formole sono equivalenti quando è possibile sostituire* » *l'una all'altra in una terza formola, senza alterare il* » *valore di questa* ».

Tale definizione è essa esatta? Non ci pare, perchè possono esistere formole non equivalenti, che sostituite in una terza non alterano il valore di essa. Difatti, se nell'espressione x^{2m} al posto di x si sostituisce $b-a$ oppure $a-b$, essa non cangia di valore, ed intanto $a-b$ e $b-a$ non son certo equivalenti. Si vede adunque da ciò, senza citare altri esempi, che la definizione di formole equivalenti è tutt'altro che vera ed esatta. Come si potrà dunque sopra di essa fondare ragionevolmente il concetto di numero negativo? Ciò nonostante l'A. osservando che in un'equivalenza le espressioni $+(b-c)$, $-(b-c)$, $-(b+c)$ possono essere sostituite alle altre $+b-c$; $-b+c$; $-b-c$; pur riconoscendo che tali espressioni non hanno in sè alcun significato, ritiene le prime respettivamente equivalenti alle seconde, e scrive: $+(b-c)=+b-c$; $-(b-c)=-b+c$; $-(b+c)=-b-c$ donde, annullando b, ne derivano le altre eguaglianze convenzionali:

$$+(-c)=-c\,;\quad -(-c)=+c;\quad -(+c)=-c$$

le quali racchiudono le proprietà relative all'addizione e sottrazione dei numeri negativi, di cui è data la seguente definizione: « Il numero negativo, cioè quel numero che è preceduto dal segno $-$, e che figura in un'equivalenza, è un diminutore espresso, che si riferisce ad un diminuendo non determinato e non per anco espresso ».

È vero che l'A. si propone di dare in seguito, a proposito dell'interpretazione dei resultati negativi nella soluzione dei problemi, un significato *definitivo* agli stessi numeri, ma ciò non toglie che, anche astrazion fatta dalla proposizione falsa da cui è partito, non si possa rivolgere a lui lo stesso appunto che il Prof. Betti fa, nella sua prima nota, all'algebra del Bertrand, quando scrive: « l'introduzione nell'algebra di numeri negativi, ai quali si attribuiscono proprietà di convenzione e che non hanno significato, può far nascere difficoltà in chi comincia lo studio di questa scienza e non sembrare abbastanza giustificata dallo scopo di rendere più semplici alcuni resultati ».

Conveniva quindi assai più all'A., giacchè aveva preso a fondamento dell'Aritmetica la quantità, far vedere come quest'idea si svolge e si generalizza, distinguendo le quantità in positive e negative, sebbene egli sia d'opinione che partendo da questo concetto l'idea di numero negativo non acquisti il significato più generale possibile. Ma che importa questo, quando se ne possono aver dei vantaggi dal lato didattico? Del resto poi, una volta introdotti nel calcolo questi nuovi enti, essi, come i numeri positivi, acquistano proprietà in sè; e si può, ove occorra, estendere il loro significato. Per esempio, ammesso che un esponente intero e positivo indichi un prodotto di fattori eguali, cioè indichi l'unità moltiplicata successivamente per tanti fattori eguali quante sono le unità dell'esponente, perchè non si può dire che l'esponente intero e negativo esprime invece l'unità *divisa* successivamente per tanti divisori eguali quante sono le unità del valore assoluto dell'esponente, dando così al numero negativo il significato opposto di quello che, nella stessa questione, ha il numero positivo? E rispetto ai numeri frazionari non facciamo forse la stessa cosa? Noi introduciamo questi numeri considerando l'unità come divisibile in parti, sicchè essi rappresentano una o più parti aliquote della stessa unità; poi, veduto che tutti i numeri frazionari godono della proprietà che moltiplicati per il denominatore danno un prodotto eguale al numeratore, li riteniamo a rappresentare non solo il quoziente di un numero diviso in tante parti quante sono le unità d'un altro numero, ma anche il rapporto di due numeri riferiti alla stessa unità, estendendone così il concetto primitivo.

11. I capitoli seguenti fino al Cap. IX inclusivo sono bene trattati. Vi si espongono assai estesamente e con molta chiarezza le proprietà dei quozienti e degli esponenti interi positivi e negativi, e quelle dei monomi e polinomi, di cui si stabiliscono le regole di calcolo. Fra le altre cose poi me-

rita particolare menzione il modo originale onde si viene a dimostrare la regola della divisione dei polinomi, il quale riassumeremo brevemente. Stabilita in precedenza la eguaglianza $\frac{a}{b} = l + \frac{a - bl}{b}$, l'A. se ne vale per trasformare una frazione a termini polinomi in un'altra espressione avente una parte intera ed una frazionaria, nella quale però il grado del numeratore è minore di quello del numeratore della frazione data, mentre il denominatore rimane il medesimo. Tale trasformazione riesce facilmente, quando la frazione data è di grado positivo o di grado zero rispetto ad una stessa lettera, ed il termine di maggior grado del numeratore è divisibile per quello di maggior grado del denominatore. Trasformando poi la seconda frazione, come è stato fatto per la prima, cioè in una parte intera ed in una frazionaria di grado minore, e così successivamente, si giunge a dare alla frazione proposta la forma d'un polinomio intero più una frazione che ha il numeratore di grado più basso del denominatore, e qualche volta la forma d'un polinomio intero soltanto. Questa trasformazione suggerisce subito la nota regola della divisione di due polinomi, la quale operazione l'autore definisce appunto « il passare da una frazione a termini polinomi ad una formola equivalente che sia o un polinomio intero, o un polinomio intero addizionato con una frazione di grado più basso. »

Lo stesso procedimento permette anche di trovare con abbastanza semplicità il quoziente ed il resto della divisione d'un polinomio ordinato rispetto ad x per $x - a$, e di stabilire il criterio di divisibilità in simili casi, evitando di ripetere la dimostrazione poco corretta che si trova, in tutti i trattati di Algebra; e che si fonda sull'eguaglianza:

$$D = Q(x - a) + R,$$

la quale, essendo stata ottenuta nell'ipotesi di x diverso da a, si fa poi valere senz'altro ragionamento anche per x eguale ad a, allo scopo di dedurne $R = D_a$, essendo D_a ciò che diventa D dopo la sostituzione di a ad x.

Torna ora opportuno fare un'osservazione cioè, che mentre l'A. si è occupato di trasformare una frazione proposta in una espressione intera addizionata con una frazione di grado più basso della data, ha mancato poi di risolvere il problema inverso, cioè di far vedere come una frazione può trasformarsi in una espressione composta di una parte intera e di una frazione di grado più elevato.

In questo dovrà forse trovarsi la causa per la quale, nel capitolo che riguarda la divisione dei polinomi, non si parla affatto delle divisioni di polinomi ordinati rispetto alle potenze crescenti d'una medesima lettera; cosa questa poco commendevole perchè potrebbe far nascere in chi studia l'idea che le divisioni dei polinomi non si potessero fare che ordinandoli sempre in un modo.

12. Al calcolo sui monomi e polinomi fa seguito la teoria delle proporzioni, quella delle disposizioni, permutazioni e combinazioni e infine la formula che dà la potenza d'un polinomio, dalla quale son dedotte molto opportunamente quelle del quadrato e del cubo; le quali cose son tutte esposte in modo assai semplice e chiaro.

13. Si passa quindi al Cap. XIII, dove l'A. si occupa delle *radici esatte ed approssimate*, e dà anche un cenno sui numeri irrazionali ed immaginari. Egli considera dapprima il simbolo $\sqrt[n]{a}$ come avente significato razionale, cioè nell'ipotesi che a sia potenza n^{ma} d'un numero intero o frazionario il quale chiama radice esatta di a e dimostra i soliti teoremi sul calcolo dei radicali. Poi estende lo stesso simbolo a significare le basi delle potenze n^{me} inferiori ad a essendo allora a un numero qualunque, oppure quelle delle potenze n^{me} superiori ed a, e propriamente indica con $(\sqrt[n]{a})_{\varepsilon}$ le prime, e con $(\sqrt[n]{a})_{-\varepsilon}$ le seconde, essendo ε un tal numero che aggiunto alla base d'una potenza inferiore ad a, dà un numero la cui potenza n^{ma} è superiore ad a, e sottratto invece dalla base d'una potenza superiore ad a, dà un numero la cui potenza n^{ma} è minore di a; perciò le prime basi chiama *radici approssimate per difetto* e le altre *radici approssimate per eccesso*. Con questo secondo significato, $\sqrt[n]{a}$ viene a considerarsi variabile per valori razionali; e l'A. dimostra che anche in questo caso sussistono gli stessi teoremi delle radici esatte; cosicchè le operazioni di calcolo sussistenti per queste può facilmente estenderle alle radici approssimate, determinandone ogni volta il grado d'approssimazione. Questo lavoro, il quale è molto utile

più praticamente che scientificamente, sarebbe stato meglio fatto in un capitolo, che trattasse delle approssimazioni in generale e in particolare delle approssimazioni decimali; e non compensa in niun modo, neppure in parte come spera l'A., la mancanza della teoria dei numeri irrazionali, che egli dice non aver voluto qui trattare per non accumulare in un sol volume troppe novità.

Il cenno che l'A. dà del numero irrazionale è proprio insufficiente, e non serve che a far intendere appena il significato del radicale d'indice qualunque, di cui si legge questa definizione: « Il simbolo $\sqrt[n]{a}$, riferito ad una data unità primaria, rappresenta l'unità secondaria maggiore di tutte quelle rappresentate dalle radici n^{esime} di a per difetto e minore di tutte quelle rappresentate dalle radici n^{esime} di a per eccesso ». E ciò può andare bene; ma l'A. avrebbe dovuto effettivamente mostrare almeno uno dei processi che esistono capaci di farci ottenere una unità secondaria maggiore di tutte quelle risultanti da $(\sqrt[n]{a})_{\varepsilon}$ e minore di tutte quelle risultanti da $(\sqrt[n]{a})_{-\varepsilon}$, invece di limitarsi ad affermarne semplicemente l'esistenza, dichiarando ancora una volta che non poteva in questo libro trattare rigorosamente la teoria degli irrazionali. (*)

(*) Però quello che non è stato fatto nel libro, si trova in una *nota* a parte, inserita in un'altra pubblicazione dello stesso autore, ed intitolata *Rapporti esatti ed approssimati.* Noi non piglieremo in esame quella nota per non andare troppo in lungo, ma ci limiteremo ad osservare che essa presenta fin dal principio una lacuna la quale consiste in ciò che l'A. si vale del concetto di *continuità* senza averlo precedentemente definito; sicchè la sua prima dimostrazione, sulla quale poi deve poggiare tutto il resto, non può dirsi completamente rigorosa. Ed a proposito del concetto di continuità ci viene alla mente un articolo pubblicato sul *Nuovo Educatore*, dove ad un certo punto si legge: « il concetto generale di *limite* include in sè quello di *continuità*, cioè quello di *grandezza continua*; dunque per tali autori (per quelli cioè che danno la definizione del numero mercè il concetto di limite) numero limite non può significare altro che la misura d'una certa grandezza. » Queste parole che il nostro A. scriveva per dimostrare in qual modo molti scrittori d'Aritmetica ed Algebra quando definiscono il numero come limite s'aggirano in un circolo vizioso fatto colle due parole numero e misura, sono tutt'altro che esatte perchè se si pensa al valore limite, o come vuol dirsi alla generatrice d'una frazione decimale periodica, tal limite può benissimo rappresentare una quantità discreta, a preferenza d'una quantità continua: dunque senza citare altri esempi, il concetto generale di limite non può includere quello di grandezza continua. È vero bensì che i numeri irrazionali non possono avere significato come rappresentazione di grandezza, se essa non è *continua*; ma non è questa una ragione perchè non si possano considerare in sè, definendoli con processo numerico e studiandone poi le proprietà indipendentemente dalla natura dell'unità a cui si riferiscono. E i numeri frazionari hanno forse sempre un significato? Evidentemente no, perchè quando l'unità non è divisibile in parti, non si può concepire frazione di

14. Intorno ai *numeri immaginari* non è detto altro che sono dei nuovi simboli introdotti nell'Aritmetica a rappresentare i radicali d'indice pari dei numeri negativi; rispetto ai quali si estendono le equivalenze dimostrate pei radicali *reali*. Successivamente si definiscono pure i *numeri complessi*, e si fa vedere come il prodotto di due numeri *complessi coniugati* è un numero reale.

15. Un altro concetto a cui non si è dato nessuna importanza, mentre la dovrebbe avere grandissima, è quello di *limite*. L'A. infatti ne dà il significato in una nota in basso alla pag. 150, tanto per avere agio di dimostrare che la potenza n^{esima} delle radici n^{esime} approssimate di a ha per limite a, allorchè il grado d'approssimazione impiccolisce indefinitamente; e di poterne parlare trattando delle equazioni e delle progressioni geometriche. Diremo infine che all'Arit-

---

questa unità; e nell'istesso modo può accadere che, in una determinata questione, non tutti i numeri interi possano rappresentare una quantità. Ciò non pertanto i numeri interi come i frazionari, una volta definiti, si studiano e si opera sopra di essi indipendentemente dalla specie dell'unità alla quale sono riferiti; anzi possiamo dire di più che gli stessi numeri, introdotti nel calcolo colle proprietà della quantità di cui sono l'espressione, ne acquistano delle proprie, ed è appunto perciò che non tutte le trasformazioni di calcolo hanno sempre ragione in un fatto, in una relazione fra quantità.

Ora, che cosa fanno coloro i quali definiscono l'irrazionale come limite d'una serie di numeri? Estendono a dei nuovi simboli quella stessa proprietà, la quale appartiene al tempo stesso ai numeri razionali e alle grandezze in generale; in modo che non solo vengono a comprendere in un concetto unico tutti gli enti aritmetici, ma hanno altresì la possibilità di rappresentare nel calcolo tutti gli stati d'una stessa grandezza. Se poi si considera la cosa da un altro aspetto, si vede che l'introduzione nel calcolo dei numeri irrazionali è abbastanza giustificata dal fatto che, con essi, tutte le estrazioni di radice sono rese sempre possibili.

Si è anche scritto, che l'irrazionale non può dirsi propriamente un *numero*, ma solo *l'espressione d'un fenomeno* che trova spiegazione in fatti geometrici. Sarebbe bene non far questione di parole, ma di concetti: se l'irrazionale non vuol chiamarsi numero, poco importa; si chiami pure semplicemente simbolo o segno; ma è innegabile che alla sua considerazione siamo indotti non solo da fatti geometrici, ma anche dai processi delle operazioni aritmetiche. Difatti, quando si estrae per es. la radice quadrata da un numero intero si viene a determinare una serie di numeri che soddisfanno alle stesse leggi dei valori d'una frazione decimale periodica, e nell'istesso modo che questi valgono sempre ad individuare un numero razionale, possono i primi ritenersi sufficienti a definire, in mancanza d'un numero razionale, un altro simbolo, che per contrapposto si chiama irrazionale. È così che si generalizzano i concetti della matematica elementare e si mettono le basi per le teoriche di ordine più elevato.

In conclusione, se, nel rispetto didattico, per dare la definizione d'irrazionale, si vuol partire dall'idea di quantità e distinguer prima le quantità commensurabili dalle incommensurabili, si faccia pure, e sarà ben fatto; ma non si dica che è inesatta o vacua la definizione data col concetto di limite e colle classi di numeri, prima d'averle sostituito qualche cosa di meglio e di più rigoroso.

netica generale dà termine un capitolo sugli esponenti frazionari, il quale è completamente e rigorosamente sviluppato.

16. Passando ora alla seconda parte del libro, dichiariamo subito che ci duole assai di doverne parlare brevemente, per non abusare troppo dello spazio che ci è concesso. In essa, l'A. espone la teoria delle equazioni, le progressioni e i logaritmi. I primi sei capitoli, destinati allo studio delle equazioni e sistemi di equazioni di 1° e 2° grado, sono, in complesso, trattati assai bene; e, se avviene che qualche cosa rimanga a desiderare, è intorno all' equivalenza delle equazioni. L'A. infatti, allorchè dimostra che si può aggiungere ad ambedue i membri d'un'equazione una stessa quantità, trascura di considerare il caso che essa possa perdere il suo significato; e, nell'altra questione riguardante la moltiplicazione dei membri d'un'equazione per una stessa quantità, non determina precisamente in quali casi la nuova equazione si conserva equivalente alla prima, e, nel caso contrario quando è che il numero delle radici di una equazione aumenta, oppure diminuisce. Però astrazion fatta da queste poche mende, l'A. ha esposto sullo stesso argomento molte ed utili considerazioni, fra le quali tornano assai opportune quelle relative ai simboli $\frac{0}{0}$ e $\frac{1}{0} = \infty$.

Anche la teoria delle progressioni è ben trattata.

Quanto ai logaritmi, essi sono esposti in modo analogo a quello usato per le radici approssimate, evitando cioè il concetto di numero irrazionale, e la loro definizione è così espressa: « la radice dell'equazione esponenziale $a^x = b$, con un prestabilito grado d'approssimazione, si chiama *logaritmo* di b nella base a ». Se ora si osserva che l'A. ha sempre considerato razionale l'esponente d'una potenza di leggieri si comprende l'inesattezza della precedente definizione. Sicchè, dal canto nostro, pur riconoscendo che la teoria dei logaritmi com'è esposta dall'A. può avere importanza nel calcolo delle approssimazioni, nel rispetto scientifico non possiamo approvarlo, perchè senza il concetto dei numeri irrazionali, non si può aver chiara e rigorosa idea del logaritmo.

Per ultimo osserveremo che l'appendice all'aritmetica generale contiene un'importante capitolo su problemi relativi ai rapporti delle grandezze e alla proporzionalità diretta ed inversa delle medesime; e che, tanto per la chiarezza e semplicità dell'esposizione come per il rigore dei ragionamenti, le diverse teoriche dell'aritmetica razionale che vi sono studiate, non lasciano nulla a desiderare.

M. Gremigni

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Annales du Baccalauréat ès sciences: Année 1886. Paris, librairie Nony e C.ie

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1887; N. 1.

Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXV. Marzo e Aprile 1887. Napoli, Benedetto Pellerano, editore.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy*, Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 2e série. Onzième année. N. 4. Paris, 1887.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*. 11e Année. N. 12, 13, 14, 15. Paris, M. Nony, 17. Rue des Écoles, 1887.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira*. Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VII, n. 4. Coimbra, 1886.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome septième, Mars et Avril 1887.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XIX. N. 4, 5, 6. Firenze, 1887.

Eneström (G.) — Aperçu sur les recherches récentes de l'histoire des mathématiques (1887).

Guccia (G. B.) — Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono unicursali (1886). — Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche e sopra un teorema generale delle curve algebriche di genere p (1887).

De Longchamps (G.) — Cours de mathématiques speciales (4 vol.) Première partie; *Algèbre* — Deuxième partie: *Géométrie analytique à deux dimensions* — Troisième partie: *Géométrie analytique à trois dimensions* — Quatrième volume: *Supplément au Cours de Mathématiques spéciales*. Paris, Librairie Ch. Delagrave, 1883—85.

— Sur la rectification de la trisectrice de Maclaurin, au moyen des intégrales elliptiques (1887) — Rectification des cubiques circulaires, unicursales, droites, au moyen des intégrales elliptiques (1887).

Loria (G.) — Su una proprietà del determinante di una sostituzione ortogonale (1886).

Maggi (G. A.) — Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra due conduttori piani indefiniti paralleli, assoggettati all'induzione di un punto situato nello spazio compreso fra essi (1880). — Induzione elettrica su conduttori limitati da piani indefiniti assoggettati all'azione dei coibenti caricati simmetricamente intorno ad un asse (1881) — Sul moto di un filo flessibile ed inestensibile che si sposta pochissimo dalla sua posizione d'equilibrio (1881). — Sul significato cinematico della superficie d'onda (1883). — Sulla trasmissione dei moti ondulatori, e particolarmente dei moti ondulatori luminosi, da un mezzo isotropo in un altro (1883). — Sull'integrazione delle equazioni differenziali del pendolo conico (1884). — Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili (1884) — Sull'integrazione delle equazioni differenziali del movimento oscillatorio di un filo flessibile e inestendibile, intorno ad una configurazione d'equilibrio (1886). — Deduzione della formola di Taylor (1886). — Riduzione di un integrale multiplo (1886).

Marabelli (E.) — Elementi di Aritmetica razionale ad uso delle scuole classiche — Reggio-Emilia, 1887.

Millosevich (E.) — Osservazioni astronomiche e riduzioni relative fatte nel 1885. Roma, 1887.

Tessari (D.) — La teoria delle ombre e del chiaroscuro ad uso delle Università, scuole d'applicazione per gli Ingegneri, Accademie militari, Istituti tecnici, ecc. Torino, Tip. Camilla e Bertolero editori, 1878—80.

— Trattato teorico-pratico delle projezioni assonometriche ortogonali ed oblique ovvero Metodo semplice e facile per eseguire qualunque genere di prospettive parallele. Ditta G. B. Paravia e C. 1882.

SUL CONCETTO DI NUMERO

Il concetto fondamentale dell' Analisi è quello di numero. Esso, almeno nella sua forma più semplice di numero intero, è d'altra parte uno dei concetti più comuni e naturali: e sembra così spontaneo, che Hoüel lo giudica « una » proprietà primordiale ed indefinibile » (*) degli aggregati di oggetti. Ciò non vuol dire che non si debba cercare di renderlo chiaro più che si possa e che, *per lo meno* nelle sue forme più generali di numero preceduto da segno, o di numero irrazionale, ecc., non siano necessarie delle vere e proprie definizioni.

Invece nell' insegnamento, almeno a giudicare da molti trattati, s' insiste così poco su questo concetto, da doversi persuadere che i giovani studiano spesso i numeri frazionari, i numeri negativi ecc., non perchè ne abbiano una chiara idea, ma perchè da sè stessi tentano di riconoscere nell'oggetto del loro studio quelle stesse caratteristiche con cui si presenta alla loro mente l'altro concetto, che pure porta lo stesso nome di numero, il numero intero, che hanno più chiaro perchè è loro famigliare fino dall'infanzia.

A me sembra che questo modo di procedere non sia scientificamente da lodarsi: e, se può esser sufficiente per gli usi che nella pratica si fanno dei numeri, non è d'accordo colla parte educativa che l'insegnamento della matematica deve avere nella scuola. Di più i giovani, senza avere un'idea chiara del concetto generale di numero, comprenderanno solo in modo vago ed indeterminato le considerazioni che loro si potranno fare sui numeri complessi: e non arriveranno mai a sapere qual' è lo spirito che guida l' introduzione di nuovi numeri, e fino a che punto sia utile o conveniente spingersi in questa introduzione.

(*) *Hoüel.* — Considérations élémentaires sur la généralisation successive de l'idée de quantité dans l'analyse mathématique. — Paris 1883.

Se in certi trattati, come or si accennava, si trascura di dare il concetto di numero, in certi altri lo si dà, sì, ma in modo molto inesatto. Spesso si trovano espressioni tali da far supporre che il numero sia tutt'una cosa colla grandezza, cosicchè, p. es., 7 libri costituiscano il numero 7; talora si vede supposta già chiara l'idea del numero razionale (benchè avuta spesso soltanto da uno studio elementarissimo di aritmetica pratica) e s'insiste solo sull'irrazionale, dandone un concetto che, se anche è esatto, non si può afferrar bene, non essendo posto in modo altrettanto esatto quello del numero razionale. In altri trattati, pure essendo le varie specie di numero introdotte in modo rigoroso, lo sono partendo da punti di vista differenti, talchè non s'arriva a dare un concetto *unico* del numero, ma si danno altrettanti concetti separati del numero razionale, dell'irrazionale, del negativo, tantochè sembra arbitrario il comprenderli sotto quello solo di numero reale.

Io ritengo essere indispensabile l'introdurre chiaramente ed esattamente l'idea di numero, per far ben comprendere lo scopo e l'oggetto dello studio dell'algebra. Non nego che vi siano trattati e pubblicazioni speciali in cui è svolta rigorosamente la questione del numero: nonostante stimo le poche considerazioni che sto per esporre non inutili affatto per chi comprenda l'importanza dell'insegnamento elementare della Matematica.

I.

1. Due sono i punti di vista sotto cui si può introdurre e sviluppare l'idea di numero; ritenendo cioè questo o come rappresentante le grandezze nel loro rapporto con una della loro specie, o come ente puramente analitico, senza curarsi dell'applicazione che potrà ricevere nella misura delle grandezze. S'intende che, o in un modo o nell'altro, il numero non sarà mai che un ente ideale, un puro concetto; soltanto nei due modi ne è differente l'origine e lo scopo,

per quanto gli enti generati dall'uno e dall'altro punto di vista si possano identificare fra loro.

2. Col primo metodo il numero nasce dalla considerazione delle grandezze e dall' utilità di avere un ente che le rappresenti. Non insistiamo qui sul significato da darsi alla parola *grandezza* (*); ma rileviamo che certe categorie di oggetti che sogliono più comunemente studiarsi, cioè gli aggregati di oggetti uguali fra loro e separati l'uno dall'altro, gli aggregati di parti di questi, i segmenti, gli angoli, le superficie, i solidi, i tempi, i pesi, ecc., hanno tali proprietà comuni che si può raggrupparli sotto un concetto unico dicendo che quegli oggetti (ciascuno nella propria categoria) sono grandezze. Per indicare ora gli oggetti di una medesima categoria di grandezze di fronte ad una grandezza della categoria stessa (unità) si sogliono spogliare gli oggetti di tutte le proprietà loro che non influiscono su questo confronto: e ne risulta un ente ideale che serve a rappresentarli e che si dice numero. Il numero, sotto questo punto di vista, è quindi un ente tale che ci ricorda il modo in cui una grandezza può ottenersi dall'unità della sua categoria.

3. Incominciamo dalle grandezze più semplici, che sono quelle formate da aggregati di più oggetti i quali, godendo tutti di certe proprietà, si dicono uguali fra loro di fronte a quelle proprietà. Se in questi oggetti si ha riguardo a queste sole proprietà, essi producono tutti su di noi la medesima impressione. Ciascuno di essi si dice un' *unità*.

Se partiamo da differenti unità, si ottengono aggregati di diverse specie; ma se prescindiamo dalle proprietà che servono a distinguere l' una dall' altra unità coll'immaginare l'unità spogliata di queste proprietà stesse, ad essa viene nella nostra mente a sostituirsi un ente ideale, dotato della sola proprietà di poterne immaginare quanti se ne vuole uguali ad esso ed aggregabili fra loro: e agli aggregati di

(*) Cfr. *Grassmann*. Lehrbuch der Aritmetik. — *Stolz*. — Vorlesungen über allgemeine Aritmetik. — *Hankel*. — Vorlesungen über die complexe Zahlen, ecc.

unità vengono a sostituirsi gli aggregati di quegli enti i quali sono gli stessi qualunque siano gli oggetti. Quell'ente ed i suoi aggregati sono rispettivamente il numero 1 e gli altri numeri, i quali tutti con un nome unico si dicono *numeri interi* o *naturali*.

La necessità di considerare grandezze formate da quegli oggetti che si sono detti unità e dalle loro parti (supposti gli oggetti divisibili in parti da ritenersi uguali) conduce all'introduzione di nuovi enti, i numeri frazionari, di cui ciascuno rappresenta uno di questi aggregati di unità e di parti di unità. Se si prendono poi a studiare le grandezze geometriche o quelle che si sogliono rappresentare con grandezze geometriche (generalmente con segmenti), p. es. tempi, pesi, temperature, forze ecc., si vede che i concetti precedenti non bastano per ottenere tutte le grandezze possibili partendo da una data grandezza ed applicandole le leggi espresse dai numeri precedenti (razionali): di qui la necessità di nuovi enti atti a rappresentare le grandezze che, di fronte a quella data, non si possono rappresentare coi numeri razionali. E ancora, se si riflette che talune grandezze, considerate da certi punti di vista, presentano due modi di comportarsi opposti fra loro tali che, prese due convenienti di quelle grandezze, il loro insieme non ha più il carattere di quelle grandezze ma equivale alla loro assenza, si vede che nei numeri precedenti occorre determinare qualcosa di più, perchè servano completamente a definire le grandezze — donde l'introduzione dei numeri col segno. Considerando in seguito certe grandezze (i segmenti) come caratterizzati da qualche proprietà di più di quelle cui si è avuto ricorso per introdurre i numeri reali (cioè la direzione) si prova l'insufficienza di questi numeri reali stessi; e, volendo per ogni grandezza avere il numero corrispondente, siamo condotti ai numeri complessi a due o tre dimensioni, secondochè si studiano i soli segmenti del piano o tutti quelli dello spazio. E in questo modo potremmo anche spingerci più oltre.

4. Con questo metodo il numero apparisce come rappresentante le grandezze e serve immediatamente al loro studio. Le definizioni dei concetti e delle operazioni relative ai numeri devono quindi discendere dalle corrispondenti per le grandezze. Saranno quindi uguali i numeri che rappresentano grandezze uguali, sarà maggiore il numero che rappresenta la grandezza maggiore, un numero sarà somma di più altri se rappresenta la grandezza somma delle grandezze rappresentate da questi altri numeri, ecc. In tal modo i concetti di uguaglianza, di disuguaglianza e le operazioni sui numeri godranno le proprietà stesse che godono le corrispondenti per le grandezze. E siccome cogli ordinari concetti di uguaglianza e di disuguaglianza, di maggiore e di minore, ecc. per le grandezze che più comunemente si sogliono studiare si ha che, indicando con A, B, C,.... grandezze omogenee, se $A = B$, $B = C$ anche $A = C$, se $A > B$, $B > C$ anche $A > C$, e $A + B = B + A$ ecc., sarà corrispondentemente per i numeri a, b, c,.... che rappresentano quelle grandezze, che $a = c$ se $a = b$, $b = c$; $a > c$, se $a > b$, $b > c$; e $a + b = b + a$ ecc. Queste proprietà dei numeri sono quindi veri e propri teoremi.

Il concetto di numero dipende così dal concetto di grandezza; ma il vedere come il numero, introdotto che sia, possiede esso stesso le proprietà delle grandezze, fa nascere l'idea che il numero possa introdursi anche come ente che esista da sè, in seguito a considerazioni di altro genere.

Serve a questo il secondo dei metodi cui abbiamo accennato nel § 1, col quale, sotto altri punti di vista, si studiano enti ideali puramente aritmetici, cui pure si dà il nome di numeri.

5. In questo secondo metodo (*) i numeri non hanno nessun significato concreto, ma un puro significato analitico: essi non sono che gli elementi di operazioni analitiche. Le

(*) Cfr. *Stolz*, *Hankel* ll. cc. Come il precedente, così non intendo sviluppare completamente neppure questo metodo, rimandando, per l'esatta trattazione, alle opere citate.

loro proprietà dipenderanno quindi non dal significato assoluto delle operazioni, ma dalle proprietà di queste: per cui, nelle successive generalizzazioni del concetto di numero, cercando sempre che i nuovi numeri che s'introducono comprendano gli antichi, non si dovrà aver cura che sia tale o tal'altro il significato dell' operazione, ma che questa, cioè il suo simbolo, nel quale essa consiste, goda la proprietà che godeva per i numeri precedenti: e così le definizioni delle operazioni saranno definizioni puramente simboliche e di forma. In altre parole, per definire le operazioni se ne daranno le proprietà caratteristiche, cioè quelle sole da cui discendono per dimostrazione le altre di cui vogliamo che esse godano, e quelle serviranno a *indicare* un nuovo numero che noi intenderemo venga definito come loro risultato.

Il numero è in questo metodo un segno e null'altro, o, se si vuole, un ente astratto non definito in sè ma solo per alcune proprietà che lo legano ad altri della medesima specie, le quali sono le proprietà formali ora accennate.

6. Partiamo da un ente astratto, che s'indica con 1 (o anche, può dirsi, che è il segno 1): e immaginando di poterne supporre tanti quanti se ne vuole da dirsi uguali ad esso, si consideri insieme ad un altro suo uguale, indicando con + l'operazione del considerarli insieme: sarà $1+1$ il simbolo di quest'operazione, o, se si vuole, l'operazione stessa. Diremo che essa ha per risultato un nuovo ente da dirsi differente dai precedenti, e da indicarsi con 2. Questo ente si definisce disuguale dal precedente, perchè, sebbene le parole uguale e disuguale possiamo usarle in quali casi vogliamo purchè una escluda l'altra, pure è conveniente indicare con esse due concetti tali che le formule che ne derivano esprimano le proprietà che ordinariamente si sogliono ritenere annesse al concetto di uguaglianza. Ordinariamente ci facciamo questo concetto dell' uguaglianza: che due cose uguali ad una terza lo sono fra loro, che la somma è differente da una sua parte ecc: onde, sebbene liberi di non ammet-

tere tali proprietà nei nostri enti, sarà utile farlo perchè essi non solo riescano enti a sè, ma siano poi applicabili agli oggetti che si sogliono studiare. Onde, poichè l'operazione $1 + 1$ è caso particolare di quella che dopo diremo addizione, e quindi sarà 2 da dirsi somma di 1 ed 1, è conveniente chiamare 2 disuguale da 1. (*) L'operazione $2 + 1$ diremo che ha per risultato un nuovo ente, il 3, l'operazione $3 + 1$ il 4 ecc., ciascuno dei nuovi enti dovendosi dire disuguale dai precedenti. Così si generano infiniti enti che si dicono *numeri interi* o *naturali*.

Per *addizione* di due numeri interi intenderemo un'operazione commutativa ed associativa, ossia, se essa s'indica col segno $+$, tale che sodisfi le condizioni:

$$a + b = b + a\,; \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

Si prova che basta porre la sola condizione

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1,$$

la quale non è che un caso particolare delle precedenti; giacchè da essa discendono le altre, e risulta da essa sola determinato il numero che devesi necessariamente far corrispondere come risultato (somma) all'operazione $a + 1$.

Per *moltiplicazione* di due numeri interi s'intende un'operazione commutativa, associativa, distributiva rispetto all'addizione e a modulo 1; tale cioè che, se s'indica col segno. sia

$$a.b = b.a\,; \ (a.b).c = a.(b.c)\,; \ a.(b + c) = a.b + a.c$$

$$a.1 = a$$

Anche qui si prova che, per definirla, bastano le due sole condizioni:

$$a.1 = a, \ \ a.(b + 1) = a.b + a,$$

giacchè se sono soddisfatte esse vengono soddisfatte le altre

(*) Questi ragionamenti sembrano forse strani se non si pensa che qui i numeri sono puri enti astratti, puri enti di ragionamento, senza nessun fondamento nella realtà, e legati a questa dal solo nome di numeri. Se si desse loro un nome differente, il che farebbe dimenticare che in seguito si vogliono applicare alla realtà, lo strano di quei ragionamenti sparirebbe immediatamente.

e vi è sempre un numero ed uno solo che possa corrispondere come risultato (prodotto) alla moltiplicazione $a.b$; talchè quelle due condizioni individuano completamente l'operazione.

Le due operazioni precedenti sono sempre possibili qualunque siano, i numeri impiegati; ma le loro operazioni inverse, quelle cioè che corrispondono alla determinazione del numero x che sodisfa ad una delle due relazioni

$$a + x = b\,, \quad a.x = b$$

non sempre sono possibili.

L'impossibilità della sottrazione indicata da $b - a$ nel caso che b preceda a nella serie dei numeri naturali porta ad introdurre un nuovo ente aritmetico da dirsi differente da tutti i precedenti per ragioni simili a quelle già accennate; esso ha per iscopo di rendere sempre possibile la sottrazione, o, ciò che in questo caso ha esattamente lo stesso significato, a far sì che il simbolo $b - a$ (che, per non contradire alle leggi caratteristiche dell' uguaglianza, non può dirsi uguale a nessuno dei numeri naturali) possa indicarsi con un segno unico, il quale, secondo l' attuale punto di vista, avrà valore di numero e potrà dirsi risultato della sottrazione precedente. Questo ente, affinchè l'addizione anche per i nuovi enti goda la stessa proprietà di cui godeva al caso in cui $b - a$ è un numero naturale, sarà formalmente *definito* dalla relazione:

$$(b - a) + a = b$$

e sarà un *numero negativo* o lo *zero*.

Del pari la divisione $x = \frac{a}{b}$ è impossibile se a non è multiplo di b: onde, per renderla possibile, cioè perchè il simbolo $\frac{a}{b}$ si possa esso pure dire uguale ad un numero, bisogna introdurre nuovi numeri, che sono i *numeri frazionari*, e che vengono con definizione formale definiti da

$$\frac{a}{b} \cdot b = a$$

Le operazioni fra questi enti si definiscono chiedendo che per esse siano soddisfatte le proprietà formali già riscontrate per le operazioni che hanno ugual nome (e che quindi si indicano con ugual simbolo), fra i numeri già esistenti. Anche qui si prova che basta ammettere dei casi particolari di quelle condizioni, perchè vengano allora necessariamente verificate tutte, e le operazioni abbiano ciascuna il suo risultato. Per esempio, per i numeri negativi corrispondenti ai simboli $b - a$ basta ammettere per l'addizione la condizione

$$(b - a) + (b' - a') = (b + b') - (a + a');$$

e per la moltiplicazione, se si ponga

$$b - a = -(a - b),$$

basta ammettere le altre (che sono caso particolare della proprietà distributiva)

$$(-a).b = -(a.b); \quad a.(-b) = -(a.b); \quad (-a)(-b) = a.b$$

Per i numeri frazionari basta ammettere per l'addizione la relazione (che è un caso particolare delle proprietà distributiva)

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right).(b.d) = a.d + c.b$$

e per la moltiplicazione la proprietà, che pur si verifica nel caso che $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ siano i simboli di numeri interi,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{a.a'}{b.b'}$$

I nuovi numeri, che tutti in complesso insieme agli antichi si dicono *razionali*, godono quindi tutte le proprietà degli antichi.

7. Se volessimo ritenere come sole operazioni dell'Aritmetica le prime quattro fondamentali, non resterebbe ora

che l'unica impossibilità $\frac{m}{0}$. Ma se fra le operazioni vogliamo inclusa anche l'elevazione a potenza, e quindi le due sue inverse, allora anche coi nuovi numeri restano delle operazioni impossibili e quindi dei simboli privi di significato, cioè intanto i simboli $\sqrt[n]{a}$ di estrazione di radice di grado n^a da numeri a che non sono potenze n^e esatte di nessuno dei numeri già esistenti.

Potremmo introdurre ancora nuovi enti, sottoponendoli alle consuete condizioni che si sono prese fino qui come caratteristiche per le varie operazioni. Ma giunti a questo punto possiamo domandarci se questo sia il modo realmente più opportuno per proseguire ad introdurre nuovi enti. Essi servono infatti a togliere l'impossibilità della risoluzione dell'equazione

$$x^n = a$$

dove a è un numero razionale; ma il fatto che, come si dimostra nella teoria delle equazioni, anche coi nuovi enti non si giunge a dare la risoluzione in generale delle equazioni

$$(1) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

dove a_0, a_1,.. a_n sono numeri razionali, mostra che per render completa questa risoluzione sarebbero necessari ancora nuovi enti diversi dai precedenti. Talchè con questa via non si vedrebbe con sicurezza fino a qual punto si dovrebbe proseguire questo processo, e le questioni dell'algebra non potrebbero trattarsi in modo completo e sicuro, nel dubbio che ad ogni istante la natura di un nuovo problema conducesse a qualche impossibilità, a togliere la quale sarebbero necessari ancora nuovi numeri. Si aggiunga che si dimostra che p. es: tutti gli enti che si possono introdurre per render possibile la soluzione della (1) non sono ancora sufficienti per la completa misura delle grandezze (*);

(*) Questo discende subito dalle considerazioni di *Liouville* e di *Cantor*. — V.: Cantor, « Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen » Borchardt Journal, Bd. 77.

alle quali è utile che sia applicabile il concetto di numero; per cui, proseguendo con questo processo, mentre potremmo arrestarci quando vorremmo dal punto di vista puramente analitico, almeno dichiarando impossibili certe operazioni, non sapremmo con certezza se i numeri fino a quel punto introdotti sarebbero sufficienti quando volessimo applicarli alla misura delle grandezze.

8. Si vede quindi come non sia opportuno seguire questa via, e come convenga invece ricorrere a nuovi numeri, i quali, sebbene possano poi servire a togliere quelle impossibilità, non siano nonostante introdotti come enti destinati *immediatamente* a quello scopo, cioè a rappresentare risultati di operazioni.

I nuovi enti, che sono i numeri irrazionali, si possono introdurre: o come enti destinati a colmare le lacune che interrompono la continuità nella serie dei numeri razionali (Dedekind), o come enti che devono rappresentare il limite di una serie convergente di numeri razionali (Cantor), o come enti formati da infiniti numeri razionali che se ne dicono le parti, e di cui essi si dicono somma (Weierstrass). Secondo il Dedekind (*) si spartiscono tutti i numeri razionali in due gruppi, essendo tutti i numeri del primo gruppo minori di tutti quelli del secondo gruppo, e si mostra come per infinite divisioni in gruppi non c'è un numero che eseguisca quelle divisioni in modo da essere il massimo del primo gruppo o il minimo del secondo – d'onde l'opportunità dei nuovi enti che servano a colmare quelle lacune. Il Cantor (**) invece prende una serie di numeri razionali $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ tale che per ogni numero arbitra-

(*) Cfr. principalmente — *Dedekind*-Stetigkeit und irrationale Zahlen — e poi — *Dini* — Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. — *Garbieri* e *Capelli*. — Corso di analisi algebrica. — *Frattini* — Sui numeri irrazionali — e altri.

(**) Cfr. *Cantor*. — (Mathematische Annalen, Bd V, e Acta Mathematica Bd 2.) — *Heine* (Borchardt Journal, Bd. 74). — *Grandi* — Dei numeri irrazionali (Cronache del R. Liceo di Pistoia).

rio σ vi sia un numero n_1 in modo che per ogni $n \geqq n_1$ sia $a_{n+h} - a_n < \sigma$ (in valore assoluto) qualunque sia h, e dice in ogni caso che quella serie ha un limite: e se non esiste un numero razionale che ne sia limite, crea a questo scopo il numero irrazionale. Invece il Weierstrass (*) prende argomento alla introduzione dei numeri irrazionali dalla considerazione di infiniti elementi (chiamando elementi il numero 1 e le frazioni $\frac{1}{n}$ per qualunque valore di n). Quando si ha un algoritmo qualunque che permetta di calcolare successivi numeri razionali in modo da potere assegnare a quali elementi esso conduce e quante volte ci dà lo stesso elemento (escludendo il caso in cui un medesimo elemento comparisca un numero infinito di volte) egli dice che si ha un numero: il quale è finito se si possa trovare un numero razionale maggiore di qualunque sua parte integrante. Seguendo p. es. le regole che l'Aritmetica insegna per trasformare in decimale la frazione $\frac{3}{7}$, o per estrarre con approssimazione di $\frac{1}{10^n}$, con n grande a piacere, la radice da 2, siccome si può determinare quanti decimi, quanti centesimi, quanti millesimi ecc. così si hanno, cioè quante volte si trovano gli elementi $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ecc., e siccome non si trovano altri elementi che questi, e ciascuno un numero finito di volte (< 10), nell'uno e nell'altro caso egli dice che si ha un numero. Se un numero che così si ottenga è tale che nessun numero razionale gli è uguale (uguale nel senso che una parte qualunque dell'uno è parte integrante anche dell'altro e viceversa) lo dice numero irrazionale.

Anche per questi nuovi enti, con qualunque genere di

(*) Cfr. *Pincherle*. — Saggio di una introduzione alla teoria, ecc., (Giornale di Matematiche, Vol. 18) e *Gazzaniga*. Lezioni (autografate) sulla teoria dei numeri.

considerazioni siano introdotti, si definiscono le reciproche relazioni e le operazioni in modo da soddisfare alle consuete condizioni caratteristiche ed allora si vede che con essi vengono tolte alcune delle impossibilità notate. Ma ne restano ancora altre, quella p. es. espressa dall'equazione

$$x^2 = - a^2$$

la quale si toglie coll'introduzione di altri enti, che sono i numeri immaginari; e con questi, definendo in modo formale l'addizione e la moltiplicazione fra essi e coi numeri reali, si perviene a nuovi enti, i numeri complessi a due dimensioni, i quali, dovendo soddisfare alle solite condizioni formali, vengono definiti in modo che con essi è tolta ogni impossibilità.

Rinunziando poi a qualcuna delle condizioni ritenute fino a questo punto come caratteristiche, o sostituendovene altre, ci si può spingere più oltre ancora e pervenire a numeri più generali.

9. Abbiamo così esposto due metodi coi quali si giunge all'introduzione di enti, a cui in ambedue i casi si è assegnato il medesimo nome di *numeri*. Ma possiamo chiederci se questo si può fare, identificando così gli enti introdotti col primo metodo, con quelli introdotti col secondo metodo; ossia se si può ciascuno dei primi *definire* uguale a uno dei secondi.

Se fra gli enti creati nel primo modo, ricorrendo cioè alle grandezze, si definiscono le consuete operazioni, si vede che queste vengono a soddisfare alle proprietà che si sono poste come caratteristiche per le operazioni che nel secondo metodo si sono chiamate con identico nome, e che esse, secondochè sono fatte su numeri interi, negativi, irrazionali, ecc. dànno risultati conformi a quelli che darebbero gli enti delle categorie corrispondenti nel secondo metodo. E reciprocamente i numeri del secondo metodo, in virtù delle leggi che presiedono alle loro operazioni, sono suscettibili di essere applicati alle grandezze e conducono ad altre grandezze di cui perciò sono i rappresentanti. Di qui l' opportunità di non tener distinte le due categorie di enti, e di identificarle fra loro.

I *medesimi* numeri sono così introdotti in due modi differenti, i quali del resto sono ugualmente rigorosi.

10. La differenza sostanziale fra i due metodi sta in questo: che mentre nel primo le proprietà dei numeri discendono come conseguenza dalle definizioni date per essi dipendentemente dal fatto che essi *rappresentano* grandezze, nel secondo le definizioni sono *conseguenze* necessarie di quelle proprietà che noi *vogliamo* siano verificate, perchè ammettiamo *per nostro arbitrio* quelle fondamentali da cui esse dipendono. Nel primo metodo le operazioni fra i numeri rappresentano un significato effettivo il quale conduce alle loro proprietà; nel secondo queste proprietà sono stabilite a priori, e servono invece come definizione delle operazioni.

Ne viene che, volendosi servire del primo metodo, si deve incominciare col dare in modo preciso le definizioni dei concetti di uguale, maggiore, minore, somma per la classe o per le classi di grandezze da cui si parte, verificando che soddisfano alle condizioni che generalmente (in modo esplicito o sottinteso) si sogliono richiedere in quei concetti stessi, p. es. che da $A = B$, $B = C$ segue $A = C$, che la somma è commutativa ecc.; queste definizioni si trasporteranno poi ai numeri corrispondenti, e ne discenderanno come conseguenze necessarie le analoghe proprietà per i numeri.

Se si ricorre al secondo metodo, bisogna invece incominciare col dare, in modo che è perfettamente arbitrario, le definizioni dei concetti di uguale, maggiore, minore, di somma ecc, per i numeri; ma, tenendo conto che dei numeri dovremo farne una classe che poi corrisponda alle ordinarie classi di grandezze, sarà conveniente *preparare* il numero a questo scopo, e procurare quindi che nelle diverse forme successive sotto cui viene a generalizzarsi, goda esso e le sue operazioni di quelle proprietà di cui godono le ordinarie categorie di oggetti, quando si studiano in quanto sono grandezze. S'intende che queste proprietà non importa ammetterle *tutte* a priori: basta chiedere quelle sole da cui con dimostrazione discendono le altre. E s'intende pure come sia possibile e rigoroso lo studiare col secondo metodo numeri che sodisfino alle condizioni formali che più ci piacciono, purchè non siano contradittorie.

11. Paragoniamo ora l'importanza e la convenienza dei due metodi esposti.

Il primo, che è metodo più geometrico e sintetico, reso semplice dal limitarsi a poche classi di grandezze agevoli a concepirsi, quali le ordinarie classi discrete e le continue geometriche, è certamente più intuitivo e si presta più ad esser compreso ed appreso, a causa dell'applicazione continua che se ne fa nell'uso comune; ma fa dipendere il numero da considerazioni che limitano ulteriori estensioni, a meno che non si studino anche classi di grandezze di cui non si ha immagine concreta, e che a null'altro si possono assomigliare che a quelle dei numeri introdotti col metodo analitico.

Questo secondo metodo invece è più scientifico ed opera su enti che non dipendono da altri, ma solo da considerazioni relative allo studio dell'ente stesso, aprendo così nuovi [redacted] campi e nuove vie all' Analisi. Seguendo questo secondo metodo l'Algebra acquista una importanza molto superiore a quella che ha se si considera come sola scienza del numero: essa diviene la scienza delle proprietà formali e dà quindi risultati applicabili non solo ai numeri, ma anche agli altri enti che godono proprietà formali simili. « Non dobbiamo (scrive Hoüel) rappresentarci l'algebra come » operante solo su quantità numeriche, e impotente a trat- » tare le grandezze concrete senza passare per l'intermezzo » dei numeri. Una formula algebrica può indicare immedia- » tamente una costruzione geometrica o un movimento mec- » canico, senza che sia necessario in nessun modo di pen-

» sare alla valutazione aritmetica dei dati del problema. Così
» se si definisce l'operazione della moltiplicazione geometrica
» come la costruzione di un rettangolo, l'uguaglianza

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

» esprime l'equivalenza fra una certa area e la somma di
» più altre, astrazion fatta da ogni valutazione numerica
» di queste aree ». (*)

Il metodo analitico è quindi scientificamente più potente ed indipendente. Non bisogna peraltro nascondere come in esso l'introduzione del numero irrazionale dia luogo a qualche osservazione. Intanto, come si è visto (§ 7), occorre per esso abbandonare la via seguita nell'introdurre i numeri razionali, il che crea una certa difformità che nuoce all'unità del metodo. Ma di più, trattando il numero irrazionale coi metodi del Dedekind e del Cantor, sebbene il concetto sia indipendente da quello di grandezza, pure mi sembra che solo in essa si trovi la ragione della sua introduzione, e che esso sia, per dir così, modellato su quello della grandezza continua. Nell'uno e nell'altro dei due metodi si riconosce lo scopo che la categoria dei numeri reali divenga continua, cioè non dissimile da quella dei segmenti e da altre. Anche nel metodo del Weierstrass mi sembra che si possa ritrovare il concetto di limite, il quale ha la sua origine nella grandezza: giacchè il numero appare come la somma di tutti i suoi elementi, e di più si dice maggiore di ogni sua parte integrante e minore di ogni numero di cui qualche parte integrante non sia contenuta in esso: per cui tal metodo può paragonarsi a quello del Cantor.

Per spogliare questi processi del loro aspetto non del tutto analitico, non basta, come talvolta si fa, partire dal notare impossibile una certa operazione, p: es: l'estrazione di radice, e mostrare come essa dia origine ad una scomposizione dei numeri razionali in due gruppi senza che esista un numero che li separa, o a una serie convergente di nu-

(*) *Hoüel.* — Théorie des quantités complexes.

meri razionali che non ha limite, o a un numero infinito ma definito di elementi che non dà un numero razionale, secondochè vogliamo rispettivamente servirci dei processi di Dedekind, di Cantor, o di Weierstrass, e notare il bisogno di nuovi numeri, che sono irrazionali; giacchè non ci si arresta qui, ma, generalizzando, si introducono numeri anche per completare *tutte* le lacune esistenti nella categoria dei numeri razionali, o per dare un limite a *tutte* le serie convergenti, o un significato a *tutti* i gruppi finiti di infiniti elementi, anche se non provengono da un' operazione impossibile. Il *perchè* di questa generalizzazione, non richiesta immediatamente da nessuna operazione, mi sembra che si trovi solo nell' utilità del fatto che in seguito il numero possa applicarsi alle grandezze.

Tutto ciò costituisce un difetto del metodo analitico. Hankel (*) giudicando non adattato ad una scienza formale l'introdurre l'irrazionale col concetto di limite del razionale, giacchè questo nasconde l' idea di grandezza estensiva, e stimando di poco valore qualunque sforzo destinato a liberare l' irrazionale dal concetto di grandezza, ritiene che il concetto d' irrazionale si debba introdurre soltanto dopo avere, mediante la misura, dato un significato attuale ai numeri. Ma nonostante tale osservazione io giudico che non si debbano trascurare quei processi, giacchè non dipendono *direttamente* dalle grandezze: e, in un metodo pienamente analitico, è arbitraria la scelta delle definizioni, purchè queste sodisfino alle condizioni caratteristiche stabilite (come infatti si dimostra nei casi in questione). Il metodo analitico, anche condotto con quei processi, non cessa di essere importante e di avere un forte interesse scientifico.

(*Continua*). R. Bettazzi.

(*) *Hankel*, l. c. §. 12.

IL TEOREMA DI FERMAT

E ALCUNE SEMPLICI SUE CONSEGUENZE

Notissimo è il Teorema di Fermat relativo alla Teorica dei numeri, che si enuncia nel modo seguente:

Se m *è un numero primo, l'uno o l' altro dei numeri* a, $a^{m-1}-1$ *è divisibile per* m.

Di questo importante teorema si hanno diverse dimostrazioni. Scopo della presente Nota è di darne una abbastanza semplice e alquanto diversa da quelle che io conosco, come pure di fare alcune osservazioni che con esso hanno una certa attinenza.

1. — Evidentemente per giungere alla dimostrazione del teorema di Fermat basta provare che:

Se m *è un numero primo l' espressione* $a^m - a$ *è sempre divisibile per* m.

Se a è divisibile per m la verità del teorema è manifesta. Consideriamo adunque il caso in cui m numero primo non divide a. L'espressione a^m-a può scriversi nel seguente modo:

$$a^m - a = \{ (a-1) + 1 \}^m - 1 - (a-1)$$

Ora sviluppando la potenza m^{ma} indicata superiormente si osservi che essendo i coefficienti binomiali numeri interi della forma:

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,r}$$

con $r<m$, i numeri 2, 3, ... r sono primi con m; e perciò l'espressione

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,r}$$

è nel nostro caso un numero intero: i coeficienti poi del primo e dell'ultimo termine dello sviluppo sono eguali alla unità. Si potrà quindi scrivere, indicando con H_1 un certo numero intero,

$$a^m - a = H_1 m + (a-1)^m - (a-1)$$

Facendo le stesse osservazioni per la espressione $(a-1)^m - (a-1)$ si ottiene analogamente:

$$(a-1)^m - (a-1) = H_2 m + (a-2)^m - (a-2).$$

Laonde:

$$a^m - a = H_1 m + H_2 m + (a-2)^m - (a-2).$$

E continuando nello stesso modo si troverà:

$$a^m - a - H_1 m = H_2 m + ,.. + H_h m + (a-h)^m - (a-h)$$

Ora col prendere h in modo che $a - h$ sia un multiplo di m, il che può sempre farsi, la espressione $(a-h)^m - (a-h)$ è manifestamente divisibile per m. E siccome allora tutte le parti che costituiscono $a^m - a$ sono divisibili per m, anche l'espressione $a^m - a$ sarà divisibile per m, appunto come volevasi provare.

Avendosi:

$$a^m - a = a\,(a^{m-1} - 1)$$

ed essendo m un numero primo che divide $a^m - a$, se m non divide a dividerà $a^{m-1} - 1$ e viceversa. In ogni caso per altro m non può dividere ambedue quei fattori; perchè se m divide a divide anche a^{m-1}, e perciò non può dividere $a^{m-1} - 1$. Se poi m divide $a^{m-1} - 1$ non divide a^{m-1}: e se un numero non divide la potenza, a maggior ragione non può dividere la base.

2. *Quali si siano i numeri* a *ed* m, *se* m *divide* a − 1 *la somma delle potenze di* a *i cui esponenti vanno da zero ad* m − 1 *è divisibile per* m.

Infatti chiamisi, per brevità, S quella somma, e pongasi

$$a - 1 = hm;$$

allora si avrà

$$a = hm + 1$$

e perciò:

$$S = (hm+1)^{m-1} + (hm+1)^{m-2} + \dots + (hm+1) + 1.$$

Ora sviluppando le potenze indicate e raccogliendo in un sol termine tutti quelli che sono multipli di m si avrà:

$$S = Hm + (m-1) + 1 = (H+1)m$$

che è un multiplo di m come volevasi provare.

Poichè si ha:

$$a^m - 1 = (a-1)\,S$$

si può concludere che: *se* m *divide* a − 1, *il numero* $a^m - 1$ *è divisibile almeno per* m^2.

3. *Se* m *è un numero primo che non divide* a − 1, *il numero* $a^m - 1$ *non è divisibile per* m.

Infatti abbiamo:

$$a^m - a = (a^m - 1) - (a-1)$$

e per il teorema di Fermat l'espressione $a^m - a$ è divisibile per m; quindi se m non divide $a-1$ non dividerà neppure $a^m - 1$.

L'eguaglianza superiore ci fa anche concludere che se $a^m - 1$ è divisibile per m numero primo, anche $a-1$ sarà divisibile per m. Da ciò e da quanto è stato dimostrato al N. 2, risulta;

Se m *è un numero primo o l'espressione* $a^m - 1$ *non è divisibile per* m, *oppure essa è divisibile per* m^2.

4. *Se* m *è un numero superiore al* 2 *e divide* a − 1, *la somma* S *delle potenze di* a *i cui esponenti vanno da zero ad* m − 1 *non è divisibile, oltre che per* m, *per alcuna altra potenza di* m.

Infatti l'espressione di detta somma che in tale ipotesi è:

$$S = (hm+1)^{m-1} + (hm+1)^{m-2} + \dots + (hm+1) + 1,$$

raggruppando in un solo termine quelli che sono in ogni caso divisibili per m^2, e indicando questo termine con Km^2, può scriversi nel seguente modo:

$$S = Km^2 + \{ (m-1) + (m-2) + \ldots + 2 + 1 \} hm + m ,$$

ossia:

$$S = Km^2 + m \left\{ \frac{m(m-1)}{2} h + 1 \right\} .$$

Da ciò si vede che, affinchè S sia divisibile per m^2, deve essere $\frac{m(m-1)}{2} h + 1$ un multiplo di m. Ora dico che ciò non avviene. Infatti, indicando con k un numero intero, pongasi, se è possibile:

$$\frac{m(m-1)}{2} h + 1 = km$$

e si distinguano i casi di m dispari e di m pari.

Nel primo caso $\frac{m(m-1)}{2}$ è un multiplo di m; e quindi l' eguaglianza superiore ci farebbe concludere che l' unità è divisibile per m il che non può essere.

Nel secondo caso $\frac{m(m-1)}{2}$ non è un multiplo di m, ma di $\frac{m}{2}$; e siccome manifestamente anche km è multiplo di $\frac{m}{2}$, anche la unità dovrebbe essere divisibile per $\frac{m}{2}$ il che non è.

Dunque in ambedue i casi l'espressione

$$\frac{m(m-1)}{2} h + 1$$

non è un multiplo di m; e quindi S non è divisibile per m^2 ed a maggior ragione per nessuna potenza di m il cui esponente sia superiore al 2.

Nel caso in cui m è uguale al 2 il teorema non ha luogo. Infatti l'eguaglianza superiore si riduce all'altra:

$$h + 1 = 2k$$

la quale è verificata tutte le volte che h è un numero dispari.

5. *Se il numero* $a - 1$ *è divisibile per* m *numero primo diverso dal* 2, *ed* $a^m - 1$ *è divisibile per* m^r *(con* r *maggiore o eguale a* 2), $a - 1$ *dovrà esser un multiplo di* m^{r-1}.

Infatti avendosi:

$$a^m - 1 = (a - 1)\,S$$

ed essendo, per il Teorema precedente, S divisibile per m e non per altra potenza di m, si potrà porre:

$$S = mQ,$$

ove Q è primo con m: e si avrà:

$$\frac{a^m - a}{m} = (a - 1).\,Q.$$

Ora il prodotto $(a - 1)$. Q è divisibile per m^{r-1}, e siccome Q ed m^{r-1} sono primi fra loro, dovrà m^{r-1} dividere il numero $a - 1$ il che volevasi provare.

Il Teorema sussiste anche nel caso in cui m invece di essere primo assolutamente, è primo col numero Q.

6. *Se* m *è un numero primo uno ed uno solo dei tre numeri* a, $a - 1$, $a^{m-2} + a^{m-3} + \ldots + a + 1$ *è divisibile per* m.

Infatti abbiamo:

$$a^m - a = a\,(a - 1)\,(a^{m-2} + a^{m-3} + \ldots + a + 1) = a(a - 1)\,(S - a^{m-1})$$

e per il teorema di Fermat essendo $a^m - a$ divisibile per m numero primo, uno intanto dei fattori che costituiscono $a^m - a$ è divisibile per m. Di più se m divide a non può manifestamente dividere gli altri due fattori. Se poi m divide $a - 1$ non può in primo luogo dividere a; inoltre poichè per il Teorema del N. 2 in tal caso m divide la somma che abbiamo indicata con S e non a^{m-1}, $S - a^{m-1}$ non sarà divisibile per m. Se infine m divide $S - a^{m-1}$ non può dividere nè a nè $a - 1$, perchè ove dividesse uno di quei fattori abbiamo visto che non potrebbe dividere $S - a^{m-1}$.

Più generalmente possiamo anche dire:

Se l'espressione $a^m - a$, *ove* m *è un numero primo, è divisibile per* m^r *tale deve essere uno dei numeri* a, $a - 1$, $S - a^{m-1}$.

Infatti si ha:

$$a^m - a = a\,(a^{m-1} - 1)$$

e supposto che m divida a, non divide $a^{m-1} - 1$. E perchè m è un numero primo, saranno $a^{m-1} - 1$ ed m^r numeri primi fra loro. Dunque in questo caso m^r divide a.

Se poi m non divide a, dovrà dividere, per il teorema precedente, uno solo dei fattori $a - 1$, $S - a^{m-1}$; e perciò quel fattore che è divisibile per m è anche divisibile per m^r.

7. *Se il numero primo* m *non divide alcuno dei tre numeri consecutivi* $a - 1$, a, $a + 1$, *la somma delle potenze di* a *i cui esponenti sono i numeri pari da* 0 *ad* $m - 3$ *è divisibile per* m.

Osserviamo anzi tutto che per m eguale a 3, o anche a 2, le condizioni del teorema non possono esser tutte quante verificate. Considereremo adunque il caso in cui m è un numero primo superiore al 3. Ora siccome si ha:

$$a^m - a = a\,(a^{m-1} - 1),$$

ed $m - 1$ è un numero pari, l'espressione $a^{m-1} - 1$ è divisibile per $a^2 - 1$, ed il quoziente è la somma:

$$a^{m-3} + a^{m-5} + \ldots + a^2 + 1,$$

quindi se il numero primo m non divide nè a nè $a^2 - 1 = (a - 1)\,(a + 1)$, dovrà dividere quella somma.

Ferme restando le condizioni del precedente teorema si ha pure che la somma:

$$a^{m-2} + a^{m-4} + \ldots + a^3 + a$$

la quale può anche scriversi :

$$a(a^{m-3} + a^{m-5} + \dots + a^2 + 1)$$

è divisibile per m.

8. *Se* m *è un numero primo diverso dal* 2 *e dal* 3, *la espressione* $a^m - a$ *è sempre divisibile per* 6m.

Infatti potendosi in tal caso scrivere :

$$a^m - a = a\,(a-1)\;(a+1)\;(a^{m-3} + a^{m-5} + \dots + a^2 + 1)$$

ed essendo i numeri $a-1$, a, $a+1$ consecutivi uno di essi è divisibile per 3, ed uno almeno per 2. Di più essendo l'espressione $a^m - a$ divisibile per m, finchè m è diverso da 2 o da 3, possiamo concludere che quella espressione è divisibile per $2.3.m = 6.m$ come volevasi provare.

Si può in ultimo osservare che ove a sia un numero dispari i tre fattori $a-1$, $a+1$, $a^{m-3} + a^{m-5} + \dots a^2 + 1$, sono divisibili ner 2 ; quindi in tal caso la espressione $a^m - a$ è divisibile per $2^3.3m = 24m$. Dunque potremo anche dire :

Se m *è un numero primo superiore al* 3 *ed* a *un numero dispari, l'espressione* $a^m - a$ *è divisibile per* 24m.

Arcireale, Ottobre 1886.

LABINDO GIANNI.

DIMOSTRAZIONI DI TEOREMI ENUNCIATI a PAG. 59 e 71.

Se si costruiscono sui tre lati di un triangolo ABC *o esternamente o dalla banda in cui è il triangolo, tre poligoni regolari di egual numero di lati, le rette* AA_1, BB_1, CC_1 *congiungenti i vertici* A, B, C *coi vertici* A_1, B_1, C_1, *dei poligoni opposti rispettivamente ai lati* BC, CA, AB *o coi punti medi dei lati opposti a* BC, CA, AB, *passano per uno stesso punto.*

D. BESSO.

Dimostrazione del Prof. *F. Panizza.*

I triangoli BA_1C, CB_1A, AC_1B, sono in ogni caso isosceli coi vertici in A_1, B_1, e C_1, e gli angoli in A_1, B_1, C_1, sono eguali (per le proprietà dei poligoni regolari) quindi essi sono simili.

Allora i due triangoli ACA_1, BCB_1 avendo un angolo eguale ad un angolo ($ACA_1 = BCB_1$) e i lati intorno a questi angoli inversamente proporzionali sono equivalenti; quindi si ha la prima delle seguenti tre eguaglianze e in modo analogo le altre due:

(1) $\Delta ACA_1 = \Delta BCB_1$, $\Delta BAB_1 = \Delta CAC_1$, $\Delta CBC_1 = \Delta ABA_1$.

Inoltre, indicando con M, N, P le intersezioni di AA_1, BB_1, CC_1 rispettivamente coi lati BC, CA, AB, si hanno le eguaglianze

$$\frac{\Delta ABA_1}{\Delta ACA_1} = \frac{BM}{MC}, \quad \frac{\Delta BCB_1}{\Delta BAB_1} = \frac{CN}{NA}, \quad \frac{\Delta C_1AC}{\Delta C_1BC} = \frac{AP}{PB},$$

che moltiplicate membro a membro danno

$$\frac{\Delta ABA_1 . \Delta BCB_1 . \Delta C_1AC}{\Delta ACA_1 . \Delta BAB_1 . \Delta C_1BC} = \frac{BM . CN . AP}{MC . NA . PB}$$

ma il primo membro per le (1) è eguale all'unità quindi

$$\frac{BM . CN . AP}{MC . NA . PB} = 1$$

e perciò le rette AA_1, BB_1, CC_1 si incontrano in un punto.

I Signori *J. Beyens* e *G. Riboni* hanno inviato dimostrazioni consimili. Il Prof. *G. Riboni* osserva che il teorema può enunciarsi nel seguente modo:

Se i punti medii dei lati di un triangolo si muovono sulle rispettive perpendicolari ai lati con velocità proporzionali ai lati stessi, in ogni istante le congiungenti questi punti coi vertici opposti concorrono in uno stesso punto; e aggiunge:

Coll'allontanarsi indefinitamente dei tre punti A_1, B_1, C_1 le tre rette AA_1, BB_1, CC_1 dalla posizione iniziale di mediane vanno avvicinandosi alle altezze del triangolo, e si confonderanno con queste quando i punti stessi siano a distanza infinita.

Il luogo dei punti d'incontro delle AA_1, BB_1, CC_1 *è la conica determinata dai vertici* A, B, C *del triangolo e dai punti* G, H *d'incontro delle mediane e delle altezze.*

Infatti è evidente che il luogo passa per G ed H. Inoltre, indicando con M_1, M_2, M_3 i punti medii dei lati BC, CA, AB, è chiaro che le punteggiate $M_1A_1 \ldots$, $M_2B_1 \ldots$ sono simili, e perciò projettive, e in conseguenza sono projettivi i fasci che le projettano dai punti fissi A, B; dunque il luogo dei punti d'incontro dei raggi corrispondenti è una conica passante per A e B. La stessa cosa si può ripetere per le punteggiate $M_2B_1 \ldots$, $M_3C_1 \ldots$ projettate dai punti fissi B e C; perciò il luogo dei punti d'incontro dei raggi corrispondenti dei due fasci così ottenuti è una conica passante per B, C. E pel teorema dimostrato i due luoghi devono coincidere.

Se i seni dei diedri d'un tetraedro sono proporzionali alle lunghezze dei rispettivi spigoli, quel tetraedro è a facce eguali; e reciprocamente.

G. Giuliani.

Dimostrazione del prof. *M. Misani.* *)

Sia SABC un tetraedro e si ponga (V. in questo perio-

*) Altre dimostrazioni sono state inviate dai Signori *F. Panizza, G. Riboni, J. Beyrns.*

dico, pag. 1, anno I) $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, $BC = a_1$, $CA = b_1$, $AB = c_1$; area $ABC = S_0$, area $SBC = S_1$, area $SCA = S_2$, area $SAB = S_3$; diedro $SA = A$, diedro $SB = B$, diedro $SC = C$, diedro $BC = A_1$, diedro $CA = B_1$, diedro $AB = C_1$.

Se D è la proiezione ortogonale del vertice S sulla faccia opposta ABC ed E quella di D sullo spigolo BC, l'angolo SED sarà la sezione retta del diedro BC. Chiamando ora con V il volume del tetraedro avremo

$$V = \tfrac{1}{3} S_0 . SD,$$

ma dal triangolo rettangolo SDE si ha $SD = SE \operatorname{sen} A_1$, e siccome SE, altezza della faccia SBC, vale il doppio dell'area S_1 di questa divisa per la base a_1, così

$$SD = \frac{2S_1}{a_1}$$

e

$$V = \frac{2}{3} S_0 S_1 \frac{\operatorname{sen} A_1}{a_1}.$$

Analogamente si avrà

$$V = \frac{2}{3} S_0 S_2 \frac{\operatorname{sen} B_1}{b_1},$$

la quale confrontata colla precedente, avuto riguardo che per ipotesi si ha $\frac{\operatorname{sen} A_1}{a_1} = \frac{\operatorname{sen} B_1}{b_1}$, dà

$$S_1 = S_2$$

e nello stesso modo si dimostra essere

$$S_0 = S_1 = S_2 = S_3.$$

Le faccie dunque del tetraedro dato sono equivalenti, ma se soddisfano a questa condizione devono essere eguali (V. la dimostrazione di questa proprietà a pag. 4 del fasc. 1°, anno 1° di questo periodico) e quindi il teorema è dimostrato.

Reciprocamente se $S_0 = S_1 = S_2 = S_3$, dalla eguagliazna

$V = \frac{2}{3} S_0 S_1 \frac{\operatorname{sen} A_1}{a_1} = \frac{2}{3} S_0 S_2 \frac{\operatorname{sen} B_1}{b_1} = ecc.$, si ricava subito

$$\frac{\operatorname{sen} A_1}{a_1} = \frac{\operatorname{sen} B_1}{b_1} \text{ etc.} \qquad \text{c.d.d.}$$

TEOREMI PROPOSTI

Due triangoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sieno inscritti in un triangolo ABC in modo che le rette AA_1, BB_1, CC_1 passino per uno stesso punto e che anche le rette AA_2, BB_2, CC_2 passino per uno stesso punto: se le rette A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 incontrano rispettivamente le rette A_2B_2, A_2C_2, B_2C_2 in tre punti formanti un triangolo, questo triangolo è circoscritto al triangolo ABC.

Sieno AB, CD due diametri fra loro perpendicolari di una circonferenza, M un punto qualunque di questa curva, N il punto comune alle rette AM e CD, P il piede della perpendicolare condotta da M sulla tangente in A alla circonferenza e Q il punto comune alle rette AB, PN: la retta QM è tangente alla circonferenza.

F. Nicoli.

Se gli spigoli d'un tetraedro equifacciale sono veduti sotto gli angoli α, β, γ dal centro della sfera ad esso circoscritta, e s'indicano rispettivamente con D e V il diametro di questa sfera ed il volume del tetraedro, si ha la relazione

$$V = \frac{D^3}{3} \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

J. Beyens.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Elementi di geometria euclidea esposti con nuovo metodo da Angelo Andriani, *Prof. di Matematica nel R. Liceo di Reggio-Calabria. Napoli, B. Pellerano* 1887, p. XVI–369.

Questo libro è un trattato di geometria destinato alle nostre Scuole Liceali. Volendo analizzarlo tutto completamente bisognerebbe discutere se sia legittimo il porre in testa a un opera un titolo di cui il lettore non si renderà mai ragione – perchè l'a. non fa mai nota l'esistenza di una geometria *non-euclidea* – e se non si faccia offesa alla verità chiamando « nuovo metodo » un sistema di esposizione in cui la massima novità è, se non ci inganniamo, l'abbandono sistematico dell'antica divisione fra geometria piana e geometria solida, il quale, tentato in Germania dal Frischauf, fu attuato in modo oltre ogni dire felice dal Prof. De Paolis. Ma non intendendo arrestarci a osservazioni così minute, faremo cenno dei cambiamenti che il Prof. Andriani tentò d'introdurre nell'insegnamento della geometria.

Queste innovazioni sono, a nostro avviso, prodotte dal desiderio che ha l'a. di far servire negli elementi della scienza dell'estensione quei concetti di cui è nota la fecondità nelle parti superiori di essa. Tale desiderio appare a prima vista ragionevolissimo. Se non che quando si cerca il modo di soddisfarlo si scorge che molte di quelle idee, se servono assai bene in questioni elevate, non arrecano alcun vantaggio in altre più umili. P. e. il concetto di generazione del nostro spazio non solo mediante punti, ma anche mediante linee e superficie è di grande importanza nella moderna geometria chè esso può considerarsi come origine della geometria a n dimensioni; ma sarà esso capito dai principianti e quale utilità ne potrà trarre l'insegnante? Così la legge di dualità (*)

(*) Sembra che di questa l'a. non abbia un'idea ben chiara; chè quanto egli dice nel n. 25 non è certo capace di far capire la legge di dualità a chi già non la conosca e di fargli intendere come questa si atteggi diversamente secondo che si consideri la geometria del piano, quella della stella o quella dello spazio.

non è applicabile che rarissimamente nella geometria elementare di cui quasi tutti i teoremi sono metrici, onde è dubbio se metta conto parlarne. Infine (per non moltiplicare eccessivamente gli esempii) niuno più di chi scrive è convinto dell'importanza che ha la nozione di elementi all'infinito che Desargues introdusse nella geometria; tuttavia egli crede di dover protestare energicamente contro una teoria delle parallele fondata su di essa, teoria che manca di base rigorosa poggiando su convenzioni che il Prof. Andriani crede o vuol far credere verità indiscutibili. Se egli mediterà sulle belle *Volesungen uber neuere Geometrie* del Pasch si persuaderà che alla nozione di elementi all'infinito si arriva appunto studiando la teoria euclidea delle parallele e che è vano il tentare di percorrere questa via in ordine inverso.

Potendo applicare solo raramente la legge di dualità, l'a. ne cercò un'altra che gli permettesse di accoppiare delle proposizioni di geometria del piano e dello spazio e introdusse il concetto (certamente assai vago) di proposizioni analoghe (cfr. p. 142). Questo modo di ordinare la materia non è senza inconvenienti, chè il desiderio di trovare l'analoga di ogni proposizione conduce assai spesso l'a. ad esporre delle definizioni e dei teoremi che hanno poco interesse. Per es. accanto al rombo egli introduce il romboedro (n. 236), accanto al trapezio il trapezoide (n. 240), a lato delle proposizioni sui triangoli altrettante sulle superficie prismatiche triangolari (n. 146), vicino a quelle sui parallelogrammi altrettante sui parallelepipedi (n. 222 e seg.); e queste citazioni si potrebbero moltiplicare, chè volendo portare degli esempi non si ha che l'imbarazzo della scelta. — L'eccessiva diffusione dell'a. su certi argomenti l'obbligò a restringersi eccessivamente su altri; sicchè su certe questioni capitali (p. e. il calcolo di π, la teoria dei poliedri, ecc.) non si trovano negli *Elementi di Geometria euclidea* tutti quei particolari che si potrebbero ragionevolmente desiderare.

Queste indicazioni saranno, a nostro credere, sufficienti a porre in grado il lettore di giudicare della materia contenuta nel libro di cui parliamo e del modo con cui è trattata.

Quanto al modo in cui l'a. l'ha distribuita non possiamo tributargli gran lode: infatti a stento si potranno rintracciare le nozioni di cui si può per avventura aver bisogno in un libro in cui i casi di eguaglianza di due poligoni piani stanno in una sezione intitolata « angoloidi supplementari »!

Finalmente, il modo di esposizione è degno della più alta disapprovazione. Chè, non solo i precetti della grammatica e della sintassi sono lasciati in non cale dall'a., ma egli usa molte espressioni inesatte, confonde spesso definizioni con postulati, e usa concetti e proposizioni di cui non ha ancor parlato. Fra i numerosi esempi che potremmo citare a riprova di queste asserzioni, scegliamo a caso i seguenti:

« Si dicono *adiacenti* due segmenti che hanno il termine generatore di comune e sono di direzione opposta, p. 7. » (E se, essendo della stessa direzione, il termine dell'uno coincidesse coll' origine dell'altro?)

« Fra due rette sghembe vi è una sola distanza perchè uno solo è il segmento perpendicolare compreso fra le due rette sghembe » p. 90 (Sembra che quest' ultima asserzione sia ritenuta dall' a. come un assioma perchè non ci fu possibile trovarne la dimostrazione).

L'a. con ragione ha seguìto l'uso di annettere alla sua opera una numerosa collezione di esempi: se ognuno di essi si possa risolvere con le nozioni che lo precedono, altri giudichi. A torto invece nel disegnare certe figure di geometria solida (p. e. 27ª, 31ª, 46ª, 48ª, ecc.) egli dimenticò di tracciare sempre punteggiate le parti invisibili oppure applicò inesattamente questa regola: quindi dubitiamo che certi suoi disegni aiuteranno molto chi studia ad imaginare le figure obbiettive.

Genova, 24 Aprile 1887.

Gino Loria.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par *Gustav Eneström.* Stockholm, 1887; N. 2.

Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini.* Volume XXV. Maggio e Giugno 1887. Napoli, Benedetto Pellerano, editore.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy*, Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 2^e^ série. Onzième année. N. 5, 6, 7. Paris, 1887.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert.* 11^e^ Année. N. 16, 17, 18, 19. Paris. M. Nony, 17. Rue des Écoles, 1887.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.^r^ F. Gomes Teixeira.* Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VII, n. 5, Coimbra, 1886.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome septième. Mai e Juin 1887.

Rivista didascalica. Organo della società didascalica italiana. — Anno I, fasc. 1, Roma, 1887.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati.* Anno XIX. N. 7 e 8. Firenze, 1887.

Bianchi, L. — Sopra i sistemi doppiamente infiniti di raggi (Congruenze) Atti R. Acc. Lincei. 1887.

Bongiovanni, G. — Sul moto verticale di un grave e di due gravi. — G. B. Paravia e C. 1887.

Errera, A. — Contribuzione allo studio della scienza della popolazione. Napoli, 1886.

Garbieri, G. — Sulla eliminazione delle funzioni arbitrarie. Atti del R. Ist. Ven. 1887.

Giudice, F. — Sulle equazioni irreducibili di grado primo risolubili per radicali. — Un teorema sulle sostituzioni. Rend. Circ. mat. Palermo, 1887.

Giuliani, G. — Sulle funzioni di n variabili che soddisfano alla $\frac{d^2f}{dx_1^2}+\frac{d^2f}{dx^2_2}+\ldots+\frac{d^2f}{dx^2_n}=0$. Gior. Battaglini. 1887.

Iung, G. — Sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque. — Sulle trasformazioni piane multiple di ordine minimo. Rendiconti R. Ist. lomb. 1887.

Loria, G. — La definizione di spazio a n dimensioni e l'ipotesi di continuità del nostro spazio secondo le ricerche di Giorgio Cantor. Gior. Battaglini, 1887.

De Longchamps, G. — Une conique remarquable du plan d'un triangle. — Les points d'inflexion dans les cubiques circulaires unicursales droites (1886.)

Michelangeli, N. — Sopra alcune proprietà delle frazioni continue a quozienti complessi. Napoli, 1887.

Pesci, G. — Una formula relativa alle funzioni simmetriche. Rend. R. Acc. Bologna, 1887.

Pincherle, S. — Sull'inversione degli integrali definiti. Rend. R. Ist. lomb. 1887.

Porena, F. — La collezione di carte nautiche di F. Fischer. Roma, 1887.

Rémont, A. — Résumé de Géometrie analytique à deux et à troix dimensions. Deuxième édition. Paris, Librairie Nony & C.^ie^, 1887.

Rozzolini, G. — Epicicloide ed ipocicloide piane. Napoli, Pellerano, 1880.

Volterra, V. — Sulle equazioni differenziali lineari. Rend. R. Accademia Lincei, 1877.

Tivoli, D. — L'aria in rapporto all'igiene ed alla ginnastica. Bologna, 1887.

SUL CONCETTO DI NUMERO

II.

12. Vediamo ora a quali concetti deve informarsi l'insegnante, introducendo il numero nei corsi di Algebra.

Noto intanto che nell'insegnamento, il quale prende le sue mosse dall'aritmetica pratica, si suole, e giustamente, incominciare col metodo sintetico per introdurre i soli numeri che si adoperano nell'aritmetica elementare, i numeri razionali positivi. L'introduzione dei numeri irrazionali e dei negativi, che hanno importanza più astratta, si suol fare più tardi insieme all'insegnamento dell'algebra propriamente detta; ma talora si ricorre per essi al metodo analitico. Le considerazioni sulla misura delle grandezze geometriche (*) servono poi a mostrare come esso si poteva introdurre anche col primo metodo. Questa difformità di metodi (giustificata in parte dalla differenza di cognizioni e di sviluppo d'intelligenza nelle due epoche in cui si studiano i numeri razionali e gli altri numeri) non mi sembra da lodarsi: e tanto meno poi se si seguitano a introdurre i numeri negativi col primo metodo e gli irrazionali col secondo, o viceversa.

Giudico necessario il seguire un metodo uniforme: e quindi, giunti a dovere introdurre il numero negativo e l'irrazionale, trovo opportuno il riprendere in generale il concetto di numero fino dal numero intero, col metodo che si vorrà poi seguire per gli altri numeri.

13. Stabilito che si debba introdurre il numero con metodo uniforme, quale dei due converrà scegliere nell'insegnamento?

(*) Mi permetto qui di esprimere un'opinione: ed è che, giunti nell'insegnamento ad avere esaurito quanto riguarda le grandezze geometriche, si possa utilmente *accennare* qual'è il concetto generale di grandezza, mostrando che per esso valgono i medesimi teoremi avuti per le grandezze geometriche, e che esso include anche quello di numero.

Distinguiamo anzitutto due stadii nell'insegnamento: quello in cui esso è destinato a fornire cognizioni indispensabili nella pratica (pur preparando a cultura più seria) e quello in cui queste cognizioni si sviluppano e completano da un punto di vista educativo più elevato. Nel primo insegnamento della matematica ci si limita ai numeri razionali positivi, giacchè negli ordinari usi della vita compariscono necessari solo questi, non vedendosi, per l'inesattezza dei nostri sensi e delle nostre misure, il bisogno dei numeri irrazionali, e ai numeri negativi supplendosi agevolmente con frasi. Il metodo viene spontaneamente indicato dallo scopo di questo insegnamento, e non può essere che il metodo sintetico.

Nel secondo stadio si unisce allo studio dell'aritmetica quello della geometria: ed allora il tentativo di ricondurre tutte le grandezze a grandezze discrete, cioè la misura, mostra l'insufficienza dei numeri razionali per rappresentare le grandezze geometriche: e facili considerazioni di meccanica provano l'utilità d'introdurre nel segmento il concetto di direzione, e quindi l'insufficienza dei numeri positivi. Di qui la necessità di nuovi enti. D'altra parte l'algebra, dovendo evitare di trovarsi di fronte a simboli che non vogliono dir nulla perchè accennano ad operazioni che non hanno risultato, deve togliere qualunque impossibilità di operazioni. Di qui pure la necessità di nuovi enti che con opportune definizioni di operazioni diano un significato a quei simboli.

Si hanno quindi anche nell'insegnamento elementare due serie di enti da introdurre, per i primi dei quali si presenta spontaneo il metodo sintetico, mentre per i secondi si richiede l'analitico. Essendo, per il § 9, identiche le due serie di enti, ci si può limitare ad una sola delle due introduzioni.

In questa introduzione quale metodo dovremo scegliere? Il metodo analitico è più scientifico e più generale dell'altro. Ma il suo grado maggiore d'astrazione credo lo renda meno proficuo nell'insegnamento, il quale in generale ha bisogno di appoggiarsi a qualcosa di concreto. Di più per introdurre il numero irrazionale s'è già visto che bisogna interrompere il metodo seguito per introdurre i numeri razionali, affine di avere un concetto più vasto che esaurisca le questioni della misura, onde bisogna ricorrere a metodi non più esclusivamente analitici e che risentono più o meno l'influenza del concetto di grandezza, nel quale soltanto trovano il *perchè* della loro origine. Quindi, data questa necessità e data l'utilità dell'immagine reale che accompagni il concetto di numero, stimo preferibile nell'insegnamento elementare il metodo sintetico, quando sia esattamente sviluppato.

Completata l'introduzione del concetto di numero nell'insegnamento elementare, credo peraltro sia opera feconda, almeno per chi si avvii a studi ulteriori, il tornare a introdurre il numero con metodo puramente analitico e formale, spingendolo fino al grado massimo di generalità di cui è suscettibile analiticamente: con che si mostrerà come l'algebra non dipenda direttamente dalle grandezze e di più come il suo procedere per proprietà puramente formali la inalzi a scienza più vasta, interpretabile anche su enti che non siano i numeri.

14. Ecco ora come credo conveniente che si sviluppi il metodo sintetico, quando all'incominciare lo studio dell'algebra, si riprenda a trattare il numero in modo uniforme affinchè si abbiano concetti generali, e si conservi insieme una certa analogia con quello che si fa nei fondamenti della Geometria (*)

Gli enti della natura e quelli ideati in modo astratto dalla nostra mente, oltre le proprietà che servono a caratterizzarli uno ad uno e a definirli in sè, altre ne hanno in generale dipendenti da relazioni di quantità con altri oggetti omogenei, che ci permettono di poterli considerare come tutti generati da un solo oggetto della loro specie a cui si

(*) Cfr. il mio articolo « I postulati e gli enti geometrici » nel « Periodico di Matematica. — Anno I° »

pone speciale attenzione. Come in Geometria per studiare l'estensione dei corpi s'introducono dei corpi ideali ai quali si attribuiscono solo le proprietà che servono nel miglior modo possibile a rappresentare quella reale dell' estensione, così in aritmetica per studiare il modo con cui un oggetto di una data categoria è formato rispetto ad un'altro fisso della stessa categoria (unità) ed alle sue parti, s' introduce per ogni oggetto di quella categoria un ente ideale, cui si attribuiscono le proprietà che meglio giovino a rappresentare quelle che risultano dal confronto dell'oggetto colla sua unità. Questo ente è il *numero*. Il suo modo d'introduzione è perfettamente identico a quello che si segue per le figure in Geometria, e che devesi seguire in qualunque scienza esatta che studi i fatti della realtà.

Le proprietà che si attribuiscono al numero non sono necessarie logicamente, essendo il numero un ente ideale; esse potrebbero esser prese in modo arbitrario, purchè non fossero contradittorie (*); ma si prendono in modo che quell'ente abbia un riscontro nella pratica e precisamente rappresenti più che sia possibile gli oggetti nelle loro relazioni di quantità ora accennate.

Per indicare questo ente si sogliono usare delle lettere, come in geometria per indicare le figure: e questo fa sì che potremo avere formule geometriche identiche a formule algebriche (anche indipendentemente dal concetto di misura), quando certe operazioni su enti geometrici e certe altre sui numeri godano proprietà formali simili (**). La geometria si serve più spesso dei disegni, i quali rappresentano gli oggetti che hanno servito a destare in noi l'idea delle figure genmetriche: per l'aritmetica non si fa altrettanto, essendo incomoda e spesso impossibile la rappresentazione degli oggetti che hanno destato in noi l' idea dei diversi numeri. A dire il vero, i

(*) Cfr. il mio articolo ora citato.

(**) P. es. $A + B = B + A$ è formula vera tanto se A e B indicano numeri, che se indicano segmenti, o angoli ecc.

numeri interi ed i numeri frazionari se sono scritti in qualche sistema di numerazione, hanno in sè qualcosa che serve a richiamare la grandezza che essi rappresentano: ma il simbolo generale del numero non è destinato a riprodurre, per dir così, graficamente l'oggetto che questo rappresenta. Del resto ciò costituisce un vantaggio, tenendoci nel ragionamento lontani dal servirci degli oggetti reali originari, di cui, senza accorgersene, si fa spesso erroneamente uso in Geometria. (*)

15. L'ente numero è stato introdotto mediante il

Postulato. — « Per ogni oggetto di certe categorie esi» ste un ente (ideale) che lo rappresenta e che si dice » numero ».

Ora dobbiamo attribuirgli proprietà che lo rendano somigliante agli oggetti considerati in ordine alla quantità, cioè considerati quando si suole attribuir loro il nome di grandezze. Lo studio degli oggetti in quanto sono grandezze si fa col loro reciproco confronto, che è fondato principalmente sui concetti di uguale e disuguale, di maggiore e di minore, di somma e di differenza. Questi si riscontrano in tutte le categorie di oggetti che si studiano come grandezze e vi si riscontrano dotati costantemente di certe proprietà che, sebbene non intrinsecamente necessarie a quei concetti, pure sono verificate per tutte le principali grandezze. — Perciò quelle proprietà si sono ormai dette le proprietà caratteristiche di quei concetti, e un concetto qualunque si identifica a quello quando ne gode; tanto che, per non lasciare indeterminato il concetto di grandezza e perchè sotto di esso si possano aggruppare altre categorie di oggetti oltre quelle che già si designano con quel nome, ormai la definizione di grandezza si dà così: Una classe di oggetti (reali o ideali) si dice classe di *grandezze* se si possono definire per essi dei concetti di uguaglianza e disugua-

(*) Anche la geometria potrebbe svolgersi senza disegni e colle sole lettere, e riuscirebbe in generale più libera da asserzioni che spesso sfuggono inavvedutamente.

glianza, di maggiore e di minore e di somma, in modo che questi concetti soddisfino alle loro condizioni caratteristiche: e che, presi due qualunque di quegli oggetti essi siano necessariamente uguali o disuguali: e la loro somma esista sempre nella classe ».

Quelle condizioni caratteristiche sono le seguenti, supposto che A, B, C, ... indichino oggetti di quella classe, e i segni $+$, $=$, $>$, $<$ abbiano gli ordinari significati e $\neq$ indichi disuguaglianza:

Se $A = B$, sia $B = A$

se $A = B$, $B = C$ sia $A = C$

(condizioni caratteristiche dell'uguaglianza);

sia $A + B = B + A$ e $(A + B) + C = A + (B + C)$;

se $B = C$, sia $A + B = A + C$, e $B + A = C + A$;

se $B \neq C$ sia $A + B \neq A + C$ e $B + A \neq C + A$

(condizioni caratteristiche della somma) (*)

se $A > B$ sia $B < A$,

se $A > B$ e $A' = A$ e $B' = B$, sia $A' > B$, e $A > B'$;

se $A = B$, $B > C$ sia $A > C$:

se $A > B$, $B > C$, sia $A > C$

se $A > B$, sia $A + C > B + C$

(condizioni caratteristiche dei concetti di maggiore e di minore, da cui discendono tutte le altre che si hanno ordinariamente come fondamentali).

I numeri dovendosi introdurre per rappresentare completamente gli oggetti in quanto sono grandezze, ne viene che dovremo dire che due numeri a e b sono *uguali*, o a è *maggiore* di b, o a è minore di b (rispettivamente $a = b$, $a > b$, $a < b$) secondochè le grandezze A e B che essi rappresentano siano uguali, o $A > B$, o $A < B$. E se due grandezze A e B hanno per somma una grandezza C, ne viene che dovremo dire che il numero c che rappresenta C è la *somma*

(*) Di queste basta ammetterne alcune: le altre ne sono conseguenze. — Cfr. Hankel, l. c.

dei due numeri a e b che rappresentano A e B ($a+b=c$). Così restano definiti i concetti fondamentali dei numeri in generale, di qualunque genere sia la classe per rappresentare la quale s'introducono.

Questo metodo ci permette, se si voglia, anche di fare a meno della definizione ed introduzione individuale del numero, dicendo semplicemente che il fatto che due grandezze A e B sono uguali o disuguali si esprime colle frasi rispettive « esse hanno uguale o disugual numero »: e il fatto che la grandezza C è la somma delle grandezze A e B coll'altra « il numero di C è la somma dei numeri di A e di B » ecc. Ma l'introduzione del numero come ente a sè mentre non altera la sostanza del metodo, giova alla chiarezza, permettendo di fissare la mente sopra un ente che è ideale, è vero, ma riceve la sua individualità dalla grandezza che rappresenta.

Il concetto generale di numero è così pienamente determinato. Ma l'utilità sua non si manifesta altro che se si cerca che una classe unica di numeri serva per tutte le grandezze, e due numeri a e b di fronte a tutte le classi rispetto a cui s'introducono debbano dirsi sempre uguali, o sempre disuguali, o sempre $a>b$, o sempre $a<b$: e se $c=a+b$ quando a, b, c rappresentano grandezze di una classe, sia $c=a+b$ anche quando rappresentano grandezze di un'altra classe ecc. Ne viene quindi che lo sviluppo del concetto di numero dev'essere regolato studiando successivamente le varie classi di grandezze cui esso si possa riferire, secondo il diverso modo con cui esse sono costituite.

16. Le classi di grandezze più importanti in pratica (e le sole cui convenga porre speciale attenzione nell'insegnamento elementare) sono quelle degli aggregati di oggetti uguali, quelle di tali oggetti e di loro parti aliquote, e le grandezze geometriche insieme a quelle di cui si acquista un concetto più chiaro quando si riferiscono alle geometriche (tempi, pesi, forze, ecc.) — Esse seguano il processo naturale d'introduzione dei numeri.

Dalle prime, introducendoli coi processi gia stabiliti (§ 3) vengono i numeri razionali. Essi non sono sufficienti per la Geometria, trovandosi delle classi, p. es. quella di tutti i segmenti, i cui enti non si possono tutti ridurre ad essere aggregati di segmenti uguali ad uno fisso e di sue parti. Di più l'operazione estrazione di radice è in generale impossibile con essi soli in Algebra. Tutto ciò dipende da deficenza di numeri e quindi dalla ristrettezza delle classi fino a quel punto studiate o dall'aspetto sotto cui si sono esaminate. Si cercano quindi delle classi che, pure essendo suscettibili di contenere in sè le precedenti, presentino nuove grandezze che conducano a nuovi numeri, i quali tolgano le lacune accennate. Si vede che le classi di grandezze geometriche sono in queste condizioni; ed esse non solo, ma tutte quelle classi in cui essendo possibile prendere le summultiple secondo qualunque numero di una qualunque delle loro grandezze, vale per dimostrazione o si ammette per postulato la proprietà detta della continuità. (*) Anche per queste classi s'introducono numeri col metodo generale (§§ 14, 15). Poi si osserva che in esse presa una grandezza vi sono tutte le sue multiple, le sue summultiple e la somma delle une e delle altre, e se tutte queste grandezze si togliessero dalla classe totale e si studiassero da sè, per esse basterebbero i numeri razionali. I numeri che spettano a quelle grandezze nella classe generale potremo chiamarli ancora razionali e identificarli (cioè dirli uguali) a quelli già introdotti: laonde, siccome le grandezze che oltre a quelle restano nella classe a causa della continuità ammessa, si prova che sono grandezze che segnano la divisione in due gruppi di tutte quelle razionali — o anche grandezze che risultano limiti di serie convergenti di grandezze razionali — oppure anche grandezze che si possono considerare individuate dalla somma di infinite grandezze razionali — così ne viene che i numeri della classe che non sono razionali, cioè i numeri

(*) Cfr. *Dedekind*, *Stolz*. ll. cc.

rrazionali, risultano come nuovi enti che riempiono le lacune :he esistono nella classe dei numeri razionali (Dedekind) – e :he sono limiti di serie convergenti (Cantor) – e anche che pos-ono ritenersi individuati da un numero infinito di numeri azionali. (Weierstrass) (*)

Le definizioni di numeri uguali, maggiori, minori, di omma, ecc. si danno nel modo generale accennato, e si vede acilmente come si possano allora trasformare in definizioni ledotte dal considerare solo i numeri razionali. P. es. po-remo allora dire che se a e b sono due numeri irrazionali, $\imath > b$ quando qualcuno dei numeri razionali del primo gruppo ra quelli che, secondo il Dedekind, definiscono a, è maggiore li qualcuno del secondo gruppo di quelli che definiscono b ecc.

Con questa definizione si mostra che l'estrazione di ra-lice è sempre possibile coi numeri avuti fin qui.

Anche i nuovi numeri, se sono sufficienti per certe con-iderazioni geometriche, non lo sono per certe altre e molto neno per la Meccanica, dove è necessario il concetto di lirezione. Di più in Algebra è talora impossibile la sottra-ione. Allora si cercano nuove classi (p. es. quelle dei seg-nenti considerati su di una retta in grandezza e direzione) :he comprendano le antiche: e s'introducono i corrispondenti iumeri, i quali includeranno come caso particolare i prece-lenti. E per essi definendo nel modo consueto l'eguaglianza, a somma ecc. si vede che essi rendono possibile la sottra-ione in aritmetica.

Il fecondo concetto dell' equipollenza di segmenti mo-trando utile il tener conto della direzione anche in tutti

(*) Generalmente nei trattati che vogliono introdurre l'irrazionale anali-icamente si sogliono dare queste seconde definizioni puramente numeriche :he ho dedotto come conseguenze; le definizioni poi dei concetti di ugua-glianza e di operazioni sono date in modo esatto col generalizzare quelle proprietà che nei concetti corrispondenti si riscontrano per i numeri razio-nali. Ma mentre la ragione di questa uguaglianza e di queste operazioni così lefinite si trova nell'indole del metodo analitico, il perchè dell'*introduzione* lel nuovo ente, l'irrazionale, non si trova che in un tacito riferimento alla grandezza come ho già notato altrove.

i segmenti del piano, prova l'insufficienza anche dei numeri precedenti (reali). D'altra parte i nuovi numeri, i negativi, hanno creato una nuova impossibilità, quella di certe altre estrazioni di radice. La classe di tutti i segmenti del piano, in cui per uguaglianza s'intenda ora l'equipollenza, è una classe più ampia che comprende le precedenti: ed introducendo per essa i numeri, che sono i numeri complessi, questi comprenderanno in sè i numeri reali: e definendo anche per essi i concetti di relazione e di operazione, si vede tolta anche l'impossibilità notata nell'algebra.

A questo punto si suol terminare l'introduzione dei numeri nell'insegnamento elementare, non essendovi, almeno colle ordinarie operazioni, altre impossibilità ed essendo sufficientemente ampio il numero delle classi di grandezze che coi numeri precedenti si studiano. Ma si potrebbero costruire anche classi più estese e introdurre i corrispondenti numeri per i quali peraltro si dimostra che bisogna rinunciare a qualcuna delle più fondamentali leggi caratteristiche. Del resto a questo punto è forse più utile spingersi innanzi col metodo analitico.

17. Col metodo sintetico che ora brevemente abbiamo esposto, l'introduzione del concetto di numero dev'esser fatta precedere da quella delle corrispondenti classi di grandezze e dallo studio delle loro proprietà. Queste proprietà delle classi sono talora veri teoremi, dipendenti dalla loro definizione, e talora sono postulati – come ne dà esempio la continuità nella classe dei segmenti. Da esse discendono le corrispondenti per i numeri per il modo stesso con cui i numeri sono introdotti. Così, p. es. se A, B, C sono grandezze di quelle da dirsi positive, essendo $A + B + C > A + B$, ne viene che il numero d di $A + B + C$ deve dirsi maggiore di quello e di $A + B$. E se a, b, c indicano i numeri rispettivi di A, B, C, essendo per definizione $d = a + b + c$, ed $e = a + b$, ne viene che dovremo scrivere $a + b + c > a + b$, che è una proprietà dei numeri ecc.

Ma non è da credere che per dimostrare tutte le proprietà dei numeri occorra sempre dimostrare prima la corrispondente per le grandezze. Tutte le proprietà delle grandezze discendono da poche fondamentali e caratteristiche le quali devono verificarsi direttamente. Ne viene che del pari tutte la proprietà dei numeri discenderanno da quelle che corrispondono a quelle fondamentali accennate ora. E siccome per dedurre dalle proprietà caratteristiche le altre per le grandezze non occorre aver ricorso alle grandezze in sè ma solo al fatto che sono verificate quelle proprietà fondamentali, che pure lo sono per i numeri, così ne viene che collo stesso ragionamento si potranno dedurre da quelle fondamentali per i numeri tutte le altre. E questo è l' oggetto del calcolo letterale.

Si ha quindi che per i numeri devono essere stabilite alcune proprietà fondamentali (il minor numero possibile) deducendole dal fatto che i numeri corrispondono, secondo le definizioni, alle grandezze – proprietà che sia impossibile dedurre a priori senza ricorrere alle grandezze stesse; tutte le altre si hanno con dimostrazione indipendente affatto dalle grandezze. – Quelle proprietà primordiali caratteristiche anche per il numero (che già sono state accennate al § 15), sono quelle che si attribuiscono per nostro arbitrio al numero quando s'introduca col metodo analitico e costituiscono allora per il numero dei veri postulati.

Le proprietà che così con dimostrazione si trovano per i numeri ne rappresentano altrettante per le grandezze: onde il concetto di numero, che nasce dalla grandezza e ne presuppone l'esistenza, serve poi a conoscere più intimamente la grandezza stessa. Di qui l'utilità dell'applicazione dell'algebra alla geometria.

Il numero può quindi servire alla risoluzione di problemi su grandezze, trasformando questi in problemi relativi ai numeri corrispondenti e cercando infine la grandezza cui corrisponde il numero risultato. Se questo non ha grandezza corrispondente nella classe (come p. es. se la classe è formata di soli aggregati di unità, e risulta un numero frazionario) il problema è impossibile. Ma può domandarsi se quando un problema si riferisce ad una classe che non comporta che numeri speciali, p. es. i positivi, e risolvendolo coll'algebra si trova per risultato un numero di quella categoria speciale, nel caso nostro un numero positivo, si dovrà dichiarare il problema possibile e risoluto, anche se nel corso della soluzione si sono adoperati numeri cui non corrispondono grandezze, cioè nel caso citato, numeri negativi. La questione non è oziosa, non avendo significato i numeri e le loro operazioni se non in quanto quelli rappresentano grandezze. Ma si può osservare che in tal caso potremo sempre supporre di avere idealmente completato la classe con grandezze ideali sino a renderla tale che in esse si trovino grandezze corrispondenti ai numeri di tutte le categorie impiegate — attribuendo loro le proprietà necessarie perchè, insieme con quelle esistenti, diano una delle ordinarie classi. Allora per la nuova classe quella soluzione potrà interpretarsi, ed il risultato sarà esatto e possibile: e siccome appartiene alle grandezze antiche, così potremo tornare a sopprimere quelle ideali aggiunte: con che non alterandosi nè i dati, nè il risultato, si conclude che questo effettivamente risolve il problema anche avendo adoperato numeri non compatibili colla classe da cui si parte.

18. Introdotto che sia il numero si *riconosce* che anche la classe dei numeri è una di quelle classi di oggetti (grandezze) per rappresentare le quali esso si è introdotto, giacchè ne gode le proprietà caratteristiche (Cfr. § 15): talchè, oltre esser *rappresentante* di grandezza, il numero è grandezza esso pure: esso è la grandezza più semplice che serve a studiare le altre. Ma, almeno introducendolo col metodo sintetico, del quale appunto si occupano queste poche considerazioni, è inesatto assumerlo come grandezza prima di averne dimostrato quelle proprietà: tanto più è inesatto l'as-

sumerlo come tale per dimostrare quelle proprietà stesse. Non è neppur rigoroso l'ammettere quelle proprietà come evidenti per il numero, come talora suol farsi; giacchè mentre col metodo analitico sono arbitrarie, col metodo sintetico sono da dimostrarsi — e quindi nè nell'un caso nè nell'altro sono evidenti. Talora quelle proprietà caratteristiche (dalle quali si fanno poi discendere quelle fondamentali per il numero) si prendono come assiomi per le grandezze; ma questo modo pure, sebbene meno inesatto che il precedente, è tutt'altro che rigoroso. Infatti p. es. o le proprietà che, se A, B, C, ... sono grandezze di una certa classe, da $A = B$, $B = C$ risulta $A = C$, da $A > B$, $B > C$ risulta $A > C$, che $A + B = B + A$, che $A + (B + C) = (A + B) + C$ ecc. servono a definire in modo formale i concetti di uguaglianza, di somma, ecc. (Cfr. l'equivalenza delle superficie e dei solidi) ed allora costituiscono delle vere definizioni, e come tali, sono *arbitrarie*, e non evidenti; oppure i concetti di uguale, maggiore, minore, somma si ritengono definiti precedentemente a sè (Cfr. i segmenti in geometria) ed allora sono quelli veri *teoremi da* *dimostrare*.

Generalmente accade questa inesattezza perchè non ci si occupa troppo di definire con precisione i concetti di uguale, maggiore; minore e di somma, credendo che per essi bastino i concetti che ci si formano coll'uso di quelle parole nella vita comune: poichè allora, notando che in pratica quelle proprietà si verificano, si giudicano necessarie ed evidenti. Ma se questo basta nella vita comune, non è sufficiente per lo studio delle grandezze — onde la necessità di dare in modo preciso quelle definizioni.

Per le grandezze geometriche il difetto lamentato (da cui non è immune lo stesso Euclide) va ora scomparendo: e nei trattati più recenti è ben definita l'uguaglianza, la disuguaglianza, la somma, ecc. e quelle proprietà sono dimostrate come veri teoremi. Ma nei trattati di Aritmetica, dove le classi cui si riferiscono i numeri sono dapprima quelle formate da aggregati di oggetti uguali, si sogliono spesso quelle proprietà ammettere come assiomi. Invece esse si devono e si possono dimostrare, sol che si abbia cura di ben definire l'uguaglianza, la disuguaglianza e la somma di quelle grandezze che risultano da aggregati di oggetti considerati uguali, e che diremo grandezze *discrete* (meglio grandezze di classi discrete).

19. A questo scopo si dovrebbero, nello studio dell'Aritmetica fare le osservazioni seguenti. (*)

Diciamo *unità* ciascun oggetto che comparisce a costituire la grandezza discreta. Due grandezze discrete omogenee A e B si diranno *uguali* quando si possa a ciascuna unità della prima collegarne una distinta della seconda ed una sola, e viceversa — dimodochè le unità delle due grandezze si possano completamente unire due a due. Se si possa far corrispondere ogni unità di A ad una distinta e ad una sola in B e ne avanzino in B, talchè viceversa non tutte quelle di B possano farsi corrispondere a differenti unità di A, diremo A *minore* di B e B *maggiore* di A.

Prese due grandezze omogenee discrete A e B, e stabilita così in un certo modo la corrispondenza, avviene necessariamente uno dei tre casi accennati, cioè che sia A o uguale, o maggiore, o minore di B. Dico che avverrà sempre il medesimo caso comunque si stabilisca la corrispondenza precedente.

Si dicano per brevità *associate* due unità, una di A e una di B, che si fanno corrispondere fra loro: le unità di A si suppongano disposte in ordine qualunque, e quelle di B in modo che sia prima l'associata della prima di A, seconda l'associata della seconda, ecc. saltando quelle di A che non hanno associate in B, o ponendo in fondo quelle di B che non hanno associata in A (l'un caso esclude l'altro per il modo completo con cui si suppone di stabilir la corrispondenza). Supponiamo ora di stabilire in un altro modo la cor-

(*) *Stolz*, l. c. — *Schröder*. — Lehrbuch der Aritmetik und Algebra.

rispondenza, disponendo poi le unità in ogni grandezza nel modo anzidetto, talchè le unità associate occupino posti corrispondenti. Indichiamo con (α), (β) e rispettivamente (α'), (β') le due successioni delle unità in A e B nel primo e nel secondo caso. Se dimostreremo che le successioni (α) ed (α') si possono far corrispondere completamente unità ad unità, e così (β) a (β'), sarà provato che nelle stesse relazioni in cui sta A a B quando siamo nel caso (α), (β) sta pure quando la corrispondenza è quella di (α') a (β'). — Ora, siccome la successione (α') si ottiene da (α) permutando le sue unità, ed una permutazione qualunque è il risultato di più scambi successivi di due sole unità, così basta dimostrare che alla successione (α) corrisponde pienamente unità per unità quella che se ne ottiene scambiando fra di loro due sole unità. Questo è evidente: perchè se la succesione (α) si rappresenta con

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ l,\ m,\ n,\ \ldots\ r,\ s,\ t,\ \ldots\ z$$

e

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ l,\ s,\ n,\ \ldots\ r,\ m,\ t,\ z$$

è quella che si ottiene scambiando fra di loro m ed s, le unità invariate di posto corrispondono a sè stesse, m corrisponde ad s ed s ad m e la corrispondenza è completa.

È così dimostrato che la corrispondenza di A a B non può avvenire che in un modo solo, e che quindi l'essere $A = B$, $A > B$, $A < B$ rappresenta qualcosa di assoluto. Stabilito così questo carattere, ed osservato che esso non si altera al cambiarsi del modo di corrispondenza, si *dimostra* immediatamente con processi simili ai precedenti, che se $A = B$ è $B = A$, se $A = C$, $B = C$ è $A = B$; se $A > B$, $B = C$ è $A > C$ ecc. insomma tutti quei teoremi che si sogliono dare per assiomi.

Si definirà poi *somma* delle grandezze discrete A, B, C, ... L una grandezza M tale che ogni unità di A si possa far corrispondere ad una differente di M, ognuna di B ad una differente di M, diversa da quelle che corrispondono ad A, ognuna di C ad una differente di M, diversa da quelle che corrispondono ad A e a B ecc., senza che in M ne avanzi nessuna. Allora, come nel modo precedente, si vedrà che se stabilendo in un certo modo la corrispondenza, le unità di M si esauriscono e bastano, si esauriranno bastando anche comunque si stabilisca: onde il concetto di somma è perfettamente definito e indica qualcosa di assoluto. Allora se $A+B=C$, si vede che anche $B+A$ corrisponderà a C, giacchè da $A+B$ a $B+A$ si passa con scambi successivi e si possono ripetere le considerazioni precedenti. Quindi $A+B=B+A$. — E analogamente si prova che $(A+B)+C=A+(B+C)$ ecc.

Come si vede, enunciate con precisione le definizioni, le proprietà in questione sono veri teoremi: e, benchè di dimostrazione facile, non possono dirsi assiomi nel senso rigogoroso della parola.

20. Possiamo farci la domanda se i numeri reali e complessi ordinari siano sufficienti — almeno per le più comuni classi di grandezze. Nelle grandezze geometriche, p. es. considerate indipendentemente dal concetto di direzione, i numeri reali sono sufficienti usandoli con tutte le loro definizioni e i loro postulati ordinari; ma dipendentemente da questi potrebbero divenire insufficienti. Se p. es. per le grandezze geometriche si abbandonasse il postulato d'Archimede, cioè quello che date due grandezze A e B si può prendere di ciascuna di esse una multipla tale che superi l'altra (che, come postulato, è arbitrario) allora è facile mostrare (*) che i soli numeri reali non sono sufficienti, e occorrono nuovi numeri. Così i numeri reali e anche i nuovi numeri a cui ora ho accennato non bastano se si modifica la definizione d'uguaglianza. Se p. es. l'uguaglianza dei segmenti è l'equipollenza nel piano, allora sono necessari anche gli ordinari numeri complessi: se l'uguaglianza è l'equipollenza nello spazio, neanche questi sono sufficienti ed occorrerebbero i numeri complessi a tre dimensioni, ecc.

(*) Ciò discende da alcuni studi che sto facendo sulle grandezze.

Nell'Algebra elementare ci si deve limitare ai numeri che appariscono necessari coi postulati che si sogliono introdurre per le principali grandezze affine di renderli utili in pratica — e a quelli necessari per rendere possibili tutte le operazioni algebriche con un metodo uniforme di calcolo che si eseguisca colle ordinarie regole. Queste vengono in parte a mancare per i numeri a più di due dimensioni. L'algebra elementare deve quindi limitarsi agli ordinari numeri reali e agli ordinari complessi.

Gli altri numeri hanno importanza più analitica, e dovrebbero studiarsi solo in una seconda trattazione del numero col metodo analitico, che ho già detto essere utile si faccia seguire allo studio dell'algebra elementare fatto col numero introdotto col metodo sintetico.

Pisa, Aprile 1887.

R. Bettazzi.

UN TEOREMA SUL TRIANGOLO

Nel 1° fascicolo dell'anno corrente di questo periodico, a pag. 24 il Sig. Prof. G. Riboni dimostra la proposizione seguente:

« Se le coppie di punti A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sono situate » rispettivamente sulle tre rette BC, CA, AB così chè le rette » AA_1, BB_1, CC_1 concorrano in uno stesso punto, e che anche le rette AA_2, BB_2, CC_2 concorrano in uno stesso punto, » e si indichino rispettivamente con α, β, γ i punti di incontro » di AA_1 con B_2C_2, di BB_1 con C_2A_2 e di CC_1 con A_2B_2, le » tre rette $A_2\alpha$, $B_2\beta$, $C_2\gamma$ concorreranno pure in uno stesso » punto ». (Teorema (3) proposto dal Sig. Prof. Besso nel 3° fascicolo dell'anno I° (1886), pag. 99),

ed aggiunge che indicando con α', β', γ' rispettivamente i punti d'incontro di AA_2 con B_1C_1, di BB_2 con C_1A_1 e di CC_2 con A_1B_1, si dimostrerebbe analogamente che le rette $A_1\alpha'$, $B_1\beta'$, $C_1\gamma'$ concorrono anch'esse in uno stesso punto.

Ora io dimostrerò che questo secondo punto coincide col primo, e che per esso passano anche altre rette determinate dai punti dati.

1. Indichiamo con P_1 il punto comune alle AA_1, BB_1, CC_1, e con P_2 quello comune alle AA_2, BB_2, CC_2, e sia α_1 il punto comune alle AA_1, B_1C_1 (*). Si avrà

$$(\alpha_1 B_1 C_1 \alpha') = (A_1 CBA_2)$$

e quindi anche

$$(\alpha_1 B_1 C_1 \alpha') = (A_2 BCA_1)\,;$$

per cui nei fasci di centri P_1, P_2 i raggi

$$P_1\alpha_1,\ P_1B_1,\ P_1C_1,\ P_1\alpha'$$

corrispondono respettivamente ai raggi

$$P_2A_2,\ P_2B,\ P_2C,\ P_2A_1$$

ossia i raggi

$$AA_1,\ BB_1,\ CC_1,\ P_1\alpha'$$

ai raggi

$$AA_2,\ BB_2,\ CC_2,\ P_2A_1.$$

Le coppie di punti

$$\binom{BB_1}{CC_2}\binom{BB_2}{CC_1},\ \binom{CC_1}{AA_2}\binom{CC_2}{AA_1},\ \binom{AA_1}{BB_2}\binom{AA_2}{BB_1},\ \binom{AA_1}{P_2A_1}\binom{AA_2}{P_1\alpha'}\ (*)$$

saranno dunque allineate con uno stesso punto O.

Il raggio AA_2 coincide con $A\alpha'$, onde il secondo punto dell'ultima coppia non è altro che α', mentre il primo è evidentemente A_1. Perciò la retta $A_1\alpha'$ passa per il punto comune alle congiungenti delle prime tre coppie di punti.

È chiaro che si può fare la dimostrazione analoga per

(*) Il lettore è pregato di fare la figura.

(*) Adopero qui la notazione $\binom{MN}{PQ}$ per indicare il punto comune alle rette MN e PQ.

ciascuna delle rette $B_1\beta'$, $C_1\gamma'$ e $A_2\alpha$, $B_2\beta$, $C_2\gamma$. Si può quindi enunciare il teorema:

Le 9 rette

$$\binom{BB_1}{CC_2}\binom{BB_2}{CC_1},\quad \binom{CC_1}{AA_2}\binom{CC_2}{AA_1},\quad \binom{AA_1}{BB_2}\binom{AA_2}{BB_1}$$

$$A_1\alpha',\qquad B_1\beta',\qquad C_1\gamma'$$

$$A_2\alpha,\qquad B_2\beta,\qquad C_2\gamma$$

passano per uno stesso punto O.

2. Scolio. — Nella dimostrazione precedente non abbiamo considerato che le coppie di cui avevamo bisogno, ma è evidente che per la medesima ragione passano per O anche le rette

$$\binom{BB_1}{P_2A_1}\binom{BB_2}{P_1\alpha'},\quad \binom{CC_1}{P_2A_1}\binom{CC_2}{P_1\alpha'};$$

così pure dalle dimostrazioni analoghe che, come ho osservato di sopra, si potrebbero fare per le rette $B_1\beta'$, $C_1\gamma'$ e $A_2\alpha$, $B_2\beta$, $C_2\gamma$ si ricaverebbe che per O passano pure le rette

$$\binom{CC_1}{P_2B_1}\binom{CC_2}{P_1\beta'},\quad \binom{AA_1}{P_2B_1}\binom{AA_2}{P_1\beta'}$$

$$\binom{AA_1}{P_2C_1}\binom{AA_2}{P_1\gamma'},\quad \binom{BB_1}{P_2C_1}\binom{BB_2}{P_1\gamma'}$$

e le rette

$$\binom{BB_2}{P_1A_2}\binom{BB_1}{P_2\alpha''},\quad \binom{CC_2}{P_1A_2}\binom{CC_1}{P_2\alpha''}$$

$$\binom{CC_2}{P_1B_2}\binom{CC_1}{P_2\beta''},\quad \binom{AA_2}{P_1B_2}\binom{AA_1}{P_2\beta''}$$

$$\binom{AA_2}{P_1C_2}\binom{AA_1}{P_2\gamma''},\quad \binom{BB_2}{P_1C_2}\binom{BB_1}{P_2\gamma''}.$$

Così per O *passano, oltre le 9 rette considerate di sopra, altre 12 rette determinate anch'esse per mezzo dei punti dati.*

3. *Altre proprietà della medesima figura.*

Siano A_0, B_0, C_0 le intersezioni di B_1C_1, B_2C_2; C_1A_1, C_2A_2; A_1B_1, A_2B_2.

Indichiamo con C'_1, C'_2 le intersezioni di AB con A_1B_1, A_2B_2. I gruppi $ABC_1C'_1$, $ABC_2C'_2$ sono armonici, perciò le due forme

$$A_1 . (ABC_1C'_1) \,, \quad A_2 . (ABC_2C'_2)$$

sono projettive, ed avendo i raggi uniti A_1B, A_2B saranno prospettive. *Ne segue che i punti* B_0, C_0 *sono allineati con* A. *Similmente si vedrebbe che i punti* C_0, A_0 *sono allineati con* B, *ed* A_0, B_0 *con* C.

Considerando le due forme di tre elementi

$$BC_1C_2 \,, \quad CB_1B_2$$

e applicando un notissimo ed elementare teorema di Geometria projettiva (V. Cremona, Geom. projettiva, p. 45, § 68 a sinistra) si vede che i tre punti

$$\begin{pmatrix} B_1C_2 \\ B_2C_1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} BB_1 \\ CC_1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} BB_2 \\ CC_2 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} B_1C_2 \\ B_2C_1 \end{pmatrix} , \qquad P_1 \quad , \qquad P_2$$

sono in linea retta.

Dimostrazioni analoghe si potrebbero evidentemente fare per ciascuno degli altri punti analoghi a $\begin{pmatrix} B_1C_2 \\ B_2C_1 \end{pmatrix}$. Onde si avrà che *i tre punti*

$$\begin{pmatrix} B_1C_2 \\ B_2C_1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} C_1A_2 \\ C_2A_1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} A_1B_2 \\ A_2B_1 \end{pmatrix}$$

sono sulla retta P_1P_2.

Pesaro, 15 Maggio 1887.

S. Rindi
prof. nel R. Liceo Mamiani.

NOTA SU ALCUNI TRIANGOLI
DIPENDENTI DA UN TRIANGOLO ACUTANGOLO DATO

Sia ABC un triangolo acutangolo dato; a, b, c le misure dei lati opposti ad A, B, C; S l'area; su ciascuno dei lati ed esternamente al triangolo si costruisca un arco di circolo capace di 60°

Indichiamo con $O\ O_1\ O_2$ i centri di questi archi corrispondenti ai lati a, b, c, e con $r\ r_1\ r_2$ i rispettivi raggi, avremo

$$r=\frac{a}{\sqrt{3}},\quad r_1=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad r_2=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Il triangolo O_1AO_2 ci dà

$$O_1O_2^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(A+60^\circ)$$

$$=r_1^2+r_2^2-r_1r_2(\cos A-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}A).$$

$$O_1O_2^2=\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{3}-\frac{bc}{3}(\cos A-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}A).$$

ossia

$$(1)\qquad 6.\,O_1O_2^2=a^2+b^2+c^2+4.S.\sqrt{3}.$$

Questa formola simmetrica rispetto ai lati a, b, c del triangolo ABC dimostra, come già è noto, che il triangolo OO_1O_2 è equilatero.

Insieme a questo triangolo consideriamo anche quello determinato dai 3 punti di mezzo M, M_1, M_2 degli archi capaci di 120°, che si segano in un punto, e che completano i circoli; il triangolo M_1AM_2 in cui $M_1AM_2=A-60°$, $M_1A=r_1$ $M_2A=r_2$ ci dà

$$M_1M_2^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3} \cos(A - 60^\circ)$$

ossia

$$3M_1M_2^2 = b^2 + c^2 - bc \cos A - bc \operatorname{sen} A. \sqrt{3}.$$

Facendo la sostituzione già adoperata per cosA e per bc senA, si ottiene

$$(2) \qquad 6M_1M_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4S. \sqrt{3}$$

la quale formola, simmetrica rispetto ai lati a, b, c, ci mostra che anche il triangolo MM_1M_2 è equilatero. La (1) e la (2) sommate membro a membro e sottratte ci danno

$$(3) \qquad 3(O_1O_2^2 + M_1M_2^2) = a^2 + b^2 + c^2.$$

$$(4) \qquad 3(O_1O_2^2 - M_1M_2^2) = 4S. \sqrt{3}.$$

e queste formole danno una rappresentazione geometrica della somma dei quadrati dei lati di un triangolo acutangolo e della sua area.

Ma di quest' ultima si può avere una espressione molto più semplice; infatti se si moltiplicano ambo i membri della (4) per $\frac{\sqrt{3}}{2}$, si ottiene

$$(5) \qquad S' - S'_1 = S.$$

dove S' e S'_1 significano le aree dei triangoli OO_1O_2, MM_1M_2, e però il triangolo dato è equivalente alla differenza dei due triangoli equilateri considerati.

2. Le formole stabilite possono tornar utili nello studio delle relazioni esistenti fra i triangoli equilateri circoscritti al dato e il triangolo dato, come si può argomentare da questo breve cenno.

Se TT_1 è una retta passante per A e terminata agli archi descritti su b e c capaci di 60°, ed ω l'angolo che AT fa con AB, si avrà

$$TA = 2r_2 \operatorname{sen}(\omega + 60^\circ), \quad AT_1 = 2r_1 \operatorname{sen}(\omega + A - 60^\circ)$$

epperciò

$$TT_1 = \text{sen}\omega \left\{ \frac{c}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}}(\cos A + \sqrt{3}.\text{sen}A) \right\} + \cos\omega \left\{ c + \frac{b}{\sqrt{3}}(\text{sen}A - \sqrt{3}.\cos A) \right\}$$

Se indichiamo con l_ω l_0 $l_{\frac{\pi}{2}}$ le lunghezze delle trasversali corrispondenti agli angoli ω, 0, $\frac{\pi}{2}$, avremo

$$(6) \qquad l_\omega = l_0 \cos\omega + l_{\frac{\pi}{2}}.\ \text{sen}\omega \qquad (*)$$

e quindi anche

$$(7) \qquad l_{\omega+\frac{\pi}{2}} = \cos\omega . l_{\frac{\pi}{2}} - \text{sen}\omega .\ l_0 .$$

La (6) e la (7) quadrate e sommate danno

$$(8) \qquad l^2_{\omega} + l^2_{\omega+\frac{\pi}{2}} = l_0^2 + l^2_{\frac{\pi}{2}}$$

dalla quale, indicando con S_ω l'area del triangolo equilatero corrispondente alla direzione ω, risulta

$$(9) \qquad S_\omega + S_{\omega+\frac{\pi}{2}} = S_0 + S_{\frac{\pi}{2}}.$$

I valori delle costanti del secondo membro nelle formole (8), (9) si ottengono facilmente quadrando e sommando i valori di

$$l_0 = c + \frac{b}{\sqrt{3}}\ \text{sen}A - b \cos A$$

$$l_{\frac{\pi}{2}} = \frac{c}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}} \cos A + b\ \text{sen}A ,$$

così si ottiene

$$l_0^2 + l^2_{\frac{\pi}{2}} = \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3} + \frac{8S}{\sqrt{3}}$$

e in conseguenza

$$S_0 + S_{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2.\sqrt{3}} + 2S.$$

(*) Affinchè la trasversale l_0 esista, è necessario che l'angolo in A super 60°; ma questo non nuoce alla generalità perchè, essendo il triangolo acutangolo, uno certamente dei suoi angoli avrà tale proprietà.

Ma dalla (3) si ottiene $2.(S' + S'_1) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2.\sqrt{3}}$, quindi il valore della costante $S_0 + S_{\frac{\pi}{2}} = 2(S' + S'_1 + S) = 4S' = S_M$, dove S_M rappresenta il massimo dei triangoli equilateri circoscritti, che, come è noto, ha i lati paralleli a quelli del triangolo OO_1O_2.

FRANCESCO PANIZZA.

DIMOSTRAZIONI DEI TEOREMI PROPOSTI A PAG. 124.

Due triangoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ *sieno inscritti in un triangolo* ABC *in modo che le rette* AA_1, BB_1, CC_1 *passino per uno stesso punto e che anche le rette* AA_2, BB_2, CC_2 *passino per uno stesso punto: se le rette* A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 *incontrano rispettivamente le rette* A_2B_2, A_2C_2, B_2C_2 *in tre punti formanti un triangolo, questo triangolo è circoscritto al triangolo* ABC.

F. NICOLI.

Dimostrazione del Prof. *G. Riboni.* (*)

Siano α, β, γ rispettivamente i punti comuni delle B_1C_1 e B_2C_2, C_1A_1 e C_2A_2, A_1B_1 e A_2B_2 si tratta di dimostrare che i vertici A, B, C del triangolo dato si trovano sui lati $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ del triangolo $\alpha\beta\gamma$ o sul prolungamento di questi lati.

Indichiamo con O_1 e O_2 i punti comuni alle AA_1, BB_1, CC_1 ed AA_2, BB_2, CC_2 e con E ed F i punti d'incontro delle B_1C_1 e B_2C_2 prolungate, col prolungamento della BC. Dal quadrilatero completo $AC_2O_2B_2$ si ha che il gruppo BA_2CF è armonico. Chiamisi ora α_1 il punto d'incontro della $B\gamma$ colla C_2B_2. Proiettando da B_2 il gruppo armonico predetto sulla $B\alpha_1$ si ha il gruppo $B\gamma M\alpha_1$: pure armonico. Si consideri ora il quadrilatero completo $AC_1O_1B_1$ da cui si ha che il gruppo BA_1CE è armonico; proiettando questo gruppo da B_1 sulla $B\alpha_1$ si ha che i tre punti BA_1C sono proiettati in $B\gamma M$, e poichè il gruppo $B\gamma M\alpha_1$ è armonico necessariamente, E

(*) Un'altra dimostrazione venne inviata dal Sig. prof. Eugenio Frattini.

viene proiettato in α_1, ossia α_1 è il punto di concorso delle C_1B_1, C_2B_2, sicchè α_1 coincide con α. In altre parole il punto α si trova sulla retta $B\gamma$. — Similmente si dimostrerebbe che β e γ sono allineati con A, ed α e β con C.

Resta altresì dimostrato che due vertici del triangolo $\alpha\beta\gamma$, insieme al vertice del triangolo ABC situato sulla retta dei vertici stessi, e il punto d'incontro col lato opposto a questo (come $\alpha M\gamma B$) formano un gruppo armonico (*).

Sieno AB, CD *due diametri fra loro perpendicolari di una circonferenza*, M *un punto qualunque di questa curva*, N *il punto comune alle rette* AM *e* CD, P *il piede della perpendicolare condotta da* M *sulla tangente in* A *alla circonferenza e* Q *il punto comune alle rette* AB, PN: *la retta* QM *è tangente alla circonferenza.*

F. Nicoli.

Dimostrazione del Prof. *L. Bosi* (**)

I punti M ed A possono trovarsi dalla stessa parte del diametro CD o da parti opposte di esso. In ambedue i casi indichiamo con O il centro del cerchio, con Y il punto d'incontro delle PM, CD e tiriamo OM.

Poichè le parallele PM, AQ sono segate dalle PQ, MA, YO che concorrono in un punto N, si avrà la proporzione $OQ : OA = YP : YM$; ma $YP = OA = OM$, onde si può scrivere $OQ : OM = OM : YM$. I triangoli QMO, OYM avendo gli angoli QOM, OMY eguali e compresi da lati proporzionali sono simili: quindi l'angolo QMO è uguale all'angolo OYM e perciò retto. La QM è dunque tangente alla circonferenza.

Si può dimostrare inversamente che se l'angolo QMO è retto, il punto M giace sulla circonferenza.

Si tiri da M la perpendicolare ad AB fino ad incontrare AB in X. Si avrà, come sopra, la proporzione $OQ : OA = YP : YM$, che, per essere $YP = OA$, si può scrivere:

$$(1) \qquad OQ : OA = OA : YM.$$

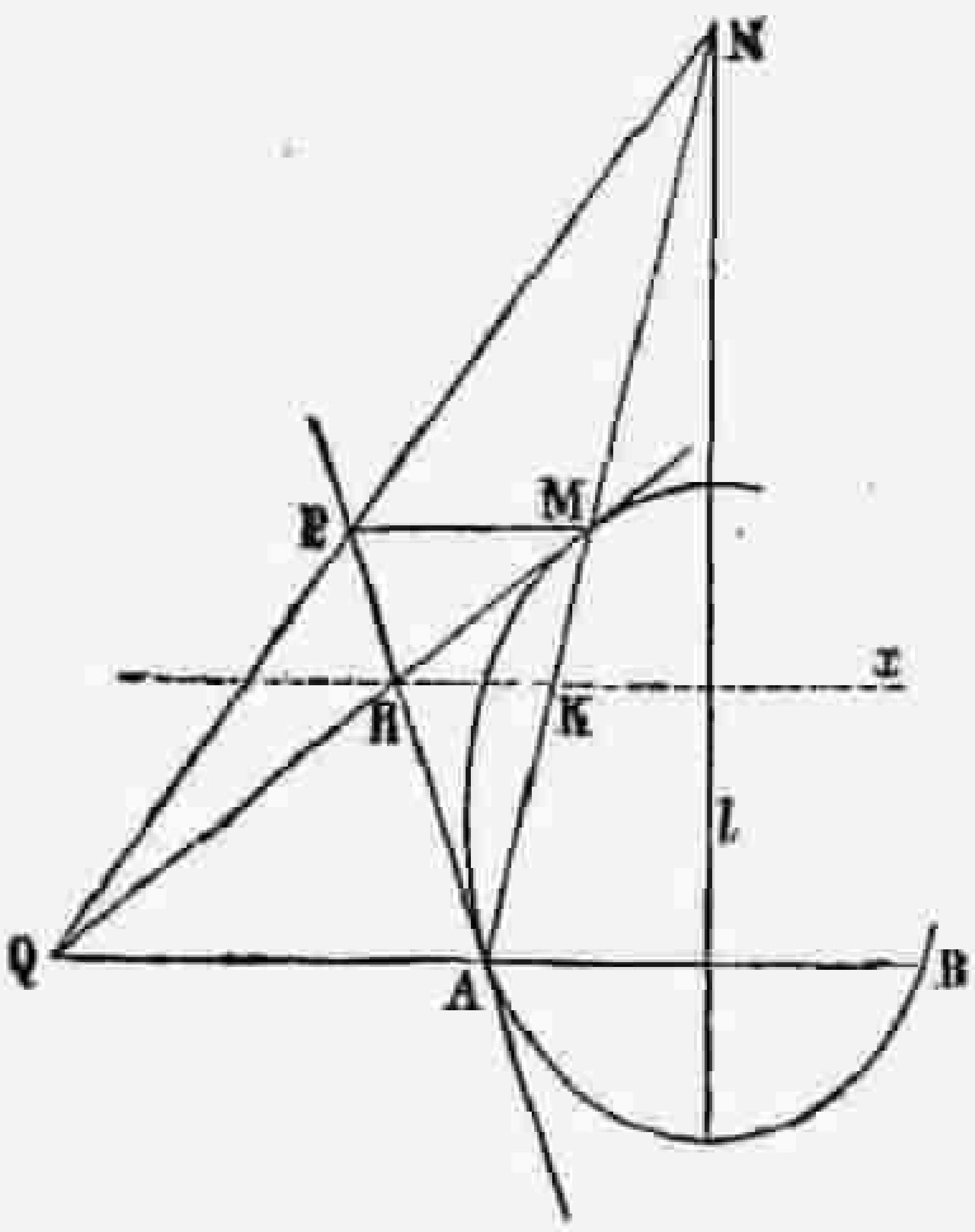
(*) Si può anche osservare che condotte le $A\alpha$, $B\beta$ finchè s'incontrino in δ, risulta un quadrilatero completo $\alpha\gamma\beta\delta$ del quale il triangolo ABC è il triangolo diagonale (A. L.).

(**) Dimostrazioni elementari di questo teorema furono inviate anche dai Signori *J. Beyens*, *F. Panizza*, *G. Riboni*, *G. Russo*, *R. Badia*, *E. Frattini*.

Inoltre dal triangolo rettangolo QMO abbiamo OQ: OM=OM: OX: ossia OQ : OM = OM : YM. Da quest' ultima proporzione e dalla (1) risulta che OM = OA, cioè che il punto M è sulla circonferenza c.d.d.

Questo teorema del resto non è che un caso particolare del seguente:

Sieno AB *una corda di una conica*, l *la direzione del suo diametro coniugato*, M *un punto qualunque della curva*, N *il punto comune alle rette* AM *e* l, P *il punto d'intersezione della parallela ad* AB *condotta da* M *con la tangente in* A *alla conica*, Q *il punto comune alle rette* AB *e* PN: *la retta* MQ *è tangente alla conica.*



Dal punto d'incontro H delle PA, MQ si tiri la retta x parallela ad AB, che incontri in K la AM. La polare del punto A è la tangente AP; quella di N dev'essere parallela ad AB, poichè N si trova sul diametro coniugato ad AB, e inoltre deve passare per K (poichè dalla considerazione del quadrangolo completo che ha per vertici P, H, Q è il punto all'infinito comune alle parallele QB, PM risulta che K è coniugato armonico di N rispetto ai punti A ed M): la polare di N è dunque la x.

Il punto H, intersezione delle AP ed x polari dei punti A ed N rispettivamente, è il polo della retta AN. Per esso deve passare la tangente in M, la quale per conseguenza è la MQ. c. d. d.

Supponendo che la conica sia una circonferenza e la corda AB un diametro si ha il teorema proposto.

Se gli spigoli di un tetraedro equifaciale sono veduti sotto gli angoli α, β, γ, *dal centro della sfera ad esso circoscritta e si indicano rispettivamente con* D *e con* V *il diametro di questa sfera ed il volume del tetraedro, si ha la relazione*

$$V = \frac{D^3}{3} \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

J. Beyens.

Dimostrazione del prof. *F. Panizza* (*)

Sia il tetraedro SABC; per ipotesi si ha

$$AB = SC = a, \quad BC = SA = b, \quad AC = SB = c.$$

O il centro della sfera circoscritta, si abbassino da O le rpendicolari OM, ON, OP sui lati AB, BC, CA; i punti N, P saranno rispettivamente i punti medi dei lati AB, , CA e si avrà per ipotesi

$$A\widehat{O}B = \alpha, \quad B\widehat{O}C = \beta, \quad A\widehat{O}C = \gamma.$$

i triangoli AOM, BON, AOP si ha, chiamando R il raggio la sfera circoscritta:

$$OM = R \cos\frac{\alpha}{2}, \; ON = R \cos\frac{\beta}{2}, \; OP = R \cos\frac{\gamma}{2}$$

Ora è noto (vedi Baltzer-Stereometria) che le congiungenti punti medi degli spigoli opposti di un tetraedro concorno nel baricentro del tetraedro, e che, quando questo è a cce eguali, il baricentro coincide col centro della sfera circoscritta e con quello della sfera inscritta (vedi in questo Perioco la Nota del Besso sul tetraedro a facce eguali). Ne rilta che le rette MO, NO, PO prolungate incontrano gli igoli opposti nei loro punti di mezzo, e che perciò i parallogrammi ottenuti congiungendo ordinatamente i punti di ezzo di due coppie di spigoli opposti, per ipotesi eguali loro, sono rombi, e quindi le diagonali si segano ad angolo to. Le tre rette OM, ON, OP sono quindi a due a due perndicolari fra loro, e però il volume del tetraedro avente per goli quelle tre rette e per base il triangolo MNP sarà to dalla formola

$$V_1 = \frac{1}{6} . \; OM.ON.OP = \frac{1}{6} \; R^3 \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

il tetraedro dato SABC ha la base ABC quadrupla della se MNP e le altezze corrispondenti a queste due basi sono re l'una quadrupla dell'altra, come facilmente si ricava

(*) Altre dimostrazioni vennero inviate dai Sig.i Prof.i *G. Riboni, E. attini.*

osservando che il segmento che congiunge un vertice del tetraedro col baricentro della faccia opposta è quadruplo di quello che congiunge il baricentro del tetraedro con quello della stessa faccia. Da ciò risulta

$$V = 16\, V_1 = \frac{1}{3} D^3 \cos\frac{\alpha}{2}\, \cos\frac{\beta}{2}\, \cos\frac{\gamma}{2}\,.$$

Osservazione. – Dalle considerazioni fatte nella dimostrazione del teorema si ricava questo enunciato geometrico del teorema stesso:

Un tetraedro a faccie eguali è equivalente alla terza parte di un parallepipedo retto rettangolo avente per spigoli le congiungenti i punti medi degli spigoli opposti.

F. Panizza.

TEOREMI PROPOSTI

I punti d'incontro delle altezze di due triangoli omologici, aventi i lati corrispondenti perpendicolari fra loro, sono equidistanti dall'asse di omologia.

Se un triangolo ABC ruota intorno ad un punto O del suo piano, e sia A′B′C′ una qualunque delle posizioni che esso prende in questa rotazione; se inoltre *a*, *b*, *c* sono i punti d'incontro dei lati corrispondenti dei due triangoli ABC ed A′B′C′, si hanno le seguenti proprietà:

1.° Se il punto O è il centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC, sarà anche il punto d' incontro delle altezze del triangolo *abc*.

2.° Se il punto O è il punto d'incontro delle altezze del triangolo ABC, sarà anche il centro del cerchio inscritto nel triangolo *abc*.

3.° Se il punto O è il centro del cerchio inscritto nel triangolo ABC, sarà anche il centro del cerchio circoscritto al triangolo *abc*.

4.° Se il punto O è situato sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABC, i punti *a*, *b*, *c* saranno in linea retta, cioè i triangoli ABC e A′B′C′ saranno omologici.

A. Sauve.

I cerchi aventi per diametri le tre mediane d'un triangolo hanno a due a due per assi radicali le tre altezze.

S. Rindi.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

metica commerciale e politica per TITO MARTINI *Pro-*
ssore ordinario nella R. Scuola superiore di Com-
ercio di Venezia (Roma G. B. Paravia e Comp.).

Il libro del prof. T. MARTINI, che oggi in questa rasse- bibliografica segnaliamo ai lettori del *Periodico*, non à una recente pubblicazione, infatti la copia che abbia- sott'occhio fa parte di una seconda edizione e porta la del 1884, ma noi temiamo che, malgrado i miglioramenti autore introdotti nella seconda edizione, quest'opera non ancora abbastanza conosciuta ed apprezzata; sebbene la sua forma pratica e per la perfetta conformità in trovasi col programma di computisteria e ragioneria le sezioni di commercio e ragioneria degli istituti tecnici, a rendere utilissimi servigi nell'insegnamento.

Questo trattato è diviso in due parti: la prima concer- te i sistemi monetari, le regole d'interesse semplice, la ia dei cambi, degli arbitraggi, le regole di ripartizione è intitolata aritmetica commerciale; la seconda, che ta delle annualità, degli interessi composti, degli am- tamenti, delle rendite vitalizie e delle assicurazioni, è a chiamata dall'autore aritmetica politica, seguendo in l'esempio degli scrittori del secolo passato. Alcune tavole eriche completano in modo opportunissimo l'opera.

Numerosi sono gli esempi che servono a chiarire le cipali teorie ed utili sono le note bibliografiche, le quali sono, sia agli insegnanti, sia ai discepoli servire di guida estendere le loro cognizioni sopra speciali argomenti.

Qua e là abbiamo notato qualche cosa che ci è sem- a non rigorosamente esatta. Così la irrazionalità dello ato all'indentro più che nel fatto di potere in certi casi durre a risultati assurdi, sta a parer nostro nell'obbligo pagare un interesse sopra una somma non riscossa. La ola congiunta, o del tre composta come da altri vien amata, non ci pare abbastanza chiaramente definita ed il capitolo che ne tratta ha, a differenza degli altri, più l'aspetto di un capitolo di aritmetica pratica che di aritmetica ragionata; la soppressione di ogni ragionamento nei vari esempi, se è vantaggiosa nel dare una maggiore speditezza al calcolo, nuoce alla chiarezza. E poichè crediamo che nella mente dei giovani si fissi meglio un ragionamento che una regola, così ci pare che convenga sempre nei libri di testo ripetere a sazietà i ragionamenti sui quali le regole si fondano. Nel capitolo quarto se si fossero invertiti alcuni paragrafi cominciando col dare i listini di qualche borsa, spiegandoli, e basando su di essi le osservazioni, la teoria sarebbe riescita più semplice. L'interesse composto valutato al n° 157 non si può propriamente considerare come continuo, ma bensì come discreto, nè la minor durata del periodo giustifica la distinzione dal punto di vista teorico.

Queste lievissime mende ed altre insignificanti sviste, che è inutile qui riportare, potranno con molta facilità essere tolte dagli insegnanti, i quali, siamo certi, ci saranno grati di aver loro fatto conoscere un libro, che essi possono tranquillamente adottare, sicuri di trovarvi razionalmente svolte tutte le teorie che fanno parte del loro insegnamento.

E. PADOVA.

J. A. SERRET. — *Trattato di Trigonometria* — Versione italiana fatta sulla sesta edizione francese ed autorizzata dall'Autore con Aggiunte per cura di LUIGI FENOGLIO professore di matematica nel R. Istituto tecnico di Alessandria — Parte prima *Trigonometria piana e sferica* — G. B. Paravia & C. Torino — Roma — Milano — Firenze, 1880. — Prezzo Lire 3.

Non occorre rammentare i pregi di questa notissima opera del Serret, ora nuovamente tradotta dal Sig. prof. Fenoglio e corredata di aggiunte, colle quali il traduttore ha avuto lo scopo di renderla ancor più conforme ai bisogni dell'insegnamento nelle nostre scuole. E negli Istituti tecnici, sezione fisico-matematica, credo ch'essa possa con profitto venire adottata, quando l'insegnante abbia cura di analizzare, con appropriati esercizi elementari, le nozioni fondamentali, ed ommetta alcune parti di natura meno elementare e non

enziali. allo scopo dell'insegnamento. E veramente le de-
izioni, che vi sono date, delle funzioni goniometriche, sono
ppuntabili; ma perchè esse sieno bene intese dai giova-
ti, pei quali lo studio della trigonometria è del tutto
ovo, occorre che siano accompagnate da alcune elementa-
sime questioni atte a porre bene in chiaro che i seni,
seni, ecc. sono numeri astratti indipendenti dalla lunghezza
l raggio. La quale osservazione non è forse del tutto su-
rflua per coloro che, essendo nuovi nella carriera dell' in-
gnamento, adottano questo libro nelle loro scuole. Altre
zioni sulla teoria generale delle funzioni goniometriche
uo esposte in modo piuttosto elevato, e richiedono pure
a accurata analisi elementare; ed altre, potrebbero es-
re ommesse, in conformità al principio di insegnare *poco*
rchè più facilmente riesca di insegnare *bene*.

Mi permetto ancora un'osservazione che si riferisce alla
mostrazione del teorema espresso dalla disuguaglianza
$- \operatorname{sen} x < \frac{x^3}{6}$, nella quale dimostrazione è in difetto quel
gore che si ammira nel complesso dell' opera; poichè da
a disuguaglianza della forma $U_n < T_n$ in cui U_n e T_n
no funzioni di n che, per n tendente all'infinito, tendono
spettivamente ai limiti U e T, si conchiude $U < T$, men-
e a rigore si dovrebbe conchiudere $U \leqq T$; e ciò avverto
che perchè in altri libri, pure pregevolissimi, trovasi una
sì fatta argomentazione.

Fra le aggiunte del prof. Fenoglio mi piace specialmente
uella intitolata *Rappresentazione grafica delle variazioni
elle funzioni trigonometriche*. Tali rappresentazioni infatti
no molto efficaci per educare al concetto di funzione,
nto importante anche fuori del campo della matematica.
pure pregevole l'aggiunta sulle *Equazioni trigonometriche*
he contiene ampia materia per utili esercitazioni scolastiche.

D. Besso.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXV. Luglio e Agosto 1887. Napoli, Benedetto Pellerano, editore.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy*, Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 2e série. Onzième année. N. 8. Paris, 1887.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*. 11e Année. N. 20. Paris, M. Nony, 17, Rue des Écoles, 1887.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira*. Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VII, n. 6. Coimbra, 1886.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome septième, Juillet, Aout et Septembre 1887.

Rivista didascalica. Organo della società didascalica italiana. — Anno I, fasc. 4, Roma, 1887.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XIX. N. 9, 10, 11, 12. Firenze, 1887.

BASSANI (A.) — Generalizzazione della formola di Lagrange. (Atti R. Ist. ven.) 1887.

CERTO (L.) — Sui poligoni piani semplici. — Sulle forme di terzo grado generate da due forme elementari projettive di primo e di secondo grado di un piano o di una stella. — Sull'n-agono inscritto isoclino in un n-agono piano semplice dato, (1885—1887).

DEL RE (A). — Sulle funzioni di forza. — Sulla congruenza (6, 2) delle rette che uniscono le coppie di punti omologhi di due quadriche che si corrispondono in una determinata omografia non assiale nè omologica dello spazio. — Su certi luoghi che s'incontrano nello studio di tre forme geometriche fondamentali di 2a specie proiettivamente riferite due a due. — Nuova costruzione della superficie del quint'ordine dotata di curva doppia del quint'ordine. — Alcune proprietà geometriche che potrebbero essere utili nella teoria dei sistemi di raggi luminosi. — Omografie che mutano in se stessa una certa curva gobba del 4° ordine e 2a specie e correlazioni che la mutano nella sviluppabile dei suoi piani osculatori. — Correlazioni che mutano la quartica gobba con due flessi nella sviluppabile dei suoi piani bitangenti. (1885—87).

GIULIANI (G.) — Sopra alcune funzioni analoghe alle funzioni cilindriche. — Sopra certe funzioni analoghe alle sferiche (Gior. Battaglini 1887). — Sulla funzione potenziale della sfera in uno spazio di n dimensioni (Nuovo Cimento, 1887).

GUCCIA (G. B.) — Sui sistemi lineari di superficie algebriche dotati di singolarità base qualunque (1887).

LONGCHAMPS (G.) — Sur la rectification de quelques courbes remarquables (1887).

NEUBERG (J.) e TARRY (G.) — Sur les polygones et les polyèdres harmoniques (1886).

PADOVA (E.) — Sulle espressioni invariabili. (Atti R. Accademia Lincei, 1887.)

PANNELLI (M.) — Sulle trasformazioni multiple involutorie di due spazi. (Rendiconti R. Accademia fis. mat.) Napoli, 1887.

SULLE
FRAZIONI DECIMALI PERIODICHE

1. La condizione necessaria e sufficiente affinchè un
nero formato da tutte cifre 9 sia divisibile per un altro
iposto nella stessa guisa è che il dividendo contenga un
nero di cifre multiplo del numero delle cifre del divisore.
ero se questa condizione è soddisfatta, il dividendo ugua-
rà il prodotto del divisore per un numero della forma
..0100.. 01......100...01 dove il numero dei zeri fra due
e 1 consecutive sarà uguale al numero delle cifre del
sore meno una. La condizione stessa è poi necessaria,
hè quand'essa non è soddisfatta potendosi scomporre il
dendo in due parti una multipla del divisore e l'altra
ore del divisore stesso, la divisione darà necessariamente
esto. Così ad es. avendosi i due numeri 99999999 e 999, il
no potrà scriversi $= 99999000 + 99 = 999 \,.\, 100100 + 99$, il che
tra come la divisione dell' uno per l'altro dia un resto
è 99.

E poichè un numero formato da p cifre 9 può rappre-
arsi con $10^p - 1$, così segue il teorema:

Affinchè un numero della forma $10^p - 1$ *sia divisibile*
un altro $10^q - 1$, *della stessa forma, è necessario e*
ciente che p *sia multiplo di* q.

2. Teorema. *Se* p *è un numero primo diverso da* 2
$10^{p} - 1$ *è sempre divisibile per* p. (*)

3. Consideriamo ora la frazione *semplice* $\frac{1}{p}$, in cui p
numero primo diverso da 2 e 5: è chiaro (2) che l'e-
lianza

(*) Teorema di FERMAT in un caso particolare. Veggasi la dimostrazione
e dà il BALTZER nei suoi *Elementi di matematica*, p.e 2a, pag. 56.

$$\frac{1}{p} = \frac{m}{10^{p-1} - 1} = \frac{m}{99\ldots9}$$

potrà sempre soddisfarsi e dovrà aversi $mp = 99\ldots9$.

Nel caso in cui esista un'altra frazione $\frac{m_1}{99\ldots9}$, il cui denominatore abbia meno di $p-1$ cifre, ad es. $s-1$, equivalente alla $\frac{1}{p}$, avendosi in pari tempo $\frac{1}{p} = \frac{m}{10^{p-1}-1}$ e $\frac{1}{p} = \frac{m_1}{10^{s-1}-1}$, avverrà che tanto $10^{s-1}-1$ quanto $10^{p-1}-1$ saranno multipli di p: ora dico che se $10^{s-1}-1$ è il minore dei numeri formati da tutte cifre 9 e divisibili per p, si ha che $p-1$ è multiplo di $s-1$. Ed infatti quando ciò non fosse si potrebbe decomporre $10^{p-1}-1$, come già si fece al n.° 1, in due parti una multipla di $10^{s-1}-1$ e l'altra della stessa forma con un numero di cifre 9 minore di $s-1$ che dovrebbe essere divisibile per p, il che contradice all'ipotesi.

Ma se $10^{s-1}-1$ è il primo numero, formato da tutte cifre 9, multiplo di p, $s-1$ esprime chiaramente il numero delle cifre del periodo della frazione decimale periodica in cui si trasforma la frazione ordinaria $\frac{1}{p}$ (e viceversa), per cui si ha il teorema:

Convertendo in decimale una frazione ordinaria semplice $\frac{1}{\mathrm{p}}$, *il cui denominatore* p *è un numero primo, il periodo avrà o* $\mathrm{p}-1$ *cifre od un numero di cifre summultiplo di* $\mathrm{p}-1$.

Osservazione 1.ª – Avendosi la frazione $\frac{1}{p} = \frac{m_1}{10^{s-1}-1}$, con $10^{s-1}-1$ il minore dei numeri formati da tutte cifre 9 e divisibili per p, sarà m_1 il periodo della frazione decimale periodica risultante dalla conversione in decimali di $\frac{1}{p}$, e

ha $10^{\delta-1} - 1 = 999\ldots9 = m_1 p$ se p (che è un numero
ermina per 1, 3, 7, 9, l'ultima cifra del periodo,
m_1, sarà 9, 3, 7, 1 e il periodo stesso sarà multiplo
neno che p non sia 0 3 o 9.

vazione 2.ª – L'ultima cifra del periodo di $\frac{1}{p}$ es-
ta, quando si osservi che i prodotti di 0, 1, 2, 3, 4,
8, 9 per 1, 3, 7, 9 terminano con cifre che sono
ferenti, sarà facile compiere questo periodo senza
alla diretta divisione.

asi ad es. da determinare il periodo della frazione $\frac{1}{79}$.
no a tal uopo le due serie di numeri

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
79,	158,	237,	316,	395,	474,	553,	632,	711

delle quali è formata da 0 e dai primi nove nu-
la seconda è composta da 0 e dai multipli di 79 se-
numeri stessi, quindi osservando che l'ultima cifra
odo a destra dev'essere 1 si dispongano i termini
e serie come qui appresso

79 1
632 8
316 4
632 8
553 7
158 2
158 2
632 8
395 5
474 6
158 2
79 1

cioè che ciascun prodotto sia avanzato di un posto verso sinistra e la loro somma sia un numero formato da tutte cifre 9. I moltiplicatori pei singoli prodotti parziali formeranno evidentemente la parte significativa del periodo. Sarà dunque $\frac{1}{79} = 0,[0126582278481]$.

4. Allorchè nella conversione in decimale di una frazione ordinaria, dopo un certo numero di divisioni si perviene ad un resto d'una sola cifra, si può ricorrere al processo seguente per ottenere rapidamente il periodo.

Sia da ridurre in decimale la frazione $\frac{1}{23}$ e dopo aver trovato la parte 0,043478, del quoziente della divisione, si sia pervenuti al resto 6: si potrà scrivere $\frac{1}{23} = 0,043478 + \frac{1}{10^6} \cdot \frac{1}{23} \cdot 6 =$

$$0,043478 + \frac{1}{10^6} \cdot 0,043478 . 6 + \frac{1}{10^{12}} \cdot \frac{1}{23} \cdot 6 = \text{ecc.},$$

da cui si vede che per ottenere la parte decimale basta aggiungere a 0,043478 il prodotto di questo numero per 0,000006, poi il prodotto del prodotto ottenuto per 0,000006 e così via. L'operazione può disporsi come qui sotto:

$\frac{1}{23} = 0,$	043478	= 043478
	260868	= 043478 × 6
	1565208	= 260868 × 6
	9391248	= 1565208 × 6
	56347488	= 9391248 × 6

$$\frac{1}{23} = 0,[0434782608695652173913]0434\ldots\ldots$$

5. Teorema. – *Se il numero delle cifre del periodo d'una frazione semplice, avente per denominatore un numero primo* p, *è pari ed* $= 2t$, *il resto* t^{esimo} *risultante dalla divisione del numeratore pel denominatore uguaglia il denominatore diminuito dell'unità* e viceversa *se nella con-*

ione in decimale della frazione $\frac{1}{p}$, *si perviene dopo* 1 *di-* *oni al resto* $p-1$, *le cifre del periodo saranno* $2t$.

Infatti essendo $2t$ il numero delle cifre del periodo, p un divisore di $10^{2t}-1$, ossia il quoziente $\frac{10^{2t}-1}{p}$ non alcun resto. Ora avendosi $10^{2t}-1=(10^t+1)(10^t-1)$ con- e che anche $\frac{(10^t+1)(10^t-1)}{p}$ sarà un numero intero, e hè per ipotesi p è primo dovrà l'uno o l'altro dei fat- 10^t+1, 10^t-1 essere divisibile per p. Ciò posto, nella zione di $\frac{1}{p}$ in decimali sia r_t il resto che si ottiene dopo determinato t cifre del quoziente: si potrà scrivere al- $10^t=\text{mul.}\ p+r_t$ con $r_t<p$, quindi $10^t+1=\text{mul.}\,p+(r_t+1)$ $^t-1=\text{mul.}\ p+(r_t-1)$. Segue adunque che almeno od 1 o r_t-1 sarà multiplo di p, e poichè non può esserlo 1, che è minore di p, lo sarà r_t+1, ed avendosi $r_t<p$ e $r_t+1=p$, quindi $r_t=p-1$.

Viceversa nella conversione di $\frac{1}{p}$ in decimali, dopo aver vato t cifre del periodo, si giunga al resto $r_t=p-1$. In- ndo con q il quoziente (considerato intero) ottenuto, si à scrivere $\frac{10^t}{p}=q+(p-1).\frac{1}{p}$, dalla qual relazione risulta se r_h è uno qualsiasi dei resti precedenti r_t, il resto si avrà dopo aver ricavato $t+h$ cifre del quoziente sarà 1) r_h. Ora, per ipotesi, essendo r_h diverso da $p-1$ ed re diverso da 1 (altrimenti il periodo sarebbe senz'altro ato dalle prime h cifre del quoziente), r_h non potrà e che i valori 2, 3, ... $p-2$, e corrispondentemente r_{t+h} lori $p-2$, $p-3$, ... 2, mentre il $2t^{esimo}$ resto sarà 1. La one avrà quindi un periodo di $2t$ cifre.

Corollario I. Dal teorema precedente segue che qua- ue sia r_h si ha sempre $r_h+r_{h+t}=p$, e da questa rela- facendo $h=1, 2, \ldots\ t$, poi sommando:

$$(r_1 + r_2 + \ldots\ldots + r_t) + (r_{t+1} + r_{t+2} + \ldots\ldots + r_{2t}) = pt;$$

onde: *Se il denominatore d' una frazione semplice è un numero primo ed il numero delle cifre del periodo è pari (periodo dualistico), la somma di due resti separati l'uno dall'altro da tanti resti quant' è la metà meno una delle cifre del quoziente, uguaglia il denominatore della frazione e aggiungendo la somma della prima metà dei resti alla somma dell' altra metà, si ha per risultato il prodotto del denominatore della frazione pel numero delle cifre del semiperiodo.*

Corollario II. La relazione $\frac{10^t}{p} = q + (p-1)\frac{1}{p}$, dalla quale deducesi l'altra: $\frac{10^{2t}-1}{p} = q \cdot 10^t + \left[(10^t - 1) - q\right]$, mostra che dopo avere ottenuto le t prime cifre $q_1 q_2 \ldots q_t$ del quoziente, con che il resto è $p-1$, per avere le rimanenti cifre del periodo $q_{t+1}, q_{t+2}, \ldots q_{2t}$, basta formare il complemento a 9 di quelle ricavate innanzi, ossia *la somma delle cifre del periodo che occupano lo stesso rango nel rispettivo semiperiodo è costante ed uguale a* 9.

6. La proposizione precedente ha un valore pratico notabile in quanto consente in un caso frequente di completare rapidamente il periodo di una frazione assegnata. Così ad es: per la frazione $\frac{1}{137}$, intrapresa la divisione dell'unità e zeri per 137, si giunga, dopo avere ottenuto il quoziente 0,0072, ad un resto $136 = p - 1$: si dovrà concludere che il semiperiodo è già ottenuto, e per completare il periodo basterà formare i complementi a 9 delle singole cifre del semiperiodo incominciando dalla sinistra, si dovrà quindi avere $\frac{1}{137} = 0, [00729927]$.

7. Per trovare tutte le frazioni $\frac{1}{p}$ che ridotte in decimali periodiche originano un periodo *dualistico*, si può osser-

are che chiamando $2t$ il numero delle cifre del periodo, p dovrà ssere un divisore di $10^{2t} - 1$, ed avendosi $10^{2t} = (10^t + 1)(10^t - 1)$ i divisori di $10^t - 1$ dando luogo a periodi di t cifre, p on potrà essere che un divisore di $10^t + 1$. Per questa cerca converrà dunque trovare tutti i divisori di 101, 001, 10001, 100001, ... Detto poi d uno di questi divisori e posto $p = \frac{10^t + 1}{d}$, potendosi allora scrivere:

$$\frac{1}{p} = \frac{d.(10^t - 1)}{10^{2t} - 1} = \frac{(d - 1).\,10^t + [(10^t - 1) - (d - 1)]}{10^{2t} - 1},$$

vede che le prime t cifre del numero $d - 1$ saranno le rime t cifre del periodo. Così ad es: avendosi $10^4 + 1 =$. 137 e 73 e 137 non essendo divisori di $10^3 + 1$, $10^2 + 1$ e $10^1 + 1$ ed essendo gli unici divisori di $10^4 + 1$ perchè primi, onsegue che le due sole frazioni a periodo dualistico di 8 fre saranno $\frac{1}{73}$ e $\frac{1}{137}$ e il semiperiodo per la prima sarà 36 e per la seconda 0072, talchè si avrà immediatamente (6):

$\frac{1}{73} = 0,[01369863]$ e $\frac{1}{137} = 0,[00729927]$.

8. Teorema. *Se alla frazione $\frac{1}{p}$ corrisponde, qualunque sia* p, *un periodo di* s *cifre ad ogni altra frazione ura irreducibile di ugual denominatore corrisponderà un eriodo dello stesso numero di cifre.*

Infatti poichè ad $\frac{1}{p}$ corrisponde un periodo di s cifre si vrà: $10^s - 1 =$ mul. p e indicando con s' il numero delle fre del periodo corrispondente ad $\frac{m}{p}$ dovrà aversi: $\frac{m}{p} = \frac{n}{10^{s'} - 1}$. Ora s' non può essere minore di s, perchè essendo $\frac{m}{p}$ una frazione irreducibile, l'eguaglianza precedente mostra che $10^{s'}-1$ deve essere multiplo di p, onde non sarebbe più s il minor numero per cui 10^s-1 è multiplo di p. Così s' non può essere maggiore di s perchè posto $10^s-1=ph$ risulterebbe in ogni caso $\frac{mh}{ph}=\frac{mh}{10^s-1}$ da cui deducesi che il periodo non ha più di s cifre.

9. Teorema. *Se alla frazione* $\frac{1}{p}$, *in cui* p *è un numero primo, diverso da* 2 *e* 5, *corrisponde un periodo di* p − 1 *cifre, alla frazione pura* $\frac{n}{p}$ *corrisponderà un periodo formato dalle stesse cifre.*

Intanto pel teorema prec. alla frazione $\frac{n}{p}$ corrisponde un periodo di $p-1$ cifre come alla data $\frac{1}{p}$. Indicando con $[q_1\, q_2 \ldots q_{k-1}\, q_k\, q_{k+1} \ldots q_{p-1}]$ questo periodo e con r_1, r_2, ... r_{p-1}, r_k, r_{k+1}, ... r_{p-1} i resti successivi della divisione per p di 1.10, $r_1.10$, ... $r_{p-2}.10$ questi resti primieramente dovranno essere tutti disuguali. Ed invero quando fosse $r_h=r_k$ con $h<k<p$, avendosi $10^h=\text{mul}.\,p+r_h$ e $10^k=\text{mul}.\,p+r_k$, sottraendo si ricaverebbe $10^h\,(10^{k-h}-1)=\text{mul}.\,p$ e poichè p è primo con 10^h dovrebb' essere $10^{k-h}-1$ divisibile per p con $k-h<p-1$, e ad $\frac{1}{p}$ corrisponderebbe, contrariamente all'ipotesi, un periodo avente un numero di cifre $<p-1$. Segue da ciò che uno di questi resti, ad es. r_k, sarà necessariamente uguale ad n. Il periodo della frazione $\frac{n}{p}$ dovrà allora essere $[q_{k+1}\, q_{k+2} \ldots q_{p-1}\, q_1\, q_2 \ldots q_k]$.

Osservazione. Disponendo tutte le $p-1$ cifre del periodo di $\frac{1}{p}$, in un dato senso, secondo i punti di divisione in $p-1$ parti uguali d'una circonferenza, e formando quindi tutti i gruppi di $p-1$ cifre che possono ottenersi scrivendo le cifre disposte in giro lungo la circonferenza nel senso considerato, cominciando ciascuna volta da una cifra differente, è chiaro che si avranno tutti i periodi delle frazioni pure di denominatore p. Così avendosi $\frac{1}{7} = 0,\ [142857]$ i periodi di $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ sono a modo d'esempio

$$[2857|14],\ [42857|1],\ [57|1428],\ [7|14285],\ [857|142].$$

Questi periodi si diranno ottenuti per permutazioni circolari da quello della frazione primitiva.

10. Se una frazione pura $\frac{m}{p}$ ha per periodo $[q_1\, q_2 \ldots q_{k-1}\, q_k\, q_{k+1} \ldots q_s]$ e si ha $m' = m.\, 10^k + tp$, dove t indica un numero intero qualsiasi, segue $\frac{m'}{p} = t + \frac{m}{p}\, 10^k$, ossia il periodo della frazione $\frac{m'}{p}$ sarà: $[q_{k+1} \ldots q_s\, q_1\, q_2 \ldots q_k]$, formato cioè con quelle stesse cifre che compongono il periodo della frazione primitiva. Ad es. il periodo della frazione spuria $\frac{726}{13}$ è composto delle cifre stesse che formano quello della frazione pura $\frac{7}{13}$ avendosi $\frac{726}{13} = 2 + \frac{7}{13} . 10^2$, e poichè $\frac{7}{13} = 0,\ [538461]$, sarà $\frac{726}{13} = 55,\ [8641|53]$.

11. Nel caso in cui convertendo $\frac{1}{p}$ in decimali, la frazione periodica risultante abbia il suo periodo di un numero s di cifre minore di $p-1$, sarà (3) s divisore di $p-1$. Pongasi $p-1 = sh$. È facile vedere che in questo caso si ottengono h gruppi di s frazioni i cui periodi differiscono soltanto per permutazioni circolari delle cifre. Ed invero chiamando $1, r_2, r_3 \ldots r_s$ i resti della divisione di $1, 10, 10^2, \ldots 10^{s-1}$ per p, è chiaro che le s frazioni $\frac{r_2}{p}, \frac{r_3}{p}, \ldots \frac{r_s}{p}$ avranno i loro periodi formati da quelle stesse cifre che compongono

il periodo di $\frac{1}{p}$, salvo una permutazione circolare delle medesime. Per ottenere poi un altro gruppo di s frazioni col periodo diverso da quello delle precedenti, basterà scegliere un numero m diverso da $1, r_2, r_3 \ldots r_s$ e $< p$ e procedere alla conversione della $\frac{m}{p}$ in decimali, notando i resti m, $r'_2, r'_3, \ldots r'_s$ ottenuti nella ricerca del periodo. Le frazioni $\frac{r'_2}{p}, \frac{r'_3}{p}, \ldots \frac{r'_s}{p}$ avranno il loro periodo formato con quelle stesse cifre che formano il periodo della $\frac{m}{p}$. Per i gruppi successivi si procederà poi analogamente.

Così ad es. avendosi $\frac{1}{13} = 0,[076923]$, le frazioni $\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \ldots \frac{12}{13}$ potranno distribuirsi nei due gruppi seguenti:

$$\frac{1}{13} = 0,[076923]; \ \frac{10}{13} = 0,[76923|0]; \ \frac{9}{13} = 0,[6923|07]; \ \frac{12}{13} = 0,[923|076];$$
$$\frac{3}{13} = 0,[23|0769]; \ \frac{4}{13} = 0,[3|07692]$$

$$\frac{2}{13} = 0,[153846]; \ \frac{7}{13} = 0,[53846|1]; \ \frac{5}{13} = 0,[3846|15]; \ \frac{11}{13} = 0,[846|153];$$
$$\frac{6}{13} = 0,[46|1538], \ \frac{8}{13} = 0,[6|15384].$$

12. Teorema. — *Se il denominatore* p *d'una frazione semplice* $\frac{1}{p}$ *è il prodotto di due numeri primi* p_1, p_2 *e i numeri delle cifre dei periodi delle tre frazioni* $\frac{1}{p}, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}$ *sono rispettivamente* s, s_1, s_2 *e* p_1 *è diverso da* p_2, s *è il minimo comune multiplo fra* s_1 *ed* s_2.

Avendosi per ipotesi $\frac{1}{p_1} = \frac{m_1}{10^{s_1} - 1}$, $\frac{1}{p_2} = \frac{m_2}{10^{s_2} - 1}$ segue che

$10^{s_1}-1$ sarà multiplo di p_1 e $10^{s_2}-1$ multiplo di p_2. Ora essendo $10^{s_1}-1$ la minor quantità della forma 10^h-1 divisibile per p_1 ogni altra quantità della stessa forma divisibile per p_1 dovrà evidentemente avere per esponente di 10 un numero multiplo di s_1, e analogamente ogni quantitá della forma considerata multipla di p_2 dovrà avere l' esponente del 10 multiplo di s_2. Trovando il minimo comune multiplo s di s_1 ed s_2, si avrà che 10^s-1 è la minor quantità divisibile ad un tempo per i numeri primi p_1 e p_2 e per il loro prodotto p e per conseguenza il periodo della frazione $\frac{1}{p}$ avrà s cifre.

Così ad es. essendo $\frac{1}{13}=0,\left[076923\right]$ e $\frac{1}{73}=0\,,\left[01369863\right]$, ovvero $\frac{1}{13}=\frac{76923}{10^6-1}$ e $\frac{1}{73}=\frac{1369863}{10^8-1}$ ed essendo inoltre 24 il m. c. m. fra 6 ed 8, $\frac{1}{949}=\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{73}$ avrà il suo periodo di 24 cifre; e difatti si ha:

$$\frac{1}{949}=0,\left[001\cdot053\cdot740\cdot779\cdot768\cdot177\cdot028\cdot451\right].$$

Corollario I. — Poichè i valori massimi di s_1 ed s_2 sono rispettivamente p_1-1 e p_2-1, s non potrà mai superare $\frac{(p_1-1)(p_2-1)}{2}$.

Corollario II. — Quando si abbia $s_1=s_2$, sarà anche $s=s_1=s_2$ e per trovare il periodo di $\frac{1}{p}$, basterà o dividere per s_2 quello di $\frac{1}{p_1}$ o per s_1 quello di $\frac{1}{p_2}$ e le divisioni non potranno non compiersi esattamente.

Corollario III. — Quando il denominatore è il prodotto di più di due numeri primi differenti p_1, p_2, ... p_n e siano rispettivamente s_1, s_2, ... s_n le cifre che compongono i periodi delle frazioni $\frac{1}{p_1}$, $\frac{1}{p_2}$ · .... $\frac{1}{p_n}$, posto $p=p_1\cdot p_2\cdots p_n$ e detto s il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{p}$, si ha analogamente che s sarà il m. c. m. di $s_1, s_2, \ldots s_n$ ed in ogni caso s non potrà superare la quantità

$$\frac{(p_1-1)(p_2-1)\ldots\ldots(p_n-1)}{2^{n-1}}.$$

13. Se il denominatore della frazione $\frac{1}{p}$ è il quadrato di un numero primo p_1 il ragionamento del n° prec. non è più applicabile, ma può avvenire che la conclusione a cui si è pervenuti seguiti a sussistere. Ciò si verificherà tutte le volte che $\frac{10^{s_1}-1}{p}$ è ancora un multiplo di p_1, s_1 rappresentando al solito il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{p_1}$, come accade ad es. per la frazione $\frac{1}{9}=\frac{1}{3.3}=0,[1]$. In ogni altro caso il periodo avrà $s_1 p_1$ cifre: ed invero osservando che qualunque sia il numero s delle cifre del periodo di $\frac{1}{p}$, dev'essere s multiplo di s_1; poichè il periodo di $\frac{1}{p_1}$ che chiameremo m_1 non è divisibile per p_1 ma dà un resto r, bisognerà assumere un numero formato da p_1 periodi m_1 prima di giungere al resto 0.

Questo ad es: ha luogo per la frazione

$$\frac{1}{121}=\frac{1}{11.11}=0,\ [0082644228099173553719]$$

il cui periodo come vedesi ha $22=2.11$ cifre, mentre il periodo di $\frac{1}{11}$, che è $[09]$, ha 2 cifre.

Quando fosse $p=p_1^3$ e il periodo m_1 di p_1 non divisibile per p_1, il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{p}$ sarebbe analogamente $s_1 p_1^2$ e così di seguito.

Segue da ciò e da quanto si è detto al n.° 12, che avenlosi $p=p^{\alpha}_1 p^{\beta}_2 p^{\gamma}_3 \ldots$, con p_1, p_2, $p_3 \ldots$ numeri primi diversi, il numero s delle cifre del periodo di $\frac{1}{p}$ non potrà superare in ogni caso la quantità:

$$(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots p_1^{\alpha-1} p_2^{\beta-1} p_3^{\gamma-1}\ldots = p\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\ldots$$

Indicando ora con s_1 il numero delle cifre del periodo li $\frac{1}{p_1}$ e con s' il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{p_1^{\alpha}}$, abbiamo, per quanto si è detto innanzi, che s' è uno dei numeri s_1, $s_1 p_1$, $s_1 p_1^2, \ldots\ldots s_1 p_1^{\alpha-1}$ e poichè $p_1 - 1$ è un multiplo di s_1 (3), avremo anche che $(p_1 - 1)\, p_1^{\alpha-1}$ sarà un multiplo di s'. Analogamente rappresentando con s'' il numero lelle cifre del periodo di $\frac{1}{p_2^{\beta}}$, si troverà che $(p_2 - 1)\, p_2^{\beta-1}$ lev'essere multiplo di s'' e così di seguito.

Ma poichè p_1^{α}, p_2^{β}, $p_3^{\gamma}, \ldots$ sono numeri primi fra loro, potendosi provare analogamente a quanto fu fatto al n° 11 che s uguaglia il minimo comune multiplo di s', s'', s''', ..., avremo infine che la quantità

$$p\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\ldots\ldots,$$

che s'indicherà con $\varphi(p)$ e la quale, com'è noto, rappresenta quanti siano i numeri della serie 1, 2, 3, ... p primi con p, sarà un multiplo di s.

Siamo così condotti alla conclusione che $10^{\varphi(p)} - 1$ è in ogni caso divisibile per p, il che corrisponde alla *generalizzazione del teorema di* FERMAT.

14. A completare l'argomento che ci occupa sarebbe utile la soluzione del problema: *Trovare le frazioni ordinarie semplici con denominatori primi che hanno* 1, 2, 3, 4, 5, 6,... *cifre nel loro periodo, almeno fino ad un certo limite.* La

soluzione di un tale problema si riduce (3) alla ricerca dei divisori primi dei numeri 99, 999, 9999,......

Consimile ricerca diviene in breve di estrema complicazione, però havvi una osservazione che può servire a semplificarla. Vogliansi ad es. determinare i divisori primi di $10^7 - 1 = 9999999$ o di 1111111. Detto d uno di questi divisori, poichè, pel teorema di FERMAT, si ha che $10^{d-1} - 1$ è divisibile per d e d'altra parte per ipotesi anche $10^7 - 1$ è pure divisibile per d, così sarà $d - 1 =$ mul. 7. Nella ricerca dei divisori di 1111111 basta quindi limitarsi a quelli che diminuiti di una unità danno un numero multiplo di 7. I divisori da provare nella serie dei numeri primi saranno quindi: 29, 43, 71, 113, 127, 197, 211, 239, ...

Daremo quì una tabella della scomposizione in fattori primi dei primi 10 numeri della forma $10^t - 1$, ossia:

$9 = 3^2$; $\quad 99 = 3^2.11$; $\quad 999 = 3^3.37$; $\quad 9999 = 3^2.11.101$;

$99999 = 3^2.41.271$; $\quad 999999 = 3^3.7.11.13.37$;

$9999999 = 3^2.239.4649$; $\quad 99999999 = 3^2.11.73.101.137$;

$999999999 = 3^4.37.3336667$; $\quad 9999999999 = 3^2.11.41.271.9091$.

Da questa tabella si deduce che le frazioni a denominatore primo di periodi ad una cifra sono: $\frac{1}{3}$, a due cifre $\frac{1}{11}$, a tre cifre $\frac{1}{37}$, a quattro cifre $\frac{1}{101}$, a cinque cifre $\frac{1}{41}$ e $\frac{1}{271}$, a sei cifre $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{13}$, a sette cifre $\frac{1}{239}$ e $\frac{1}{4649}$, ad otto cifre $\frac{1}{73}$ e $\frac{1}{137}$, a nove cifre $\frac{1}{3336667}$, a dieci cifre $\frac{1}{41}$ e $\frac{1}{9091}$.

A LUGLI.

DIMOSTRAZIONE
DEL TEOREMA DI TOLEMEO
CON METODO INTUITIVO

Tenuto fermo il principio su cui ho fondato la dimostra-
ne di *alcuni teoremi sull' equivalenza stabiliti col me-
intuitivo* (Vedi fascicolo I, Anno II di questo periodico)
mò dimostrare facilmente collo stesso metodo il teorema
Tolemeo, cioè: *Se un quadrilatero è inscritto in un
chio, la somma dei rettangoli contenuti dai lati opposti
quivalente al rettangolo delle diagonali.*

Sia DEFB (Fig. a pag. 176) il quadrilatero inscritto dato;
vuol provare che

$$DB \,.\, EF + DE \,.\, BF = DF \,.\, EB.$$

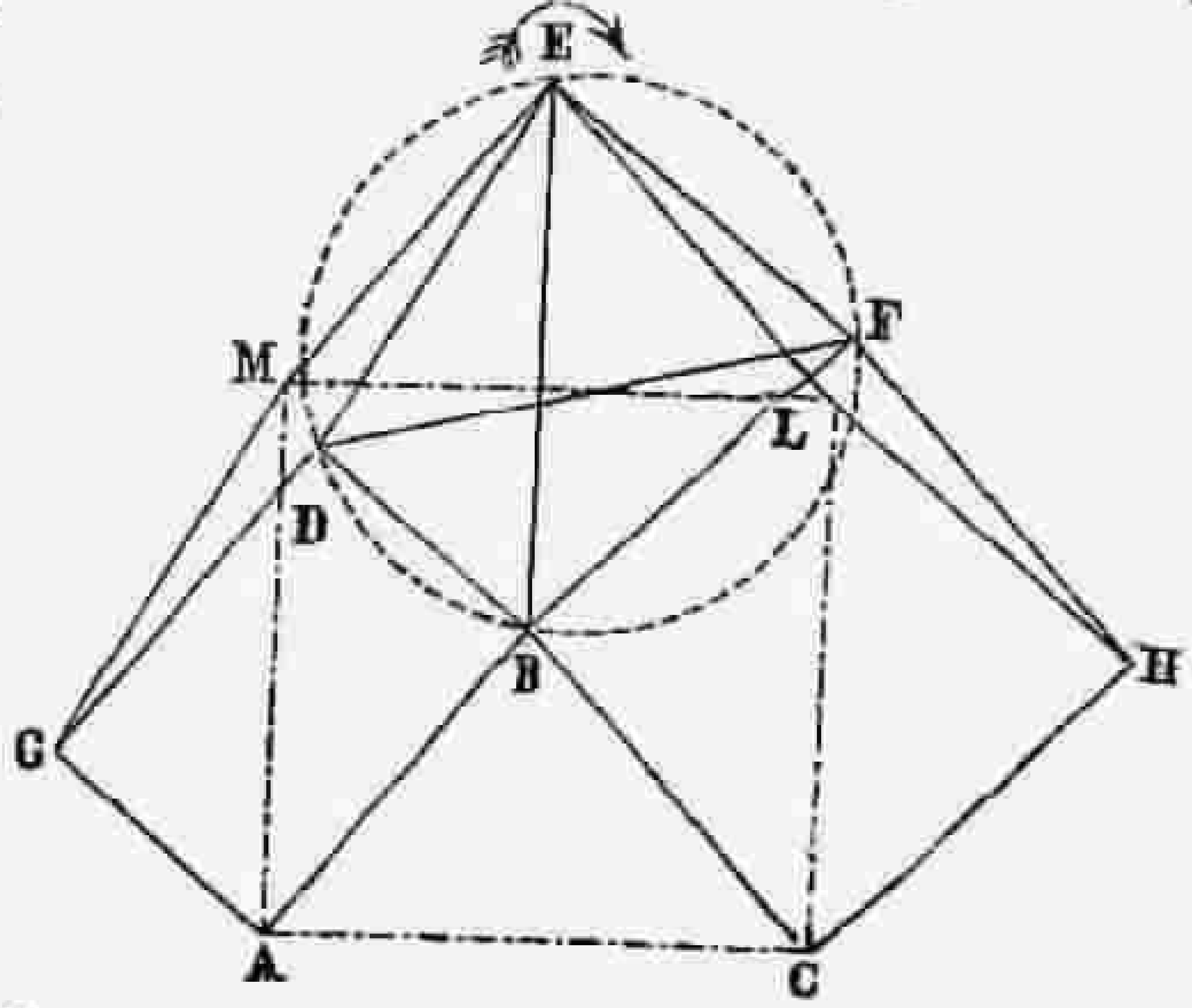
costruiscano sopra due lati adiacenti qualunque, per es.
ra DB e BF i rettangoli DBAG e BCHF, scritti nel primo
nbro dell' eguaglianza precedente; risulterà per ciò

$$BA = EF \;;\; BC = DE$$

'angolo ABC = DEF.

Si riunisca poi A con C, e si compia il parallelogrammo
GM; si riconosce facilmente che il triangolo ABC, è uguale
triangolo FED; inoltre la diagonale EB risulta perpendi-
re alla direzione AC, poichè quando si prolungasse fino
incontrare in N il lato AC del triangolo BAC, gli angoli
, NBA risulterebbero complementari, ma angDBE = DFE
AC, onde sarebbero tali anche gli angoli NBA, BAN.
fatto, si assuma per *quadro* la figura ACHFEMGA
uale essendo *preparato* per il primo membro dell'egua-
nza, avrà coperte le porzioni seguenti: il quadrilatero

EDBF (che supporremo tagliato lungo la diagonale EB); il triangolo ABC e il parallelogrammo EMGD.



Ecco ora le nuove posizioni che debbono assumere nel quadro queste figure, affinchè rimanga scoperta l'area scritta nel 2° membro dell'eguaglianza.

1° Si trasporti il triangolo EBD nella posizione MAG facendo muovere il lato DB parallelamente a sè stesso e scorrendo col vertice D lungo la DG.

2° Dopo avere rovesciato il piano del parallelogrammo MEDG, si faccia ruotare nella direzione della freccia intorno al vertice E, finchè il lato EM coincida con EF.

3° Si trasporti il triangolo EBF in LCH, facendo scorrere F lungo la FH, e la BF parallelamente a sè stessa.

4° Si trasporti il triangolo ABC in MEL, facendo scorrere il lato AC parallelamente a sè stesso mentre gli estremi A e C scorrono rispettivamente sopra AM e CL.

Dopo ciò l'area che rimane scoperta è il rettangolo MLCA, che è appunto quello costruito sulle due diagonali del dato quadrilatero: il teorema è adunque dimostrato.

Corollario I. – Se il quadrilatero fosse un rettangolo, il teorema di Tolemeo equivarrebbe a quello di Pitagora.

La figura 8, tav. 1ª, annessa al fasc. I, (della quale si considera solamente la parte ABQDNA) contiene la dimostrazione del teorema di Pitagora interpretata nel modo stesso di quella del teorema di Tolemeo. La sola differenza stà in ciò che il parallelogrammo, che comparirà nella dimostrazione del teorema di Tolemeo, si riduce, pel teorema di Pitagora, ad una linea retta.

Corollario II. — Il teorema di Tolemeo ci mostra che:

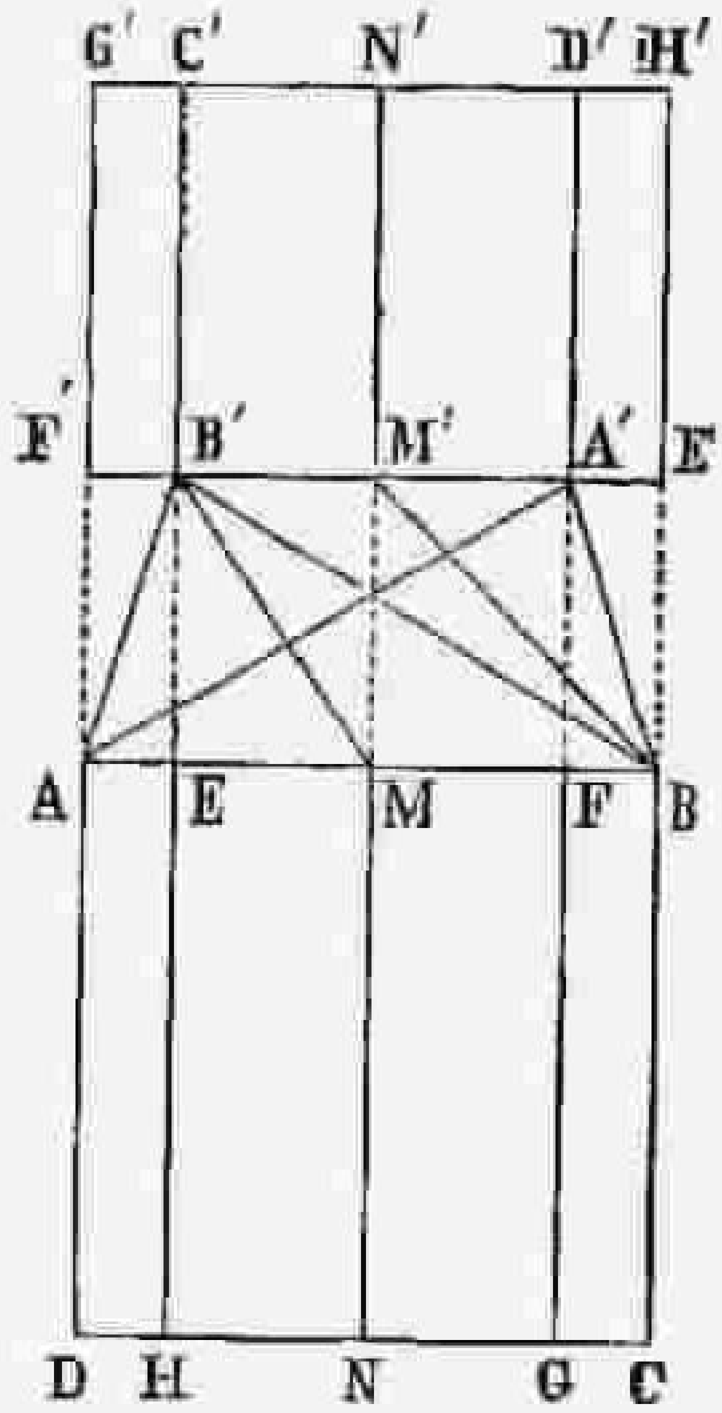
In un trapezio isoscele, il quadrato della diagonale è uivalente al rettangolo delle due basi, aumentato del quaato costruito sopra uno dei lati eguali. Ossia (Fig. seg.):

$$1)\qquad BB'^2 = B'A^2 + AB\ .\ A'B'$$

anche

$$2)\qquad B'B^2 = BA'^2 + A'B'\ .\ AB.$$

ostruendo sulle due basi AB e A'B' rispettivamente i quaati ABCD A'B'C'D' e prolungandone ifficientemente i lati, otterremo i retngoli eguali EFGH, E'F'G'H'.



Dalla semplice ispezione della fiıra si riconosce che questi rettangoli no quelli scritti nei secondi membri :lle relazioni 1) e 2). E poichè il prio è equivalente al quadrato ABCD *minuito* dei due rettangoli eguali EHD e FBCG, e il secondo è equilente al quadrato A'B'C'D' *aumento* dei due rettangoli eguali A'E'H'D', B'C'G', potremo dire che per i triani BB'A e B'BA', hanno luogo rispetvamente le relazioni

$$3)\qquad BB'^2 = AB'^2 + AB^2 - 2AB\ .\ AE$$

$$4)\qquad B'B^2 = A'B^2 + A'B'^2 + 2A'B'\ .\ A'E'.$$

servando poi che AE e A'E' sono le proiezioni di AB' e B fatte rispettivamente su AB e A'B', le relazioni precenti dimostrano i noti teoremi:

Il quadrato costruito sopra un lato di un triangolo, posto ad un angolo acuto, è equivalente alla somma dei adrati costruiti sopra gli altri due lati, diminuita di e volte il rettangolo che ha per lati uno di questi ulni e le proiezioni dell' altro su di esso.

Il quadrato costruito sopra un lato di un triangolo, opposto ad un angolo ottuso, è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sopra gli altri due lati, aumentata di due volte il rettangolo che ha per lati uno di questi ultimi, e la proiezione dell' altro su di esso.

Corollario III. — Il teorema di Tolemeo, applicato al trapezio isoscele, può anche ennunciarsi nel modo seguente:

La differenza fra il quadrato della diagonale e il quadrato di uno dei lati eguali, è equivalente al rettangolo delle due basi.

Ma il rettangolo delle due basi EFGH, (E'F'G'H'), può riguardarsi anche come equivalente al doppio rettangolo EMNH, costruito sopra AB, (A'B') e sulla proiezione EM, (E'M') della retta B'M, (BM') che passa pel punto di mezzo M (M') della base.

E allora il teorema di sopra può ennunciarsi, relativamente al triangolo ABB' (A'B'B), nel modo seguente: *La differenza dei quadrati di due lati di un triangolo qualunque, è equivalente al doppio rettangolo costruito sul terzo lato e sulla proiezione, su questo lato, della mediana ad esso relativa.*

Corollario IV. — Dalle relazioni 3) e 4) e dalla figura a pag. 177, si ricava che la somma dei quadrati dei quattro lati di un trapezio isoscele è equivalente al doppio quadrato della diagonale aumentato del doppio della differenza fra i due rettangoli AEHD e A'E'H'D'. Ma poichè questa doppia differenza è ugnale al quadruplo del quadrato costruito sopra AE, ossia sopra la semidifferenza delle due basi del trapezio, potremo dire (ricordando che la semidifferenza delle due basi di un trapezio è uguale alla retta che unisce i punti di mezzo delle diagonali) che: *La somma dei quadrati dei quattro lati di un trapezio isoscele è equivalente alla somma dei quadrati delle diagonali aumentata di 4 volte il quadrato della retta che unisce i punti di mezzo delle diagonali.*

Viareggio, 5 Aprile 1887.

Angiolo Andreini.

SU ALCUNI TEOREMI

RELATIVI ALLA DIVISIONE ALGEBRICA

La formà del resto della divisione per $x - a$ d'un polinomio P, che, come tutti quelli di cui si parlerà, dovrà intendersi razionale, intero e ordinato per le potenze decrescenti della x, deducesi come corollario dai seguenti teoremi sulla divisione algebrica.

Riteniamo come dimostrato che:

1.° Se P e D sono due polinomi, si possono trovare altri due polinomi Q ed R ordinati rapporto ad x come i precedenti e tali che sia:

$$(1) \qquad P = DQ + R.$$

2.° Se si richiede che R sia di grado inferiore a D è impossibile che si abbia

$$P = DQ' + R'$$

con Q' ed R' differenti da Q ed R. (*)

(*) Non in tutti i trattati è data la dimostrazione di questo teorema che trovasi nell'Algebra del *Bertrand* (trad. del Prof. *Betti*) a pag. 163, nº 142. — È degno però d'esser notato che l'Autore non dimostra e neppure enuncia il teorema che « due polinomi di grado *differente* non possono essere *identici* », mentre sembra che da questo il precedente tragga la sua validità.

Il teorema ora enunciato si riduce facilmente all'altro: « un polinomio

$$a) \qquad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

» non può annullarsi per *ogni* valore di x senza che sia:

$$a_0 = 0\,, \quad a_1 = 0\,, \ \ldots\ldots\ a_n = 0 \text{ »}$$

Eccone qui in succinto una dimostrazione. — Intanto l'equazione $f(x) = 0$ dovendo avverarsi per $x = 0$, ne risulta

$$a_n = 0$$

e

$$b) \qquad x(a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}) = 0.$$

Questa, che è verificata all'evidenza da $x = 0$, sarà soddisfatta qualunque sia x se, per ogni altro valore di x *differente da zero*, si avrà

$$c) \qquad a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots . + a_{n-1} = 0.$$

Indichino x_1 ed $x_1 + y$ $(y \gtrless 0)$ due di *questi* valori. Essendo

Ne viene di conseguenza che, dati P e D, *in qualunque modo* si riesca a stabilire la relazione (1) ed a riconoscere che R è di grado inferiore a D, si potrà sempre riguardare Q come quoziente ed R come il resto della divisione di P per D.

Ciò premesso, supponiamo che sia:

$$(2) \qquad P = P_1 P_2 P_3 \ldots . P_m + a_n$$

ove le P_r sono polinomi ed a_n è una quantità indipendente da x. Diviso ciascun polinomio P_r per D si abbia:

$$P_1 = DQ_1 + R_1 \,, \; P_2 = DQ_2 + R_2 \,, \ldots\ldots P_m = DQ_m + R_m .$$

Sostituendo nella (2) avremo:

$$P = (DQ_1 + R_1)\,(DQ_2 + R_2) \ldots\ldots (DQ_m + R_m) + a_n =$$
$$= DK + R_1 R_2 \ldots . R_m + a_n$$

e se R è il resto (di grado inferiore a D) della divisione di $R_1 R_2 \ldots . R_m$ per D, vale a dire se:

$$R_1 R_2 \ldots R_m = Dq + R$$

$$a_0(x_1 + y)^{n-1} + a_1(x_1 + y)^{n-2} + \ldots + a_{n-2}(x_1 + y) + a_{n-1} =$$
$$= a_0 y^{n-1} + A_1 y^{n-2} + \ldots + A_{n-2} y^2 + A_{n-2} y + (a_0 x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1})$$

e per ipotesi

$$a_0 x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0 \,,$$

si vede che la c) non può esser vera per $x \gtreqless 0$ se per $y \gtreqless 0$ non si abbia:

$$y(a_0 y^{n-2} + A_1 y^{n-3} + \ldots + A_{n-2}) = 0$$

ossia

$$d) \qquad a_0 y^{n-2} + A_1 y^{n-3} + \ldots . + A_{n-2} = 0 .$$

In modo affatto simile si prova che la d) sarà soddisfatta quando per $z \gtreqless 0$ sia:

$$e) \qquad a_0 z^{n-3} + B_1 z^{n-4} + \ldots . + B_{n-3} = 0 \,;$$

e così di seguito, finchè si giunge alla conclusione che dovrà essere,

$$a_0 = 0.$$

In conseguenza la c) prenderà la forma:

$$c') \qquad a_1 x^{n-2} + a_2 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

e con analoghe dimostrazioni si proverà successivamente che deve aversi

$$a_1 = 0 \,, \; a_2 = 0 \,, \ldots . \; a_n = 0.$$

avremo anche

$$P = D\,(K + q) + R + a_n = DQ + (R + a_n)$$

e sarà dunque $R + a_n$ il resto e $Q = K + q$ il quoziente della divisione di P per D. Così, come nell'Aritmetica, « il resto » della divisione per D d'un prodotto di polinomi è uguale » al resto della divisione per D del prodotto dei resti, ecc. »

Sia ora:

$$m = 2, \quad P_1 = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}, \quad P_2 = x$$

donde

$$P = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$
$$= P_1 x + a_n .$$

Se si prende

$$D = x - a$$

si trova

$$P_1 = (x - a)\, Q_1 + R_1 , \quad P_2 = (x - a) + a$$

ed essendo R_1 ed a indipendenti dalla x sarà

$$q = 0 , \quad R = R_1 a$$

ed

$$R + a_n = R_1 a + a_n .$$

Tale è il resto della divisione per $x - a$ del polinomio $P = P_1 x + a_n$. Ma esso è evidentemente formato col resto precedente R_1 e colla quantità a, appunto come P si compone del polinomio P_1 e della x, e poichè si verifica che per $n = 1$ il polinomio $a_0 x + a_1$ dà per resto $a_0 a + a_1$ si conclude in generale che « il resto della divisione di un polinomio » per $x - a$ è i risultato della sostituzione di a ad x in questo polinomio » ecc.

Non è qui il luogo di svolgere le note conseguenze di questo importante teorema, scopo di queste brevi osservazioni essendo stato soltanto il darne un'altra dimostrazione rigorosa che può sostituire quella censurata nelle pagine stesse di questo Periodico (Anno II, pag. 91).

Elcia Sadun.

UN PROBLEMA DI PROBABILITÀ

Da un'urna contenente i 90 *numeri* 1, 2, 3,...... 90, *se ne estraggono* 3 *a caso. Determinare la probabilità che i numeri estratti diano una somma non superiore a* 90.

Il numero dei casi possibili è quello delle combinazioni di 90 elementi diversi a 3 a 3; cioè

$$\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 117480\,;$$

e il numero dei casi favorevoli è quello dei complessi ottenibili col prendere a 3 a 3 i 90 numeri dati ed in maniera che la somma degli elementi di ciascun complesso non sia maggiore di 90. E poichè il più gran numero che possa far parte di tali complessi è evidentemente l'87, è chiaro che il numero dei casi favorevoli eguaglia quello delle somme inferiori o uguali a 90, ottenibili col prendere 3 termini diversi dalla successione indefinita dei numeri naturali. Invece di applicarci direttamente alla ricerca di quest'ultimo numero, risolveremo ora il problema più generale:

Determinare il numero delle somme non superiori ad s, *ottenibili col prendere* r *termini differenti dalla successione indefinita* 1, 2, 3, ...

Rappresentiamo col simbolo $(r,\ s)$ il numero richiesto, e, immaginando le somme formate in guisa da essere gli addendi in ordine ascendente di grandezza, separiamole in classi nel modo seguente: nella 1ª classe siano comprese tutte le somme che cominciano con 1, nella 2ª classe tutte le somme che cominciano con 2, ... nella μ^a classe tutte le somme che cominciano con μ, ecc. Se dalle somme della $\mu.^a$ classe togliamo il primo termine μ, avremo tutte le somme non superiori ad $s - \mu$ ottenibili col prendere $r - 1$ termini diversi dalla successione

$$\mu + 1,\quad \mu - 2,\quad \mu + 3,\ \ldots\ldots\,;$$

e se in quest'ultime somme togliamo da ciascun termine μ

ità, avremo tutte le somme non superiori ad $s - \mu - \mu(r-1)$, ia ad $s - \mu r$, ottenibili col prendere $r - 1$ termini diversi lla successione 1, 2, 3, ...; il numero delle quali sarà ppresentato da $(r-1,\ s-\mu r)$. Tale è quindi il numero lle somme non superiori ad s che formano la μ.ª classe.

Il ragionamento che precede sussiste qualunque sia l'in-ro μ, purchè sia possibile formare con $r - 1$ termini della ccessione 1, 2, 3... almeno una somma non superiore ad $-\mu r$; vale a dire purchè si abbia

$$s - \mu r \geqq 1 + 2 + \ldots + (r-1) = \frac{r(r-1)}{2};$$

n essendo possibile formare con $r - 1$ termini della suc-ssione 1, 2, 3 .... una somma più piccola di $1+2+\ldots\ldots+(r-1)$. questa considerazione risulta che il più grande valore di μ, oè il numero delle classi, è uguale al più grande intero ntenuto in $\frac{s}{r} - \frac{r-1}{2}$. Indicando questo intero con $\mathrm{I}\left(\frac{s}{r} - \frac{r-1}{2}\right)$, considerando che col mutare in $(r-1,\ s-\mu r)$ la μ suc-essivamente in 1, 2, 3, ... $\mathrm{I}\left(\frac{s}{r} - \frac{r-1}{2}\right)$, si ottengono i nu-eri delle somme, non superiori ad s, contenute nella , 2ª, 3ª, ... $\mathrm{I}\left(\frac{s}{r} - \frac{r-1}{2}\right)^{a}$ classe rispettivamente, potremo abilire la relazione

$$(r,\ s) = \sum_{1}^{\mathrm{I}\left(\frac{s}{r}-\frac{r-1}{2}\right)}{}_{\mu}\ (r-1,\ s-\mu r) \ldots\ldots (1)$$

Siamo giunti così a scomporre il numero $(r,\ s)$ in una omma di numeri della forma $(r-1,\ k)$; applicando la (1) a iascuno di questi il numero $(r,\ s)$ verrà scomposto in una omma di numeri della forma $(r-2,\ k)$ ecc., sicchè appli-ando $r - 1$ volte la (1) avremo da ultimo scomposto $(r,\ s)$ in na somma di numeri della forma $(1,\ k)$, ciascuno dei quali guaglia evidentemente il rispettivo k. Così, dal lato teorico, l problema può ritenersi risolto.

Ed ora veniamo al nostro caso particolare nel quale $r = 3$, $s = 90$. Dalla (1) si ha

$$(3,\ 90) = \sum_{\mu}{}_{1}^{29} (2,\ 90 - 3\mu)\,,$$

$$(2,\ 90 - 3\mu) = \sum_{\nu}{}_{1}^{I\left(\frac{89-3\mu}{2}\right)} (1,\ 90 - 3\mu - 2\nu);$$

si ha inoltre

$$\sum_{\nu}{}_{1}^{I\left(\frac{89-3\mu}{2}\right)} (1,\ 90 - 3\mu - 2\nu) = \sum_{\nu}{}_{1}^{I\left(\frac{89-3\mu}{2}\right)} (90 - 3\mu - 2\nu)$$

$$= \sum_{\nu}{}_{1}^{I\left(\frac{89-3\mu}{2}\right)} (90 - 3\mu) - 2 \sum_{\nu}{}_{1}^{I\left(\frac{89-3\mu}{2}\right)} \nu$$

$$= (90 - 3\mu)\ I\left(\frac{89-3\mu}{2}\right) - 2\,\frac{\left[I\left(\frac{89-3\mu}{2}\right) + 1\right] I\left(\frac{89-3\mu}{2}\right)}{2}$$

$$= \left[(89 - 3\mu - I\left(\frac{89-3\mu}{2}\right)\right] I\left(\frac{89-3\mu}{2}\right);$$

quindi

$$(3,\ 90) = \sum_{\mu}{}_{1}^{29} \left[89 - 3\mu - I\left(\frac{89-3\mu}{2}\right)\right]\ I\left(\frac{89-3\mu}{2}\right).$$

Per ridurre ulteriormente questa formola, osserviamo che se a è un intero positivo qualunque si ha sempre

$$a - I\left(\frac{a}{2}\right) = I\left(\frac{a+1}{2}\right).$$

Ed invero se a è della forma 2η abbiamo

$$a - I\left(\frac{a}{2}\right) = 2\eta - \eta = \eta = I\left(\frac{2\eta+1}{2}\right) = I\left(\frac{a+1}{2}\right);$$

e se a è della forma $2\eta + 1$

$$a - \mathrm{I}\left(\frac{a}{2}\right) = 2\eta + 1 - \eta = \eta + 1 = \mathrm{I}\left(\frac{2\eta + 2}{2}\right) = \mathrm{I}\left(\frac{a+1}{2}\right).$$

Inoltre può dimostrarsi facilmente che

$$\mathrm{I}\left(\frac{a}{2}\right)\,\mathrm{I}\left(\frac{a+1}{2}\right) = \mathrm{I}\left(\frac{a^2}{4}\right)$$

distinguendo, come precedentemente il caso di a pari dal caso di a impari; si ha quindi

$$\mathrm{I}\left(\frac{a}{2}\right)\left[a - \mathrm{I}\left(\frac{a}{2}\right)\right] = \mathrm{I}\left(\frac{a^2}{4}\right).$$

Applicando questo risultato generale alla espressione di $(3, 90)$ si trova la formola più semplice

$$(3, 90) = \sum_{1}^{29}{}_{\mu}\ \mathrm{I}\left(\frac{(89 - 3\mu)^2}{4}\right),$$

che può calcolarsi nel seguente modo.

Alla μ che deve assumere i valori $1, 2, \ldots, 29$, si sostituiscano separatamente i numeri pari $2, 4, \ldots, 28$, e i numeri impari $1, 3, \ldots, 29$; si avrà così

$$(3, 90) = \sum_{1}^{14}{}_{\eta}\ \mathrm{I}\left(\frac{[89 - 3(2\eta)]^2}{4}\right) + \sum_{1}^{15}{}_{\eta}\ \mathrm{I}\left(\frac{[89 - 3(2\eta - 1)]^2}{4}\right)$$

$$= \sum_{1}^{14}{}_{\eta}\ \mathrm{I}\left(\frac{89^2}{4} - 3.89\eta + 9\eta^2\right) + \sum_{1}^{15}{}_{\eta}\ \mathrm{I}\left(\frac{92^2}{4} - 3.92\eta + 9\eta^2\right)$$

$$= \sum_{1}^{14}{}_{\eta}\ (1980 - 267\eta + 9\eta^2) + \sum_{1}^{14}{}_{\eta}\ (2116 - 276\eta + 9\eta^2)$$

$$+ 2116 - 276.15 + 9.15^2$$

$$= \sum_{1}^{14}{}_{\eta}\ (4096 - 543\eta + 18\eta^2) + 1$$

$$= \sum_{\eta=1}^{14} 4096 - 543 \sum_{\eta=1}^{14} \eta + 18 \sum_{\eta=1}^{14} \eta^2 + 1 = 18600.$$

Dalla successione indefinita dei numeri naturali, o, ciò che torna lo stesso, dalla successione dei primi 90 numeri naturali, possono dunque prendersi in 18600 modi diversi tre numeri differenti e tali che la loro somma non sia maggiore di 90. La probabilità richiesta è pertanto $\frac{18600}{117480} = \frac{155}{979}$; compresa cioè tra $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{7}$.

Indicando con $[r, s]$ il numero delle somme uguali ad s ottenibili col prendere r numeri diversi dalla successione indefinita dei numeri naturali, mediante considerazioni analoghe a quelle che abbiamo fatto intorno al numero (r, s), possiamo dimostrare che la (1) è vera anche pel numero $[r, s]$; vale a dire che

$$[r, s] = \sum_{\mu=1}^{\mathrm{I}\left(\frac{s}{r} - \frac{r-1}{2}\right)} [r-1,\ s-\mu r].$$

Coll'applicazione successiva di questa formola sarà possibile decomporre $[r, s]$ in una somma di termini della forma $[1, k]$, ciascuno dei quali eguaglia evidentemente l'unità. Resta così risoluto direttamente il problema di determinare in quante maniere diverse un dato numero s può essere la somma di r differenti numeri della successione 1, 2, 3 ...... (V. Eulerii — *Introductio ad Analisin Infinitorum.* — Cap. 16).

Giuseppe Nonni.

IMOSTRAZIONE DEL 1° e 3° DEI TEOREMI ENUNCIATI a PAG. 156. (*)

I punti d'incontro delle altezze di due triangoli omogici aventi i lati corrispondenti perpendicolari fra loro, no equidistanti dall'asse di omologia.

F. SAUVE.

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi.*

Siano ABC, $A'B'C'$ i triangoli, H, H' i punti d'incontro elle loro altezze, A_1, B_1, C_1 le intersezioni dei lati corrisponenti e precisamente $AB.A'B' \equiv C_1$, $BC.B'C' \equiv A_1$, $CA.C'A' \equiv B_1$, uindi $A_1B_1C_1$ l'asse di omologia; sia O il centro d'omologia, ano a, b, c, a', b', c' i piedi delle perpendicolari condotte O sulle rette BC, CA, AB, $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ e O_1, O_2, O_3, O'_1, O'_2, O'_3 i punti simmetrici di O rispetto alle stesse rette.

Essendo nell'omologia individuata dai due triangoli a, b, c unti limiti della prima figura, essi sono allineati sulla retta mite della prima figura, e $a'b'c'$ è la retta limite della seonda; queste rette sono perciò parallele all'asse d'omologia l equidistanti dalla parallela che divide per metà la dianza tra il centro e l'asse d'omologia: di qui agevolmente deduce che le due terne di punti O_1, O_2, O_3 e O'_1, O'_2, O'_3 no situate su due rette parallele all'asse di omologia e da so equidistanti.

Essendo i quadrangoli $OCab$, $OBac$ inscrittibili e le terne punti A, C, b; A, B, c; a, b, c per diritto, si hanno l'eaglianze d'angoli:

$$2OCA = 2OCb = 2Oab = 2Oac = 2OBc = 2OBA\,,$$

alle quali si deduce che $2OCA = 2OBA$, ossia che O è sulla rconferenza ABC; analogamente si dimostra che O trovasi ure sulla circonferenza $A'B'C'$.

Le circonferenze BCO_1, ACO_2, eguali ad ABC, passano er H (**); perciò tenendo calcolo che i quadrangoli OABC, O_1HBC, O_2HAC sono inscrittibili, e ricordando le proprietà elle rette simmetriche rispetto ad un asse, si stabiliscono seguenti eguaglianze d'angoli:

$$2CHO_1 = 2CBO_1 = 2OBC = 2OAC = 2CAO_2 = 2CHO_2$$

(*) Per abbondanza di materia si rimanda al prossimo fascicolo la dimorazione del secondo dei teoremi alla stessa pagina.

(**) Cfr. *Baltzer*. Piani. § 6, 9 nota.

perciò $2CHO_1 = 2CHO_2$ e quindi H giace sulla retta $O_1O_2O_3$; analogamente H' giace sulla $O'_1O'_2O'_3$. E così resta dimostrato che H, H' sono equidistanti dall'asse di omologia (*).

I cerchi aventi per diametri le tre mediane di un triangolo hanno due a due per assi radicali le tre altezze.

S. Rindi.

Dimostrazione del Sig. *Ignacio Beyens* Capitano del Genio a Cadice (**).

Siano AA', BB', CC' le tre mediane del triangolo ABC; AM, BN, CP le tre altezze. I cerchi che hanno per diametri le mediane AA', BB' passeranno per M, N ed avranno per centri i punti medî O_1, O_2 di AA' e BB' e poichè si vede subito che la retta O_1O_2 è parallela ad AB, l'asse radicale di questi due cerchi, perpendicolare ad O_1O_2, sarà perpendicolare ad AB.

Ora i triangoli simili AMC, BNC danno AC: BC = CM: CN, da cui AC.CN = BC.CM od anche CB'.CN = CA'.CM; il punto C ha dunque la stessa *potenza* rispetto ai cerchi O_1, O_2 onde l'asse radicale passerà per C e coinciderà con l'altezza CP del triangolo ABC. In modo simile si dimostrerebbe che BN è l'asse radicale dei cerchi aventi per diametri AA', CC' ed ed AM quello dei cerchi aventi per diametri BB', CC'.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Cours de mathématiques spéciales, par G. de Longchamps, *professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, avec un supplément. vols. 4. Paris, librairie Ch. Delagrave,* 1885.

Vogliamo segnalare all'attenzione dei professori delle nostre scuole secondarie questo *corso* di matematica (***), quantunque

(*) Il Prof. *Viaggi* ha mandato anche un'altra dimostrazione di questo stesso teorema.

(**) Altre dimostrazioni pervennero dai Sig.ri Prof.ri *F. Viaggi, G. Russo, F. Panizza, G. Riboni.*

(***) Di esso si occupò già con parole di vivo encomio l'*Educational Times*.

ial campo elementare, pei suoi grandi pregi: partico-
ite pel rigore al quale è informato, per la chiarezza
sposizione e per contenere molte delle più recenti ri-
di analisi algebrica e geometrica.
intera opera, divisa in lezioni, consta di tre parti di
notevole e di un supplemento: la 1ª parte riguarda
bra, la 2ª la *geometria analitica a due dimensioni*, la
geometria analitica a tre dimensioni. Il supplemento,
mpleta le nozioni di calcolo infinitesimale che trovansi
parte 1ª, tratta delle serie, degli infinitesimi, contiene
e nozione sull'integrale definito, la determinazione di
quadrature e finalmente tratta brevemente delle diffe-
finite e dell'interpolazione.
autore poi, con grande opportunità, ha voluto con un
segno introdurre distinzione fra equazione ed identità,
ndo i due membri di quest'ultima non col ordinario
d'uguaglianza, ma con tre lineette orizzontali la me-
lle quali più breve e meno appariscente (per non ge-
confusione col segno di congruenza). Di tale distin-
non vi sarà certo alcuno che non riconosca l'impor-
specialmente didattica.
lettore troverà in questi volumi non solo le teoriche
compongonsi gli ordinarii libri di algebra complemen-
geometria analitica, ma potrà rintracciarvi non poche
già disseminate nei più riputati periodici di matema-
ubblicazioni accademiche, ecc., diversi teoremi poco
d ovunque poi un certo sapore d'originalità ed una
za ammirevole.
sì nel vol. 1° (algebra), troviamo, fra le altre, una
deduzione della formola di *Waring* per la somma delle
e p^{esime} delle radici d'una equazione di 2° grado, una
deduzione della serie che caratterizza il numero e,
no svolto, nella sezione che tratta dei determinanti,
ema di *Rouchè* e in principio della teoria delle equa-
dimostrazione di *Walecki* del teorema che ogni equa-
algebrica ha una radice, finalmente in questa teoria i
portanti metodi e teoremi che vi si riferiscono, ossia
che portano i nomi di *Eulero*, *Sylvester*, *Bezout*,
y, *Newton*, *Maclaurin*, *Lagrange*, *Rolle*, *Sturm*,
te, *D'Alembert*. Ne va tacciuto che l'autore ha ri-

corso frequentemente in questo volume a rappresentazioni geometriche per illustrare certe funzioni (esponenziale, logaritmica, derivata,....).

Nel 2° e 3° volume dedicato alla geometria analitica del piano e dello spazio vengono sviluppate oltre alle teorie ed ai metodi classici, anche le più moderne teorie geometriche; così nel vol. 2° trattasi dei fasci armonici, della potenza di un punto, degli assi radicali, delle polari, delle proprietà generali delle figure trasformate per omotetia, omografia ed omologia, inoltre relativamente alle coniche sono sviluppati i teoremi più celebri, ossia di *Cartesio*, *Maclaurin*, *Pappo*, *Chasles*, *Pascal*, *Brianchon*, *Newton*, *Carnot*, e vi è studiata la loro trasformazione omografica. Vogliamo poi fare particolare menzione del teorema di *Joachimstal*, svolto in questo volume, di cui si ha una generalizzazione simultaneamente trovata dal *Laguerre* e dal nostro autore.

In due lezioni della geometria del piano troviamo uno studio sommario di alcune curve celebri ossia la cissoide e la strofoide retta ed obliqua, la concoide di retta o concoide di Nicomede, la concoide di cerchio o lumaca di Pascal, l'ovale di Cassini, la lemniscata di Bernoulli, le ovali di Cartesio. Per ciascuna di esse dopo la definizione è ricavata l'equazione, insegnata la costruzione della curva e quella della tangente in un dato punto. Per alcune poi in altra lezione sono studiate diverse proprietà caratteristiche.

Ci piace anche avvertire il lettore che lo studio delle quadriche è condotto non soltanto sull'equazione generale, ma ben anche su quella ridotta, con molta eleganza e secondo le più recenti cognizioni sull'argomento.

Ogni lezione è seguita da numerosi esercizi, molti dei quali originali, molti ricavati dalle collezioni di pubblicazioni matematiche, col nome degli autori, e (si può ben dire) tutti singolarmente importanti.

Termina l'opera la raccolta dei temi di concorso, per le matematiche, alla Scuola Politecnica (dal 1837 al 1884), dei temi d'esami scritti dati alla Scuola Normale Superiore (dal 1870 al 1884), alla Scuola Centrale (dal 1880 al 1884) e dei temi per gli esami di aggregazione delle Scienze matematiche (dal 1859 al 1884).

A. Lugli

FRATTINI (G.) — Aritmetica pratica ad uso delle Scuole elementari — Roma, Eredi Botta, 1887 — p. IV, 76 — Cent. 75.

Anche questo piccolo libro del Prof. Frattini esce dal campo dell'insegnamento secondario essendo destinato, come dice il titolo, agli alunni delle Scuole elementari. Pur non ostante ne vogliamo parlare perchè ci allieta l'animo vedere come l' attività dei nostri professori delle Scuole secondarie cominci ad estendersi anche alle elementari, portando il contributo di studii superiori all'opera modesta ma difficoltosa e mportante dell'educazione infantile.

Questo lavoro del Prof. Frattini può considerarsi più che ltro come un libricciuolo contenente la parte complementare legli studi elementari e non è altro che la IV parte di un' peretta le cui tre prime parti son destinate alle classi elementari, dalla 1ª alla 3.ª Esce dalla solita falsariga e deve ver costato non piccola fatica all'A. Consta di tre capi che comprendono le più fondamentali cognizioni di geometria piana e solida, necessarie all' alunno che aspira alla licenza elementare, uno sviluppo notabile dell' algoritmo delle frazioni e la trattazione dei problemi semplici d' interesse, di partizione e di miscuglio col metodo di riduzione all' unità.

Sotto l'apparenza modesta d'un libro ispirato al metodo *ntuitivo*, l' A., specialmente a piè di pagina, aggiunge spesso uccinte ma buone dimostrazioni e in ciò ha ecceduto forse più del bisogno. Ma notevole più di tutto è l'intimo legame he l'A. ha saputo introdurre fra le concezioni geometriche le operazioni aritmetiche, facendo scaturire una genesi coretta e assai comprensiva di queste.

Ricca ed originale è la raccolta di esercizi proposti nel corso dell'operetta, taluni presentanti anche qualche difficoltà.

Noi più che fiducia nutriamo certezza che il libro di cui parola incontrerà la più favorevole accoglienza.

A. LUGLI.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par *Gustav Eneström.* Stockholm, 1887; N. 3.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lèvy*, Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 2e série. Onzième année. N. 9, 10. Paris, 1887.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*. 12e Année. N. 1, 2, 3. Paris, M. Nony, 17 Rue des Écoles, 1887.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira*. Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VIII, n. 1. Coimbra, 1887.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome septième, Octobre 1887.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tomo 1.° Palermo, 1887.

Rivista didascalica. Organo della società didascalica italiana. — Anno I, fasc. 5, 6, 7. Roma, 1887.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XIX. N. 13, 14, 15, 16, 17. Firenze, 1887.

AMANZIO (D.) — Trattato di aritmetica teorica. — Napoli, Aniello Eugenio, 1877.

BERTINI (E.) Costruzione delle omografie di uno spazio lineare qualunque. (Rend. Ist. lombardo, 1887). — Sulla scomposizione di certe omografie in omologie (Rend. Acc. delle scienze, Torino 1887).

BIANCHI (L.) — Sui sistemi doppiamente infinti di raggi (Annali di Matematica 1887).

CASTELNUOVO (G.) — Studio sulla omografia di seconda specie (Atti Ist. veneto 1887).

CELI (G.) — *Elementi di Agrimensura* compilati a seconda dei programmi governativi per le scuole pratiche di Agricoltura. Ditta G. B. Paravia e comp. 1887.

FAIFOFER (A.) — *Trattato di aritmetica pratica* ad uso del Ginnasio inferiore e delle Scuole tecniche (1.° biennio); 8a edizione rifatta. Venezia, 1887.
—— *Trattato di geometria intuitiva* ad uso delle scuole tecniche e normali; 18a edizione rifatta. — Venezia, 1887.

FRATTINI (G.) — *Aritmetica pratica* ad uso delle scuole elementari del Regno. Parte IV. — Roma, Eredi Botta, 1887.

LORIA (G.) — Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Ermanno Loescher, 1877.

MARCOLONGO (R.) — Sull' analisi indeterminata di 2° grado. (Nota 1a). — Su di un teorema di algebra elementare (Giornale di Matematiche, Napoli, 1887).

PESCI (G.) — Sulle sfere circoscritte ai tetraedri formati da *n* piani. — Sulla deviazione meridionale dei gravi (Livorno 1887).

VIGARIÉ (E.) — Sur les points complémentaires (1887).

VOLTERRA (V.) — Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni (Rend. Acc. Lincei 1887). — Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari. — Parte prima. (Memorie della società italiana delle scienze detta dei XL. — Napoli, 1887).