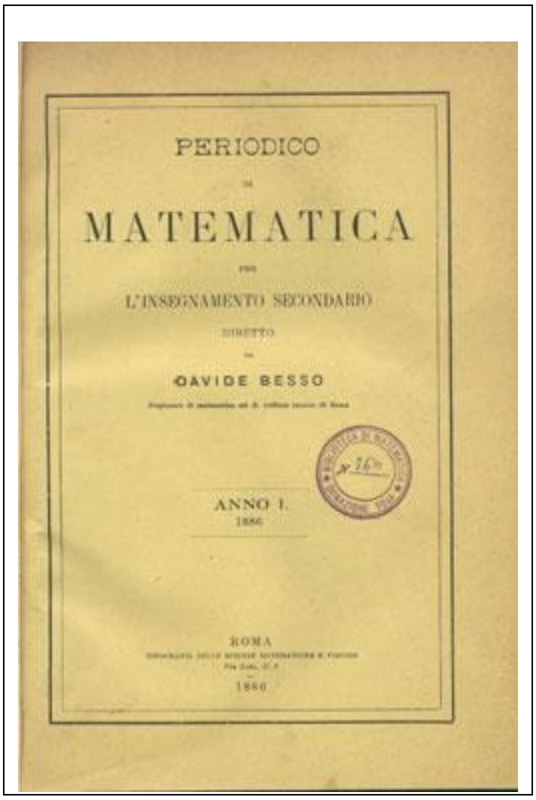


Copertina originale del vol. 1 del 1886

Indice Articoli Anno 1886

SUL TETRAEDRO A FACCE EGUALI

Fra i tetraedri particolari sono notevoli quelli che hanno gli spigoli opposti a due a due eguali, e quelli in cui gli spigoli opposti sono a due a due perpendicolari. Nei primi sono fra loro eguali le quattro facce, e quindi le quattro altezze, nei secondi le quattro altezze passano per uno stesso punto. La proprietà, da ultimo menzionata, è dimostrata nel trattato del *Baltzer*, insieme alla sua inversa; altre proprietà del tetraedro in cui le quattro altezze passano per uno stesso punto, sono esposte in una Memoria pubblicata nel 1838 dal Sig. *Michele Reiss*, (*) ed anche in un recente lavoro del Sig. *Gellenthin*. (**)

Nel presente scritto sono esposte alcune proprietà del tetraedro a facce eguali.

I.

1. S'indichino con S, A, B, C i quattro vertici d'un tetraedro, e pongasi:

$$SA = a,\ SB = b,\ SC = c,\quad BC = a_1,\ CA = b_1,\ AB = c_1,$$

$$\text{ang}\, BSC = \alpha,\quad \text{ang}\, CSA = \beta,\quad \text{ang}\, ASB = \gamma,$$

$$\text{area}\, ABC = S_0,\ \text{area}\, SBC = S_1,\ \text{area}\, SCA = S_2,\ \text{area}\, SAB = S_3,$$

$$\text{diedro}\, SA = A,\quad \text{diedro}\, SB = B,\quad \text{diedro}\, SC = C,$$

$$\text{diedro}\, BC = A_1,\ \text{diedro}\, CA = B_1,\ \text{diedro}\, AB = C_1,$$

$$\cos A = \lambda,\quad \cos B = \mu,\quad \cos C = \nu,$$

$$\cos A_1 = \lambda_1,\ \cos B_1 = \mu_1,\quad \cos C_1 = \nu_1.$$

(*) *Essai analytique et géometrique*, par Michel Reiss (*Correspondance Mathématique et physique* publiée par A. Quetelet, Bruxelles, 1838).

(**) H. Gellenthin. *Ueber einige Eigenschaften des Tetraeders* (*Archiv der Mathematik und Physik*, gegründet von I. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe, Leipzig 1885).

Si hanno, com'è noto, le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= S_1\lambda_1 + S_2\mu_1 + S_3\nu_1 \\ S_1 &= S_0\lambda_1 + S_2\nu + S_3\mu \\ S_2 &= S_0\mu_1 + S_1\nu + S_3\lambda \\ S_3 &= S_0\nu_1 + S_1\mu + S_2\lambda \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

le quali si dimostrano facilmente projettando ciascun vertice sul piano della faccia opposta, ed applicando il teoréma sul rapporto dell'area d'un triangolo a quella della sua projezione.

Moltiplicando queste quattro equazioni ordinatamente per S_0, S_1, S_2, S_3, poi dalla somma di due delle risultanti togliendo la somma delle altre due, si ottengono le:

$$\left.\begin{aligned} S_0^2 + S_1^2 - 2S_0S_1\lambda_1 &= S_2^2 + S_3^2 - 2S_2S_3\lambda \\ S_0^2 + S_2^2 - 2S_0S_2\mu_1 &= S_1^2 + S_3^2 - 2S_1S_3\mu \\ S_0^2 + S_3^2 - 2S_0S_3\nu_1 &= S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\nu \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

che sono relazioni fra le aree delle quattro facce e i coseni di due diedri opposti.

2. È noto che la funzione:

$$M = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

è sempre positiva, e che, indicando con V il volume del tetraedro, si ha:

$$\begin{aligned} 36V^2 &= a^2b^2c^2 \operatorname{sen}^2\beta \operatorname{sen}^2\gamma \operatorname{sen}^2 A \\ &= a^2b^2c^2M, \end{aligned}$$

ed anche

$$\begin{aligned} 144V^2 = 4Ma^2b^2c^2 = {} & a^2a_1^2(b^2+b_1^2+c^2+c_1^2-a^2-a_1^2)+b^2b_1^2(a^2+a_1^2+c^2+c_1^2-b^2-b_1^2)+ \\ & +c^2c_1^2(a^2+a_1^2+b^2+b_1^2-c^2-c_1^2)-(a^2c^2b_1^2+b^2a^2c_1^2+c^2b^2a_1^2+a_1^2b_1^2c_1^2) \quad (*) \end{aligned}$$

Rammento inoltre che, indicando con R il raggio della sfera circoscritta al tetraedro, si ha:

$$576V^2R^2 = (aa_1+bb_1+cc_1)(bb_1+cc_1-aa_1)(cc_1+aa_1-bb_1)(aa_1+bb_1-cc_1).$$

(*) Eguagliando a zero quest'espressione si ottiene la nota relazione fra le distanze di quattro punti d'un piano.

II.

3. **Se un tetraedro ha gli spigoli opposti a due a due eguali, le quattro facce sono eguali; e reciprocamente.**

L'eguaglianza dei quattro triangoli SAB, SBC, SCA, ABC è un'immediata conseguenza dell'ipotesi: $a=a_1$, $b=b_1$ $c=c_1$.

Dall'eguaglianza dei triangoli SAB, ABC risulta: $a=a_1$, $b=b_1$; oppure: $a=b_1$, $b=a_1$. Nel secondo caso i triangoli SAC, SBC sarebbero isosceli, e dalla loro eguaglianza risulterebbe ancora: $a=a_1$, $b=b_1$. Perciò l'eguaglianza delle quattro facce implica quella degli spigoli opposti.

4. **Se i diedri opposti di un tetraedro sono a due a due eguali, le quattro facce sono eguali; e reciprocamente.**

Poichè i diedri SA, AC sono rispettivamente eguali ai diedri BC, SB, e il diedro AB è comune ai due triedri di vertici A e B, gli angoli SAB, SBA saranno rispettivamente eguali agli angoli ABC, CAB; e in conseguenza saranno eguali i due triangoli SAB, ABC. Similmente si dimostrerà l'eguaglianza degli altri triangoli.

Suppongasi ora che sieno fra loro eguali le quattro facce, e quindi (3) gli spigoli opposti. Dai triedri di vertici A e B si ricaverà l'eguaglianza dei diedri SA, BC, e dei diedri AC, SB; e similmente dai triedri di vertici B e C si ricaverà l'eguaglianza dei diedri AB, SC.

5. **Se un tetraedro ha le facce eguali, queste devono essere triangoli acutangoli; e reciprocamente, dato un triangolo acutangolo, si può sempre costruire un tetraedro colle quattro facce ad esso eguali.**

Se le quattro facce sono eguali, i tre angoli del triangolo ABC sono rispettivamente eguali ai tre angoli del triedro S, epperciò ciascuno di essi è minore della somma degli altri due.

Ora sia dato un triangolo acutangolo ABC. Poichè la somma di due dei tre angoli BAC, CBA, ACB è maggiore del terzo, e la somma di tutti e tre è minore di 360°, si potrà costruire un triedro S (A′ B′ C′) coi tre angoli B′SC′, C′SA′, A′SB′ rispettivamente eguali agli angoli BAC, CBA, ACB; poi, presi sugli spigoli i segmenti SA′ = BC, SB′ = CA, SC′ = AB, è chiaro che risulterà B′C′ = BC, C′A′ = CA, A′B′ = AB, e che in conseguenza il tetraedro SA′B′C′ avrà le quattro facce eguali al triangolo ABC.

6. **Se le quattro facce d'un tetraedro sono equivalenti esse devono essere eguali.**

Dalle equazioni:

$$S_0^2 + S_1^2 - 2S_0S_1\lambda_1 = S_2^2 + S_3^2 - 2S_2S_3\lambda$$
$$S_0^2 + S_2^2 - 2S_0S_2\mu_1 = S_1^2 + S_3^2 - 2S_1S_3\mu$$
$$S_0^2 + S_3^2 - 2S_0S_3\nu_1 = S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\nu$$

dimostrate al N. 1, posto:

$$S_0 = S_1 = S_2 = S_3,$$

si ricava:

$$\lambda_1 = \lambda, \ \mu_1 = \mu, \ \nu_1 = \nu,$$

le quali provano l'eguaglianza dei diedri opposti, e quindi (4) il teorema enunciato.

7. **Nel tetraedro a facce eguali la somma dei coseni dei diedri adiacenti ad una stessa faccia, è, per ciascuna faccia, eguale all'unità.**

Questa proposizione risulta immediatamente dalle equazioni (1) del N. 1, quando vi si ponga:

$$S_0 = S_1 = S_2 = S_3.$$

8. **Se la somma dei coseni dei diedri adiacenti ad una stessa faccia d'un tetraedro è, per tre facce di esso, eguale all'unità, il tetraedro ha le quattro facce eguali.**

Infatti dalle:

$$\lambda_1 + \mu + \nu = 1 ,$$
$$\mu_1 + \nu + \lambda = 1 ,$$
$$\nu_1 + \lambda + \mu = 1 ,$$

che si suppongono verificate, e dalle:

$$S_1 = S_0\lambda_1 + S_2\nu + S_3\mu ,$$
$$S_2 = S_0\mu_1 + S_1\nu + S_3\lambda ,$$
$$S_3 = S_0\nu_1 + S_1\mu + S_2\lambda ,$$

si ricava:

$$-(S_1 - S_0) + (S_2 - S_0)\nu + (S_3 - S_0)\mu = 0 ,$$
$$(S_1 - S_0)\nu - (S_2 - S_0) + (S_3 - S_0)\lambda = 0 ,$$
$$(S_1 - S_0)\mu + (S_2 - S_0)\lambda - (S_3 - S_0) = 0 ,$$

le quali equazioni richiedono che sia

$$S_0 = S_1 = S_2 = S_3 ,$$

poichè il determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & \nu & \mu \\ \nu & -1 & \lambda \\ \mu & \lambda & -1 \end{vmatrix} = -1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 2\lambda\mu\nu$$

è diverso da zero. (*)

(*) Infatti nel triedro S(ABC) si ha:

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \left(\frac{\cos A + \cos B \cos C}{\text{sen}B \,\text{sen}C}\right)^2$$
$$= \frac{1 - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 2\lambda\mu\nu)}{\text{sen}^2B \,\text{sen}^2C}$$

9. **Se la somma degli angoli piani d'un triedro è eguale a 180°, la somma dei coseni dei diedri è eguale all'unità; e reciprocamente.**

Indicati con α, β, γ i tre angoli piani, e con A, B, C i diedri rispettivamente opposti, si ha:

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma(\cos A+\cos B+\cos C-1)=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\beta\cos\beta+\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma-\cos\beta\cos\gamma\operatorname{sen}\alpha$$
$$-\cos\gamma\cos\alpha\operatorname{sen}\beta-\cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma,$$

ossia

$$2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma(\cos A+\cos B+\cos C-1)=\operatorname{sen}(2\alpha)+\operatorname{sen}(2\beta)+\operatorname{sen}(2\gamma)-$$
$$-2\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)-4\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma$$

e questa, con facili trasformazioni, diviene:

$$2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma(\cos A+\cos B+\cos C-1)$$
$$=2\left\{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}\gamma\right\}\left\{\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma\right\}$$
$$=8\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right).$$

Dall'eguaglianza ora dimostrata risulta che nell'ipotesi:

$$\alpha+\beta+\gamma=180°,$$

dev'essere:

$$\cos A+\cos B+\cos C=1.$$

E dalla stessa eguaglianza risulta pure che, se la somma dei coseni dei diedri è eguale all'unità, si deve annullare il coseno che sta al secondo membro, e in conseguenza la somma dei tre angoli piani dev'essere eguale a 180.°

10. **Se la somma dei tre angoli piani è eguale a 180° in tre triedri d'un tetraedro, questo ha le quattro facce fra loro eguali.**

Se la somma degli angoli piani è eguale a 180° in ciascuno dei triedri A, B, C, si ha, pel teorema precedente:

$$\lambda+\mu_1+\nu_1=1\,,\quad \mu+\lambda_1+\nu_1=1\,,\quad \nu+\lambda_1+\mu_1=1\,,$$

nediante le quali si possono eliminare λ, μ, ν dalle:

$$S_1 = S_0\lambda_1 + S_2\nu + S_3\mu\ ,$$
$$S_2 = S_0\mu_1 + S_1\nu + S_3\lambda\ ,$$
$$S_3 = S_0\nu_1 + S_1\mu + S_2\lambda.$$

ffettuata quest'eliminazione, e avuto riguardo alla:

$$S_0 = S_1\lambda_1 + S_2\mu_1 + S_3\nu_1\ ,$$

ottengono le:

$$(S_0 + S_2 - S_1 - S_3)\lambda_1 = S_0 + S_1 - S_2 - S_3\ ,$$
$$(S_0 + S_2 - S_3 - S_1)\mu_1 = S_0 + S_2 - S_3 - S_1\ ,$$
$$(S_0 + S_3 - S_1 - S_2)\nu_1 = S_0 + S_3 - S_1 - S_2\ ,$$

alle quali risulta:

$$+ S_1 - S_2 - S_3 = 0,\ \ S_0 + S_2 - S_3 - S_1 = 0,\ \ S_0 + S_3 - S_1 - S_2 = 0,$$

ssia:

$$S_0 = S_1 = S_2 = S_3\ ,$$

quali provano (6) il teorema enunciato.

1. Se i raggi dei circoli circoscritti alle quattro facce d'un tetraedro sono fra loro eguali, le facce stesse devono essere fra loro eguali.

Indicati con α_1, β_1, γ_1, gli angoli BAC, CBA, ACB del iangolo ABC, si avrà, per l'ipotesi fatta,

$$\mathrm{sen}\alpha = \mathrm{sen}\alpha_1\ ,\quad \mathrm{sen}\beta = \mathrm{sen}\beta_1\ ,\quad \mathrm{sen}\gamma = \mathrm{sen}\gamma_1\ ,$$

quindi:

$$\cos\alpha = h\cos\alpha_1\ ,\quad \cos\beta = k\cos\beta_1\ ,\quad \cos\gamma = l\cos\gamma_1\ ,$$

endo h, k, l eguali ad 1 od a -1.

Perciò sarà:

$$M = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$= 1 - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\beta_1 - \cos^2\gamma_1 + 2hkl\cos\alpha_1\cos\beta_1\cos\gamma_1\ ,$$

ossia:

$$M = 2(1 + hkl)\cos\alpha_1 \cos\beta_1 \cos\gamma_1,$$

dalla quale risulta che il prodotto hkl non può essere eguale a -1, e che, in conseguenza, la quantità positiva M è eguale al quadruplo prodotto dei coseni dei tre angoli del triangolo ABC; epperciò è chiaro che questi tre angoli devono essere acuti.

Similmente si dimostrerà che ciascuno degli altri tre triangoli è acutangolo, e che, in conseguenza, la somma dei tre angoli piani, in ciascuno dei quattro triedri, è eguale alla somma dei tre angoli della faccia opposta; e, in forza del teorema precedente, si conchiuderà quello che ora si trattava di dimostrare.

12. **Nel tetraedro a facce eguali il centro di gravità, il centro della sfera circoscritta e il centro della sfera inscritta coincidono in uno stesso punto.**

Indicati con A′, B′, C′, S′ i centri di gravità delle facce rispettivamente opposte ai vertici A, B, C, S, si ha:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{SS'}^2 &= \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \tfrac{1}{9}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\\
\overline{AA'}^2 &= \tfrac{1}{3}(a^2 + b_1^2 + c_1^2) - \tfrac{1}{9}(a_1^2 + b^2 + c^2)\\
\overline{BB'}^2 &= \tfrac{1}{3}(a_1^2 + b^2 + c_1^2) - \tfrac{1}{9}(a^2 + b_1^2 + c^2)\\
\overline{CC'}^2 &= \tfrac{1}{3}(a_1^2 + b_1^2 + c^2) - \tfrac{1}{9}(a^2 + b^2 + c_1^2)
\end{aligned}\right\}\ (\alpha)$$

dalle quali risulta che, se gli spigoli opposti sono a due a due eguali, devono essere fra loro eguali i segmenti che uniscono ciascun vertice al centro di gravità della faccia opposta, e che, in conseguenza, il centro di gravità del tetraedro è equidistante dai quattro vertici. Inoltre la distanza del centro di gravità da una faccia è un quarto dell'altezza corrispondente a quella faccia, epperciò, essendo eguali le quattro altezze, il centro di gravità sarà equidistante dalle quattro facce.

13. **Se in un tetraedro coincidono due dei tre punti: il centro di gravità, il centro della sfera circoscritta e il centro della sfera inscritta, quel tetraedro ha le facce eguali.**

1) Se il centro di gravità coincide col centro della sfera circoscritta, devono essere fra loro eguali i segmenti che uniscono ciascun vertice al centro di gravità della faccia opposta, epperciò, dalle formole (α) del N.º precedente, risulta:

$$b_1^2 - b^2 = c^2 - c_1^2\,,$$
$$c_1^2 - c^2 = a^2 - a_1^2\,,$$
$$a_1^2 - a^2 = b^2 - b_1^2\,,$$

e in conseguenza:

$$a = a_1\,, \quad b = b_1\,, \quad c = c_1\,.$$

2) Se il centro di gravità coincide col centro della sfera inscritta, devono essere fra loro eguali le quattro altezze; epperciò equivalenti, e quindi eguali (6), le quattro facce.

3) Se il centro della sfera inscritta coincide col centro della sfera circoscritta, devono essere fra loro eguali i raggi dei circoli circoscritti alle quattro facce, epperciò (11) le facce stesse.

14. **Espressioni del volume del tetraedro a facce eguali e del raggio della sfera circoscritta.**

L'espressione del volume del tetraedro in funzione degli spigoli, rammentata al N. 1, diviene, quando gli spigoli opposti sono eguali,

$$144V^2 = 2a^4(b^2+c^2-a^2) + 2b^4(c^2+a^2-b^2) + 2c^4(a^2+b^2-c^2) - 4a^2b^2c^2.$$

od anche:

$$72V^2 = (b^2+c^2-a^2)\,(c^2+a^2-b^2)\,(a^2+b^2-c^2).$$

Dalla formola pel raggio della sfera circoscritta, citata nello stesso numero si ha:

$$576V^2R^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$$

e questa, in forza della precedente, diviene:

$$8R^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

la quale si può ricavare eziandio dalle formole (α) del N. 12.

15. Se in un tetraedro la somma dei quadrati di due spigoli opposti è eguale alla somma dei quadrati di altri due spigoli opposti, il quinto ed il sesto spigolo sono fra loro perpendicolari; e reciprocamente, se due spigoli opposti sono fra loro perpendicolari, la somma dei quadrati di altri due spigoli opposti è eguale alla somma dei quadrati della terza coppia di spigoli opposti. (*)

Guidata dal vertice S la SL parallela alla BC e dalla banda opposta di questa rispetto allo spigolo SC, e indicato con (aa_1) l'angolo LSA, si ha, dal triedro S (ACL):

$$\cos(aa_1) = \cos\beta\cos(LSC) - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(LSC)\cos C$$

$$= \cos\beta\cos(SCB) - \operatorname{sen}(SCB)\frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha},$$

ma dal triangolo SCA risulta:

$$\cos(SCB) = \frac{c - b\cos\alpha}{a_1}, \qquad \operatorname{sen}(SCB) = \frac{b}{a_1}\operatorname{sen}\alpha,$$

epperciò sarà:

$$\cos(aa_1) = \frac{c\cos\beta - b\cos\gamma}{a_1},$$

ossia:

$$\cos(aa_1) = \frac{c^2 + c_1^2 - (b^2 + b_1^2)}{2aa_1},$$

dalla quale si ricavano subito i teoremi enunciati.

(*) Questo teorema si trova, altrimenti dimostrato, nella citata Memoria del Reiss.

16. **Nel tetraedro a facce eguali ciascuno dei segmenti che uniscono i punti di mezzo di due spigoli opposti è perpendicolare a questi due spigoli.**

Infatti, indicati con L, M, N, L_1, M_1, N_1 i punti di mezzo degli spigoli SA, SB, SC, B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, i segmenti SL_1, AL_1 saranno fra loro eguali, per l'eguaglianza dei triangoli SBC, ABC, epperciò la LL_1 sarà perpendicolare alla SA; e così dall'eguaglianza dei triangoli SAB, SAC, e quindi delle LB, LC, risulta che la LL_1 è perpendicolare alla BC. Nell'istesso modo si proverà che la MM_1 è perpendicolare agli spigoli opposti SB, AC, e che la NN_1 è perpendicolare agli spigoli opposti SC, AB.

17. **Se due delle congiungenti i punti medi delle coppie di spigoli opposti d'un tetraedro sono rispettivamente perpendicolari a quelle due coppie, il tetraedro ha le facce eguali.**

Nell'ipotesi che la LL_1 sia perpendicolare agli spigoli SA, BC, e che la MM_1 sia perpendicolare agli spigoli SB, AC, si hanno le eguaglianze:

$$L_1A = L_1S\,,\quad LB = LC,\quad M_1B = M_1S\,,\quad MC = MA\,,$$

ossia le:

$$b^2 + c^2 = b_1^2 + c_1^2\,,\qquad a^2 + c^2 = a_1^2 + c_1^2$$
$$b^2 + c_1^2 = b_1^2 + c^2\,,\qquad a^2 + c_1^2 = a_1^2 + c^2,$$

dalle quali si ricava:

$$a = a_1\,,\quad b = b_1\,,\quad c = c_1$$

18. **Se le altezze d'un tetraedro a facce eguali passano per uno stesso punto, quel tetraedro è regolare.**

Infatti se le altezze d'un tetraedro passano per uno stesso punto, gli spigoli opposti sono fra loro perpendicolari, e in conseguenza (15), hanno luogo le eguaglianze:

$$a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2,$$

le quali, nell'ipotesi fatta, devono sussistere insieme alle:

$$a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1;$$

epperciò sarà:

$$a = b = c = a_1 = b_1 = c_1.$$

19. **Se le altezze d'un tetraedro passano pel centro di gravità, o pel centro della sfera circoscritta, quel tetraedro è regolare.**

Nella citata Memoria del Sig. Michele Reiss è dimostrato che, se le altezze d'un tetraedro passano per uno stesso punto, questo punto, e il centro della sfera circoscritta, sono gli estremi d'un segmento il cui punto di mezzo è il centro di gravità del tetraedro. Perciò, nell'una e nell'altra ipotesi, il centro di gravità coincide col centro della sfera circoscritta, e dai teoremi dei N. 13, 18, si conchiude che il tetraedro dev'essere regolare.

20. **Se le altezze d'un tetraedro passano pel centro della sfera inscritta, quel tetraedro è regolare.**

Indicati con A', B', C', S' i piedi delle perpendicolari condotte dai vertici A, B, C, S sulle facce rispettivamente opposte, e con O il centro della sfera inscritta, si avrà, per ipotesi:

$$OA' = OB' = OC' = OS'.$$

Perciò, se con H s'indica il punto in cui il piano delle AA', SS' incontra le spigolo BC, le altezze AA', SS' del triangolo SAH, s'incontrano in un punto O equidistante dai lati SH, AH, e in conseguenza saranno eguali questi due lati SH, AH, i quali sono le altezze dei triangoli SBC, ABC, corrispondenti al loro lato comune BC. Di qui risulta l'equivalenza dei due triangoli SBC, ABC; e così si proverà che le quattro facce del tetraedro sono equivalenti, e dai teoremi dei N. 6 e 18 si conchiuderà che il tetraedro è regolare.

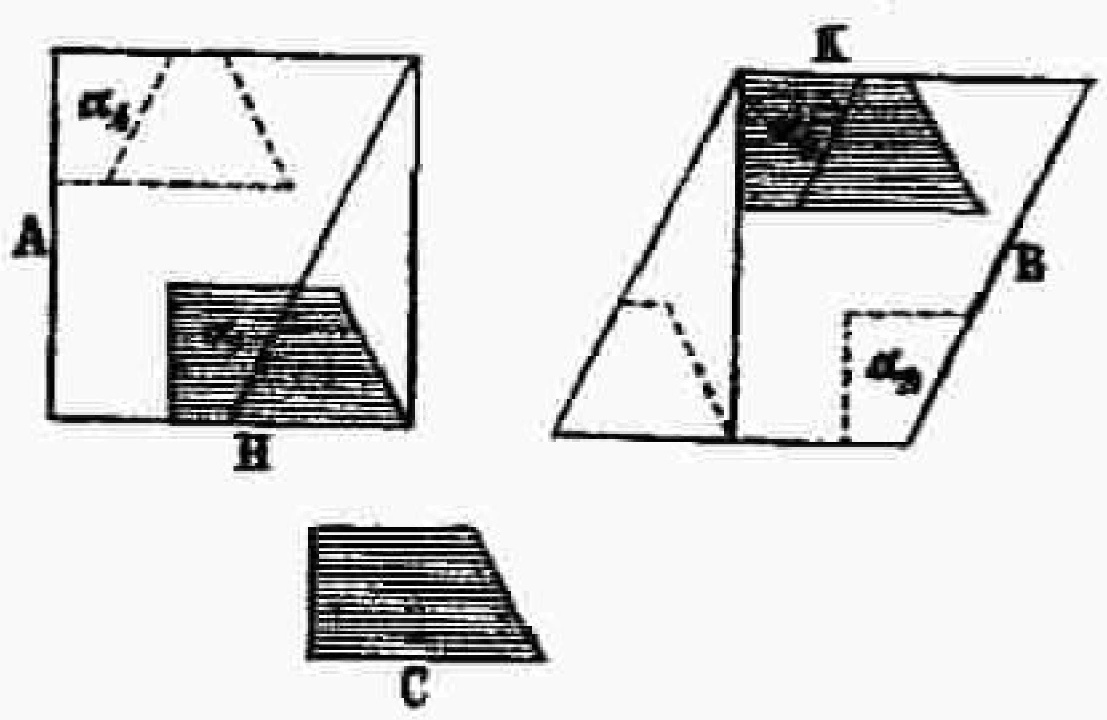
D. Besso.

DIMOSTRAZIONE DI UNA PROPOSIZIONE FONDAMENTALE DELLA TEORIA DELL'EQUIVALENZA

Ponendo a fondamento della teoria dell'equivalenza la definizione: Due poligoni o due poliedri si dicono equivalenti, se si possono dividere in egual numero di parti rispettivamente uguali, è sembrato che non si potesse poi fare a meno di assumere come postulato la proposizione seguente: Non può una parte di un poligono o d'un poliedro essere equivalente all'intero. Ecco qui una dimostrazione di codesta proposizione.

1° Sottraendo da due poligoni equivalenti due loro parti che siano eguali ad un terzo poligono, si ottengono resti equivalenti.

Chiamiamo A e B due poligoni equivalenti, ed H e K due loro parti che siano eguali fra loro.



Si dividano i due poligoni in parti rispettivamente uguali, come è possibile, dacchè sono equivalenti.

Quindi in ciascuno dei poligoni A e B si suddividano le dette parti nel modo stesso che esse sono suddivise rispettivamente nei poligoni B ed A dai contorni di K ed H.

E se i poligoni H e K sono divisi dalle primitive linee di divisione o dalle nuove che si sono tirate, si facciano in ciascuno di essi le divisioni che si scorgono nell'altro.

Dopo ciò i due poligoni A e B sono divisi in parti rispettivamente uguali, e così che per riconoscere queste parti non è mestieri far astrazione da nessuna delle linee di divisione.

Ed ora consideriamo una parte α_1 di H. A questa troviamo corrispondere nel poligono B una parte α_2 od una α_3, secondo che vogliamo riguardare α_1 come parte di A, oppure di H.

Similmente alla parte α_3 di K corrisponde nel poligono A la parte α_1 od una α_4, secondo che si vuol riguardare α_3, come parte di K, oppure di B.

Così, essendo tutte e quattro uguali tra loro le parti α_1, α_2, α_3, α_4, nel far corrispondere le parti di A a quelle di B, possiamo stabilire che ad α_1 corrisponda α_3, e ad α_4 corrisponda α_2.

Similmente ad ogni altra di quelle parti di A, che compongono H, si può far corrispondere una di quelle parti di B, che compongono K; e reciprocamente.

In conclusione i due poligoni A e B sono composti di parti rispettivamente uguali, e sopprimendo H e K, si sopprimono di queste parti rispettivamente uguali. Per conseguenza anche i resti sono tuttavia formati di parti rispettimente uguali.

2º Se due poligoni equivalenti hanno una parte comune, sopprimendo questa parte si ottengono resti equivalenti.

Infatti, sopprimendo la parte comune non si fa che togliere da due poligoni equivalenti due loro parti eguali.

3º Una parte di un poligono non può essere equivalente all'intero.

Infatti, detta A una parte qualunque di un poligono C e B il rimanente del poligono stesso, se A e C fossero equivalenti, tali sarebbero anche il poligono B ed il nulla, che sono i resti che si ottengono sottraendo dai poligoni C ed A il poligono A. E che un poligono sia equivalente al nulla è assurdo.

Ora si può dimostrare facilmente che: **Sottraendo da poligoni equivalenti poligoni equivalenti, si ottengono resti equivalenti**; e così le proposizioni sull'equivalenza dei poligoni e dei poliedri si possono tuttavia dimostrare con la stessa semplicità che si ammira negli *Elementi d'Euclide*.

A. FAIFOFER.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

ARITMETICA

Sulla trasformazione delle frazioni

1. Quanti quarti, quanti sesti, quanti ottavi, quanti decimi, quanti diciottesimi sono contenuti in $\frac{1}{2}$?
2. Trovare cinque frazioni eguali ad $\frac{1}{2}$ le quali abbiano per denominatori i numeri 6, 14, 38, 100, 274.
3. Si può trovare una frazione eguale ad $\frac{1}{2}$ il cui denominatore sia 49 ?
4. Quanti sesti, quanti noni, quanti dodicesimi, quanti quindicesimi, quanti ventiquattresimi sono contenuti in $\frac{1}{3}$?
5. Trovare cinque frazioni eguali ad $\frac{1}{3}$ le quali abbiano per denominatori i numeri 9, 15, 24, 87, 213.
6. Esiste una frazione eguale ad $\frac{1}{3}$, col denominatore 56 ?
7. Quanti quattordicesimi, quanti ventunesimi, quanti trentacinquesimi, quanti quarantanovesimi sono contenuti in $\frac{1}{7}$?
8. Trovare cinque frazioni eguali ad $\frac{1}{7}$ coi denominatori 28, 77, 105, 658, 1036.
9. Si può trovare una frazione eguale ad $\frac{1}{7}$, col denominatore 562 ?

10. Trovare tre frazioni eguali ad $\frac{1}{13}$ i cui denominatori sieno 65, 143, 1144.

11. Trovare una frazione eguale a $\frac{7}{13}$, ed un'altra eguale ad $\frac{8}{13}$, le quali abbiano il denominatore 65.

12. Trovare: 1) due frazioni eguali a $\frac{1}{35}$ coi denominatori 105, 245, 2) due frazioni eguali a $\frac{27}{35}$ che abbiano gli stessi denominatori 105, 245.

13. Trovare tre frazioni eguali a $\frac{1}{29}$ coi numeratori 3, 7, 15.

14. Trovare tre frazioni eguali a $\frac{12}{29}$ i cui numeratori sieno 24, 60, 144, 576.

15. Esiste una frazione eguale a $\frac{12}{29}$ la quale abbia per numeratore 2250?

16. Trovare una frazione eguale a $\frac{24}{243}$ col numeratore minore di 24.

17. Trovare una frazione eguale a $\frac{84}{208}$ coi termini più piccoli.

18. Si può trovare una frazione eguale a $\frac{81}{256}$ col numeratore minore di 81?

19. Come devono essere i denominatori delle frazioni eguali a $\frac{8}{15}$? E quanti sono quelli minori di 1000?

20. Quante sono le frazioni eguali a $\frac{9}{37}$ che hanno i denominatori compresi fra 1000 e 2000?

21. Quante sono le frazioni eguali a $\frac{17}{60}$? Ve n'ha una col denominatore eguale ad uno dei numeri 10, 100, 1000,... ?

22. Si può trovare una frazione eguale a $\frac{21}{875}$ la quale abbia per denominatore uno dei numeri 10, 100, 1000, ... ?

23. Esiste una frazione eguale a $\frac{56}{448}$ il cui denominatore sia uno dei numeri 10, 100, 1000, ... ?

24. Una frazione il cui numeratore è 37, e il cui denominatore è maggiore di 100 e minore di 200, è eguale ad un'altra frazione che ha il denominatore 1000: trovare il denominatore della prima frazione.

25. Quante sono le frazioni col numeratore 168, e col denominatore maggiore di 300 e minore di 400, eguali ad altre frazioni col denominatore 1000?

26. A quanti ottavi equivale la somma di $\frac{3}{4}$ e $\frac{7}{8}$?

27. A quanti sessantesimi equivale la somma di $\frac{5}{12}$, $\frac{9}{10}$ e $\frac{7}{60}$?
28. Qual'è la più grande delle due frazioni $\frac{19}{20}$ e $\frac{73}{140}$?
29. Trovare due frazioni collo stesso denominatore, ed eguali rispettivamente a $\frac{7}{18}$ e $\frac{5}{11}$.
30. Qual'è la più grande delle due frazioni $\frac{7}{24}$, $\frac{7}{25}$?
31. Qual'è la più grande delle due frazioni $\frac{7}{24}$, $\frac{8}{25}$?
32. Qual'è la maggiore, e quale la minore delle tre frazioni $\frac{10}{81}$, $\frac{12}{88}$, $\frac{14}{85}$?
33. Qual'è la maggiore, e quale la minore delle tre frazioni $\frac{71}{20}$, $\frac{76}{25}$, $\frac{81}{80}$?
34. Trovare due frazioni col denominatore 100, l'una minore e l'altra maggiore di $\frac{1}{3}$.
35. Trovare due frazioni col denominatore 1000, l'una minore e l'altra maggiore di $\frac{28}{75}$.

TRIGONOMETRIA

Sui primi teoremi relativi al seno ed al coseno d'un angolo acuto.

1. Dimostrare che, se un triangolo rettangolo ha un angolo di 30°, il cateto ad esso opposto è la metà dell'ipotenusa.
2. Dimostrare che, se un triangolo rettangolo ha un angolo minore di 30°, il rapporto del cateto ad esso opposto all'ipotenusa è minore di $\frac{1}{2}$.
3. Sia BAC un angolo di 45°, e da un punto B del suo lato AB si conduca sull'altro lato la perpendicolare BC; dimostrare che, se la AB è divisa in 1000 parti eguali, la BC è maggiore del segmento che contiene 707 di quelle parti e minore del segmento che ne contiene 708.
4. Costruire un angolo il cui seno sia eguale a $\frac{7}{10}$. Quell'angolo sarà maggiore o minore di 45° ?
5. Dimostrare che il seno di 60° è compreso fra 0,866 e 0,8661.
6. Il seno d'un angolo è $\frac{56}{65}$; calcolare il suo coseno, e provare che quell'angolo è compreso fra 45° e 60°.

7. Calcolare a meno di $\frac{1}{1000}$ il seno ed il coseno d'un angolo, sapendo che il seno è doppio del coseno.
8. Dimostrare che, se l'angolo α è minore di $45°$, esiste un angolo il cui seno è eguale al quoziente $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.
9. Se il seno d'un angolo è doppio del seno di un altro angolo, fra quali limiti dev' essere compreso il secondo angolo?
10. Se il coseno d'un angolo è la metà del coseno d'un altro angolo, fra quali limiti dev'essere compreso il primo angolo?
11. Come devono essere due angoli se la somma dei loro seni è eguale a 2?
12. Come devono essere due angoli se il prodotto del seno dell'uno pel coseno dell'altro è eguale all' unità?
13. Dimostrare che il seno di $70°$ è minore del doppio del seno di $35°$.
14. Dimostrare che il seno di $60°$ è minore del triplo del seno di $20°$.
15. Dimostrare che il seno di $15°$ è maggiore di $\frac{1}{4}$.
16. Dimostrare che, se l'angolo al vertice d'un triangolo isoscele è un quarto d'un angolo alla base, il rapporto della base ad uno dei lati eguali è maggiore di $\frac{1}{3}$.
17. Trovare due numeri i quali differiscano di 0,0001, l'uno minore e l'altro maggiore del seno di 15°.
18. Dimostrare che, se uno degli angoli acuti d'un triangolo rettangolo è un quarto dell'altro, il rapporto del cateto opposto al primo angolo al cateto opposto al secondo è maggiore di $\frac{8}{25}$.
19. Dimostrare che, se uno degli angoli acuti d'un triangolo rettangolo è un quinto dell'altro, il rapporto del cateto opposto al primo angolo al cateto opposto al secondo è maggiore di $\frac{13}{50}$.
20. Il seno d'un angolo acuto d'un triangolo rettangolo è compreso fra $\frac{159}{1000}$ e $\frac{161}{1000}$: trovare due limitazioni del rap-

porto del cateto opposto a quell' angolo al cateto adiacente.

21. Dimostrare che l'angolo, menzionato nell'esercizio precedente, è compreso tra $9°$ e $10°$.

22. Nel triangolo BAC rettangolo in A, il rapporto del cateto AC al cateto AB è compreso fra $\frac{7}{10}$ e $\frac{701}{1000}$; provare che l'angolo B è maggiore di $30°$ e minore di $36°$.

23. Nell' ipotesi che la somma del seno e del coseno d'un angolo, minore di $45°$, sia eguale a $\frac{5}{4}$, si dimostri che quell'angolo dev'essere compreso fra $15°$ e $18°$.

24. Esiste un angolo tale che la somma del suo seno e del suo coseno sia eguale a $\frac{3}{2}$?

25. Qual'è il massimo valore della somma del seno e del coseno d'uno stesso angolo?

26. Trovare i valori di due angoli, non maggiori di $60°$, nell'ipotesi che la somma dei quadrati dei loro coseni, aumentata di 1, sia eguale al doppio prodotto dei loro seni.

27. Trovare i valori di due angoli nell' ipotesi che uno di essi non sia maggiore di $18°$, che l' altro non sia maggiore di $54°$, e che il prodotto dei loro seni sia eguale ad $\frac{1}{4}$.

28. Dimostrare che il prodotto dei coseni dei due angoli acuti d'un triangolo rettangolo, è eguale al prodotto dei loro seni.

29. Dimostrare che il prodotto dei coseni di due angoli è maggiore o minore del prodotto dei loro seni, secondo che la somma dei due angoli è minore o maggiore di $90°$.

30. Se la somma degli angoli a e b è minore di $90°$, e se hanno luogo le diseguaglianze:

$$\frac{3}{8} < \operatorname{sen} a \cos b < \frac{3}{7},$$

cosa si può asserire sui prodotti:

$$\operatorname{sen}(a+b) \cos b\,, \quad \operatorname{sen} a \cos(a+b)\,?$$

D. Besso.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Elementi di Geometria per Riccardo de Paolis, Prof. di Geometria Superiore nella R. Università di Pisa. Torino, Ermanno Loescher 1884.

Di questo libro, come di tutte le migliori opere dell'ingegno, si parlerà da molti, per molto tempo e in varie guise. Ciò sarà grandemente utile alla scienza e ai suoi seguaci e lieto auspicio di novello incremento del culto delle Matematiche elementari nel nostro paese. Chiunque, leggendo con intelletto di giustizia l'opera del Prof. de Paolis, si soffermi di quando in quando a riflettere all'ordine nel quale l'A. volle si succedessero e connettessero i vari argomenti, e ad indagarne i motivi, deve riconoscere che molte e potenti ragioni di metodo precedentemente ponderate, determinarono l'A. parte inconsapevole, parte incurante delle difficoltà che egli si apparecchiava, a seguire una via, mercè quelle nettamente e saggiamente delineata. Prova ne sia tra l'altre l'abolizione dell'antica distinzione fra Planimetria e Stereometria, evidentemente suggerita da ciò, che a niuno può sembrare tanto bello quanto è commodo che le varietà di fenomeni analoghi che n'offre lo spazio, per ragion d'antico uso o di creduta opportunità didattica, vengano disseminate in varî punti di un trattato, sia pur esso elementare. Ora, se fare un buon libro di Geometria elementare è cosa giustamente reputata delle più difficili, quand'anche si voglia attenersi a quel disegno che, consacrato dall'uso comune e dalla pratica dei migliori Autori, sembra divenuto pressochè inviolabile ed universale, ardua certo e pari al suo ingegno fu la prova alla quale un programma affatto nuovo e sparso di difficoltà cimentava l'Autore di questi nuovi Elementi. Essi andranno meritamente annoverati fra i più degni lavori in fatto di Matematica elementare.

Non dispiacciano adunque all'A. alcune osservazioni le quali mirano a mettere in chiaro taluno dei molti e considerevoli pregi della sua opera, tal'altro dei pochi e lievi difetti.

1. Nella prefazione l'A. parla quasi esclusivamente dell'opportunità di uno studio simultaneo di figure analoghe nel

piano e nello spazio allo scopo di non cadere in ripetizioni inutili.

Io sono del suo avviso, soltanto desidererei che, in una nuova edizione del libro, si commettessero alla cura dell'insegnante quelle ripetizioni che la buona scelta del metodo permetterebbe di evitare e che l'A. sovente non evita, o per rispetto all'uso comune, o per ribadire nel lettore l'abitudine a ragionamenti e deduzioni della medesima specie.

Lo studio simultaneo degli enti ad una, due o tre dimensioni è poi consigliato secondo l'A. da un'altra ragione di gran valore. Come le costruzioni eseguite nel piano sono mezzi efficacissimi e talvolta gli unici mezzi a problemi relativi ad enti di una sola dimensione, così, le costruzioni fatte nello spazio possono riuscire utilissime, se pure non necessarie, in problemi relativi ad enti minori dello spazio medesimo, e molte recenti memorie valgono a dimostrarlo. E nel campo degli elementi, credo arrivi a proposito la seguente osserva zione: Nell'ordinaria Planimetria può talvolta riuscir difficile, massime quando si sia astretti a sole considerazioni di *posizione*, verificare che certe tre rette concorrono in un medesimo punto. Uscendo dal piano, tenteremo di dimostrare che esse sono proiezioni sul piano medesimo delle intersezioni di certi tre piani. A questa osservazione fa capo gran parte dei mezzi di costruzione e di dimostrazione che alla Planimetria dona la Stereometria, e l' ingegnosa costruzione del triangolo isoscele con ciascuno degli angoli alla base doppio del rimanente, ottenuta dall'A. indipendentemente dalla teorica delle proporzioni o dell'equivalenza e mediante il solo uso d' un noto teorema su triangoli omotetici che, mentre è evidente nello spazio, non lo è egualmente nel piano, ma lo diviene quivi con considerazioni stereometriche.

Ma la previsione dell'A. il quale afferma che ai principianti non è più facile concepire un'angolo che un diedro, un triangolo che un triedro, ha per lo meno bisogno d'una conferma che soltanto dalla esperienza possiamo aspettare. E, pur concedendo la non maggiore difficoltà, dovremmo ancora consultar l'esperienza per decidere se, la permanenza in quell'astrazione alla quale la nostra mente è astretta nello studio di figure stereometriche che ai sensi appariscono, non già quali esse sono, ma rappresentate su d'un piano, quello del foglio o della lavagna, costituisca, per la testolina d'un allievo, una difficoltà che possa andar confusa fra le tante d'ordine rudimentale (novità della materia, del linguaggio, della forma nelle argomentazioni), o non piuttosto una difficoltà d'ordine più elevato e che il giovanetto non possa vincere, se già non adusato a vittoria, nella lotta con le prime. Ma quand'anche ciò fosse, si dovrebbe per ciò tornare all'antica separazione come ad unico porto di salvezza? Ecco, a parer mio, ciò non sarebbe saggio. Il tempo necessario a preparare la mente degli alunni a maggiori difficoltà quali possono essere le stereometriche, è certo assai più breve di quello che per antico sistema si concede ordinariamente, e durante il quale, lo si noti bene, il giovanetto trattenuto nel campo planimetrico acquista, come per legge d' inerzia, una naturale riluttanza a tutto ciò che sa di Stereometria. Ma son d'avviso che a cagione dell'ordine che il nostro autore prescrisse ai primordî del suo libro, poco ivi si abbondi in teoremi planimetrici o proposizioni stereometriche assai semplici (in aggiunta a quelle che sono indispensabili alla formazione del gruppo fondamentale dei postulati). Manchi così un giusto periodo di preparazione, e si giunga troppo presto a pagina 27 del libro, e prima forse che un alunno di comune intelligenza possa intendere il teorema 43 della pagina istessa che è alquanto difficile. E qui cade in acconcio una dimanda: Fu provvido consiglio il recente bando dello studio della Geometria intuitiva dai Ginnasi e dalle scuole tecniche, o fu smania di novità quella che ci fe' tornare all'antico? Io fo voti, perchè la caducità perenne del nostro sistema di studî si affermi ancora una volta a bene del paese, e che la Geometria intuitiva torni in onore presto e per sempre nelle nostre scuole.

2. I postulati che stanno a base degli Elementi del Prof. de Paolis presuppongono per lo più il concetto di movimento che in ogni trattato di geometria elementare conviene ammettere o esplicitamente o tacitamente.

Ho osservato esser costume dell'A. lo ammettere un medesimo postulato in casi analoghi, ad es. la possibilità di rovesciare il segmento o il diedro, anche quando qualche dipendenza possa esistere fra i varî casi, ad es. fra le due possibilità anzidette. Ma si consideri che, ciascuno il quale conceda la prima delle due possibilità, vi si decide sol perchè il segmento si diporta in egual modo rispetto ai suoi due estremi. Egli non potrebbe adunque negar la seconda perciò che anche il diedro si diporta in egual modo rispetto alle sue faccie. L'uso dell'A. mi sembra adunque per la detta ragione irreprensibile; ma per la ragione istessa, altrettanto non penso dell'estensione agli angoli del postulato: « Dati due segmenti diseguali si può sempre trovare un segmento multiplo del minore e maggiore dell'altro » alla quale l'A. giunge per via dimostrativa (p. 290, Cor.).

La proposizione « Una retta può scorrere su sè stessa » assunta come postulato dall'A. si trova dimostrata negli elementi di geometria del Sig. Prof. Faifofer. Ma mentre, secondo questo Autore, la possibilità di scorrere attribuita alla retta consiste nella facoltà di sovrapporre un punto A della retta ad altro suo punto A', e poi di nuovo la retta alla retta, il De Paolis, accettando il senso che alla parola *scorrere* volgarmente si attribuisce, ammette che si possa portare A in A' senza che avvenga distacco della retta dalla sua posizione nello spazio. Io credo che l'A. avrebbe fatto bene a riprodurre la breve e facile dimostrazione del Faifofer allo scopo, sempre lodevole, di anteporre un *motivo* al postulato. Avrebbe così disposto il lettore ad accettare la nuova condizione restrittiva, l'ammessibilità della quale è quivi dato di comprendere. Dissi *comprendere* e non *rigorosamente spiegare*: escluderei anzi a priori come priva di significato ogni considerazione d'ordine infinitesimale che mirasse a dimostrare il contrario. Ma dichiaro che, quanto a me, fra molti equivalenti sistemi di postulati, accetterei quello che fosse meno proclive a richiedere la concessione di *modi* anzichè di *effetti* del movimento (operazione per la quale una figura geometrica muta posizione). Ciò importebbe, è vero, il sacrificio di qualche proposizione isolata d'ordine cinematico, ma, mentre le operazioni indipendentemente dal modo di compierle sorreggerebbero il grosso dell' edificio geometrico, ciò che sembra più conforme a spirito scientifico, si eviterebbero molte questioni interminabili ed infeconde, indizio talvolta di non perfetta arrendevolezza del soggetto a rivestirsi d'evidenza. Anzichè ammettere che facendo rotare una retta *intorno a un suo punto* la si può costringere a passare per qualsivoglia altro punto, preferirei si ammettesse a dirittura la conseguenza: si può sempre costringere una retta a passare per due punti, che è indipendente da qualsivoglia concetto di *modo*. Gli « Elementi di Geometria » dei Professori Sannia e d'Ovidio erano quelli che meglio rispondevano a questo mio desiderio. Credo poi che l' A. invece di chiedere che la nota dualistica venga ammessa come postulato in ogni e singolo moto di strisciamento e di rotazione, avrebbe raggiunta una maggior semplicità dimostrandola ne' vari casi, dopo avere ammesso che: se una figura può passare da una posizione A ad un' altra B per una serie di posizioni intermedie, essa può sempre da B tornare in A percorrendo la serie medesima in ordine inverso.

Noto la terza parte del Post. I. a pag. 7: « Una figura si può muovere tenendo fissi tutti i suoi punti situati sopra una stessa retta ». Amerei che fosse detto: Una figura si può muovere fermi restando due de' suoi punti, perchè dalla 1ª parte del Post. II si potrebbe poi dedurre che: se nel moto di una figura due punti si mantengono immobili, lo stesso avviene di tutti gli altri punti della retta che li congiunge. Noto ancora, come pregevolissime e nuove, le definizioni alle p. 10 e 11. Esse si riferiscono alla linea *divisa* da uno dei suoi punti, o alla superficie *divisa* da una delle sue linee, o allo spazio *diviso* da una superficie. Inoltre, come opportunissimi e nuovi i postulati della retta divisa da un suo punto, o del piano da una sua retta, o dello spazio da un suo piano. Se ne trova ben presto una applicazione nella dimostrazione del teorema I. a p, 14. « Un piano è individuato da tre suoi punti non situati sopra una stessa retta ».

La definizione di angolo (piano o diedro) fu sempre argomento di discussione e una spina per gli Autori. Ma sembra oramai prevalso il partito di definir l'angolo come parte del piano o dello spazio. A questo si attiene il nostro A. il quale, a dimostrare che si può sempre sommare più angoli, estende a pag. 38 il concetto di angolo ammettendo angoli che possono essere composti di parti che siano minori del piano o dello spazio aggiunte a multipli del piano o dello spazio istesso. Se ciò non è estetico, è tuttavia necessario e rigorosamente ammissibile; niuno può adunque muoverne rimprovero all'A. Definire l'angolo come *rotazione* equivale a dare un sinonimo alla parola *angolo*, punto o poco chiarendone il concetto.

3. Ora dirò in breve ciò che penso in generale intorno ai primi tre libri dell'opera. L'A. si occupa in essi delle figure geometriche, non delle grandezze. Al par.° IV fa un'eccezione. Quivi egli, preludendo opportunamente alla teoria dell'equivalenza, ne disegna la tela, e ne dà una teoria in quei casi ne'quali essa si riduce ad eguaglianza, come avviene per quelle che egli chiama *grandezze elementari* (i segmenti, gli angoli e i diedri). È in questi tre libri che le figure o varietà più note ed importanti dello spazio, quasi sospingendosi a vicenda nella palestra, si offrono in bell'ordine al nostro studio, dalle più semplici alle più composte. Le proprietà planimetrime s'intrecciano alle stereometriche e le une le altre sostengono: sorge un tutto mirabilmente semplice ed armonico, dono d'arte, non d'artificio, di fede nel metodo, non di pompa scientifica. Descriver tutto sarebbe lunghissimo, il lettore si contenterà di alcune osservazioni.

Leggo a pag. 23: « Facendo scorrere su sè stessa una faccia rA di un diedro $r.AB$ strisciando lungo lo spigolo r, anche la faccia rB si move ma non cambia posizione rimanendo sempre il diedro eguale a sè stesso ». L'A. vuol provare in sostanza che un diedro può scorrere su sè stesso.

Ma ciò è inutile perchè questa proprietà è già sottintesa nella definizione dell'eguaglianza di due diedri, la quale potrebbe tuttavia essere censurata. (1)

Veggo con piacere entrar subito in campo il postulato delle parallele con le sue conseguenze.

Dopo la scoperta pangeometrica fu in voga la moda (esagerazione e talvolta parodia dei grandi fatti) di pretendere se-

(1) Infatti essa suppone che per ogni maniera di sovrapporre le due punteggiate, spigoli di due diedri eguali, una ne esista per sovrapporre un diedro all'altro. Avrei preferito che l'A., avendo già detto a pag. 8 che « due figure si dicono *uguali* quando, trasportate convenientemente nello spazio, possono coincidere », nulla avesse soggiunto a pag. 23 circa l'eguaglianza di due diedri, e soprattutto avesse raccomandato le successive dimostrazioni non al modo (come nel teorema a pag. 33, la dimostrazione del quale non è soddisfacente) ma al fatto della sovrapponibilità. E parmi che, quando i segmenti, gli angoli, i diedri, si vogliano considerare come enti affini dello spazio, si debba por cura a proscrivere il dominio del seguente fatto: Vi sono *due* o *infiniti* modi di sovrapporre una grandezza *elementare* ad un'altra ad essa eguale, secondochè si tratti di segmenti ed angoli, oppure di diedri.

parate in sulle prime e per non breve tratto nel corso di un libro elementare, le proposizioni che dipendono dal postulato Euclideo da quelle che non ne dipendono. Ma di grazia: Qual' è lo scopo del libro elementare che si vuol fare? È desso la pangeometria o la geometria ordinaria? Se questa seconda, non sembra logico entrar senza ambagi nell'ambiente de' suoi fenomeni, di quei fenomeni alla contemplazione dei quali il libro si destina? Tuttavia si rassicurino i pangeometri: l'A. rende loro giustizia in una buona nota (la nota XIX a p. 464) dalla quale togliamo che al postulato d'Euclide si può sostituire l'altro: « Quando un piano scorre su sè stesso strisciando lungo un'asse, esiste almeno uno dei suoi punti, non situato sull'asse, che si muove sopra una retta ». A pag. 54 si legge il teorema: « Se una retta è perpendicolare a due rette di un piano non parallele, è anche perpendicolare a tutte le altre sue rette », e si nota nella dimostrazione che essa dipende da semplici considerazioni di posizione mentre le ordinarie, invocando il sussidio di confronti fra triangoli eguali si allontanano in certo modo dall'indole del teorema. A p. 13 l'A. spiega che cosa egli intenda per *segarsi* di due linee o di una linea e di una superficie o di due superficie. Alle p. 72 e 73 ne fa l'applicazione all'intersezione di due circoli o di un circolo e di una sfera o di due sfere. L'A. a p. 74 dopo avere molto saggiamente discorso sopra la costruzione delle figure geometriche e gli elementi che nello spazio si possono porre o *immediatamente* o *mediatamente*, enuncia il postulato VIII che dice: « Nello spazio si possono porre *immediatamente* i suoi elementi fondamentali » (i punti, le rette, i piani, secondo l'A.). E poi: « i circoli di un piano e le sfere dello spazio si pongono *mediante* i loro centri e raggi ». E finalmente: « Se per mezzo degli elementi punti, rette, circoli, piani, sfere, ne vengono altri posti *mediatamente*, li riterremo come determinati ». Con la 1ª parte del postulato l'A. rivendica il diritto che si aveva a negare altra cosa già *tacitamente* ammessa, e al n. 90 lo dichiara. Ma, o io m'inganno, o quando si concedono le proprietà fondamentali della Geometria e si permette ad un autore di attribuirle ad enti A, B, C, che egli chiama punto, retta, piano, si ammettono gli enti, non importa se esplicitamente o tacitamente, perchè si può talvolta tacere ciò che si sottintende. L'A. non è qui incorso in una ripetizione? Le altre due proposizioni del postulato, rivelano nell'A. squisitezza di senso geometrico, sebbene mi sembrino semplici definizioni. Nelle costruzioni di triangoli a p. 87, l'A. il quale ha già opportunamente premessa la trattazione dei principali casi d'eguaglianza, ne approfitta per notare la sufficienza di certi elementi alla determinazione unica del triangolo. Cio è molto lodevole. Altrettanto egli fa prima delle costruzioni di triedri a p. 136. Tra quest'ultime, notevole per accuratezza, segnalerò quella del n. 170 a p. 137.

4. Vengo all'importante libro dell'equivalenza non senza osservare che nella scala delle difficoltà questa sovrasta alle proprietà di figura. Benemeriti di questa teoria, cito i Professori Faifofer e de Zolt che l'A. ebbe a precursori. L'A. si occupa adunque delle *grandezze* equivalenti, adatta perciò loro la nota definizione di *poligoni* equivalenti, ed incomincia dimostrando che il carattere di equivalenti distribuisce le grandezze in sistemi chiusi in loro stessi, in grazia del teorema: « Due grandezze equivalenti ad una terza sono equivalenti fra loro ». Dà quindi un'opportuna definizione di somma, e dimostra la proprietà associativa dell'addizione T. 1°, e l'unità della somma, T. 2° Passa al postulato: « Se una grandezza è comunque divisa in parti, trascurandone alcune non è possibile disporre le altre in modo da formare l'intera grandezza » già *dimostrato* per grandezze elementari. La dimostrazione data a questo proposito dal Sig. de Zolt nell'opuscolo: « Principi dell'eguaglianza di poligoni ecc. Milano 1881 dev'esser sembrata, come a parecchi, così all'A., non del tutto soddisfacente. (1) L'ultima parola su questo punto non s'è forse detta. Ma quando quella proposizione si dimostrasse, il lavoro del nostro A. non sarebbe scosso perciò; invece di un postulato, l'insegnante porrebbe un teorema. Postulato o teorema che permette l'introduzione del concetto di maggiore e minore (v. anche de Zolt l. c.). Secondo questo concetto vengono poi dimostrate alcune delle ordinarie proprietà delle diseguaglianze, e introdotte le *grandezze principali*. Questa definizione mi sembra nuova ed importante.

(1) Il lettore avrà trovato a pag. 13 di questo fascicolo la dimostrazione del Sig. Faifofer. — (*Nota della Direzione*).

Principali chiama l'A. le grandezze di una famiglia quando si possono sommare, e si sappia sempre giudicare se due di esse sono equivalenti o quale delle due sia la maggiore. Il Cor. 1° a p. 283 e varî altri della stessa specie che altrove ritrovo non esprimendo proprietà ma identità, mi sembrano inutili. I teoremi successivi si dividono in due classi secondochè essi riguardano grandezze generali o grandezze principali. È importante la conseguenza che stabilisce l'esistenza della differenza, ed unica, fra due grandezze principali, e sola basterebbe a giustificare la distinzione dell'A. L'A. estende poi a grandezze principali alcune diseguaglianze con differenze già dimostrate per grandezze elementari (v. ad es. il T. 2° a p. 285), e finalmente si diffonde alquanto sulle grandezze multiple o summultiple di grandezze date mai trascurando la sopradetta distinzione. Ed ora dimando: Non si poteva rendere più agevole l'argomento, grave ed astratto per sè medesimo, *enunciando* soltanto i teoremi di più facile dimostrazione? L'insegnante li avrebbe poi dimostrati egli stesso in una scuola di *ottimi* allievi dopo aver persuaso questi della loro utilità nelle successive applicazioni. Si sa già che gli Allievi sogliono essere più agevoli all'occasionale che non lo siano al formale insegnamento. E se i teoremi relativi a sole grandezze principali fossero stati enunciati per grandezze senz'altro, non avrebbe l'accorto lettore capito egli stesso dall'enunciato o dalla dimostrazione se la limitazione si dovesse supporre oppur no?

Della teorica delle grandezze equivalenti l'A. fa successivamente l'applicazione ai poligoni piani, ai prismi, e ai poligoni sferici equivalenti. È commendevole l'unità di metodo che l'A. segue nei tre casi. Veggansi ad es. le dimostrazioni dell'equivalenza di due parallelogrammi di eguali basi ed altezze, di due prismi triangolari con eguali sezioni normali ed eguali spigoli, di un parallelogramma sferico e della metà del suo eccesso. L'A. mette molta cura a porre in rilievo la decomponibilità in parti eguali nei varî incontri con grandezze equivalenti, ad es. con due parallelogrammi, insistenti nel piano sulla medesima base e posti dalla medesima parte di essa, quando i lati opposti alla base comune sono separati: (il modo di decomporli in parti eguali dato dall'A. in questo caso, è quello che è descritto negli Elementi di Geometria di Faifofer seconda ediz. Venezia 1880); lo stesso fa in casi analoghi a p. 312, (1) e a p. 321. Leggo e noto a p. 301: « Due poligoni equivalenti si possono sempre dividere in uno stesso numero di triangoli rispettivamente uguali » e l'applicazione a p. 313, T. 2º. E a p. 295, la dimostrazione del teorema: « Se due triangoli hanno uguale una base e l'altezza corrispondente sono equivalenti ». (Vedi anche gli « Elementi di Faifofer », pag. 197). L'A. non avendo dimostrato che i poligoni sono grandezze principali, evita la dimostrazione ordinaria. Analoga osservazione pel Teorema 2º a p. 315, e per il teorema a p. 322. L'A. si occupa finalmente della trasformazione dei parallelogrammi, dei prismi, e dei poligoni sferici, mirando principalmente a dimostrare che i parallelogrammi, i prismi, i poligoni sferici, sono grandezze principali, conclusione che egli giustamente pone a corona della sua teoria. Splendido e di egregia fattura è il c. V che s'intitola: « Grandezze variabili. Limiti. » Le grandezze principali dell'A. corrispondono ai numeri razionali dell'Aritmetica. Si tratta ora di fare nella geometria mediante quelle, la teorica degli irrazionali. Ed ecco, in breve, come l'A. si è adoperato all'importante oggetto. Ha incominciato a dire di grandezze variabili crescenti e decrescenti, *continuamente* crescenti o decrescenti, *indefinitamente* crescenti o decrescenti. Ha poi dimostrato che, date certe condizioni che ordinariamente hanno luogo, una grandezza principale può decrescere indefinitamente (p. 328), e che una grandezza variabile somma di grandezze indefinitamente crescenti o decrescenti, cresce o decresce indefinitamente (p. 329). A p. 330 l'A. pone l'importante definizione di *variabili convergenti* e loro *limiti*. E poichè l'A. mira a definire come equivalenti due grandezze *limiti* delle stesse variabili convergenti, incomincia dall'escludere qualsiasi dubbio di contradizione della nuova e più generale definizione con la particolare già data,

(1) L'esposizione di questo teorema non è davvero felice. Leggendola, si crederebbe, che la dimostrazione sia insostenibile, mentre è invece esattissima. Avvertirò adunque i futuri lettori dell'opera che, giunti alla penultima linea della p. 311, essi devono disegnare una figura, che manca nel testo, la quale rappresenti due prismi con uno spigolo comune e gli altri due ordinatamente coincidenti, ma solo in direzione, e chiamarli ABC. A'B'C', AB_1C_1. $A'B'_1C'_1$. Questi sono quelli che l'A. vuol dimostrare equivalenti, confrontandoli col prisma intermedio AB_1C. $A'B'_1C'$ come si vede chiaramente a lin. 12, 13, 14 della pagina 313.

dimostrando che: se una di più grandezze equivalenti (nel primitivo senso) è limite di due variabili convergenti, lo sono tutte le altre, e che: sono equivalenti due grandezze principali limiti delle stesse variabili convergenti, p. 332. Passa poi al teorema a pag. 333, dimostrando che due grandezze equivalenti limiti delle stesse variabili convergenti sono equivalenti anche nel senso generale. Stabilisce quindi il postulato: « Due variabili convergenti ammettono sempre un limite » e lo dichiara con un'esempio molto opportuno. A p. 336 dà la definizione di somma di grandezze come limite delle somme delle variabili crescenti e decrescenti nei sistemi di variabili convergenti che possono definire i suoi termini, non senza aver prima dimostrato che quelle somme si possono considerare come variabili convergenti. Con i corollari al n. 390 generalizza i teoremi premessi alla teoria dell'equivalenza intesa nel senso antico. Il teorema a p. 337: « Date due coppie di variabili convergenti la variabile decrescente di una coppia è sempre maggiore della variabile crescente dell'altra », prepara una definizione di maggiore e minore che l'A. porrà in seguito. Intanto, avere la propria variabile decrescente maggiore della variabile crescente dell'altra, è proprietà assoluta di una coppia, e dipendente soltanto dai limiti delle due coppie (V. il T. 2° a p. 338); e se i limiti sono eguali, ognuna delle due coppie gode di questa proprietà, (teor. seg). A pag. 339 si trovano dimostrati i teoremi inversi, è aperto così l'adito alla definizione di maggiore e minore che l'A. pone a p. 340.

La trama è, come ognun vede, sottilmente e maestrevolmente ordita: ne sia lode al ch. Autore. Sorvolando sulle applicazioni ai poliedri equivalenti, alla superficie e al volume del cono, del cilindro, della sfera, ecc., nelle quali l'A. ha dovuto rinunziare al mezzo delle proporzioni, dirò qualche cosa dell'applicazione al circolo e alla sua superficie. L'A., e ciò è notevolissimo, incomincia dalla superficie. Dimostra che questa è il limite di due variabili principali convergenti, poligoni inscritti e circoscritti succedentisi con la nota legge Euclidea: e che esiste sempre un triangolo equivalente alla superficie di un circolo dato. Posto che l'altezza del triangolo sia eguale al raggio del circolo, dimostra che la sua base è il limite di due variabili convergenti. Esse sono i perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti. Questo limite è indipendente anch'esso dalla legge di successione dei poligoni le aree dei quali convergono verso quella del circolo. *Circolo* chiama l'A. questo secondo limite.

6. La teoria delle proporzioni offre una nuova applicazione di quella dei limiti. Lo spazio concessomi non mi permette di esaminarla qui da vicino. Forse lo farò in una prossima pubblicazione occasionata da una recente edizione degli Elementi di Geometria dei Professori Sannia e d'Ovidio. Questo libro dà luogo a varî confronti con quello del de Paolis. Avverto soltanto che questi ha notevolmente semplificato la celebre definizione di Euclide introducendo l'altra: « Date quattro grandezze, prese in un certo ordine, si dice che formano una *proporzione* se la seconda e la quarta sono contenute sempre uno stesso numero di volte in due grandezze equimultiple della prima e della terza, secondo qualunque numero ».

Ancora un cenno sulla teoria della misura della quale l'altra delle grandezze e dei limiti è un simulacro geometrico che l'A. seppe, come dissi, magistralmente scolpito. (1) Essa riusciva meno ardua all'A. il quale l'ha perciò, a quanto mi sembra, un pò meno curata. L'A. ammette il postulato di Dedekind che corrisponde a quello del limite di due variabili convergenti, del quale si tenne parola. E per misura di una grandezza rispetto a una data unità, intende il numero limite dei numeri commensurabili che rappresentano le misure degli stati (commensurabili coll'unità) delle grandezze variabili convergenti che la definiscono, e dimostra, sempre invocando la teoria delle grandezze variabili, che: « Una grandezza data, rispetto a una data unità, ha sempre una misura, ed una sola. » La dimostrazione del corollario al n. 470 è difettosa, ma fu corretta dai Professori Sannia e d'Ovidio nel loro recente lavoro sopra citato.

E di alcune altre mende meno importanti dell'opera, non occorre tener discorso.

G. Frattini.

---

(1) Il de Paolis ha, in sostanza, fatto in geometria ciò che fè già in Aritmetica il Dedekind col classico lavoro: « Die irrationalen Zahlen ».

QUISTIONE PROPOSTA

Se i raggi dei circoli inscritti nelle quattro facce d'un tetraedro sono fra loro eguali, è necessario che le facce stesse sieno fra loro eguali?

LIBRI RICEVUTI DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Lezioni di Geometria complementare ad uso degli Istituti tecnici di *Raffaele Badia* insegnante di matematiche nell'Istituto tecnico di Perugia. — Città di Castello, S. Lapi editore 1885.

Primi Elementi di Geometria projettiva e descrittiva ad uso degli Istituti tecnici del Regno del Dott. *Vittorio Murer.* 1885, Ditta G. B. Paravia e Comp. — Torino – Milano – Firenze – Roma.

Scuola Militare. — Compendio di Geometria con due appendici sulla trigonometria e sulle projezioni quotate del prof. *Francesco Nicoli.* — In Modena, coi tipi della società tipografica, 1885.

Elementi di Aritmetica generale ed Algebra. Lezioni date nel R. Liceo Umberto I, dal Prof. *L. Rajola Pescarini.* — Napoli, Domenico Morano editore, 1884.

Capitolo aggiunto agli Elementi di Aritmetica generale ed Algebra del professore *L. Rajola Pescarini* contenente la teoria dei logaritmi. — Napoli, Domenico Morano editore, 1885.

INTORNO
AD ALCUNE RELAZIONI FRA DISTANZE
NOTA

DI GINO LORIA

I.

1. La porzione di retta limitata da due punti dicesi *segmento rettilineo*, o, più semplicemente, *segmento*.

2. La figura formata da quattro punti disposti comunque nello spazio dicesi *tetragono*; i punti dati ne sono i *vertici* e i segmenti che li congiungono a due a due gli *spigoli*.

Un tetragono ha sei spigoli, essi sono i lati del triangolo determinato da tre de' suoi vertici e le congiungenti questi col quarto.

Se i quattro vertici stanno in un piano, il tetragono è *piano* e i suoi spigoli si chiamano *lati*.

3. Dati sei segmenti $abcefg$, affinchè con essi come spigoli si possa costruire un tetragono, non è necessario che passi fra essi alcuna equazione di condizione.

Infatti, si costruisca con tre di essi (a, b, c) come lati un triangolo ABC: affinchè ciò sia possibile è necessario e sufficiente che ciascuno sia compreso fra la somma e la differenza degli altri due. Centri due di essi (B, C) e raggi altri due dei dati segmenti (f, g) si descrivano due sfere: queste avranno comune un cerchio (di centro O e raggio r) purchè la distanza BC sia compresa fra la somma e la differenza di quei due segmenti. Questo cerchio secherà la sfera di centro A e raggio e in due punti (D', D'') quando, chiamando E la projezione di A sul piano del cerchio, siá $AE < e$ (*) ed OE risulti compreso fra la somma e la diffe-

(*) Ciò è necessario affinchè il piano del cerchio sechi la sfera.

renza dei due segmenti r e $\sqrt{e^2 - \overline{AE}^2}$. (*) I tetragoni ABCD$'$ e ABCD$''$ hanno entrambi gli spigoli eguali ai segmenti dati; dunque ecc.

Se uno de' punti D$'$, D$''$ cade nel piano ABC il tetragono è piano; in generale ciò non accade, ma affinchè si verifichi questo caso devono i segmenti dati soddisfare qualche equazione di condizione. Ma notando che, dati i segmenti $abcfg$ per modo che si possa con i tre primi come lati costruire un triangolo ABC e che le due sfere di centri B, C e raggi f, g s'incontrino, si può scegliere e in due soli modi per rendere il tetragono piano, (**) si conchiuderà che fra i i sei lati di un tetragono piano passa una e una sola relazione. (***)

4. La figura formata da cinque punti disposti comunque nello spazio dicesi *pentagono*; i punti dati ne sono i vertici, i segmenti che li congiungono a due a due gli *spigoli*.

Un pentagono ha dieci spigoli: essi sono gli spigoli del tetragono determinato da quattro de' punti dati e i segmenti congiungenti i vertici di questo col quinto.

5. Dati ad arbitrio dieci segmenti $abcefg\ a_1b_1c_1d_1$, in generale non esiste alcun pentagono che li abbia per ispigoli.

Infatti, supposte soddisfatte le condizioni esposte nel n. 3, si potrà costruire un tetraedro ABCD i cui spigoli BC, CA, AB, AD, BD, CD siano eguali rispettivamente ai segmenti a, b, c, e, f, g. Supposte soddisfatte altre condizioni analoghe, si potrà costruire sulla stessa base ABC un tetraedro ABCE i cui spigoli EA, EB, EC siano eguali ri-

(*) Questa seconda condizione è necessaria affinchè il cerchio considerato sechi quello in cui il suo piano interseca la sfera data.

(**) Se P$'$, P$''$ sono i punti comuni alla due sfere suddette è al piano ABC si può assumere $e = AP'$ o $e = AP''$.

(***) L'utilità dell'introduzione metodica nella geometria elementare di considerazioni di questo genere, fu sostenuta dal Prof. Besso nel suo articolo *Sul concetto di funzione nell' insegnamento della geometria elementare* (Giornale di Matematiche, Vol. VII).

spettivamente ad $a_1 b_1 c_1$. Ora, il pentagono ABCDE ha nove de'suoi spigoli eguali ad altrettanti dei segmenti dati; ma il decimo, DE, non sarà in generale eguale al decimo, d_1, di questi. Di più, DE è determinato (in uno o più modi) dalla conoscenza dei segmenti $a\,b\,c\,e\,f\,g\;a_1 b_1 c_1$: dunque, affinchè i dieci segmenti dati siano spigoli di un pentagono, dovrà fra essi passare una e una sola relazione. In altre parole, fra i dieci spigoli di qualunque pentagono passa una relazione.

6. Supponiamo in particolare che quattro spigoli uscenti dallo stesso vertice del pentagono siano fra loro eguali; gli altri quattro vertici apparterranno allora alla stessa sfera; fra il raggio di questa e i segmenti che uniscono a due a due i detti quattro punti, passerà quindi una relazione. È facile dedurne che fra i sei archi di cerchio massimo congiungenti a due a due quattro punti di una sfera passa una relazione ed una sola.

7. Dunque, riassumendo i risultati ottenuti, potremo dire:

Fra i sei segmenti che uniscono a due a due quattro punti di un piano; fra gli archi di circolo massimo congiungenti a due a due quattro punti di una sfera; e fra i segmenti che uniscono a due a due cinque punti dello spazio, passa una relazione.

Scopo del presente scritto è la ricerca con metodo elementare di queste relazioni. Ci dispenseremo però d'indicare la via per la quale si può pervenire alla prima, perchè essa si trova additata in opere molto diffuse: d'altronde essa è del tutto analoga a quella per cui si perviene alla seconda.

II.

Se α, β, γ sono tre angoli tali che sia soddisfatta una delle relazioni

$$\alpha+\beta+\gamma=2\pi, \quad -\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \alpha-\beta+\gamma=0, \quad \alpha+\beta-\gamma=0,$$

si avrà

$$
\text{(I)} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0.
$$

Infatti, le prime due fra le date equazioni possono scriversi come segue

$$\beta + \gamma = 2\pi - \alpha, \quad \beta + \gamma = \alpha,$$

le quali concordano nel dare

$$\cos(\beta + \gamma) = \cos\alpha,$$

relazione che, sviluppata, diviene

$$\cos\beta \cos\gamma - \cos\alpha = \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma$$

Elevandola a quadrato si ottiene

$$\cos^2\beta \cos^2\gamma + \cos^2\alpha - 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = (1 - \cos^2\beta)(1 - \cos^2\gamma);$$

e questa, fatte tutte le riduzioni, prende la forma

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = 0$$

c.d.d. — Analogamente si mostrerebbe che anche le due ultime delle date relazioni conducono a questa equazione.

III.

Siano A, B, C, D quattro punti di una sfera, la quale supporremo, come d'uso, di raggio eguale ad 1. Chiamiamo $abcefg$ gli archi di cerchio massimo BC, CA, AB, AD, BD, CD e $\alpha\beta\gamma$ gli angoli BDC, CDA, ADB. In forza dell'equazione fondamentale della trigonometria sferica, avremo

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos f \cos g}{\operatorname{sen} f \operatorname{sen} g}, \quad \cos\beta = \frac{\cos b - \cos g \cos e}{\operatorname{sen} g \operatorname{sen} e}, \quad \cos\gamma = \frac{\cos c - \cos e \cos f}{\operatorname{sen} e \operatorname{sen} f}.$$

Di più, i tre angoli α, β, γ o dànno per somma 2π o uno di essi è eguale alla somma degli altri due: si verifica la prima di tali relazioni se il punto D è interno al triangolo ABC, si verifica una delle altre se è esterno. Ne viene che fra questi angoli passerà la relazione (I). Sostituendo in questa per $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ le espressioni precedenti otterremo:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\cos c - \cos f \cos e}{\operatorname{sen} f \operatorname{sen} e} & \dfrac{\cos b - \cos g \cos e}{\operatorname{sen} g \operatorname{sen} e} \\ \dfrac{\cos c - \cos f \cos e}{\operatorname{sen} e \operatorname{sen} f} & 1 & \dfrac{\cos a - \cos g \cos f}{\operatorname{sen} g \operatorname{sen} f} \\ \dfrac{\cos b - \cos g \cos e}{\operatorname{sen} e \operatorname{sen} g} & \dfrac{\cos a - \cos f \cos g}{\operatorname{sen} g \operatorname{sen} f} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa si potrebbe considerare come la relazione cercata, ma si può trasformarla in modo che essa assuma un aspetto più semplice. Moltiplichiamo a tale scopo le successive verticali del precedente determinante per $\operatorname{sen} e$, $\operatorname{sen} f$, $\operatorname{sen} g$; facciamo le stesse operazioni sulle orizzontali; quindi sostituiamo ad ogni sen^2 il suo equivalente $1 - \cos^2$; finalmente eleviamo di ordine il determinante. Avremo così:

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos^2 e & \cos c - \cos f \cos e & \cos b - \cos e \cos g & 0 \\ \cos c - \cos e \cos f & 1 - \cos^2 f & \cos a - \cos g \cos f & 0 \\ \cos b - \cos e \cos g & \cos a - \cos f \cos g & 1 - \cos^2 g & 0 \\ \cos e & \cos f & \cos g & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Aggiungendo poi alla 1^a orizzontale la 4^a moltiplicata per $\cos e$, alla 2^a la 4^a moltiplicata per $\cos f$ e alla 3^a la 4^a moltiplicata per $\cos g$ otterremo infine

$$\text{(II)} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b & \cos e \\ \cos c & 1 & \cos a & \cos f \\ \cos b & \cos a & 1 & \cos g \\ \cos e & \cos f & \cos g & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Collo stesso ragionamento si dimostra che fra i sei lati di un tetragono piano, passa la relazione

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & 1 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (^*)$$

Applicando la (II) si determina facilmente il raggio sferico del cerchio (minore) circoscritto al triangolo ABC; chiamandolo infatti r la (II) dovrà essere soddisfatta ponendo $e=f=g=r$; ne segue

$$\cos^2 r = -\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b & 1 \\ \cos c & 1 & \cos a & 1 \\ \cos b & \cos a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\operatorname{sen} r = \frac{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\sqrt{\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}+\operatorname{sen}\frac{b}{2}+\operatorname{sen}\frac{c}{2}\right)\left(-\operatorname{sen}\frac{a}{2}+\operatorname{sen}\frac{b}{2}+\operatorname{sen}\frac{c}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}-\operatorname{sen}\frac{b}{2}+\operatorname{sen}\frac{c}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}+\operatorname{sen}\frac{b}{2}-\operatorname{sen}\frac{c}{2}\right)}}$$

(*) E allo stesso modo si dimostra che fra i sei archi geodetici che uniscono a coppie quattro punti di una superficie pseudosferica passa la relazione

$$\begin{vmatrix} 1 & \cosh\frac{c}{R} & \cosh\frac{b}{R} & \cosh\frac{e}{R} \\ \cosh\frac{c}{R} & 1 & \cosh\frac{a}{R} & \cosh\frac{f}{R} \\ \cosh\frac{b}{R} & \cosh\frac{a}{R} & 1 & \cosh\frac{g}{R} \\ \cosh\frac{e}{R} & \cosh\frac{f}{R} & \cosh\frac{g}{R} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

IV.

Siano ABCDE cinque punti qualunque dell'o spazio; indichiamo nel seguente modo gli spigoli del pentagono da essi determinato:

$$BC = a_1 \quad CA = b_1 \quad AB = c_1$$

$$AD = e_1 \quad BD = f_1 \quad CD = g_1$$

$$AE = a_2 \quad BE = b_2 \quad CE = c_2 \quad DE = d_2$$

e nel seguente modo gli angoli formati dalle congiungenti E agli altri punti considerate a coppie:

$$BEC = a \quad CEA = b \quad AEB = c$$

$$AED = e \quad BED = f \quad CED = g$$

Allora, pel teorema del coseno della trigonometria rettilinea, avremo:

$$\cos a = \frac{-a_1^2 + b_2^2 + c_2^2}{2b_2c_2}, \quad \cos b = \frac{-b_1^2 + c_2^2 + a_2^2}{2c_2a_2}, \quad \cos c = \frac{-c_1^2 + a_2^2 + b_2^2}{2a_2b_2}$$

$$\cos e = \frac{-e_1^2 + d_2^2 + a_2^2}{2d_2a_2}, \quad \cos f = \frac{-f_1^2 + d_2^2 + b_2^2}{2d_2b_2}, \quad \cos g = \frac{-g_1^2 + d_2^2 + c_2^2}{2d_2c_2}$$

Ciò posto, descriviamo una sfera di centro E e raggio 1; i raggi EA, EB, EC, ED, prolungati se occorre oltre i loro estremi, incontrano la superficie in quattro punti A'B'C'D' le cui mutue distanze sferiche sono

$$B'C' = a, \quad C'A' = b, \quad A'B' = c, \quad A'D' = e, \quad B'D' = f, \quad C'D' = g:$$

ne segue che fra $a\,b\,c\,e\,f\,g$ passerà la relazione (II). Sostituendo in essa in luogo di $\cos a$, $\cos b$, ..., $\cos g$ le loro espressioni precedentemente trovate, essa prenderà la forma seguente:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{-c_1^2+b_2^2+a_2^2}{2b_2a_2} & \dfrac{-b_1^2+c_2^2+a_2^2}{2c_2a_2} & \dfrac{-e_1^2+d_2^2+a_2^2}{2d_2a_2} \\ \dfrac{-c_1^2+a_2^2+b_2^2}{2a_2b_2} & 1 & \dfrac{-a_1^2+c_2^2+b_2^2}{2c_2b_2} & \dfrac{-f_1^2+d_2^2+b_2^2}{2d_2b_2} \\ \dfrac{-b_1^2+a_2^2+c_2^2}{2a_2c_2} & \dfrac{-a_1^2+b_2^2+c_2^2}{2b_2c_2} & 1 & \dfrac{-g_1^2+d_2^2+c_2^2}{2d_2c_2} \\ \dfrac{-e_1^2+a_2^2+d_2^2}{2a_2d_2} & \dfrac{-f_1^2+b_2^2+d_2^2}{2b_2d_2} & \dfrac{-g_1^2+c_2^2+d_2^2}{2c_2d_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Questa si può considerare come la relazione da cui son legate le mutue distanze di cinque punti dello spazio. Essa può ridursi ad una forma molto più semplice. A tale scopo moltiplichiamo le verticali successive del suo primo membro rispettivamente per $2a_2$, $2b_2$, $2c_2$, $2d_2$ e le sue orizzontali ordinatamente per a_2, b_2, c_2, d_2; poi eleviamo il determinante di ordine; essa allora sarà divenuta

$$\begin{vmatrix} 2a_2^2 & -c_1^2+b_2^2+a_2^2 & -b_1^2+c_2^2+a_2^2 & -e_1^2+d_2^2+a_2^2 & 1 \\ -c_1^2+a_2^2+b_2^2 & 2b_2^2 & -a_1^2+c_2^2+b_2^2 & -f_1^2+d_2^2+b_2^2 & 1 \\ -b_1^2+a_2^2+c_2^2 & -a_1^2+b_2^2+c_2^2 & 2c_2^2 & -g_1^2+d_2^2+c_2^2 & 1 \\ -e_1^2+a_2^2+d_2^2 & -f_1^2+b_2^2+d_2^2 & -g_1^2+c_2^2+d_2^2 & 2d_2^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Sottragghiamo ora dalla 1ª verticale l'ultima moltiplicata per a_2^2, dalla 2ª l'ultima moltiplicata per b_2^2, dalla 3ª l'ultima moltiplicata per c_2^2, dalla quarta l'ultima moltiplicata per d_2^2; elevando l'ordine anche del nuovo determinante avremo:

$$\begin{vmatrix} a_2^2 & -c_1^2+a_2^2 & -b_1^2+a_2^2 & -e_1^2+a_2^2 & 0 & 1 \\ -c_1^2+b_2^2 & b_2^2 & -a_1^2+b_2^2 & -f_1^2+b_2^2 & 0 & 1 \\ -b_1^2+c_2^2 & -a_1^2+c_2^2 & c_2^2 & -g_1^2+c_2^2 & 0 & 1 \\ -e_1^2+d_2^2 & -f_1^2+d_2^2 & -g_1^2+d_2^2 & d_2^2 & 0 & 1 \\ a_2^2 & b_2^2 & c_2^2 & d_2^2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Togliamo poi dalla 1ª orizzontale l'ultima moltiplicata per a_2^2, dalla 2ª l'ultima moltiplicata per b_2^2, dalla 3ª l'ultima moltiplicata der c_2^2 e dalla 4ª l'ultima moltiplicata per d_2^2; nel nuovo determinante cambiamo segno agli elementi delle prime quattro orizzontali e della penultima verticale: otterremo così

$$\text{(III)} \quad \begin{vmatrix} 0 & c_1^2 & b_1^2 & e_1^2 & a_2^2 & 1 \\ c_1^2 & 0 & a_1^2 & f_1^2 & b_2^2 & 1 \\ b_1^2 & a_1^2 & 0 & g_1^2 & c_2^2 & 1 \\ e_1^2 & f_1^2 & g_1^2 & 0 & d_2^2 & 1 \\ a_2^2 & b_2^2 & c_2^2 & d_2^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e questa è la forma definitiva della relazione fra gli spigoli di un pentagono. (*)

V.

Finiremo col mostrare mediante due applicazioni l'utilità dell'equazione (III) in molte questioni di geometria.

(*) Questa relazione fu data per la prima volta nel 1773 da Lagrange nella sua celebre memoria *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires* (cfr. Oeuvres de Lagrange, T. III, p. 677). Poi essa fu oggetto di ricerche da parte di Carnot (v. la sua *Géometrie de position* (1803) p. 417). Finalmente Cayley nel 1841 la pose sotto la forma (III) (v. Cambridge Mathematical Journal, V. II).

1. *Trovare il raggio della sfera circoscritta ad un dato tetraedro.*

Sia ABCD il tetraedro dato, essendo $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $AD=e$, $BD=f$, $CD=g$; chiamando O il centro e r il raggio della sfera ad esso circoscritta, sarà $OA=OB=OC=OD=r$; la relazione analoga alla (III) pei cinque punti ABCDO è

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & r^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & r^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & r^2 & 1 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & r^2 & 1 \\ r^2 & r^2 & r^2 & r^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e questa ci dà subito

$$r^2 = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & 1 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. *Date quattro sfere concentriche, trovare un tetraedro che sia simile a un tetraedro dato e di cui ciascun vertice stia su una delle sfere date.*

Siano $a_1 b_1 c_1 d_1$ i raggi e O il centro delle date sfere: $abcefg$ gli spigoli del tetraedro dato.

Se ABCD è il tetraedro cercato e x un numero da determinare, dovrà essere

$$BC = ax,\ CA = bx,\ AB = cx,\ AD = ex,\ BD = fx,$$

$$CD = gx,\ OA = a_1,\ OB = b_1,\ OC = c_1,\ OD = d_1$$

Fra le mutue distanze de' punti ABCDO dovrà aver luogo la relazione analoga alla (III), dunque:

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2x^2 & b^2x^2 & e^2x^2 & a_1^2 & 1 \\ c^2x^2 & 0 & a^2x^2 & f^2x^2 & b_1^2 & 1 \\ b^2x^2 & a^2x^2 & 0 & g^2x^2 & c_1^2 & 1 \\ e^2x^2 & f^2x^2 & g^2x^2 & 0 & d_1^2 & 1 \\ a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & d_1^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ossia} \quad \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & a_1^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & b_1^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & c_1^2 & 1 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & d_1^2 & 1 \\ a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & d_1^2 & 0 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Donde:

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 \end{vmatrix} x^4 + 2x^2 \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & a_1^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & b_1^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & c_1^2 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & d_1^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & a_1^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & b_1^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & c_1^2 & 1 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & d_1^2 & 1 \\ a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & d_1^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Trovato x il problema è risolto. Deduca il lettore da questa equazione a quali condizioni geometriche debbano soddisfare i dati della questione affinchè si possa effettivamente trovare un tetraedro soddisfacente tutte le condizioni imposte.

Torino, 27 Gennaio 1886.

SOPRA UNA PROPOSIZIONE FONDAMENTALE DELLA TEORIA DELL'EQUIVALENZA

Lettera del Prof. De Paolis al Direttore del Periodico

Pisa, 10 Febbraio 1886.

Pregmo Sig. Professore,

Mi permetta di sottoporre al suo giudizio alcune osservazioni sopra l'articolo pubblicato dal Prof. Faifofer nel primo fascicolo del Giornale che Ella dirige.

Il Prof. De Zolt (Principii della eguaglianza di poligoni — Milano. — D. Briola. — 1881.) fonda la teoria dell'equivalenza dei poligoni sul Teorema: Se un poligono è diviso in parti in un modo qualunque non è possibile, trascurando alcuna di esse, disporre le rimanenti in modo da coprire interamente il poligono.

Essendomi però accorto che la dimostrazione data dal Prof. De Zolt non andava esente da obbiezioni, e non essendo riuscito a trovarne una rigorosa, quando pubblicai i miei « Elementi di Geometria » domandai, con un Postulato, che: Se una grandezza è comunque divisa in parti, trascurandone alcune non è possibile disporre le rimanenti in modo da formare nuovamente la stessa grandezza. Ora, nel suddetto articolo del Prof. Faifofer, leggo un'altra dimostrazione dello stesso teorema; disgraziatamente però anche questa dimostrazione mi pare inesatta, ed ecco la ragione per cui la ritengo tale:

L'Autore deduce che: « Una parte di poligono non » può essere equivalente all'intero », pretendendo di dimostrare prima che: « Sottraendo da due poligoni equivalenti » due loro parti che siano uguali ad un terzo poligono, si » ottengono resti equivalenti ». Ed ecco come: Se A e B sono i due poligoni equivalenti, divisi già in uno stesso numero di parti rispettivamente uguali, e se H e K sono i due poligoni uguali, che si devono togliere da A e B, dividiamo le parti di A e B come sono divise in B ed A dai contorni di K ed H, e se i poligoni H e K sono divisi dalle primitive linee di divisione o dalle *nuove* che si sono tirate, facciamo in ciascuno di essi le divisioni che si scorgono nell'altro. Dopo ciò i due poligoni A e B sono composti di parti rispettivamente uguali, e sopprimendo H e K, si sopprimono di queste parti rispettivamente uguali, quindi, ecc. Però le divisioni e suddivisioni accennate dall'Autore sono sufficienti solamente se le *nuove* linee che si sono tirate non dividono i poligoni H e K, come avviene nella figura che presenta al lettore; se le nuove linee dividessero invece H e K bisognerebbe nuovamente suddividere le parti di A e B come sono suddivise quelle di B ed A, così si descriverebbero altre *nuove* linee che potrebbero ancora suddividere i poligoni H e K, ciò che porterebbe un'ulteriore suddivisione delle parti di A e B, e così di seguito. Mi pare dunque che il teorema sarà dimostrato solamente quando sarà provato che eseguendo le successive operazioni di suddivisione si arriva *necessariamente* ad un punto in cui le *ultime* linee descritte non dividono più i poligoni H, K. E che la dimostrazione possa essere completata, in questo senso, ne dubito. Infatti si tratta di dimostrare il Teorema: « Sono equivalenti i resti che si trovano sottraendo due poligoni uguali da due poligoni equivalenti, e poi dedurne la dimostrazione del Postulato fondamentale dell'equivalenza; ora è dopo avere ammesso questo postulato, e non prima, che si può stabilire il concetto di poligoni maggiori o minori, e per dimostrare che sono equivalenti i resti che si ottengono sottraendo poligoni uguali da poligoni equivalenti, *pare* necessario avere dimostrato che due poligoni o sono equivalenti o uno è maggiore dell'altro.

Finalmente poi mi permetta di farle pure osservare che se anche i Teoremi enunciati dal Prof. Faifofer fossero dimostrati rigorosamente, non basterebbero, come egli dice, per potere « dimostrare le proposizioni sull'equivalenza dei » poligoni e dei poliedri con la stessa semplicità che si » ammira negli Elementi d'Euclide », e ciò perchè appunto, nel caso dei parallelogrammi equivalenti, caso da cui parte Euclide, bisogna applicare successivamente più volte le operazioni di suddivisione.

Mi creda, Sig. Professore, con tutta la stima, suo

Dev.mo
RICCARDO DE PAOLIS.

DEL CIRCOLO CIRCOSCRITTO ED INSCRITTO
E DEI CIRCOLI EX-INSCRITTI IN UN TRIANGOLO SFERICO

I.

Si indichino con a, b, c i lati di un triangolo sferico qualunque, con A, B, C gli angoli opposti, con ψ la tangente trigonometrica del raggio sferico del cerchio circoscritto, con φ quella del raggio sferico del cerchio inscritto, con φ_1, φ_2, φ_3 le tangenti trigonometriche dei raggi sferici dei cerchi inscritti nei nuovi triangoli che si ottengono ordinatamente prolungando due a due i lati b e c, a e c, a e b del triangolo che si considera, e pongasi

$$a+b+c=2p, \quad \mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=2\mathrm{P}$$

$$\pm\sqrt{\operatorname{sen}p \operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)}=\omega$$

$$\pm\sqrt{-\cos\mathrm{P}\cos(\mathrm{P}-\mathrm{A})\cos(\mathrm{P}-\mathrm{B})\cos(\mathrm{P}-\mathrm{C})}=\omega_1$$

Si avranno le eguaglianze

$$\left.\begin{aligned}
\psi &= \frac{2\mathrm{sen}\frac{1}{2}a\ \mathrm{sen}\frac{1}{2}b\ \mathrm{sen}\frac{1}{2}c}{\omega} \\
\varphi &= \frac{\omega}{\mathrm{sen}p} \\
\varphi_1 &= \frac{\omega}{\mathrm{sen}(p-a)} \\
\varphi_2 &= \frac{\omega}{\mathrm{sen}(p-b)} \\
\varphi_3 &= \frac{\omega}{\mathrm{sen}(p-c)}
\end{aligned}\right\} (\mathrm{M}) \qquad
\left.\begin{aligned}
\psi &= -\frac{\cos\mathrm{P}}{\omega_1} \\
\varphi &= \frac{\omega_1}{2\cos\frac{1}{2}\mathrm{A}\cos\frac{1}{2}\mathrm{B}\cos\frac{1}{2}\mathrm{C}} \\
\varphi_1 &= \frac{\omega_1}{2\mathrm{sen}\frac{1}{2}\mathrm{B}\mathrm{sen}\frac{1}{2}\mathrm{C}\cos\frac{1}{2}\mathrm{A}} \\
\varphi_2 &= \frac{\omega_1}{2\mathrm{sen}\frac{1}{2}\mathrm{A}\mathrm{sen}\frac{1}{2}\mathrm{C}\cos\frac{1}{2}\mathrm{B}} \\
\varphi_3 &= \frac{\omega_1}{2\mathrm{sen}\frac{1}{2}\mathrm{A}\mathrm{sen}\frac{1}{2}\mathrm{B}\cos\frac{1}{2}\mathrm{C}}
\end{aligned}\right\} (\mathrm{N})$$

le quali si dimostrano facilmente per mezzo delle relazioni fondamentali della trigonometria sferica.

Il doppio segno da cui sono affetti i valori di ciascuna tangente si spiega osservando che ogni cerchio descritto sulla superficie della sfera ha due poli, ai quali corrispondono due raggi sferici che sono archi supplementari.

II.

Si prendano i valori reciproci di φ, φ_1, φ_2, φ_3 invertendo i rapporti che costituiscono i secondi membri e si addizionino la seconda, la terza e la quarta delle eguaglianze che ne risultano, sottraendo da questa somma la prima. Dopo alcune trasformazioni si troverà

$$\frac{1}{\varphi_1}+\frac{1}{\varphi_2}+\frac{1}{\varphi_3}-\frac{1}{\varphi}=\frac{4\mathrm{sen}\frac{1}{2}a\mathrm{sen}\frac{1}{2}b\mathrm{sen}\frac{1}{2}c}{\omega}$$

ovvero

$$\frac{1}{\varphi_1}+\frac{1}{\varphi_2}+\frac{1}{\varphi_3}-\frac{1}{\varphi}=-\frac{2\cos\mathrm{P}}{\omega_1}$$

secondo che le eguaglianze sulle quali si è operato appartengono al sistema (M) o al sistema (N). Da una qualunque di queste ultime e dai valori di ψ si deduce

$$\frac{1}{\varphi_1}+\frac{1}{\varphi_2}+\frac{1}{\varphi_3}-\frac{1}{\varphi}=2\psi.$$

III.

Ponendo

$$p-a=\alpha,\quad p-b=\beta,\quad p-c=\gamma$$

si ha

$$\beta+\gamma=p-\alpha$$

quindi

$$\cos\beta\cos\gamma-\cos p\cos\alpha=\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma+\operatorname{sen}p\operatorname{sen}\alpha$$

Eliminando i coseni e dividendo per $\operatorname{sen}^2p\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\gamma$ si ottiene

$$\frac{\operatorname{sen}^2p}{2\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\gamma}+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}^2p\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\gamma}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{2\operatorname{sen}^2p\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\gamma}$$
$$+\frac{\operatorname{sen}^2\gamma}{2\operatorname{sen}^2p\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}-$$

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2p\operatorname{sen}^2\alpha}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2p\operatorname{sen}^2\beta}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2p\operatorname{sen}^2\gamma}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}$$
$$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\gamma}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\gamma}+$$

$$+\frac{2\operatorname{sen}^2p+2\operatorname{sen}^2\alpha+2\operatorname{sen}^2\beta+2\operatorname{sen}^2\gamma}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}+\frac{2}{\operatorname{sen}^2p}+\frac{2}{\operatorname{sen}^2\alpha}+\frac{2}{\operatorname{sen}^2\beta}+\frac{2}{\operatorname{sen}^2\gamma}-$$

$$-\frac{4}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}=0$$

Ma dalla seconda, terza, quarta e quinta eguaglianza del sistema (M) moltiplicate fra loro risulta

$$\omega^2=\varphi\varphi_1\varphi_2\varphi_3$$

e per conseguenza

$$\mathrm{sen}^2 p = \frac{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}{\varphi}, \quad \mathrm{sen}^2\alpha = \frac{\varphi\varphi_2\varphi_3}{\varphi_1}, \quad \mathrm{sen}^2\beta = \frac{\varphi\varphi_1\varphi_3}{\varphi_2}, \quad \mathrm{sen}^2\gamma = \frac{\varphi\varphi_1\varphi_2}{\varphi_3}$$

dunque

$$\frac{1}{2\varphi^4} + \frac{1}{2\varphi_1^4} + \frac{1}{2\varphi_2^4} + \frac{1}{2\varphi_3^4} - \frac{1}{\varphi^2\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi^2\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi^2\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_1^2\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_1^2\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_2^2\varphi_3^2}$$

$$+ \frac{2}{\varphi^2} + \frac{2}{\varphi_1^2} + \frac{2}{\varphi_2^2} + \frac{2}{\varphi_3^2} + \frac{2\varphi}{\varphi_1\varphi_2\varphi_3} + \frac{2\varphi_1}{\varphi\varphi_2\varphi_3} + \frac{2\varphi_2}{\varphi\varphi_1\varphi_3} + \frac{2\varphi_3}{\varphi\varphi_1\varphi_2} - \frac{4}{\varphi\varphi_1\varphi_2\varphi_3} = 0$$

IV.

Si sa che il numero $A + B + C - 2$ esprime l'area del triangolo sferico quando si prende per unità di misura degli angoli l'angolo retto e per unità di superficie il triangolo trirettangolo. Ciò posto, indicando con S l'area di un triangolo sferico qualunque, sarà

$$-\cos P = \mathrm{sen}\tfrac{1}{2}S$$

quindi la prima eguaglianza del sistema (N) diviene

$$\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}S = \omega_1\,\psi.$$

Moltiplicando fra loro membro a membro le altre quattro eguaglianze dello stesso sistema ed estraendo la radice quadrata da ambedue i membri della risultante si ottiene

$$2\omega_1^2 = \mathrm{sen}A\ \mathrm{sen}B\ \mathrm{sen}C\sqrt{\varphi\varphi_1\varphi_2\varphi_3}$$

Se si moltiplica la seconda delle eguaglianze (N) per la terza e la risultante si divide per la nuova eguaglianza ottenuta moltiplicando la quarta per la quinta, si trova

$$\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\varphi\varphi_1}{\varphi_2\varphi_3}$$

e quindi

$$\mathrm{sen}A = \frac{2\sqrt{\varphi\varphi_1\varphi_2\varphi_3}}{\varphi\varphi_1 + \varphi_2\varphi_3}$$

È chiaro che con semplici permutazioni di lettere e di indici si ottengono espressioni analoghe per gli angoli B e C.

Sostituendo nell'espressione di $\mathrm{sen}\frac{1}{2}S$ il valore di ω_1 dopo averne eliminato gli angoli A, B, C e ponendo in luogo di ψ il valore trovato nel paragrafo precedente si avrà

$$\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}S = \frac{\varphi\varphi_1\varphi_2 + \varphi\varphi_1\varphi_3 + \varphi\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1\varphi_2\varphi_3}{\sqrt{(\varphi\varphi_1 + \varphi_2\varphi_3)\,(\varphi\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3)\,(\varphi\varphi_3 + \varphi_1\varphi_2)}}.$$

R. Badia.

SULLA

POTENZA AD ESPONENTE IRRAZIONALE
DI UN NUMERO IRRAZIONALE

I.

Richiamo le seguenti proprietà:

1. Tutte le potenze positive e negative di un numero positivo sono positive.
2. Tutte le potenze positive dei numeri maggiori dell'unità sono maggiori dell'unità, e tutte le potenze negative sono minori dell'unità.

   L'opposto accade per le potenze dei numeri minori di uno.
3. Se x acquista valori razionali crescenti, la potenza a^x aumenta sempre quando a è maggiore di 1, e diminuisce sempre quando a è minore di 1.
4. Se a è maggiore di 1, scelto un numero w arbitrariamente grande, si può determinare un numero positivo n pel quale sia

$$a^n > w.$$

Infatti dall'identità

$$a^n - 1 = (a-1)\,(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$$

si deduce

$$a^n - 1 > (a-1)\,n\,;$$

perciò prendendo

$$n > \frac{w-1}{a-1},$$

sarà

$$a^n > w.$$

5. Se a è minore di 1, scelto un numero arbitrarimente piccolo σ, si può determinare un numero positivo n, in modo che sia

$$a^n < \sigma$$

6. Dati due numeri positivi a ed m, si può determinare un numero pure positivo ε tale che, per σ scelto arbitrariamente piccolo, sia

$$(1) \qquad a^{m+\varepsilon} - a^m < \sigma \quad \text{per } a > 1,$$

e

$$(2) \qquad a^m - a^{m+\varepsilon} < \sigma \quad \text{per } a < 1.$$

Supposto $a > 1$, si può sempre (4) determinare un numero n pel quale sia soddisfatta la

$$\left(1 + \frac{\sigma}{a^m}\right)^n > a$$

ossia la

$$1 + \frac{\sigma}{a^m} > a^\varepsilon$$

nella quale ε sta al posto di $\frac{1}{n}$.

Ora dalla precedente diseguaglianza risulta

$$a^m(a^\varepsilon - 1) < \sigma$$

ossia

$$a^{m+\varepsilon} - a^m < \sigma.$$

Quando a è minore di 1, e quindi $\frac{1}{a} > 1$, si potrà determinare un numero ε tale che, per σ_1 arbitrariamente piccolo, sia

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{m+\varepsilon} - \left(\frac{1}{a}\right)^m < \sigma_1$$

ossia

$$a^m - a^{m+\varepsilon} < \sigma_1\, a^{2m+\varepsilon} < \sigma_1 a^{2m}$$

Perciò, posto $\sigma_1 = \frac{\sigma}{a^{2m}}$, sarà:

$$a^m - a^{m+\varepsilon} < \sigma.$$

7. Dati due numeri positivi a ed m ed un numero positivo ed arbitrariamente piccolo σ, si può determinare un numero positivo ε tale che abbia luogo la diseguaglianza

$$(a+\varepsilon)^m - a^m < \sigma.$$

Infatti quando sia

$$\varepsilon < \left\{(1+\sigma_1)^{\frac{1}{m}} - 1\right\} a,$$

è soddisfatta la

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{a}\right)^m - 1 < \sigma_1,$$

la quale, moltiplicata per a^m, dà

$$(a+\varepsilon)^m - a^m < \sigma$$

quando si ponga $\sigma = \sigma_1 a^m$.

8. Dati due numeri positivi a ed m si possono determinare due numeri pure positivi ε, ε' tali che, per σ scelto arbitrariamente piccolo e positivo, sia

$$(a+\varepsilon')^{m+\varepsilon} - a^m < \sigma.$$

Si ha infatti (7)

$$(a+\varepsilon')^{m+\varepsilon} - a^{m+\varepsilon} < \frac{\sigma}{2},$$

e (6)

$$a^{m+\varepsilon} - a^m < \frac{\sigma}{2},$$

e queste, addizionate, dànno

$$(a+\varepsilon')^{m+\varepsilon} - a^m < \sigma,$$

II.

Sieno ora due numeri razionali α e β definiti dalle due classi A, A$'$; B, B$'$, con

$$A \equiv \ldots a_1,\ a_2,\ \ldots;\quad A' \equiv \ldots a'_1,\ a'_1,\ \ldots$$
$$B \equiv \ldots b_1,\ b_2,\ \ldots;\quad B' \equiv \ldots b'_1,\ b'_2,\ \ldots$$

È noto che si possono trovare due numeri, uno della classe A ed uno della classe A$'$, a ed a', tali che la loro differenza sia piccola quanto si voglia; lo stesso può ripetersi per le due classi B e B$'$ (cfr. anche per le notazioni, il trattato d'Algebra elementare del prof. G. Garbieri).

Nel caso delle b positive e delle a maggiori di uno, le diseguaglianze

$$a' - a < \varepsilon',\quad b' - b < \varepsilon,$$

nelle quali ε ed ε' sono arbitrariamente piccoli, conducono alla

$$a'^{b'} - a^b < (a+\varepsilon')^{b+\varepsilon} - a^b;$$

Ma (8) i numeri ε ed ε' si possono scegliere così che sia

$$(a+\varepsilon')^{b+\varepsilon} - a^b < \sigma,$$

per σ arbitrariamente piccolo; perciò sarà *a fortiori*

$$a'^{b'} - a^b < \sigma \qquad \text{(I)}$$

Se ora formiamo le due classi di numeri

$$\text{(II)} \quad \ldots a_1^{b_1},\ a_1^{b_2} \ldots a_2^{b_1} \ldots\ldots;\ \ldots a'^{\,b'_1}_1,\ a'^{\,b'_2}_1,\ \ldots\ldots a'^{\,b'_2}_2,\ \ldots\ldots$$

quelli della prima sono minori di α^β e ne sono maggiori quelli della seconda, e in forza della (I), α^β è il numero definito dalle due classi. Se α e β sono irrazionali, diremo *analogamente* che le due classi (II) separano il numero α^β.

G. Giuliani.

COROLLARI E GENERALIZZAZIONE
DI UN TEOREMA D'EULERO SUL QUADRILATERO

I.

1. È notissimo il teorema che stabilisce una relazione fra i lati d'un quadrilatero, le sue diagonali e il segmento che unisce i loro punti di mezzo, cioè: la somma dei quadrati dei quattro lati d'un quadrilatero è eguale alla somma dei quadrati delle due diagonali aumentata di quattro volte il quadrato della congiungente i loro punti di mezzo. Il quale teorema si dimostra molto facilmente col sussidio della relazione che ha luogo fra i tre lati d'un triangolo e la mediana d'uno di essi. Ed è notevole che la dimostrazione non presuppone che il quadrilatero sia piano.

La relazione fra i lati d'un parallelogramma e le sue diagonali, che è, in forma diversa, quella fra i lati d'un triangolo e la mediana d'uno di essi, è un caso particolare del citato teorema d'Eulero. Ma da questo si rileva pure che ha luogo la reciproca della rammentata proprietà del parallelogrammo, cioè:

Se la somma dei quadrati dei quattro lati d'un qua-

drilatero eguaglia la somma dei quadrati delle sue diagonali, quel quadrilatero è un parallelogramma. (*)

2. Consideriamo ora un poligono di $2n$ lati, piano o gobbo, i cui vertici indicheremo ordinatamente con A, B, C,... A', B', C', ... Applicando il teorema d'Eulero agli n quadrilateri ABA'B', BCB'C', ... e addizionando le n eguaglianze così ottenute, si troverà che la somma dei quadrati dei lati, aumentata della somma dei quadrati delle diagonali AB', A'B, BC', B'C, ... eguaglia il doppio della somma dei quadrati delle AA', BB', ... aumentata del quadruplo della somma dei quadrati dei segmenti $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ..., quando s'indichino con α, β, γ... i punti medj delle AA', BB', CC', ... Di qui risulta il teorema:

Se la somma dei quadrati dei lati d'un poligono di numero pari di lati aumentata della somma dei quadrati di quelle diagonali che uniscono i due estremi di ciascun lato a quelli del lato ad esso opposto, escluse le congiungenti i vertici opposti, eguaglia il doppio della somma dei quadrati delle congiungenti i vertici opposti, queste congiungenti passano per uno stesso punto, che è il punto di mezzo di ciascuna di esse; e in conseguenza i lati opposti del poligono sono a due a due eguali e paralleli.

II.

3. Sia ABCD una base, e sieno AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 gli spigoli laterali consecutivi d'un prisma quadrangolare. Se le diagonali AC_1, BD_1 si tagliano nel loro punto di mezzo, lo spigolo AB risulta eguale e parallelo a D_1C_1, e quindi a DC; perciò:

Se le diagonali che partono da due vertici consecutivi d'una base d'un prisma quadrangolare si tagliano nel loro punto di mezzo, quel prisma è un parallelepipedo.

4. Applicando il teorema d'Eulero ai due quadrilateri ABC_1D_1, CDB_1A_1, e indicando con α il punto di mezzo delle diagonali AC_1, CA_1, e con β il punto di mezzo delle diagonali BD_1, B_1D, si ottengono le due eguaglianze:

(*) Questa osservazione era stata già fatta dal Sig. Stefano Gatti nei suoi *Elementi di Geometria piana con applicazione dell'Algebra*. Torino 1876.

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}_1^2 + \overline{C_1D}_1^2 + \overline{C_1B}^2 = \overline{AC}_1^2 + \overline{BD}_1^2 + 4\overline{\alpha\beta}^2,$$

$$\overline{CD}^2 + \overline{CB}_1^2 + \overline{DA}_1^2 + \overline{A_1B}_1^2 = \overline{CA}_1^2 + \overline{DB}_1^2 + 4\overline{\alpha\beta}^2,$$

le quali addizionate danno:

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{A_1B}_1^2 + \overline{C_1D}_1^2 + \overline{BC}_1^2 + \overline{B_1C}^2 + \overline{AD}_1^2 + \overline{A_1D}^2$$

$$= \overline{AC}_1^2 + \overline{BD}_1^2 + \overline{CA}_1^2 + \overline{DB}_1^2 + 8\overline{\alpha\beta}^2.$$

Ma dai parallelogrammi BCB_1C_1, ADA_1D_1 si ricava:

$$\overline{BC}_1^2 + \overline{B_1C}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{B_1C}_1^2 + \overline{BB}_1^2 + \overline{CC}_1^2,$$

$$\overline{AD}_1^2 + \overline{A_1D}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{A_1D}_1^2 + \overline{AA}_1^2 + \overline{DD}_1^2;$$

perciò è chiaro che:

Nel prisma quadrangolare la somma dei quadrati dei dodici spigoli è eguale alla somma dei quadrati delle quattro diagonali aumentata di otto volte il quadrato della congiungente i punti di mezzo delle diagonali.

5. Dal teorema ora dimostrato si ricava la nota relazione fra gli spigoli d'un parallelepipedo e le sue diagonali. E si ricava pure (3) la proposizione reciproca, cioè:

Se la somma dei quadrati dei dodici spigoli d'un prisma quadrangolare eguaglia la somma dei quadrati delle quattro diagonali, quel prisma è un parallelepipedo.

III.

6. Nel quadrilatero ABCD pongasi:

$$AB = a,\ BC = b,\ CD = c,\ DA = d,\ AC = m,\ BD = p;$$

e sieno L ed M punti delle diagonali BD, AC tali che si abbia:

$$\frac{BL}{BD} = \frac{CM}{CA} = h,$$

in cui h significa un numero positivo qualunque minore di 1. Indicato con g il segmento LM si avrà, pel teorema di *Ste-*

wart, (*), dal triangolo BMD,

$$g^2 + h(1-h)p^2 = h\,\overline{DM}^2 + (1-h)\,\overline{BM}^2 \qquad (1)$$

ma dai triangoli ABC, ACD risulta:

$$\overline{BM}^2 + h(1-h)\,m^2 = ha^2 + (1-h)\,b^2\,,$$

$$\overline{DM}^2 + h(1-h)\,m^2 = hd^2 + (1-h)\,c^2\,,$$

e quindi:

$$h.\overline{DM}^2 + (1-h)\,\overline{BM}^2 = -h(1-h)\,m^2 + h(1-h)(a^2+c^2) + (1-h)^2b^2 + h^2d^2;$$

perciò la (1) diverrà:

$$g^2 + h(1-h)(m^2+p^2) = h(1-h)(a^2+c^2) + h^2d^2 + (1-h)^2b^2 \quad (\mathrm{I})$$

la quale, per $h = \frac{1}{2}$, esprime il teorema d'Eulero.

7. Nel caso particolare:

$$g = 0, \text{ e quindi } \quad h = \frac{b}{b+d},$$

i lati AD e BC sono paralleli, e dalla (I) si ricava la nota relazione fra i lati d'un trapezio e le sue diagonali:

$$m^2 + p^2 = a^2 + c^2 + 2bd.$$

Reciprocamente, se ha luogo questa relazione, la (I) diviene:

$$g^2 + h(1-h).2bd = h^2d^2 + (1-h)^2b^2$$

ossia:

$$g^2 = (hd - (1-h)\,b)^2,$$

la quale, per

$$h = \frac{b}{b+d},$$

dà:

$$g = 0.$$

Dunque:

Se la somma dei quadrati delle diagonali d'un quadrilatero eguaglia la somma dei quadrati di due lati opposti aumentata del doppio prodotto degli altri due lati opposti, questi devono essere paralleli.

D. Besso.

(*) Questo teorema, che stabilisce una relazione fra i tre lati d'un triangolo, il segmento che unisce un vertice ad un punto qualunque del lato opposto, e i due segmenti di questo lato, si dimostra assai facilmente considerando i triangoli rettangoli che si ottengono conducendo da quel vertice la perpendicolare al lato opposto.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

ALGEBRA

Sulle equazioni di secondo grado

1. Trasformare la differenza $x^2 - c$ in un prodotto di due fattori di primo grado
2. Trasformare il trinomio di secondo grado

$$y = x^2 - 2mx + (m^2 - p)$$

in un prodotto di due fattori di primo grado, e da questa trasformazione ricavare i valori di x che annullano y.
3. Trovare le radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ trasformando il suo primo membro in un prodotto di due fattori di primo grado.
4. Trasformare in prodotti di due fattori di primo grado i seguenti trinomi:

$$n^2 - 3n + 2, \quad 2n^2 + n - 1, \quad \tfrac{1}{3}n^2 + \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{6}.$$

5. Porre il trinomio $x^4 - 12x^2 + 35$ nella forma di un prodotto di quattro fattori di primo grado.
6. Posto $x_1 + x_2 = a$, $x_1 x_2 = b$, trovare un trinomio di secondo grado in x il quale si annulli per $x = x_1$ e per $x = x_2$.
7. Calcolare la somma dei quadrati e la somma dei cubi delle radici dell'equazione:

$$3x^2 - 5x - 9 = 0.$$

8. Esprimere in funzione di A, B, C il prodotto

$$\frac{1 + m_1^2}{A + Bm_1 + Cm_1^2} \cdot \frac{1 + m_2^2}{A + Bm_2 + Cm_2^2}.$$

nel quale m_1 ed m_2 significano le radici dell'equazione

$$Bm^2 + 2\,(A - C)\,m - B = 0.$$

9. Posto: $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \beta$, esprimere in funzione di β le due somme:

$$\alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4}, \quad \alpha^5 + \frac{1}{\alpha^5}.$$

10. Provare che, se esiste un valore di x pel quale il trinomio x^2+px+q sia negativo, l'equazione $x^2+px+q=0$ ha le radici reali e diseguali.
11. Provare che, se il trinomio x^2+px+q è positivo per $x=a$ e negativo per $x=b$, esso si annulla per un valore di x compreso fra a e b.
12. Applicare il precedente teorema al calcolo delle radici della

$$30x^2-407\,x+1=0$$

a meno di 0,001.
13. Per quali valori di x è negativo il trinomio x^2-5x+6?
14. Posto $y=7x^2+200x-375$, calcolare la differenza dei valori di y che corrispondono ad $x=100{,}000001$ ed a $x=100$.

Dimostrare che si può dare ad h un valore positivo così piccolo, che la differenza dei valori di y corrispondenti ad $x=100+h$ ed a $x=100$, sia minore di $\frac{1}{10^{1000}}$.

15. Nell'ipotesi che i numeri a, b, c soddisfacciano alla $b^2-4ac>0$ e che sieno dati i segni dei rapporti $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, determinare i segni delle radici della $ax^2+bx+c=0$.
16. A quali condizioni debbono soddisfare a e b affinchè l'equazione $x^4+ax^2+b=0$ abbia quattro radici reali?
17. Discussione delle radici della:

$$x^2-2bm\,x+b^2-a^2=0$$

nella quale a e b sono positivi ed m è, in valore assoluto, minore di 1.
18. Provare che, se l'equazione:

$$x^2+2m\,(k-n)\,x+k^2m^2-n^2+2kn=0,$$

nella quale m, k, n sono positivi o negativi, ha le radici eguali, deve aver luogo una relazione fra k ed n.
19. Quale relazione deve aver luogo fra f, g, f_1, g_1 affinchè uno stesso valore di x soddisfaccia alle due equazioni

$$x^2+fx+g=0,\quad f_1x+g_1=0\ ?$$

20. Quale relazione deve aver luogo fra b, c, b_1, c_1 affinchè le due equazioni

$$x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

abbiano una radice comune?

21. Quale relazione deve aver luogo fra a, b, c, a_1, b_1, c_1 affinchè le due equazioni

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

abbiano una radice comune?

22. Esprimere in funzione di a, b, c, a_1, b_1, c_1 il prodotto

$$(a_1\beta_1^2 + b_1\beta_1 + c_1)\ (a_1\beta_2^2 + b_1\beta_2 + c_1)$$

nel quale β_1 e β_2 significano le radici della $ax^2+bx+c=0$; e dedurne la relazione menzionata nell'esercizio precedente.

23. Provare che, se l'eguaglianza:

$$ax^2 + bx + c = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

è soddisfatta da tre diversi valori di x, dev'essere

$$a = a_1,\ b = b_1,\ c = c_1.$$

24. Dimostrare che, se hanno luogo certe relazioni fra a, b, c, a_1, b_1, c_1, la frazione

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a_1x^2 + b_1x + c_1}$$

è indipendente da x.

25. Provare che la frazione $\frac{1}{x^2 - 1}$ si può mettere nella forma $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$, nella quale A e B sono indipendenti da x.

26. Provare che la frazione $\frac{3x^2 + 4}{x^3 - 15x^2 + 56x}$ si può trasformare nella somma

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-7} + \frac{C}{x-8},$$

nella quale A, B, C sono indipendenti da x.

27. Risolvere l'equazione

$$(x + 1)^2\ (x - 1)\ (x + 3) = 49725.$$

28. Trasformare il polinomio $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ in un prodotto di due fattori uno dei quali sia x^2 e provare che, colla sostituzione $y = x + \frac{1}{x}$, l'altro fattore diviene un trinomio di secondo grado rispetto ad y.

29. A quale condizione deve soddisfare il numero β affinchè l'equazione

$$x^4 + \beta x^3 - 10x^2 + \beta x + 1 = 0$$

abbia quattro radici reali?

30. Risolvere l'equazione:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-5} = 0.$$

D. Besso.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

F. Nicoli. — *Compendio di Geometria* con due appendici. — In Modena coi tipi della Società Tipografica, antica tipografia Soliani, 1885.

Il Prof. Francesco Nicoli, professore di matematica nella Scuola Militare di Modena, ha dato testè alle stampe un suo Compendio di Geometria, con due appendici, in cui sono riassunte le lezioni da lui dettate da parecchi anni nella scuola stessa. Il libro di cui è parola merita di esser segnalato all'attenzione degli insegnanti delle scuole secondarie per lo stretto rigore da cui è informato e per la sua semplicità e chiarezza, pregi che certamente non è facile riunire.

Le due appendici del Compendio, vertono sulla Trigonometria e sulle Projezioni quotate. Nella prima di queste, definiti i rapporti trigonometrici, l'A. passa ad esporre i teoremi dai quali dipende la risoluzione dei triangoli e fra questi può esser notato per la sua dimostrazione diretta il teo: che: *in ogni triangolo la somma di due lati stà alla loro differenza, come la tangente della semisomma degli angoli opposti a questi lati stà alla tangente della loro semidifferenza*, poi tratta la risoluzione dei triangoli sia rettangoli che obliquangoli e ne fà seguire alcune applicazioni. Nella seconda appendice vengono esposte quelle nozioni sulle proiezioni quotate, che sono necessarie a chi deve imprendere lo studio della Fortificazione. Vi si tratta della rappresentazione di punti e rette, del piano, dei problemi relativi a rette e piani, finalmente vi si dà qualche cenno sulla rappresentazione dei poliedri é sulle sezioni piane e intersezioni dei medesimi.

Per ciò che riguarda la pura geometria, in vista dell'uso al quale il libro è destinato, l'A. ne ha limitato la stereometria, dando invece uno sviluppo conveniente alla planimetria, per la quale ultima, mentre ha seguito il metodo euclideo, non ha mancato di aggiungere tutte quelle proposizioni che sono necessarie per rendere il libro più consono ai moderni studi. Per alcuni teo: le dimostrazioni diversificano da quelle che si leggono nei trattati ordinari; così ad es: per dimostrare il teo: *Se due lati di un triangolo sono rispettivamente uguali a due lati di un' altro triangolo e se l'angolo compreso dai primi è maggiore dell'angolo compreso dai secondi, il terzo lato del primo è maggiore del terzo lato del secondo*, l'A. si fonda sopra un teo: dimostrato prima che: *il segmento che unisce un vertice di un triangolo con un punto del lato opposto è minore di uno almeno degli altri due lati.*

Per venire a trattare dei segmenti proporzionali l'a., definito come rapporto fra due grandezze omogenee il numero che esprime la misura della prima quando la seconda è presa per unità, osserva che se le grandezze sono incomensurabili il rapporto stesso non può valutarsi che per approssimazione, e nella definizione di grandezze proporzionali esamina in seguito partitâmente i casi in cui le medesime sono commensurabili e sono incommensurabili e per l'ultimo così si esprime: se il rapporto a meno di $\frac{1}{n}$ di due grandezze incommensurabili è eguale al rapporto a meno di $\frac{1}{n}$ di altre due, e se quest'uguaglianza sussiste qualunque sia il numero n, si dirà pure che queste quattro grandezze sono proporzionali. Trattando poi dei poligoni simili, l'A. che è buon cultore della geometria proiettiva, non ha omesso di introdurre, per quanto lo consentiva il carattere di questo suo lavoro, il concetto di corrispondenza per modo da rendere gli enunciati delle proposizioni più esatti di quel che siano in libri che anche oggidì corrono per le mani della gioventù, considerando sempre il caso sia delle figure direttamente simili, quanto quello delle figure inversamente simili.

Per ciò che si riferisce alle aree, definite le grandezze commensurabili ed incommensurabili e la misura a meno di $\frac{1}{n}$ di una grandezza A rispetto ad un'altra omogenea U, l'A. ottiene l'area del rettangolo considerandone prima i lati commensurabili rispetto ad una stessa unità, poi dimostra che essendo questi incommensurabili rispetto alla data unità lineare, si può assegnare una misura a meno di $\frac{1}{n}$ dei medesimi, scegliendo n convenientemente, in modo che il prodotto de'numeri risultanti rappresenti l'area di un rettangolo avente dal dato una differenza minore di un triangolo piccolo quanto si vuole.

Finalmente per venire alla misura della circonferenza e del cerchio, l'A. premette come lemmi, quattro teoremi sui limiti e dimostra le proposizioni seguenti: *Se un arco minore di una semicirconferenza va sempre diminuendo, la distanza del centro della circonferenza dalla corda di quest'arco va sempre aumentando e giungerà a differire dal raggio meno di un segmento* h *piccolo a piacere*; poi: *si possono circoscrivere ad una circonferenza ed inscrivere in essa due poligoni regolari simili di un numero tale di lati che la differenza tra questi due poligoni risulti minore di un triangolo* t, *piccolo quanto si vuole e la differenza dei loro perimetri risulti parimenti minore di un segmento* h, *piccolo quanto si vuole.*

Questo per quanto riguarda la planimetria. Per ciò che si riferisce alla stereometria è da osservare anzitutto, come già fù avvertito in principio, che l'A. ne ha singolarmente ristretta la trattazione, poichè si è limitato all'esposizione delle proposizioni fondamentali sulle rette e piani paralleli, sulle rette e piani perpendicolari e sulle proiezioni ortogonali, aggiungendo poi le definizioni relative agli angoli, diedri e solidi, ai poliedri ed ai corpi rotondi e in un ultimo capitolo le regole per le misure delle superficie e dei volumi dei prismi, delle piramidi e dei corpi rotondi. Il capo che tratta delle proiezioni ortogonali è peraltro relativamente meno ristretto e ciò in vista di esporre alcune proposizioni che trovano applicazione nello studio della fortificazione, come ad es: questa: *se due piani obliqui al piano di projezione, hanno pendenze eguali e si tagliono, la projezione della loro intersezione è la bisettrice di uno degli angoli formati dalle loro traccie.*

Ed è forse per il desiderio di riescir breve che in taluni punti della II parte del libro esaminato, a nostro giudizio, può esser notata qualche omissione da parte dell'A. Così ad es. in principio della stereometria egli avrebbe potuto con profitto citare il postulato del piano che: *facendo ruotare il piano intorno a due qualunque de' suoi punti si può sempre portarlo a passare per un qualsivoglia punto dato*, poi fondandosi sul medesimo dimostrare il suo teo: 331 per mezzo di tre rotazioni successive del piano (*), indi citare l'altro postulato che: *il piano interseca la retta che passa per due punti posti da bande opposte di esso*, il quale trova immediata applicazione nel teo: 333.

La proposizione che per un punto esterno ad un piano dato passa un sol piano parallelo a quello dato non è avvertita ed avrebbe trovato opportuna sede dopo la definizione dei piani paralleli al n° 342. La prima parte del corollario al n° 360, cioè che: *se una retta è parallela ad un piano, tutti i punti della retta sono equidistanti dal piano*, pare a noi che non si deduca immediatamente dai teo: precedenti e sarebbe stato forse opportuno di innalzarla a teorema.

Nelle definizioni ai n. 405 e 406 è tacitamente ammesso il teo: *due angoli diedri sono proporzionali ai loro angoli piani corrispondenti*: sarebbe quindi stato bene premetterlo esplicitamente o citarlo in una nota. Finalmente, essendo il libro destinato a principianti, al n° 468, quando l'A. considera il tronco di piramide a basi parallele nel quale le basi sono rettangoli e dà la formola che esprime il volume in funzione dei lati delle basi e dell'altezza, avrebbe potuto con vantaggio porre in guardia il lettore inesperto che la formola stessa non serve che per questo caso e non per quello in cui i rettangoli non sono simili e coi lati omologhi paralleli.

Ma queste piccole cose non infirmano il merito del lavoro del Prof. Nicoli che ha dato alla non ricca raccolta di

(*) Come fa il Sig. Faifofer nei suoi *Elementi di Geometria*.

buoni libri scolastici di geometria, italianamente scritti e italianamente pensati, un contributo di notabile valore didattico; però noi vogliamo con lui condolerci di una cosa, che il libro stesso manchi di esercizi da servire di palestra agli studenti per sperimentare le loro forze, e rivolgergli una raccomandazione, quella cioè ch'ei ponga mano ad estendere la stereometria in quella stessa misura che ha fatto per la planimetria, poichè così modificato il suo lavoro potrebbe con profitto anche maggiore servire per gli istituti d'istruzione secondaria.

A. Lugli.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira* Professor na Escola Polytecnica do Porto: Vol. VI, N. 1, 2, 3, 4, 5. Coimbra, 1885.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*, 10.e Année, N.i 10 e 11. Paris, M. Nony, 17, Rue des Écoles.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion*, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, et *J. Neuberg*, Professeur à l'Université de Liège. Tome sixiéme, Janvier et Fevrier 1886.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XVIII. N.i 1 e 2. Firenze 1886.

L. Bianchi. — Sopra i sistemi tripli di superficie ortogonali che contengono un sistema di superficie pseudosferiche (1886).

E. Cesaro. — Considerations nouvelles sur le déterminant de Smith et Mansion.

R. De Paolis. — Le trasformazioni doppie dello spazio (1885).

G. Frattini. — Intorno alla generazione dei gruppi d'operazioni e ad un teorema d'aritmetica (1886).

M. Gremigni. — Teoria delle frazioni decimali periodiche (1883). — Sul cerchio e sulla circonferenza (1884). — La teoria dei quadrati ed il concetto di radicale quadrato (1885).

G. Iung. — Sui sistemi Cremoniani reciproci di grado m (1885).

A. Livini. — Scritti educativi e didattici (1884).

G. Loria. — Su alcune proprietà metriche della cubica gobba osculatrice al piano all'infinito (1885).

I. Neuberg. — Mémoire sur le tétraèdre (1884). — Sur les tétraèdres de Möbius (1884). — Sur les tangentes communes à un cercle et à une conique (1885). — Sur le quadrilatère harmonique.

F. Porta. — Trigonometria sferica. — Torino, Bocca, 1886.

L. Rajola Pescarini. — Rapporti esatti ed approssimati e Teoria delle proporzioni. Napoli, Morano, 1886.

A. Suini. — Elementi di prospettiva lineare. Milano, tip. degli Ingegneri, 1880.

OSSERVAZIONI ED ESEMPI
SULLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI DI GEOMETRIA

I.

Sebbene la felice risoluzione dei problemi dipenda in gran parte dalla intuizione individuale e dalla facilità nel richiamare alla mente e riavvicinare quelle cognizioni che vi hanno stretto legame, nondimeno si possono dare alcune regole generali che, aiutando i principianti, valgano ad evitare tentativi infruttuosi ed avvezzarli ad una esposizione ordinata e rigorosa.

I metodi seguiti nella risoluzione dei problemi geometrici si riducono sostanzialmente a due: *analitico* e *sintetico.*

Il metodo analitico consiste nel ridurre il problema ad un altro noto, cioè nel rinvenire un problema di cui sia conosciuta la soluzione ed onde si possa far discendere quella del dato.

Il metodo sintetico consiste nel *dedurre* (onde si chiama anche *deduttivo*) dalla soluzione di un problema quella di un altro, e così via, finchè si giunga al proposto, che in tal guisa verrà ad essere risolto.

Col primo metodo si passa dall'ignoto al noto; col secondo, dal noto all'ignoto; ond'è che giustamente l'uno venne chiamato da Kant *metodo regressivo*, l'altro *metodo progressivo*.

II.

Metodo analitico

Secondo questo metodo la risoluzione d'un problema si compone in generale di cinque parti ben distinte:

1º Costruzioni ausiliarie.

2º Esame, per mezzo della figura ausiliaria, di relazioni sussistenti fra i dati e le incognite del problema, per cui gli uni determinano le altre.

3º Costruzione finale.

4º Dimostrazione.

5º Discussione.

1º Costruzioni ausiliarie. — La prima cosa da farsi è di supporre il problema già risoluto, tracciando una figura che risponda approssimativamente ai dati. Ciò fatto, si cerca di effettuare qualche costruzione preparatoria (conducendo linee e determinando punti in istretta relazione colla data figura) tale che conduca ad una figura facilmente costruibile coi dati, e da cui la richiesta possa dedursi ricorrendo alle mutue loro relazioni. Non si possono stabilire regole fisse per queste costruzioni sussidiarie; ma, se ben si riflette alla natura della questione ed alle verità geometriche che essa richiama, si resta naturalmente guidati nella scelta degli elementi che si possono prendere in aiuto.

Queste costruzioni hanno per iscopo di mettere in evidenza i rapporti sussistenti tra i dati e le incognite del problema, ed arrivare a determinare le une per mezzo degli altri. Nell'andarne alla ricerca bisogna sempre tener presente questo loro scopo essenziale.

II. Esame. — Eseguite le opportune costruzioni ausiliarie si procede col loro aiuto all'esame delle relazioni che hanno tra loro i dati e le incognite nella questione. Per questo è necessaria la conoscenza delle proprietà delle figure che si hanno in esame; e inutile riuscirebbe ogni tentativo per la risoluzione d'un problema se non si presentassero spontaneamente al pensiero i teoremi su cui poterla fondare. La giudiziosa loro scelta e combinazione è suggerita dalla stessa natura dell'argomento a chi si sia alquanto impratichito dei procedimenti geometrici ed abbia fatto attento studio delle proprietà delle figure. Importerà anzitutto di non divagarsi in considerazioni estranee all'argomento; ma concentrare l'attenzione sulle proprietà che hanno *diretta relazione* coll'enunciato.

III. Costruzione finale. – Trovate le relazioni fra i dati e le incognite, o meglio fra la figura ausiliaria e quella da costruirsi, per mezzo delle quali la prima determini la seconda, si è in grado di risolvere il problema.

Un problema si riterrà risolto quando le incognite si sapranno determinare per mezzo delle costruzioni elementari della geometria, e cioè

a) condurre una retta che passi per due punti dati;

b) descrivere con dato centro e dato raggio una circonferenza;

c) condurre un piano per tre punti dati, oppure (ciò che è lo stesso) per un punto e una retta, per due rette concorrenti, per due parallele;

d) descrivere una sfera con dato centro e dato raggio;

oppure quando si sia ridotto, per mezzo di queste costruzioni elementari, a un altro di cui sia nota la soluzione.

Non è inutile poi avvertire che la costruzione non sarà esatta se non quando la figura ottenuta soddisfi a *tutte* le condizioni imposte. Essa si raggiunge immediatamente, una volta conosciute le relazioni in parola, ripassando dalla figura ausiliaria alla primitiva col cammino inverso a quello mediante il quale dalla primitiva (supposta esatta) si era passati a questa. In breve, le costruzioni finali sono ordinatamente le inverse delle ausiliarie.

IV. Dimostrazione. – Quando si sia indicato il modo di costruire la figura cercata rimane a farsi la *dimostrazione*, vale a dire quel ragionamento con cui si prova, appoggiandosi a teoremi conosciuti, che essa è quella richiesta, o in altri termini soddisfa a tutte le condizioni stabilite. Se l'analisi fatta precedentemente era esatta, la costruzione non può essere che giusta, perchè ottenuta tenendo accuratamente calcolo di tutte le condizioni: epperò logicamente la dimostrazione non sarebbe necessaria. Pure, come utile esercizio e verificazione dell'analisi eseguita, converrà stenderla con diligenza.

V. Discussione. – Non può dirsi completa una risoluzione quando non venga accompagnrta dalla relativa discussione. Talora un problema non ammette soluzione alcuna, tal altra ne ammette più d'una; altre volte, infinite: la modificazione di qualche dato può far passare dall'uno all'altro di questi casi. La discussione ha appunto per oggetto di abbracciare il problema in tutta la sua generalità, osservando come cangi il numero delle soluzioni quando i dati vengano modificati nella loro grandezza o posizione (non nella loro natura); e distinguendo nettamente i limiti tra i diversi casi. Essa poi conduce ad osservazioni e proprietà che possono mettere in chiara luce l'essenza del problema; e si raccomanda in particolare ai principianti, i quali generalmente la trascurano troppo.

III.

La soluzione d'un problema si riduce talora, o se ne può facilmente far dipendere, alla determinazione di qualche punto. In questo caso si ricorre alle conoscenza dei *luoghi*, cioè l'assieme di punti (costituenti una linea o una superficie) tali che *essi*, ed *essi soltanto*, soddisfacciano a una data condizione.

Così il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due fissi è il piano perpendicolare sul mezzo del segmento rettilineo che li congiunge; essendo che tale proprietà spetta ai punti di quel piano, e non ad altri.

Or bene, dall'esame delle condizioni cui nel problema è assoggettato il punto richiesto si vedrà, considerando a parte ogni condizione, che esso dovrà giacere su due o più luoghi contemporaneamente. Se questi avessero più punti a comune, essendochè tutti soddisferebbero alle condizioni date, il problema ammetterebbe più d'una soluzione. Bisognerà poi cercare, nel caso che più luoghi si presentassero, di scegliere i più semplici, i quali dovranno essere rette o circoli, piani o sfere, se si vuol rimanere nel dominio della geometria elementare.

IV.

Giunge a proposito un'osservazione. Un problema potrebbe ammettere in certi casi, ed anche sempre, infinite soluzioni; e allora, dopo aver dimostrato come le condizioni imposte siano insufficienti, cioè che altre se ne potrebbero stabilire oltre quelle, basterà naturalmente costruire una fra le infinite figure rispondenti alla questione. Però se quanto si domanda è un punto, non bisognerà limitarsi a costruirne uno, ma sarà duopo determinarne il *luogo*.

I problemi di questo genere sono generalmente enunciati in modo da far palese la infinità dei punti che vi soddisfanno; e si limitano appunto a richiedere il luogo. La loro risoluzione conterrà un teorema, venendosi così a dimostrare una proprietà del luogo stesso.

V.

Metodo sintetico

Non sempre si usa nella risoluzione dei problemi il metodo analitico, sebbene sia il più sicuro e fecondo. Alcune volte la semplicità della questione fa in sulle prime intravvedere la costruzione da eseguirsi, o suggerisce un noto problema dal quale si possa far dipendere il dato; senza che occorra una completa analisi. In questo caso non rimane altro a dimostrarsi che quella costruzione è esatta, cioè corrisponde appieno al problema.

Questo modo di risolvere i problemi costituisce il metodo sintetico; esso non comprende quindi che due parti, costruzione e dimostrazione, alle quali sarà bene aggiungere la discussione.

Il carattere dommatico di questo metodo, se lo fa preferire nella esposizione scolastica e nei libri di testo, non mette in piena luce il processo con cui si è giunti alla soluzione, e la fa apparire piuttosto un'intuizione o divinazione che il natural risultato di ben collegati raziocini.

Se il metodo sintetico fa conoscere il vero, l'analitico mostra anche come vi si è giunti: è quindi a un tempo più convincente ed istruttivo; e, dando più largo campo alla investigazione individuale, apre meglio la mente a superare nuove difficoltà.

VI.

Dimostrazione dei teoremi

Non solo nella risoluzione dei problemi, ma ben anco nella esposizione di teoremi e della scienza in generale, si possono seguire i due metodi sintetico e analitico, intesi nel senso generale come furono definiti nel n. I.

Il metodo analitico, universalmente applicato nei testi di geometria elementare, si accontenta di enunciare i teoremi (senza mostrare per che via si siano presentati), e costringe ad accettarli *a posteriori* con un ragionamento mediante il quale da essi si risale ad altri conosciuti, passandosi così dunque dall'ignoto al noto. Il sintetico invece progredisce ordinatamente da una verità all'altra per via di deduzione; cammina cioè dal noto all'ignoto, mostrando la via tenuta nel rinvenire date verità.

E qui si noti la differenza essenziale di metodo tra risolvere una data questione a parte, e lo stabilire dei veri formanti un corpo di dottrina. Nel primo caso è opportuno seguire il metodo analitico; nel secondo è meglio, anzi quasi sempre necessario appigliarsi al sintetico; e le verità geometriche che tutto dì si vanno scoprendo in gran parte non si sono ottenute altrimenti. Il metodo sintetico, come il vero processo dell'invenzione, è da preferirsi per la razionale esposizione della scienza: se non che sarebbe impossibile seguirlo quando essa non fosse giunta a un'ordinato e logico assieme, per cui ogni verità conduca grado grado ad altre, senza che vi sia sconnessione fra le varie parti o i teoremi appaiano quasi il frutto di un caso fortunato.

L'insegnamento della geometria elementare sarebbe assai più proficuo per l'intelligenza e meglio preparerebbe agli studi superiori, ove venisse dato sinteticamente; ed io faccio voti sorga presto un buon trattato che s' ispiri a questi principî.

VII.

Nel novero dei problemi possiamo comprendere i teoremi da dimostrare o le proposizioni da esaminare, per riconoscere se siano vere o false. Gioverà attenersi al metodo analitico, per quanto già si disse; e cioè partendo da questa proposizione si risalirà ad altre, per via di induzione, finchè si giunga ad una conosciuta. Se questa è falsa, sarà pure falsa la primitiva (giacchè da una verità non può scaturire, ragionando esattamente, una conseguenza erronea); se questa è giusta, non potremo dire che lo sia parimenti la prima; ma si dovrà, rifacendo in senso inverso il cammino, vedere se reciprocamente dalla prima si possa dedurre la seconda: perchè allora, e allora soltanto, essa è conseguenza di verità, e quindi vera (*).

(*) Che da un falso si possa, ragionando esattamente, *arrivare* ad una conclusione esatta, ognuno lo comprende di leggieri; e parecchi esempi si potrebbero dare. Per citarne uno dalle scienze fisiche, e certo falsa l'ipotesi di due fluidi elettrici aventi le proprietà che loro si attribuiscono; pure ne discendono delle verità verificate; e cioè, per citare una frase molto espressiva dei Francesi, *le cose avvengono come se così fosse realmente* (les choses se passent comme s'il était ainsi). Parimenti la teoria atomica è probabilmente falsa; eppure essa serve a spiegare molti fenomeni, alla cui esistenza si può giungere partendo da essa, e della quale

VIII.

Alcuni esempi.

Daremo qualche esempio per meglio far comprendere ed applicare le precedenti osservazioni.

---

quindi appaiono conseguenze. *Appaiono* dico; giacchè a rigore logico il vero a cui si *giunge* partendo da un falso non si può ritenerne la *conseguenza*, talchè in fondo il vero non può essere che conseguenza del vero. Le conclusioni vere da falsi principi si hanno allorquando, (e questo avviene il più delle volte senza che ce ne accorgiamo) non si tien conto della completa ipotesi, e trascurando quella parte di falso, per così dire, che essa contiene, si fonda il ragionamento solo su certe proprietà generali che effettivamente sono vere. Tali conclusioni non muterebbero se anche l'ipotesi venisse modificata, attenendosi ai principii che l'hanno ispirata. Ognun sa ad esempio che se invece di due fluidi elettrici si ammettessero due forze contrarie, le conseguenze sarebbero le stesse; per cui la verità delle conclusioni non sta nell'ipotesi dell'esistenza dei due fluidi, ma piuttosto nel modo di agire di quella qualunque causa che così si chiama; modo che è esatto, perchè fondato sull'esperienza; e che non può quindi condurre che a conseguenze esatte.

Queste osservazioni sono importanti nelle scienze naturali, le quali si valgono di ipotesi che non ponno direttamente essere verificate, e per giudicare le quali conviene ricorrere alle conseguenze. Se una data ipotesi conduce a un falso, essa va rigettata come falsa; mentre se conduce a un vero essa non si può ritenere esatta se non quando questo ne sia una *vera conseguenza* e cioè non possa aver luogo senza quella. Ma il verificarlo è difficile ed anche impossibile talvolta per la molteplicità delle ipotesi che si possono fare; mentre per altra parte sfugge il più delle volte, nel ragionare su un'ipotesi, quella parte essenziale di essa che poi andrebbe esaminata: cosicchè viene a mancare, da una parte la prova per asserire, dall' altra quella per negare; e si resta sempre incerti.

Nella geometria felicemente però avviene tutt'altro; qui il piccolo numero di ipotesi che si possono generalmente fare su un dato soggetto e la facilità d'una discussione che porti presto a una

Esempio. I.

Dato nel piano d'un angolo un punto, condurre per esso una retta tale che il segmento intercetto fra i lati sia diviso a metà dal punto stesso.

Qui daremo l'esempio d'un'analisi completa e diffusa, con tutte le 5 parti accennate nel n. II e nell'ordine ivi tenuto.

1. — Suppongasi già costruita la retta desiderata, la quale dovrà quindi esser tale che il segmento AB (fig. 1) compreso tra i lati del dato angolo C sia diviso a metà nel punto dato P.

Qui è opportuna una costruzione ausiliaria, perchè la

---

conseguenza falsa, se falsa era l'ipotesi, forniscono un criterio pressochè sicuro.

Un esempio fisserà meglio le idee sulle cose esposte.

Partendo dall'ipotesi errata che la corda in un cerchio sia proporzionale all'arco, deduco che le corde che congiungono i punti di divisione d'un arco diviso in n parti eguali sono eguali fra loro; in quantochè sarebbero la n^{esima} parte della corda corrispondente all'intero arco: e questo risultato è esatto. Ma se ben si guarda, questa non è a rigore una conseguenza dell'ipotesi presa nel suo complesso; ma d'un'altra più generica, e vera, che le corde degli archi parziali hanno tutte lo stesso rapporto $\left(\text{che non e } \frac{1}{n}\right)$ con quella dell'arco totale. Che se invece si tien calcolo dell'ipotesi che questo rapporto sia $\frac{1}{n}$, ne verrebbe che la corda dell'arco totale dovrebbe essere eguale alla somma delle corde degli archi parziali (perchè n volte la sua n^{ma} parte); cioè un segmento rettilineo dovrebbe essere eguale ad una spezzata contermine: conseguenza assurda che ci avverte della falsità dell'ipotesi. Parimenti se si supponesse che in un qualunque triangolo la mediana sia bisettrice dell' angolo dal cui vertice parte, ipotesi errata, si potrebbe facilmente giungere alla proposizione esatta che essa divide a metà tutte le parallele alla base. Ma è facile vedere che questo non discende necessariamente dall'ipotesi; la quale invece, tenuto calcolo di tutto, condurrebbe ad ammettere che il triangolo sia diviso in parti eguali e quindi isoscele: e questa conseguenza è, come deve essere, falsa, e ci avverte della falsità dell'ipotesi.

figura come sta non fornisce relazioni sufficienti per la determinazione dell'incognita. Si osservi infatti che del triangolo ABC non conosciamo che un angolo, il C; e che l'essere P il punto di mezzo del lato opposto AB ha in sè molto di vago, o per lo meno non si traduce immediatamente in relazioni fra gli altri elementi del triangolo, si che valgano a far scorgere il modo di costruirlo.

Andiamo adunque in cerca di questa costruzione ausiliaria. La prima idea che si presenta è di condurre la retta CP che per dato del problema è nota. La conoscenza dell'angolo C e della retta CP ci fa subito pensare se si possa costruire qualche figura con questi dati. Siamo così condotti facilmente al parallelogrammo, tanto più se si riflette che CP sega BA a metà, fatto che ci richiama subito le diagonali d'un parallelogrammo per le quali il bisecarsi scambievolmente è proprietà caratteristica. In conformità di questa osservazione nasce spontanea l'idea di prolungare di altrettanto la retta CP nel punto D, per avere in tal guisa due segmenti BA, CD che si tagliano a metà, e i cui estremi sono quindi vertici di un parallelogrammo.

In tal guisa abbiamo costruito una figura ausiliaria, il parallelogrammo ABCD (parallelogrammo perchè le diagonali si tagliano a metà), facilmente determinabile coi dati del problema, e dal quale la figura richiesta non meno facilmente si può dedurre.

2. – E infatti esaminiamo le relazioni delle due figure. Intanto il parallelogrammo è determinato coi dati del problema, giacchè uno de' suoi angoli dev'essere il dato C ed una sua diagonale la CD, doppia di CP, retta nota. Di questo parallelogrammo poi la retta richiesta AB é l'altra diagonale. È così trovata una relazione determinatrice tra la figura ausiliaria (il parallelogrammo) e la domandata (la retta AB).

3. – Una volta ottenuta questa relazione, la costruzione è subito eseguita rifacendo il cammino in senso in-

verso; vale a dire partendo dal parallelogrammo per arrivare alla retta AB, sua diagonale. Si procederà dunque così:

Congiunti con retta i punti C e P, si prenda PD = PC e si completi il parallelogrammo di cui C è un angolo e CD una diagonale, conducendo da D le parallele DB, DA ai due lati dell'angolo C. Condotta AB, questa sarà la retta richiesta.

4. — E infatti nel parallelogrammo ABCD le diagonali si tagliano a metà, dunque la AB dovrà passare per il punto di mezzo P dell'altra diagonale CD, ed ivi dovrà essere divisa a metà; vale a dire il segmento costruito AB passa per P, il quale è poi il suo punto di mezzo; cioè soddisfa alle condizioni del problema.

5. — Il punto P può avere diverse posizioni; e precisamente sono a distinguersi tre casi: 1º quando è interno all'angolo, 2º quando è sopra un lato, 3º quando è fuori dell'angolo.

Nel primo caso, che è quello contemplato dalla figura, si può realmente costruire un parallelogrammo, ed uno solo, il quale avrà, oltre la CD, una sola diagonale AB, epperò il problema ammette un'unica soluzione.

Nel secondo caso non si può costruire un vero parallelogrammo; o a meglio dire, il parallelogrammo si riduce al segmento CD preso sul lato su cui giace P in modo che CP = PD (fig. II); e la CD si può considerare come una soluzione impropria.

Nel terzo abbiamo una soluzione; se non che uno dei lati va prolungato al di là del vertice, per essere incontrato dalla retta costruita (fig. III).

IX.

Daremo un altro esempio per mostrare il modo con cui, nel metodo analitico, si è guidati alle costruzioni ausiliarie, e per fornire nel tempo stesso il modello d'una discussione la quale ci fornirà l'occasione di formulare una regola importante.

Esempio II. — *Per il punto* P *comune a due circonferenze* O e Q *condurre una retta tale che il segmento intercetto fra le stesse eguagli un segmento dato* r (fig. IV).

1. — Suppongasi già tracciata la retta AB che soddisfa al problema. Tutta l'attenzione deve concentrarsi per ottenere, secondo le regole stabilite, una figura determinata dai dati del problema, e da cui la retta richiesta possa ricavarsi facilmente.

Qui di noto c'è la retta OQ; con questo adunque e cogli altri dati vediamo di costruire qualche figura utile allo scopo. Si presenta subito alla mente il teorema che i raggi perpendicolari alle corde le dividono a metà, essendo questione appunto di corde e di grandezze loro. Onde naturalmente si è guidati a condurre da O e da Q le perpendicolari ad AB; queste, cadendo in C e D sulla AB, divideranno a metà le corde AP e PB; onde CD sarà la metà di AB, cioè metà di r; epperò la sua grandezza ci sarà nota. In tal modo ecco che abbiamo ottenuto un trapezio rettangolo OCQD, di cui ci sono noti i lati obliqui OQ, CD, e che è in istretta relazione colla retta da costruirsi. Quel trapezio però non è completamente conosciuto; onde noi cercheremo di dedurne una figura che si sappia tosto determinare coi risultati così ottenuti.

Riflettendo che del trapezio sono noti due lati non che degli angoli (quelli retti) elementi sufficienti a determinare un triangolo, sorge spontanea l'idea di condurre la QE parallela a CD, la quale dà luogo a un triangolo rettangolo EQO. Di questo si conosce l'ipotenusa e un cateto $EQ=CD=\frac{1}{2}r$, onde si sa costruire; per altro esso determina alla sua volta la retta AC, onde possiamo ritenere esaurita la costruzione ausiliaria.

2. — Esaminiamo ora le relazioni fra la figura ausiliaria e quella richiesta. Basterà all'uopo osservare che la AB, per la stessa costruzione, viene ad essere la parallela condotta da P al cateto QE del triangolo.

3. — Possiamo immediatamente venire alla costruzione. Basta, secondo la regola generale, eseguire le costruzioni in

ordine inverso; cosicchè, mentre prima siamo partiti dalla retta incognita AB per arrivare alla figura nota del triangolo rettangolo, ora passeremo da questa a quella, la quale verrà in tal modo ad essere determinata. La costruzione è pertanto la seguente:

Sopra OQ come ipotenusa si costruisce il triangolo avente come cateto QE un segmento eguale alla metà di r (basterà descrivere un semicerchio su OQ, e, centrato in un estremo Q, con raggio $= \frac{1}{2}r$ segarlo nel punto E, che si congiungerà cogli estremi O e Q); dal punto P si conduca la parallela AB alla QE, e questa sarà la retta richiesta.

4. — Dimostriamo l'esattezza della costruzione. Prolungata OE fino ad incontrare in C la corda AP, si conduca da Q la parallela QD ad OE (serve ancora la fig. IV): queste ultime due rette sono raggi nei due cerchi perpendicolari alle corde AP, PB (perchè perpendicolari alla loro parallela QE); epperò le dividono a metà; onde il segmento CD sarà la metà di AB. Ma CD = QE, perchè lati opposti di un rettangolo; ed essendosi fatto $QE = \frac{1}{2}r$, sarà CD pure $= \frac{1}{2}r$, epperò $AB = r$. La AB pertanto passa per il punto dato P ed ha la lunghezza voluta r, e quindi soddisfa completamente al problema.

5. — Discutiamo ora la soluzione. Se $QE = \frac{1}{2}r$ è minore di OQ, sopra questa retta come ipotenusa si ponno costruire due triangoli rettangoli aventi un cateto eguale a $\frac{1}{2}r$; e cioè facendo partire il cateto $= \frac{1}{2}r$ dall'uno oppure dall'altro estremo dell'ipotenusa. Laonde, conducendo a questi due cateti la parallela da P avremo chiaramente due rette soddisfacenti entrambe al problema.

Se $\frac{1}{2}r$ fosse = OQ, allora il triangolo rettangolo si ridurrebbe alla OQ, e la parallela condotta da P a questa retta sarebbe in tal caso l'unica soluzione del problema.

Se finalmente si avesse $\frac{1}{2}r > OQ$, $\frac{1}{2}r$ non potrebbe essere cateto d'un triangolo di cui OQ fosse l'ipotenusa; quindi il problema non ammetterebbe soluzione.

Concludendo, il problema ammette:

due soluzioni	quando il segmento $\frac{1}{2}r$ sia				$<$	OQ
una soluzione	»	»	»	»	$=$	OQ
nessuna »	»	»	»	»	$>$	OQ

X.

La discussione precedente ci porta ad un'osservazione generale. Quando un problema ammette al più due soluzioni, dovrà a volte presentarne una sola, a volte nessuna; e il passaggio tra i casi in cui le soluzioni sono due e quelli in cui non ne esiste alcuna, sarà sempre segnato da quello in cui se ne ha una sola.

Questo fatto costante dipende in ultima analisi da ciò che un cerchio può essere segato da una retta, a norma della sua posizione, in due punti, in uno o in nessuno; e precisamente che se una retta si muove con una certa legge sul piano d'un cerchio, se dapprima lo segava in due punti, verrà un momento in cui più non lo segherà, e il passaggio tra l'uno e l'altro stato di cose è dato da quell'istante in cui i due punti di segamento riunendosi in uno, la retta diviene tangente.

XI.

Come esempio dell'applicazione di luoghi geometrici, in conformità al detto nel n. III, e nel medesimo tempo per fare applicazione del problema precedente, risolveremo il seguente:

Esempio III. – *Costruire un triangolo eguale a un triangolo dato* ABC, *e i cui lati passino per tre punti dati* M, N, P. (fig. V).

Qui non faremo più la distinzione che per maggior chiarezza abbiamo posto tra le cinque parti delle soluzioni precedenti: e in tal modo intendiamo offrire un esempio della forma sotto cui si esporrà preferibilmente la soluzione dei problemi.

Supposto costruito il triangolo richiesto A′B′C′, eguale cioè ad ABC e i cui lati passino per M, N, P, osservo che, volendosi che sia angA′ = angA, angB′ = angB e per conseguenza angC′ = angC, il vertice A′ dovrà trovarsi su un arco di cerchio capace dell'angolo A, e così B′ su un arco di cerchio capace dell'angolo B, e costruiti rispettivamente su PN e su PM. Per altro riflettendo che A′B′ deve essere eguale ad AB, tosto si presenta la seguente soluzione:

Descritto su PN un arco di cerchio capace dell'angolo A, su PM uno capace dell'angolo B, si conduca per P, seguendo la costruzione del problema precedente, una retta a segare i due cerchi in guisa che sia A′B′ = AB. Condotte poi A′N, B′M a segarsi in C′, sarà A′B′C′ il triangolo richiesto.

Infatti per costruzione si ha A′B′ = AB, angA′ = angA, angB′ = angB; dunque il triangolo A′B′C′ sarà eguale ad ABC; e siccome per costruzione i suoi lati passano rispettivamente per i punti M, N, P, esso sarà il richiesto.

Per discutere poi questa soluzione, osserviamo anzitutto che su NP, invece di costruire un angolo eguale ad angA potevamo costruirne uno eguale ad angB oppure ad angC; e analogamente su PM; e si sarebbero così ottenuti altri triangoli soddisfacenti al problema. Perchè determinati due angoli lo è anche il terzo, così si vede che avremmo potuto procedere in 6 modi differenti, costruendo su NP un angolo eguale ad A, oppure a B, oppure a C, e in ognuno di questi casi costruendo su PM un angolo eguale all'uno oppure all'altro dei due rimanenti.

Ognuna poi di queste maniere può dar luogo a due soluzioni; giacchè, come vedemmo dal precedente problema, per un punto comune a due cerchi si possono condurre al più due seganti eguali a un segmento dato; e qui appunto, una volta fissati i due angoli che si prendono da principio (uno opposto a NP e l'altro a PM) resta fissato il lato da prendersi, cioè la lunghezza della segante da condursi per P.

Osservando che in tal modo abbiamo esaurite tutte le possibili combinazioni dei dati (giacchè ogni altra sarebbe compresa in queste) si vede che si avranno *al più* dodici soluzioni del problema proposto.

Accontentandoci di avere accennato a questo fatto, non entreremo in una minuta e tediosa discussione di tutti i casi possibili, potendo le soluzioni ridursi da 12 sino a 0. Ognuno che il voglia potrà farlo senza difficoltà, fondandosi sopra la discussione del II esempio.

La stessa costruzione serve a risolvere il celebre problema di Newton : « Costruire un triangolo eguale a un dato e i cui vertici giacciano su tre rette date ».

E invero se il triangolo dato è MNP (fig. V) e le tre rette date formano l'altro triangolo ABC, colla costruzione di poc'anzi si formerà il triangolo $A'B'C'$ eguale ad ABC, e i cui lati passino per M, N, P. Il problema è così risolto, bastando ora portare il triangolo $A'B'C'$ su ABC, perchè allora i tre punti M, N, P, si porteranno nella posizione dai vertici del triangolo domandato. E cioè i tre punti sui lati del triangolo ABC che dai vertici di esso hanno le distanze stesse che M, N, P, hanno rispettivamente dai vertici dell'egual triangolo $A'B'C'$, congiunti con rette, daranno il triangolo richiesto.

XII.

Abbiamo detto che in generale la natura stessa della questione suggerisce le costruzioni ausiliarie che possono servire nel rinvenimento di relazioni utili fra i dati e le incognite. Per agevolare questo compito si può ricorrere al calcolo, giovandosi di relazioni *metriche* (di grandezza) fra cognite e incognite, in guisa da aver elementi sufficienti per la costruzione, – o diretta, o per mezzo di altre ausiliarie a cui condurrà naturalmente il calcolo, – della richiesta figura.

Eccone un esempio che varrà cogli altri a mostrare i diversi aspetti sotto cui si può presentare il metodo analitico.

Esempio IV. - *Date le tre altezze* a, b, c, *d'un triangolo, costruirlo*.

Suppongo sia ABC (fig. VI) il triangolo richiesto, le cui altezze AA', BB', CC' siano rispettivamente eguali ad a, b, c.

Osservo che i due triangoli $AA'C$, $BB'C$ sono simili per aver due angoli eguali, onde sussisterà la proporzione: $AC : AA' :: BC : BB'$ ossia $\frac{AC}{a} = \frac{BC}{b}$.

Parimenti i due triangoli simili ABB', ACC' danno $\frac{AB}{b} = \frac{AC}{c}$. Qui si hanno due eguaglianze, di cui la prima contiene il rapporto $\frac{AC}{a}$, la seconda il rapporto $\frac{AC}{c}$. Per avere in tutte e due lo stesso rapporto, ad es. $\frac{AC}{a}$ e poterle così confrontare, moltiplicherò ambo i membri della seconda per $\frac{c}{a}$, col che ottengo

$$\frac{AB}{b} \cdot \frac{c}{a} = \frac{AC}{c} \cdot \frac{c}{a} \quad \text{cioè} \quad AB : \frac{ab}{c} = AC : a$$

Ora $\frac{ab}{c}$ è una quantità nota dai dati del problema ed è geometricamente costruibile, essendo essa la quarta proporzionale, che dirò d, dopo c, a, b. E invero dalla proporzione $c : a :: b : d$ si ricava appunto $d = \frac{ab}{c}$.

Dunque si hanno le eguaglianze

$$\frac{AC}{a} = \frac{BC}{b}; \quad \frac{AB}{d} = \frac{AC}{a}; \text{ onde } \quad \frac{AC}{a} = \frac{BC}{b} = \frac{AB}{d}.$$

Quest' ultima dimostra che i tre lati AC, BC, AB del triangolo da costruirsi sono rispettivamente proporzionali alle tre rette a, b, d: vale a dire il triangolo formato con queste tre rette sarà simile al cercato. Adesso che sappiamo costruire un triangolo simile al voluto, facilmente costruiremo anche quest'ultimo.

Incomincieremo dunque a determinare la lunghezza d, costruendo nel modo noto la quarta proporzionale dopo c, a, b (fig. VII). Ciò fatto costruiremo un triangolo APQ i cui lati sieno quei tre segmenti, e cioè $AP = a$, $AQ = d$, $PQ = b$; e che sarà simile al domandato. Per ottenere il quale basterà dunque condurre la parallela BC al lato QP, determinando B in guisa che l'altezza BB' eguagli la b, come si è fatto nella figura. Il triangolo ABC risolve il problema.

Condotte infatti le tre altezze AA', BB', CC' si trova, ripetendo il ragionamento di prima, che queste altezze sono risp. proporzionali ad a, b, c; ma la seconda è per costruzione eguale alla stessa b; dunque anche $AA' = a$, $CC' = c$; e il triangolo soddisfa al problema.

Del resto si può anche osservare che ABC è simile ad APQ e quindi anche al domandato cui questo secondo fu dimostrato simile; ma con esso ha eguale un'altezza omologa b, quindi gli è eguale.

Come si vede, il problema presenta una sola soluzione; per la cui possibilità è poi necessario che coi tre segmenti a, b, d si possa costruire un triangolo.

XIII.

Per convalidare con un esempio le osservazioni del n. IV ci proporremo ora la seguente questione:

Esempio V. — *Determinare il vertice d'un triangolo rettangolo eguale a un triangolo dato* ABC *e che abbia gli estremi dell'ipotenusa rispettivamente su due rette perpendicolari date.*

È evidente che esistono infiniti punti i quali soddisfanno al problema, perchè l'ipotenusa del triangolo si può mettere in quella direzione che più aggrada: cosicchè non sarà questione di determinare uno fra questi infiniti punti, ma piuttosto la linea costituita dal loro assieme.

E il problema sarà meglio espresso così:

Trovare il luogo dei vertici, dei triangoli rettangoli eguali a un dato ABC *e nei quali gli estremi dell'ipotenusa giacciano rispettivamente su due rette perpendicolari.*

od anche:

Trovare la linea percorsa dal vertice C *di un triangolo rettangolo* ABC *il quale si muova nel proprio piano in guisa che i due estremi* A *e* B *dell'ipotenusa scorrano rispettivamente su due rette perpendicolari* OM, OQ (fig. VIII).

Prendiamo come prima posizione del triangolo mobile quella OMN nella quale l'ipotenusa AB si trovi tutta sul lato OM dell'angolo retto, e precisamente A in M, B in O; dove A è un punto del *primo* lato OM, e O un punto del *secondo* lato OQ: e imaginiamo poi che il triangolo vada movendosi in guisa che il vertice A discenda lungo il primo lato, e il vertice B si avanzi lungo il secondo lato, finchè il primo vertice sarà venuto in O e il secondo in Q e il triangolo avrà assunta l'ultima posizione OPQ nella quale l'ipotenusa sia disposta invece lungo il secondo lato dell'angolo. È chiaro che in questa posizione finale il cateto OP dovrà essere sovrapposto al cateto ON nella posizione iniziale (perchè i due angoli acuti del dato triangolo sono complementari); e cioè il vertice P dell'angolo retto si troverà sulla stessa retta ON sulla quale giaceva nella posizione iniziale del triangolo.

Quest'analisi ci fa subito capire che il luogo domandato è la retta ON. E invero se indichiamo ora con $A'B'C'$ una qualunque posizione del triangolo mobile, facile riesce dimostrare che il vertice C' deve essere sulla ON. Se infatti indichiamo per un istante con C'' il punto in cui il lato $A'C'$

sega ON, per i 4 punti $A'OB'C''$ passerà una circonferenza, essendo ang$A'OC''$ = ang$A'B'C''$; ma, essendo retto l'angolo $A'OB'$, l'arco $A'OB'$ sarà una semicirconferenza; e una semicirconferenza sarà pertanto il rimanente arco $A'C''B'$, il che prova che l'angolo $A'C''B'$ è retto, al pari di $A'C'B'$; epperò che C'' coincide con C', cioè che questo vertice giace per l'appunto su ON.

Al muoversi dunque del triangolo il suo vertice percorre la ON, e precisamente quel segmento di essa che intercede fra il punto S, per cui OS è eguale all'ipotenusa (massima distanza da O) e il punto P, per cui OP è eguale al cateto minore (minima distanza da O): ed è chiaro che al principio del movimento il vertice va da N verso S; poi ritorna indietro, camminando da S fino in P.

Ed ecco che, nel mentre abbiamo risolta la proposta questione, siamo giunti a un teorema (cfr. n. IV):

« Se un triangolo rettangolo si muove cogli estremi
» dell'ipotenusa lungo due rette perpendicolari il cui incontro
» sia O, il suo vertice percorre, su una retta uscente da O,
» e formante coi lati del dato angolo due angoli rispettiva-
» mente eguali a quelli acuti del triangolo, il segmento com-
» preso fra i due punti che distano da O di grandezze ris-
» pettivamente eguali all'ipotenusa e al cateto minore del
» triangolo. »

Se in particolare il triangolo fosse isoscele il suo vertice si muoverebbe sulla bisettrice dell'angolo retto; e il segmento, che in questo caso sarebbe eguale alla differenza fra l'ipotenusa e il cateto, sarebbe percorso per intero due volte; la prima allontanandosi da O, la seconda avvicinandosi ad O.

Il teorema è suscettibile di diversi altri enunciati forse non privi d'interesse, fra cui questo:

Se tanti cerchi eguali hanno gli estremi del diametro su due rette perpendicolari uscenti da un punto O, e su ognuno di essi si prende lo stesso arco a partire dal punto di segamento con uno dei lati dell'angolo, tutti i punti così ottenuti, estremi degli archi, si troveranno su una retta uscente da O; teorema che permette di costruire infiniti punti, col solo compasso, della retta che divide un dato angolo retto in due parti stabilite (in due angoli dati per mezzo degli archi che li misurano).

XIV.

Prima di dare qualche esempio anche per la stereometria, rammenteremo che un problema di questo ramo di scienza si può ritener risolto quando siasi ridotto a condurre rette, piani, sfere, datini i sufficienti elementi giovandosi anche all'uopo dei problemi elementari, come condurre rette o piani paralleli o perpendicolari ecc. Del resto valgano in tutto le osservazioni generali che abbiamo fatto fin dal principio; se non che il più delle volte la mancanza di metodi grafici, per eseguire una figura anche approssimativa nello spazio, è causa di non lievi difficoltà, la quale fa sì che essi vengano trascurati troppo nell'insegnamento. Converrebbe invece insistere su essi, essendo questo il metodo più acconcio per rendere famigliari e mostrare le applicazioni di verità astratte e troppo astruse alla mente di chi imprende lo studio della geometria solida.

Esempio VI. – *Segare un dato angolo tetraedro in modo che la sezione sia un parallelogrammo.*

Supponiamo sia ABCD (fig. IX) la sezione domandata: dovrà allora il lato AB essere parallelo all'opposto lato CD, e quindi anche alla faccia su cui è situato questo lato; e parimenti BC parallela alla faccia su cui giace l'opposto lato AD.

Per cui tosto si presenta la soluzione seguente. Preso un punto qualunque A su uno spigolo si conduca per esso, a segare una faccia lungo la retta AB, il piano parallelo alla faccia opposta; per il punto B si conduca, a segare lungo BC la faccia consecutiva, il piano parallelo alla faccia opposta. Il piano delle due rette AB, BC segherà le altre due facce lungo due rette AD, DC, e il poligono piano ABCD sarà un parallelogrammo. E invero AB e CD essendo sezioni di due piani paralleli (la faccia su cui è la CD e il piano ad essa parallelo condotto per AB) con un terzo piano (quello del quadrilatero) saranno paralleli, e così pure AD, BC.

Il problema, come si vede, presenta infinite soluzioni: una per ogni punto preso su uno spigolo dell'angolo tetraedro dato; giacchè il punto A fu scelto ad arbitrio. E che ciò dovesse avvenire era da prevedersi, perchè tutte le sezioni parallele d'un angolo solido sono figure simili; e quindi se una è parallelogrammo sono tali anche le altre.

Esempio VII. — *Costruire un tetraedro dato un punto su ciascuno spigolo.*

Il problema è della massima semplicità e per risolverlo non ci occorrerà nemmeno la figura. Indichiamo ordinatamente con 1, 2, 3, 4, 5, 6 i punti dati. Le quattro facce del tetraedro conterranno ognuna tre di questi punti (contenendo ognuna tre spigoli), e le facce a due a due (segandosi in uno spigolo) avranno a comune uno ed uno solo di essi. Basterà dunque, per risolvere il problema, condurre 4 piani ognuno dei quali contenga 3 di questi 6 punti ed abbia un punto comune (fra questi 6) con ciascuno degli altri 3. La soluzione presenta molto di arbitrario.

Si può ad esempio partire dalla faccia 123, cioè condurre un piano per i tre punti 1, 2, 3. Allora le altre tre facce dovranno contenere rispettivamente il punto 1, il punto 2, e il punto 3. Quella che contiene 1 potrà poi contenere 4 e 5, oppure 4 e 6, oppure 5 e 6. Se prendiamo la prima combinazione 145, la terza faccia, quella che contiene 2 dovrà contenere anche uno dei due punti 4 e 5 e poi il sesto punto 6; e potrà quindi essere o 246 oppure 256. Se assumiamo 246 come terza faccia, la quarta, dovendo avere un punto e uno solo a comune con ognuna delle altre tre, e un punto non potendo giacere su più di due facce, sarà necessariamente 356.

Partendo dalla faccia 123 si possono così formare i 6 tetraedri:

123	123	123	123	123	123
145	145	146	146	156	156
246	256	245	265	254	264
366	346	356	345	346	345

ed è evidente che ognuno di questi 6 tetraedri soddisfa al problema. Ma invece di partire dalla faccia 123, noi avremmo potuto partire da uno qualunque dei $\frac{6.5.4}{1.2.3}$ piani che congiungono quei 6 punti a 3 a 3 in tutti i modi possibili; e ripetendo lo stesso procedimento per ognuno di essi avremmo costrutto 6 tetraedri. I $\frac{6.5.4 \cdot 6}{1.2.3}$ tetraedri così ottenuti non sono però tutti differenti, ma a 4 a 4 coincidono, vale a dire un medesimo tetraedro sarebbe così contato quattro volte. Questo è evidente, giacchè ad es. il primo tetraedro si ottiene non solo partendo dalla combinazione 123, ma anche partendo dalle tre combinazioni 145, 246, 356 corrispondenti alle altre sue facce. Quindi i tetraedri distinti che si possono formare sono in numero di $\frac{6.5.4.6}{1.2.3.4} = 30$.

Abbiamo così veduto che si possono costruire 30 tetraedri i cui spigoli passino rispettivamente per 6 punti dati nello spazio; ed è da notarsi che tutte queste costruzioni sono possibili, potendosi sempre condurre un piano per 3 punti. (*)

XV.

Daremo un ultimo esempio per mostrare come in certe questioni riesca utile l'applicazione dell'algebra.

Esempio VIII. — *Segare con un piano una sfera*

(*) La configurazione dell'assieme di questi 30 tetraedri e specie dei loro 120 vertici potrebbe forse essere argomento di studio.

in modo che uno dei due segmenti sia equivalente al cono retto inscritto nell'altro segmento.

Indicando con r il raggio della sfera, con x la saetta del primo segmento, il problema sarà risolto quando sia noto x in termini di r, giacchè allora è nota la distanza che il piano segante deve avere dal centro. Se x è la saetta del segmento, l'altezza del cono sarà evidentemente $2r - x$, e il quadrato del raggio della base del cono e del segmento sarà $(2r - x)x$ dovendo esso essere la media proporzionale fra i due segmenti del diametro perpendicolare.

Il volume del cono sarà quindi $\frac{2r - x}{3} \pi x (2r - x)$, e quello del segmento, secondo la nota formola, $\pi x^2 \left(r - \frac{x}{3}\right)$

Sussisterà pertanto l'eguaglianza

$$\frac{\pi x}{3} (2r - x)^2 = \pi x^2 \left(r - \frac{x}{3}\right) \qquad \text{(I)}.$$

ossia

$$(2r - x)^2 = x (3r - x)$$

onde

$$x = \frac{r}{4} (7 \pm \sqrt{17})$$

Dei due segni qui non piglieremo che il $-$, giacchè $\frac{7 + \sqrt{17}}{4} r$ è maggiore del diametro e in questo caso il valore di x sarebbe geometricamente insignificante. La soluzione

$$x = \frac{r}{4} (7 - \sqrt{17})$$

è la sola che soddisfi al problema. Per questo valore di x infatti si verifica tosto che il volume del cono è eguale a quello del segmento, essendo entrambi $\frac{\pi r^3}{48} (23 - \sqrt{17})$.

L'altro valore

$$x = \frac{r}{4}(7 + \sqrt{17})$$

potrebbe però interpretarsi introducendo le soluzioni imaginarie; l'area del circolo sezione sarebbe negativa, e il suo raggio imaginario; ma essendo negativa anche l'altezza del cono, il volume del cono risulterebbe positivo ed eguale a $\frac{\pi r^3}{48}(23+\sqrt{17})$, eguale poi ancora a quello del segmento. La comparsa di questo valore proviene algebricamente dal fatto che si può soddisfare alla relazione (I) anche con un valore negativo di $2r - x$, perchè questa espressione non vi compare che al quadrato.

Valga questa discussione a mostrare come i risultati che si hanno applicando l'algebra alla geometria vadano esaminati e discussi.

XVI.

Gli esempi precedenti basteranno a dare una chiara idea del metodo analitico. Non ne daremo alcuno per il metodo sintetico, giacchè su tutti i testi di geometria se ne trovano: così i problemi fondamentali, come condurre una retta perpendicolare, una parallela a un'altra, dividere a metà un segmento rettilineo o un angolo, costruire un triangolo eguale a un altro ecc, sono sempre risolti sinteticamente, cioè senza costruzioni preparatorie ed esami di mutue relazioni. Del resto le soluzioni precedenti stesse, qualora si ommettano le due prime parti, ossia si incominci addirittura dalla costruzione finale, potrebbero altresì servire come esempi di metodo sintetico.

Osserveremo però, e il ripeterlo non sarà soverchio, che, eccettuato il caso in cui la soluzione d'un problema si sappia immediatamente far discendere da quella d'un altro noto, epperò le costruzioni preparatorie riescano inutili, sarà sempre da preferirsi il metodo analitico.

Dott. Vittorio Murer.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Raffaele Badia. — *Lezioni di Geometria complementare* ad uso degli Istituti Tecnici. — Città di Castello, S. Lapi editore, 1885: prezzo Lire 2, 50.

L'A., insegnante di matematiche nell'istituto tecnico di Perugia, ha pubblicato questo libro specialmente per uso dei giovani che frequentano il 3.º anno d'istituto tecnico nella sezione fisico-matematica. Esso dichiara nella prefazione che nel medesimo sono raccolte le teorie che servono, per dir così, d'introduzione alla geometria superiore (sono sue parole), comprese nel nuovo programma sotto il titolo di *complementi di geometria*. Veramente questo libro contiene più di quello che si possa insegnare agli alunni in rapporto alle accennate teorie, tenuto anche conto della libertà che i nuovi programmi d'insegnamento consentono al docente; per altro questo per me è piuttosto titolo di lode, e ciascun insegnante che adotti il libro di cui si tratta ne svolgerà quelle parti che crederà, tanto più facilmente inquantochè diversi capitoli stanno da sè e possono essere ommessi senza pregiudizio dei rimanenti.

L'A. anzichè seguire i puri metodi dalla geometria di posizione, di cui si hanno belli esempi nella *Geometria proiettiva* del Cremona e nella *Geometrie der Lage* del Reye, si è principalmente attenuto a quelli che informano il classico *Traité de géométrie supérieure* del Chasles e di cui si ha un saggio nelle note che il prof. Novi aggiunse, fino dal 1858, alla traduzione italiana del *Traité de géométrie élémentaire* di A. Amiot, e di questo veramente chi scrive non sa se sia da attribuirgliene lode. È vero che questi metodi si scostano meno da quelli divenuti già famigliari agli alunni per i precedenti studi, ma non è men vero che gli altri, di cui si fa uso nella geometria proiettiva propriamente detta, nulla prova siano più difficili e men propri all'insegnamento elementare.

L'esposizione dell'A. è molto chiara e nel complesso rigorosa, e queste *lezioni* hanno, a giudizio mio, notabile valore didattico, tanto che l'A. può esser lieto d'aver raggiunto lo scopo prefissosi. Aggiungasi poi che le medesime aumentano la nostra letteratura scolastica d'un libro il quale, tenuto conto del metodo geometrico-analitico da cui è informato, per quanto io sappia, non trova riscontro che nella menzionata traduzione italiana dell'Amiot.

Le *lezioni di geometria complementare* del prof. Badia, constano di XIX capitoli dei quali, senza trascriverne l'indice per esteso, mi limiterò a citare gli argomenti. Capo I. Preliminari intorno alla grandezza e direzione dei segmenti determinati dai punti d'una retta. Relazione fra i segmenti determinati da tre e quattro punti d'una retta. — II. Rapporto semplice di punti. — III. Doppio rapporto o rapporto anarmonico di punti. — IV. Rapporto armonico di punti. — V. Preliminari intorno alla grandezza e direzione degli angoli. Doppio rapporto di quattro rette d'un fascio. — VI. Rapporto armonico di quattro rette. — VII. Potenza d'un punto rispetto a due altri d'una stessa punteggiata. Punto d'ugual potenza. Involuzione; equazioni che l'esprimono. — VIII. Centro e punti doppi d'una involuzione. Equazioni dell'involuzione in un caso speciale. — IX. Fasci di rette in involuzione. Equazioni esprimenti l'involuzione di sei rette. — X. Potenza d'un punto rispetto ad un cerchio. Centro e asse radicale. — XI. Elementi correlativi delle figure, legge di dualità. — XII. Alcune proprietà del triangolo e trilatero (*). — XIII. Teoremi sul quadrangolo e quadrilatero completo (**). — XIV. Concetto di poligoni e poliedri semplici convessi. Rappresentazione di un sistema di punti nel piano e nello spazio per mezzo d'un poligono o d'un poliedro semplice convesso. — XV. Omotetia. — XVI. Generalità del metodo di proiezione centrale. Sezioni coniche. — XVII. Proprietà dell'ellisse. — XVIII. Proprietà dell'iperbole. — XIX. Proprietà della parabola.

Stimo utile aggiungere alcune considerazioni critiche cha daranno ulteriori indicazioni circa il contenuto del libro.

Primieramente un'osservazione generale. Poichè le relazioni che l'alunno deve ricordare sono numerose e spesso

(*) Teorema di Menelao e correlativo, e corollari.
(**) Teoremi di Desargues relativi al quadrilatero isolato e inscritto in un circolo, e correlativi.

complesse, sarebbe stato utile, a mio giudizio che l'A. avesse aggiunto, per le principali, dei criteri pratici da servire a comporle. Le formole o relazioni di cui sarebbe stato opportuno accennare una genesi pratica sono: quella del §. 5 che stabilisce una relazione fra i sei segmenti determinati da quattro punti A B C D in linea retta (espressione di tre termini dove il primo è AB.CD e gli altri due s'ottengono lasciando ferma la A e permutando circolarmente BCD); le due, facilmente deducibili l'una dall'altra, che trovansi ai §§. 10 e 11 le quali danno l'espressione del rapporto semplice di tre punti ABC in funzione delle quantità reciproche delle distanze di A da B e C, l'espressione dello stesso rapporto in cui entra un quarto punto arbitrario M, e le relazioni analoghe pel doppio rapporto di quattro punti che trovansi ai §§. 19 e 20; la prima formola dei gruppi (I) o (I') e (II), al §. 65, esprimenti l'involuzione di sei punti di una retta, l'ultima delle quali può ottenersi scrivendo il prodotto AB. BC. CA. poi applicando le virgolette alle tre ultime lettere di ciascun fattore ed uguagliandolo allo stesso prodotto, cambiato di segno, in cui le virgolette sono invece da aggiungere alle tre prime lettere, mentre l'altra che è la prima del gruppo (I) si rendeva chiara con un semplice accenno al significato dei suoi due membri, e così la prima del gruppo (I'); finalmente la relazione alla fine del §. 71 che esprime l'involuzione di sei punti in linea retta, in cui entrano le distanze dei medesimi da un settimo punto arbitrario e le singole distanze dei punti medi dei segmenti che hanno le estremità in due punti coniugati l'uno all'altro.

Stando sempre in quest'ordine d'idee, trovo assai proprio che l'A. abbia premesso all'esposizione delle diverse forme del rapporto anarmonico di quattro punti, quelle analoghe del rapporto semplice di tre punti; ma non ho capito perchè, nell'imprendere la trattazione del doppio rapporto, non abbia avvertito che con quattro punti A B C D sono possibili 24 rapporti, uguali quattro a quattro, cosicchè la sua esposizione potrebbe lasciare nei giovani il dubbio che oltre ai sei considerati, altri ne fossero possibili. Ancora: nel dedurre i sei differenti rapporti anarmonici anzichè ricorrere a scambi successivi, credo sarebbe stata miglior cosa ch'egli avesse fatto osservare che dal primo se ne deducono altri due perıutando circolarmente BC D, e dai tre primi i rimanenti cambiandovi le due ultime lettere. Facendo ciò l'esplicazione lelle relazioni esistenti fra questi sei rapporti, da lui esposte l §. 17, e le conseguenti formole che esprimono il valore di :inque di essi in funzione del rimanente, ne sarebbe stata ıotabilmente avvantaggiata. Finalmente, se le relazioni esistenti 'ra quattro punti formanti un gruppo armonico, avessero ›gni volta seguito quelle per il rapporto anarmonico da cui ;i deducono, pare a me che ne avrebbe guadagnato l'economia lell'opera e non scapitata la chiarezza.

Al §. 36 l'A., trasformando l'espressione del doppio rapporto in cui entra un punto arbitrario, accenna ad un artifizio di calcolo complesso più del bisogno. L'espressione trasformata potevasi dedurre dalla precedente dividendo semplicemente il numeratore e denominatore di questa per $\frac{MB}{MA}$. La stessa osservazione è estendibile alle formole analoghe del doppio rapporto di quattro rette, in cui entra una quinta retta arbitraria. Il problema: *Date tre rette in un piano concorrenti in un punto costruire la quarta retta del fascio in modo che il doppio rapporto delle quattro rette sia* $=\lambda$, trattato al §. 39, potevasi risolvere anche applicando quello del §. 22, costruendo cioè il quarto punto, che coi tre determinati da una trasversale qualsiasi sulle rette date, forma un doppio rapporto $=\lambda$. L'A. non l'ha avvertito, pure ricorre ad un mezzo consimile al §. 79 quando tratta il problema: *Date cinque rette concorrenti in un punto, condurre per questo punto una retta tale che le sei rette formino un'involuzione.*

Al §. 45, in cui è dimostrato il teorema: *Se per un punto fisso* P *preso nel piano d'un angolo* S, *si conducono due secanti qualunque le quali taglino rispettivamente i lati nei punti* A, A′ *e* B, B′ *e si unisce* A *con* B′ *ed* A′ *con* B, *il luogo geometrico delle intersezioni delle due rette* AB′, *ed* A′B *è la polare di* P *rispetto all'angolo dato*, l'A. è incorso in una lieve inesattezza. L'eguaglianza alla fine della pag. 55 dev'essere: $(PP'AA') = (PP''B'B)$, in base alla quale per proseguire la dimostrazione conveniva scrivere: ma $(PP'AA') = -1$, quindi sarà anche: $(PP''B'B) = -1$, ed avendosi (16):
$(PP''BB') = \frac{1}{(PP''B'B)}$, risulta altresì: $(PP''BB') = -1$, ecc..

Alla fine del §. 56 è affermato che il valore della *potenza* di un punto O, rispetto ad altri due AA' in linea retta col primo diviene *massimo* quando O è il punto medio di AA'. Non sarebbe stato utile in una nota dichiararne la ragione?

Al successivo §. 57 dove trattasi di risolvere il problema: *Dati quattro punti* AA'BB' *in una linea retta s, coniugati due a due, trovare su questa un punto che sia d'ugual potenza rispetto alle due coppie di punti coniugati*, è detto che, preso un punto arbitrario M fuori di *s*, le due circonferenze AA'M, BB'M si segheranno necessariamente in un secondo punto M'. Veramente le due circonferenze potrebbero riuscire tangenti in questo punto.

Nel capo VII al §. 62 l'A. dà la seguente definizione: *Se più circonferenze, le quali siano descritte in uno stesso piano e passino tutte per due punti fissi, sono segate da una trasversale condotta nel piano, il sistema di punti formato dalle intersezioni della trasversale colle circonferenze si chiama involuzione di punti.* Ora quando tre coppie di punti AA' BB' CC', situati sopra una stessa retta, sono in involuzione, esistono fra i segmenti determinati dai medesimi, sette relazioni che l'A. determina in questo capitolo; a me sembra però ch'egli non abbia messo abbastanza in rilievo come l'esistenza di una qualsiasi delle relazioni medesime porti a concludere che i sei punti che compariscono in essa sono in involuzione secondo la definizione.

Al capitolo XIII trovansi esposti due teoremi che vanno sotto il nome di Desargues (il secondo però esteso al solo cerchio) e i loro correlativi. La dimostrazione dell'ultimo teo: a destra cioè: *Se nel piano di un quadrilatero mnpq circoscritto ad un cerchio si prende un punto* S *in modo che da esso si possano condurre due tangenti d, d' alla circonferenza, queste formeranno un'involuzione con due qualunque delle tre coppie di rette coniugate aa' bb' cc' che il punto determina con i sei vertici del quadrilatero*, pare a me che sia insostenibile e ciò perchè, dopo aver chiamato *e* la retta che congiunge i due vertici opposti *mq* ed *np*, a un certo punto l'A., per giungere alla tesi, stabilisce le eguaglianze: sen eq. sen em = sen ep. sen en; sen $a'p$. sen $a'n$ = sen $a'd$. sen $a'd'$; sen aq. sen am = sen ad. sen ad'. Ora quest'eguaglianze esprimono la proposizione: *se un quadrilatero è* *circoscritto ad un cerchio e si tira la retta che congiunge due vertici opposti, gli angoli che essa forma coi due lati che passano per ciascuno di questi vertici son tali che il prodotto dei seni della prima coppia è uguale a quello dei seni dell'altra coppia*, proposizione che in generale non è vera. Del resto il teorema correlativo a quello di Desargues, seguendo il metodo adottato dall'A., si può facilmente dimostrare fondandosi sul teorema: *Il prodotto delle distanze d'una tangente mobile a due vertici opposti d'un quadrilatero circoscritto al cerchio sta al prodotto delle sue distanze agli altri due vertici, in un rapporto costante.* Infatti siano d_1, d_2 e d'_1, d'_2 le distanze delle due coppie di vertici opposti qm, np e nq, mp rispettivamente dalla tangente d, e δ_1, δ_2 e δ'_1, δ'_2 le distanze dei medesimi vertici dall'altra tangente, e si rappresentino con a_1 a'_1 b_1 b'_1 i segmenti delle rette aa' bb' estesi da S ai vertici considerati del quadrilatero. È chiaro che si avrà:

$$\operatorname{sen} ad = \frac{d_1}{a_1}; \quad \operatorname{sen} ad' = \frac{\delta_1}{a_1}; \quad \operatorname{sen} a'd = \frac{d_2}{a'_1}; \quad \operatorname{sen} a'd' = \frac{\delta_2}{a'_1}$$

$$\operatorname{sen} bd = \frac{d'_1}{b_1}; \quad \operatorname{sen} bd' = \frac{\delta'_1}{b_1}; \quad \operatorname{sen} b'd = \frac{d'_2}{b'_1}; \quad \operatorname{sen} b'd' = \frac{\delta'_2}{b'_1},$$

onde:

$$\frac{\operatorname{sen} ad . \operatorname{sen} a'd}{\operatorname{sen} ad' . \operatorname{sen} a'd'} = \frac{d_1 . d_2}{\delta_1 . \delta_2}; \quad \frac{\operatorname{sen} bd . \operatorname{sen} b'd}{\operatorname{sen} bd' . \operatorname{sen} b'd'} = \frac{d'_1 . d'_2}{\delta'_1 . \delta'_2}.$$

Ma per l'accennato teorema si ha:

$$\frac{d_1 . d_2}{d'_1 . d'_2} = \frac{\delta_1 . \delta_2}{\delta'_1 . \delta'_2},$$

quindi anche:

$$\frac{\operatorname{sen} ad . \operatorname{sen} a'd}{\operatorname{sen} ad' . \operatorname{sen} a'd'} = \frac{\operatorname{sen} bd . \operatorname{sen} b'd}{\operatorname{sen} bd' . \operatorname{sen} b'd'},$$

uguaglianza che dimostra come le sei rette aa' bb' dd' formino un fascio in involuzione.

In questo capitolo XIII avrei veduto con piacere i teoremi di Pascal e Brianchon per il cerchio, che invece l'A. ha confinato semplicemente fra gli esercizi, e questi insieme ai due accennati di Desargues avrebbe potuto con facilità, servendosi della proiezione centrale, da lui esposta al capo XVI, estendere altresì alle coniche.

Al capitolo XV che verte sull'omotetia, prima di passare al §. 112, sarebbe stato opportuno osservare, quantunque ciò possa parere ovvio, che la figura omotetica d'una figura piana è parimenti una figura piana, col suo piano parallelo a quello della prima figura. Sullo stesso capitolo ho poi due altre osservazioni a fare. La prima, che la dimostrazione del §. 113 regge solo per il caso in cui O sia esterno al segmento AA' o, ciò che torna lo stesso, che i poligoni considerati siano direttamente simili, mentre giovava estenderla anche al caso in cui la similitudine fosse stata inversa, e ciò tanto più che al §. 114, ov'è esaminato il teorema analogo pei poliedri, l'A. accenna al caso dell'omotetia sia diretta che inversa. La seconda osservazione riguarda il §. 124 in cui trovasi dimostrato il teorema: *I centri di omotetia di due circoli omotetici, e i quattro punti in cui la retta da essi determinata è tagliata dalle due circonferenze, formano un sistema di sei punti in involuzione.* Ivi a un certo punto nel corso della dimostrazione l'A. scrive: si conduca la retta O' Q che incontrerà la circonferenza C' in N'. Ora la retta O' Q incontra in generale questa circonferenza in due punti, e fra questi dev'esser scelto quello che corrisponde a Q rispetto al centro O' d'omotetia; conveniva quindi a rigore esprimersi così: conducasi la O'Q e dei due punti in cui questa retta taglia in generale la circonferenza C', scelgasi quello più prossimo o più lontano da O', secondochè il segmento O'Q taglia o meno la circonferenza C.

Nel capitolo XVI al §. 128 trovasi dimostrato il teorema: *La proiezione di un cerchio descritto sulla superficie d'una sfera, fatta sopra un piano di circolo massimo, prendendo per centro di proiezione il polo di questo, è un cerchio.* L'A. avrebbe, secondo me, bene operato, deducendo anche il reciproco, il che potevasi fare con molta facilità. Ai §§. 130 al 135 di questo capitolo si considerano la superficie conica inviluppante due sfere fisse, nelle due posizioni ch'essa può avere, e le sezioni di questa mediante un piano tangente alle sfere medesime: si presentano così le sezioni coniche: ellisse, iperbole e parabola. Questo metodo di generazione per le curve di 2° ordine pone immediatamente in rilievo la posizione di alcuni elementi delle medesime, quali sono i fuochi, i vertici, le direttrici, gli assi e diverse altre particolarità; ma poteva fornire altresì con grande agevolezza le proprietà che le caratterizzano riflettenti la somma o differenza costante dei raggi vettori per le prime due e l'ugual distanza di ciascuno de' suoi punti dal fuoco e dalla direttrice per la terza (*), che l'A. ha creduto di dedurre solo più tardi, dopo avere ricavate le equazioni che le definiscono (§§. 141, 153, 164), nei tre capitoli che chiudono l'opera. Seguendo una tal via l'esposizione delle proprietà delle sezioni coniche sarebbe riuscita più spedita e uniforme.

Finalmente sarebbe stato utile esporre anche il teorema: *La sezione obliqua d'un cilindro circolare retto è un'ellisse.* E per questa sezione potevasi poi adottare un metodo di generazione analogo a quello seguito per le sezioni del cono.

Il libro termina con una raccolta d'esercizi, appropriati e disposti in ordine alla materia del testo; però mi sarebbe piaciuto di trovare fra questi il problema: *descrivere una circonferenza tangente a tre circonferenze date*, che avrebbe fornito ai giovani un mezzo efficace di porre in giuoco le teorie dei poli e delle polari, degli assi radicali e dell'omotetia. Anzi a mio parere il problema stesso avrebbe potuto con vantaggio essere svolto nel testo.

A. Lugli.

TEMI PER LAVORI SCOLASTICI (**)

Calcolare il raggio di una sfera sapendo che il suo volume supera di un decimetro cubo quello del tetraedro regolare in essa inscritto.

Un triedro trirettangolo è tagliato con un piano in modo che la sezione risulta un triangolo equilatero. Calcolare: 1) il rapporto del volume della piramide così ottenuta al volume del cubo il cui lato è eguale a quello del triangolo equilatero; 2) le inclinazioni delle facce del triedro sul piano del triangolo equilatero.

(*) Veggasi: Briot et Bouquet — *Leçons de géométrie analytique.*

(**) Questi temi sono estratti dalla raccolta di quelli proposti per la promozione dalla terza alla quarta classe nell'Istituto tecnico di Roma.

1) Un emisfero è diviso in tre segmenti di eguale altezza da due piani paralleli alla sua base: trovare i rapporti dei loro volumi. 2) Calcolare il maggiore dei tre angoli d'un triagolo i lati del quale sono proporzionali ai numeri 2, 3, 4.

Il rapporto del volume d'una sfera a quello d'un tronco di cono retto ad essa circoscritto è eguale ad m: esprimere in funzione di m il rapporto del raggio della base minore del tronco al raggio della base maggiore.

1) Assegnare un metodo pel calcolo del seno di 1° 52' 30'' senza presupporre alcuna cognizione sul rapporto della circonferenza al diametro. 2) Trovare due limitazioni del rapporto della circonferenza al diametro sapendo che il seno di 1° 52' 30'' è compreso fra 0,03271 e 0,03272.

La base BC d'un triangolo isoscele BAC è divisa in tre parti eguali nei punti D ed E; esprimere le tangenti degli angoli BAD, DAE, EAC in funzione della tangente dell'angolo BAC, e calcolare quelli angoli nell'ipotesi che l'angolo BAC sia retto.

Di un prisma triangolare sono dati: il volume, la lunghezza dello spigolo laterale, la superficie laterale, e il diedro di due facce laterali. Assegnare le formole pel calcolo dei diedri delle altre due coppie di facce laterali.

Il volume d'un parallelepipedo rettorettangolo è di cent. cubi 564, 48, l'altezza di cent. 24 e la diagonale di cent. 25. Calcolare: 1) la superficie totale del parallelepipedo; 2) gli angoli che le diagonali formano col piano della base.

1) Supposta la terra sferica, calcolare la latitudine del parallelo la cui lunghezza è $\frac{3}{7}$ di quella dell'equatore. 2) Da un'urna in cui sono 100 palline numerate dall'1 al 100 se ne estraggono a sorte 10; qual'è la probabilità che fra le 10 estratte sieno quelle quattro segnate coi numeri 28, 59, 70, 83?

In un tronco di prisma retto triangolare avente il volume d'un metro cubo, gli spigoli laterali sono rispettivamente $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{11}{20}$ del perimetro della base, e i lati di questa sono proporzionali ai numeri 5, 12, 13: calcolare il perimetro della base.

TEOREMI A DIMOSTRARE

1. Il luogo dei punti, del piano d'un triangolo dato, tali che i piedi delle perpendicolari, condotte da uno qualunque di essi ai tre lati, formino un triangolo di data area, è una circonferenza concentrica a quella circoscritta al triangolo dato.

G. Loria.

2. Se da un punto qualunque della superficie d'un triangolo sferico trirettangolo si conducono tre archi di circonferenze massime perpendicolari ai suoi lati, il perimetro del triangolo sferico, che ha per vertici i piedi dei tre archi, è eguale alla metà d'una circonferenza massima.

F. Nicoli.

3. Se le coppie di punti A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sono situate rispettivamente sulle tre rette BC, CA, AB, così che le rette AA_1, BB_1, CC_1 concorrano in uno stesso punto, e che anche le rette AA_2, BB_2, CC_2 concorrano in uno stesso punto, e s' indichino rispettivamente con α, β, γ i punti di incontro di AA_1 con B_2C_2, di BB_1 con C_2A_2 e di CC_1 con A_2B_2, le tre rette $A_2\alpha$, $B_2\beta$, $C_2\gamma$ concorreranno pure in uno stesso punto.

D. Besso.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica rédigée par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1886. N.° 1.

L'Eco della Associazione nazionale fra gli insegnanti delle scuole secondarie. Anno III, n. 13 e 14. Torino, 1886.

Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXIV. Gennaio e Febbraio 1886. Napoli, Benedetto Pellerano, editore.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira*, Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VI, n. 6. Coimbra, 1885.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy* Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe 2e série. Dixième année. N. 1, 2, 3, 4. Paris, 1886.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert.* 10e Année. N. 12, 13, 14, 15. Paris, E. Nony, 17, Rue des Écoles.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome sixième, Mars et Avril 1886.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati.* Anno XVII. N. 3, 4, 5, 6. Firenze, 1886.

E. Beltrami. — Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell (1886).

E. Bertini. — Le omografie involutorie in uno spazio lineare a qualsivoglia numero di dimensioni (1886).

G. Da Como. — Formola pratica per la quadratura delle aree delle figure comprese fra una curva piana ed una base rettilinea, e delle figure piane curvilinee in generale (1886). numero di dimensioni (1886).

A. Faifofer. — Elementi di Geometria ad uso dei Licei, quinta edizione. Venezia, tipografia Emiliana, 1886.

V. Grünwald. — Saggio di Aritmetica non decimale con applicazioni del calcolo duodecimale e trigesimale a problemi sui numeri complessi (1884). — Intorno all'Aritmetica dei sistemi numerici a base negativa con particolare riguardo al sistema numerico a base negativa-decimale per lo studio delle sue analogie coll'Aritmetica ordinaria (decimale) (1884). — Dei sistemi numerici a base imaginaria (1886).

G. Jung. — Sulle trasformazioni birazionali di tre forme geometriche di seconda specie (1886). — Sulle superficie generate da tre sistemi deducibili l'uno dall'altro mediante trasformazioni birazionali (1886).

G. de Longchamps. — Applications nouvelles des transversales réciproques (1886). — Étude sur une transformation réciproque. — Courbes diamétrales et transversales réciproques. — Sur les cubiques unicursales (1879). — Transformation plane des quadriques. — La Géométrie récurrente (1883). — Sur les conchoïdales (1879). — Sur un mémoire de M. Laudry (1884). — Des fractions étagées. — Sur la décomposition en facteurs premiers des nombres $2^n \pm 1$ (1877). — Sur les nombres de Bernouilli. — Sur les intégrales Eulériennes de seconde espèce. — La première leçon sur la théorie des équations (1885). — Sur une nouvelle espèce de fractions continues (1884). — Sur les séries récurrentes proprement dites et sur un théorème de Lagrange (1880).

E. Padova. — Proprietà del moto di un corpo di rivoluzione soggetto a forze che hanno la funzione potenziale H $\cos^2 \vartheta$ (1886).

S. Pincherle. — Note sur une intégrale définie (1885). — Sur une formule dans la théorie des fonctions (1886).

G. Pittarelli. — Gli elementi immaginari nelle forme binarie cubiche (1885). — Le curve di terz'ordine e di quarta classe (1885).

E. Vigarié. — Note de Géométrie (1886).

SULL'IMPOSSIBILITA' DI CERTE DIVISIONI
E SULL'EQUIVALENZA DELLE EQUAZIONI
NOTA
DI RODOLFO BETTAZZI

I.

1. La proprietà espressa dalla relazione $a \times 0 = 0$ qualunque sia il numero a, rende com'è noto, privo di qualunque significato il simbolo di operazione $\frac{m}{0}$, dove $m \gtrless 0$, e privo di significato determinato l'altro $\frac{0}{0}$. Questa circostanza ci costringe a considerare l'operazione $\frac{m}{n}$ come possibile *soltanto in generale* (*), dovendosi dire che essa ha un vero significato solo quando sia $n \gtrless 0$. Ogni qualvolta quindi nell'Algebra occorrerà eseguire una divisione, dovremo ammettere esplicitamente o implicitamente questa condizione e limitarci a concludere che, se $n = 0$, il simbolo è privo di vero significato, o perchè non ne ha alcuno, o perchè rappresenta qualunque valore. Comprenderemo i due casi dicendo che il simbolo di operazione è *illusorio*.

Di questa condizione limitativa bisogna (il che pur troppo non sempre si fa anche in qualche trattato) tener conto e fare menzione esplicita in certi teoremi i quali appunto si fondano sulla divisione. Dal trascurarla dipende che i teoremi che si sogliono dare sull'equivalanza delle equazioni non sono tutti (almeno finchè si riferiscono alle equazioni generali) enunciati col necessario rigore.

Mi propongo quindi di dare un cenno di poche osser-

(*) Diremo che un'operazione è possibile (o un'eguaglianza è vera) *soltanto in generale*, quando cessa di esserlo *solo* per valori speciali delle quantità cui essa si riferisce.

vazioni da farsi su questi simboli che possono divenire illusori. Esse si sogliono generalmente omettere nell'Algebra elementare; ma sono indispensabili per passare da un'equazione ad un'altra, la quale (anche se non è equivalente a quella data) serva alla sua *completa* risoluzione.

2. È intanto evidente che non si può eseguire nessuna operazione sopra una espressione illusoria, nè quindi applicare *senz'altro* ad essa nessun teorema; perciò, quando in una formula comparisce un'espressione che per qualche valore delle lettere che la compongono diviene illusoria, bisogna aver cura di escludere dalle operazioni quei casi in cui appunto ciò avvenga.

Così, mentre se a, b rappresentano due numeri, si può sempre scrivere, qualunque essi siano

$$a + b - b = a,$$

se fosse $b = \dfrac{1}{x - \alpha}$ dovremmo dire che

$$a + \frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \alpha} = a$$

escluso il caso $x = \alpha$, perchè allora b diviene illusorio. E così, mentre in generale, se a, b, m, n sono numeri, si ha

$$a + mb + nb = a + (m + n)\, b,$$

se fosse ancora $b = \dfrac{1}{x - \alpha}$ dovremmo dire che

$$a + \frac{m}{x - \alpha} + \frac{n}{x - \alpha} = a + (m + n)\, \frac{1}{x - \alpha}$$

eccetto quando $x = \alpha$, a meno che non conveniamo di dire *equivalenti* due espressioni le quali hanno in generale il medesimo valore e per certi valori speciali delle lettere che le compongono divengono illusorie *ambedue*. Allora l'ultima equivalenza sarebbe sempre vera, ma non già la prima:

$$a + \frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \alpha} = a$$

perchè per $x = \alpha$ il primo membro diviene illusorio, mentre il secondo ha sempre un significato.

Per lo scopo speciale a cui sono destinate queste osservazioni, converremo di dare alle parole *espressioni equivalenti* il significato anzidetto.

3. Il teorema « Quando tutti i termini di un polinomio hanno un fattore comune questo può mettersi in evidenza » si suole estendere un poco per poter giungere a mettere in evidenza un fattore che sia comune ad alcuni e non a tutti quei termini; e si può, nel suo senso più generale, ennuciare così « Un polinomio (a termini interi o frazionari) è equivalente al prodotto di un fattore qualunque per un altro polinomio (a termini generalmente frazionari) che si forma da quello dato dividendone ogni termine per il fattore anzidetto ».

Qui è conveniente notare che il teorema è vero *in generale,* tranne per quei certi valori che rendono illusorio o qualcuno dei termini del secondo polinomio, o il fattore che si pone in evidenza. Così, p. es: scrivendo:

$$(x - \alpha)\, a + (x - \alpha)\, b + c = (x - \alpha)\left(a + b + \frac{c}{x - \alpha}\right)$$

si scrive un'equivalenza vera per tutti i valori di x, α, a, b, c, tranne per $x = \alpha$, poichè in tal caso $\frac{c}{x - \alpha}$ e quindi tutto il secondo fattore, divengono illusori.

Più generalmente, quando un'espressione algebrica M si decompone in più fattori A, B, C . . . . L seguendo regole che siano valide in generale, esclusi cioè *al più* speciali valori per le lettere che compariscono, può dirsi che l'equivalenza

$$M = A \, . \, B \, . \, C \, . \, . \, . \, . \, L$$

è vera soltanto in generale, anche tenendo conto della definizione più ampia da noi data di espressioni equivalenti. E infatti per valori speciali tutti i fattori del secondo memloro possono avere un significato e può essere contemporaneamente illusorio M, oppure viceversa può avere un significato M ed essere illusorio qualcuno dei fattori A, B, C,... L.

Così, p. es. quando fosse

$$M = \frac{x}{x}, \quad A = \frac{m}{n}, \quad B = \frac{n}{p}, \quad C = \frac{p}{m}$$

se, m, n, p sono numeri sempre diversi da zero, si ha in generale

$$\frac{x}{x} = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{p} \cdot \frac{p}{m}$$

purchè non sia $x = 0$, nel qual caso M è illusorio, e tale non è nessuno dei fattori. E del pari, se fosse, come precedentemente,

$$M = (x-\alpha)a + (x-\alpha)b + c, \quad A = x - \alpha, \quad B = a + b + \frac{c}{x-\alpha}$$

avremmo l'equivalenza

$$M = A \, . \, B$$

vera soltanto in generale, poichè, come si è notato, per $x = \alpha$ l'espressione M ha un significato e B è illusorio.

Si vede dunque che, decomponendo una espressione M in fattori secondo le *ordinarie* regole dell'Algebra, l'equivalenza delle due espressioni può soffrire eccezione per quei valori delle lettere per i quali o sia illusoria M senza che lo sia nessuno dei fattori, o sia illusorio qualcuno dei fattori senza che lo sia M (poichè il caso rimanente in cui siano illusori insieme M ed alcuno dei fattori rientra per noi in quello dell'equivalenza).

La decomposizione in fattori di un'espressione qualunque *può* quindi *creare* o *sopprimere* dei casi di mancanza di significato.

4. Nella riduzione delle frazioni algebriche alla più semplice espressione si deve tener conto delle osservazioni precedenti.

Sia la frazione $\frac{M}{N}$ i cui termini sieno espressioni qualunque, e supponiamo che si abbia, almeno in generale,

$$M = CA, \quad N = CB.$$

Finchè queste equivalenze sono vere, o perchè tutte le espressioni che in esse compariscono abbiano un significato, o perchè se in una (o in ambedue) di esse è illusorio il primo membro sia tale anche il secondo, potremo porre:

$$\frac{M}{N} = \frac{CA}{BC}$$

anche se N e CB siano nulli, per il significato che si è convenuto di attribuire alla parola equivalenti (e quindi al segno =) L'equivalenza ora scritta sarà quindi vera *in generale*, tranne al più in casi speciali; cioè quando sia illusoria una o più delle espressioni, C, A, B senza che tale sia M o N e senza che sia zero N, giacchè allora $\frac{M}{N}$ ha un significato e non lo ha $\frac{CA}{CB}$, e quando sia illusorio M od N senza che lo siano nè C, nè A, nè B, e nè C nè B siano nulli, perchè allora ha un significato $\frac{CA}{CB}$ e non lo ha $\frac{M}{N}$.

Potremmo esser sicuri che l'equivalenza precedente valesse in ogni caso quando M, N, C, A, B, non divenissero mai illusori, come p: es: se fossero espressioni intere rispetto a tutte le lettere che li compongono, o espressioni come $\frac{1}{x^2+1}$ ecc. finchè almeno ci limitiamo ai valori reali delle quantità su cui si opera.

Sappiamo poi che, almeno in generale, le due frazioni $\frac{CA}{CB}$ e $\frac{A}{B}$ sono equivalenti. Vediamo anche qui quali possono essere i casi di eccezione. Una frazione è un quoziente: può quindi essere illusoria: 1.° se per certi valori delle lettere che in essa compariscono uno dei suoi termini od ambedue divengono illusori; 2.° se per certi valori di quelle lettere il suo denominatore si annulli. — Se per i valori che si considerano C non è illusorio nè nullo, le due frazioni o hanno insieme un significato, o sono ambedue illusorie, sia perchè sono zero i denominatori B, CB, sia perchè è illusorio qualcuno dei loro termini: le due frazioni sono quindi in tal caso sempre equivalenti. Se per certi valori il fattore C è zero od illusorio, per quei valori stessi $\frac{A}{B}$ può avere un significato, $\frac{CA}{CB}$ non lo ha mai.

L'equivalenza (nel senso nostro)

$$\frac{CA}{CB}=\frac{A}{B}$$

è quindi sempre vera, tranne *al più* nel caso in cui C divenga nullo od illusorio.

Ravviciniamo ora i due risultati e vediamo quando sono equivalenti le due frazioni $\frac{M}{N}$ e $\frac{A}{B}$.

Avendo osservato che si ha

$$\frac{M}{N}=\frac{CA}{CB}$$

tranne *sempre*

1.° se C, o A, o B sono illusori e non lo sono M ed N e di più $N \gtrless 0$;

2.° se M od N sono illusori e non lo sono nè C, nè A, nè B e di più $C \gtrless 0$, $B \gtrless 0$;

e che

$$\frac{CA}{CB}=\frac{A}{B}$$

tranne *al più* quando C è 0 od illusorio, si può concludere che l'equivalenza (nel senso nostro)

$$\frac{M}{N}=\frac{A}{B}$$

è vera *in generale*, fatta eccezione per valori speciali delle lettere che vi compariscono: e questo può avvenire per quei valori che rendono nullo od illusorio il fattore C, od anche per quelli che, pur non rendendo nè nullo nè illusorio C, rendono illusoria la sola $\frac{M}{N}$ o la sola $\frac{A}{B}$. È peraltro da osservarsi che mentre, in questo secondo caso, l'uguaglianza precedente non è *certamente* verificata quando $C=0$, o quando C è illusorio, può esserlo, sia perchè $\frac{M}{N}$ ed $\frac{A}{B}$ hanno un significato ambedue, sia perchè sono ambedue illusori; e può non esserlo, quando sia illusoria una sola delle due frazioni.

Che nel caso in cui C sia nullo od illusorio e nonostante M, N, A, B abbiano un significato e $N \gtrless 0$, $B \gtrless 0$, sia vera l'uguaglianza precedente, non si può concludere dalle precedenti osservazioni, non essendo allora

$$\text{nè}\quad \frac{M}{N}=\frac{CA}{CB}, \qquad \text{nè}\quad \frac{CA}{BC}=\frac{A}{B},$$

ma si dedurrà da facili considerazioni sui limiti e sulla continuità; perchè essendo le espressioni dell'algebra elementare (quando non perdono il significato) sempre continue, ed essendo i valori, pei quali perdono il significato o si annullano, soltanto valori speciali, nel caso di cui è parola si può dare alle quantità che fanno nullo od illusorio il C un aumento piccolissimo: le uguaglianze precedenti sussisteranno allora sotto la forma

$$\frac{M_1}{N_1}=\frac{C_1A_1}{C_1B_1},\quad \frac{C_1A_1}{C_1B_1}=\frac{A_1}{B_1}\quad \text{per cui}\quad \frac{M_1}{N_1}=\frac{A_1}{B_1}$$

non essendo zero nè N, nè B_1, e C_1 non essendo nullo od illusorio; allora, per la continuità di tutte le precedenti espressioni ed essendo $N \gtrless 0$, $B \gtrless 0$, avremo anche

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{B}$$

5. Per meglio chiarire quanto precede daremo degli esempi di tutti i casi che si possono presentare quando la soppressione di un fattore nullo od illusorio altera o mantiene l'equivalenza, e di quelli in cui l'equivalenza è alterata anche sopprimendo un fattore che, per i valori che si considerano, non è nè nullo nè illusorio.

1° caso. — Per certi valori speciali il fattore C per cui si dividono M ed N sia zero.

È allora intanto impossibile che $\frac{M}{N}$ ed $\frac{A}{B}$ abbiano insieme significato; perchè, essendo in generale $N = CB$, se (avendo $\frac{A}{B}$ un significato) è $B \gtrless 0$ e C è 0, il prodotto N o è illusorio, o, se ha un significato, ha il valore 0; e in ambedue i casi $\frac{M}{N}$ non avrebbe significato.

— Se

$$\frac{M}{N} = \frac{(x-\alpha)\,a + b}{(x-\alpha)\,m + n} \quad \text{e si prende } C = x - \alpha$$

si trova

$$\frac{A}{B} = \frac{a + \dfrac{b}{x-\alpha}}{m + \dfrac{n}{x-\alpha}}$$

e per $x = \alpha$, C è nullo, $\frac{M}{N}$ ha significato e $\frac{A}{B}$ è illusorio.

— Se

$$\frac{M}{N} = \frac{ax - a\alpha}{bx - b\alpha} \quad \text{e si prende } C = x - \alpha$$

si ha

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b};$$

e per $x=\alpha$, $b \gtrless 0$, C è nullo, $\frac{M}{N}$ è illusorio, ed $\frac{A}{B}$ ha significato. Lo stesso si avrebbe con

$$\frac{M}{N}=\frac{x}{x} \text{ e } C=x$$

quando $x=0$, avendosi sempre $\frac{A}{B}=\frac{1}{1}$

— Se

$$\frac{M}{N}=\frac{ax-a\alpha}{(x-\alpha)\,x-(x-\alpha)\alpha} \quad \text{con } C=x-\alpha$$

si ha

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{x-\alpha}$$

e per $x=\alpha$ è nullo C e sono illusori tanto $\frac{M}{N}$ che $\frac{A}{B}$.

2° *Caso*. — Per certi valori speciali C sia illusorio.

— Se

$$\frac{M}{N}=\frac{2x}{2(x-1)}$$

notando che si ha in generale

$$2x=\frac{2x}{x}\,x, \quad 2(x-1)=\frac{2x}{x}\,(x-1)$$

possiamo prendere $C=\frac{2x}{x}$ ed avremo

$$\frac{A}{B}=\frac{x}{x-1}$$

e per $x=0$ C è illusorio, ma tali non sono $\frac{M}{N}$ e $\frac{A}{B}$ che risultano uguali.

— Se

$$\frac{M}{N} = \frac{a+x}{m+y} \quad \text{e si prende } C = \frac{x}{y}$$

si ottiene

$$\frac{A}{B} = \frac{a\frac{y}{x} + y}{m\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x}}$$

e quando $x = 0$, $y = 0$, $m \gtrless 0$, si ha che C è illusorio, $\frac{M}{N}$ ha un significato, $\frac{A}{B}$ è illusorio.

— Se

$$\frac{M}{N} = \frac{\frac{a}{x}}{\frac{m}{x}} \quad \text{e si prende } C = \frac{1}{x}$$

si ottiene

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{m}$$

e per $x=0$, $m \gtrless 0$, sono illusori C ed $\frac{M}{N}$, ed ha significato $\frac{A}{B}$.

— Se

$$\frac{M}{N} = \frac{\frac{a}{x}}{\frac{2x}{x}} \quad \text{e si prende ancora } C = \frac{1}{x}$$

si ottiene

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{2x}$$

e per $x = 0$ sarà illusorio C e tali saranno insieme $\frac{M}{N}$ e $\frac{A}{B}$.

3.° *Caso.* — Per i valori che si considerano C non sia nè nullo nè illusorio (caso generale)

In generale saranno allora $\frac{M}{N}$ ed $\frac{A}{B}$ o ambedue con significato ed equivalenti, od ambedue illusori, e quindi, colla nostra definizione, equivalenti ancora. Quest'ultimo caso avverrebbe quando fosse, p. es.

$$\frac{M}{N}=\frac{xy}{xz} \quad \text{con } C=x\,;$$

sarà

$$\frac{A}{B}=\frac{y}{z}\,;$$

e per $x \gtrless 0$, $y=0$, $z=0$, saranno illusori $\frac{M}{N}$ ed $\frac{A}{B}$. Ma vi sono dei casi in cui l'equivalenza non sussiste, quando cioè divengano illusorie l'una o l'altra soltanto delle due frazioni.

Se p. es:

$$\frac{M}{N}=\frac{n}{n(m-1)} \quad \text{con } C=n$$

osservando che, in generale,

$$n=n.\frac{m}{m}$$

potremo porre

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{m}{m}}{m-1}\,;$$

ed allora per $n \gtrless 0$, $m=0$ si ha che C non è nè nullo nè illusorio, $\frac{M}{N}$ ha un significato ed è illusorio $\frac{A}{B}$.

Se p. es.

$$\frac{M}{N}=\frac{1}{\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{n}} \quad \text{e si prenda } C=\frac{1}{n},$$

si può osservare che (almeno in generale)

$$\frac{m}{n} : \frac{n}{n} = \frac{1}{n} . m$$

e quindi possiamo avere

$$\frac{A}{B} = \frac{n}{m};$$

e per $x = 0$, $n \gtrless 0$, $m \gtrless 0$ non sarà C nè zero nè illusorio, sarà illusorio $\frac{M}{N}$ ed avrà invece un significato $\frac{A}{B}$.

Gli esempi citati in questo 3° caso hanno, come si vede, poco valore in pratica; ma essi devono certamente considerarsi in una teoria generale.

6. Da quanto si è detto fin qui si rileva che quando, coi procedimenti ordinari, si trovi che si ha *in generale*

$$M = CA, \quad N = CB,$$

l'equivalenza

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{B}$$

sarà vera *in generale*, ma potrà non esserlo per certi valori *speciali* delle lettere che in essa compariscono — e precisamente *non sussiste* quando, pur non essendo nullo nè illusorio C, sia illusoria la sola $\frac{M}{N}$ o la sola $\frac{A}{B}$: e *può* non sussistere per quei valori speciali che rendono nullo od illusorio C, i quali quindi devono essere esaminati a parte.

Le osservazioni precedenti non debbono mai tralasciarsi quando, per semplificare una frazione, se ne dividano i due termini per un medesimo fattore.

7. Considerazioni analoghe si possono ripetere quando si moltiplicano per un medesimo fattore C i due termini A e B di una frazione $\frac{A}{B}$. Si otterrà in tal caso $\frac{CA}{CB}$, la quale frazione, per quanto si è visto al § 4, è equivalente (nel senso più lato da noi definito) ad $\frac{A}{B}$ tranne *al più* per quei

valori che rendono C nullo od illusorio. Se poi eseguendo qualche operazione (che si ridurrà ordinariamente a nuove trasformazioni di frazioni) si abbia *in generale*

$$CA = M, \quad CB = N,$$

allora può scriversi *in generale*

$$\frac{A}{B} = \frac{M}{N}$$

tranne, come già si è detto, quando soltanto una di queste due frazioni divenga illusoria, e tranne al più quando C è nullo od illusorio.

Del resto, considerando che la moltiplicazione per un fattore C equivale ad una divisione per il fattore $\frac{1}{C}$, quanto è accennato in questo § può dedursi da quello che si disse al § 4: osservando che i casi in cui C sia nullo od illusorio sono tutti quelli e soltanto quelli in cui avvenga che o sia zero o sia illusorio $\frac{1}{C}$.

8. Se il termine M fosse *già dato* sotto la forma CA ed N sotto la forma CB, allora la frazione data essendo *già* sotto la forma $\frac{CA}{CB}$, la divisione per C dei due termini equivale senz'altro ad una semplice soppressione di un fattore: ed allora, per le osservazioni fatte al § 4, si vede che la frazione $\frac{A}{B}$ a cui si giunge è equivalente alla data finchè C è diverso da zero e non è illusorio, ed in tal caso di più ha un significato quando lo ha la frazione data. Oltre a ciò $\frac{A}{B}$ può avere un significato anche se $C = 0$ o se C è illusorio, nei quali casi non lo ha certamente $\frac{CA}{CB}$.

Questo prova che nella frazione $\frac{CA}{CB}$ la soppressione di un fattore C lascia la frazione inalterata in tutti i casi in cui essa ha un significato; e di più *può* darle un significato anche in qualche caso in cui quella ne sia priva, quando C sia nullo od illusorio.

Nel passare da $\frac{CA}{CB}$ ad $\frac{A}{B}$ sono quindi da esaminare a parte i valori per cui $C=0$ o C è illusorio; cioè fra i valori per cui $\frac{A}{B}$ ha un significato sono da escludersi (quando si voglia studiare la frazione primitiva) quelli che annullano C o lo privano di significato.

Nel passaggio più generale da $\frac{M}{N}$ ad $\frac{A}{B}$ può darsi, come si è visto, che si *acquistino* ed anche si *perdano* dei casi di significato della frazione.

9. I casi che in pratica sono più frequenti sono quelli in cui le espressioni M, N, C, A, B non divengono illusorie per nessun valore delle lettere che in esse compariscono, o di quelle almeno che si considerano come variabili, quando si supponga di dare alle altre, che sono costanti, valori che non rendano nulle od illusorie nessuna delle espressioni che si vogliono adoperare. Siamo in questo caso quando M, N, C, A, B siano tutte intere rispetto alle quantità che possono assumere diversi valori. Allora sarà sempre

$$CA = M, \quad CB = N$$

e quindi

$$\frac{CA}{CB} = \frac{M}{N}:$$

perciò dovremo dire che l'equivalenza

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{B}$$

è vera tranne al più per quei valori che annullano C, per i quali è privo di significato $\frac{M}{N}$ e può non esserlo $\frac{A}{B}$. Quindi la soppressione di uno di tali fattori mantiene inalterato il significato quando questo esiste, può crearlo in qualche altro caso.

10. Prima di passare a studiare l'equivalenza delle equazioni, esaminiamo se, quando si ha un'espressione algebrica che contenga somme o differenze di frazioni, essa possa in qualche caso alterarsi quando si riducano le frazioni allo stesso denominatore.

Essendo infiniti i comuni denominatori che si possono dare a più frazioni (anzi potendo scegliersi un'espressione qualunque per comune denominatore) e consistendo la riduzione di ogni singola frazione nella moltiplicazione dei suoi due termini per un medesimo fattore, quand'anche questa moltiplicazione si accenni senza eseguirla passando così da una frazione $\frac{A}{B}$ all'altra $\frac{CA}{CB}$, può darsi, per quanto già si è visto, che la nuova espressione algebrica (pure essendo in generale equivalente alla prima) sia illusoria in qualche caso di più, quando cioè sia nullo od illusorio qualcuno dei fattori per cui si sono moltiplicati i due termini delle varie frazioni. Eseguendo poi queste moltiplicazioni potrebbe di più aversi un significato in qualche caso in cui prima non si aveva (§ 7).

Peraltro se la riduzione al medesimo denominatore si fa nei modi usuali e le moltiplicazioni da farsi ai termini delle frazioni si accennano semplicemente, l'espressione risultante rimarrà sempre equivalente (nel senso nostro) a quella data. Infatti nelle ordinarie riduzioni allo stesso denominatore si moltiplicano i due termini di ciascuna frazione per il prodotto dei rimanenti denominatori. Lasciando questo prodotto semplicemente accennato, esso sarà nullo od illusorio solo quando tale sia qualcuno dei fattori, cioè qualcuno dei denominatori, nel qual caso è illusoria anche qualcuna delle frazioni e quindi tutta l'espressione data. E siccome la nuova espressione poteva *al più* (§ 7) essere illusoria (oltre i casi in cui lo è quella data) quando diviene nullo od illusorio qualcuno di quei fattori, ne viene che sarà illusoria *sempre* e *soltanto* quando lo sarà quella data — che è quanto volevamo concludere.

Se il prodotto dei denominatori o i prodotti dei termini delle frazioni per i corrispondenti fattori si eseguissero in modo da porre un'espressione unica M dove c'è un prodotto A . B . C . . . L, oppure se si riducesse ad un denominatore che non fosse il prodotto (accennato soltanto e non eseguito) dei denominatori, quando anche esso fosse il minimo comune multiplo dei denominatori (la ricerca del quale suppone la decomposizione in fattori dei denominatori) può darsi che passando dall'espressione data all'altra si acquisti o si perda qualche caso di significato.

Se i denominatori, come avviene nei casi ordinari, sono interi rispetto alle quantità da cui dipendono, allora è chiaro che si può prendere per comune denominatore un'espressione multipla dei denominatori e di grado non superiore a quello del loro prodotto, la quale in ogni caso risulterà dal prodotto di fattori interi dei denominatori stessi, ed il prodotto che in essa è accennato potrà anche essere eseguito.

Se saranno interi anche i numeratori si potranno anche eseguire le moltiplicazioni dei termini delle frazioni per i rispettivi fattori.

In questi ultimi casi, che sono i casi della pratica, seguendo i processi soliti non si introduce quindi nessun caso di eccezione — purchè il comune denominatore sia o il prodotto di tutti i denominatori o un suo summultiplo.

(Il seguito nel prossimo fascicolo).

FRAZIONI DECIMALI PERIODICHE
E LORO GENERATRICI

I.

Dalla regola per la conversione di una frazione ordinaria in decimale (finita o no) risultano i seguenti teoremi:

1. *Il resto, che si ottiene nella conversione di una frazione ordinaria in decimale, dopo calcolato un numero qualunque di cifre decimali, rappresenta unità dello stesso ordine dell' ultima cifra calcolata.*

2. *La frazione decimale, limitata ad un numero qualunque di cifre, è minore della generatrice e ne differisce meno di una unità dell' ordine della sua ultima cifra.*

II.

Possiamo ora dimostrare i seguenti teoremi:

3. *Due frazioni ordinarie equivalenti generano la medesima frazione decimale* (finita o no).

Sieno le frazioni equivalenti $\frac{3}{7}$ e $\frac{6}{14}$, di cui la prima generi la frazione decimale 0,428.... Ogni frazione decimale, la cui cifra dei decimi fosse maggiore o minore di 4, supererebbe (2) la frazione $\frac{3}{7}$, e quindi anche la sua equivalente $\frac{6}{14}$, o differirebbe da ciascuna di esse di più di $\frac{1}{10}$. In nessun caso questa frazione decimale potrebbe essere generata dalla frazione $\frac{6}{14}$. Altrettanto ripetasi per qualunque altra cifra decimale e della parte intera. D'altra parte esiste un processo per convertire qualunque frazione ordinaria in decimale (finita o no); resta adunque dimostrato che le due frazioni $\frac{3}{7}$ e $\frac{6}{14}$ generano la medesima frazione decimale 0,428...

4. *Due frazioni generatrici d'una medesima frazione decimale* (finita o no) *sono equivalenti.*

Sieno, se è possibile, due frazioni $\frac{37}{54}$ e $\frac{26}{54}$ (che potremo supporre ridotte (3) allo stesso denominatore) disuguali e generatrici d'una medesima frazione decimale 0,685... La frazione 0,68, limitata a tante cifre decimali, quante sono quelle del comune denominatore, sarebbe (2) minore di ciascuna delle due $\frac{37}{54}$, $\frac{26}{54}$ e differirebbe da entrambe meno di $\frac{1}{100}$. Ma, essendo $\frac{37}{54}$ maggiore di $\frac{26}{54}$, ne seguirebbe che la differenza fra queste due, che è $\frac{37-26}{54}$, sarebbe minore di $\frac{1}{100}$. Ciò è assurdo, perchè il denominatore di $\frac{37-26}{54}$ ha una cifra di meno di quello di $\frac{1}{100}$, e il numeratore non è minore di 1. Il teorema è così dimostrato.

5. *Ogni numero ammette un multiplo eguale alla differenza di due potenze di* 10.

Sia un numero qualunque, p. es. 42, e si dividano per questo le successive potenze di 10. I resti, che si otterranno, dovendo essere tutti minori del divisore 42, non saranno diversi dai numeri 0, 1, 2, 3..... 41; sicchè, eseguendo 43 divisioni, almeno due di esse daranno resti eguali. La differenza dei rispettivi dividendi sarà un multiplo del divisore 42; c.d.d.

Corollario. = *Qualunque frazione può ridursi ad avere per denominatore la differenza di due potenze di* 10.

III.

6. *Se una frazione ordinaria pura* (*ridotta ad avere per denominatore la differenza di due potenze di* 10) *sia*

convertita in decimale, il numero formato da tante cifre decimali, quanti sono i 9 del denominatore, che segue quello di tante cifre, quanti sono gli zeri del denominatore, è periodico. La differenza fra i numeri, formati da tante cifre decimali, quante sono le unità contenute negli esponenti delle dette potenze di 10, è uguale al numeratore.

Sia data una frazione ordinaria pura; poichè due frazioni equivalenti generano (3) la medesima frazione decimale, potremo ridurla ad avere (5, Cor.) per denominatore la differenza di due potenze di 10. La frazione data sia allora $\frac{38453}{10^5-10^2}=\frac{38453}{99900}$; avremo

$$(a)\quad \frac{38453}{99900}=\frac{38453}{999}\cdot\frac{1}{10^2}=\left(38+\frac{491}{999}\right)\cdot\frac{1}{10^2}=0{,}38+\frac{491}{999}\cdot\frac{1}{10^2}.$$

Ma

$$\frac{491}{999}=\frac{491.1000}{999.1000}=\frac{491.999+491}{999.1000}=0{,}491+\frac{491}{999}.\frac{1}{10^3},$$

perciò la (a) diviene

$$(b)\quad \frac{38453}{99900}=0{,}38+\left(0{,}491+\frac{491}{999}\cdot\frac{1}{10^3}\right)\frac{1}{10^2}=0{,}38491+\frac{491}{999}.\frac{1}{10^5}.$$

Le (a), (b) si possono scrivere anche

$$\frac{38453}{99900}=0{,}38+\frac{49100}{99900}.\frac{1}{10^2},\quad \frac{38453}{99900}=0{,}38491+\frac{49100}{99900}.\frac{1}{10^5}.$$

Dall'ispezione di queste due eguaglianze risulta (1) che il resto ottenuto dopo avere calcolato due cifre decimali (tante quanti sono gli zeri del denominatore) è uguale a quello, che si ottiene dopo averne calcolate cinque (tante quante sono le cifre del denominatore), perciò la 6ª cifra decimale e, per conseguenza, la 7ª, l'8ª... saranno rispettivamente eguali alla 3ª, 4ª, 5ª..., cioè il numero 491 si ripeterà periodicamente; come era detto nella prima parte del teorema.

Inoltre dalla (a) si ha

$$\frac{38453}{99900}=\frac{38.999+491}{99900}=\frac{38.1000+491-38}{99900}=\frac{38491-38}{99900},$$

da cui

$$38491 - 38 = 38453.$$

Il teorema è così completamente dimostrato.

7. *La generatrice d'una periodica mista, minore di* 1, *è uguale ad una frazione, che ha per numeratore la differenza fra il numero, che precede il secondo periodo, e l'antiperiodo; ed ha per denominatore la differenza di due potenze di* 10, *i cui esponenti sono rispettivamente eguali ai numeri delle cifre decimali, che precedono il secondo e il primo periodo.*

Infatti una periodica mista, minore di 1 è generata (6) da una così fatta frazione. Ogni altra frazione differente da questa non può generare (4) la medesima frazione decimale.

IV.

I due teoremi precedenti comprendono anche il caso in cui la frazione decimale sia periodica semplice, non che quello in cui sia finito. Infatti nel primo caso basterà riguardare come antiperiodo il primo periodo; e nel secondo, preso per antiperiodo il numero formato dalle cifre decimali, basterà riguardare il periodo come costituito da uno o più zeri.

Dagli stessi teoremi discendono per tanto i seguenti:

8. *La generatrice d'una periodica semplice, minore di* 1, *è uguale ad una frazione, che ha per numeratore il periodo e per denominatore il numero scritto con tanti* 9, *quante sono le cifre del periodo.*

La generatrice della periodica semplice 0,27.27.27..., se si considera il primo periodo 27 come antiperiodo, è (7)

$$\frac{2727-27}{9900} = \frac{2700}{9900} = \frac{27}{99}; \text{ c. d. d.}$$

9. *Ogni frazione pura irreducibile, il cui denominatore sia primo con* 10, *è generatrice d'una periodica semplice. Il numero delle cifre del periodo è uguale alla differenza degli esponenti delle più piccole potenze di* 10, *che, divise pel denominatore, danno resti uguali.*

Sia $\frac{19}{21}$ una frazione pura irreducibile, il cui denomina-
ore sia primo con 10. Sieno inoltre 10^1, 10^7 le più piccole
otenze di 10, che, divise per 21, danno resti eguali; allora
$0^7 - 10^1 = 999999.10$ sarà divisibile per 21, e lo sarà anche il
umero 999999, perchè 21 è primo con 10. Potremo per tanto
idurre la frazione $\frac{19}{21}$ ad avere per denominatore il nu-
nero 999999, con che si otterrà $\frac{19}{21} = \frac{904761}{999999}$. Questa frazione
sarà generatrice (s) della periodica semplice 0,904761.904761...,
nella quale il numero delle cifre del periodo è uguale alla
differenza degli esponenti delle suddette potenze di 10. Si
potrebbe sospettare che il periodo, così formato, non fosse
in realtà che l'insieme di più periodi. Se ciò fosse vero e
la frazione $\frac{19}{21}$ generasse, per es. la periodica semplice 0,904.904,
allora sarebbe (s) $\frac{19}{21} = \frac{904}{999}$; cioè 999, e quindi anche $9990 = 10^4 - 10$,
sarebbe un multiplo di 21, che è quanto dire che 10^1 e 10^4,
divise per 21, darebbero resti eguali. Essendo ciò contrario
all'ipotesi, il teorema risulta dimostrato.

10. *Ogni frazione pura irreducibile, il cui denominatore, non primo con 10, ammetta qualche divisore primo diverso da 2 e da 5, è generatrice d'una periodica mista. Il numero delle cifre dell'antiperiodo è uguale al maggiore degli esponenti delle potenze di 2 e di 5, che dividono il denominatore; il numero delle cifre del periodo è uguale alla differenza degli esponenti delle più piccole potenze di 10, che, divise pel denominatore, danno resti eguali.*

Sia la frazione $\frac{173}{1320} = \frac{173}{3.11.2^3.5}$, che soddisfi alle condizioni del teorema; essa non può generare una frazione decimale finita, nè una periodica semplice, perchè il suo denominatore non è divisibile esclusivamente pei fattori primi 2 e 5, nè è (8) primo con 10. Dunque genera una periodica mista. Supponiamo che il periodo di questa sia di due cifre, il denominatore della generatrice sarà (7) eguale al prodotto di 99 per una potenza di 10. Il numero 99 conterrà i fattori primi 3.11, non contenuti in quella potenza, e siccome 10^3 contiene gli altri fattori $2^3.5$, così il prodotto $99.10^3 = 10^5 - 10^3$ sarà un multiplo del denominatore della proposta. Ridotta la frazione data ad avere per denominatore questo multiplo, si vedrà allora che l'antiperiodo della periodica mista non ha (6) più di tre cifre. D'altra parte non può averne di meno, perchè allora il denominatore della generatrice (7) non conterrebbe il fattore 2^3; dunque il numero delle cifre dell'antiperiodo è precisamente eguale al massimo degli esponenti delle potenze di 2 e di 5 contenute nel denominatore della proposta.

Inoltre osserviamo che non esistono due potenze di 10 minori delle 10^3, 10^5, che, divise pel denominatore 1320, danno resti eguali. Infatti la prima non può essere minore di 10^3, per ciò che si è detto di sopra, e la seconda non può essere minore di 10^5, perchè il numero delle cifre del periodo non sarebbe (7) quello ammesso dall'ipotesi.

C. Moriconi.

Urbino, 10 aprile 1886.

SULL'ERRORE NEL CALCOLO DEL SENO D'UN ANGOLO COLLE TAVOLE E SOPRA UN NOTO TEOREMA DI GONIOMETRIA

Nei miei *Elementi di trigonometria piana* (N.i 36, 37, 38) ho assegnato, in modo elementare, una limitazione dell'errore che si commette nel calcolo del seno, applicando l'ordinaria interpolazione. Ma si può pervenire in modo più semplice ad una limitazione d'un poco inferiore a quella, come espongo nella prima parte di questo articolo, ove incomincio col rammentare la dimostrazione d'un noto teorema, che è il primo di quelli dimostrati al N. 36 dell'opera citata, e del quale sono esposti, nella seconda parte, due notevoli corollari.

I.

1. Il rapporto $\frac{\operatorname{sen} a}{a}$ diminuisce al crescere di a quando a cresce da 0 a 180°.

Indicando con a e $b > a$ le misure di due angoli acuti, e con α e β i rapporti degli archi corrispondenti al raggio, si ha

$$\operatorname{sen} a > \alpha \cos a,$$

quindi

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen}(b-a) > \alpha \cos a \operatorname{sen}(b-a),$$

e a fortiori

$$(\beta-\alpha) \operatorname{sen} a > \alpha \cos a \operatorname{sen}(b-a).$$

Se ora a questa diseguaglianza si addiziona l'altra

$$\alpha \operatorname{sen} a > \alpha \operatorname{sen} a \cos(b-a),$$

si ottiene

$$\beta \operatorname{sen} a > \alpha \operatorname{sen} b,$$

ossia

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\alpha} > \frac{\operatorname{sen} b}{\beta},$$

e questa equivale alla

$$\frac{\operatorname{sen} a}{a} > \frac{\operatorname{sen} b}{b}.$$

È poi evidente che, quando a cresce da 90° a 180°, il rapporto $\frac{\operatorname{sen} a}{a}$ diminuisce.

2. Sia data una tavola di seni dei multipli dell'angolo d; sieno a e $a+d$ i multipli consecutivi di d fra i quali è compreso l'angolo del quale si cerca il seno, e s'indichi

quest'angolo con $a + h$. Quando si calcola sen $(a + h)$ colla proporzione

$$\frac{\operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}(a+d) - \operatorname{sen} a} = \frac{h}{d},$$

cioè ponendo

$$\operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a + \frac{h}{d}\Big(\operatorname{sen}(a+d) - \operatorname{sen} a\Big),$$

si commette un errore che è composto di due parti distinte. Una di queste è la differenza

$$E = \operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen} a - \frac{h}{d}\Big(\operatorname{sen}(a+d) - \operatorname{sen} a\Big),$$

mentre l'altra dipende dal grado di approssimazione dei seni della tavola. Se questi sono approssimati a meno di g, l'errore nel calcolo della formola

$$\operatorname{sen} a + \frac{h}{d}\Big(\operatorname{sen}(a+d) - \operatorname{sen} a\Big),$$

ossia della

$$\left(1 - \frac{h}{d}\right) \operatorname{sen} a + \frac{h}{d} \operatorname{sen}(a+d),$$

è minore di

$$\left(1 - \frac{h}{d}\right) g + \frac{h}{d}\, g,$$

cioè di g.

Per trovare una limitazione della differenza E, si trasformino le differenze di seni in prodotti, e, sostituendo ad $\frac{h}{d}$ il rapporto eguale $\frac{h_1}{d_1}$, in cui h_1 e d_1 significano i rapporti al raggio degli archi h e d, si troverà:

$$E = h_1 \cos\left(a + \frac{h}{2}\right) \left\{ \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h_1}{2}} - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{d_1}{2}} \right\} + h_1 \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{d_1}{2}} \left(\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{d}{2}\right)\right)$$

uesta prova, in forza del teorema rammentato al N. 1, er essere $h < d$, che la differenza E è sempre positiva.

Ora dalle disuguaglianze

$$1-\frac{h_1^2}{16}<\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h_1}{2}}<1,\quad 1-\frac{d_1^2}{16}<\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{d_1}{2}}<1,$$

ricava

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h_1}{2}}-\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{d_1}{2}}<\frac{d_1^2}{16},$$

perciò sarà

$$E<\frac{h_1 d_1^2}{16}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)+h_1\left(\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{d}{2}\right)\right).$$

Si ha poi

$$\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{d}{2}\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{d-h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(a+\frac{d+h}{4}\right)<\frac{1}{2}(d_1-h_1)\operatorname{sen}(a+d),$$

in conseguenza

$$E<\frac{d_1^3}{16}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{2}h_1(d_1-h_1)\operatorname{sen}(a+d)$$

d anche

$$E<\frac{d_1^3}{16}+\frac{d_1^2}{8}\operatorname{sen}(a+d),$$

perchè il prodotto $h_1(d_1-h_1)$ è al più eguale a $\frac{d_1^2}{4}$. *)

Così, p. e., per $d=10'$ si ha

$$E<\frac{2}{10^9}+\frac{106}{10^8}\operatorname{sen}(a+d).$$

II.

3. Se con A e B s'indicano due angoli compresi fra 0 e 180° si ha (1)

---

*) Posto $h_1=\frac{d_1}{2}\pm k$ si ha $h_1(d_1-h_1)=\frac{d_1^2}{4}-k^2\leqq\frac{d_1^2}{4}$.

$$\frac{\text{sen A}}{\text{sen B}} \gtrless \frac{A}{B}$$

secondo che A è minore o maggiore di B. Di qui risulta il teorema:

In ogni triangolo il rapporto di un lato ad un altro lato è maggiore o minore del rapporto dell'angolo opposto al primo lato all'angolo opposto al secondo, quando il primo lato sia rispettivamente minore o maggiore del secondo.

4. Sieno A e B due punti d'una superficie sferica di raggio R, AB l'arco di circolo massimo, minore di 180° che unisce quei due punti, e AHB l'arco, minore di 180°, di uno qualunque dei circoli minori che passano per A e B. Indicando con a e b i numeri di gradi degli archi AB, AHB, con r il raggio del circolo minore, e con c la corda AB, si ha:

$$c = 2R \text{ sen } \left(\frac{a}{2}\right) = 2r \text{ sen } \left(\frac{b}{2}\right),$$

dalla quale risulta:

$$b > a.$$

Perciò, indicando con α e β i rapporti degli archi AB, AHB ai raggi dei rispettivi circoli, sarà (1)

$$\frac{\text{sen } \left(\frac{a}{2}\right)}{\alpha} > \frac{\text{sen } \left(\frac{b}{2}\right)}{\beta},$$

ossia

$$\frac{R \text{ sen } \left(\frac{a}{2}\right)}{R\alpha} > \frac{r \text{ sen } \left(\frac{b}{2}\right)}{r\beta},$$

e in conseguenza:

$$R\alpha < r\beta,$$

cioè il noto teorema:

L'arco di circolo massimo, minore di 180°, che unisce due punti d'una superficie sferica, è minore di qualunque arco di circolo minore che unisce gli stessi due punti.

D. Besso.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA (2) PROPOSTO A PAG. 99. *)

(2) *Se da un punto qualunque della superfice d'un triangolo sferico trirettangolo si conducono tre archi di circonferenze massime perpendicolari ai suoi lati, il perimetro del triangolo sferico, che ha per vertici i piedi dei tre archi, è eguale alla metà d'una circonferenza massima.* (F. Nicoli)

Dimostrazione di *Ignazio Beyens*, Capitano del Genio a Cadice.

Sia ABC un triangolo sferico trirettangolo ed O un punto qualunque della sua superficie: se da O si conduce l'arco di circolo massimo OA' perpendicolare al lato BC, la circonferenza a cui esso appartiene dovrà passare pel vertice A, perchè questo punto è polo dell'arco BC. Similmente l'arco di circolo massimo OB', perpendicolare ad AC, si troverà sopra una circonferenza passante per B, e l'arco di circolo massimo OC', perpendicolare ad AB, si troverà sopra una circonferenza passante per C. Perciò, e per una nota proprietà del triangolo sferico, si avrà la relazione

$$\frac{\operatorname{sen}AC'}{\operatorname{sen}C'B}\cdot\frac{\operatorname{sen}BA'}{\operatorname{sen}A'C}\cdot\frac{\operatorname{sen}CB'}{\operatorname{sen}B'A}=1$$

Si prenda ora, sul prolungamento del lato AB, l'arco $BC''=C'B$; sarà $\operatorname{sen}AC'=\operatorname{sen}AC''$, e la precedente relazione diverrà

$$\frac{\operatorname{sen}AC''}{\operatorname{sen}C''B}\cdot\frac{\operatorname{sen}BA'}{\operatorname{sen}A'C}\cdot\frac{\operatorname{sen}CB'}{\operatorname{sen}B'A}=-1$$

la quale prova che i punti C'', A', B' sono situati sopra una stessa circonferenza massima. Indicando con C''' il secondo punto di incontro di questa circonferenza con quella alla quale appartiene il lato AB', si avrà $C'''A+AB+BC''=180°$, ossia $C'''A=90°-BC''=AC'$; epperciò dai triangoli $C'''AB'$, $C'AB'$ risulterà $B'C'''=B'C'$. Inoltre dai triangoli $A'BC''$, $A'BC'$ si ricava: $C''A'=C'A'$; perciò l'eguaglianza

$$C''A'+A'B'+B'C'''=180°$$

si trasforma nella

$$C'A'+A'B'+B'C'=180°,$$

che è quanto volevasi dimostrare.

---

*) In un prossimo fascicolo saranno pubblicate le dimostrazioni dei teoremi (1) e (3) che sono state inviate dai Sig.ri J. Beyens e G. Riboni.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica rédigée par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1886. N.° 2.

L'Eco della Associazione nazionale fra gli insegnanti delle scuole secondarie. Anno III, n. 15 e 16. Torino, 1886.

Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXIV. Marzo e Aprile 1886. Napoli, Benedetto Pellerano, editore.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lèvy* Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe 2e série. Dixième année. N. 5 e 6 Paris, 1886.

Journal de Mathématiques élèmentaires publié par *H. Vuibert*. 10e Année. N. 16, 17, 18. Paris, M. Nony, 17. Rue des Écoles.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome sixième, Mai et Juin 1886.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XVII. N. 7, 8, 9, 10, 11. Firenze, 1886.

C. Arzelà. — Sui prodotti infiniti (1886).

V. Cerruti. — Sulla deformazione d'una sfera omogenea isotropa (1886).

G. Giuliani. — Dell'integrabilità di una serie di funzioni (1885).

Q. Grandi. — Sull'insegnamento dell'Aritmetica (1865). — Definizioni e regole di Aritmetica (1869). — Il primo libro di Euclide o introduzione alla Geometria (1871). — L'utile delle scienze ridotto a poche pagine per il popolo ovvero trattato sintetico di scienze naturali (1873).

G. De Longchamps. — Intégration de certaines suites récurrentes (1885. — Notice nécrologique sur S. Realis (1886). — Le centre de la conique de Kiepert (1886).

G. Loria. — Rappresentazione su un piano delle congruenze $[2,6]_2$ e $[2,7]$ (1886).

V. Mazzanti. — Il capitano di lungo corso e di gran cabotaggio: Svolgimento dei nuovi programmi governativi per gli esami pratici degli aspiranti ai gradi nella marina mercantile. Trapani, 1883.

E. de Montel. — Operazioni di Borsa e di Commercio. Reggio Emilia (1886).

J. Neuberg. — Sur les surfaces anallagmatiques (1885). — Sur quelques systèmes de tiges articulées; tracé mécanique des lignes. Liège, 1886.

J. M. Rodrigues. — Movimento do solido liver. Lisboa, 1886.

A. Tartinville. — Théorie des équations et des inéquations du premier et du second degré a une inconnue. Paris, 1886.

SULL'IMPOSSIBILITÀ DI CERTE DIVISIONI E SULL'EQUIVALENZA DELLE EQUAZIONI

NOTA

DI RODOLFO BETTAZZI

II.

11. Quanto si è esposto nel capitolo precedente trova la sua naturale applicazione nei teoremi relativi all'equivalenza delle equazioni. (*)

Principiando dall' osservazione fatta al § 2, si noti che si suole in ciascun membro di una equazione (come in generale in un'espressione qualunque) sopprimere due termini uguali e di segno contrario che vi compariscano; poi si dimostra il principio che un'equazione non si altera (frase inesatta alla quale si deve sostituire l'altra: dà origine ad un'equazione equivalente) aggiungendo o togliendo una medesima espressione ai due suoi membri; e come corollario, da questo principio e dalla riduzione precedente si conclude che si può trasportare un termine da un membro all'altro cambiandogli segno, il quale ultimo corollario vale quindi finchè valgono i due principii precedenti.

Le osservazioni del § 2 mostrano peraltro che devesi fare qualche restrizione per il caso in cui i termini da sopprimere in un membro o da aggiungere ad ambedue perdano il loro significato. Ora finchè i termini sopra cui si opera non contengono l'incognita, dimodochè si possano a priori escludere per le lettere che in essi compariscono i valori che li rendono illusori, non ha luogo nessuna osservazione speciale; ma quando essi termini contengono l'incognita, non potendosi a priori escludere per essa nessun valore, si vede che queste operazioni possono effettivamente introdurre o togliere delle radici. — E così l'equazioni:

(*) Per semplicità del linguaggio mi limiterò in quello che segue al caso delle equazioni ad un'incognita sola; ma s'intende che può ripetersi lo stesso per l'equazioni a più incognite.

$$A \pm C = B \pm C \quad e \quad A = B$$

o le altre

$$A + C - C = B \quad e \quad A = B$$

possono non essere equivalenti; e precisamente ciò accadrà quando C perde il significato per qualche valore dell'incognita che sia radice dell'equazione $A = B$, poichè tal valore non appartiene allora evidentemente come radice ad $A \pm C = B \pm C$, o ad $A + C - C = B$; onde in questa riduzione *può darsi* che si *acquisti* qualche radice. Se quindi sia da risolvere l'una o l'altra di queste ultime equazioni, risoluta l'equazione che se ne è dedotta $A = B$, sono da escludere quelle fra le sue radici che rendono illusorio C.

Se C non diviene *mai* illusorio, o almeno non lo diviene per nessuna di quelle radici, le due equazioni sono equivalenti.

Così p: es: l'equazione

$$3x + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} + x^2 = 4x$$

non è equivalente all'altra

$$3x + x^2 = 4x$$

(ottenuta dalla precedente sopprimendo i termini $\frac{1}{x-1}, -\frac{1}{x-1}$) perchè questa ha le radici, $x = 0$, $x = 1$ delle quali la seconda rende illusoria l'espressione $\frac{1}{x-1}$ e quindi non è radice della prima equazione.

Invece l'equazione

$$3x + x^6 + x^2 = 4x + x^6$$

è equivalente all'altra

$$3x + x^2 = 4x$$

perchè x^6 non perde mai il suo significato.

E finalmente l'equazione

$$4x + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-2} + x^2 = 4x$$

è ancora equivalente alla solita

$$2x + x^2 = 4x$$

perchè sebbene il termine soppresso $\frac{1}{x-2}$ possa divenire illusorio, pure non lo diviene nè per $x = 1$, nè per $x = 0$, che sono le radici della seconda equazione.

12. Le considerazioni svolte nei §§ 3 e segg: danno origine ad osservazioni anche più importanti.

Abbiasi un'equazione qualunque ed in uno dei suoi membri, p: es: nel primo, comparisca una frazione $\frac{m}{n}$, talchè l'equazione possa scriversi così:

$$(1) \qquad \frac{m}{n} + p = q$$

Supponiamo che si abbia *in generale*

$$m = ca, \quad n = cb$$

e che quindi sia, ancora in generale $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$; dall'equazione precedente si passerà all'altra

$$(2) \qquad \frac{a}{b} + p = q$$

colla semplificazione della frazione $\frac{m}{n}$. Se il fattore c non contiene l'incognita x, dovremo fare le osservazioni dei §§ 4 e segg: circa l'equivalenza delle due frazioni; ma esclusi per le quantità note i valori che dànno luogo ad eccezione, per gli altri le due equazioni sono equivalenti.

Ma se il fattore c non contiene l'incognita x, la soppressione di c può avere influenza sulle radici. Sappiamo infatti (§ 6) che si ha $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ tranne *certamente* per quei valori che, senza rendere nullo ed illusorio c, privano di significato $\frac{m}{n}$ soltanto o soltanto $\frac{a}{b}$: e *al più* per quei valori che rendono nullo od illusorio c. Una radice $x = \alpha$ della equazione (1), la quale non annulli nè renda illusorio c, sarà quindi anche radice della (2) se non renderà illusorio $\frac{a}{b}$; e viceversa una radice $x = \beta$ della (2) che pur non annulli o renda illusorio c è radice della (1) purchè non renda illusorio $\frac{m}{n}$. Passando quindi dall'equazione (1) alla (2) si ritrovano almeno tutte le radici della (1) che non rendono nullo od illusorio il fattore soppresso c, eccetto quelle che rendono illusorio $\frac{a}{b}$; e viceversa le radici di (2) che non annullano nè rendono illusorio c sono altrettante radici della (1), tranne quelle che rendono illusorio $\frac{m}{n}$.

Se ora una radice $x = \alpha$ della (1) rende illusorio o nullo c, può essere che non sia $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ e quindi che essa non sia radice della (2), e può essere pure che lo sia (§ 6); e altrettanto dicasi delle radici della (2) rispetto alla (1).

Passando quindi dalla (1) a (2) *può avvenire* che si *perdano* quelle fra le sue radici che annullano o rendono illusorio c e che viceversa si *acquistino* delle radici di questo genere, le quali non siano radici della (1): e di più si *acquistano certamente* quelle fra le radici di (2) che rendono illusorio $\frac{m}{n}$ (se ve ne sono) e si *perdono certamente* (qualora ne esistano) quelle di (1) che rendono illusorio $\frac{a}{b}$.

P: es: se dall'equazione

$$\frac{2(x-3)+4}{(x-3)+1} - 4 = 0$$

si passa all'altra

$$\frac{2 + \dfrac{4}{x - 3}}{1 + \dfrac{1}{x - 3}} = 4$$

sopprimendo nella frazione del primo membro il fattore $x - 3$, si perde la radice $x = 3$, la quale annulla il fattore soppresso e sodisfa all'equazione data; ma non alla seconda.

Passando dalla seconda alla prima, colla divisione quindi per $\frac{1}{x - 3}$, invece si acquista la radice $x = 3$ che rende illusorio questo fattore.

Se dall'equazione

$$\frac{x - 1}{2\,(x - 1)} + x^2 \quad \frac{3}{2}$$

si passa all'altra

$$\frac{1}{2} + x^2 = \frac{3}{2}$$

sopprimendo il fattore $c = x - 1$, siccome questa ha per radici $x = +1$, $x = -1$, si acquista la radice $x = 1$ la quale rende nullo il fattore c ecc., ecc.

Se quindi vorremo, (nel caso generale) servirci della (2) per risolvere la (1), risoluta che sia la (2) rigetteremo quelle frà le sue radici che rendono illusorio $\frac{m}{n}$: poi cercheremo quali sono i valori di x che rendono illusorio $\frac{a}{b}$ e di essi aggiungeremo alle radici quelle che la verificazione diretta mostra radici di (1). Da questo insieme di valori toglieremo quelli che annullano o rendono illusorio c, i quali *possono* (non *debbono*) non essere radici di (1): le rimanenti sono certamente tutte radici di (1). Esaminati poi a parte (colla verificazione diretta) i valori di x che rendono nullo od illusorio c, riterremo quelli che sodisfano la (1): e queste, insieme colle precedenti radici, daranno la soluzione completa dell'equazione (1).

13. Nel paragrafo precedente si è esposto il processo generale per dedurre le soluzioni della (1) da quelle della (2); nei casi particolari esso potrà generalmente essere abbreviato da osservazioni speciali.

Se p: es: nell'equazione data i termini m ed n della frazione $\frac{m}{n}$ sono *dati già decomposti* talchè l'equazione sia proposta sotto la forma

$$\frac{ca}{cb} + p = q,$$

ricordando che (§ 8) il passaggio da $\frac{ca}{cb}$ ad $\frac{a}{b}$ non altera in generale la frazione e *al più* può darle un significato quando c sia nullo od illusorio, si vede che l'equazione derivata (2) possiede tutte le radici di quella data, e *può* possedere di più quelle che annullano o rendono illusorio c. E quindi, risoluta la (2), basterà rigettare quelle fra le sue radici che, rendendo c nullo od illusorio, verificate direttamente non sodisfano la equazione data.

Se poi, come avviene nei casi ordinari, m, n, c, a, b sono tutte espressioni intere rispetto alla x, e quindi non possono mai divenire illusorie, sarà *sempre* $m = ca$, $n = cb$; talchè se $c = 0$, è ancora $m = 0$, e quindi $\frac{m}{n}$ è illusorio, per cui un valore che annulla c non può essere mai radice della equazione (1). Passando quindi da (1) a (2) si acquistano quelle radici di (2) che annullano il fattore c: onde, risoluta la (2), avremo solo da rigettare assolutamente quelle fra le radici di (2) che annullano c.

14. Tutte le considerazioni dei due §§ precedenti possono ripetersi in particolare quando l'equazione sia o si riduca (restando equivalente a sè stessa) ad essere della forma

$$\frac{M}{N} = D.$$

$$M = CA\,, \qquad N = CB$$

l'equazione precedente non può generalmente ritenersi come equivalente all' altra

$$\frac{A}{B} = D$$

anche se M ed N siano già *dati* sotto la forma CA e CB (§§ 12, 13).

Quest' osservazione mostra inesatto il seguente metodo che suol darsi anche in alcuni dei migliori trattati di Algebra, per mandar via da un'equazione i denominatori trasformandola in una equivalente. Il metodo è questo: « Si portino tutti in un membro i termini che contengono la x nel denominatore e nell' altro i rimanenti: si riducano i primi al medesimo denominatore, e se ne faccia la somma algebrica, talchè l'equazione proposta venga ad assumere la forma $\frac{M}{N}=D$: si sopprimano i fattori comuni ad M e ad N, e si abbia $\frac{A}{B}=D$: si risolva infine l' equazione $A = BD$ che si dimostra equivalente all'equazione precedente $\frac{A}{B}=D$ ». —

Innanzi tutto il trasporto di certi termini tutti in un membro può dare origine alle osservazioni del § 11; ma quando pure tali osservazioni non avessero luogo, o si tenesse conto di esse, e quando pure la riduzione al medesimo denominatore si facesse com' è accennato al § 10 per evitare alterazioni di radici, resta il fatto che l'equazione cui si giunge $\frac{M}{N} = D$ non può, come si è notato, ritenersi equivalente alla $\frac{A}{B} = D$: e che la $\frac{A}{B} = D$ non è equivalente alla $A = BD$ che a condizione che non si eseguisca, ma si lasci accennato il prodotto BD.

Si può osservare che questo metodo viene indicato per risolvere le equazioni in cui A, B, D, C sono espressioni intere, nel qual caso la $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} = \mathrm{D}$ è certo equivalente all' equazione data, e $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \mathrm{D}$ è equivalente ad $\mathrm{A} = \mathrm{BD}$; ma per quanto si è notato nel § 12, il passaggio dall' equazione $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} = \mathrm{D}$ all'altra $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \mathrm{D}$ *può* introdurre le radici che annullano c: onde risoluta l' equazione $\mathrm{A} = \mathrm{BD}$ sono da rigettare quelle fra le sue radici che annullano c. Così p: es: l' equazione

$$\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 - 6x + 8} = -6$$

che può scriversi

$$\frac{(x-2)(x^2 + 3x + 2)}{(x-2)(x-4)} = -6,$$

ridotta all' altra

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x - 4} = -6$$

come indicherebbe il metodo precedente, cioè colla soppressione del fattore comune $x - 2$, avrebbe per radici $x = 2$, $x = -11$; delle quali la prima, che annulla il fattore $x - 2$ deve essere esclusa. E infatti il valore 2 dato ad x renderebbe privo di significato il primo membro dell'equazione data.

15. Quando si ha un' equazione $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, e se ne moltiplicano i due membri per una medesima espressione m, risulta l' equazione

$$m\mathrm{A} = m\mathrm{B}$$

(dove intenderemo per ora (Cfr. § 17) i prodotti $m\mathrm{A}$, $m\mathrm{B}$ semplicemente *accennati* e non eseguiti), la quale può non essere equivalente alla prima. Una radice della prima equazione è evidentemente radice anche della seconda, purchè non renda illusorio m; viceversa una radice della seconda, che quindi non rende illusori nè A, nè B, nè m, lo è anche della prima, tranne *al più* se annulla m, nel qual caso può anche non esserlo. Col passare quindi dalla prima equazione alla seconda *si perdono* quelle fra le radici che rendono illusorio m, e se ne *possono acquistare* altre che rendano nullo m. Risoluta quindi la seconda equazione, vedremo se fra le sue radici ve ne sono alcune che annullano m: queste, potendo essere radici della seconda senza esserlo della prima, si riterranno solo quando, sostituite direttamente, la verifichino. Dopo cercheremo quali sono i valori di x che rendono illusorio m: e questi, che possono essere radici trascurate, li sostituiremo direttamente nella prima, ritenendo quelle che la verificano e rigettando le altre.

16. Il risultato precedente non ha, sotto quella forma, che poca o nessuna importanza (Cfr. § 17): ma è assai più utile quando si applichi al caso in cui data a risolvere un'equazione che è *già* sotto la forma

$$mA = mB$$

o vi si possa porre senza (§ 3) alterarne le radici, si divida per m, passando all'altra, in generale di più facile risoluzione

$$A = B.$$

Allora, risoluta questa seconda equazione, si vede che sono da aggiungere le radici che così non si siano trovate, e che rendano nullo m senza rendere illusori nè A nè B, e da togliere, se ce ne sono, quelle che rendano illusorio m.

Così in particolare quando si divide tutta un'equazione per $ax+b$ (che compaia a fattore comune), siccome questo divisore si annulla per $x=-\frac{b}{a}$, così si viene a togliere all'equazione la radice $x=-\frac{b}{a}$, tranne se questo valore di x renda illusori A o B.

In questo modo passando p: es. dall'equazione

$$3x^2 - 2x = 4x^3$$

all'altra

$$3x - 2 = 4x^2$$

si perde la radice $x = 0$: tale radice invece non si perde passando dall'equazione

$$1 + 2x = 3$$

all'altra

$$\frac{1}{x} + 2 = \frac{3}{x}$$

Passando dall'equazione

$$\frac{8(x-2)}{x-4} + \frac{7(x^2 - 6x + 8)}{x-4} = \frac{2x^2 - 2x}{x-4},$$

che può scriversi, senza alterarne le radici,

$$\frac{x-2}{x-4}\left[8 + 7(x-4)\right] = 2x\frac{x-2}{x-4},$$

all'altra

$$8 + 7(x-4) = 2x$$

colla divisione per $\frac{x-2}{x-4}$, si perde la radice $x = 2$ che annulla il fattore che si moltiplica e si acquista la radice $x = 4$ che rende illusorio questo fattore.

17. Come necessario complemento al § 15, il quale, come si è detto, sotto quella forma non ha importanza, osserviamo ora che quando l'equazione $A = B$ si moltiplica per un'espressione m, ciò si suol fare non per giungere all'equazione $mA = mB$ che presenta (finchè resta sotto questa forma) le medesime difficoltà dell'equazione data; ma per poter giungere ad avere *almeno in generale*

$$mA = C, \qquad mB = D$$

dove C e D sono nuove espressioni, e risolvere così l'equazione $C = D$ invece di quella data. È da vedersi peraltro se l'equazione $C = D$ è o no equivalente alla $A = B$.

Confrontiamo innanzi tutto l'equazione $C = D$ contra $mA = mB$. Tutte le radici della prima, per quanto si è detto al § 3, apparterranno chiaramente alla seconda, eccetto quelle che rendono illusorio m, o A, o B: e viceversa tutte quelle della seconda appartengono alla prima, tranne se rendono illusorio C o D. Per risolvere quindi l'equazione $mA = mB$ basterà risolvere la $C = D$: dalle radici trovate rigettare quelle che rendono illusorio m, o A, o B e aggiungere quei valori di x che, rendendo illusori C o D, verificano, sostituite direttamente, l'equazione $mA = mB$. Così si ottengono le radici di questa: per avere da queste quelle di $A = B$ seguiremo il metodo indicato al § 15, secondo il quale dovremo, avute le radici di $mA = mB$, scartarne quelle che rendono nullo il fattore m: indi, ritenute le rimanenti radici, aggiungere a queste quelle che si trovano sostituendo direttamente in $A = B$ i valori di x che rendono nullo od illusorio il fattore m.

Riunendo i due risultati si deduce che passando dall'equazione data $A = B$ all' altra $C = D$ basterà risolvere questa: dalle sue radici separare (non perchè siano tutte da rigettarsi, ma per avere metodo più regolare), quelle che annullano o rendono illusorio m, oppure che rendono illusorio A o B; poi cercare tutti i valori di x che rendono illusorio C o D, oppure che annullano o rendono illusorio m, e ritenere come radici quelli che, sostituiti direttamente nella equazione data, la verificano.

Nei casi ordinari tanto m che C e D sono espressioni intere nella x, nè possono quindi divenire mai illusori; allora il metodo precedente si riduce a risolvere l' equazione $C = D$: a separare dalle sue radici quelle che rendono illusorio A o B o annullano m (queste ultime non perchè siano necessariamente da rigettarsi, ma solo, essendo poi considerate di nuovo, per semplicità nell'esposizione del metodo); ed aggiungere come radici quei valori di x, verificati direttamente colla sostituzione in $A = B$, che annullano m e sono radici dell' equazione data.

Uno dei casi frequenti in pratica è quello in cui tutta l'equazione sia intera rispetto ad x, tranne un solo termine, che contenga un denominatore m, intero anch' esso rispetto ad x. Si suole allora moltiplicare l'intera equazione per m, e ridurla a forma intera, con che si ricade nel caso trattato ora. Ma osservando che, per le ipotesi fatte, ora A o B divengono illusori quando è nullo m e viceversa, il metodo precedente si riduce a risolvere l'equazione $C = D$ e rigettare quelle fra le sue radici che annullano m, le quali non sono al certo radici di quella data, perchè, come si è detto, rendono illusorio A o B.

Se i termini non interi in x fossero più di uno, occorre allora tener conto delle osservazioni fatte al § 14.

18. Le osservazioni esposte fin qui farebbero sembrare singolarmente complessa la risoluzione di un'equazione qualunque, quando almeno si fondi sui principii ordinari; ma nei casi della pratica, oltrechè si presenterà generalmente la condizione (che, come si è visto caso per caso, semplifica molto i metodi) di avere da fare con frazioni i cui termini sono già polinomi interi, la semplicità dei fattori soppressi ed aggiunti mostrerà immediatamente quali sono le radici aggiunte o tolte, le quali talora mancheranno affatto.

Nonostante, tutte le osservazioni precedenti sono *teoricamente* necessarie. Esse sono generalmente trascurate nei trattati, più che altro perchè in essi si suppone di avere a fare con espressioni sempre intere; ma questa condizione deve essere avvertita esplicitamente, almeno per far notare, che, quando le espressioni non siano intere, sono necessarie discussioni più minute. In ogni modo, anche in questi casi semplici, il metodo di cui è parola al § 14, si suole, come si è mostrato, esporre un poco inesattamente.

19. Tutte le discussioni dei precedenti §§ prendono origine dall'esistenza di alcune impossibilità nella divisione, per cui restano senza significato i simboli $\frac{a}{0}$, $\frac{0}{0}$. Si è visto infatti che, quando si ha da operare su espressioni intiere (le quali quindi non divengono mai illusorie) i risultati ed i metodi si esprimono sotto forma semplicissima. Sarebbe quindi conveniente cercare di ridurre piccolo, per quanto è possibile, il numero dei casi in cui i simboli sono illusori, attribuendo, quando ciò possa farsi, un significato ai simboli, in alcuni almeno dei casi in cui sono illusori. Questo si riscontra fatto in alcuni trattati di algebra (Baltzer, Faifofer, Raiola Pescarini, Garbieri,...). Nel trattato di quest' ultimo autore è osservato che le espressioni $\frac{a}{0}$, $\frac{0}{0}$ non vogliono dir niente, la prima perchè non rappresenta nessun numero, la seconda perchè può rappresentarli tutti. Per il secondo simbolo possiamo fra gl'infiniti valori cui corrisponde scieglierne uno conveniente ed attribuirlo ad esso come significato: per il primo simbolo possiamo introdurre nuovi numeri definiti da esso, come s'introducono i numeri negativi, i frazionari, ecc., per avere i rappresentanti di risultati di sottrazioni, di divisioni, ecc. altrimenti impossibili.

Si può stabilire che, se per un certo valore di x l'espressione analitica di una funzione perde il suo significato ed il valore della funzione in quel punto non è definito in altro modo (come sono i casi ordinari) e se in esso la funzione tende ad un valore limite finito, si prenda per valore in quel punto questo valore limite. Se avvicinandosi a quel punto la funzione cresce invece oltre ogni limite conservando sempre il medesimo segno + o −, diremo che il valore in quel punto è $+\infty$ o $-\infty$, dove $+\infty$ e $-\infty$ sono nuovi numeri. Talchè (per quanto più particolarmente interessa l'algebra Elementare) con queste due convenzioni sarà $\frac{a}{\infty} = 0$,

$\frac{a}{\frac{1}{x}} = 0$, $\frac{x}{x} = 1$, $\frac{(a+x)x}{(b+x)x} = \frac{a}{b}$ ecc. anche per $x = 0$, ecc.

Così i simboli $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, ecc. avranno un significato se provengono da funzioni che hanno un limite: se provengono da funzioni che non hanno limite saranno ancora simboli illusori.

Per questi nuovi simboli e numeri sarebbe da vedere quali regole di calcolo valgono: ma, per l'algebra elementare, basta limitarsi a poche considerazioni per le quali rimando alla citata Algebra del Prof. Raiola Pescarini, bastandomi l'aver dato un cenno della possibilità di avere in molti casi un significato.

Citerò solo, per mostrare come talora l'estensione anzidetta possa essere opportuna, alcuni esempi.

L'espressione $\infty - \infty$, che sarebbe illusoria, se proviene da un'espressione la quale per valori di x diversi da quello che si considera è sempre $= P$ (dove P è un'espressione che ha un significato anche per quel valore di x) potrà porsi essa pure $= P$. Per es: l'espressione

$$a + \frac{1}{x} - b - \frac{1}{x}$$

per $x = 0$ diviene (coi nuovi simboli) $\infty - \infty$; ma fuori di $x = 0$ è sempre equivalente ad $a - b$, perciò si prenderà uguale ad $a - b$ anche per $x = 0$. L'equazione

$$a + \frac{1}{x} - b - \frac{1}{x} = x$$

sarà quindi da ritenersi equivalente all'altra

$$a - b = x .$$

E, coi nuovi simboli, l'equazione

$$3x + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} + x^2 = 4x$$

è equivalente all'altra

$$3x + x^2 = 4x,$$

sebbene al § 11 queste due equazioni si dicessero non equivalenti a causa dei termini $\frac{1}{x-1}$, $\frac{1}{x-1}$ che divenivano illusori quando $x = 1$.

Così l'espressione

$$\frac{c}{x+1} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$$

per $x = 0$ è uguale a $\infty - \infty$; ma fuori di quel valore è uguale a $\frac{c}{x+1}$, che per $x = 0$ non è illusorio, quindi la prenderemo uguale a questa espressione anche per $x = 0$, cioè la prenderemo allora $= c$. L'equazione

$$\frac{c}{x+1} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = c$$

é quindi equivalente all'altra

$$\frac{c}{x+1} = c$$

che ha per radice $x = 0$, mentre senza l'introduzione dei nuovi numeri questa radice sarebbe da rigettarsi perchè renderebbe illusorio il primo membro dell'equazione data.

I pochi cenni dati in questo capitolo non rendono inutili le osservazioni del capitolo precedente; ma, diminuendo il numero dei casi in cui una espressione si può presentare sotto forma illusoria, rendono possibile l'applicazione piu frequente dei più semplici metodi indicati nei precedenti paragrafi.

Lucca, Marzo 1886.

SULLA PROIEZIONE STEREOGRAFICA

1. In questa nota esporremo le nozioni fondamentali sulla *proiezione stereografica*, quella proiezione che rappresenta la superficie della sfera come la vedrebbe un osservatore il cui occhio si trovasse in un punto della medesima. L'immagine di un punto della sfera sarà l'intersezione del raggio visuale di questo punto col piano di proiezione (*quadro*), il quale è scelto sempre perpendicolare al raggio visuale che congiunge l'occhio col centro della sfera, e quella d'una curva aperta o chiusa, tracciata nella superficie di essa, l'intersezione d'una superficie conica avente per vertice il punto d'osservazione (*centro*) e per direttrice la curva, col quadro. Da ciò consegue che se P è un punto d'una curva C tracciata sulla superficie della sfera e PQ la tangente a C in P e s'immagina il piano passante pel centro o di proiezione e PQ, il quale, com'è noto, è il piano tangente alla superficie conica proiettante la curva C lungo la generatrice OP, la retta d'intersezione *pq* di questo col quadro riescirà tangente alla curva *c*, proiezione sul quadro di C, nel punto *p*.

L'argomento che qui ci occupa è così poco moderno da dovere la sua origine ad Ipparco (come afferma Sinesio nel suo libro: *De dono astrolabii*), il quale immaginò questo genere di rappresentazione 150 anni circa innanzi l'era volgare, quantunque l'epiteto di *stereografica*, dato a questa proiezione, sia relativamente recente e dovuto al gesuita Francesco D'Aguillon che a lei lo assegnò sul principio del secolo XIV. Il desiderio di divulgare ancor più questo sistema di proiezione con un'esposizione elementare ci ha indotti a stendere queste poche pagine, nelle quali il lettore troverà anche qualche novità di trattazione.

2. Def. Se per l'asse di un cono circolare obliquo s'immagina un piano perpendicolare alla base, le sezioni del cono con due piani non paralleli fra loro, perpendicolari alla se-

zione ottenuta e formanti con le generatrici giacenti in questa degli angoli uguali, diconsi *antiparallele*.

3. Teo. 1° *Se esiste un piano che intersechi un dato cono circolare obliquo, lungo una circonferenza, ne esisterà anche un altro* (*antiparallelo al primo*) *ed ogni altro piano intersecherà il cono lungo una circonferenza, solo quando sia parallelo a uno dei primi due.* (1)

Teo. 2° *Due sezioni circolari antiparallele di un cono sono in una sfera.* (2)

Cor. Se da un punto dell'intersezione dei piani di due sezioni antiparallele, si tirano delle tangenti a queste sezioni, le parti delle tangenti comprese fra questo e i punti di contatto saranno uguali. Infatti esse sono le tangenti tirate dallo stesso punto ad una medesima sfera.

4. Rappresenti il cerchio OACB (fig. 1ª) la sezione della sfera da proiettare col piano della figura, e si collochi il quadro perpendicolare al raggio Oc nel punto c: sarà xcy la traccia di esso col piano menzionato. Ad ogni punto P della sfera, escluso O, corrisponderà un punto p del quadro, quel punto nel quale la retta OP incontra il quadro, ed in particolare ai punti dell' emisfero ACB corrisponderanno nel quadro punti posti nell'interno del cerchio il cui diametro è AB, ed ai punti dell'altro emisfero corrisponderanno punti esterni al cerchio medesimo, mentre i punti della circonferenza AB corrisponderanno a loro stessi. È facile poi riconoscere che ad ogni cerchio minore passante per O corrisponde la retta indefinita intersezione del piano di questo cerchio col quadro, ad ogni circonferenza massima passante ugualmente per O corrisponde una retta indefinita passante per c, e ad ogni circonferenza il cui polo sia O, una circonferenza di centro c intersezione col quadro del cono retto circolare

---

(1) Questo teo. è un caso particolare dell'altro: *Le sezioni antiparallele di un cono sono figure simili*, dovuto ad Apollonio.

(2) Reputo inutile riportare la dimostrazione di questi teo: perchè trovasi anche in libri scolastici. V. ad es: Sannia e D'Ovidio « *Elementi di Geometria* » all'art.: Sezioni antiparallele del cono e del cilindro.

che ha per vertice O e per direttrice o base la circonferenza obbiettiva.

Teorema. *Ad ogni cerchio della sfera che non passa per il centro di proiezione, corrisponde nel quadro un cerchio come proiezione stereografica, e viceversa ad ogni cerchio del quadro corrisponde ugualmente un cerchio della sfera.*

Scelgasi il piano del cerchio perpendicolare a quello della figura e DE ne rappresenti il diametro. S'immagini il cono circolare che ha per vertice O e per direttrice la circonferenza DE, dico che la superficie di questo taglia il quadro, in un cerchio di diametro *de*.

Infatti si tiri per O la retta OT parallela ad xy, sarà l'angolo dOT uguale all'angolo Ode; ma i due angoli DOT, DEO sono uguali (Euclide libro 3°, prop. 32), sono tali adunque anche gli angoli Ode e DEO. Il piano perpendicolare a quello della figura e passante per *de* determina quindi nella superficie conica proiettante una sezione antiparallela alla circonferenza DE, questa sezione sarà quindi un circolo.

Viceversa si consideri nel quadro un cerchio di cui *de* sia il diametro. Si suppongano tirate OdD e OeE e tracciata la corda DE. Essendo gli angoli Ode, DEO uguali, condotto un piano perpendicolare a quello della figura e passante per DE, questo taglierà la superficie conica che ha per vertice O e per direttrice la circonferenza *de* in un'altra circonferenza la quale apparterrà evidentemente anche alla sfera.

Cor. I. Il centro del cerchio *de* cadrà naturalmente nel punto medio v di *de*; per vedere a qual punto corrisponda v, conducansi per D ed E le tangenti TV′ e V′T′ le quali s'incontrano in V′ e tagliano la tangente per O in T e T′, poi tirisi per V′ la E′D′ parallela ad xy e finalmente si prolunghino le OD, OE finchè incontrino questa retta in E′, D′. Così operando è chiaro che si avrà TO = TD, T′O = T′E, e per essere i triangoli DE′V′, EV′D′ rispettivamente simili ai triangoli OTD, ET′O, risulterà altresì: E′V′ = V′D, V′D′ = V′E:

ma $DV' = V'E$, dunque ancora $E'V' = V'D'$, talchè V' è il punto medio di $E'D'$ e in conseguenza OV' incontrerà xy in un punto medio del segmento de parallelo a $E'D'$. Il punto V' in tal modo ottenuto coincide evidentemente col vertice del cono circoscritto alla sfera lungo la circonferenza DE.

Cor. II. Suppongasi adesso che sia da rappresentare una circonferenza massima FG: è chiaro che la superficie circoscritta alla sfera lungo la medesima riducesi ad un cono col vertice all'infinito, ossia ad una superficie cilindrica le cui generatrici sono perpendicolari al piano di FG. Il centro del cerchio fg, proiezione di FG, si troverà perciò nel punto u in cui la perpendicolare tirata da O ad FG incontra la traccia xy del quadro.

Cor. III. Prolungando il piano del cerchio DE finchè incontri il piano del quadro, l'intersezione sarà una retta hi perpendicolare al piano della figura nel punto h. Segue poi che le porzioni delle tangenti condotte da un punto qualsiasi i di questa retta alle due circonferenze DE, de, che sono sezioni della medesima sfera con la superficie conica proiettante DE (n.° 3, corol.), comprese fra i e i punti di contatto, saranno uguali fra loro.

Scolio. È utile osservare che l'ultimo corollario è indipendente dai due precedenti.

5. Teorema. *L'angolo di due curve sferiche e quello delle loro proiezioni stereografiche, sono eguali.*

Siano C_1, C_2 (fig. 2ª) due curve, passanti per P, tracciate sulla superficie della sfera, che primieramente supporremo circolari, e c_1, c_2 le loro proiezioni, tagliantisi in p, sul quadro. Si prolunghino i piani C_1, C_2 finchè incontrino il quadro, e in questi piani si tirino le tangenti in P alle C_1, C_2, poi s'immaginino i piani che passano per OP e per queste tangenti: questi (n.° 1) intersecheranno il quadro nelle rette pi, pi' le quali saranno rispettivamente tangenti alle c_1, c_2 e incontreranno le corrispondenti tangenti passanti per P nei punti i, i'. Per il corol. III del n.° precedente sarà: $pi = Pi$ e $pi' = Pi'$, sicchè tirata nel quadro la retta ii' i triangoli ipi', iPi' risulteranno uguali. Segue quindi: angolo $iPi' = ipi'$, e poichè questi angoli sono rispettivamente quelli delle curve obbiettive e delle loro proiezioni, nel caso prescelto il teorema è dimostrato.

In secondo luogo suppongasi che le curve C_1, C_2 non siano circolari e allora non saranno tali neppure le c_1, c_2 (n.° 4, teo.). Prendansi sopra ciascuna delle prime due punti assai prossimi a P, e, segnati nelle c_1, c_2 i punti che a questi corrispondono, s'immaginino le due circonferenze che passano per P e per le due prime coppie di punti, e le circonferenze passanti per p e le corrispondenti coppie di punti su c_1, c_2 le quali corrisponderanno rispettivamente alle precedenti. Si supponga ora che i punti in prossimità di P sempre più s'avvicinino a P, dal che segue che le loro proiezioni sul quadro s'avvicineranno a p, le circonferenze menzionate tenderanno verso certe circonferenze limiti (circonferenze *osculatrici* delle curve) che hanno nei punti P e p, come può anche concepirsi, le stesse tangenti delle curve menzionate; perciò, sussistendo il teorema per queste circonferenze, l'angolo delle curve C_1, C_2 sarà quello stesso delle curve c_1, c_2.

Scolio. La proiezione stereografica gode adunque dell'importante proprietà della conservazione degli angoli, od in altre parole è di tale natura che ad ogni triangolo o poligono corrisponde un triangolo o poligono in cui gli angoli sono rispettivamente uguali a quelli dell'obbiettivo e viceversa. Essa appartiene perciò a quella classe di rappresentazioni che si appellano *ortomorfe*, *isogoniche* o *conformi* il cui carattere è di conservare la similitudine nelle parti infinitamente piccole (*). Ed infatti considerando un punto p del-

(*) Fondandosi sopra questa particolarità il celebre geometra francese *M. Chasles* dedusse in modo assai semplice la proprietà esposta nel corol. 1 del n.° 4 e infatti basta osservare che le generatrici V'R, V'Q,.... (fig. 2ª) del cono circoscritto alla sfera lungo la circonferenza DE sono normali a questa l'immagine e delle linee c_1, c_2, c_3,..... partenti da p, quindi il punto corrispondente P della sfera e le linee corrispondenti C_1, C_2, C_3,.... uscenti da P, se sopra queste s'immaginano dei punti M_1, M_2, M_3,....., i triangoli PM_1M_2, PM_2M_3,..... e i loro corrispondenti pm_1m_2, pm_2m_3,....., saranno equiangoli, i primi però a lati sempre curvilinei e i secondi rettilinei, mistilinei o curvilinei; ma quando gli archetti PM_1, PM_2, PM_3,..... siano infinitesimi, si potranno senz'errore apprezzabile considerare come rettilinei tanto gli uni quanto gli altri triangoli e perciò saranno rispettivamente simili: risulta così che il poligono infinitesimo $m_1m_2m_3$..... e il suo corrispondente $M_1M_2M_3$.... sono pure simili e il rapporto $\frac{pm_1}{PM_1}$ di due elementi corrispondenti è indipendente dalla direzione di pm_1.

(Il seguito nel prossimo fascicolo).

ESERCIZI PER LA SCUOLA

GEOMETRIA

Rapporti di angoli. — Angoli adiacenti.
Angoli opposti al vertice.

1. Dati due angoli costruire un terzo angolo eguale alla loro somma.
2. Costruire due angoli tali che il primo sia la metà del secondo.
3. Costruire due angoli tali che il primo sia la terza parte del secondo
4. Un angolo A è la somma di 7 angoli eguali ad M, un altro angolo B è la somma di 15 angoli eguali ad M; qual'è il rapporto dell'angolo A all'angolo B? qual'è il rapporto dell'angolo B all'angolo A?

circonferenza e che le loro proiezioni vr, vq sul quadro s'incontrano nell'immagine v di V' restando normali alla proiezione dre della circonferenza DRE, dunque nel centro della proiezione di quest'ultima circonferenza.

5. Costruire due angoli tali che il primo sia $\frac{5}{6}$ del secondo.

6. Da un punto M d'una retta AB parte una retta MC la quale forma colla AB due angoli uno dei quali è $\frac{8}{9}$ dell'angolo retto; se esso è diviso in tre parti eguali, quante di queste saranno contenute nell'altro angolo?

7. Due angoli che hanno il vertice comune, un lato comune, e il secondo lato dell'uno sul prolungamento del secondo lato dell'altro, sono di tale grandezza che, se il maggiore è diviso in sette parti eguali, il minore contiene tre di quelle parti: trovare il rapporto del maggiore dei due angoli all'angolo retto.

8. Da un punto M della retta MA e dalle due bande di questa partono due rette MB, MC tali che l'angolo AMB è $\frac{5}{12}$ dell'angolo retto, e l'angolo AMC è $\frac{19}{12}$ dell'angolo retto; si domanda se il punto M è interno od esterno al segmento che unisce un punto della MB con un punto della MC?

9. Dal vertice M d'un angolo retto si guida, fuori dell'angolo, una retta MA che forma con uno dei suoi lati un angolo semiretto, ed un'altra retta MB, pure esterna a quell'angolo retto, che forma coll'altro suo lato un angolo semiretto, poi pel punto M si tira una retta qualunque DMD'; quale relazione ha luogo fra i due angoli DMB, AMD'?

10. In un segmento AC è un punto M, da una banda di esso il punto H e dall'altra il punto H', così situati che l'angolo HMC risulta eguale all'angolo AMH'; date le lunghezze HM, HH', trovare la MH'.

11. Nell'interno d'un angolo AMC, eguale ad $\frac{11}{6}$ d'angolo retto, è condotta una retta MB in modo che l'angolo BMA risulta eguale a $\frac{3}{5}$ dell'angolo BMC; se MB' è il prolungamento della MB, esterno all'angolo AMC, si domanda: 1) il rapporto di ciascuno dei due angoli AMB', CMB' all'angolo retto; 2) il rapporto dell'angolo AMB' all'angolo CMB'.

12. Da un punto M d'una retta AB, e da una stessa banda di essa, partono le tre rette MR, MC, MS, così che la MR è dentro l'angolo AMC e la MS dentro l'angolo BMC; se i due angoli AMR, RMC sono eguali fra loro, e se

anche i due angoli CMS, SMB sono fra loro eguali, qual'è il rapporto dell'angolo RMS alla somma dei quattro angoli AMR, RMC, CMS, SMB?

13. Sieno AOC e COB due angoli adiacenti, e la OL divida per metà l'angolo AOC; provare che, se la OH è perpendicolare alla OL, gli angoli HOC, HOB, sono fra loro eguali.

14. Sono disegnati l'uno accanto all'altro, col vertice comune, cinque angoli eguali a $\frac{7}{12}$ d'angolo retto: trovare la misura dell'angolo formato dal secondo lato del quinto angolo col primo lato del primo.

15. Sono disegnati l'uno accanto all'altro col vertice comune, tre angoli, e il primo lato del primo coincide col secondo lato del terzo; se il primo dei tre angoli aumenta o diminuisce, ed il secondo non varia, cosa avviene del terzo?

TEMI PER LAVORI SCOLASTICI (*)

Ad un circolo è circoscritto un triangolo isoscele in cui l'angolo al vertice è di $25°37'$; calcolare il rapporto dell'area del triangolo all'area del circolo, ed assegnarne il grado di approssimazione.

1) Dimostrare che si può dare ad x un valore così piccolo che il quoziente

$$\frac{(1+x)^8-(1-x)^8}{x^2}$$

sia maggiore di 1000 000 000.

2) I perimetri delle basi d'un tronco di piramide sono nel rapporto di 3 a 100; calcolare il rapporto del volume del tronco al volume di quel prisma, d'eguale altezza, l'area della cui base è la semisomma delle aree delle basi del tronco.

Nel triangolo ABC sono dati: $b = 3a$, $A = 17°42'35''$; calcolare l'angolo B e il rapporto $\frac{c}{a}$.

(*) Questi temi sono estratti dalla raccolta di quelli proposti per la promozione dalla terza alla quarta classe nell'Istituto tecnico di Roma.

1) Trovare il numero n sapendo che il coefficiente di x^{n-1} nello sviluppo del prodotto

$$(x + a)\ (x + 2a)\ (x + 3a) \ldots . (x + na)$$

è eguale a $45a$.

2) Provare che la differenza fra la lunghezza dell'arco di 1° e quella della corda corrispondente è minore di $\frac{1}{2}$ millionesimo del raggio.

Calcolare il rapporto delle aree dei due segmenti nei quali un circolo è diviso dalla corda che sottende l'arco di 103° 47′ 50″.

Quanti sono i triedri distinti tali che in ciascuno di essi i seni dei tre angoli piani sieno rispettivamente $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{4}{25}$?

Il triangolo ABC è diviso in due parti equivalenti da una retta HL che unisce un punto H del lato AB ad un punto L del lato AC. Dati AB = 5, BC = 7, angABC = 30°20′, AH = 4, trovare la lunghezza del segmento AL.

Sieno SA, SB, SC tre spigoli contigui d'un parallelepipedo retto rettangolo e sia SM la diagonale passante per S; dati gli angoli MSA, MSB, assegnare le formole pel calcolo dei rapporti $\frac{SA}{SB}$, $\frac{SC}{SB}$, ed eseguire i calcoli nel caso particolare: angMSA = 35°27′13″, angMSB = 60°.

Il lato BC del triangolo BAC è diviso in tre segmenti BD, DE, EC in modo che gli angoli BAD, DAE, EAC risultano eguali fra loro. Calcolare i rapporti di quei tre segmenti nel caso di A = 51°24′, B = 30°.

Un tronco di cono, nel quale il rapporto del raggio della base minore al raggio della base maggiore è eguale ad m, viene diviso in due parti equivalenti con un piano parallelo alle basi: esprimere in funzione di m il rapporto della distanza di quel piano dalla base minore all'altezza del tronco, e calcolare questo rapporto per $m = \frac{3}{5}$.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Dott. Vittorio Murer. — *Primi elementi di Geometria proiettiva e descrittiva* ad uso degli istituti tecnici del Regno — pag.^{e} 100 con 8 tavole litogra.^{e} — G. B. Paravia e C.^{o} — L. 3, 50.

Il libro che abbiamo dinanzi è notevole sotto punti di vista molteplici. È notevole per l'ordine logico secondo cui succedonsi le diverse teorie e proposizioni, per la scelta degli argomenti, per la forma fluida ed efficace, e per un certo sapore di originalità nella trattazione di cose che da tempo entrano nel dominio delle geometriche discipline. Al lettore inesperto potrà forse, sul momento, riuscirne arida la lettura anzichè nò, ma avrà presto ragione di persuadersi che si tratta di una impressione fugace. Il libro stesso è diviso in due parti, la prima riguarda la geometria proiettiva, l'altra la descrittiva, delle quali soltanto la prima è corredata di esercizi, generalmente molto elementari, succedentesi nell'ordine delle materie del testo. La revisione che segue potrà forse esser trovata soverchiamente minuta, ma tale è stata dettata dal desiderio di far meglio conoscere agli insegnanti un libro che, sotto forme modeste, merita, a giudizio nostro, tutta quanta la loro attenzione.

Nel capitolo I, che serve d'introduzione, l'A. enumera le diverse forme elementari facenti soggetto di studio nella geometria proiettiva e dà ragione della loro classificazione in ordine all'infinità degli elementi che le costituiscono, il che è bene. Mette in rilievo la distinzione fra spazio costituito da punti e piani e spazio costituito da rette, mostrando nel primo caso che l'infinità degli elementi che si considerano è soltanto triplice, mentre è quadruplice nel secondo. I concetti svolti in questo capitolo potranno difficilmante esser compresi a dovere dal principiante, ma conviene pure riconoscere che ai medesimi non crea difficoltà la chiara esposizione dell'A. Nella nota di carattere storico che termina il cap. questi dimentica di citare, fra coloro che hanno contribuito all'incremento della geometria proiettiva, l'italiano *Bellavitis* che a noi pare singolarmente degno di menzione. Brevi note storiche trovansi ancora qua e là nel corso del libro, intese a designare i creatori della nuova geometria e l'origine dei vocaboli nella medesima adoperati.

Nel successivo capitolo trattasi della proiettività e prospettività delle forme fondamentali di 1ª e 2ª specie e dei loro elementi all'infinito. In rapporto a questo capitolo abbiamo da osservare che l'A. avrebbe ben fatto ad illustrare con una figura gli elementi a distanza infinita per due sistemi piani prospettivi, nel modo istesso ch'egli fa per due punteggiate prospettive, nell'intento di chiarire maggiormente il soggetto.

Nel cap. III. l'A., al fine di ottenere semplicità, comincia a definire come rapporto anarmonico di quattro raggi di un fascio, il rapporto semplice dei tre punti d'intersezione di una parallela al quarto raggio, coi primi tre, considerando anche il caso del rapporto armonico. Dimostra quindi che per le medesime quattro rette del fascio, tale rapporto è indipendente dalla posizione della parallela, perciò costante. Costruisce in seguito il raggio che forma con altri tre dati un rapporto anarmonico assegnato, poi, dopo aver provato che proiettando quattro punti d'una punteggiata da un centro qualsiasi si ha un fascio di quattro raggi il cui rapporto anarmonico è costante, dà la seguente definizione: « si dirà rapporto anarmonico di quattro punti di una punteggiata, presi in un ordine determinato, il rapporto anarmonico costante dei quattro raggi (preso nello stesso ordine dei rispettivi punti) che li proiettano da un punto qualunque. » L'A. a proposito di questa sua definizione ha creduto bene dimostrare in una nota, che essa accorda con quella degli ordinari trattatisti ed ha bene operato. Salvo che il suo ragionamento sarebbesi potuto semplificare se dopo aver scelto i quattro punti A, B, C, D, quindi immaginato il fascio (a, b, c, d) che li proietta da un centro qualunque S, avesse condotto non da B, ma da C una parallela al quarto raggio d. Ciò gli avrebbe risparmiato due scambi di elementi che nuocono non all'esattezza ma alla chiarezza della dimostrazione.

Per rapporto anarmonico di quattro piani d'un fascio egli prende analogamente quello dei quattro raggi secondo cui sono segati da un piano, oppur quello dei quattro punti in cui sono segati da una retta qualunque, e ciò dopo aver dimostrato la costanza del primo rapporto e quindi anche del secondo. L'A. giunge così al principio fondamentale della geometria proiettiva, cioè che « il rapporto anarmonico non varia con proiezioni e sezioni » da cui segue che « in due forme di 1ª specie proiettive, quattro elementi corrispondenti hanno lo stesso rapporto anarmonico e la proiettività fra due forme fondamentali è individuata da tre coppie di elementi corrispondenti ».

Nei nⁱ seguenti, di questo capitolo, l'A. dà la costruzione con cui passare da un elemento di una forma fond. al suo corrispondente di un altra forma, dopochè sonosi fatti corrispondere tre elementi dell'una a tre elementi a piacere dell'altra e ne ricava le debite conseguenze. Finalmente considera il caso in cui taluni di questi elementi sono uniti, essendo così ridotto alla considerazione delle punteggiate, dei fasci di raggi e dei fasci di piani prospettivi.

Il cap. IV è riserbato all'esposizione della legge di dualità con accompagnamento di proposizioni correlative. Vi sono esaminati i soliti teoremi sul triangolo e sul quadrangolo completo. Abbiamo osservato che gli esercizi relativi a questo capitolo sono particolarmente elementari.

Il cap. V verte sulle forme armoniche. Esaminando la costruzione del quarto raggio di un fascio dopo tre raggi dati in un ordine determinato, nel caso particolare che il rapporto anarmonico dei quattro raggi debba essere uguale a 2, ossia, quando questi formano un fascio armonico, secondo la definizione data precedentemente, l'A. giunge a concludere che « scambiando in un fascio armonico di raggi due elementi coniugati, oppur anche le due coppie di elementi coniugati, si ottiene ancora una forma armonica ». Egli insegna appresso a costruire il quarto armonico dopo tre elementi dati col sussidio della sola riga, fondandosi sopra due note proprietà del quadrangolo e quadrilatero completo quivi dimostrate. Nota le proprietà delle bisettrici di un angolo e del suo adiacente, espone alcune relazioni metriche fra gli elementi d'una punteggiata armonica, finalmente in base a queste chiude il capitolo dimostrando che « tutti i cerchi del piano passanti per due punti A e C sono tagliati ad angolo retto dal cerchio per il quale gli estremi del diametro sono i punti B e D che dividono armonicamente il segmento AC » e la proposizione reciproca.

Nel cap. VI, l'A. comincia col mostrare che se in due forme riferite proiettivamente un elemento percorre con continuità la prima di esse, altrettanto avviene dell'elemento corrispondente per la seconda, da cui segue che trattandosi di due fasci (da supporsi nello stesso piano, ciò che è dimenticato dall'A.), i punti d'intersezione degli elementi corrispondenti si succedono con continuità. L'A. dimostra quindi che i fasci non essendo prospettivi la linea luogo dei punti d'intersezione dei raggi corrispondenti è una curva segata da qualunque retta in due punti al più, ossia una curva di 2° ordine o conica. In seguito egli prova che « per cinque punti presi ad arbitrio si può sempre far passare una conica; la quale per altro è da essi individuata », nota che fra le coniche è compreso il cerchio e dimostra che « segando con un piano un cono qualunque avente per base un cerchio, si ha una conica », quindi passa a distinguere una conica in iperbole, parabola od ellisse, secondochè essa sega la retta all'infinito del piano o in due punti o in uno solo o in nessuno, o in un sistema di due rette intersecantisi. Viene appresso la definizione di serie rigata e quadrica gobba e l'esposizione dei due sistemi di generazione di una quadrica gobba. L'A. esaminando la sezione d'una quadrica con un piano osserva che: « Un piano qualunque sega la quadrica gobba in una conica. Una retta la sega in due punti al più; se la sega in tre, la sega in infiniti, e giace per intero sulla superficie ». Il capitolo termina con qualche particolarità sui piani tangenti ad una quadrica.

Forse avrebbe ben fatto l'A. a toccare più di volo le serie rigate, estendendosi maggiormente sulle curve di 2° ordine, considerandole cioè come l'inviluppo delle congiungenti i punti corrispondenti di due punteggiate proiettive nello stesso piano. È vero ch'egli in una nota ha sentito il bisogno di aggiungere qualche cenno intorno a ciò, ma sarebbe stato giovevole farlo nel testo e con ampiezza maggiore. Inoltre pare a noi che l'A. avrebbe bene operato insegnando a costruire la conica di cui son dati cinque punti, col mezzo della sola riga, facendo osservare che le punteggiate determinate sopra due rette u, u_1 passanti per uno qualunque dei punti sezione di due raggi corrispondenti dei fasci generatori S, S_1, sono prospettive. Si tratta invero d'una costruzione di grande utilità pratica. In complesso era desiderabile una maggiore estensione sulle coniche, nè vi ripara quel poco che sulle medesime si ritrova nel capitolo che tratta dell' omologia.

Nel cap. VII, ultimo della prima parte, l'A. tratta delle forme fondamentali in involuzione. Prima di dare la definizione delle forme involutorie, egli premette come lemma la proposizione: « Se A, B, C, D sono quattro elementi di una forma fond., la forma ABCD è proiettiva a CDAB », in seguito alla quale risulta che « se in due forme fond. proiettive (sovrapposte) due coppie di elementi si corrispondono in doppio modo, lo stesso avverrà per due altre coppie qualunque », dopo di che viene la definizione: « due forme proiettive si diranno in involuzione se tutte le coppie di elementi corrispondenti si corrispondono in doppio modo ». Dimostra in seguito che « due coppie di elementi corrispondenti individuano un involuzione » e che « gli elementi doppi d' una involuzione sono separati armonicamente da una coppia di elementi coniugati » e distingue le involuzioni in quelle dotate di due elementi doppi e in quelle che ne son prive. Esaminando il caso delle punteggiate costruisce queste involuzioni mostrando per quale particolarità quelle d'una specie si contraddistinguono da quelle dell'altra specie. Il problema di cui è parola gli fornisce poi il mezzo di dare le proprietà involutorie dei fasci di cerchi e occasione di distinguere le due sorta di involuzioni in positive e negative.

Prima di passar oltre osserveremo che un capitolo, conforme ai precedenti, sui poli e sulle polari, sarebbe venuto a nostro giudizio molto opportuno.

Ed ora siamo alla seconda parte del libro.

Nel cap. I, definita l'omologia piana, l'A. insegna a costruire gli elementi corrispondenti di essa, dato l' asse e il centro d'omologia e una coppia di punti corrispondenti; esamina poi, nel n° 86, il caso in cui ad un punto del piano considerato come appartenente ai due sistemi corrisponda il medesimo punto, ossia il caso dell' involuzione, secondo la definizione già da noi riportata; salvo che la sua esposizione alla fine di questo n° è piuttosto oscura e manchevole, e difatti, detti A_1, A_2 due punti corrispondenti nei due sistemi σ_1, σ_2 ed M_2 quel punto che corrisponde ad M_1, tanto lo si consideri come appartenente a σ_1, quanto a σ_2, egli ne osserva che in forza di ciò le rette M_2A_1 e M_1A_2 debbono incontrarsi sull'asse s d'omologia e perciò si forma necessariamente un quadrilatero nel quale due coppie di lati opposti concorrono in A_1 e A_2 e quindi le due diagonali intersecano la $A_1A_2 = u$ in due punti o ed us che sulla u separano armonicamente A_1A_2. L'A. costruisce in seguito le rette limiti mostrando come siano parallele all'asse s e tali che la distanza di una dall'asse è uguale a quella dell'altra dal centro d'omologia. Dimostra quindi che « due curve omologiche sono dello stesso ordine » e che « la figura omologica d'un cerchio (o d'una conica) è una conica e precisamente un'ellisse, un'iperbole od una parabola a seconda che il cerchio sia esterno, tangente o segante la retta limite del sistema a cui questo si considera appartenente ». È invero da osservare che questi ultimi argomenti sono toccati assai di volo e non sarebbe stato inopportuno che l'A. vi si fosse fermato maggiormente, insegnando anche a costruire la figura omologica ad un cerchio nei singoli casi, porgendo occasione agli alunni di fare un'interessante applicazione grafica dell'omologia.

Dall'omologia piana passa poi l'A. al caso importante dell'affinità, giungendo a dimostrare il teo: generale: « In due sistemi affini le aree di poligoni corrispondenti hanno un rapporto costante, eguale poi al rapporto delle distanze che due punti corrispondenti hanno dall'asse d'affinità », considerandone due corollari; di poi al caso dell'omotetia (trattata assai brevemente); finalmente termina il cap. facendo osservare come, sotto uno speciale punto di vista, possa la geometria elementare considerarsi come un caso speciale della geometria proiettiva, e precisamente della geometria dei sistemi piani.

Nel cap. II l'A., esposto lo scopo che si propone la geometria descrittiva, passa a mostrare come dato nello spazio un punto, una retta o un piano, per determinarne la posizione basta riferirli opportunamente a tre piani fissi nello spazio, comunque inclinati, quindi esamina il caso particolare delle proiezioni ortogonali e le più elementari proprietà a cui vanno soggette la icnografia e ortografia del punto, della retta e del piano, e nel capitolo seguente risolve i più semplici problemi sulle rette e sui piani, non escluso quello di « costruire la perpendicolare comune a due rette date », attenendosi al metodo di *Monge*. Osserveremo qui, quantunque si tratti di cosa di piccol momento, che la convenzione fatta dall' A. di rappresentare a tratti le linee che sono nella parte del piano non ordinaria (posteriore dell'orizzontale, inferiore del verticale) e a punti le rette proiettanti e le altre costruzioni ausiliarie, non è quella generalmente seguita, giacchè d'ordinario si rappresentano, nella geometria descrittiva, con linee continue le parti delle figure date e cercate, visibili per un osservatore posto a distanza infinita dai due piani di proiezione, e a punti quelle invisibili, mentre si segnano a tratti tutte le altre.

Nel cap. IV l'A. introduce con molta opportunità l'asse d'affinità di un piano, ossia quella retta le cui proiezioni coincidono, insegnando immediatamente a costruirlo date le traccie del piano. Osserva quindi che l'ortografia e l'icnografia d'un sistema piano sono sistemi affini, secondo la definizione da lui data nella prima parte al n° 91, il cui asse d'affinità è il precedente asse d'affinità del piano in cui il sistema esiste, e con ciò è condotto ad un nuovo metodo per la rappresentazione del piano, metodo che, com'egli giustamente osserva, è molto importante anche dal lato che fa vedere la stretta relazione fra le due geometrie proiettiva e descrittiva. Mostrato quindi come data l'icnografia (o l'ortografia) d'un sistema piano, possa ottenersi l'ortografia (o l'icnografia) l'A. risolve due problemi in cui i piani son dati per mezzo di un punto e dell'asse d'affinità, scegliendoli fra quelli diversamente trattati nel capitolo III, ciò che pone in rilievo, in un caso particolare, dove diversifichino e dove accordino i due metodi dianzi accennati.

Nel cap. V, ultimo del libro, vengono considerati i più semplici ed usuali problemi metrici, risolventisi col ribaltamento sul piano di proiezione, di figure opportunamente scelte; di poi, considerato che qualunque trasporto d'una figura nello spazio riducesi sempre ad una traslazione e ad una rotazione (intorno ad un determinato asse), l'A. risolve, coi metodi della geometria descrittiva ordinaria, il problema di costruire le proiezioni di un punto, d'una retta o d'un piano da posizioni date a quelle in cui pervengono dopo una determinata traslazione o rotazione intorno ad un asse assegnato.

Consideri l'A. se non fosse stato opportuno trattare il problema della rappresentazione di un cono retto e delle corrispondenti sezioni di esso con un piano variamente posto, facendone il ribaltamento sul piano ortografico, ciò che avrebbe fornito un altro mezzo per la costruzione delle curve del 2° ordine.

A. Lugli.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica rédigée par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1886, N.° 3.

Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXIV, Maggio e Giugno 1886. Napoli, Benedetto Pellerano, editore.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira*. Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VII, n. 4. Coimbra, 1886.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont; *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy* Directeur des études à l'École preparatoire de Sainte-Barbe. 2e série. Dixième année. N. 7, 8 e 9. Paris, 1886.

Journal de Mathématiques élementaires publié par *H. Vuibert*. 10e Année. N. 18, 19. Paris, M. Nony, 17. Rue des Écoles.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome sixième. Mai et Juin 1886.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XVII. N. 13, 14. Firenze, 1886.

Cassani (P.) — Un teorema generale sulle linee normali degli spazi dispari (1886).

Clifford (G. K.) — Il senso comune nelle scienze esatte. Milano, Dumolard, 1886.

Colasanti (G.) e Mengarini (G.) — Il fenomeno spettrale fisiologico. — Roma, 1886.

Frattini (E.) — Sui numeri irrazionali. Roma, 1886.

Giuliani (G.) — Elementi di Algebra. Torino, Loescher, 1887.

De Longchamps (G.) — Sur un nouveau cercle remarquable du plan d'un triangle. Paris, 1886.

Loria (G.) — Remarques sur la Géométrie analytique des cercles du plan et sur son application à la théorie des courbes bicirculaires du 4° ordre (1886).

Millosevich (E.) — Determinazione della latitudine del R. Osservatorio del Collegio romano. Roma, 1886.

Ricotti (M.) — I primi elementi della Aritmetica. Torino, Loescher, 1886.

[illegible] PROIEZIONE STEREOGRAFICA

6. Suppongasi che si debbano rappresentare in proie-
ne stereografica i meridiani e paralleli dell' emisfero che
per centro di simmetria il punto antipodo a quello d'os-
vazione, il quadro passando sempre pel centro della sfera.
ondo che l'occhio è situato in un polo, in un punto del
uatore o in altro punto intermedio, la rappresentazione
ume diversi aspetti e si chiama *polare* od *equatoriale*,
ridiana, *orizzontale*. Il tracciamento della rete dei me-
iani e paralleli può in ogni caso conseguirsi con l'appli-
ione delle costruzioni e dei teoremi precedentemente es-
sti. Nel n.° seguente indicheremo brevemente le opera-
ni grafiche da farsi in ogni caso, daremo le formole che
rimono i raggi dei cerchi immagini di un meridiano di
gitudine λ e d'un parallelo di latitudine α, non che quelle
rimenti alcuni altri importanti elementi.

7. Volendo limitare la rappresentazione a mezza sfera è
iaro che l'immagine sarà circoscritta da un cerchio di rag-
o r uguale a quello della sfera (*cerchio limite* o *contorno*).
esto cerchio sarà ogni volta assunto come cerchio di ri-
ltamento del primo meridiano e come immagine secondo che
ò riescirà opportuno. Nel primo meridiano supporremo poi
tuato il centro della proiezione.

Proiezione polare. — L'occhio trovandosi in un polo le
magini dei meridiani saranno rette passanti per la proie-
one c dell'altro polo C, proiezione che cade nel centro del
rchio limite AOBC (fig. 3ª). Il primo meridiano avrà poi
er immagine la retta AB, ogni altro meridiano di longitu-
ine λ si otterrà tirando il diametro del cerchio contorno che
orma con AB (nel senso fissato) un angolo uguale a λ. Il
ontorno corrisponderà evidentemente all'equatore.

I paralleli sono rappresentati da cerchi concentrici di
entro c (n.° 4). Supponendo che NS rappresenti la sezione

nel primo meridiano di un parallelo di latitudine AN $= \alpha$, se ne otterrà il raggio cn trovando l'interaezione n del raggio visuale NO con la traccia AB del quadro e si avrà:

$$nc = r \tang \frac{90^\circ - \alpha}{2} \text{(considerando il } \Delta \text{ rett. } Onc \text{ in cui ang} cOn = \frac{90^0 - \alpha}{2}\text{)}.$$

Proiezione meridiana. — Nel caso di questa proiezione il primo meridiano sarà rappresentato nel quadro dal diametro CO e l'equatore dal diametro AB perpendicolare a questo. Coincidendo i poli con le loro proiezioni in C ed O, la proiezione di ogni altro meridiano di longitudine λ passerà per questi due punti e avrà il centro nella retta xy (fig. 3ª). Per tracciare questa proiezione, basterà costruire l'angolo $\mathrm{H}c\mathrm{A} = \lambda$, tirare OH che taglia xy in h, quindi descrivere l'arco circolare $\mathrm{C}h\mathrm{O}$: per segnare invece il parallelo di latitudine α converrà, preso l'angolo $\mathrm{Z}c\mathrm{A} = \alpha$, tirare ZB che incontra CO in z, quindi tracciare l'arco circolare $\mathrm{Z}z\mathrm{Z}_1$ che ha il centro nel prolungamento di CO, e passa per Z e z. I centri di questi due archi circolari possono poi ottenersi facilmente, per il primo tirando OI perpendicolare ad HJ e prolungandola finchè incontri xy in I (n° 4, corol. II) (OI riesce perpendicolare alla retta tirata per O formante colla tangente in questo punto al cerchio limite un'angolo $= \lambda$) per il secondo conducendo una tangente alla circonferenza limite nel punto Z fino all'incontro z' col prolungamento di CO (giacchè i paralleli tagliando ad angoli retti i meridiani della sfera i due archi AZC, $\mathrm{Z}z\mathrm{Z}_1$ dell'immagine sono necessariamente normali). Finalmente gli altri punti j, z_1 in cui le circonferenze degli archi accennati incontrano rispettivamente le xy, CO potranno aversi conducendo OJ, BZ_1.

Dopo ciò si osservi che l'angolo IOC $= \lambda$ e l'angolo $z'c\mathrm{Z} = 90^0 - \alpha$, talchè (osservando il ΔIOc rettangolo) sarà: $\mathrm{OI} = r.\sec\lambda$ e (osservando il $\Delta c\mathrm{Z}z'$ rettangolo) $\mathrm{Z}z' = r \cot\alpha$. Le distanze dei punti h, I, j; z, z', z_1, dal centro c dell'immagine risultano poi le seguenti:

$hc = r\,\text{tang}\dfrac{90^0-\lambda}{2}\left(\text{dal } \Delta \text{ rettangolo } Ohc \text{ nel quale ang}cOh = \dfrac{90^0-\lambda}{2}\right),$

$Ic = r\,\text{tang}\lambda$ (dal Δ rettangolo IOc),

$jc = r\,\text{tang}\dfrac{90^0+\lambda}{2}$ (dal Δ rettangolo jOc in cui ang$jOc = \dfrac{90^0+\lambda}{2}$,

perchè complemento dell'angcOH),

$zc = r\,\text{tang}\dfrac{\alpha}{2}\left(\text{dal } \Delta \text{ rettangolo } Bcz \text{ in cui ang}zBc = \dfrac{\alpha}{2}\right),$

$z'c = r\,\text{cosec}\alpha$ (dal Δ rettangolo $Zz'c$),

$z_1c = r\cot\dfrac{\alpha}{2}\left(\text{dal } \Delta \text{ rettangolo } Bcz_1 \text{ in cui ang}z_1Bc = 90^0 - \dfrac{\alpha}{2}\right).$

Proiezione orizzontale. — Il cerchio AOBC (fig. 4ª) rappresentando come al solito il primo meridiano, la retta xy passante pel centro c e perpendicolare al diametro OC, sarà la traccia del quadro nel piano di esso e i due diametri EE', PP' perpendicolari l'uno all'altro rappresenteranno le sezioni dell'equatore e del cerchio di 90^0 di longitudine col primo meridiano. Tirando OP, OP' OE, OE' e trovando i punti d'incontro p, p', e, e' di queste rette con xy, si avranno in questi punti le proiezioni sul quadro dei due poli e delle estremità del diametro dell'equatore che giacione nel primo meridiano e le immagini di un altro meridiano qualsiasi verranno naturalmente a passare per p e p'. I cilindri tangenti alla sfera lungo i singoli meridiani hanno le loro generatrici tutte perpendicolari all'asse PP', laonde tutte le parallele a queste generatrici passanti per O determineranno un piano perpendicolare a questo asse la cui traccia sul quadro si troverà conducendo la OL perpendicolare a PP' fino ad incontrare xy in L, poi per questo punto descrivendo la TU perpendicolare ad xy: sarà TU il luogo dei centri di tutti i meridiani della sfera (n° 4 corol. II) ed è chiaro che L risulterà il punto medio di pp'. Per tracciare l'immagine d'un meridiano qualunque di longitudine λ, basta ora ricorrere alla proprietà caratteristica della proiezione stereografica (n. 5). Poichè AB è l'immagine nel quadro del primo meridiano, si tiri per p' una retta formante con xy (nel senso assegnato) un angolo $=\lambda$ (che è nello stesso tempo l'angolo formato dal primo meridiano e da quello considerato) e condotta a questa retta una perpendicolare si prolunghi finchè incontri TU, il punto U così ottenuto sarà il centro della circonferenza cercata.

Per avere poi l'immagine dell'equatore basta evidentemente descrivere l'arco che passa pei tre punti O, e, C il cui centro può facilmente trovarsi tirando OM perpendicolare ad EE' fino al suo punto d'intersezione con xy, oppure trovando il punto medio di ee', se e' non cade fuori del foglio del disegno, finalmente per ottenere quella d'un parallelo di latitudine α basterà osservare che prendendo l'angolo $\mathrm{N}c\mathrm{E}=\alpha$, l'intersezione del parallelo considerato col primo meridiano sarà la corda NS perpendicolare a PP' e le immagini di N ed S saranno i due punti n, s in cui le visuali ON, OS incontrano xy. Il centro di questo parallelo può ottenersi tanto dividendo ns per metà, quanto conducendo le tangenti NV', SV' alla circonferenza AOBC e trovando l'immagine v del punto V' di loro intersezione, su xy (n° 4, corol. I).

Chiamando ora φ la latitudine del centro O dei raggi visuali è chiaro che si avrà: $\mathrm{L}c=r\tan\varphi$ (dal Δ rettangolo O$\mathrm{L}c$ in cui ang$c$ OL $=\varphi$). I raggi Up', eM, nv dei tre archi considerati, come pure le distanze dei nove punti p, p', e, e' n, s, M, v, L dal centro del contorno si ottengono poi con la facile analisi riassunta nelle formole seguenti.

$c\mathrm{M}=r\cot\varphi$ (dal Δ rettangolo Oc M in cui ang M$\mathrm{O}c=90^\circ-\varphi$),

$$ce=r\,\mathrm{tang.}\,\frac{\varphi}{2}\left(\text{dal }\Delta\text{ rettangolo }cOe\text{ in cui ang}cOe=\frac{1}{2}\,\mathrm{C}c\mathrm{E}=\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$ce'=r\cot\frac{\varphi}{2}\left(\text{dal}\Delta\text{rettangolo }e'Oc\text{ in cui ang}\mathrm{E}'Oc=90^\circ-c\mathrm{OE}=90^\circ-\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$cp'=r\,\mathrm{tant}\frac{90^\circ-\varphi}{2}\left(\text{dal}\Delta\text{rettangolo }p'Oc\text{ in cui ang}p'Oc=\frac{1}{2}\mathrm{P}'c\mathrm{C}=\frac{90^\circ-\varphi}{2}\right),$$

$$Lp'=Lc+cp'=r\left(\text{tang}\varphi+\text{tang}\frac{90^\circ-\varphi}{2}\right)=r\left\{\frac{2\text{tang}\frac{\varphi}{2}}{1-\text{tang}^2\frac{\varphi}{2}}+\frac{1-\text{tang}\frac{\varphi}{2}}{1+\text{tang}\frac{\varphi}{2}}\right\}$$

$$=r\frac{1+\text{tang}^2\frac{\varphi}{2}}{1-\text{tang}^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{r}{\text{sen}\,(90^\circ-\varphi)}=\frac{r}{\cos\varphi}$$ (*) (dal che risulta che Lp' è l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo che ha un cateto $= r$ e l'angolo acuto adiacente $=\varphi$, o nella figura che la $p'O'$ perpendicolare ad OL è $= r$).

$Up' = \dfrac{Lp'}{\text{sen}\lambda} = \dfrac{r}{\cos\varphi\ \text{sen}\lambda}$ (dal Δ rettangolo ULp' in cui ang$p'UL = \lambda$),

$cp = r\text{tang}\dfrac{90^0+\varphi}{2}$ (dal Δ rettangolo pcO in un cui ang$cOp = 90^0 - \frac{1}{2}(90^0-\varphi) = \dfrac{90^0+\varphi}{2}$),

$$cM = \tfrac{1}{2}(ec + ce') = \frac{r}{2}\{\text{tang}\varphi + \cot\varphi\} = r\,\frac{\text{sen}^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\text{sen}\frac{\varphi}{2}\,.\,\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{r}{\text{sen}\varphi},$$

(di qui risulta che la retta eH tirata da e perpendicolarmente ad OM è $= r$),

$cn = r\text{tang}\dfrac{\alpha-\varphi}{2}\left(\text{dal } \Delta \text{ rettangolo } nOc \text{ in cui ang} nOc = \dfrac{\alpha-\varphi}{2}\right)$,

$cs = r\cot\dfrac{\alpha+\varphi}{2}\left(\text{dal } \Delta \text{ rettangolo } sOc \text{ in cui ang} sOc = 90^0-\alpha+\dfrac{\alpha-\varphi}{2} = 90^0-\dfrac{\alpha+\varphi}{2}\right)$,

$$nv = \frac{ns}{2} = \frac{cs-cr}{2} = \frac{r}{2}\left\{\cot\frac{\alpha+\varphi}{2} - \text{tang}\frac{\alpha-\varphi}{2}\right\} = \frac{r\cos\alpha}{\text{sen}\alpha+\text{sen}\varphi},$$

(*) Questo valore di Lp' poteva anche trovarsi osservando che: $Lp' = \frac{1}{2}(pc+cp')$.

$$cv = cn + nv = r\tan g\frac{\alpha-\varphi}{2} + \frac{r}{2}\left\{\cot\frac{\alpha+\varphi}{2} - \tan g\frac{\alpha-\varphi}{2}\right\} = \frac{r}{2}\left\{\tan g\frac{\alpha-\varphi}{2} + \cot\frac{\alpha+\varphi}{2}\right\}$$

$$= \frac{r\cos\varphi}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\varphi}.$$

Sarà pure utile nel seguito conoscere gli elementi seguenti:

$$\mathrm{L}v = \mathrm{L}c + cv = r\tan g\varphi + \frac{r\cos\varphi}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\varphi} = r\frac{1 + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi\,(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\varphi)},$$

$\mathrm{UL} = \dfrac{\mathrm{L}p'}{\tan g\lambda} = \dfrac{r}{\cos\varphi\,\tan g\lambda} = \dfrac{r\cos\lambda}{\cos\varphi\,\operatorname{sen}\lambda}$ (dal Δ rettangolo $\mathrm{UL}p'$ in cui ang$p'\mathrm{UL} = \lambda$).

8. Congiungasi il punto m del quadro in cui s'intersecano le immagini del parallelo di latitudine α e del meridiano di longitudine λ coi centri v ed U (fig. 4ª) di queste immagini, è facile convincersi che le due rette mv, mU saranno rispettivamente tangenti all'immagine del meridiano e parallelo considerati e perpendicolari fra loro. Invero poichè i meridiani e i paralleli sulla sfera sono normali l'uno all'altro, saranno pure tali (n. 5) le curve che li rappresentano ed essendo queste delle circonferenze le loro tangenti in m coincideranno coi raggi mv, mU.

Posto ciò ci occuperemo di determinare le distanze $mm_1 = \mathrm{Y}$, $m_1c = \pm\mathrm{X}$ del punto m da $x\gamma$ e da CO (*ordinata* ed *ascissa* del punto), in funzione delle coordinate α, λ di M e di φ, ciò che ci condurrà alle formole generali relative alla proiezione stereografica che gli autori dei trattati sulle *carte geografiche* assegnano ricorrendo a considerazioni di matematica non elementare. Col sussidio di tali formole si renderà poi possibile la determinazione dei punti del quadro o della carta, mediante una rete di rette perpendicolari l'una all'altra.

Essendo il triangolo Umv rettangolo, si avrà:

$$\mathrm{U}v^2 = \mathrm{U}m^2 + mv^2 = \mathrm{U}p'^2 + nv^2$$

$$= \frac{r^2\cos^2\alpha}{(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\varphi)^2} + \frac{r^2}{\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\lambda} = r^2\frac{\cos^2\alpha\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\lambda + (\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\varphi)^2}{\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\lambda\,(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\varphi)^2}$$

$$= \frac{r^2\{1+\mathrm{sen}\alpha\mathrm{sen}\varphi-\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda\}\ \{1+\mathrm{sen}\alpha\mathrm{sen}\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda\}}{\cos^2\varphi\mathrm{sen}^2\lambda\ (\mathrm{sen}\alpha+\mathrm{sen}\varphi)^2}$$

Ora, condotta mm_2 perpendicolare a UT, si osservi che i triangoli $m_1m\nu$, mUm_2 essendo simili e rettangoli, si ha:

$$\mathrm{sen}m\mathrm{UL}_1' = \mathrm{sen}m\nu m_1 = \mathrm{sen}\,(\nu\mathrm{UL}-\nu\mathrm{U}m) = \frac{\nu\mathrm{L}}{\mathrm{U}\nu}\cdot\frac{\mathrm{U}p'}{\mathrm{U}\nu} - \frac{\nu n}{\mathrm{U}\nu}\cdot\frac{\mathrm{UL}}{\mathrm{U}\nu}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{U}\nu^2}\left[\frac{r(1+\mathrm{sen}\alpha\mathrm{sen}\varphi)}{\cos\varphi(\mathrm{sen}\alpha+\mathrm{sen}\varphi)}\cdot\frac{r}{\cos\varphi\mathrm{sen}\lambda} - \frac{r\cos\alpha}{\mathrm{sen}\alpha+\mathrm{sen}\varphi}\cdot\frac{r\cos\lambda}{\cos\varphi\mathrm{sen}\lambda}\right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{U}\nu^2}\ \frac{r^2\,(1+\mathrm{sen}\alpha\mathrm{sen}\varphi-\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda)}{\cos^2\varphi\mathrm{sen}\lambda\ (\mathrm{sen}\alpha+\mathrm{sen}\varphi)},$$

quindi sostituendo ad $\mathrm{U}\nu^2$ il valor precedente:

$$\mathrm{sen}m\nu m_1 = \frac{\mathrm{sen}\lambda\ (\mathrm{sen}\alpha+\mathrm{sen}\varphi)}{1+\mathrm{sen}\alpha\mathrm{sen}\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda};$$

talchè sarà:

$$mm_2 = \mathrm{Y} = m\nu\,.\,\mathrm{sen}m\nu m_1 = \frac{r\cos\alpha}{\mathrm{sen}\alpha+\mathrm{sen}\varphi}\cdot\mathrm{sen}m\nu m_1$$

$$= r\,\frac{\cos\alpha\mathrm{sen}\lambda}{1+\mathrm{sen}\alpha\mathrm{sen}\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda}.$$

Per determinare l'ascissa basterà osservare che:

$$cm_1 = mm_2 - \mathrm{L}c = -\mathrm{X} = \mathrm{U}p'.\ \mathrm{sen}m\mathrm{UL} - r\mathrm{tang}\varphi =$$

$$\frac{r}{\cos\varphi\ \mathrm{sen}\lambda}\,\mathrm{sen}m\mathrm{UL} - \frac{r\mathrm{sen}\varphi\cos\lambda}{\cos\varphi\ \mathrm{sen}\lambda} = \frac{r}{\cos\varphi\ \mathrm{sen}\lambda}\{\mathrm{sen}m\mathrm{UL}-\mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}\lambda\}$$

$$= \frac{r}{\cos\varphi}\cdot\frac{\mathrm{sen}\alpha+\mathrm{sen}\varphi-\mathrm{sen}\varphi\,(1+\mathrm{sen}\alpha\mathrm{sen}\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda)}{1+\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda}$$

$$= r\,\frac{\mathrm{sen}\alpha\cos\varphi-\mathrm{sen}\varphi\cos\alpha\cos\lambda}{1+\mathrm{sen}\alpha\mathrm{sen}\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda}.$$

Quando dunque la direzione positiva per le ascisse è quella da c verso A per le ordinate da c verso C (com'è nella consuetudine), le formole che servono, nella proiezione *orizzontale*, a determinare i punti del quadro mediante rette parallele ad AB e CO sono:

$$X = r\frac{\text{sen}\varphi\cos\alpha\cos\lambda - \text{sen}\alpha\cos\varphi}{1 + \text{sen}\alpha\,\text{sen}\varphi + \cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda},\quad Y = r\frac{\cos\alpha\,\text{sen}\lambda}{1+\text{sen}\alpha\,\text{sen}\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda}.$$

Le formole analoghe per le due altre proiezioni possono dedursi (senza ricorrere ad una speciale analisi), facendo nelle precedenti $\varphi = 90^0$ e $\varphi = 0^\circ$, e sono: per la proiezione *polare* od od *equatoriale*:

$$X = r\,\frac{\cos\alpha\cos\lambda}{1 + \text{sen}\alpha},\quad Y = r\,\frac{\cos\alpha\,\text{sen}\lambda}{1 + \text{sen}\alpha};$$

per la proiezione *meridiana*:

$$X = -r\,\frac{\text{sen}\alpha}{1+\cos\alpha\cos\lambda};\quad Y = r\frac{\cos\alpha\,\text{sen}\lambda}{1+\cos\alpha\cos\lambda} = -X\,\text{sen}\lambda\cot\alpha.$$

La somma $X^2 + Y^2$ sarà poi in ogni caso il quadrato della distanza del punto m del quadro dal centro di esso.

9. Per completare quanto si riferisce alla parte analitica della proiezione stereografica ci rimane a determinare la diversa dilatazione degli elementi lineari, corrispondenti ad archetti infinitesimi presi sulla sfera, dipendentemente dalla distanza della origine di questi dal centro sferico dell'emisfero rappresentato. A tal uopo si rammenti che già al n° 5 fu osservato come il rapporto di più elementi infinitesimi uscenti da uno stesso punto della sfera ai loro corrispondenti sul quadro, fosse indipendente dalla direzione dei medesimi; determinato perciò il rapporto di due archetti circolari infinitamente piccoli MM', mm' (fig. 2ª) i cui centri cadano nel diametro CO, in H e c, sarà questo nello stesso tempo il rapporto fra ogni archetto uscente da M ed il suo corrispondente. Ponendo ora arcCM $= z$ (distanza *zenitale* del punto M), è chiaro che si avrà arcmm' : arcMM' $= cm$: HM; ma osservando i due triangoli rettangoli cOm, HcM, risulta:

$$cm = r\tan\frac{z}{2},\quad HM = r\,\text{sen}z,\ \text{quindi}:$$

$$\frac{\text{arc}mm'}{\text{arcMM}'} = \frac{r \tang \frac{z}{2}}{r \operatorname{sen} z} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{z}{2}}.$$

Il rapporto poi fra le aree di due poligoni infinitamente piccoli corrispondenti che circoscrivano i punti m, M, poligoni che, come fu già osservato (n° 5), sono simili, sarà per conseguenza espresso dalla frazione:

$$\frac{1}{4 \cos^4 \frac{z}{2}}.$$

Nella proiezione orizzontale la relazione che lega z ad α e λ (coordinate del punto M) ed a φ, può ottenersi considerando (fig. 4ª.) il triangolo sferico P′MC (la cui proiezione nel piano della figura stessa è il triangolo P′mC), in cui l'angolo CP′M $=\lambda$, il lato MP′ $= 90° - \alpha$, il lato P′C $= 90° - \varphi$ e il lato MC $= z$, e ricorrendo alla relazione fondamentale della trigonometria sferica che nel nostro caso dà:

$$\cos z = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi + \cos\alpha \cos\varphi \cos\lambda.$$

Vediamo finalmente esaminando la formola $\frac{1}{2\cos^2\frac{z}{2}} = \varepsilon$, quali conseguenze possono ricavarsi riguardo alla deformazione della rappresentazione. Intanto crescendo z, poichè il coseno diminuisce, cresce pure ε ed i valori da esso assunti sono per

$z =$	0°	30°	45°	60°	90°
$\varepsilon =$	0,5	0,5359	0,5858	0,6666	1,

sicchè per le piccolissime figure intorno ai punti del con-
torno non solo la rappresentazione è simile, ma anche uguale
alla figura rappresentata, però altrettanto non accade nel cen-
tro in cui le aree dell' immagine sono semplicemente $\frac{1}{4}$ di
quello che siano nella realtà. È ovvio poi che scegliendo il

quadro non già passante pel centro della sfera, ma pel punto antipodo al centro di visione, la qual posizione del quadro nulla altererebbe di quanto è stato precedentemente esposto, le cose riescirebbero diverse giacchè in tal caso ε assumerebbe il valore $\frac{1}{\cos^2\frac{z}{2}}$, ed allora intorno al centro le immagini delle figure infinitesime sarebbero uguali a quelle obbiettive, e nei punti del contorno quadruple.

10. La proiezione stereografica è molto usata in geografia per rappresentare i due emisferi in cui la terra è divisa dal meridiano che passa per l'*Isola del Ferro* (nel qual caso è meridiana), così pure per rappresentare gli emisferi delle maggiori masse di terra e d'acqua, e gli emisferi d'illuminazione della terra ai solstizi ed agli equinozi, non che grandi porzioni della superficie terrestre la cui forma sia molto allungata (ed allora è orizzontale). Peraltro queste non sono le sole sue applicazioni.

A. Lugli.

I POSTULATI E GLI ENTI GEOMETRICI

Di fronte alla cura lodevole colla quale si cerca oggi di porre su solide basi la Geometria, mi sembra che si soglia nei trattati mettere poco in rilievo l'arbitrarietà che regna nella scelta dei postulati, tantochè i giovani facilmente crederanno che senza i postulati che loro s'insegnano non sia possibile la Geometria. Trovo anche che poco s'insiste sulla pura idealità degli enti geometrici, tenendo così la mente dello studioso troppo legata agli enti reali con cui quelli ideali non hanno una *necessaria* relazione.

Nell'enunciare i postulati si suol dire che essi sono verità accertate dall'esperienza, le quali non si possono dimostrare, facendo così una strana confusione fra quanto si osserva nei corpi realmente esistenti, e quanto si vuol supporre negli enti geometrici puramente ideali. Questo difetto va scomparendo nei trattati più moderni: ma anche in questi, per quanto mi sembra, non ci si trattiene abbastanza nè completamente sulle ragioni che guidano la scelta dei postulati e l'introduzione degli enti geometrici.

Giudico perciò non inutili le poche osservazioni seguenti, per mostrare come, a mio credere, dovrebbesi nell'insegnamento insistere sopra quei punti fondamentali interessantissimi.

Una scienza è l'insieme delle verità relative ad una o più cose: ed esse devono essere dimostrate, cioè dedotte logicamente da altre verità delle quali in un modo qualunque siamo già convinti. È quindi necessario partire in ogni scienza da alcune verità che in essa non si possono dimostrare, ma che o sono vere per necessità logica (assiomi), o si devono assumere come primitive.

Se di queste ultime verità prendiamo le n indipendenti fra loro, esse formano una categoria a parte di verità che non sono teoremi nè assiomi e che si dicono *postulati*.

Non essendo esse logicamente necessarie (poichè se ne sono esclusi gli assiomi), ne viene che in una scienza la quale, senza nessuno scopo pratico, si occupi di dedurre logicamente delle verità relative a certe cose, la loro ammissione è perfettamente arbitraria e si fa solo per una specie di convenzione. Soltanto, queste verità devono essere logicamente possibili, cioè non contradittorie agli assiomi o fra loro; stabilite che siano, potremo coi ragionamenti trarne delle conclusioni, che saranno, a rigore di logica, giuste e costituiranno col loro insieme una scienza esatta. Se la scienza in questione ha per oggetto degli enti ideali, essa sarà assolutamente giusta: se ha per oggetto degli enti veri e reali, sarà sempre logicamente giusta, ma sarà *praticamente* esatta o no, secondochè i postulati ammessi siano o no conformi a ciò che l'osservazione ci mostra avvenire in quegli enti. Così p: es: si può fare una scienza partendo tanto dall'uno che dall'altro dei postulati « I corpi sono pesanti » o « I corpi non sono pesanti »: ambedue potranno dirsi esatte, e, come scienze astratte, sono ambedue vere: la prima sarà vera anche praticamente, la seconda no.

La scelta dei postulati si vede quindi che dipende dall'arbitrio: solo, nelle scienze che hanno per oggetto enti della realtà, la scelta di essi deve essere fatta conforme a ciò che dice l'esperienza: e nelle scienze che hanno per oggetto enti ideali può talora esser conveniente che quella scelta sia fatta in modo da corrispondere a certi fatti che realmente accadono, quando gli enti ideali abbiano qualche riscontro con quelli reali, e il loro studio voglia farsi servire come ausiliario dello studio di questi.

I postulati di una scienza devono essere scelti in modo da essere indipendenti e non contradittori. Se, stabiliti che siano in modo da sembrarci che sodisfino a queste condizioni, si giungesse in seguito a provare che qualcuno di essi è conseguenza logica degli altri, esso deve essere tolto dalla categoria dei postulati e posto in quella dei teoremi: il conservarlo fra i postulati sarebbe non già inutile ma bensì erroneo, apparendo esso verità arbitraria mentre è verità necessaria. Se invece si provasse che uno contraddice ai rimanenti, quel postulato dovrebbe essere soppresso, e con esso tutti i teoremi che sono sua conseguenza.

La scelta dei postulati deve quindi esser fatta con somma cura, e limitandosi al minor numero possibile. Nelle scienze che, come la Geometria, mirano a scopo pratico, il numero dei postulati strettamente necessari è dato da quelli che bastano a rendere più che sia possibile simili le conclusioni di esse a quelle della pratica. Ciò mostra che se, teoricamente parlando, il numero dei postulati è arbitrario, praticamente non lo è; e neanche è assegnabile con precisione quale ne sia il numero più opportuno.

I postulati hanno talora dei punti di somiglianza colle definizioni, ma non sono da confondersi mai con queste; giacchè queste assegnano un nome ad enti o a proprietà che per dimostrazione si sanno esistenti, e quelli o introducono enti non potuti riconoscere esistenti per dimostrazione, o assegnano a certi enti delle proprietà impossibili (fino a quel punto) ad essere dimostrate.

Limitiamoci ora a quanto riguarda l'estensione, intendendo con questa parola la proprietà che hanno i corpi di occupare uno spazio. La Geometria è la scienza che studia l'estensione, o meglio quella proprietà ideale, che, per le considerazioni che seguono, si sostituisce all'estensione.

Osserviamo che i corpi sono enti realmente esistenti, e ad essi dovrebbe rivolgersi lo studio della scienza dell'estensione. Ma i corpi tali quali sono non possono essere l'oggetto di questa scienza di ragionamento, per la incompleta determinazione di ciò che influisce sulla loro estensione. Sono infatti per noi incerti i loro limiti a causa delle nostre non esatte cognizioni sulla costituzione dei corpi e dell'imperfezione dei nostri sensi e dei nostri mezzi di osservazione, i quali non ci permettono di stabilirli esattamente (Hoüel). Il perfezionarsi dei mezzi di osservazione porta a scoprire sempre nuove accidentalità in questi limiti, rendendo quindi sempre variabile l'oggetto dei nostri studi.

I corpi tali quali sono non possono perciò essere gli enti di una scienza di ragionamento che ne studi l'estensione: la Geometria non può studiare oggetti reali. Dovrà quindi crearsi degli enti ideali; soltanto, poichè la proprietà che deve studiare in essi ha da servire allo studio dell'estensione, che è una proprietà dei corpi reali, è conveniente scegliere questi enti colla massima analogia con quelli reali, perchè anche in essi, dal modo con cui si sono introdotti, si possa riconoscere una proprietà simile a quella detta per i corpi *estensione*, e che seguiteremo a chiamare con tal nome anche per i nuovi enti ideali.

Dovremo quindi, disponendo di quell'arbitrarietà accennata in generale, incominciare coll'ammettere un ente che rappresenti quello della realtà che diciamo spazio: e le proprietà arbitrarie che gli attribuiremo (postulati) le sceglieremo in modo da rendere più esattamente che sia possibile immagine di quelle che, dentro i limiti della nostra osservazione, si riscontrano nell'ente reale corrispondente. E osservando lo spazio reale, almeno sin dove giungono le nostre misure ed esperienze, e notando che quella porzione di esso che è inaccessibile ai nostri strumenti ed all'osservazione diretta non sappiamo non considerarlo come dotato delle stesse proprietà di quella porzione che ci è accessibile, ne risulta che sarà da ammettersi in Geometria un ente mediante il seguente:

Postulato 1.° « Esiste un ente (ideale) geometrico che si » concepisce senza interruzioni, illimitato, immobile, costi- » tuito dappertutto ugualmente. Esso si dirà *spazio* ».

Potremmo non ammettere questo spazio, od ammetterlo con altre proprietà e fare un'altra Geometria; ma se si vuole una scienza con cui si possano studiare le proprietà che si riscontrano per i corpi entro il campo delle nostre osservazioni, deve introdursi lo spazio con tutte le condizioni enunciate nel postulato precedente.

Questo solo ente non basta per la geometria, la quale deve studiare le relazioni di esso con altri enti che richiamino quelli dalla cui considerazione sorge in pratica l'idea dello spazio reale.

I corpi reali occupano tutti uno spazio (reale) il quale per certi corpi (che si dicono solidi) è, o approssimativamente si ritiene, invariabile: quindi l'opportunità di enti ideali che godano di una proprietà simile: essi si introducono effettivamente col nome di solidi, dicendo: *Solido* è una porzione qualunque di spazio considerata come staccata dal rimanente spazio. — Il concetto di solido fa sorgere naturale l'idea di un altro ente (che, come il solido, s'introduce e si definisce per nostro arbitrio) il quale corrisponda a certi corpi che in pratica godono proprietà speciali (p. es. i fogli di carta sottilissimi, i veli liquidi, gli strati di tinta che ricuoprono i corpi, ecc.): lo diremo *superficie* e lo introdurremo come quel limite che separa un corpo dal rimanente spazio. Queste superficie le riterremo decomponibili in parti; a ciascuna di queste parti daremo ancora il nome di superficie, e fra esse alcune potranno concepirsi come limite di qualche solido, altre no. — Proseguendo in questa introduzione arbitraria si definisce la *linea* (al cui concetto siamo condotti dall'osservazione di corpi speciali, p. es. fili molto sottili, raggi di luce, spigoli di oggetti, in generale oggetti di lunghezza molto grande in confronto alla larghezza ed altezza), come un ente limite di quelle superficie che non si ritengono come limiti completi di solidi; riterremo essa pure decomponibile in parti, ed a ciascuna parte daremo ancora il nome di linea. Di queste parti alcune potranno essere limiti di superficie, altre no. Finalmente si definisce il *punto* (corrispondente agli enti piccolissimi della realtà) come uno degli enti limiti di una linea la quale non si ritenga come limite completo possibile di nessuna superficie. Il punto si ritiene indecomponibile in parti (*).

(*) La definizione che suol darsi talora della superficie come limite fra due parti consecutive di un solido e della linea come limite fra due parti consecutive di una superficie, non mi sembra opportuna. Astrattamente parlando, simili definizioni, introdotte con postulato, sono perfettamente legittime, non

Tutti questi enti sono ideali; la loro introduzione, sempre arbitraria, è spiegata dalla somiglianza che essi hanno con certi corpi reali considerati in relazione collo spazio reale. Lo studio di questi enti non sarà quindi lo studio dei corpi della natura; ma questo potrà, con approssimazione sempre sufficiente in pratica, ricondursi a quello.

L'introduzione di questi enti essendo, come si è già notato, arbitraria (*), la loro esistenza è una di quelle verità che siamo liberi di ammettere o no: e quindi deve essere enunciata mediante postulato, il che ordinariamente non si suol fare. Dovremo quindi dire che

Postulato 2.° « Esistono parti dello spazio (quello spazio » che si è ammesso col postulato 1.°) che si dicono *solidi*.

» Esistono enti limiti dei solidi e le parti di questi enti. » Gli uni e le altre non sono solidi e si dicono *superficie*.

» Esistono limiti di quelle superficie che non si conce- » piscono come limiti completi di solidi, e le loro parti. Gli » uni e le altre non sono solidi nè superficie, e si dicono » *linee*.

» Esistono limiti di quelle linee che non si concepiscono » come limiti completi di superficie, e non hanno parti. Essi » non sono nè solidi, nè superficie, nè linee e si dicono » *punti*.

» In ogni solido esistono infinite superficie, in ogni su- » perficie infinite linee, in ogni linea infiniti punti.

» Enti che non siano nè spazio, nè solidi, nè superficie,

---

essendo, od almeno non sembrando, contraddittorie. Ma seguendo quelle, non ci si uniforma del tutto a ciò che si osserva in pratica; giacchè vi sono nella realtà dei corpi che si possono pur dire consecutivi e che sono separati da enti cui in geometria dovremmo far corrispondere linee o punti, e vi sono superficie materiali separate da punti materiali (es. due oggetti rassomiglianti a cubi aderenti per uno spigolo o per un vertice, due oggetti sottilissimi circolari tangenti, ecc.). Allora per questi enti reali, che invero somigliano a linee ed a punti, avremmo dalla Geometria le proprietà che invece competono a superficie ed a linee. Potremmo evitar ciò definendo un significato speciale da attribuirsi alle parole « superficie e solidi consecutivi » per modo da escludere gli anzidetti casi di eccezione; ma per questo occorre forse ricorrere al concetto di moto e di punto, mentre invece il punto si vuol definire per mezzo delle linee e delle superficie.

(*) Niente infatti mostra la *necessità* che lo spazio, concepito come richiede il postulato 1.° sia da considerarsi divisibile in parti: che il solido (che allora apparisce ente non necessario) sia limitato da un nuovo ente che è la superficie, la superficie dalla linea, la linea dai punti. Almeno possiamo dire che sino a questo punto questa necessità non è stata provata, e quindi quelle verità sono sino ad ora tutti postulati.

» nè linee, nè punti, nè insieme qualunque di questi enti
» non esistono in Geometria ». —

La parola « esistono » usata nell' enunciato di questo e del postulato precedente non accenna ad un fatto che in essa venga accertato, ma ad un' esistenza dipendente soltanto dalla nostra volontà.

Esprimendo il postulato sotto questa forma, si possono definire i solidi e le superficie consecutivi, dicendo: Due solidi che non hanno comune nessun solido, ma hanno comune una parte delle superficie che li limitano (o, se si vuole, anche una sola linea od un punto di questa) si dicono *consecutivi*; e *consecutive* pure si dicono due superficie che non hanno comune nessuna superficie, ma hanno comune una parte delle linee che le limitano (o, se si vuole, anche solo un punto di questa); e due linee quando, senza avere a comune nessuna linea, hanno a comune una parte dei punti che le limitano.

Per studiare questi enti geometrici ora introdotti si sogliono disegnare delle figure che aiutino la nostra mente a concepirli, richiamando quegli oggetti reali che hanno servito a destare in noi quei puri concetti che sono gli enti ideali. Ma queste figure non sono indispensabili, dovendo il ragionamento esser fondato *solo* sulle proprietà attribuite agli enti ideali mediante i postulati. Per tale ragione le figure possono anzi essere talora nocive, giacchè abituano a contare troppo nel ragionamento sull'aiuto di quegli enti reali e quindi possono condurre talora ad assumere inavvertentemente come note certe verità che a noi sembrano evidenti perchè tali sono negli enti della realtà, e che invece o possono essere dimostrate o, se pensiamo ai soli enti geometrici, debbono essere ammesse come postulati, qualora se ne voglia tener conto. C'è quindi sempre da dubitare che i postulati che si sogliono ammettere nella Geometria non siano tutti quelli necessari, perchè altri forse se ne ammettono tacitamente o sotto forma di assiomi nel riferirsi che facciamo alle figure rappresentative.

Agli enti che si sono fin qui introdotti (a tutti o ad alcuno) possiamo proseguire ad attribuire proprietà speciali ed arbitrarie, purchè, come si notò in generale, siano compatibili fra loro e con quelle già introdotte. Al solito, sia nell'attribuire agli enti già introdotti ulteriori proprietà, sia nello scegliere fra essi degli enti speciali, terremo conto dello scopo pratico della geometria e ci lasceremo guidare dall'analogia coll'esperienza e coll'osservazione.

Intanto in pratica si vede che, in massima, supposti rimossi tutti gli ostacoli, è possibile il movimento dei corpi, e che questi si muovono restando sempre gli stessi (senza deformarsi) o, più esattamente, restando tali da potere ricevere il medesimo nome che loro si attribuiva prima. È quindi naturale che, pur potendo quando si voglia considerare gli enti geometrici privi di una proprietà che somigli a quella del moto, o dotati di essa ma con deformazione, si debba utilmente considerare possibile anche in Geometria una specie di moto simile a quello reale. E, per stare nella massima generalità, dicendo *figura* un insieme qualunque di enti geometrici (all'infuori dello spazio) enunceremo il postulato:

« Ammettiamo possibile che una figura geometrica, re-
» stando quella che è, possa cambiare posizione nello spa-
» zio geometrico, cioè un suo punto possa prendere la po-
» sizione di altri punti dello spazio o, in altre parole,
» che si possa concepire l'essenza di una figura come indi-
» pendente dalla posizione speciale che occupa ogni suo punto.
» Questo cambiamento di posizione si dirà *moto* ».

Questo postulato che, come già si è notato in casi consimili, non è riconoscimento di un fatto ma ammissione arbitraria di una proprietà, può anche esprimersi così:

« Una figura geometrica può muoversi nello spazio geo-
» metrico ».

Credo inutile ed inesatto l'aggiungere, come si suole ordinariamente, la frase « senza deformazione » che è solo tollerabile in pratica. Perchè se dico che una figura si deforma, ciò vuol dire che perde alcuna delle sue proprietà, onde non è più la figura primitiva; e ciò non è conciliabile coll'idea di moto dato in geometria, che è, come si è detto, la possibilità di cambiamento di posizione di una figura che *rimane la medesima*. Anche in pratica, a rigore, essendo la forma un attributo dei corpi, la parola deformazione equivale a cambiamento di un corpo in un altro, e quindi non dovrebbe essere usata in tali casi; ma restando le stesse tutte le altre proprietà del corpo ed essendo queste deformazioni ordinariamente tali da cambiare il corpo in un altro non troppo dissimile da quello che era prima, se non esatto, è almeno tollerabile il ritenere che il nuovo corpo sia quello di prima, ed è giustificata la frase « muoversi con o senza deformazione ».

Per esprimere fatti simili a quelli che si osservano in realtà è conveniente anche distinguere più specie di moto possibile; onde possiamo come segue enunciare i postulati del moto delle figure:

Postulato 3.° « Ogni figura può muoversi nello spazio.

» Nel moto un ente può giungere ad occupare la posi-
» zione occupata *simultaneamente* da un altro ente o da una
» sua parte (*).

« Il movimento può avvenire 1° senza che nessuno dei
» punti della figura stia fermo, 2.° restando fermo uno dei
» suoi punti, 3.° restando immobile qualche sua linea (spe-
» ciale) ».

» Una figura non può muoversi restando fisso un suo so-
» lido o una sua superficie ».

Da questo postulato discende immediatamente come teorema che:

« Se una figura si muove, quelli fra i suoi enti che pos-
» sono stare immobili devono essere linee o punti ».

Ammessi questi postulati sul moto, è da osservarsi che, per studiare più comodamente le linee e le superficie è utile separare quelle dalle superficie, queste dai solidi che servono a definirle: onde si ammette il postulato, corrispondente del resto a fatti osservati nella realtà:

Postulato 4.° « Una linea può concepirsi come l'insieme
» di tutte le posizioni di un punto che si muove. – Si pos-
» sono concepire *certe* superficie come l'insieme di tutte
» le posizioni di una linea che si muove (restando inalte-
» rata) e *certi* solidi come l'insieme di tutte le posizioni di
» una superficie che si muove (restando inalterata) »,

che si potrebbe sotto forma alquanto più generale enunciare anche così:

(*) Questa proprietà non ha, a dire il vero, riscontro nella pratica, essendo i corpi della realtà impenetrabili; ma non nuoce alle altre analogie della geometria coll'esperienza e serve utilmente nell'uso del mezzo migliore che si ha per riconoscere e definire l'uguaglianza delle figure, cioè la sovrapponibilità.

« Una linea può esser concepita come l'insieme di tutti
» i suoi punti; una superficie come l'insieme di una cate-
» goria speciale di sue linee; un solido come l'insieme di
» una categoria speciale » di sue superficie ».

Con questo postulato, meglio che col solo postulato 2°, si concepisce l'esistenza di superficie o linee infinite.

— I postulati esposti fin qui sono quelli che, sotto questa od altra forma, si sogliono enunciare per gli enti generali della geometria e che, come si vede, riassumono le principali proprietà simili a quelle che si riscontrano nei corpi, avuto riguardo solo alla loro estensione.

Veniamo ora ad introdurre qualche ente speciale. Proseguendo col medesimo metodo, quello cioè di attingere i fondamenti della geometria nell'osservazione e nell'esperienza, ci si presentano subito due categorie importantissime di oggetti reali, aventi per tipo la prima un filo sottilissimo teso, la seconda la superficie (nel senso volgare della parola) delle acque stagnanti. Si vede quindi la convenienza di introdurre degli enti (ideali) che col loro studio servano in pratica allo studio degli enti reali corrispondenti; e di scegliere il primo nella categoria delle linee (dicendolo *retta*) ed il secondo in quella delle superficie (dicendolo *piano*). Ma la loro introduzione effettiva presenta delle difficoltà, per essere essi ordinariamente i primi enti speciali che si studiano nella geometria, nè potendo allora ricondursi ad altri.

Questa introduzione può farsi in due modi: o colla definizione di quegli enti, mediante altri enti già noti, o immediatamente con postulati. Comunemente si usa questo secondo metodo; ma si hanno esempi anche del primo, che è stato usato dal Bolyai. Questi incomincia dall'introdurre la sfera: e, per giungere ad essa, definisce l'uguaglianza di due distanze fra punti, senza definire la linea che li congiunge, fondandosi sul concetto di punti invariabilmente collegati. Allora, se A è un punto fisso, egli dice *sfera* l'insieme di tutti i punti dello spazio ugualmente distanti da A. Poi, prese due sfere con centri differenti fissi e raggi uguali, e fatti variare indefinitamente i loro raggi, considera il luogo geometrico delle linee comuni a queste coppie di sfere, e lo dice piano; e il luogo geometrico dei punti di questo piano che stanno immobili quando il piano si rovescia e lo dice retta;

e dimostra per questi elementi piano e retta tutte le proprietà che per essi siamo soliti assumere come primitive. Questo metodo, anche sviluppato con esattezza, ha il vantaggio di esser fondato sopra un piccolo numero di postulati.

L'altro metodo è ormai consacrato dall' uso, ed ha dal suo lato il vantaggio di essere più intuitivo (mi si permetta l'espressione) introducendo nella Geometria direttamente degli enti, che, per la somiglianza stretta con quelli che abbiamo continuamente in uso, si prestano bene ad una facile concezione, tanto che per lungo tempo le loro proprietà sono state date appena con definizioni o come proprietà evidenti, e si sono spesso perfino sottintese, applicandole in modo tacito, quasi fosse impossibile ammettere il contrario. E in una scienza che sia destinata a scopo pratico questo è vantaggio non trascurabile, tanto più che anche questo secondo metodo è, dal lato teorico, rigorosamente esatto.

Sul modo con cui si applica comunemente questo secondo metodo faremo alcune poche osservazioni.

Alcuni autori cominciano col dire che « la linea più sem» plice è la linea retta ». Questa frase la credo da bandire, potendosi domandare che cosa voglia dire linea più semplice, a meno che con questa parola non si voglia accennare che essa corrisponde agli oggetti che in pratica si sogliono dire più semplici. Del resto poi, quanto alla definizione, la linea retta è forse in geometria la più complicata. Di più sogliono aggiungere : « Tutti hanno un concetto esatto della retta (De Paolis, Sannia e D'Ovidio, . . .) e delle sue proprietà rivelate continuamente dai sensi e verificate coll' esperienza. Si domanda perciò la concessione delle sue proprietà più ovvie necessarie e sufficienti per individuarla (De Paolis) ». Innanzi tutto, se quelle proprietà fossero necessarie e sufficienti per individuarla, esse costituirebbero (Duhamel, De Paolis stesso) la definizione della retta, mentre la retta con questo metodo non si può definire. E infatti l'*esistenza* di questo ente deve essere ammessa come postulato. E ancora non è esatto il dire che i sensi e l'esperienza ci rivelano continuamente le proprietà della retta, essendo la retta un ente ideale; ma devesi dire che ci rivelano certe proprietà per certi corpi sottilissimi (fili tesi, ecc.) i quali si vogliono studiare in geometria mediante l'analogia che ha con loro l'ente ideale, arbitrario, introdotto col nome di retta. Altrimenti, fra le altre inesattezze, l'introduzione di questo ente apparirebbe come necessaria invece che come volontaria. È pure inesatto il dire che tutti abbiamo un concetto esatto della retta e quindi si sa che cosa essa sia, perchè essa non esiste in realtà: e il voler sufficienti per sapere che cosa essa sia quelle leggiere astrazioni che ci avvezziamo a fare fino da piccoli vedendo gli oggetti che le rassomigliano e raggruppandoli attorno ad un tipo unico che, per dir così, comprende in modo astratto le loro proprietà, è cosa troppo vaga e può forse talora in questo od in casi consimili indurre in errore. In conclusione si viene così a supporre che si sia fatta colla mente un'operazione colla quale i vari oggetti della natura ci hanno condotto a crearci un tipo ideale cui si riportano, e il quale in seguito ci hanno insegnato che si chiama retta; ma allora è meglio riprendere questo processo intellettuale e porlo a base dell'introduzione esatta del coneetto di retta.

Il metodo da seguirsi è quindi quello di esaminare le proprietà caratteristiche degli oggetti per studiare i quali si introduce questo ente *retta*: trasformare queste proprietà nelle corrispondenti proprietà ideali di enti geometrici: scegliere quelle che sono indipendenti e, fino a questo momento, si possono ritenere come non contraditiorie: fra i diversi gruppi possibili di verità indipendenti e compatibili scegliere quello che si crede più opportuno: ed enunciarle come postulati arbitrari di un nuovo ente cui si dà il nome di *retta*.

Stabilito tutto ciò, vediamo se i postutati che si sogliono ammettere sono i più opportuni, e quali sono quelli che si potrebbero loro sostituire.

La proprietà principali dei fili tesi ecc. essendo quella che quando ne sono fissati due punti non si possono muovere più, e che, supposti lunghi convenientemente, si possono appoggiare su due punti qualunque, è opportuno che per il nuovo ente si abbia (ammessa o dimostrata) la proprietà che per due punti passa sempre una retta ed una sola, espressa comunemente dalla proposizione « Una retta è individuata » da due dei suoi punti. »

Questa proprietà si suol porre fra i postulati e vi si suole unire l'altra « Rotando attorno ad un suo punto una » data retta può condursi a passare per un punto qualun-

» que dato. » Ma il primo postulato può modificarsi leggermente nell'altro (Frattini) « Per due punti dati può sempre condursi a passare una *data* retta e non vi passa che » quella » e allora esso, per le applicazioni che se ne fanno, può benissimo tener luogo del 2° postulato « Rotando ecc. »; mentre viceversa questo 2° postulato conduce alla prima parte del primo, giacchè (Faifofer) presa una retta, si fa rotare attorno ad un suo punto, e passare per un punto dato A: poi attorno ad A e si fa passare per un secondo punto dato B: e così si *dimostra* che per due punti passa sempre una data retta. Ne viene che considerando il primo postulato modificato ed il secondo (Rotando ecc.), la prima parte del primo è conseguenza del secondo, ed il secondo del primo; onde o il secondo postulato o la prima parte del primo sono da togliersi dai postulati e porsi fra i teoremi. Del primo postulato resta sempre peraltro la seconda parte. « Per due punti passa una retta sola »; ma non la credo esposta sotto la sua forma migliore, essendo essa una proprietà che fa venire alla mente il pensiero di altre rette prima che ben si sappia che cosa è una di esse, ed essendo necessario appunto quel postulato per sapere che cos'è una di queste rette.

Per evitar questo, potremmo stabilire i postulati della retta come segue.

Si osserva nei corpi reali che, se rotano attorno a due loro punti, stanno fermi in generale altri loro elementi, i quali all'occhio sembrano costituire come una striscia sottilissima del corpo, che lo traversa da parte a parte: che questo succede per quanto sia grande il corpo e siano lontani i punti: che presi due punti qualunque dello spazio possiamo avere od almeno immaginare un corpo che ruoti attorno ad essi, e vediamo quindi o ci immaginiamo la solita striscia sottilissima immobile passante per quei due punti ecc. Tutti questi fatti sono facilissimi ad osservare; e sono quelli che prenderemo per dedurne le corrispondenti proprietà che, come è in nostro arbitrio, attribuiremo all'ente da definire. Ricordando che nel postulato 3° si è ammesso che « una figura può muoversi stando ferme alcune sue linee » enunceremo così il postulato della retta:

Postulato 5° « Esiste una linea tale che quando fa parte » di una figura la quale si muove stando fermi due dei » punti di quella linea, essa linea è immobile e tutte le

» linee di cui nel postulato 3°, se non coincidono con essa,
» ne sono parti (cioè essa sola sta ferma).

» Essa è divisa in due parti consecutive da ogni suo
» punto (e quindi, per le definizioni date in conseguenza
» del postulato 2°, essa è indefinita e non interrotta).

» Una *data* di tali linee si può condurre a passare per
» due punti qualunque dati.

» Tale linea si dirà *retta*. »

Si deduce come corollario che quando una figura ruota attorno a due punti per cui passa una retta stanno fermi solo i punti della retta: e quindi per due punti passa una retta sola; giacchè se ne passassero due a, b, fatto rotare il loro insieme attorno a quei due punti, dovrebbe star ferma, p. es. a ed a sola, mentre starebbe ferma anche b come retta che passa per quei due punti; e quindi viene dimostrata una delle proprietà che si sogliono dare come primitive.

Si ha di più come corollario un'altra proprietà che in alcuni trattati è data come postulato: che cioè per fissare una figura è necessario e sufficiente fissare tre dei suoi punti non situati in linea retta. Poichè fissati tre punti A, B, C non in linea retta, se la figura potesse muoversi, allora, stando fermi A, B, starebbe per il postulato precedente, ferma l'intera retta A B, ed essa sola, e quindi non il punto C, contro l'ipotesi. E viceversa: tre punti non in linea retta sono necessari per fissare una figura, perchè stando fermi anche tutti i punti di una linea retta la figura può muoversi.

Del resto sarebbe facile dimostrare che reciprocamente ammesso come postulato che « per due punti passa una retta » sola », e che « tre punti non in linea retta sono neces- » sari e sufficienti per fissare una figura » viene come conseguenza quello che io ho ammesso come postulato, cioè che « quando una figura si muove stando fermi due dei suoi » punti, sta ferma tutta una linea (retta) passante per quei » punti e quella sola ».

Le altre proprietà che si sogliono ammettere come postulati per la retta e quelle che si hanno pel piano mi sembra che non diano luogo a nessuna osservazione, purchè siano esposte completamente e col rigore che si riscontra nei più recenti trattati.

Pisa, Ottobre 1886.

RODOLFO BETTAZZI.

SULLA DIVISIBILITA' DI ALCUNI POLINOMI

1. Teorema. *Se* a *è un numero intero qualunque, e sono* n *ed* (m + 1) *due numeri primi fra di loro, l'espressione*

$$(1)\quad a^{mn} + a^{(m-1)n} + a^{(m-2)n} + \ldots\ldots + a^{3n} + a^{2n} + a^{n} + 1$$

rappresenta un numero multiplo di quello rappresentato da quest'altra espressione

$$(2)\quad a^{m} + a^{m-1} + a^{m-2} + \ldots\ldots + a^{3} + a^{2} + a + 1.$$

Infatti, ogni numero n, primo con $(m + 1)$, si può mettere sotto la forma

$$p(m + 1) + r$$

nella quale p ed r denotino due numeri di cui il primo, che può anche essere nullo, indica il quoziente della divisione $\frac{n}{m+1}$, ed il secondo, che è primo con $(m + 1)$, rappresenta il resto di questa stessa divisione ed è perciò minore di $(m + 1)$.

Designando poi con π il prodotto $p(m + 1)$, l'espressione (1) potrà scriversi

$$(1')\quad a^{m\pi}.\,a^{mr} + a^{(m-1)\pi}.\,a^{(m-1)r} + a^{(m-2)\pi}.\,a^{(m-2)r} + \ldots\ldots$$
$$+ a^{3\pi}.\,a^{3r} + a^{2\pi}.\,a^{2r} + a^{\pi}.\,a^{r} + 1.$$

Ora il teorema « *Se* a *è primo con* b, *e le quantità* a, 2a, 3a, . . . (b − 1)a *si dividono per* b, *i resti saranno tutti differenti* » mostra che dividendosi gli m prodotti

$$mr,\ (m-1)r,\ (m-2)r, \ldots,\ 3r,\ 2r,\ r$$

per $(m + 1)$, si devono ottenere m resti tutti fra loro differenti, giacchè in questo caso r designa appunto un numero primo con $(m + 1)$. Laonde dalle m divisioni, testè accennate, deriveranno come resti i seguenti numeri

$$m,\ m-1,\ m-2, \ldots\ldots,\ 3,\ 2,\ 1;$$

e quindi l'espressione (1′) può scriversi in quest'altro modo

$(1'') \; a^{\pi_1}.a^m + a^{\pi_2}.a^{m-1} + a^{\pi_3}.a^{m-2} + \ldots + a^{\pi_{m-2}}.a^3 + a^{\pi_{m-1}}.a^2 + a^{\pi_m}.a + 1$;

essendosi qui voluti indicare colle lettere π_1, π_2, π_3, ..., π_{m-2}, π_{m-1}, π_m dei multipli differenti di $(m+1)$ facili d'altronde a determinarsi secondo i varii valori particolari che s'intendono attribuire ad m ed n.

Fa d'uopo ancora osservare che, per essere l'espressione (2) eguale ad

$$\frac{a^{m+1}-1}{a-1}$$

si ha che $(a^{m+1}-1)$ è divisibile per tale polinomio e quindi, se indichiamo con S il valore della somma (2) e con b la differenza $(a-1)$, si dovrà avere

$$a^{m+1} = bS + 1.$$

Ma sappiamo eziandio che a^{π_1}, a^{π_2}, a^{π_3}, ..., $a^{\pi_{m-2}}$, $a^{\pi_{m-1}}$, a^{π_m} rappresentano delle potenze di a^{m+1} con esponenti interi e positivi; e d'altra parte un notissimo teorema di aritmetica insegna che quando un numero diviso per un altro dà per resto 1, anche qualsiasi potenza (con esponente intero e positivo) di detto numero, divisa per lo stesso divisore, deve dare per resto 1, dunque, chiamando ordinatamente b_1, b_2, b_3, ..., b_{m-2}, b_{m-1}, b_m i quozienti delle divisioni

$$\frac{a^{\pi_1}}{S},\ \frac{a^{\pi_2}}{S},\ \frac{a^{\pi_3}}{S},\ \ldots\ldots,\ \frac{a^{\pi_{m-2}}}{S},\ \frac{a^{\pi_{m-1}}}{S},\ \frac{a^{\pi_m}}{S},$$

il polinomio (1'') si potrà ancora scrivere così

$$(1''')\ (b_1S+1)\,a^m + (b_2S+1)\,a^{m-1} + (b_3S+1)\,a^{m-2} + \ldots\ldots$$
$$+ (b_{m-2}S+1)\,a^3 + (b_{m-1}S+1)\,a^2 + (b_mS+1)\,a + 1.$$

Ricordando per ultimo che S rappresenta il valore dell'espressione (2), s'intenderà assai facilmente che il polinomio (1''') equivale al seguente prodotto

$$(b_1a^m + b_2a^{m-1} + b_3a^{m-2} + \ldots\ldots + b_{m-2}a^3 + b_{m-1}a^2 + b_ma + 1)\,S,$$

e che in conseguenza il polinomio (1) è divisibile per il polinomio (2).

2. Teorema. *Se* a *è un numero intero qualunque e sono* 2m *ed* n *numeri primi fra di loro, l'espressione*

$$(1)\, a^{(2m-1)n} - a^{(2m-2)n} + a^{(2m-3)n} - \ldots\ldots - a^{(2m-2h)n} + a^{(2m-2h-1)n} - \ldots\ldots$$
$$+ a^{3n} - a^{2n} + a^{n} - 1$$

rappresenta un numero divisibile per quello rappresentato dall'espressione

$$(2)\, a^{2m-1} - a^{2m-2} + a^{2m-3} - \ldots\ldots + a^{2m-2h-1} - \ldots\ldots + a^3 - a^2 + a - 1.$$

Invero, posto mente che il binomio $a^{2m} - 1$ è uguale al prodotto del polinomio (2) per il binomio $a + 1$ e quindi che

$$a^{2m} = bP + 1,$$

ove P indica il polinomio (2) ed è $b = a + 1$; e posto ancora mente che

$$n = 2mq + r,$$

dove q ed r rappresentano rispettivamente il quoziente ed il resto della divisione $\frac{n}{2m}$, q potendo anche essere nullo, mentre dev'essere r primo con $2m$ e minore di $2m$, con processo analogo a quello tenuto nel dimostrare la proposizione precedente, si trasformerà il polinomio (1) in un altro di questa forma

$$(1''')\quad (*)\quad a^{\pi_1}.\, a^{2m-1} - a^{\pi_2}.\, a^{2m-2} + a^{\pi_3}.\, a^{2m-3} - \ldots\ldots$$
$$- a^{\pi_{2h}}.\, a^{2m-2h} + a^{\pi_{2h+1}}.\, a^{2m-2h-1} - \ldots\ldots$$
$$+ a^{\pi_{2m-3}}.\, a^3 - a^{\pi_{2m-2}}\, a^2 + a^{\pi_{2m-1}}.\, a - 1,$$

(*) Per intendere che i segni del polinomio (1'') devono essere tali quali sono stati in esso scritti, basta considerare due termini successivi qualunque del polinomio (1), per esempio i due termini $- a^{(2m-2h)n}$, $+ a^{(2m-2h-1)n}$ i quali, per essere $n = 2mq + r$, si mutano rispettivamente in questi altri

$$(3)\qquad - a^{(2m-2h)2mq} \times a^{(2m-2h)r},\; + a^{(2m-2h-1)2mq} \times a^{(2m-2h-1)r}$$

Chiamando ordinatamente q'' ed r'' il quoziente ed il resto della divisione $\frac{(2m-2h-1)r}{2m}$, e q', r' il quoziente ed il resto della divisione $\frac{(2m-2h)r}{2m}$ si dovrà avere $(2m - 2h - 1)r = 2mq'' + r''$, $(2m - 2h)r = 2mq' + r'$, da cui segue, per essere r primo con $2m$, che r'' è un numero impari, ed r' è un numero pari. Frattanto, se indichiamo con $\pi_{2m-r'}$, $\pi_{2m-r''}$ i multipli di $2m$ dati dalle espressioni $(2m - 2h)\, 2mq + 2mq'$, $(2m - 2h - 1) 2mq + 2mq''$ i termini (3) si riducono a questi altri $- a^{\pi_{2m-r'}}.\, a^{r'}$, $+ a^{\pi_{2m-r''}}.\, a^{r''}$, dei quali si vede che è negativo quello che contiene il secondo fattore a con esponente pari ($r' < 2m$), e positivo l'altro che contiene il secondo fattore a con esponente impari ($r'' < 2m$). Altrettanto si dica degli altri termini del polinomio (1').

in cui π_1, π_2, π_3, ..., π_{2h}, π_{2h+1}, ..., π_{2m-3}, π_{2m-2}, π_{2m-1} rappresentano dei multipli di $2m$; e quindi il polinomio $(1'')$ si potrà scrivere

$$(1''')\ (b_1P+1)\,a^{2m-1}-(b_2P+1)\,a^{2m-2}+(b_3P+1)\,a^{2m-3}-\ldots\ldots$$

$$-(b_{2h}P+1)\,a^{2m-2h}+(b_{2h+1}P+1)\,a^{2m-2h-1}-,\ldots$$

$$+(b_{2m-3}P+1)\,a^3-(b_{2m-2}P+1)\,a^2+(b_{2m-1}P+1)\,a-1;$$

essendo b_1, b_2, b_3, ..., b_{2h}, b_{2h+1}, ..., b_{2m-3}, b_{2m-2}, b_{2m-1} i quozienti incompleti delle divisioni

$$\frac{a^{\pi_1}}{P},\ \frac{a^{\pi_2}}{P},\ \frac{a^{\pi_3}}{P},\ldots\ldots,\frac{a^{\pi_{2h}}}{P},\ \frac{a^{\pi_{2h+1}}}{P},\ldots\ldots,\ \frac{a^{\pi_{2m-2}}}{P},\ \frac{a^{\pi_{2m-1}}}{P}.$$

Il polinomio (1) equivale cioè a questo prodotto

$$P.(b_1a^{2m-1}-b_2a^{2m-2}+b_3a^{2m-3}-\ldots-b_{2h}a^{2m-2h}+b_{2h+1}a^{2m-2h-1}-\ldots$$

$$+b_{2m-3}\,a^3-b_{2m-2}\,a^2+b_{2m-1}\,a+1),$$

il quale dimostra appunto quanto si è asserito nel teorema [N° 2].

3. Teorema. *Se* a *è un numero intero qualunque e sono* $4m+2$ *ed* n *due numeri primi fra di loro, l'espressione*

$$(1)\ a^{2mn}-a^{(2m-1)n}+a^{(2m-2)n}-\ldots+a^{(2m-2h)n}-a^{(2m-2h-1)n}+\ldots$$

$$-a^{3n}+a^{2n}-a^n+1$$

rappresenta un numero divisibile per quello rappresentato dall'espressione

$$(2)\ a^{2m}-a^{2m-1}+a^{2m-2}-\ldots+a^{2m-2h}-a^{2m-2h-1}+\ldots-a^3+a^2-a+1.$$

Infatti, indicando rispettivamente con q ed r il quoziente ed il resto della divisione $\dfrac{n}{4m+2}$, si dovrà avere

$$n = (4m + 2)q + r,$$

r essendo un numero primo con $(4m + 2)$, ossia primo con 2 e con $(2m + 1)$, e q un numero intero ovvero anche zero.

Designati poscia con P_{2m}, P_{2m-1}, P_{2m-2}, ..., P_{2m-2h}, $P_{2m-2h-1}$, ... P_3, P_2, P_1 i prodotti di $(4m + 2)q$ rispettivamente per $2m$, $2m-1$, $2m-2$, ..., $2m-2h$, $2m-2h-1$, ..., 3, 2, 1, il polinomio (1) potrà scriversi

$$(1')\left\{\begin{array}{l} a^{P_{2m}}.a^{2mr} - a^{P_{2m-1}}.a^{(2m-1)r} + a^{P_{2m-2}}.a^{(2m-2)r} - \ldots + a^{P_{2m-2h}}.a^{(2m-2h)r} \\ \quad - a^{P_{2m-2h-1}}.a^{(2m-2h-1)r} + \ldots - a^{P_3}.a^{3r} + a^{P_2}.a^{2r} - a^{P_1}.a^{r} + 1 \end{array}\right\}$$

Giova frattanto osservare che essendo r primo con $2m + 1$, i $2m$ prodotti

$$2mr,\ (2m-1)r,\ (2m-2)r,\ \ldots (2m-2h)r,\ (2m-2h-1)r,\ \ldots,\ 3r,\ 2r,\ r$$

divisi per $2m + 1$ devono dare $2m$ resti differenti, e siccome questi resti non possono essere superiori a $2m$, così essi, scritti per ordine decrescente, sono

$$(3)\qquad 2m,\ 2m-1,\ 2m-2, \ldots,\ 2m-2h,\ 2m-2h-1,\ \ldots,\ 3,\ 2,\ 1.$$

Consideriamo ora due termini successivi del polinomio $(1')$, per esempio

$$(4)\qquad + a^{P_{2m-2h}}.\ a^{(2m-2h)r} \quad \text{e} \quad - a^{P_{2m-2h-1}}.\ a^{(2m-2h-1)r};$$

siano rispettivamente q_1 ed r_1 il quoziente ed il resto della divisione $\frac{(2m-2h)r}{2m+1}$, e q_2, r_2 il quoziente ed il resto della divisione $\frac{(2m-2h-1)r}{2m+1}$; sarà perciò

$$(2m - 2h)r = (2m + 1)q_1 + r_1; \quad (2m - 2h - 1)r = (2m + 1)q_2 + r_2,$$

e quindi i due termini (4) si muteranno in

$$(5)\qquad + a^{P_{2m-2h} + (2m+1)q_1} \times a^{r_1} \quad \text{e} \quad - a^{P_{2m-2h-1} + (2m+1)q_2} \times a^{r_2}.$$

Essendo $(2m - 2h)r$ un numero pari; $(2m - 2h - 1)r$ e $(2m + 1)$

due numeri impari, segue che i numeri q_1 ed r_1 o sono entrambi pari, ovvero entrambi impari; mentre invece uno dei numeri q_2, r_2 è pari e l'altro è impari.

Chiamando q''_1, r''_1 i valori di q_1 ed r_1 quando questi due numeri sono pari, e q'_1, r'_1 i valori di questi stessi numeri q_1, r_1 quando essi sono impari; q''_2, r'_2 i valori di q_2, r_2 quando il primo di questi numeri è pari e l'altro è impari, e q'_2, r''_2 i valori di questi stessi numeri q_2, r_2 quando l'uno è dispari ed il secondo pari, e ponendo

$$\pi''_{2h} = P_{2m-2h} + (2m+1)q''_1, \quad \pi'_{2h} = P_{2m-2h} + (2m+1)q'_1,$$

$$\pi''_{2h-1} = P_{2m-2h-1} + (2m+1)q''_2, \quad \pi'_{2h-1} = P_{2m-2h-} + (2m+1)q'_2$$

avremo che π''_{2h} e π''_{2h-1} rappresentano due multipli di $(4m+2)$, e che π'_{2h}, π'_{2h-1} rappresentano due numeri impari entrambi multipli di $(2m+1)$.

Segue perciò che il primo dei termini (5) è uguale a

$$+a^{\pi''_{2h}}.\,a^{r''_1} \quad \text{ovvero a} \quad +a^{\pi'_{2h}}.\,a^{r'_1},$$

ed il secondo termine è uguale a

$$-a^{\pi''_{2h-1}}.\,a^{r'_2} \quad \text{ovvero a} \quad -a^{\pi'_{2h-1}}.a^{r''_2}.$$

Sappiamo poi che $(a^{2m+1}+1)$ è uguale al prodotto del polinomio (2) per il binomio $(a+1)$; scaturisce quindi che a^{2m+1} rappresenta un multiplo del polinomio (2) diminuito tale multiplo di 1; ossia se indichiamo con A il valore del polinomio (2) e con k un numero intero tale che $(k-1)$A esprima il massimo multiplo di A che sia contenuto in a^{2m+1}, si dovrà avere

$$a^{2m+1} = kA - 1.$$

Sarà perciò a^{4m+2} un multiplo di A aumentato di 1, e per conseguenza qualunque potenza di a^{4m+2} dev'essere eguale ad un multiplo di A aumentato di 1. Mentre invece qualunque potenza impari di a^{2m+1} dev'essere eguale ad un multiplo di A diminuito di 1. Sarà cioè

$$a^{\pi''_{2h}} = \lambda_1 A + 1, \quad a^{\pi'_{2h}} = \mu_1 A - 1, \quad a^{\pi''_{2h-1}} = \lambda_2 A + 1, \quad a^{\pi'_{2h-1}} = \mu_2 A - 1,$$

dove λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 designano numeri interi.

Laonde potremo scrivere

$$(6)\qquad a^{\pi'_{2h}}.a^{r''_1} = \lambda_1 A a^{r''_1} + a^{r''_1}, \qquad a^{\pi'_{2h}}.a^{r'_1} = \mu_1 A a^{r'_1} - a^{r'_1},$$

$$(7)\qquad - a^{\pi''_{2h-1}}.a^{r'_2} = - \lambda_2 A a^{r'_2} - a^{r'_2}, \quad - a^{\pi'_{2h-1}}.a^{r''_2} = - \mu_2 A a^{r''_2} + a^{r''_2}$$

Rammentiamo che r'_1, r'_2 rappresentano due numeri impari della serie (3), e che r''_1, r''_2 rappresentano due numeri pari di questa stessa serie; ricordiamo altresì che i $2m$ prodotti $2mr$, $(2m-1)r, \ldots, 2r$, r divisi per $(2m+1)$ dànno tutti resti differenti, e sarà facile il comprendere che come dai termini (4) si è addivenuti ai secondi membri delle eguaglianze (6) e (7), così con processo perfettamente identico si viene a scomporre ognuno dei primi $2m$ termini del polinomio (1') in due altri di cui uno sarà multiplo di A e l'altro sarà una potenza di a con esponente eguale ad uno dei numeri della serie (3). Tutte queste $2m$ potenze di a avranno esponenti differenti e quelle di esse che sono affette da esponenti pari, vanno prese positivamente, mentre le altre aventi esponenti impari vanno prese negativamente.

In tal modo coi primi $2m$ termini del polinomio (1') si ottiene la somma di due polinomi composti ciascuno di $2m$ termini, di cui i termini dell'uno sono tutti multipli di A ed i termini dell'altro sono gli stessi $2m$ primi termini del polinomio (2) scritti rispettivamente cogli stessi segni che hanno in tale polinomio. Aggiunto quindi alla somma di codesti due polinomi l'ultimo termine del polinomio (1'), avremo che il polinomio (1') si trasforma nella somma di due polinomi dei quali i $2m$ termini dell'uno sono tutti multipli di A, ed il valore dell'altro è appunto A. Dunque il polinomio (1') e per conseguenza ancora il suo equivalente espresso dal simbolo (1) è divisibile per il polinomio espresso dal simbolo (2), il che prova appunto quanto ci eravamo proposti di dimostrare.

4. È noto che se una funzione intera di grado m si annulla per $m+1$ valori della variabile, essa è identicamente nulla. Da ciò segue che se tre funzioni intere d'una stessa variabile, φ, ψ, θ, sono tali che, per ogni valore intero attribuito alla variabile, il valore corrispondente di φ sia eguale al prodotto dei valori corrispondenti di ψ e θ, sarà identicamente $\varphi = \psi\,\theta$. Perciò dai teoremi dimostrati risulteranno i seguenti:

I. *Se gli interi* n *ed* m + 1 *sono primi fra loro il polinomio*

$$x^{mn} + x^{(m-1)n} + x^{(m-2)n} + \dots + x^{2n} + x^{n} + 1$$

è divisibile pel polinomio

$$x^{m} + x^{m-1} + \dots + x^{2} + x + 1. \qquad ^{*)}$$

II. *Se gli interi* 2m *ed* n *sono primi fra loro, il polinomio*

$$x^{(2m-1)n} - x^{(2m-2)n} + x^{(2m-3)n} - \dots\dots + x^{3n} - x^{2n} + x^{n} - 1$$

è divisibile pel polinomio

$$x^{2m-1} - x^{2m-2} + x^{2m-3} - \dots + x^{3} - x^{2} + x + 1$$

III. *Se gli interi* 4m + 2 *ed* n *sono primi fra loro, il polinomio*

$$x^{2mn} - x^{(2m-1)n} + x^{(2m-2)n} - \dots - \dots - x^{3n} + x^{2n} - x^{n} + 1$$

è divisibile pel polinomio

$$x^{2m} - x^{2m-1} + x^{2m-2} - \dots - x^{3} + x^{2} - x + 1.$$

Prof. STEFANO GATTI.

(*) Questo teorema si trova fra gli esercizi proposti nell' Algebra del Bertrand al Cap. XII.

SUL TETRAEDRO A FACCE EGUALI

Fra i tetraedri particolari sono notevoli quelli che hanno gli spigoli opposti a due a due eguali, e quelli in cui gli spigoli opposti sono a due a due perpendicolari. Nei primi sono fra loro eguali le quattro facce, e quindi le quattro altezze, nei secondi le quattro altezze passano per uno stesso punto. La proprietà, da ultimo menzionata, è dimostrata nel trattato del *Baltzer*, insieme alla sua inversa; altre proprietà del tetraedro in cui le quattro altezze passano per uno stesso punto, sono esposte in una Memoria pubblicata nel 1838 dal Sig. *Michele Reiss*, (*) ed anche in un recente lavoro del Sig. *Gellenthin*. (**)

Nel presente scritto sono esposte alcune proprietà del tetraedro a facce eguali.

I.

1. S'indichino con S, A, B, C i quattro vertici d'un tetraedro, e pongasi:

$$SA = a,\ SB = b,\ SC = c,\quad BC = a_1,\ CA = b_1,\ AB = c_1,$$

$$\text{ang}\,BSC = \alpha,\quad \text{ang}\,CSA = \beta,\quad \text{ang}\,ASB = \gamma,$$

$$\text{area}\,ABC = S_0,\ \text{area}\,SBC = S_1,\ \text{area}\,SCA = S_2,\ \text{area}\,SAB = S_3,$$

$$\text{diedro}\,SA = A,\quad \text{diedro}\,SB = B,\quad \text{diedro}\,SC = C,$$

$$\text{diedro}\,BC = A_1,\ \text{diedro}\,CA = B_1,\ \text{diedro}\,AB = C_1,$$

$$\cos A = \lambda,\quad \cos B = \mu,\quad \cos C = \nu,$$

$$\cos A_1 = \lambda_1,\ \cos B_1 = \mu_1,\quad \cos C_1 = \nu_1.$$

(*) *Essai analytique et géometrique*, par Michel Reiss (*Correspondance Mathématique et physique* publiée par A. Quetelet, Bruxelles, 1838).

(**) H. Gellenthin. *Ueber einige Eigenschaften des Tetraeders* (*Archiv der Mathematik und Physik*, gegründet von I. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe, Leipzig 1885).

Si hanno, com'è noto, le equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} S_0 = S_1\lambda_1 + S_2\mu_1 + S_3\nu_1 \\ S_1 = S_0\lambda_1 + S_2\nu + S_3\mu \\ S_2 = S_0\mu_1 + S_1\nu + S_3\lambda \\ S_3 = S_0\nu_1 + S_1\mu + S_2\lambda \end{array}\right\} \quad (1)$$

le quali si dimostrano facilmente projettando ciascun vertice sul piano della faccia opposta, ed applicando il teoréma sul rapporto dell'area d'un triangolo a quella della sua projezione.

Moltiplicando queste quattro equazioni ordinatamente per S_0, S_1, S_2, S_3, poi dalla somma di due delle risultanti togliendo la somma delle altre due, si ottengono le:

$$\left.\begin{array}{l} S_0^2 + S_1^2 - 2S_0S_1\lambda_1 = S_2^2 + S_3^2 - 2S_2S_3\lambda \\ S_0^2 + S_2^2 - 2S_0S_2\mu_1 = S_1^2 + S_3^2 - 2S_1S_3\mu \\ S_0^2 + S_3^2 - 2S_0S_3\nu_1 = S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\nu \end{array}\right\} \quad (2)$$

che sono relazioni fra le aree delle quattro facce e i coseni di due diedri opposti.

2. È noto che la funzione:

$$M = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

è sempre positiva, e che, indicando con V il volume del tetraedro, si ha:

$$\begin{aligned} 36V^2 &= a^2b^2c^2 \operatorname{sen}^2\beta \operatorname{sen}^2\gamma \operatorname{sen}^2 A \\ &= a^2b^2c^2M, \end{aligned}$$

ed anche

$$\begin{aligned} 144V^2 = 4Ma^2b^2c^2 = {} & a^2a_1^2(b^2+b_1^2+c^2+c_1^2-a^2-a_1^2)+b^2b_1^2(a^2+a_1^2+c^2+c_1^2-b^2-b_1^2)+ \\ & +c^2c_1^2(a^2+a_1^2+b^2+b_1^2-c^2-c_1^2)-(a^2c^2b_1^2+b^2a^2c_1^2+c^2b^2a_1^2+a_1^2b_1^2c_1^2) \quad (*) \end{aligned}$$

Rammento inoltre che, indicando con R il raggio della sfera circoscritta al tetraedro, si ha:

$$576V^2R^2 = (aa_1+bb_1+cc_1)(bb_1+cc_1-aa_1)(cc_1+aa_1-bb_1)(aa_1+bb_1-cc_1).$$

(*) Eguagliando a zero quest'espressione si ottiene la nota relazione fra le distanze di quattro punti d'un piano.

II.

3. **Se un tetraedro ha gli spigoli opposti a due a due eguali, le quattro facce sono eguali; e reciprocamente.**

L'eguaglianza dei quattro triangoli SAB, SBC, SCA, ABC è un'immediata conseguenza dell'ipotesi: $a=a_1$, $b=b_1$ $c=c_1$.

Dall'eguaglianza dei triangoli SAB, ABC risulta: $a=a_1$, $b=b_1$; oppure: $a=b_1$, $b=a_1$. Nel secondo caso i triangoli SAC, SBC sarebbero isosceli, e dalla loro eguaglianza risulterebbe ancora: $a=a_1$, $b=b_1$. Perciò l'eguaglianza delle quattro facce implica quella degli spigoli opposti.

4. **Se i diedri opposti di un tetraedro sono a due a due eguali, le quattro facce sono eguali; e reciprocamente.**

Poichè i diedri SA, AC sono rispettivamente eguali ai diedri BC, SB, e il diedro AB è comune ai due triedri di vertici A e B, gli angoli SAB, SBA saranno rispettivamente eguali agli angoli ABC, CAB; e in conseguenza saranno eguali i due triangoli SAB, ABC. Similmente si dimostrerà l'eguaglianza degli altri triangoli.

Suppongasi ora che sieno fra loro eguali le quattro facce, e quindi (3) gli spigoli opposti. Dai triedri di vertici A e B si ricaverà l'eguaglianza dei diedri SA, BC, e dei diedri AC, SB; e similmente dai triedri di vertici B e C si ricaverà l'eguaglianza dei diedri AB, SC.

5. **Se un tetraedro ha le facce eguali, queste devono essere triangoli acutangoli; e reciprocamente, dato un triangolo acutangolo, si può sempre costruire un tetraedro colle quattro facce ad esso eguali.**

Se le quattro facce sono eguali, i tre angoli del triangolo ABC sono rispettivamente eguali ai tre angoli del triedro S, epperciò ciascuno di essi è minore della somma degli altri due.

Ora sia dato un triangolo acutangolo ABC. Poichè la somma di due dei tre angoli BAC, CBA, ACB è maggiore del terzo, e la somma di tutti e tre è minore di 360°, si potrà costruire un triedro S (A′ B′ C′) coi tre angoli B′SC′, C′SA′, A′SB′ rispettivamente eguali agli angoli BAC, CBA, ACB; poi, presi sugli spigoli i segmenti SA′ = BC, SB′ = CA, SC′ = AB, è chiaro che risulterà B′C′ = BC, C′A′ = CA, A′B′ = AB, e che in conseguenza il tetraedro SA′B′C′ avrà le quattro facce eguali al triangolo ABC.

6. **Se le quattro facce d'un tetraedro sono equivalenti esse devono essere eguali.**

Dalle equazioni:

$$S_0^2 + S_1^2 - 2S_0S_1\lambda_1 = S_2^2 + S_3^2 - 2S_2S_3\lambda$$
$$S_0^2 + S_2^2 - 2S_0S_2\mu_1 = S_1^2 + S_3^2 - 2S_1S_3\mu$$
$$S_0^2 + S_3^2 - 2S_0S_3\nu_1 = S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\nu$$

dimostrate al N. 1, posto:

$$S_0 = S_1 = S_2 = S_3,$$

si ricava:

$$\lambda_1 = \lambda,\ \mu_1 = \mu,\ \nu_1 = \nu,$$

le quali provano l'eguaglianza dei diedri opposti, e quindi (4) il teorema enunciato.

7. **Nel tetraedro a facce eguali la somma dei coseni dei diedri adiacenti ad una stessa faccia, è, per ciascuna faccia, eguale all'unità.**

Questa proposizione risulta immediatamente dalle equazioni (1) del N. 1, quando vi si ponga:

$$S_0 = S_1 = S_2 = S_3.$$

8. **Se la somma dei coseni dei diedri adiacenti ad una stessa faccia d'un tetraedro è, per tre facce di esso, eguale all'unità, il tetraedro ha le quattro facce eguali.**

Infatti dalle:

$$\lambda_1 + \mu + \nu = 1 ,$$
$$\mu_1 + \nu + \lambda = 1 ,$$
$$\nu_1 + \lambda + \mu = 1 ,$$

che si suppongono verificate, e dalle:

$$S_1 = S_0\lambda_1 + S_2\nu + S_3\mu ,$$
$$S_2 = S_0\mu_1 + S_1\nu + S_3\lambda ,$$
$$S_3 = S_0\nu_1 + S_1\mu + S_2\lambda ,$$

si ricava:

$$-(S_1 - S_0) + (S_2 - S_0)\nu + (S_3 - S_0)\mu = 0 ,$$
$$(S_1 - S_0)\nu - (S_2 - S_0) + (S_3 - S_0)\lambda = 0 ,$$
$$(S_1 - S_0)\mu + (S_2 - S_0)\lambda - (S_3 - S_0) = 0 ,$$

le quali equazioni richiedono che sia

$$S_0 = S_1 = S_2 = S_3 ,$$

poichè il determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & \nu & \mu \\ \nu & -1 & \lambda \\ \mu & \lambda & -1 \end{vmatrix} = -1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 2\lambda\mu\nu$$

è diverso da zero. (*)

(*) Infatti nel triedro S(ABC) si ha:

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \left(\frac{\cos A + \cos B \cos C}{\text{sen} B \ \text{sen} C}\right)^2$$
$$= \frac{1 - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 2\lambda\mu\nu)}{\text{sen}^2 B \ \text{sen}^2 C}$$

9. **Se la somma degli angoli piani d'un triedro è eguale a 180°, la somma dei coseni dei diedri è eguale all'unità; e reciprocamente.**

Indicati con α, β, γ i tre angoli piani, e con A, B, C i diedri rispettivamente opposti, si ha:

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma(\cos A+\cos B+\cos C-1)=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\beta\cos\beta+\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma-\cos\beta\cos\gamma\operatorname{sen}\alpha$$
$$-\cos\gamma\cos\alpha\operatorname{sen}\beta-\cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma,$$

ossia

$$2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma(\cos A+\cos B+\cos C-1)=\operatorname{sen}(2\alpha)+\operatorname{sen}(2\beta)+\operatorname{sen}(2\gamma)-$$
$$-2\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)-4\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma$$

e questa, con facili trasformazioni, diviene:

$$2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma(\cos A+\cos B+\cos C-1)$$
$$=2\{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}\gamma\}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma\}$$
$$=8\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right).$$

Dall'eguaglianza ora dimostrata risulta che nell'ipotesi:

$$\alpha+\beta+\gamma=180°,$$

dev'essere:

$$\cos A+\cos B+\cos C=1.$$

E dalla stessa eguaglianza risulta pure che, se la somma dei coseni dei diedri è eguale all'unità, si deve annullare il coseno che sta al secondo membro, e in conseguenza la somma dei tre angoli piani dev'essere eguale a 180.°

10. **Se la somma dei tre angoli piani è eguale a 180° in tre triedri d'un tetraedro, questo ha le quattro facce fra loro eguali.**

Se la somma degli angoli piani è eguale a 180° in ciascuno dei triedri A, B, C, si ha, pel teorema precedente:

$$\lambda+\mu_1+\nu_1=1\,,\quad \mu+\lambda_1+\nu_1=1\,,\quad \nu+\lambda_1+\mu_1=1\,,$$

nediante le quali si possono eliminare λ, μ, ν dalle:

$$S_1 = S_0\lambda_1 + S_2\nu + S_3\mu\ ,$$
$$S_2 = S_0\mu_1 + S_1\nu + S_3\lambda\ ,$$
$$S_3 = S_0\nu_1 + S_1\mu + S_2\lambda.$$

ffettuata quest'eliminazione, e avuto riguardo alla:

$$S_0 = S_1\lambda_1 + S_2\mu_1 + S_3\nu_1\ ,$$

 ottengono le:

$$(S_0 + S_2 - S_1 - S_3)\lambda_1 = S_0 + S_1 - S_2 - S_3\ ,$$
$$(S_0 + S_2 - S_3 - S_1)\mu_1 = S_0 + S_2 - S_3 - S_1\ ,$$
$$(S_0 + S_3 - S_1 - S_2)\nu_1 = S_0 + S_3 - S_1 - S_2\ ,$$

ılle quali risulta:

$$+ S_1 - S_2 - S_3 = 0,\ \ S_0 + S_2 - S_3 - S_1 = 0,\ \ S_0 + S_3 - S_1 - S_2 = 0,$$

ssia:

$$S_0 = S_1 = S_2 = S_3\ ,$$

 quali provano (6) il teorema enunciato.

I. Se i raggi dei circoli circoscritti alle quattro facce d'un tetraedro sono fra loro eguali, le facce stesse devono essere fra loro eguali.

Indicati con α_1, β_1, γ_1, gli angoli BAC, CBA, ACB del iangolo ABC, si avrà, per l'ipotesi fatta,

$$\text{sen}\alpha = \text{sen}\alpha_1\ ,\quad \text{sen}\beta = \text{sen}\beta_1\ ,\quad \text{sen}\gamma = \text{sen}\gamma_1\ ,$$

quindi:

$$\cos\alpha = h\cos\alpha_1\ ,\quad \cos\beta = k\cos\beta_1\ ,\quad \cos\gamma = l\cos\gamma_1\ ,$$

ıendo h, k, l eguali ad 1 od a -1.

Perciò sarà:

$$M = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$= 1 - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\beta_1 - \cos^2\gamma_1 + 2hkl\cos\alpha_1\cos\beta_1\cos\gamma_1\ ,$$

ossia:

$$M = 2(1 + hkl)\cos\alpha_1 \cos\beta_1 \cos\gamma_1 ,$$

dalla quale risulta che il prodotto hkl non può essere eguale a -1, e che, in conseguenza, la quantità positiva M è eguale al quadruplo prodotto dei coseni dei tre angoli del triangolo ABC; epperciò è chiaro che questi tre angoli devono essere acuti.

Similmente si dimostrerà che ciascuno degli altri tre triangoli è acutangolo, e che, in conseguenza, la somma dei tre angoli piani, in ciascuno dei quattro triedri, è eguale alla somma dei tre angoli della faccia opposta; e, in forza del teorema precedente, si conchiuderà quello che ora si trattava di dimostrare.

12. **Nel tetraedro a facce eguali il centro di gravità, il centro della sfera circoscritta e il centro della sfera inscritta coincidono in uno stesso punto.**

Indicati con A', B', C', S' i centri di gravità delle facce rispettivamente opposte ai vertici A, B, C, S, si ha:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{SS'}^2 &= \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \tfrac{1}{9}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\\
\overline{AA'}^2 &= \tfrac{1}{3}(a^2 + b_1^2 + c_1^2) - \tfrac{1}{9}(a_1^2 + b^2 + c^2)\\
\overline{BB'}^2 &= \tfrac{1}{3}(a_1^2 + b^2 + c_1^2) - \tfrac{1}{9}(a^2 + b_1^2 + c^2)\\
\overline{CC'}^2 &= \tfrac{1}{3}(a_1^2 + b_1^2 + c^2) - \tfrac{1}{9}(a^2 + b^2 + c_1^2)
\end{aligned}\right\}(\alpha)$$

dalle quali risulta che, se gli spigoli opposti sono a due a due eguali, devono essere fra loro eguali i segmenti che uniscono ciascun vertice al centro di gravità della faccia opposta, e che, in conseguenza, il centro di gravità del tetraedro è equidistante dai quattro vertici. Inoltre la distanza del centro di gravità da una faccia è un quarto dell'altezza corrispondente a quella faccia, epperciò, essendo eguali le quattro altezze, il centro di gravità sarà equidistante dalle quattro facce.

13. **Se in un tetraedro coincidono due dei tre punti: il centro di gravità, il centro della sfera circoscritta e il centro della sfera inscritta, quel tetraedro ha le facce eguali.**

1) Se il centro di gravità coincide col centro della sfera circoscritta, devono essere fra loro eguali i segmenti che uniscono ciascun vertice al centro di gravità della faccia opposta, epperciò, dalle formole (α) del N.º precedente, risulta:

$$b_1^2 - b^2 = c^2 - c_1^2 ,$$
$$c_1^2 - c^2 = a^2 - a_1^2 ,$$
$$a_1^2 - a^2 = b^2 - b_1^2 ,$$

e in conseguenza:

$$a = a_1 , \quad b = b_1 , \quad c = c_1 .$$

2) Se il centro di gravità coincide col centro della sfera inscritta, devono essere fra loro eguali le quattro altezze; epperciò equivalenti, e quindi eguali (6), le quattro facce.

3) Se il centro della sfera inscritta coincide col centro della sfera circoscritta, devono essere fra loro eguali i raggi dei circoli circoscritti alle quattro facce, epperciò (11) le facce stesse.

14. **Espressioni del volume del tetraedro a facce eguali e del raggio della sfera circoscritta.**

L' espressione del volume del tetraedro in funzione degli spigoli, rammentata al N. 1, diviene, quando gli spigoli opposti sono eguali,

$$144V^2 = 2a^4 (b^2+c^2-a^2) + 2b^4 (c^2+a^2-b^2) + 2c^4 (a^2+b^2-c^2) - 4a^2b^2c^2.$$

od anche:

$$72V^2 = (b^2 + c^2 - a^2)\ (c^2 + a^2 - b^2)\ (a^2 + b^2 - c^2).$$

Dalla formola pel raggio della sfera circoscritta, citata nello stesso numero si ha:

$$576V^2R^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$$

e questa, in forza della precedente, diviene:

$$8R^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

la quale si può ricavare eziandio dalle formole (α) del N. 12.

15. Se in un tetraedro la somma dei quadrati di due spigoli opposti è eguale alla somma dei quadrati di altri due spigoli opposti, il quinto ed il sesto spigolo sono fra loro perpendicolari; e reciprocamente, se due spigoli opposti sono fra loro perpendicolari, la somma dei quadrati di altri due spigoli opposti è eguale alla somma dei quadrati della terza coppia di spigoli opposti. (*)

Guidata dal vertice S la SL parallela alla BC e dalla banda opposta di questa rispetto allo spigolo SC, e indicato con (aa_1) l'angolo LSA, si ha, dal triedro S (ACL):

$$\cos(aa_1) = \cos\beta \cos(\mathrm{LSC}) - \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}(\mathrm{LSC}) \cos \mathrm{C}$$

$$= \cos\beta \cos(\mathrm{SCB}) - \operatorname{sen}(\mathrm{SCB}) \frac{\cos\gamma - \cos\alpha \cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha},$$

ma dal triangolo SCA risulta:

$$\cos(\mathrm{SCB}) = \frac{c - b \cos\alpha}{a_1}, \qquad \operatorname{sen}(\mathrm{SCB}) = \frac{b}{a_1} \operatorname{sen}\alpha,$$

epperciò sarà:

$$\cos(aa_1) = \frac{c \cos\beta - b \cos\gamma}{a_1},$$

ossia:

$$\cos(aa_1) = \frac{c^2 + c_1^2 - (b^2 + b_1^2)}{2aa_1},$$

dalla quale si ricavano subito i teoremi enunciati.

(*) Questo teorema si trova, altrimenti dimostrato, nella citata Memoria del Reiss.

16. **Nel tetraedro a facce eguali ciascuno dei segmenti che uniscono i punti di mezzo di due spigoli opposti è perpendicolare a questi due spigoli.**

Infatti, indicati con L, M, N, L_1, M_1, N_1 i punti di mezzo degli spigoli SA, SB, SC, B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, i segmenti SL_1, AL_1 saranno fra loro eguali, per l'eguaglianza dei triangoli SBC, ABC, epperciò la LL_1 sarà perpendicolare alla SA; e così dall'eguaglianza dei triangoli SAB, SAC, e quindi delle LB, LC, risulta che la LL_1 è perpendicolare alla BC. Nell'istesso modo si proverà che la MM_1 è perpendicolare agli spigoli opposti SB, AC, e che la NN_1 è perpendicolare agli spigoli opposti SC, AB.

17. **Se due delle congiungenti i punti medi delle coppie di spigoli opposti d'un tetraedro sono rispettivamente perpendicolari a quelle due coppie, il tetraedro ha le facce eguali.**

Nell'ipotesi che la LL_1 sia perpendicolare agli spigoli SA, BC, e che la MM_1 sia perpendicolare agli spigoli SB, AC, si hanno le eguaglianze:

$$L_1A = L_1S\,, \quad LB = LC, \quad M_1B = M_1S\,, \quad MC = MA\,,$$

ossia le:

$$b^2 + c^2 = b_1^2 + c_1^2\,, \qquad a^2 + c^2 = a_1^2 + c_1^2$$

$$b^2 + c_1^2 = b_1^2 + c^2\,, \qquad a^2 + c_1^2 = a_1^2 + c^2,$$

dalle quali si ricava:

$$a = a_1\,, \quad b = b_1\,, \quad c = c_1$$

18. **Se le altezze d'un tetraedro a facce eguali passano per uno stesso punto, quel tetraedro è regolare.**

Infatti se le altezze d'un tetraedro passano per uno stesso punto, gli spigoli opposti sono fra loro perpendicolari, e in conseguenza (15), hanno luogo le eguaglianze:

$$a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2,$$

le quali, nell'ipotesi fatta, devono sussistere insieme alle:

$$a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1;$$

epperciò sarà:

$$a = b = c = a_1 = b_1 = c_1.$$

19. **Se le altezze d'un tetraedro passano pel centro di gravità, o pel centro della sfera circoscritta, quel tetraedro è regolare.**

Nella citata Memoria del Sig. Michele Reiss è dimostrato che, se le altezze d'un tetraedro passano per uno stesso punto, questo punto, e il centro della sfera circoscritta, sono gli estremi d'un segmento il cui punto di mezzo è il centro di gravità del tetraedro. Perciò, nell'una e nell'altra ipotesi, il centro di gravità coincide col centro della sfera circoscritta, e dai teoremi dei N. 13, 18, si conchiude che il tetraedro dev'essere regolare.

20. **Se le altezze d'un tetraedro passano pel centro della sfera inscritta, quel tetraedro è regolare.**

Indicati con A', B', C', S' i piedi delle perpendicolari condotte dai vertici A, B, C, S sulle facce rispettivamente opposte, e con O il centro della sfera inscritta, si avrà, per ipotesi:

$$OA' = OB' = OC' = OS'.$$

Perciò, se con H s'indica il punto in cui il piano delle AA', SS' incontra le spigolo BC, le altezze AA', SS' del triangolo SAH, s'incontrano in un punto O equidistante dai lati SH, AH, e in conseguenza saranno eguali questi due lati SH, AH, i quali sono le altezze dei triangoli SBC, ABC, corrispondenti al loro lato comune BC. Di qui risulta l'equivalenza dei due triangoli SBC, ABC; e così si proverà che le quattro facce del tetraedro sono equivalenti, e dai teoremi dei N. 6 e 18 si conchiuderà che il tetraedro è regolare.

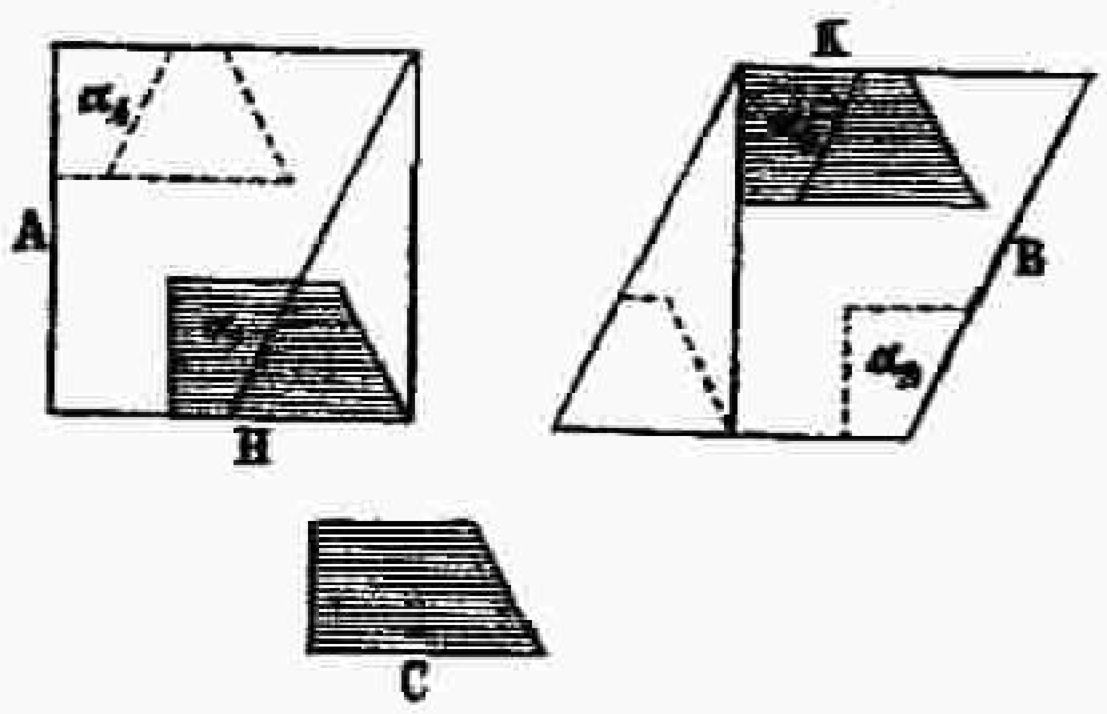
D. Besso.

DIMOSTRAZIONE DI UNA PROPOSIZIONE FONDAMENTALE DELLA TEORIA DELL'EQUIVALENZA

Ponendo a fondamento della teoria dell'equivalenza la definizione: Due poligoni o due poliedri si dicono equivalenti, se si possono dividere in egual numero di parti rispettivamente uguali, è sembrato che non si potesse poi fare a meno di assumere come postulato la proposizione seguente: Non può una parte di un poligono o d'un poliedro essere equivalente all'intero. Ecco qui una dimostrazione di codesta proposizione.

1º Sottraendo da due poligoni equivalenti due loro parti che siano eguali ad un terzo poligono, si ottengono resti equivalenti.

Chiamiamo A e B due poligoni equivalenti, ed H e K due loro parti che siano eguali fra loro.



Si dividano i due poligoni in parti rispettivamente uguali, come è possibile, dacchè sono equivalenti.

Quindi in ciascuno dei poligoni A e B si suddividano le dette parti nel modo stesso che esse sono suddivise rispettivamente nei poligoni B ed A dai contorni di K ed H.

E se i poligoni H e K sono divisi dalle primitive linee di divisione o dalle nuove che si sono tirate, si facciano in ciascuno di essi le divisioni che si scorgono nell'altro.

Dopo ciò i due poligoni A e B sono divisi in parti rispettivamente uguali, e così che per riconoscere queste parti non è mestieri far astrazione da nessuna delle linee di divisione.

Ed ora consideriamo una parte α_1 di H. A questa troviamo corrispondere nel poligono B una parte α_2 od una α_3, secondo che vogliamo riguardare α_1 come parte di A, oppure di H.

Similmente alla parte α_3 di K corrisponde nel poligono A la parte α_1 od una α_4, secondo che si vuol riguardare α_3, come parte di K, oppure di B.

Così, essendo tutte e quattro uguali tra loro le parti α_1, α_2, α_3, α_4, nel far corrispondere le parti di A a quelle di B, possiamo stabilire che ad α_1 corrisponda α_3, e ad α_4 corrisponda α_2.

Similmente ad ogni altra di quelle parti di A, che compongono H, si può far corrispondere una di quelle parti di B, che compongono K; e reciprocamente.

In conclusione i due poligoni A e B sono composti di parti rispettivamente uguali, e sopprimendo H e K, si sopprimono di queste parti rispettivamente uguali. Per conseguenza anche i resti sono tuttavia formati di parti rispettimente uguali.

2º Se due poligoni equivalenti hanno una parte comune, sopprimendo questa parte si ottengono resti equivalenti.

Infatti, sopprimendo la parte comune non si fa che togliere da due poligoni equivalenti due loro parti eguali.

3º Una parte di un poligono non può essere equivalente all'intero.

Infatti, detta A una parte qualunque di un poligono C e B il rimanente del poligono stesso, se A e C fossero equivalenti, tali sarebbero anche il poligono B ed il nulla, che sono i resti che si ottengono sottraendo dai poligoni C ed A il poligono A. E che un poligono sia equivalente al nulla è assurdo.

Ora si può dimostrare facilmente che: **Sottraendo da poligoni equivalenti poligoni equivalenti, si ottengono resti equivalenti**; e così le proposizioni sull'equivalenza dei poligoni e dei poliedri si possono tuttavia dimostrare con la stessa semplicità che si ammira negli *Elementi d'Euclide*.

A. FAIFOFER.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

ARITMETICA

Sulla trasformazione delle frazioni

1. Quanti quarti, quanti sesti, quanti ottavi, quanti decimi, quanti diciottesimi sono contenuti in $\frac{1}{2}$?
2. Trovare cinque frazioni eguali ad $\frac{1}{2}$ le quali abbiano per denominatori i numeri 6, 14, 38, 100, 274.
3. Si può trovare una frazione eguale ad $\frac{1}{2}$ il cui denominatore sia 49?
4. Quanti sesti, quanti noni, quanti dodicesimi, quanti quindicesimi, quanti ventiquattresimi sono contenuti in $\frac{1}{3}$?
5. Trovare cinque frazioni eguali ad $\frac{1}{3}$ le quali abbiano per denominatori i numeri 9, 15, 24, 87, 213.
6. Esiste una frazione eguale ad $\frac{1}{3}$, col denominatore 56?
7. Quanti quattordicesimi, quanti ventunesimi, quanti trentacinquesimi, quanti quarantanovesimi sono contenuti in $\frac{1}{7}$?
8. Trovare cinque frazioni eguali ad $\frac{1}{7}$ coi denominatori 28, 77, 105, 658, 1036.
9. Si può trovare una frazione eguale ad $\frac{1}{7}$, col denominatore 562?

10. Trovare tre frazioni eguali ad $\frac{1}{13}$ i cui denominatori sieno 65, 143, 1144.

11. Trovare una frazione eguale a $\frac{7}{13}$, ed un'altra eguale ad $\frac{8}{13}$, le quali abbiano il denominatore 65.

12. Trovare: 1) due frazioni eguali a $\frac{1}{35}$ coi denominatori 105, 245, 2) due frazioni eguali a $\frac{27}{35}$ che abbiano gli stessi denominatori 105, 245.

13. Trovare tre frazioni eguali a $\frac{1}{29}$ coi numeratori 3, 7, 15.

14. Trovare tre frazioni eguali a $\frac{12}{29}$ i cui numeratori sieno 24, 60, 144, 576.

15. Esiste una frazione eguale a $\frac{12}{29}$ la quale abbia per numeratore 2250?

16. Trovare una frazione eguale a $\frac{24}{243}$ col numeratore minore di 24.

17. Trovare una frazione eguale a $\frac{84}{208}$ coi termini più piccoli.

18. Si può trovare una frazione eguale a $\frac{81}{256}$ col numeratore minore di 81?

19. Come devono essere i denominatori delle frazioni eguali a $\frac{8}{15}$? E quanti sono quelli minori di 1000?

20. Quante sono le frazioni eguali a $\frac{9}{37}$ che hanno i denominatori compresi fra 1000 e 2000?

21. Quante sono le frazioni eguali a $\frac{17}{60}$? Ve n'ha una col denominatore eguale ad uno dei numeri 10, 100, 1000,... ?

22. Si può trovare una frazione eguale a $\frac{24}{875}$ la quale abbia per denominatore uno dei numeri 10, 100, 1000, ... ?

23. Esiste una frazione eguale a $\frac{56}{448}$ il cui denominatore sia uno dei numeri 10, 100, 1000, ... ?

24. Una frazione il cui numeratore è 37, e il cui denominatore è maggiore di 100 e minore di 200, è eguale ad un'altra frazione che ha il denominatore 1000: trovare il denominatore della prima frazione.

25. Quante sono le frazioni col numeratore 168, e col denominatore maggiore di 300 e minore di 400, eguali ad altre frazioni col denominatore 1000?

26. A quanti ottavi equivale la somma di $\frac{3}{4}$ e $\frac{7}{8}$?

27. A quanti sessantesimi equivale la somma di $\frac{5}{12}$, $\frac{9}{10}$ e $\frac{7}{60}$?
28. Qual'è la più grande delle due frazioni $\frac{19}{20}$ e $\frac{73}{140}$?
29. Trovare due frazioni collo stesso denominatore, ed eguali rispettivamente a $\frac{7}{18}$ e $\frac{5}{11}$.
30. Qual'è la più grande delle due frazioni $\frac{7}{24}$, $\frac{7}{25}$?
31. Qual'è la più grande delle due frazioni $\frac{7}{24}$, $\frac{8}{25}$?
32. Qual'è la maggiore, e quale la minore delle tre frazioni $\frac{10}{81}$, $\frac{12}{88}$, $\frac{14}{85}$?
33. Qual'è la maggiore, e quale la minore delle tre frazioni $\frac{71}{20}$, $\frac{76}{25}$, $\frac{81}{80}$?
34. Trovare due frazioni col denominatore 100, l'una minore e l'altra maggiore di $\frac{1}{3}$.
35. Trovare due frazioni col denominatore 1000, l'una minore e l'altra maggiore di $\frac{28}{75}$.

TRIGONOMETRIA

Sui primi teoremi relativi al seno ed al coseno d'un angolo acuto.

1. Dimostrare che, se un triangolo rettangolo ha un angolo di 30°, il cateto ad esso opposto è la metà dell'ipotenusa.
2. Dimostrare che, se un triangolo rettangolo ha un angolo minore di 30°, il rapporto del cateto ad esso opposto all'ipotenusa è minore di $\frac{1}{2}$.
3. Sia BAC un angolo di 45°, e da un punto B del suo lato AB si conduca sull'altro lato la perpendicolare BC; dimostrare che, se la AB è divisa in 1000 parti eguali, la BC è maggiore del segmento che contiene 707 di quelle parti e minore del segmento che ne contiene 708.
4. Costruire un angolo il cui seno sia eguale a $\frac{7}{10}$. Quell'angolo sarà maggiore o minore di 45°?
5. Dimostrare che il seno di 60° è compreso fra 0,866 e 0,8661.
6. Il seno d'un angolo è $\frac{56}{65}$; calcolare il suo coseno, e provare che quell'angolo è compreso fra 45° e 60°.

7. Calcolare a meno di $\frac{1}{1000}$ il seno ed il coseno d'un angolo, sapendo che il seno è doppio del coseno.
8. Dimostrare che, se l'angolo α è minore di 45°, esiste un angolo il cui seno è eguale al quoziente $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.
9. Se il seno d'un angolo è doppio del seno di un altro angolo, fra quali limiti dev'essere compreso il secondo angolo?
10. Se il coseno d'un angolo è la metà del coseno d'un altro angolo, fra quali limiti dev'essere compreso il primo angolo?
11. Come devono essere due angoli se la somma dei loro seni è eguale a 2?
12. Come devono essere due angoli se il prodotto del seno dell'uno pel coseno dell'altro è eguale all'unità?
13. Dimostrare che il seno di 70° è minore del doppio del seno di 35°.
14. Dimostrare che il seno di 60° è minore del triplo del seno di 20°.
15. Dimostrare che il seno di 15° è maggiore di $\frac{1}{4}$.
16. Dimostrare che, se l'angolo al vertice d'un triangolo isoscele è un quarto d'un angolo alla base, il rapporto della base ad uno dei lati eguali è maggiore di $\frac{1}{3}$.
17. Trovare due numeri i quali differiscano di 0,0001, l'uno minore e l'altro maggiore del seno di 15°.
18. Dimostrare che, se uno degli angoli acuti d'un triangolo rettangolo è un quarto dell'altro, il rapporto del cateto opposto al primo angolo al cateto opposto al secondo è maggiore di $\frac{8}{25}$.
19. Dimostrare che, se uno degli angoli acuti d'un triangolo rettangolo è un quinto dell'altro, il rapporto del cateto opposto al primo angolo al cateto opposto al secondo è maggiore di $\frac{13}{50}$.
20. Il seno d'un angolo acuto d'un triangolo rettangolo è compreso fra $\frac{159}{1000}$ e $\frac{161}{1000}$: trovare due limitazioni del rap-

porto del cateto opposto a quell' angolo al cateto adiacente.

21. Dimostrare che l'angolo, menzionato nell'esercizio precedente, è compreso tra 9° e 10°.
22. Nel triangolo BAC rettangolo in A, il rapporto del cateto AC al cateto AB è compreso fra $\frac{7}{10}$ e $\frac{701}{1000}$; provare che l'angolo B è maggiore di 30° e minore di 36°.
23. Nell' ipotesi che la somma del seno e del coseno d'un angolo, minore di 45°, sia eguale a $\frac{5}{4}$, si dimostri che quell'angolo dev'essere compreso fra 15° e 18°.
24. Esiste un angolo tale che la somma del suo seno e del suo coseno sia eguale a $\frac{3}{2}$?
25. Qual'è il massimo valore della somma del seno e del coseno d'uno stesso angolo?
26. Trovare i valori di due angoli, non maggiori di 60°, nell'ipotesi che la somma dei quadrati dei loro coseni, aumentata di 1, sia eguale al doppio prodotto dei loro seni.
27. Trovare i valori di due angoli nell' ipotesi che uno di essi non sia maggiore di 18°, che l' altro non sia maggiore di 54°, e che il prodotto dei loro seni sia eguale ad $\frac{1}{4}$.
28. Dimostrare che il prodotto dei coseni dei due angoli acuti d'un triangolo rettangolo, è eguale al prodotto dei loro seni.
29. Dimostrare che il prodotto dei coseni di due angoli è maggiore o minore del prodotto dei loro seni, secondo che la somma dei due angoli è minore o maggiore di 90°.
30. Se la somma degli angoli a e b è minore di 90°, e se hanno luogo le diseguaglianze:

$$\frac{3}{8} < \operatorname{sen} a \cos b < \frac{3}{7},$$

cosa si può asserire sui prodotti:

$$\operatorname{sen}(a+b) \cos b\,, \quad \operatorname{sen} a \cos(a+b)\ ?$$

D. Besso.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Elementi di Geometria per Riccardo de Paolis, Prof. di Geometria Superiore nella R. Università di Pisa. Torino, Ermanno Loescher 1884.

Di questo libro, come di tutte le migliori opere dell'ingegno, si parlerà da molti, per molto tempo e in varie guise. Ciò sarà grandemente utile alla scienza e ai suoi seguaci e lieto auspicio di novello incremento del culto delle Matematiche elementari nel nostro paese. Chiunque, leggendo con intelletto di giustizia l'opera del Prof. de Paolis, si soffermi di quando in quando a riflettere all'ordine nel quale l'A. volle si succedessero e connettessero i vari argomenti, e ad indagarne i motivi, deve riconoscere che molte e potenti ragioni di metodo precedentemente ponderate, determinarono l'A. parte inconsapevole, parte incurante delle difcoltà che egli si apparecchiava, a seguire una via, mercè quelle nettamente e saggiamente delineata. Prova ne sia tra l'altre l'abolizione dell'antica distinzione fra Planimetria e Stereometria, evidentemente suggerita da ciò, che a niuno può sembrare tanto bello quanto è commodo che le varietà di fenomeni analoghi che n'offre lo spazio, per ragion d'antico uso o di creduta opportunità didattica, vengano disseminate in varî punti di un trattato, sia pur esso elementare. Ora, se fare un buon libro di Geometria elementare è cosa giustamente reputata delle più difficili, quand'anche si voglia attenersi a quel disegno che, consacrato dall'uso comune e dalla pratica dei migliori Autori, sembra divenuto pressochè inviolabile ed universale, ardua certo e pari al suo ingegno fu la prova alla quale un programma affatto nuovo e sparso di difficoltà cimentava l'Autore di questi nuovi Elementi. Essi andranno meritamente annoverati fra i più degni lavori in fatto di Matematica elementare.

Non dispiacciano adunque all'A. alcune osservazioni le quali mirano a mettere in chiaro taluno dei molti e considerevoli pregi della sua opera, tal'altro dei pochi e lievi difetti.

1. Nella prefazione l'A. parla quasi esclusivamente dell'opportunità di uno studio simultaneo di figure analoghe nel

piano e nello spazio allo scopo di non cadere in ripetizioni inutili.

Io sono del suo avviso, soltanto desidererei che, in una nuova edizione del libro, si commettessero alla cura dell'insegnante quelle ripetizioni che la buona scelta del metodo permetterebbe di evitare e che l'A. sovente non evita, o per rispetto all'uso comune, o per ribadire nel lettore l'abitudine a ragionamenti e deduzioni della medesima specie.

Lo studio simultaneo degli enti ad una, due o tre dimensioni è poi consigliato secondo l'A. da un'altra ragione di gran valore. Come le costruzioni eseguite nel piano sono mezzi efficacissimi e talvolta gli unici mezzi a problemi relativi ad enti di una sola dimensione, così, le costruzioni fatte nello spazio possono riuscire utilissime, se pure non necessarie, in problemi relativi ad enti minori dello spazio medesimo, e molte recenti memorie valgono a dimostrarlo. E nel campo degli elementi, credo arrivi a proposito la seguente osserva zione: Nell'ordinaria Planimetria può talvolta riuscir difficile, massime quando si sia astretti a sole considerazioni di *posizione*, verificare che certe tre rette concorrono in un medesimo punto. Uscendo dal piano, tenteremo di dimostrare che esse sono proiezioni sul piano medesimo delle intersezioni di certi tre piani. A questa osservazione fa capo gran parte dei mezzi di costruzione e di dimostrazione che alla Planimetria dona la Stereometria, e l'ingegnosa costruzione del triangolo isoscele con ciascuno degli angoli alla base doppio del rimanente, ottenuta dall'A. indipendentemente dalla teorica delle proporzioni o dell'equivalenza e mediante il solo uso d'un noto teorema su triangoli omotetici che, mentre è evidente nello spazio, non lo è egualmente nel piano, ma lo diviene quivi con considerazioni stereometriche.

Ma la previsione dell'A. il quale afferma che ai principianti non è più facile concepire un'angolo che un diedro, un triangolo che un triedro, ha per lo meno bisogno d'una conferma che soltanto dalla esperienza possiamo aspettare. E, pur concedendo la non maggiore difficoltà, dovremmo ancora consultar l'esperienza per decidere se, la permanenza in quell'astrazione alla quale la nostra mente è astretta nello studio di figure stereometriche che ai sensi appariscono, non già quali esse sono, ma rappresentate su d'un piano, quello del foglio o della lavagna, costituisca, per la testolina d'un allievo, una difficoltà che possa andar confusa fra le tante d'ordine rudimentale (novità della materia, del linguaggio, della forma nelle argomentazioni), o non piuttosto una difficoltà d'ordine più elevato e che il giovanetto non possa vincere, se già non adusato a vittoria, nella lotta con le prime. Ma quand'anche ciò fosse, si dovrebbe per ciò tornare all'antica separazione come ad unico porto di salvezza? Ecco, a parer mio, ciò non sarebbe saggio. Il tempo necessario a preparare la mente degli alunni a maggiori difficoltà quali possono essere le stereometriche, è certo assai più breve di quello che per antico sistema si concede ordinariamente, e durante il quale, lo si noti bene, il giovanetto trattenuto nel campo planimetrico acquista, come per legge d' inerzia, una naturale riluttanza a tutto ciò che sa di Stereometria. Ma son d'avviso che a cagione dell'ordine che il nostro autore prescrisse ai primordî del suo libro, poco ivi si abbondi in teoremi planimetrici o proposizioni stereometriche assai semplici (in aggiunta a quelle che sono indispensabili alla formazione del gruppo fondamentale dei postulati). Manchi così un giusto periodo di preparazione, e si giunga troppo presto a pagina 27 del libro, e prima forse che un alunno di comune intelligenza possa intendere il teorema 43 della pagina istessa che è alquanto difficile. E qui cade in acconcio una dimanda: Fu provvido consiglio il recente bando dello studio della Geometria intuitiva dai Ginnasi e dalle scuole tecniche, o fu smania di novità quella che ci fe' tornare all'antico? Io fo voti, perchè la caducità perenne del nostro sistema di studî si affermi ancora una volta a bene del paese, e che la Geometria intuitiva torni in onore presto e per sempre nelle nostre scuole.

2. I postulati che stanno a base degli Elementi del Prof. de Paolis presuppongono per lo più il concetto di movimento che in ogni trattato di geometria elementare conviene ammettere o esplicitamente o tacitamente.

Ho osservato esser costume dell'A. lo ammettere un medesimo postulato in casi analoghi, ad es. la possibilità di rovesciare il segmento o il diedro, anche quando qualche dipendenza possa esistere fra i varî casi, ad es. fra le due possibilità anzidette. Ma si consideri che, ciascuno il quale conceda la prima delle due possibilità, vi si decide sol perchè il segmento si diporta in egual modo rispetto ai suoi due estremi. Egli non potrebbe adunque negar la seconda perciò che anche il diedro si diporta in egual modo rispetto alle sue faccie. L'uso dell'A. mi sembra adunque per la detta ragione irreprensibile; ma per la ragione istessa, altrettanto non penso dell'estensione agli angoli del postulato: « Dati due segmenti diseguali si può sempre trovare un segmento multiplo del minore e maggiore dell'altro » alla quale l'A. giunge per via dimostrativa (p. 290, Cor.).

La proposizione « Una retta può scorrere su sè stessa » assunta come postulato dall'A. si trova dimostrata negli elementi di geometria del Sig. Prof. Faifofer. Ma mentre, secondo questo Autore, la possibilità di scorrere attribuita alla retta consiste nella facoltà di sovrapporre un punto A della retta ad altro suo punto A', e poi di nuovo la retta alla retta, il De Paolis, accettando il senso che alla parola *scorrere* volgarmente si attribuisce, ammette che si possa portare A in A' senza che avvenga distacco della retta dalla sua posizione nello spazio. Io credo che l'A. avrebbe fatto bene a riprodurre la breve e facile dimostrazione del Faifofer allo scopo, sempre lodevole, di anteporre un *motivo* al postulato. Avrebbe così disposto il lettore ad accettare la nuova condizione restrittiva, l'ammessibilità della quale è quivi dato di comprendere. Dissi *comprendere* e non *rigorosamente spiegare*: escluderei anzi a priori come priva di significato ogni considerazione d'ordine infinitesimale che mirasse a dimostrare il contrario. Ma dichiaro che, quanto a me, fra molti equivalenti sistemi di postulati, accetterei quello che fosse meno proclive a richiedere la concessione di *modi* anzichè di *effetti* del movimento (operazione per la quale una figura geometrica muta posizione). Ciò imporrebbe, è vero, il sacrificio di qualche proposizione isolata d'ordine cinematico, ma, mentre le operazioni indipendentemente dal modo di compierle sorreggerebbero il grosso dell' edificio geometrico, ciò che sembra più conforme a spirito scientifico, si eviterebbero molte questioni interminabili ed infeconde, indizio talvolta di non perfetta arrendevolezza del soggetto a rivestirsi d'evidenza. Anzichè ammettere che facendo rotare una retta *intorno a un suo punto* la si può costringere a passare per qualsivoglia altro punto, preferirei si ammettesse a dirittura la conseguenza: si può sempre costringere una retta a passare per due punti, che è indipendente da qualsivoglia concetto di *modo*. Gli « Elementi di Geometria » dei Professori Sannia e d'Ovidio erano quelli che meglio rispondevano a questo mio desiderio. Credo poi che l' A. invece di chiedere che la nota dualistica venga ammessa come postulato in ogni e singolo moto di strisciamento e di rotazione, avrebbe raggiunta una maggior semplicità dimostrandola ne' vari casi, dopo avere ammesso che: se una figura può passare da una posizione A ad un' altra B per una serie di posizioni intermedie, essa può sempre da B tornare in A percorrendo la serie medesima in ordine inverso.

Noto la terza parte del Post. I. a pag. 7: « Una figura si può muovere tenendo fissi tutti i suoi punti situati sopra una stessa retta ». Amerei che fosse detto: Una figura si può muovere fermi restando due de' suoi punti, perchè dalla 1ª parte del Post. II si potrebbe poi dedurre che: se nel moto di una figura due punti si mantengono immobili, lo stesso avviene di tutti gli altri punti della retta che li congiunge. Noto ancora, come pregevolissime e nuove, le definizioni alle p. 10 e 11. Esse si riferiscono alla linea *divisa* da uno dei suoi punti, o alla superficie *divisa* da una delle sue linee, o allo spazio *diviso* da una superficie. Inoltre, come opportunissimi e nuovi i postulati della retta divisa da un suo punto, o del piano da una sua retta, o dello spazio da un suo piano. Se ne trova ben presto una applicazione nella dimostrazione del teorema I. a p, 14. « Un piano è individuato da tre suoi punti non situati sopra una stessa retta ».

La definizione di angolo (piano o diedro) fu sempre argomento di discussione e una spina per gli Autori. Ma sembra oramai prevalso il partito di definir l'angolo come parte del piano o dello spazio. A questo si attiene il nostro A. il quale, a dimostrare che si può sempre sommare più angoli, estende a pag. 38 il concetto di angolo ammettendo angoli che possono essere composti di parti che siano minori del piano o dello spazio aggiunte a multipli del piano o dello spazio istesso. Se ciò non è estetico, è tuttavia necessario e rigorosamente ammissibile; niuno può adunque muoverne rimprovero all'A. Definire l'angolo come *rotazione* equivale a dare un sinonimo alla parola *angolo*, punto o poco chiarendone il concetto.

3. Ora dirò in breve ciò che penso in generale intorno ai primi tre libri dell'opera. L'A. si occupa in essi delle figure geometriche, non delle grandezze. Al par.° IV fa un'eccezione. Quivi egli, preludendo opportunamente alla teoria dell'equivalenza, ne disegna la tela, e ne dà una teoria in quei casi ne'quali essa si riduce ad eguaglianza, come avviene per quelle che egli chiama *grandezze elementari* (i segmenti, gli angoli e i diedri). È in questi tre libri che le figure o varietà più note ed importanti dello spazio, quasi sospingendosi a vicenda nella palestra, si offrono in bell'ordine al nostro studio, dalle più semplici alle più composte. Le proprietà planimetrime s'intrecciano alle stereometriche e le une le altre sostengono: sorge un tutto mirabilmente semplice ed armonico, dono d'arte, non d'artificio, di fede nel metodo, non di pompa scientifica. Descriver tutto sarebbe lunghissimo, il lettore si contenterà di alcune osservazioni.

Leggo a pag. 23: « Facendo scorrere su sè stessa una faccia rA di un diedro $r.AB$ strisciando lungo lo spigolo r, anche la faccia rB si move ma non cambia posizione rimanendo sempre il diedro eguale a sè stesso ». L'A. vuol provare in sostanza che un diedro può scorrere su sè stesso.

Ma ciò è inutile perchè questa proprietà è già sottintesa nella definizione dell'eguaglianza di due diedri, la quale potrebbe tuttavia essere censurata. (1)

Veggo con piacere entrar subito in campo il postulato delle parallele con le sue conseguenze.

Dopo la scoperta pangeometrica fu in voga la moda (esagerazione e talvolta parodia dei grandi fatti) di pretendere se-

---

(1) Infatti essa suppone che per ogni maniera di sovrapporre le due punteggiate, spigoli di due diedri eguali, una ne esista per sovrapporre un diedro all'altro. Avrei preferito che l'A., avendo già detto a pag. 8 che « due figure si dicono *uguali* quando, trasportate convenientemente nello spazio, possono coincidere », nulla avesse soggiunto a pag. 23 circa l'eguaglianza di due diedri, e soprattutto avesse raccomandato le successive dimostrazioni non al modo (come nel teorema a pag. 33, la dimostrazione del quale non è soddisfacente) ma al fatto della sovrapponibilità. E parmi che, quando i segmenti, gli angoli, i diedri, si vogliano considerare come enti affini dello spazio, si debba por cura a proscrivere il dominio del seguente fatto: Vi sono *due* o *infiniti* modi di sovrapporre una grandezza *elementare* ad un'altra ad essa eguale, secondochè si tratti di segmenti ed angoli, oppure di diedri.

parate in sulle prime e per non breve tratto nel corso di un libro elementare, le proposizioni che dipendono dal postulato Euclideo da quelle che non ne dipendono. Ma di grazia: Qual' è lo scopo del libro elementare che si vuol fare? È desso la pangeometria o la geometria ordinaria? Se questa seconda, non sembra logico entrar senza ambagi nell'ambiente de' suoi fenomeni, di quei fenomeni alla contemplazione dei quali il libro si destina? Tuttavia si rassicurino i pangeometri: l'A. rende loro giustizia in una buona nota (la nota XIX a p. 464) dalla quale togliamo che al postulato d'Euclide si può sostituire l'altro: « Quando un piano scorre su sè stesso strisciando lungo un'asse, esiste almeno uno dei suoi punti, non situato sull'asse, che si muove sopra una retta ». A pag. 54 si legge il teorema: « Se una retta è perpendicolare a due rette di un piano non parallele, è anche perpendicolare a tutte le altre sue rette », e si nota nella dimostrazione che essa dipende da semplici considerazioni di posizione mentre le ordinarie, invocando il sussidio di confronti fra triangoli eguali si allontanano in certo modo dall'indole del teorema. A p. 13 l'A. spiega che cosa egli intenda per *segarsi* di due linee o di una linea e di una superficie o di due superficie. Alle p. 72 e 73 ne fa l'applicazione all'intersezione di due circoli o di un circolo e di una sfera o di due sfere. L'A. a p. 74 dopo avere molto saggiamente discorso sopra la costruzione delle figure geometriche e gli elementi che nello spazio si possono porre o *immediatamente* o *mediatamente*, enuncia il postulato VIII che dice: « Nello spazio si possono porre *immediatamente* i suoi elementi fondamentali » (i punti, le rette, i piani, secondo l'A.). E poi: « i circoli di un piano e le sfere dello spazio si pongono *mediante* i loro centri e raggi ». E finalmente: « Se per mezzo degli elementi punti, rette, circoli, piani, sfere, ne vengono altri posti *mediatamente*, li riterremo come determinati ». Con la 1ª parte del postulato l'A. rivendica il diritto che si aveva a negare altra cosa già *tacitamente* ammessa, e al n. 90 lo dichiara. Ma, o io m'inganno, o quando si concedono le proprietà fondamentali della Geometria e si permette ad un autore di attribuirle ad enti A, B, C, che egli chiama punto, retta, piano, si ammettono gli enti, non importa se esplicitamente o tacitamente, perchè si può talvolta tacere ciò che si sottintende. L'A. non è qui incorso in una ripetizione? Le altre due proposizioni del postulato, rivelano nell'A. squisitezza di senso geometrico, sebbene mi sembrino semplici definizioni. Nelle costruzioni di triangoli a p. 87, l'A. il quale ha già opportunamente premessa la trattazione dei principali casi d'eguaglianza, ne approfitta per notare la sufficienza di certi elementi alla determinazione unica del triangolo. Cio è molto lodevole. Altrettanto egli fa prima delle costruzioni di triedri a p. 136. Tra quest'ultime, notevole per accuratezza, segnalerò quella del n. 170 a p. 137.

4. Vengo all'importante libro dell'equivalenza non senza osservare che nella scala delle difficoltà questa sovrasta alle proprietà di figura. Benemeriti di questa teoria, cito i Professori Faifofer e de Zolt che l'A. ebbe a precursori. L'A. si occupa adunque delle *grandezze* equivalenti, adatta perciò loro la nota definizione di *poligoni* equivalenti, ed incomincia dimostrando che il carattere di equivalenti distribuisce le grandezze in sistemi chiusi in loro stessi, in grazia del teorema: « Due grandezze equivalenti ad una terza sono equivalenti fra loro ». Dà quindi un'opportuna definizione di somma, e dimostra la proprietà associativa dell'addizione T. 1°, e l'unità della somma, T. 2° Passa al postulato: « Se una grandezza è comunque divisa in parti, trascurandone alcune non è possibile disporre le altre in modo da formare l'intera grandezza » già *dimostrato* per grandezze elementari. La dimostrazione data a questo proposito dal Sig. de Zolt nell'opuscolo: « Principi dell'eguaglianza di poligoni ecc. Milano 1881 dev'esser sembrata, come a parecchi, così all'A., non del tutto soddisfacente. (1) L'ultima parola su questo punto non s'è forse detta. Ma quando quella proposizione si dimostrasse, il lavoro del nostro A. non sarebbe scosso perciò; invece di un postulato, l'insegnante porrebbe un teorema. Postulato o teorema che permette l'introduzione del concetto di maggiore e minore (v. anche de Zolt l. c.). Secondo questo concetto vengono poi dimostrate alcune delle ordinarie proprietà delle diseguaglianze, e introdotte le *grandezze principali*. Questa definizione mi sembra nuova ed importante.

(1) Il lettore avrà trovato a pag. 13 di questo fascicolo la dimostrazione del Sig. Faifofer. — (*Nota della Direzione*).

Principali chiama l'A. le grandezze di una famiglia quando si possono sommare, e si sappia sempre giudicare se due di esse sono equivalenti o quale delle due sia la maggiore. Il Cor. 1° a p. 283 e varî altri della stessa specie che altrove ritrovo non esprimendo proprietà ma identità, mi sembrano inutili. I teoremi successivi si dividono in due classi secondochè essi riguardano grandezze generali o grandezze principali. È importante la conseguenza che stabilisce l'esistenza della differenza, ed unica, fra due grandezze principali, e sola basterebbe a giustificare la distinzione dell'A. L'A. estende poi a grandezze principali alcune diseguaglianze con differenze già dimostrate per grandezze elementari (v. ad es. il T. 2° a p. 285), e finalmente si diffonde alquanto sulle grandezze multiple o summultiple di grandezze date mai trascurando la sopradetta distinzione. Ed ora dimando: Non si poteva rendere più agevole l'argomento, grave ed astratto per sè medesimo, *enunciando* soltanto i teoremi di più facile dimostrazione? L'insegnante li avrebbe poi dimostrati egli stesso in una scuola di *ottimi* allievi dopo aver persuaso questi della loro utilità nelle successive applicazioni. Si sa già che gli Allievi sogliono essere più agevoli all'occasionale che non lo siano al formale insegnamento. E se i teoremi relativi a sole grandezze principali fossero stati enunciati per grandezze senz'altro, non avrebbe l'accorto lettore capito egli stesso dall'enunciato o dalla dimostrazione se la limitazione si dovesse supporre oppur no?

Della teorica delle grandezze equivalenti l'A. fa successivamente l'applicazione ai poligoni piani, ai prismi, e ai poligoni sferici equivalenti. È commendevole l'unità di metodo che l'A. segue nei tre casi. Veggansi ad es. le dimostrazioni dell'equivalenza di due parallelogrammi di eguali basi ed altezze, di due prismi triangolari con eguali sezioni normali ed eguali spigoli, di un parallelogramma sferico e della metà del suo eccesso. L'A. mette molta cura a porre in rilievo la decomponibilità in parti eguali nei varî incontri con grandezze equivalenti, ad es. con due parallelogrammi, insistenti nel piano sulla medesima base e posti dalla medesima parte di essa, quando i lati opposti alla base comune sono separati: (il modo di decomporli in parti eguali dato dall'A. in questo caso, è quello che è descritto negli Elementi di Geometria di Faifofer seconda ediz. Venezia 1880); lo stesso fa in casi analoghi a p. 312, (1) e a p. 321. Leggo e noto a p. 301: « Due poligoni equivalenti si possono sempre dividere in uno stesso numero di triangoli rispettivamente uguali » e l'applicazione a p. 313, T. 2.º E a p. 295, la dimostrazione del teorema: « Se due triangoli hanno uguale una base e l'altezza corrispondente sono equivalenti ». (Vedi anche gli « Elementi di Faifofer », pag. 197). L'A. non avendo dimostrato che i poligoni sono grandezze principali, evita la dimostrazione ordinaria. Analoga osservazione pel Teorema 2.º a p. 315, e per il teorema a p. 322. L'A. si occupa finalmente della trasformazione dei parallelogrammi, dei prismi, e dei poligoni sferici, mirando principalmente a dimostrare che i parallelogrammi, i prismi, i poligoni sferici, sono grandezze principali, conclusione che egli giustamente pone a corona della sua teoria. Splendido e di egregia fattura è il c. V che s'intitola: « Grandezze variabili. Limiti. » Le grandezze principali dell'A. corrispondono ai numeri razionali dell'Aritmetica. Si tratta ora di fare nella geometria mediante quelle, la teorica degli irrazionali. Ed ecco, in breve, come l'A. si è adoperato all' importante oggetto. Ha incominciato a dire di grandezze variabili crescenti e decrescenti, *continuamente* crescenti o decrescenti, *indefinitamente* crescenti o decrescenti. Ha poi dimostrato che, date certe condizioni che ordinariamente hanno luogo, una grandezza principale può decrescere indefinitamente (p. 328), e che una grandezza variabile somma di grandezze indefinitamente crescenti o decrescenti, cresce o decresce indefinitamente (p. 329). A p. 330 l'A. pone l'importante definizione di *variabili convergenti* e loro *limiti*. E poichè l'A. mira a definire come equivalenti due grandezze *limiti* delle stesse variabili convergenti, incomincia dall'escludere qualsiasi dubbio di contradizione della nuova e più generale definizione con la particolare già data,

(1) L'esposizione di questo teorema non è davvero felice. Leggendola, si crederebbe, che la dimostrazione sia insostenibile, mentre è invece esattissima. Avvertirò adunque i futuri lettori dell'opera che, giunti alla penultima linea della p. 311, essi devono disegnare una figura, che manca nel testo, la quale rappresenti due prismi con uno spigolo comune e gli altri due ordinatamente coincidenti, ma solo in direzione, e chiamarli ABC. A'B'C', AB_1C_1. $A'B'_1C'_1$. Questi sono quelli che l'A. vuol dimostrare equivalenti, confrontandoli col prisma intermedio AB_1C. $A'B'_1C'$ come si vede chiaramente a lin. 12, 13, 14 della pagina 313.

dimostrando che: se una di più grandezze equivalenti (nel primitivo senso) è limite di due variabili convergenti, lo sono tutte le altre, e che: sono equivalenti due grandezze principali limiti delle stesse variabili convergenti, p. 332. Passa poi al teorema a pag. 333, dimostrando che due grandezze equivalenti limiti delle stesse variabili convergenti sono equivalenti anche nel senso generale. Stabilisce quindi il postulato: « Due variabili convergenti ammettono sempre un limite » e lo dichiara con un' esempio molto opportuno. A p. 336 dà la definizione di somma di grandezze come limite delle somme delle variabili crescenti e decrescenti nei sistemi di variabili convergenti che possono definire i suoi termini, non senza aver prima dimostrato che quelle somme si possono considerare come variabili convergenti. Con i corollari al n. 390 generalizza i teoremi premessi alla teoria dell'equivalenza intesa nel senso antico. Il teorema a p. 337: « Date due coppie di variabili convergenti la variabile decrescente di una coppia è sempre maggiore della variabile crescente dell'altra », prepara una definizione di maggiore e minore che l'A. porrà in seguito. Intanto, avere la propria variabile decrescente maggiore della variabile crescente dell'altra, è proprietà assoluta di una coppia, e dipendente soltanto dai limiti delle due coppie (V. il T. 2° a p. 338); e se i limiti sono eguali, ognuna delle due coppie gode di questa proprietà, (teor. seg). A pag. 339 si trovano dimostrati i teoremi inversi, è aperto così l'adito alla definizione di maggiore e minore che l'A. pone a p. 340.

La trama è, come ognun vede, sottilmente e maestrevolmente ordita: ne sia lode al ch. Autore. Sorvolando sulle applicazioni ai poliedri equivalenti, alla superficie e al volume del cono, del cilindro, della sfera, ecc., nelle quali l'A. ha dovuto rinunziare al mezzo delle proporzioni, dirò qualche cosa dell'applicazione al circolo e alla sua superficie. L'A., e ciò è notevolissimo, incomincia dalla superficie. Dimostra che questa è il limite di due variabili principali convergenti, poligoni inscritti e circoscritti succedentisi con la nota legge Euclidea: e che esiste sempre un triangolo equivalente alla superficie di un circolo dato. Posto che l'altezza del triangolo sia eguale al raggio del circolo, dimostra che la sua base è il limite di due variabili convergenti. Esse sono i perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti. Questo limite è indipendente anch'esso dalla legge di successione dei poligoni le aree dei quali convergono verso quella del circolo. *Circolo* chiama l'A. questo secondo limite.

6. La teoria delle proporzioni offre una nuova applicazione di quella dei limiti. Lo spazio concessomi non mi permette di esaminarla qui da vicino. Forse lo farò in una prossima pubblicazione occasionata da una recente edizione degli Elementi di Geometria dei Professori Sannia e d'Ovidio. Questo libro dà luogo a varî confronti con quello del de Paolis. Avverto soltanto che questi ha notevolmente semplificato la celebre definizione di Euclide introducendo l'altra: « Date quattro grandezze, prese in un certo ordine, si dice che formano una *proporzione* se la seconda e la quarta sono contenute sempre uno stesso numero di volte in due grandezze equimultiple della prima e della terza, secondo qualunque numero ».

Ancora un cenno sulla teoria della misura della quale l'altra delle grandezze e dei limiti è un simulacro geometrico che l'A. seppe, come dissi, magistralmente scolpito. (1) Essa riusciva meno ardua all'A. il quale l'ha perciò, a quanto mi sembra, un pò meno curata. L'A. ammette il postulato di Dedekind che corrisponde a quello del limite di due variabili convergenti, del quale si tenne parola. E per misura di una grandezza rispetto a una data unità, intende il numero limite dei numeri commensurabili che rappresentano le misure degli stati (commensurabili coll'unità) delle grandezze variabili convergenti che la definiscono, e dimostra, sempre invocando la teoria delle grandezze variabili, che: « Una grandezza data, rispetto a una data unità, ha sempre una misura, ed una sola. » La dimostrazione del corollario al n. 470 è difettosa, ma fu corretta dai Professori Sannia e d'Ovidio nel loro recente lavoro sopra citato.

E di alcune altre mende meno importanti dell'opera, non occorre tener discorso.

G. Frattini.

---

(1) Il de Paolis ha, in sostanza, fatto in geometria ciò che fè già in Aritmetica il Dedekind col classico lavoro: « Die irrationalen Zahlen ».

QUISTIONE PROPOSTA

Se i raggi dei circoli inscritti nelle quattro facce d'un tetraedro sono fra loro eguali, è necessario che le facce stesse sieno fra loro eguali?

LIBRI RICEVUTI DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Lezioni di Geometria complementare ad uso degli Istituti tecnici di *Raffaele Badia* insegnante di matematiche nell'Istituto tecnico di Perugia. — Città di Castello, S. Lapi editore 1885.

Primi Elementi di Geometria projettiva e descrittiva ad uso degli Istituti tecnici del Regno del Dott. *Vittorio Murer*. 1885, Ditta G. B. Paravia e Comp. — Torino – Milano – Firenze – Roma.

Scuola Militare. — Compendio di Geometria con due appendici sulla trigonometria e sulle projezioni quotate del prof. *Francesco Nicoli*. — In Modena, coi tipi della società tipografica, 1885.

Elementi di Aritmetica generale ed Algebra. Lezioni date nel R. Liceo Umberto I, dal Prof. *L. Rajola Pescarini*. — Napoli, Domenico Morano editore, 1884.

Capitolo aggiunto agli Elementi di Aritmetica generale ed Algebra del professore *L. Rajola Pescarini* contenente la teoria dei logaritmi. — Napoli, Domenico Morano editore, 1885.

INTORNO AD ALCUNE RELAZIONI FRA DISTANZE

NOTA

DI GINO LORIA

I.

1. La porzione di retta limitata da due punti dicesi *segmento rettilineo*, o, più semplicemente, *segmento*.

2. La figura formata da quattro punti disposti comunque nello spazio dicesi *tetragono*; i punti dati ne sono i *vertici* e i segmenti che li congiungono a due a due gli *spigoli*.

Un tetragono ha sei spigoli, essi sono i lati del triangolo determinato da tre de' suoi vertici e le congiungenti questi col quarto.

Se i quattro vertici stanno in un piano, il tetragono è *piano* e i suoi spigoli si chiamano *lati*.

3. Dati sei segmenti $abcefg$, affinchè con essi come spigoli si possa costruire un tetragono, non è necessario che passi fra essi alcuna equazione di condizione.

Infatti, si costruisca con tre di essi (a, b, c) come lati un triangolo ABC: affinchè ciò sia possibile è necessario e sufficiente che ciascuno sia compreso fra la somma e la differenza degli altri due. Centri due di essi (B, C) e raggi altri due dei dati segmenti (f, g) si descrivano due sfere: queste avranno comune un cerchio (di centro O e raggio r) purchè la distanza BC sia compresa fra la somma e la differenza di quei due segmenti. Questo cerchio secherà la sfera di centro A e raggio e in due punti (D', D'') quando, chiamando E la projezione di A sul piano del cerchio, sia $AE < e$ (*) ed OE risulti compreso fra la somma e la diffe-

(*) Ciò è necessario affinchè il piano del cerchio sechi la sfera.

renza dei due segmenti r e $\sqrt{e^2 - \overline{AE}^2}$. (*) I tetragoni ABCD' e ABCD'' hanno entrambi gli spigoli eguali ai segmenti dati; dunque ecc.

Se uno de' punti D', D'' cade nel piano ABC il tetragono è piano; in generale ciò non accade, ma affinchè si verifichi questo caso devono i segmenti dati soddisfare qualche equazione di condizione. Ma notando che, dati i segmenti $abcfg$ per modo che si possa con i tre primi come lati costruire un triangolo ABC e che le due sfere di centri B, C e raggi f, g s'incontrino, si può scegliere e in due soli modi per rendere il tetragono piano, (**) si conchiuderà che fra i sei lati di un tetragono piano passa una e una sola relazione. (***)

4. La figura formata da cinque punti disposti comunque nello spazio dicesi *pentagono*; i punti dati ne sono i vertici, i segmenti che li congiungono a due a due gli *spigoli*.

Un pentagono ha dieci spigoli: essi sono gli spigoli del tetragono determinato da quattro de' punti dati e i segmenti congiungenti i vertici di questo col quinto.

5. Dati ad arbitrio dieci segmenti $abcefg\ a_1b_1c_1d_1$, in generale non esiste alcun pentagono che li abbia per ispigoli.

Infatti, supposte soddisfatte le condizioni esposte nel n. 3, si potrà costruire un tetraedro ABCD i cui spigoli BC, CA, AB, AD, BD, CD siano eguali rispettivamente ai segmenti a, b, c, e, f, g. Supposte soddisfatte altre condizioni analoghe, si potrà costruire sulla stessa base ABC un tetraedro ABCE i cui spigoli EA, EB, EC siano eguali ri-

(*) Questa seconda condizione è necessaria affinchè il cerchio considerato sechi quello in cui il suo piano interseca la sfera data.

(**) Se P', P'' sono i punti comuni alla due sfere suddette é al piano ABC si può assumere $e = AP'$ o $e = AP''$.

(***) L'utilità dell'introduzione metodica nella geometria elementare di considerazioni di questo genere, fu sostenuta dal Prof. Besso nel suo articolo *Sul concetto di funzione nell' insegnamento della geometria elementare* (Giornale di Matematiche, Vol. VII).

spettivamente ad $a_1\,b_1\,c_1$. Ora, il pentagono ABCDE ha nove de'suoi spigoli eguali ad altrettanti dei segmenti dati; ma il decimo, DE, non sarà in generale eguale al decimo, d_1, di questi. Di più, DE è determinato (in uno o più modi) dalla conoscenza dei segmenti $a\,b\,c\,e\,f\,g\;a_1 b_1 c_1$: dunque, affinchè i dieci segmenti dati siano spigoli di un pentagono, dovrà fra essi passare una e una sola relazione. In altre parole, fra i dieci spigoli di qualunque pentagono passa una relazione.

6. Supponiamo in particolare che quattro spigoli uscenti dallo stesso vertice del pentagono siano fra loro eguali; gli altri quattro vertici apparterranno allora alla stessa sfera; fra il raggio di questa e i segmenti che uniscono a due a due i detti quattro punti, passerà quindi una relazione. È facile dedurne che fra i sei archi di cerchio massimo congiungenti a due a due quattro punti di una sfera passa una relazione ed una sola.

7. Dunque, riassumendo i risultati ottenuti, potremo dire:

Fra i sei segmenti che uniscono a due a due quattro punti di un piano; fra gli archi di circolo massimo congiungenti a due a due quattro punti di una sfera; e fra i segmenti che uniscono a due a due cinque punti dello spazio, passa una relazione.

Scopo del presente scritto è la ricerca con metodo elementare di queste relazioni. Ci dispenseremo però d'indicare la via per la quale si può pervenire alla prima, perchè essa si trova additata in opere molto diffuse: d'altronde essa è del tutto analoga a quella per cui si perviene alla seconda.

II.

Se α, β, γ sono tre angoli tali che sia soddisfatta una delle relazioni

$$\alpha+\beta+\gamma=2\pi,\quad -\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha-\beta+\gamma=0,\quad \alpha+\beta-\gamma=0,$$

si avrà

$$(\mathrm{I})\quad \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Infatti, le prime due fra le date equazioni possono scriversi come segue

$$\beta+\gamma=2\pi-\alpha,\quad \beta+\gamma=\alpha,$$

le quali concordano nel dare

$$\cos(\beta+\gamma)=\cos\alpha,$$

relazione che, sviluppata, diviene

$$\cos\beta\,\cos\gamma-\cos\alpha=\operatorname{sen}\beta\,\operatorname{sen}\gamma$$

Elevandola a quadrato si ottiene

$$\cos^2\beta\,\cos^2\gamma+\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=(1-\cos^2\beta)\,(1-\cos^2\gamma);$$

e questa, fatte tutte le riduzioni, prende la forma

$$1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma=0$$

c.d.d. — Analogamente si mostrerebbe che anche le due ultime delle date relazioni conducono a questa equazione.

III.

Siano A, B, C, D quattro punti di una sfera, la quale supporremo, come d'uso, di raggio eguale ad 1. Chiamiamo $abcefg$ gli archi di cerchio massimo BC, CA, AB, AD, BD, CD e $\alpha\beta\gamma$ gli angoli BDC, CDA, ADB. In forza dell' equazione fondamentale della trigonometria sferica, avremo

$$\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos f\cos g}{\operatorname{sen}f\operatorname{sen}g},\quad \cos\beta=\frac{\cos b-\cos g\cos e}{\operatorname{sen}g\ \operatorname{sen}e},\quad \cos\gamma=\frac{\cos c-\cos e\cos f}{\operatorname{sen}e\ \operatorname{sen}f}.$$

Di più, i tre angoli α, β, γ o dànno per somma 2π o uno di essi è eguale alla somma degli altri due: si verifica la prima di tali relazioni se il punto D è interno al triangolo ABC, si verifica una delle altre se è esterno. Ne viene che fra questi angoli passerà la relazione (I). Sostituendo in questa per $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ le espressioni precedenti otterremo:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\cos c - \cos f \cos e}{\operatorname{sen} f \operatorname{sen} e} & \dfrac{\cos b - \cos g \cos e}{\operatorname{sen} g \operatorname{sen} e} \\ \dfrac{\cos c - \cos f \cos e}{\operatorname{sen} e \operatorname{sen} f} & 1 & \dfrac{\cos a - \cos g \cos f}{\operatorname{sen} g \operatorname{sen} f} \\ \dfrac{\cos b - \cos g \cos e}{\operatorname{sen} e \operatorname{sen} g} & \dfrac{\cos a - \cos f \cos g}{\operatorname{sen} g \operatorname{sen} f} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa si potrebbe considerare come la relazione cercata, ma si può trasformarla in modo che essa assuma un aspetto più semplice. Moltiplichiamo a tale scopo le successive verticali del precedente determinante per $\operatorname{sen} e$, $\operatorname{sen} f$, $\operatorname{sen} g$; facciamo le stesse operazioni sulle orizzontali; quindi sostituiamo ad ogni sen^2 il suo equivalente $1 - \cos^2$; finalmente eleviamo di ordine il determinante. Avremo così:

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos^2 e & \cos c - \cos f \cos e & \cos b - \cos e \cos g & 0 \\ \cos c - \cos e \cos f & 1 - \cos^2 f & \cos a - \cos g \cos f & 0 \\ \cos b - \cos e \cos g & \cos a - \cos f \cos g & 1 - \cos^2 g & 0 \\ \cos e & \cos f & \cos g & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Aggiungendo poi alla 1ª orizzontale la 4ª moltiplicata per $\cos e$, alla 2ª la 4ª moltiplicata per $\cos f$ e alla 3ª la 4ª moltiplicata per $\cos g$ otterremo infine

$$\text{(II)} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b & \cos e \\ \cos c & 1 & \cos a & \cos f \\ \cos b & \cos a & 1 & \cos g \\ \cos e & \cos f & \cos g & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Collo stesso ragionamento si dimostra che fra i sei lati di un tetragono piano, passa la relazione

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & 1 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Applicando la (II) si determina facilmente il raggio sferico del cerchio (minore) circoscritto al triangolo ABC; chiamandolo infatti r la (II) dovrà essere soddisfatta ponendo $e=f=g=r$; ne segue

$$\cos^2 r = - \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b & 1 \\ \cos c & 1 & \cos a & 1 \\ \cos b & \cos a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\operatorname{sen} r = \frac{2 \operatorname{sen}\frac{a}{2} \operatorname{sen}\frac{b}{2} \operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\sqrt{\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}+\operatorname{sen}\frac{b}{2}+\operatorname{sen}\frac{c}{2}\right)\left(-\operatorname{sen}\frac{a}{2}+\operatorname{sen}\frac{b}{2}+\operatorname{sen}\frac{c}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}-\operatorname{sen}\frac{b}{2}+\operatorname{sen}\frac{c}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}+\operatorname{sen}\frac{b}{2}-\operatorname{sen}\frac{c}{2}\right)}}$$

(*) E allo stesso modo si dimostra che fra i sei archi geodetici che uniscono a coppie quattro punti di una superficie pseudosferica passa la relazione

$$\begin{vmatrix} 1 & \cosh\frac{c}{R} & \cosh\frac{b}{R} & \cosh\frac{e}{R} \\ \cosh\frac{c}{R} & 1 & \cosh\frac{a}{R} & \cosh\frac{f}{R} \\ \cosh\frac{b}{R} & \cosh\frac{a}{R} & 1 & \cosh\frac{g}{R} \\ \cosh\frac{e}{R} & \cosh\frac{f}{R} & \cosh\frac{g}{R} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

IV.

Siano ABCDE cinque punti qualunque dello spazio; indichiamo nel seguente modo gli spigoli del pentagono da essi determinato:

$$BC = a_1 \quad CA = b_1 \quad AB = c_1$$

$$AD = e_1 \quad BD = f_1 \quad CD = g_1$$

$$AE = a_2 \quad BE = b_2 \quad CE = c_2 \quad DE = d_2$$

e nel seguente modo gli angoli formati dalle congiungenti E agli altri punti considerate a coppie:

$$BEC = a \quad CEA = b \quad AEB = c$$

$$AED = e \quad BED = f \quad CED = g$$

Allora, pel teorema del coseno della trigonometria rettilinea, avremo:

$$\cos a = \frac{-a_1^2 + b_2^2 + c_2^2}{2b_2c_2}, \quad \cos b = \frac{-b_1^2 + c_2^2 + a_2^2}{2c_2a_2}, \quad \cos c = \frac{-c_1^2 + a_2^2 + b_2^2}{2a_2b_2}$$

$$\cos e = \frac{-e_1^2 + d_2^2 + a_2^2}{2d_2a_2}, \quad \cos f = \frac{-f_1^2 + d_2^2 + b_2^2}{2d_2b_2}, \quad \cos g = \frac{-g_1^2 + d_2^2 + c_2^2}{2d_2c_2}$$

Ciò posto, descriviamo una sfera di centro E e raggio 1; i raggi EA, EB, EC, ED, prolungati se occorre oltre i loro estremi, incontrano la superficie in quattro punti A′B′C′D′ le cui mutue distanze sferiche sono

$$B'C' = a, \; C'A' = b, \; A'B' = c, \; A'D' = e, \; B'D' = f, \; C'D' = g:$$

ne segue che fra $a\,b\,c\,e\,f\,g$ passerà la relazione (II). Sostituendo in essa in luogo di $\cos a$, $\cos b$, ..., $\cos g$ le loro espressioni precedentemente trovate, essa prenderà la forma seguente:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{-c_1^2+b_2^2+a_2^2}{2b_2a_2} & \dfrac{-b_1^2+c_2^2+a_2^2}{2c_2a_2} & \dfrac{-e_1^2+d_2^2+a_2^2}{2d_2a_2} \\ \dfrac{-c_1^2+a_2^2+b_2^2}{2a_2b_2} & 1 & \dfrac{-a_1^2+c_2^2+b_2^2}{2c_2b_2} & \dfrac{-f_1^2+d_2^2+b_2^2}{2d_2b_2} \\ \dfrac{-b_1^2+a_2^2+c_2^2}{2a_2c_2} & \dfrac{-a_1^2+b_2^2+c_2^2}{2b_2c_2} & 1 & \dfrac{-g_1^2+d_2^2+c_2^2}{2d_2c_2} \\ \dfrac{-e_1^2+a_2^2+d_2^2}{2a_2d_2} & \dfrac{-f_1^2+b_2^2+d_2^2}{2b_2d_2} & \dfrac{-g_1^2+c_2^2+d_2^2}{2c_2d_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Questa si può considerare come la relazione da cui son legate le mutue distanze di cinque punti dello spazio. Essa può ridursi ad una forma molto più semplice. A tale scopo moltiplichiamo le verticali successive del suo primo membro rispettivamente per $2a_2$, $2b_2$, $2c_2$, $2d_2$ e le sue orizzontali ordinatamente per a_2, b_2, c_2, d_2; poi eleviamo il determinante di ordine; essa allora sarà divenuta

$$\begin{vmatrix} 2a_2^2 & -c_1^2+b_2^2+a_2^2 & -b_1^2+c_2^2+a_2^2 & -e_1^2+d_2^2+a_2^2 & 1 \\ -c_1^2+a_2^2+b_2^2 & 2b_2^2 & -a_1^2+c_2^2+b_2^2 & -f_1^2+d_2^2+b_2^2 & 1 \\ -b_1^2+a_2^2+c_2^2 & -a_1^2+b_2^2+c_2^2 & 2c_2^2 & -g_1^2+d_2^2+c_2^2 & 1 \\ -e_1^2+a_2^2+d_2^2 & -f_1^2+b_2^2+d_2^2 & -g_1^2+c_2^2+d_2^2 & 2d_2^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Sottragghiamo ora dalla 1ª verticale l'ultima moltiplicata per a_2^2, dalla 2ª l'ultima moltiplicata per b_2^2, dalla 3ª l'ultima moltiplicata per c_2^2, dalla quarta l'ultima moltiplicata per d_2^2; elevando l'ordine anche del nuovo determinante avremo:

$$\begin{vmatrix} a_2^2 & -c_1^2+a_2^2 & -b_1^2+a_2^2 & -e_1^2+a_2^2 & 0 & 1 \\ -c_1^2+b_2^2 & b_2^2 & -a_1^2+b_2^2 & -f_1^2+b_2^2 & 0 & 1 \\ -b_1^2+c_2^2 & -a_1^2+c_2^2 & c_2^2 & -g_1^2+c_2^2 & 0 & 1 \\ -e_1^2+d_2^2 & -f_1^2+d_2^2 & -g_1^2+d_2^2 & d_2^2 & 0 & 1 \\ a_2^2 & b_2^2 & c_2^2 & d_2^2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Togliamo poi dalla 1ª orizzontale l'ultima moltiplicata per a_2^2, dalla 2ª l'ultima moltiplicata per b_2^2, dalla 3ª l'ultima moltiplicata der c_2^2 e dalla 4ª l'ultima moltiplicata per d_2^2; nel nuovo determinante cambiamo segno agli elementi delle prime quattro orizzontali e della penultima verticale: otterremo così

$$\text{(III)} \quad \begin{vmatrix} 0 & c_1^2 & b_1^2 & e_1^2 & a_2^2 & 1 \\ c_1^2 & 0 & a_1^2 & f_1^2 & b_2^2 & 1 \\ b_1^2 & a_1^2 & 0 & g_1^2 & c_2^2 & 1 \\ e_1^2 & f_1^2 & g_1^2 & 0 & d_2^2 & 1 \\ a_2^2 & b_2^2 & c_2^2 & d_2^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e questa è la forma definitiva della relazione fra gli spigoli di un pentagono. (*)

V.

Finiremo col mostrare mediante due applicazioni l'utilità dell'equazione (III) in molte questioni di geometria.

(*) Questa relazione fu data per la prima volta nel 1773 da Lagrange nella sua celebre memoria *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires* (cfr. Oeuvres de Lagrange, T. III, p. 677). Poi essa fu oggetto di ricerche da parte di Carnot (v. la sua *Géometrie de position* (1803) p. 417). Finalmente Cayley nel 1841 la pose sotto la forma (III) (v. Cambridge Mathematical Journal, V. II).

1. *Trovare il raggio della sfera circoscritta ad un dato tetraedro.*

Sia ABCD il tetraedro dato, essendo $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AD = e$, $BD = f$, $CD = g$; chiamando O il centro e r il raggio della sfera ad esso circoscritta, sarà $OA=OB=OC=OD=r$; la relazione analoga alla (III) pei cinque punti ABCDO è

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & r^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & r^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & r^2 & 1 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & r^2 & 1 \\ r^2 & r^2 & r^2 & r^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e questa ci dà subito

$$r^2 = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & 1 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. *Date quattro sfere concentriche, trovare un tetraedro che sia simile a un tetraedro dato e di cui ciascun vertice stia su una delle sfere date.*

Siano $a_1 b_1 c_1 d_1$ i raggi e O il centro delle date sfere: $abcefg$ gli spigoli del tetraedro dato.

Se ABCD è il tetraedro cercato e x un numero da determinare, dovrà essere

$$BC = ax,\ CA = bx,\ AB = cx,\ AD = ex,\ BD = fx,$$
$$CD = gx,\ OA = a_1,\ OB = b_1,\ OC = c_1,\ OD = d_1$$

Fra le mutue distanze de' punti ABCDO dovrà aver luogo la relazione analoga alla (III), dunque:

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2x^2 & b^2x^2 & e^2x^2 & a_1^2 & 1 \\ c^2x^2 & 0 & a^2x^2 & f^2x^2 & b_1^2 & 1 \\ b^2x^2 & a^2x^2 & 0 & g^2x^2 & c_1^2 & 1 \\ e^2x^2 & f^2x^2 & g^2x^2 & 0 & d_1^2 & 1 \\ a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & d_1^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ ossia } \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & a_1^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & b_1^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & c_1^2 & 1 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & d_1^2 & 1 \\ a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & d_1^2 & 0 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Donde:

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 \end{vmatrix} x^4 + 2x^2 \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & a_1^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & b_1^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & c_1^2 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & d_1^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & a_1^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & b_1^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & c_1^2 & 1 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & d_1^2 & 1 \\ a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & d_1^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Trovato x il problema è risolto. Deduca il lettore da questa equazione a quali condizioni geometriche debbano soddisfare i dati della questione affinchè si possa effettivamente trovare un tetraedro soddisfacente tutte le condizioni imposte.

Torino, 27 Gennaio 1886.

SOPRA UNA PROPOSIZIONE FONDAMENTALE DELLA TEORIA DELL'EQUIVALENZA

Lettera del Prof. De Paolis al Direttore del Periodico

Pisa, 10 Febbraio 1886.

Pregmo Sig. Professore,

Mi permetta di sottoporre al suo giudizio alcune osservazioni sopra l'articolo pubblicato dal Prof. Faifofer nel primo fascicolo del Giornale che Ella dirige.

Il Prof. De Zolt (Principii della eguaglianza di poligoni — Milano. — D. Briola. — 1881.) fonda la teoria dell'equivalenza dei poligoni sul Teorema: Se un poligono è diviso in parti in un modo qualunque non è possibile, trascurando alcuna di esse, disporre le rimanenti in modo da coprire interamente il poligono.

Essendomi però accorto che la dimostrazione data dal Prof. De Zolt non andava esente da obbiezioni, e non essendo riuscito a trovarne una rigorosa, quando pubblicai i miei « Elementi di Geometria » domandai, con un Postulato, che: Se una grandezza è comunque divisa in parti, trascurandone alcune non è possibile disporre le rimanenti in modo da formare nuovamente la stessa grandezza. Ora, nel suddetto articolo del Prof. Faifofer, leggo un'altra dimostrazione dello stesso teorema; disgraziatamente però anche questa dimostrazione mi pare inesatta, ed ecco la ragione per cui la ritengo tale:

L'Autore deduce che: « Una parte di poligono non » può essere equivalente all'intero », pretendendo di dimostrare prima che: « Sottraendo da due poligoni equivalenti » due loro parti che siano uguali ad un terzo poligono, si » ottengono resti equivalenti ». Ed ecco come: Se A e B sono i due poligoni equivalenti, divisi già in uno stesso numero di parti rispettivamente uguali, e se H e K sono i due poligoni uguali, che si devono togliere da A e B, dividiamo le parti di A e B come sono divise in B ed A dai contorni di K ed H, e se i poligoni H e K sono divisi dalle primitive linee di divisione o dalle *nuove* che si sono tirate, facciamo in ciascuno di essi le divisioni che si scorgono nell'altro. Dopo ciò i due poligoni A e B sono composti di parti rispettivamente uguali, e sopprimendo H e K, si sopprimono di queste parti rispettivamente uguali, quindi, ecc. Però le divisioni e suddivisioni accennate dall'Autore sono sufficienti solamente se le *nuove* linee che si sono tirate non dividono i poligoni H e K, come avviene nella figura che presenta al lettore; se le nuove linee dividessero invece H e K bisognerebbe nuovamente suddividere le parti di A e B come sono suddivise quelle di B ed A, così si descriverebbero altre *nuove* linee che potrebbero ancora suddividere i poligoni H e K, ciò che porterebbe un'ulteriore suddivisione delle parti di A e B, e così di seguito. Mi pare dunque che il teorema sarà dimostrato solamente quando sarà provato che eseguendo le successive operazioni di suddivisione si arriva *necessariamente* ad un punto in cui le *ultime* linee descritte non dividono più i poligoni H, K. E che la dimostrazione possa essere completata, in questo senso, ne dubito. Infatti si tratta di dimostrare il Teorema: « Sono equivalenti i resti che si trovano sottraendo due poligoni uguali da due poligoni equivalenti, e poi dedurne la dimostrazione del Postulato fondamentale dell'equivalenza; ora è dopo avere ammesso questo postulato, e non prima, che si può stabilire il concetto di poligoni maggiori o minori, e per dimostrare che sono equivalenti i resti che si ottengono sottraendo poligoni uguali da poligoni equivalenti, *pare* necessario avere dimostrato che due poligoni o sono equivalenti o uno è maggiore dell'altro.

Finalmente poi mi permetta di farle pure osservare che se anche i Teoremi enunciati dal Prof. Faifofer fossero dimostrati rigorosamente, non basterebbero, come egli dice, per potere « dimostrare le proposizioni sull'equivalenza dei » poligoni e dei poliedri con la stessa semplicità che si » ammira negli Elementi d'Euclide », e ciò perchè appunto, nel caso dei parallelogrammi equivalenti, caso da cui parte Euclide, bisogna applicare successivamente più volte le operazioni di suddivisione.

Mi creda, Sig. Professore, con tutta la stima, suo

Devmo
RICCARDO DE PAOLIS.

DEL CIRCOLO CIRCOSCRITTO ED INSCRITTO
E DEI CIRCOLI EX-INSCRITTI IN UN TRIANGOLO SFERICO

I.

Si indichino con a, b, c i lati di un triangolo sferico qualunque, con A, B, C gli angoli opposti, con ψ la tangente trigonometrica del raggio sferico del cerchio circoscritto, con φ quella del raggio sferico del cerchio inscritto, con φ_1, φ_2, φ_3 le tangenti trigonometriche dei raggi sferici dei cerchi inscritti nei nuovi triangoli che si ottengono ordinatamente prolungando due a due i lati b e c, a e c, a e b del triangolo che si considera, e pongasi

$$a + b + c = 2p, \quad A + B + C = 2P$$

$$\pm\sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)} = \omega$$

$$\pm\sqrt{-\cos P \cos(P-A) \cos(P-B) \cos(P-C)} = \omega_1$$

Si avranno le eguaglianze

$$\left.\begin{aligned}
\psi &= \frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}b\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}c}{\omega} \\
\varphi &= \frac{\omega}{\operatorname{sen}p} \\
\varphi_1 &= \frac{\omega}{\operatorname{sen}(p-a)} \\
\varphi_2 &= \frac{\omega}{\operatorname{sen}(p-b)} \\
\varphi_3 &= \frac{\omega}{\operatorname{sen}(p-c)}
\end{aligned}\right\}\ (M)
\qquad
\left.\begin{aligned}
\psi &= -\frac{\cos P}{\omega_1} \\
\varphi &= \frac{\omega_1}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C} \\
\varphi_1 &= \frac{\omega_1}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}B\operatorname{sen}\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}A} \\
\varphi_2 &= \frac{\omega_1}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\operatorname{sen}\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}B} \\
\varphi_3 &= \frac{\omega_1}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\operatorname{sen}\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}
\end{aligned}\right\}\ (N)$$

le quali si dimostrano facilmente per mezzo delle relazioni fondamentali della trigonometria sferica.

Il doppio segno da cui sono affetti i valori di ciascuna tangente si spiega osservando che ogni cerchio descritto sulla superficie della sfera ha due poli, ai quali corrispondono due raggi sferici che sono archi supplementari.

II.

Si prendano i valori reciproci di φ, φ_1, φ_2, φ_3 invertendo i rapporti che costituiscono i secondi membri e si addizionino la seconda, la terza e la quarta delle eguaglianze che ne risultano, sottraendo da questa somma la prima. Dopo alcune trasformazioni si troverà

$$\frac{1}{\varphi_1}+\frac{1}{\varphi_2}+\frac{1}{\varphi_3}-\frac{1}{\varphi}=\frac{4\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}{\omega}$$

ovvero

$$\frac{1}{\varphi_1}+\frac{1}{\varphi_2}+\frac{1}{\varphi_3}-\frac{1}{\varphi}=-\frac{2\cos P}{\omega_1}$$

secondo che le eguaglianze sulle quali si è operato appartengono al sistema (M) o al sistema (N). Da una qualunque di queste ultime e dai valori di ψ si deduce

$$\frac{1}{\varphi_1}+\frac{1}{\varphi_2}+\frac{1}{\varphi_3}-\frac{1}{\varphi}=2\psi.$$

III.

Ponendo

$$p-a=\alpha,\quad p-b=\beta,\quad p-c=\gamma$$

si ha

$$\beta+\gamma=p-\alpha$$

quindi

$$\cos\beta\cos\gamma-\cos p\cos\alpha=\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma+\operatorname{sen}p\operatorname{sen}\alpha$$

Eliminando i coseni e dividendo per $\operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\gamma$ si ottiene

$$\frac{\operatorname{sen}^2 p}{2\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\gamma}+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\gamma}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{2\operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\gamma}$$

$$+\frac{\operatorname{sen}^2\gamma}{2\operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}-$$

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2\alpha}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2\beta}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2\gamma}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}$$

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\gamma}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\gamma}+$$

$$+\frac{2\operatorname{sen}^2 p+2\operatorname{sen}^2\alpha+2\operatorname{sen}^2\beta+2\operatorname{sen}^2\gamma}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}+\frac{2}{\operatorname{sen}^2 p}+\frac{2}{\operatorname{sen}^2\alpha}+\frac{2}{\operatorname{sen}^2\beta}+\frac{2}{\operatorname{sen}^2\gamma}-$$

$$-\frac{4}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}=0$$

Ma dalla seconda, terza, quarta e quinta eguaglianza del sistema (M) moltiplicate fra loro risulta

$$\omega^2=\varphi\varphi_1\varphi_2\varphi_3$$

e per conseguenza

$$\text{sen}^2 p = \frac{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}{\varphi}, \quad \text{sen}^2\alpha = \frac{\varphi\varphi_2\varphi_3}{\varphi_1}, \quad \text{sen}^2\beta = \frac{\varphi\varphi_1\varphi_3}{\varphi_2}, \quad \text{sen}^2\gamma = \frac{\varphi\varphi_1\varphi_2}{\varphi_3}$$

dunque

$$\frac{1}{2\varphi^4} + \frac{1}{2\varphi_1^4} + \frac{1}{2\varphi_2^4} + \frac{1}{2\varphi_3^4} - \frac{1}{\varphi^2\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi^2\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi^2\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_1^2\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_1^2\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_2^2\varphi_3^2}$$

$$+ \frac{2}{\varphi^2} + \frac{2}{\varphi_1^2} + \frac{2}{\varphi_2^2} + \frac{2}{\varphi_3^2} + \frac{2\varphi}{\varphi_1\varphi_2\varphi_3} + \frac{2\varphi_1}{\varphi\varphi_2\varphi_3} + \frac{2\varphi_2}{\varphi\varphi_1\varphi_3} + \frac{2\varphi_3}{\varphi\varphi_1\varphi_2} - \frac{4}{\varphi\varphi_1\varphi_2\varphi_3} = 0$$

IV.

Si sa che il numero $A + B + C - 2$ esprime l'area del triangolo sferico quando si prende per unità di misura degli angoli l'angolo retto e per unità di superficie il triangolo trirettangolo. Ciò posto, indicando con S l'area di un triangolo sferico qualunque, sarà

$$-\cos P = \text{sen}\tfrac{1}{2}S$$

quindi la prima eguaglianza del sistema (N) diviene

$$\text{sen}\tfrac{1}{2}S = \omega_1\,\psi.$$

Moltiplicando fra loro membro a membro le altre quattro eguaglianze dello stesso sistema ed estraendo la radice quadrata da ambedue i membri della risultante si ottiene

$$2\omega_1^2 = \text{sen}A\;\text{sen}B\;\text{sen}C\sqrt{\varphi\varphi_1\varphi_2\varphi_3}$$

Se si moltiplica la seconda delle eguaglianze (N) per la terza e la risultante si divide per la nuova eguaglianza ottenuta moltiplicando la quarta per la quinta, si trova

$$\text{tang}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\varphi\varphi_1}{\varphi_2\varphi_3}$$

e quindi

$$\text{sen}A = \frac{2\sqrt{\varphi\varphi_1\varphi_2\varphi_3}}{\varphi\varphi_1 + \varphi_2\varphi_3}$$

È chiaro che con semplici permutazioni di lettere e di indici si ottengono espressioni analoghe per gli angoli B e C.

Sostituendo nell'espressione di $\text{sen}\frac{1}{2}S$ il valore di ω_1 dopo averne eliminato gli angoli A, B, C e ponendo in luogo di ψ il valore trovato nel paragrafo precedente si avrà

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}S = \frac{\varphi\varphi_1\varphi_2 + \varphi\varphi_1\varphi_3 + \varphi\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1\varphi_2\varphi_3}{\sqrt{(\varphi\varphi_1 + \varphi_2\varphi_3)(\varphi\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3)(\varphi\varphi_3 + \varphi_1\varphi_2)}}.$$

R. Badia.

SULLA

POTENZA AD ESPONENTE IRRAZIONALE
DI UN NUMERO IRRAZIONALE

I.

Richiamo le seguenti proprietà:

1. Tutte le potenze positive e negative di un numero positivo sono positive.
2. Tutte le potenze positive dei numeri maggiori dell'unità sono maggiori dell'unità, e tutte le potenze negative sono minori dell'unità.

   L'opposto accade per le potenze dei numeri minori di uno.
3. Se x acquista valori razionali crescenti, la potenza a^x aumenta sempre quando a è maggiore di 1, e diminuisce sempre quando a è minore di 1.
4. Se a è maggiore di 1, scelto un numero w arbitrariamente grande, si può determinare un numero positivo n pel quale sia

$$a^n > w.$$

Infatti dall'identità

$$a^n - 1 = (a-1)\,(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$$

si deduce

$$a^n - 1 > (a-1)\,n\,;$$

perciò prendendo

$$n > \frac{w-1}{a-1},$$

sarà

$$a^n > w.$$

5. Se a è minore di 1, scelto un numero arbitrarimente piccolo σ, si può determinare un numero positivo n, in modo che sia

$$a^n < \sigma$$

6. Dati due numeri positivi a ed m, si può determinare un numero pure positivo ε tale che, per σ scelto arbitrariamente piccolo, sia

$$(1) \qquad a^{m+\varepsilon} - a^m < \sigma \quad \text{per } a > 1,$$

e
$$(2) \qquad a^m - a^{m+\varepsilon} < \sigma \quad \text{per } a < 1.$$

Supposto $a > 1$, si può sempre (4) determinare un numero n pel quale sia soddisfatta la

$$\left(1 + \frac{\sigma}{a^m}\right)^n > a$$

ossia la

$$1 + \frac{\sigma}{a^m} > a^\varepsilon$$

nella quale ε sta al posto di $\frac{1}{n}$.

Ora dalla precedente diseguaglianza risulta

$$a^m (a^\varepsilon - 1) < \sigma$$

ossia
$$a^{m+\varepsilon} - a^m < \sigma.$$

Quando a è minore di 1, e quindi $\frac{1}{a} > 1$, si potrà determinare un numero ε tale che, per σ_1 arbitrariamente piccolo, sia

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{m+\varepsilon} - \left(\frac{1}{a}\right)^m < \sigma_1$$

ossia
$$a^m - a^{m+\varepsilon} < \sigma_1 \, a^{2m+\varepsilon} < \sigma_1 a^{2m}$$

Perciò, posto $\sigma_1 = \frac{\sigma}{a^{2m}}$, sarà :

$$a^m - a^{m+\varepsilon} < \sigma.$$

7. Dati due numeri positivi a ed m ed un numero positivo ed arbitrariamente piccolo σ, si può determinare un numero positivo ε tale che abbia luogo la diseguaglianza

$$(a + \varepsilon)^m - a^m < \sigma.$$

Infatti quando sia

$$\varepsilon < \left\{(1 + \sigma_1)^{\frac{1}{m}} - 1\right\} a,$$

è soddisfatta la

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{a}\right)^m - 1 < \sigma_1,$$

la quale, moltiplicata per a^m, dà

$$(a+\varepsilon)^m - a^m < \sigma$$

quando si ponga $\sigma = \sigma_1 a^m$.

8. Dati due numeri positivi a ed m si possono determinare due numeri pure positivi ε, ε' tali che, per σ scelto arbitrariamente piccolo e positivo, sia

$$(a+\varepsilon')^{m+\varepsilon} - a^m < \sigma.$$

Si ha infatti (7)

$$(a+\varepsilon')^{m+\varepsilon} - a^{m+\varepsilon} < \frac{\sigma}{2},$$

e (6)

$$a^{m+\varepsilon} - a^m < \frac{\sigma}{2},$$

e queste, addizionate, dànno

$$(a+\varepsilon')^{m+\varepsilon} - a^m < \sigma,$$

II.

Sieno ora due numeri razionali α e β definiti dalle due classi A, A'; B, B', con

$$A \equiv \ldots a_1,\ a_2,\ \ldots.;\quad A' \equiv \ldots.\ a'_1,\ a'_1,\ \ldots.$$
$$B \equiv \ldots b_1,\ b_2,\ \ldots.;\quad B' \equiv \ldots.\ b'_1,\ b'_2,\ \ldots.$$

È noto che si possono trovare due numeri, uno della classe A ed uno della classe A', a ed a', tali che la loro differenza sia piccola quanto si voglia; lo stesso può ripetersi per le due classi B e B' (cfr. anche per le notazioni, il trattato d'Algebra elementare del prof. G. Garbieri).

Nel caso delle b positive e delle a maggiori di uno, le diseguaglianze

$$a' - a < \varepsilon',\quad b' - b < \varepsilon,$$

nelle quali ε ed ε' sono arbitrariamente piccoli, conducono alla

$$a'^{b'} - a^b < (a+\varepsilon')^{b+\varepsilon} - a^b;$$

Ma (8) i numeri ε ed ε' si possono scegliere così che sia

$$(a + \varepsilon')^{b+\varepsilon} - a^b < \sigma,$$

per σ arbitrariamente piccolo; perciò sarà *a fortiori*

$$a'^{b'} - a^b < \sigma \qquad \text{(I)}$$

Se ora formiamo le due classi di numeri

$$\text{(II)} \quad \ldots a_1^{b_1},\ a_1^{b_2} \ldots a_2^{b_1} \ldots . ;\ \ldots a'^{\,b'_1}_1,\ a'^{\,b'_2}_1,\ \ldots . a'^{\,b'_2}_2, \ldots .$$

quelli della prima sono minori di α^β e ne sono maggiori quelli della seconda, e in forza della (I), α^β è il numero definito dalle due classi. Se α e β sono irrazionali, diremo *analogamente* che le due classi (II) separano il numero α^β.

G. Giuliani.

COROLLARI E GENERALIZZAZIONE
DI UN TEOREMA D'EULERO SUL QUADRILATERO

I.

1. È notissimo il teorema che stabilisce una relazione fra i lati d'un quadrilatero, le sue diagonali e il segmento che unisce i loro punti di mezzo, cioè: la somma dei quadrati dei quattro lati d'un quadrilatero è eguale alla somma dei quadrati delle due diagonali aumentata di quattro volte il quadrato della congiungente i loro punti di mezzo. Il quale teorema si dimostra molto facilmente col sussidio della relazione che ha luogo fra i tre lati d'un triangolo e la mediana d'uno di essi. Ed è notevole che la dimostrazione non presuppone che il quadrilatero sia piano.

La relazione fra i lati d'un parallelogramma e le sue diagonali, che è, in forma diversa, quella fra i lati d'un triangolo e la mediana d'uno di essi, è un caso particolare del citato teorema d'Eulero. Ma da questo si rileva pure che ha luogo la reciproca della rammentata proprietà del parallelogrammo, cioè:

Se la somma dei quadrati dei quattro lati d'un qua-

drilatero eguaglia la somma dei quadrati delle sue diagonali, quel quadrilatero è un parallelogramma. (*)

2. Consideriamo ora un poligono di $2n$ lati, piano o gobbo, i cui vertici indicheremo ordinatamente con A, B, C,... A′, B′, C′, ... Applicando il teorema d'Eulero agli n quadrilateri ABA′B′, BCB′C′, ... e addizionando le n eguaglianze così ottenute, si troverà che la somma dei quadrati dei lati, aumentata della somma dei quadrati delle diagonali AB′, A′B, BC′, B′C, ... eguaglia il doppio della somma dei quadrati delle AA′, BB′, ... aumentata del quadruplo della somma dei quadrati dei segmenti $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ..., quando s'indichino con α, β, γ... i punti medj delle AA′, BB′, CC′, ... Di qui risulta il teorema:

Se la somma dei quadrati dei lati d'un poligono di numero pari di lati aumentata della somma dei quadrati di quelle diagonali che uniscono i due estremi di ciascun lato a quelli del lato ad esso opposto, escluse le congiungenti i vertici opposti, eguaglia il doppio della somma dei quadrati delle congiungenti i vertici opposti, queste congiungenti passano per uno stesso punto, che è il punto di mezzo di ciascuna di esse; e in conseguenza i lati opposti del poligono sono a due a due eguali e paralleli.

II.

3. Sia ABCD una base, e sieno AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 gli spigoli laterali consecutivi d'un prisma quadrangolare. Se le diagonali AC_1, BD_1 si tagliano nel loro punto di mezzo, lo spigolo AB risulta eguale e parallelo a D_1C_1, e quindi a DC; perciò:

Se le diagonali che partono da due vertici consecutivi d'una base d'un prisma quadrangolare si tagliano nel loro punto di mezzo, quel prisma è un parallelepipedo.

4. Applicando il teorema d'Eulero ai due quadrilateri ABC_1D_1, CDB_1A_1, e indicando con α il punto di mezzo delle diagonali AC_1, CA_1, e con β il punto di mezzo delle diagonali BD_1, B_1D, si ottengono le due eguaglianze:

(*) Questa osservazione era stata già fatta dal Sig. Stefano Gatti nei suoi *Elementi di Geometria piana con applicazione dell'Algebra*, Torino 1876.

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}_1^2 + \overline{C_1D}_1^2 + \overline{C_1B}^2 = \overline{AC}_1^2 + \overline{BD}_1^2 + 4\overline{\alpha\beta}^2,$$

$$\overline{CD}^2 + \overline{CB}_1^2 + \overline{DA}_1^2 + \overline{A_1B}_1^2 = \overline{CA}_1^2 + \overline{DB}_1^2 + 4\overline{\alpha\beta}^2,$$

le quali addizionate danno:

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{A_1B}_1^2 + \overline{C_1D}_1^2 + \overline{BC}_1^2 + \overline{B_1C}^2 + \overline{AD}_1^2 + \overline{A_1D}^2$$

$$= \overline{AC}_1^2 + \overline{BD}_1^2 + \overline{CA}_1^2 + \overline{DB}_1^2 + 8\overline{\alpha\beta}^2.$$

Ma dai parallelogrammi BCB_1C_1, ADA_1D_1 si ricava:

$$\overline{BC}_1^2 + \overline{B_1C}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{B_1C}_1^2 + \overline{BB}_1^2 + \overline{CC}_1^2,$$

$$\overline{AD}_1^2 + \overline{A_1D}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{A_1D}_1^2 + \overline{AA}_1^2 + \overline{DD}_1^2;$$

perciò è chiaro che:

Nel prisma quadrangolare la somma dei quadrati dei dodici spigoli è eguale alla somma dei quadrati delle quattro diagonali aumentata di otto volte il quadrato della congiungente i punti di mezzo delle diagonali.

5. Dal teorema ora dimostrato si ricava la nota relazione fra gli spigoli d'un parallelepipedo e le sue diagonali. E si ricava pure (3) la proposizione reciproca, cioè:

Se la somma dei quadrati dei dodici spigoli d'un prisma quadrangolare eguaglia la somma dei quadrati delle quattro diagonali, quel prisma è un parallelepipedo.

III.

6. Nel quadrilatero ABCD pongasi:

$$AB = a,\ BC = b,\ CD = c,\ DA = d,\ AC = m,\ BD = p;$$

e sieno L ed M punti delle diagonali BD, AC tali che si abbia:

$$\frac{BL}{BD} = \frac{CM}{CA} = h,$$

in cui h significa un numero positivo qualunque minore di 1. Indicato con g il segmento LM si avrà, pel teorema di *Ste-*

wart, (*), dal triangolo BMD,

$$g^2 + h(1-h)p^2 = h\,\overline{DM}^2 + (1-h)\,\overline{BM}^2 \qquad (1)$$

ma dai triangoli ABC, ACD risulta:

$$\overline{BM}^2 + h(1-h)m^2 = ha^2 + (1-h)b^2,$$

$$\overline{DM}^2 + h(1-h)m^2 = hd^2 + (1-h)c^2,$$

e quindi:

$$h.\overline{DM}^2 + (1-h)\overline{BM}^2 = -h(1-h)m^2 + h(1-h)(a^2+c^2) + (1-h)^2b^2 + h^2d^2;$$

perciò la (1) diverrà:

$$g^2 + h(1-h)(m^2+p^2) = h(1-h)(a^2+c^2) + h^2d^2 + (1-h)^2b^2 \quad \text{(I)}$$

la quale, per $h = \frac{1}{2}$, esprime il teorema d'Eulero.

7. Nel caso particolare:

$$g = 0, \text{ e quindi } \quad h = \frac{b}{b+d},$$

i lati AD e BC sono paralleli, e dalla (I) si ricava la nota relazione fra i lati d'un trapezio e le sue diagonali:

$$m^2 + p^2 = a^2 + c^2 + 2bd.$$

Reciprocamente, se ha luogo questa relazione, la (I) diviene:

$$g^2 + h(1-h).2bd = h^2d^2 + (1-h)^2b^2$$

ossia:

$$g^2 = (hd - (1-h)b)^2,$$

la quale, per

$$h = \frac{b}{b+d},$$

dà:

$$g = 0.$$

Dunque:

Se la somma dei quadrati delle diagonali d'un quadrilatero eguaglia la somma dei quadrati di due lati opposti aumentata del doppio prodotto degli altri due lati opposti, questi devono essere paralleli.

D. Besso.

(*) Questo teorema, che stabilisce una relazione fra i tre lati d'un triangolo, il segmento che unisce un vertice ad un punto qualunque del lato opposto, e i due segmenti di questo lato, si dimostra assai facilmente considerando i triangoli rettangoli che si ottengono conducendo da quel vertice la perpendicolare al lato opposto.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

ALGEBRA

Sulle equazioni di secondo grado

1. Trasformare la differenza $x^2 - c$ in un prodotto di due fattori di primo grado
2. Trasformare il trinomio di secondo grado
$$y = x^2 - 2mx + (m^2 - p)$$
in un prodotto di due fattori di primo grado, e da questa trasformazione ricavare i valori di x che annullano y.
3. Trovare le radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ trasformando il suo primo membro in un prodotto di due fattori di primo grado.
4. Trasformare in prodotti di due fattori di primo grado i seguenti trinomi:
$$n^2 - 3n + 2, \quad 2n^2 + n - 1, \quad \tfrac{1}{3}n^2 + \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{6}.$$
5. Porre il trinomio $x^4 - 12x^2 + 35$ nella forma di un prodotto di quattro fattori di primo grado.
6. Posto $x_1 + x_2 = a$, $x_1x_2 = b$, trovare un trinomio di secondo grado in x il quale si annulli per $x = x_1$ e per $x = x_2$.
7. Calcolare la somma dei quadrati e la somma dei cubi delle radici dell'equazione:
$$3x^2 - 5x - 9 = 0.$$
8. Esprimere in funzione di A, B, C il prodotto
$$\frac{1 + m_1^2}{A + Bm_1 + Cm_1^2} \cdot \frac{1 + m_2^2}{A + Bm_2 + Cm_2^2},$$
nel quale m_1 ed m_2 significano le radici dell'equazione
$$Bm^2 + 2\,(A - C)\,m - B = 0.$$
9. Posto: $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \beta$, esprimere in funzione di β le due somme:
$$\alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4}, \quad \alpha^5 + \frac{1}{\alpha^5}.$$

10. Provare che, se esiste un valore di x pel quale il trimio x^2+px+q sia negativo, l'equazione $x^2+px+q=0$ ha le radici reali e disegnali.

11. Provare che, se il trinomio x^2+px+q è positivo per $x=a$ e negativo per $x=b$, esso si annulla per un valore di x compreso fra a e b.

12. Applicare il precedente teorema al calcolo delle radici della

$$30x^2-407\,x+1=0$$

a meno di 0,001.

13. Per quali valori di x è negativo il trinomio x^2-5x+6?

14. Posto $y=7x^2+200x-375$, calcolare la differenza dei valori di y che corrispondono ad $x=100{,}000001$ ed a $x=100$.

Dimostrare che si può dare ad h un valore positivo così piccolo, che la differenza dei valori di y corrispondenti ad $x=100+h$ ed a $x=100$, sia minore di $\frac{1}{10^{1000}}$.

15. Nell'ipotesi che i numeri a, b, c soddisfacciano alla $b^2-4ac>0$ e che sieno dati i segni dei rapporti $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, determinare i segni delle radici della $ax^2+bx+c=0$.

16. A quali condizioni debbono soddisfare a e b affinchè l'equazione $x^4+ax^2+b=0$ abbia quattro radici reali?

17. Discussione delle radici della:

$$x^2-2bm\,x+b^2-a^2=0$$

nella quale a e b sono positivi ed m è, in valore assoluto, minore di 1.

18. Provare che, se l'equazione:

$$x^2+2m\,(k-n)\,x+k^2m^2-n^2+2kn=0,$$

nella quale m, k, n sono positivi o negativi, ha le radici eguali, deve aver luogo una relazione fra k ed n.

19. Quale relazione deve aver luogo fra f, g, f_1, g_1 affinchè uno stesso valore di x soddisfaccia alle due equazioni

$$x^2+fx+g=0,\quad f_1x+g_1=0\,?$$

20. Quale relazione deve aver luogo fra b, c, b_1, c_1 affinchè le due equazioni

$$x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

abbiano una radice comune?

21. Quale relazione deve aver luogo fra a, b, c, a_1, b_1, c_1 affinchè le due equazioni

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

abbiano una radice comune?

22. Esprimere in funzione di a, b, c, a_1, b_1, c_1 il prodotto

$$(a_1\beta_1^2 + b_1\beta_1 + c_1)\ (a_1\beta_2^2 + b_1\beta_2 + c_1)$$

nel quale β_1 e β_2 significano le radici della $ax^2+bx+c=0$; e dedurne la relazione menzionata nell'esercizio precedente.

23. Provare che, se l'eguaglianza:

$$ax^2 + bx + c = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

è soddisfatta da tre diversi valori di x, dev'essere

$$a = a_1,\ b = b_1,\ c = c_1.$$

24. Dimostrare che, se hanno luogo certe relazioni fra a, b, c, a_1, b_1, c_1, la frazione

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a_1x^2 + b_1x + c_1}$$

è indipendente da x.

25. Provare che la frazione $\frac{1}{x^2 - 1}$ si può mettere nella forma $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$, nella quale A e B sono indipendenti da x.

26. Provare che la frazione $\frac{3x^2 + 4}{x^3 - 15x^2 + 56x}$ si può trasformare nella somma

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-7} + \frac{C}{x-8},$$

nella quale A, B, C sono indipendenti da x.

27. Risolvere l'equazione

$$(x + 1)^2\ (x - 1)\ (x + 3) = 49725.$$

28. Trasformare il polinomio $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ in un prodotto di due fattori uno dei quali sia x^2 e provare che, colla sostituzione $y = x + \frac{1}{x}$, l'altro fattore diviene un trinomio di secondo grado rispetto ad y.

29. A quale condizione deve soddisfare il numero β affinchè l'equazione

$$x^4 + \beta x^3 - 10x^2 + \beta x + 1 = 0$$

abbia quattro radici reali?

30. Risolvere l'equazione:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-5} = 0.$$

D. Besso.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

F. Nicoli. — *Compendio di Geometria* con due appendici. — In Modena coi tipi della Società Tipografica, antica tipografia Soliani, 1885.

Il Prof. Francesco Nicoli, professore di matematica nella Scuola Militare di Modena, ha dato testè alle stampe un suo Compendio di Geometria, con due appendici, in cui sono riassunte le lezioni da lui dettate da parecchi anni nella scuola stessa. Il libro di cui è parola merita di esser segnalato all'attenzione degli insegnanti delle scuole secondarie per lo stretto rigore da cui è informato e per la sua semplicità e chiarezza, pregi che certamente non è facile riunire.

Le due appendici del Compendio, vertono sulla Trigonometria e sulle Projezioni quotate. Nella prima di queste, definiti i rapporti trigonometrici, l'A. passa ad esporre i teoremi dai quali dipende la risoluzione dei triangoli e fra questi può esser notato per la sua dimostrazione diretta il teo: che: *in ogni triangolo la somma di due lati stà alla loro differenza, come la tangente della semisomma degli angoli opposti a questi lati stà alla tangente della loro semidifferenza*, poi tratta la risoluzione dei triangoli sia rettangoli che obliquangoli e ne fà seguire alcune applicazioni. Nella seconda appendice vengono esposte quelle nozioni sulle proiezioni quotate, che sono necessarie a chi deve imprendere lo studio della Fortificazione. Vi si tratta della rappresentazione di punti e rette, del piano, dei problemi relativi a rette e piani, finalmente vi si dà qualche cenno sulla rappresentazione dei poliedri é sulle sezioni piane e intersezioni dei medesimi.

Per ciò che riguarda la pura geometria, in vista dell'uso al quale il libro è destinato, l'A. ne ha limitato la stereometria, dando invece uno sviluppo conveniente alla planimetria, per la quale ultima, mentre ha seguito il metodo euclideo, non ha mancato di aggiungere tutte quelle proposizioni che sono necessarie per rendere il libro più consono ai moderni studi. Per alcuni teo: le dimostrazioni diversificano da quelle che si leggono nei trattati ordinari; così ad es: per dimostrare il teo: *Se due lati di un triangolo sono rispettivamente uguali a due lati di un' altro triangolo e se l'angolo compreso dai primi è maggiore dell'angolo compreso dai secondi, il terzo lato del primo è maggiore del terzo lato del secondo*, l'A. si fonda sopra un teo: dimostrato prima che: *il segmento che unisce un vertice di un triangolo con un punto del lato opposto è minore di uno almeno degli altri due lati.*

Per venire a trattare dei segmenti proporzionali l'a., definito come rapporto fra due grandezze omogenee il numero che esprime la misura della prima quando la seconda è presa per unità, osserva che se le grandezze sono incomensurabili il rapporto stesso non può valutarsi che per approssimazione, e nella definizione di grandezze proporzionali esamina in seguito partitâmente i casi in cui le medesime sono commensurabili e sono incommensurabili e per l'ultimo così si esprime: se il rapporto a meno di $\frac{1}{n}$ di due grandezze incommensurabili è eguale al rapporto a meno di $\frac{1}{n}$ di altre due, e se quest'uguaglianza sussiste qualunque sia il numero n, si dirà pure che queste quattro grandezze sono proporzionali. Trattando poi dei poligoni simili, l'A. che è buon cultore della geometria proiettiva, non ha omesso di introdurre, per quanto lo consentiva il carattere di questo suo lavoro, il concetto di corrispondenza per modo da rendere gli enunciati delle proposizioni più esatti di quel che siano in libri che anche oggidì corrono per le mani della gioventù, considerando sempre il caso sia delle figure direttamente simili, quanto quello delle figure inversamente simili.

Per ciò che si riferisce alle aree, definite le grandezze commensurabili ed incommensurabili e la misura a meno di $\frac{1}{n}$ di una grandezza A rispetto ad un'altra omogenea U, l'A. ottiene l'area del rettangolo considerandone prima i lati commensurabili rispetto ad una stessa unità, poi dimostra che essendo questi incommensurabili rispetto alla data unità lineare, si può assegnare una misura a meno di $\frac{1}{n}$ dei medesimi, scegliendo n convenientemente, in modo che il prodotto de'numeri risultanti rappresenti l'area di un rettangolo avente dal dato una differenza minore di un triangolo piccolo quanto si vuole.

Finalmente per venire alla misura della circonferenza e del cerchio, l'A. premette come lemmi, quattro teoremi sui limiti e dimostra le proposizioni seguenti: *Se un arco minore di una semicirconferenza va sempre diminuendo, la distanza del centro della circonferenza dalla corda di quest'arco va sempre aumentando e giungerà a differire dal raggio meno di un segmento* h *piccolo a piacere*; poi: *si possono circoscrivere ad una circonferenza ed inscrivere in essa due poligoni regolari simili di un numero tale di lati che la differenza tra questi due poligoni risulti minore di un triangolo* t, *piccolo quanto si vuole e la differenza dei loro perimetri risulti parimenti minore di un segmento* h, *piccolo quanto si vuole*.

Questo per quanto riguarda la planimetria. Per ciò che si riferisce alla stereometria è da osservare anzitutto, come già fù avvertito in principio, che l'A. ne ha singolarmente ristretta la trattazione, poichè si è limitato all'esposizione delle proposizioni fondamentali sulle rette e piani paralleli, sulle rette e piani perpendicolari e sulle proiezioni ortogonali, aggiungendo poi le definizioni relative agli angoli, diedri e solidi, ai poliedri ed ai corpi rotondi e in un ultimo capitolo le regole per le misure delle superficie e dei volumi dei prismi, delle piramidi e dei corpi rotondi. Il capo che tratta delle proiezioni ortogonali è peraltro relativamente meno ristretto e ciò in vista di esporre alcune proposizioni che trovano applicazione nello studio della fortificazione, come ad es: questa: *se due piani obliqui al piano di projezione, hanno pendenze eguali e si tagliono, la projezione della loro intersezione è la bisettrice di uno degli angoli formati dalle loro traccie.*

Ed è forse per il desiderio di riescir breve che in taluni punti della II parte del libro esaminato, a nostro giudizio, può esser notata qualche omissione da parte dell'A. Così ad es. in principio della stereometria egli avrebbe potuto con profitto citare il postulato del piano che: *facendo ruotare il piano intorno a due qualunque de'suoi punti si può sempre portarlo a passare per un qualsivoglia punto dato,* poi fondandosi sul medesimo dimostrare il suo teo: 331 per mezzo di tre rotazioni successive del piano (*), indi citare l'altro postulato che: *il piano interseca la retta che passa per due punti posti da bande opposte di esso,* il quale trova immediata applicazione nel teo: 333.

La proposizione che per un punto esterno ad un piano dato passa un sol piano parallelo a quello dato non è avvertita ed avrebbe trovato opportuna sede dopo la definizione dei piani paralleli al n° 342. La prima parte del corollario al n° 360, cioè che: *se una retta è parallela ad un piano, tutti i punti della retta sono equidistanti dal piano,* pare a noi che non si deduca immediatamente dai teo: precedenti e sarebbe stato forse opportuno di innalzarla a teorema.

Nelle definizioni ai n. 405 e 406 è tacitamente ammesso il teo: *due angoli diedri sono proporzionali ai loro angoli piani corrispondenti:* sarebbe quindi stato bene premetterlo esplicitamente o citarlo in una nota. Finalmente, essendo il libro destinato a principianti, al n° 468, quando l'A. considera il tronco di piramide a basi parallele nel quale le basi sono rettangoli e dà la formola che esprime il volume in funzione dei lati delle basi e dell'altezza, avrebbe potuto con vantaggio porre in guardia il lettore inesperto che la formola stessa non serve che per questo caso e non per quello in cui i rettangoli non sono simili e coi lati omologhi paralleli.

Ma queste piccole cose non infirmano il merito del lavoro del Prof. Nicoli che ha dato alla non ricca raccolta di

(*) Come fa il Sig. Faifofer nei suoi *Elementi di Geometria.*

buoni libri scolastici di geometria, italianamente scritti e italianamente pensati, un contributo di notabile valore didattico; però noi vogliamo con lui condolerci di una cosa, che il libro stesso manchi di esercizi da servire di palestra agli studenti per sperimentare le loro forze, e rivolgergli una raccomandazione, quella cioè ch'ei ponga mano ad estendere la stereometria in quella stessa misura che ha fatto per la planimetria, poichè così modificato il suo lavoro potrebbe con profitto anche maggiore servire per gli istituti d'istruzione secondaria.

A. Lugli.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira* Professor na Escola Polytecnica do Porto: Vol. VI, N. 1, 2, 3, 4, 5. Coimbra, 1885.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*, 10.e Année, N.i 10 e 11. Paris, M. Nony, 17, Rue des Écoles.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion*, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, et *J. Neuberg*, Professeur à l'Université de Liège. Tome sixième, Janvier et Fevrier 1886.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XVIII. N.i 1 e 2. Firenze 1886.

L. Bianchi. — Sopra i sistemi tripli di superficie ortogonali che contengono un sistema di superficie pseudosferiche (1886).

E. Cesaro. — Considerations nouvelles sur le déterminant de Smith et Mansion.

R. De Paolis. — Le trasformazioni doppie dello spazio (1885).

G. Frattini. — Intorno alla generazione dei gruppi d'operazioni e ad un teorema d'aritmetica (1886).

M. Gremigni. — Teoria delle frazioni decimali periodiche (1883). — Sul cerchio e sulla circonferenza (1884). — La teoria dei quadrati ed il concetto di radicale quadrato (1885).

G. Iung. — Sui sistemi Cremoniani reciproci di grado m (1885).

A. Livini. — Scritti educativi e didattici (1884).

G. Loria. — Su alcune proprietà metriche della cubica gobba osculatrice al piano all'infinito (1885).

I. Neuberg. — Mémoire sur le tétraèdre (1884). — Sur les tétraèdres de Möbius (1884). — Sur les tangentes communes à un cercle et à une conique (1885). — Sur le quadrilatère harmonique.

F. Porta. — Trigonometria sferica. — Torino, Bocca, 1886.

L. Rajola Pescarini. — Rapporti esatti ed approssimati e Teoria delle proporzioni. Napoli, Morano, 1886.

A. Suini. — Elementi di prospettiva lineare. Milano, tip. degli Ingegneri, 1880.

OSSERVAZIONI ED ESEMPI
SULLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI DI GEOMETRIA

I.

Sebbene la felice risoluzione dei problemi dipenda in gran parte dalla intuizione individuale e dalla facilità nel richiamare alla mente e riavvicinare quelle cognizioni che vi hanno stretto legame, nondimeno si possono dare alcune regole generali che, aiutando i principianti, valgano ad evitare tentativi infruttuosi ed avvezzarli ad una esposizione ordinata e rigorosa.

I metodi seguiti nella risoluzione dei problemi geometrici si riducono sostanzialmente a due: *analitico* e *sintetico*.

Il metodo analitico consiste nel ridurre il problema ad un altro noto, cioè nel rinvenire un problema di cui sia conosciuta la soluzione ed onde si possa far discendere quella del dato.

Il metodo sintetico consiste nel *dedurre* (onde si chiama anche *deduttivo*) dalla soluzione di un problema quella di un altro, e così via, finchè si giunga al proposto, che in tal guisa verrà ad essere risolto.

Col primo metodo si passa dall'ignoto al noto; col secondo, dal noto all'ignoto; ond'è che giustamente l'uno venne chiamato da Kant *metodo regressivo*, l'altro *metodo progressivo*.

II.

Metodo analitico

Secondo questo metodo la risoluzione d'un problema si compone in generale di cinque parti ben distinte:

1° Costruzioni ausiliarie.

2° Esame, per mezzo della figura ausiliaria, di relazioni sussistenti fra i dati e le incognite del problema, per cui gli uni determinano le altre.

3º Costruzione finale.

4º Dimostrazione.

5º Discussione.

1º Costruzioni ausiliarie. – La prima cosa da farsi è di supporre il problema già risoluto, tracciando una figura che risponda approssimativamente ai dati. Ciò fatto, si cerca di effettuare qualche costruzione preparatoria (conducendo linee e determinando punti in istretta relazione colla data figura) tale che conduca ad una figura facilmente costruibile coi dati, e da cui la richiesta possa dedursi ricorrendo alle mutue loro relazioni. Non si possono stabilire regole fisse per queste costruzioni sussidiarie; ma, se ben si riflette alla natura della questione ed alle verità geometriche che essa richiama, si resta naturalmente guidati nella scelta degli elementi che si possono prendere in aiuto.

Queste costruzioni hanno per iscopo di mettere in evidenza i rapporti sussistenti tra i dati e le incognite del problema, ed arrivare a determinare le une per mezzo degli altri. Nell'andarne alla ricerca bisogna sempre tener presente questo loro scopo essenziale.

II. Esame. – Eseguite le opportune costruzioni ausiliarie si procede col loro aiuto all'esame delle relazioni che hanno tra loro i dati e le incognite nella questione. Per questo è necessaria la conoscenza delle proprietà delle figure che si hanno in esame; e inutile riuscirebbe ogni tentativo per la risoluzione d'un problema se non si presentassero spontaneamente al pensiero i teoremi su cui poterla fondare. La giudiziosa loro scelta e combinazione è suggerita dalla stessa natura dell'argomento a chi si sia alquanto impratichito dei procedimenti geometrici ed abbia fatto attento studio delle proprietà delle figure. Importerà anzitutto di non divagarsi in considerazioni estranee all'argomento; ma concentrare l'attenzione sulle proprietà che hanno *diretta relazione* coll'enunciato.

III. Costruzione finale. – Trovate le relazioni fra i dati e le incognite, o meglio fra la figura ausiliaria e quella da costruirsi, per mezzo delle quali la prima determini la seconda, si è in grado di risolvere il problema.

Un problema si riterrà risolto quando le incognite si sapranno determinare per mezzo delle costruzioni elementari della geometria, e cioè

a) condurre una retta che passi per due punti dati;
b) descrivere con dato centro e dato raggio una circonferenza;
c) condurre un piano per tre punti dati, oppure (ciò che è lo stesso) per un punto e una retta, per due rette concorrenti, per due parallele;
d) descrivere una sfera con dato centro e dato raggio;

oppure quando si sia ridotto, per mezzo di queste costruzioni elementari, a un altro di cui sia nota la soluzione.

Non è inutile poi avvertire che la costruzione non sarà esatta se non quando la figura ottenuta soddisfi a *tutte* le condizioni imposte. Essa si raggiunge immediatamente, una volta conosciute le relazioni in parola, ripassando dalla figura ausiliaria alla primitiva col cammino inverso a quello mediante il quale dalla primitiva (supposta esatta) si era passati a questa. In breve, le costruzioni finali sono ordinatamente le inverse delle ausiliarie.

IV. Dimostrazione. – Quando si sia indicato il modo di costruire la figura cercata rimane a farsi la *dimostrazione*, vale a dire quel ragionamento con cui si prova, appoggiandosi a teoremi conosciuti, che essa è quella richiesta, o in altri termini soddisfa a tutte le condizioni stabilite. Se l'analisi fatta precedentemente era esatta, la costruzione non può essere che giusta, perchè ottenuta tenendo accuratamente calcolo di tutte le condizioni: epperò logicamente la dimostrazione non sarebbe necessaria. Pure, come utile esercizio e verificazione dell'analisi eseguita, converrà stenderla con diligenza.

V. Discussione. – Non può dirsi completa una risoluzione quando non venga accompagnrta dalla relativa discussione. Talora un problema non ammette soluzione alcuna, tal altra ne ammette più d'una; altre volte, infinite: la modificazione di qualche dato può far passare dall'uno all'altro di questi casi. La discussione ha appunto per oggetto di abbracciare il problema in tutta la sua generalità, osservando come cangi il numero delle soluzioni quando i dati vengano modificati nella loro grandezza o posizione (non nella loro natura); e distinguendo nettamente i limiti tra i diversi casi. Essa poi conduce ad osservazioni e proprietà che possono mettere in chiara luce l'essenza del problema; e si raccomanda in particolare ai principianti, i quali generalmente la trascurano troppo.

III.

La soluzione d'un problema si riduce talora, o se ne può facilmente far dipendere, alla determinazione di qualche punto. In questo caso si ricorre alle conoscenza dei *luoghi*, cioè l'assieme di punti (costituenti una linea o una superficie) tali che *essi*, ed *essi soltanto*, soddisfacciano a una data condizione.

Così il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due fissi è il piano perpendicolare sul mezzo del segmento rettilineo che li congiunge; essendo che tale proprietà spetta ai punti di quel piano, e non ad altri.

Or bene, dall'esame delle condizioni cui nel problema è assoggettato il punto richiesto si vedrà, considerando a parte ogni condizione, che esso dovrà giacere su due o più luoghi contemporaneamente. Se questi avessero più punti a comune, essendochè tutti soddisferebbero alle condizioni date, il problema ammetterebbe più d'una soluzione. Bisognerà poi cercare, nel caso che più luoghi si presentassero, di scegliere i più semplici, i quali dovranno essere rette o circoli, piani o sfere, se si vuol rimanere nel dominio della geometria elementare.

IV.

Giunge a proposito un'osservazione. Un problema potrebbe ammettere in certi casi, ed anche sempre, infinite soluzioni; e allora, dopo aver dimostrato come le condizioni imposte siano insufficienti, cioè che altre se ne potrebbero stabilire oltre quelle, basterà naturalmente costruire una fra le infinite figure rispondenti alla questione. Però se quanto si domanda è un punto, non bisognerà limitarsi a costruirne uno, ma sarà duopo determinarne il *luogo*.

I problemi di questo genere sono generalmente enunciati in modo da far palese la infinità dei punti che vi soddisfanno; e si limitano appunto a richiedere il luogo. La loro risoluzione conterrà un teorema, venendosi così a dimostrare una proprietà del luogo stesso.

V.

Metodo sintetico

Non sempre si usa nella risoluzione dei problemi il metodo analitico, sebbene sia il più sicuro e fecondo. Alcune volte la semplicità della questione fa in sulle prime intravvedere la costruzione da eseguirsi, o suggerisce un noto problema dal quale si possa far dipendere il dato; senza che occorra una completa analisi. In questo caso non rimane altro a dimostrarsi che quella costruzione è esatta, cioè corrisponde appieno al problema.

Questo modo di risolvere i problemi costituisce il metodo sintetico; esso non comprende quindi che due parti, costruzione e dimostrazione, alle quali sarà bene aggiungere la discussione.

Il carattere dommatico di questo metodo, se lo fa preferire nella esposizione scolastica e nei libri di testo, non mette in piena luce il processo con cui si è giunti alla soluzione, e la fa apparire piuttosto un'intuizione o divinazione che il natural risultato di ben collegati raziocini.

Se il metodo sintetico fa conoscere il vero, l'analitico mostra anche come vi si è giunti: è quindi a un tempo più convincente ed istruttivo; e, dando più largo campo alla investigazione individuale, apre meglio la mente a superare nuove difficoltà.

VI.

Dimostrazione dei teoremi

Non solo nella risoluzione dei problemi, ma ben anco nella esposizione di teoremi e della scienza in generale, si possono seguire i due metodi sintetico e analitico, intesi nel senso generale come furono definiti nel n. I.

Il metodo analitico, universalmente applicato nei testi di geometria elementare, si accontenta di enunciare i teoremi (senza mostrare per che via si siano presentati), e costringe ad accettarli *a posteriori* con un ragionamento mediante il quale da essi si risale ad altri conosciuti, passandosi così dunque dall'ignoto al noto. Il sintetico invece progredisce ordinatamente da una verità all'altra per via di deduzione; cammina cioè dal noto all'ignoto, mostrando la via tenuta nel rinvenire date verità.

E qui si noti la differenza essenziale di metodo tra risolvere una data questione a parte, e lo stabilire dei veri formanti un corpo di dottrina. Nel primo caso è opportuno seguire il metodo analitico; nel secondo è meglio, anzi quasi sempre necessario appigliarsi al sintetico; e le verità geometriche che tutto dì si vanno scoprendo in gran parte non si sono ottenute altrimenti. Il metodo sintetico, come il vero processo dell'invenzione, è da preferirsi per la razionale esposizione della scienza: se non che sarebbe impossibile seguirlo quando essa non fosse giunta a un'ordinato e logico assieme, per cui ogni verità conduca grado grado ad altre, senza che vi sia sconnessione fra le varie parti o i teoremi appaiano quasi il frutto di un caso fortunato.

L'insegnamento della geometria elementare sarebbe assai più proficuo per l'intelligenza e meglio preparerebbe agli studi superiori, ove venisse dato sinteticamente; ed io faccio voti sorga presto un buon trattato che s'ispiri a questi principî.

VII.

Nel novero dei problemi possiamo comprendere i teoremi da dimostrare o le proposizioni da esaminare, per riconoscere se siano vere o false. Gioverà attenersi al metodo analitico, per quanto già si disse; e cioè partendo da questa proposizione si risalirà ad altre, per via di induzione, finchè si giunga ad una conosciuta. Se questa è falsa, sarà pure falsa la primitiva (giacchè da una verità non può scaturire, ragionando esattamente, una conseguenza erronea); se questa è giusta, non potremo dire che lo sia parimenti la prima; ma si dovrà, rifacendo in senso inverso il cammino, vedere se reciprocamente dalla prima si possa dedurre la seconda: perchè allora, e allora soltanto, essa è conseguenza di verità, e quindi vera (*).

(*) Che da un falso si possa, ragionando esattamente, *arrivare* ad una conclusione esatta, ognuno lo comprende di leggieri; e parecchi esempi si potrebbero dare. Per citarne uno dalle scienze fisiche, e certo falsa l'ipotesi di due fluidi elettrici aventi le proprietà che loro si attribuiscono; pure ne discendono delle verità verificate; e cioè, per citare una frase molto espressiva dei Francesi, *le cose avvengono come se così fosse realmente* (les choses se passent comme s'il était ainsi). Parimenti la teoria atomica è probabilmente falsa; eppure essa serve a spiegare molti fenomeni, alla cui esistenza si può giungere partendo da essa, e della quale

VIII.

ALCUNI ESEMPI.

Daremo qualche esempio per meglio far comprendere ed applicare le precedenti osservazioni.

---

quindi appaiono conseguenze. *Appaiono* dico; giacchè a rigore logico il vero a cui si *giunge* partendo da un falso non si può ritenerne la *conseguenza*, talchè in fondo il vero non può essere che conseguenza del vero. Le conclusioni vere da falsi principi si hanno allorquando, (e questo avviene il più delle volte senza che ce ne accorgiamo) non si tien conto della completa ipotesi, e trascurando quella parte di falso, per così dire, che essa contiene, si fonda il ragionamento solo su certe proprietà generali che effettivamente sono vere. Tali conclusioni non muterebbero se anche l'ipotesi venisse modificata, attenendosi ai principii che l'hanno ispirata. Ognun sa ad esempio che se invece di due fluidi elettrici si ammettessero due forze contrarie, le conseguenze sarebbero le stesse; per cui la verità delle conclusioni non sta nell'ipotesi dell'esistenza dei due fluidi, ma piuttosto nel modo di agire di quella qualunque causa che così si chiama; modo che è esatto, perchè fondato sull'esperienza; e che non può quindi condurre che a conseguenze esatte.

Queste osservazioni sono importanti nelle scienze naturali, le quali si valgono di ipotesi che non ponno direttamente essere verificate, e per giudicare le quali conviene ricorrere alle conseguenze. Se una data ipotesi conduce a un falso, essa va rigettata come falsa; mentre se conduce a un vero essa non si può ritenere esatta se non quando questo ne sia una *vera conseguenza* e cioè non possa aver luogo senza quella. Ma il verificarlo è difficile ed anche impossibile talvolta per la molteplicità delle ipotesi che si possono fare; mentre per altra parte sfugge il più delle volte, nel ragionare su un'ipotesi, quella parte essenziale di essa che poi andrebbe esaminata: cosicchè viene a mancare, da una parte la prova per asserire, dall'altra quella per negare; e si resta sempre incerti.

Nella geometria felicemente però avviene tutt'altro; qui il piccolo numero di ipotesi che si possono generalmente fare su un dato soggetto e la facilità d'una discussione che porti presto a una

Esempio. I.

Dato nel piano d'un angolo un punto, condurre per esso una retta tale che il segmento intercetto fra i lati sia diviso a metà dal punto stesso.

Qui daremo l'esempio d'un'analisi completa e diffusa, con tutte le 5 parti accennate nel n. II e nell'ordine ivi tenuto.

1. — Suppongasi già costruita la retta desiderata, la quale dovrà quindi esser tale che il segmento AB (fig. 1) compreso tra i lati del dato angolo C sia diviso a metà nel punto dato P.

Qui è opportuna una costruzione ausiliaria, perchè la

---

conseguenza falsa, se falsa era l'ipotesi, forniscono un criterio pressochè sicuro.

Un esempio fisserà meglio le idee sulle cose esposte.

Partendo dall'ipotesi errata che la corda in un cerchio sia proporzionale all'arco, deduco che le corde che congiungono i punti di divisione d'un arco diviso in n parti eguali sono eguali fra loro; in quantochè sarebbero la n^{esima} parte della corda corrispondente all'intero arco: e questo risultato è esatto. Ma se ben si guarda, questa non è a rigore una conseguenza dell'ipotesi presa nel suo complesso; ma d'un'altra più generica, e vera, che le corde degli archi parziali hanno tutte lo stesso rapporto $\left(\text{che non è } \frac{1}{n}\right)$ con quella dell'arco totale. Che se invece si tien calcolo dell'ipotesi che questo rapporto sia $\frac{1}{n}$, ne verrebbe che la corda dell'arco totale dovrebbe essere eguale alla somma delle corde degli archi parziali (perchè n volte la sua n^{ma} parte); cioè un segmento rettilineo dovrebbe essere eguale ad una spezzata contermine: conseguenza assurda che ci avverte della falsità dell'ipotesi. Parimenti se si supponesse che in un qualunque triangolo la mediana sia bisettrice dell' angolo dal cui vertice parte, ipotesi errata, si potrebbe facilmente giungere alla proposizione esatta che essa divide a metà tutte le parallele alla base. Ma è facile vedere che questo non discende necessariamente dall'ipotesi; la quale invece, tenuto calcolo di tutto, condurrebbe ad ammettere che il triangolo sia diviso in parti eguali e quindi isoscele: e questa conseguenza è, come deve essere, falsa, e ci avverte della falsità dell'ipotesi.

figura come sta non fornisce relazioni sufficienti per la determinazione dell'incognita. Si osservi infatti che del triangolo ABC non conosciamo che un angolo, il C; e che l'essere P il punto di mezzo del lato opposto AB ha in sè molto di vago, o per lo meno non si traduce immediatamente in relazioni fra gli altri elementi del triangolo, si che valgano a far scorgere il modo di costruirlo.

Andiamo adunque in cerca di questa costruzione ausiliaria. La prima idea che si presenta è di condurre la retta CP che per dato del problema è nota. La conoscenza dell'angolo C e della retta CP ci fa subito pensare se si possa costruire qualche figura con questi dati. Siamo così condotti facilmente al parallelogrammo, tanto più se si riflette che CP sega BA a metà, fatto che ci richiama subito le diagonali d'un parallelogrammo per le quali il bisecarsi scambievolmente è proprietà caratteristica. In conformità di questa osservazione nasce spontanea l'idea di prolungare di altrettanto la retta CP nel punto D, per avere in tal guisa due segmenti BA, CD che si tagliano a metà, e i cui estremi sono quindi vertici di un parallelogrammo.

In tal guisa abbiamo costruito una figura ausiliaria, il parallelogrammo ABCD (parallelogrammo perchè le diagonali si tagliano a metà), facilmente determinabile coi dati del problema, e dal quale la figura richiesta non meno facilmente si può dedurre.

2. – E infatti esaminiamo le relazioni delle due figure. Intanto il parallelogrammo è determinato coi dati del problema, giacchè uno de' suoi angoli dev'essere il dato C ed una sua diagonale la CD, doppia di CP, retta nota. Di questo parallelogrammo poi la retta richiesta AB é l'altra diagonale. È così trovata una relazione determinatrice tra la figura ausiliaria (il parallelogrammo) e la domandata (la retta AB).

3. – Una volta ottenuta questa relazione, la costruzione è subito eseguita rifacendo il cammino in senso in-

verso; vale a dire partendo dal parallelogrammo per arrivare alla retta AB, sua diagonale. Si procederà dunque così:

Congiunti con retta i punti C e P, si prenda $PD = PC$ e si completi il parallelogrammo di cui C è un angolo e CD una diagonale, conducendo da D le parallele DB, DA ai due lati dell'angolo C. Condotta AB, questa sarà la retta richiesta.

4. — E infatti nel parallelogrammo ABCD le diagonali si tagliano a metà, dunque la AB dovrà passare per il punto di mezzo P dell'altra diagonale CD, ed ivi dovrà essere divisa a metà; vale a dire il segmento costruito AB passa per P, il quale è poi il suo punto di mezzo; cioè soddisfa alle condizioni del problema.

5. — Il punto P può avere diverse posizioni; e precisamente sono a distinguersi tre casi: 1.º quando è interno all'angolo, 2.º quando è sopra un lato, 3º quando è fuori dell'angolo.

Nel primo caso, che è quello contemplato dalla figura, si può realmente costruire un parallelogrammo, ed uno solo, il quale avrà, oltre la CD, una sola diagonale AB, epperò il problema ammette un'unica soluzione.

Nel secondo caso non si può costruire un vero parallelogrammo; o a meglio dire, il parallelogrammo si riduce al segmento CD preso sul lato su cui giace P in modo che $CP = PD$ (fig. II); e la CD si può considerare come una soluzione impropria.

Nel terzo abbiamo una soluzione; se non che uno dei lati va prolungato al di là del vertice, per essere incontrato dalla retta costruita (fig. III).

IX.

Daremo un altro esempio per mostrare il modo con cui, nel metodo analitico, si è guidati alle costruzioni ausiliarie, e per fornire nel tempo stesso il modello d'una discussione la quale ci fornirà l'occasione di formulare una regola importante.

Esempio II. – *Per il punto* P *comune a due circonferenze* O *e* Q *condurre una retta tale che il segmento intercetto fra le stesse eguagli un segmento dato* r (fig. IV).

1. – Suppongasi già tracciata la retta AB che soddisfa al problema. Tutta l'attenzione deve concentrarsi per ottenere, secondo le regole stabilite, una figura determinata dai dati del problema, e da cui la retta richiesta possa ricavarsi facilmente.

Qui di noto c'è la retta OQ; con questo adunque e cogli altri dati vediamo di costruire qualche figura utile allo scopo. Si presenta subito alla mente il teorema che i raggi perpendicolari alle corde le dividono a metà, essendo questione appunto di corde e di grandezze loro. Onde naturalmente si è guidati a condurre da O e da Q le perpendicolari ad AB; queste, cadendo in C e D sulla AB, divideranno a metà le corde AP e PB; onde CD sarà la metà di AB, cioè metà di r; epperò la sua grandezza ci sarà nota. In tal modo ecco che abbiamo ottenuto un trapezio rettangolo OCQD, di cui ci sono noti i lati obliqui OQ, CD, e che è in istretta relazione colla retta da costruirsi. Quel trapezio però non è completamente conosciuto; onde noi cercheremo di dedurne una figura che si sappia tosto determinare coi risultati così ottenuti.

Riflettendo che del trapezio sono noti due lati non che degli angoli (quelli retti) elementi sufficienti a determinare un triangolo, sorge spontanea l'idea di condurre la QE parallela a CD, la quale dà luogo a un triangolo rettangolo EQO. Di questo si conosce l'ipotenusa e un cateto $EQ=CD=\frac{1}{2}r$, onde si sa costruire; per altro esso determina alla sua volta la retta AC, onde possiamo ritenere esaurita la costruzione ausiliaria.

2. – Esaminiamo ora le relazioni fra la figura ausiliaria e quella richiesta. Basterà all'uopo osservare che la AB, per la stessa costruzione, viene ad essere la parallela condotta da P al cateto QE del triangolo.

3. – Possiamo immediatamente venire alla costruzione. Basta, secondo la regola generale, eseguire le costruzioni in

ordine inverso; cosicchè, mentre prima siamo partiti dalla retta incognita AB per arrivare alla figura nota del triangolo rettangolo, ora passeremo da questa a quella, la quale verrà in tal modo ad essere determinata. La costruzione è pertanto la seguente:

Sopra OQ come ipotenusa si costruisce il triangolo avente come cateto QE un segmento eguale alla metà di r (basterà descrivere un semicerchio su OQ, e, centrato in un estremo Q, con raggio $= \frac{1}{2}r$ segarlo nel punto E, che si congiungerà cogli estremi O e Q); dal punto P si condnca la parallela AB alla QE, e questa sarà la retta richiesta.

4. — Dimostriamo l'esattezza della costruzione. Prolungata OE fino ad incontrare in C la corda AP, si conduca da Q la parallela QD ad OE (serve ancora la fig. IV): queste ultime due rette sono raggi nei due cerchi perpendicolari alle corde AP, PB (perchè perpendicolari alla loro parallela QE); epperò le dividono a metà; onde il segmento CD sarà la metà di AB. Ma $CD = QE$, perchè lati opposti di un rettangolo; ed essendosi fatto $QE = \frac{1}{2}r$, sarà CD pure $= \frac{1}{2}r$, epperò $AB = r$. La AB pertanto passa per il punto dato P ed ha la lunghezza voluta r, e quindi soddisfa completamente al problema.

5. — Discutiamo ora la soluzione. Se $QE = \frac{1}{2}r$ è minore di OQ, sopra questa retta come ipotenusa si ponno costruire due triangoli rettangoli aventi un cateto eguale a $\frac{1}{2}r$; e cioè facendo partire il cateto $= \frac{1}{2}r$ dall'uno oppure dall'altro estremo dell'ipotenusa. Laonde, conducendo a questi due cateti la parallela da P avremo chiaramente due rette soddisfacenti entrambe al problema.

Se $\frac{1}{2}r$ fosse $=$ OQ, allora il triangolo rettangolo si ridurrebbe alla OQ, e la parallela condotta da P a questa retta sarebbe in tal caso l'unica soluzione del problema.

Se finalmente si avesse $\frac{1}{2}r >$ OQ, $\frac{1}{2}r$ non potrebbe essere cateto d'un triangolo di cui OQ fosse l'ipotenusa; quindi il problema non ammetterebbe soluzione.

Concludendo, il problema ammette:

due soluzioni	quando	il segmento $\frac{1}{2}r$	sia				$< OQ$
una soluzione	»	»	»	»	»		$= OQ$
nessuna »	»	»	»	»	»		$> OQ$

X.

La discussione precedente ci porta ad un'osservazione generale. Quando un problema ammette al più due soluzioni, dovrà a volte presentarne una sola, a volte nessuna; e il passaggio tra i casi in cui le soluzioni sono due e quelli in cui non ne esiste alcuna, sarà sempre segnato da quello in cui se ne ha una sola.

Questo fatto costante dipende in ultima analisi da ciò che un cerchio può essere segato da una retta, a norma della sua posizione, in due punti, in uno o in nessuno; è precisamente che se una retta si muove con una certa legge sul piano d'un cerchio, se dapprima lo segava in due punti, verrà un momento in cui più non lo segherà, e il passaggio tra l'uno e l'altro stato di cose è dato da quell'istante in cui i due punti di segamento riunendosi in uno, la retta diviene tangente.

XI.

Come esempio dell'applicazione di luoghi geometrici, in conformità al detto nel n. III, e nel medesimo tempo per fare applicazione del problema precedente, risolveremo il seguente:

Esempio III. — *Costruire un triangolo eguale a un triangolo dato* ABC, *e i cui lati passino per tre punti dati* M, N, P. (fig. V).

Qui non faremo più la distinzione che per maggior chiarezza abbiamo posto tra le cinque parti delle soluzioni precedenti: e in tal modo intendiamo offrire un esempio della forma sotto cui si esporrà preferibilmente la soluzione dei problemi.

Supposto costruito il triangolo richiesto A'B'C', eguale cioè ad ABC e i cui lati passino per M, N, P, osservo che, volendosi che sia angA' = angA, angB' = angB e per conseguenza angC' = angC, il vertice A' dovrà trovarsi su un arco di cerchio capace dell'angolo A, e così B' su un arco di cerchio capace dell'angolo B, e costruiti rispettivamente su PN e su PM. Per altro riflettendo che A'B' deve essere eguale ad AB, tosto si presenta la seguente soluzione:

Descritto su PN un arco di cerchio capace dell'angolo A, su PM uno capace dell'angolo B, si conduca per P, seguendo la costruzione del problema precedente, una retta a segare i due cerchi in guisa che sia A'B' = AB. Condotte poi A'N, B'M a segarsi in C', sarà A'B'C' il triangolo richiesto.

Infatti per costruzione si ha A'B' = AB, angA' = angA, angB' = angB; dunque il triangolo A'B'C' sarà eguale ad ABC; e siccome per costruzione i suoi lati passano rispettivamente per i punti M, N, P, esso sarà il richiesto.

Per discutere poi questa soluzione, osserviamo anzitutto che su NP, invece di costruire un angolo eguale ad angA potevamo costruirne uno eguale ad angB oppure ad angC; e analogamente su PM; e si sarebbero così ottenuti altri triangoli soddisfacenti al problema. Perchè determinati due angoli lo è anche il terzo, così si vede che avremmo potuto procedere in 6 modi differenti, costruendo su NP un angolo eguale ad A, oppure a B, oppure a C, e in ognuno di questi casi costruendo su PM un angolo eguale all'uno oppure all'altro dei due rimanenti.

Ognuna poi di queste maniere può dar luogo a due soluzioni; giacchè, come vedemmo dal precedente problema, per un punto comune a due cerchi si possono condurre al più due seganti eguali a un segmento dato; e qui appunto, una volta fissati i due angoli che si prendono da principio (uno opposto a NP e l'altro a PM) resta fissato il lato da prendersi, cioè la lunghezza della segante da condursi per P.

Osservando che in tal modo abbiamo esaurite tutte le possibili combinazioni dei dati (giacchè ogni altra sarebbe compresa in queste) si vede che si avranno *al più* dodici soluzioni del problema proposto.

Accontentandoci di avere accennato a questo fatto, non entreremo in una minuta e tediosa discussione di tutti i casi possibili, potendo le soluzioni ridursi da 12 sino a 0. Ognuno che il voglia potrà farlo senza difficoltà, fondandosi sopra la discussione del II esempio.

La stessa costruzione serve a risolvere il celebre problema di Newton : « Costruire un triangolo eguale a un dato e i cui vertici giacciano su tre rette date ».

E invero se il triangolo dato è MNP (fig. V) e le tre rette date formano l'altro triangolo ABC, colla costruzione di poc'anzi si formerà il triangolo A'B'C' eguale ad ABC, e i cui lati passino per M, N, P. Il problema è così risolto, bastando ora portare il triangolo A'B'C' su ABC, perchè allora i tre punti M, N, P, si porteranno nella posizione dai vertici del triangolo domandato. E cioè i tre punti sui lati del triangolo ABC che dai vertici di esso hanno le distanze stesse che M, N, P, hanno rispettivamente dai vertici dell'egual triangolo A'B'C', congiunti con rette, daranno il triangolo richiesto.

XII.

Abbiamo detto che in generale la natura stessa della questione suggerisce le costruzioni ausiliarie che possono servire nel rinvenimento di relazioni utili fra i dati e le incognite. Per agevolare questo compito si può ricorrere al calcolo, giovandosi di relazioni *metriche* (di grandezza) fra cognite e incognite, in guisa da aver elementi sufficienti per la costruzione, – o diretta, o per mezzo di altre ausiliarie a cui condurrà naturalmente il calcolo, – della richiesta figura.

Eccone un esempio che varrà cogli altri a mostrare i diversi aspetti sotto cui si può presentare il metodo analitico.

Esempio IV. - *Date le tre altezze* a, b, c, *d'un triangolo, costruirlo*.

Suppongo sia ABC (fig. VI) il triangolo richiesto, le cui altezze AA', BB', CC' siano rispettivamente eguali ad a, b, c.

Osservo che i due triangoli $AA'C$, $BB'C$ sono simili per aver due angoli eguali, onde sussisterà la proporzione: $AC : AA' :: BC : BB'$ ossia $\frac{AC}{a} = \frac{BC}{b}$.

Parimenti i due triangoli simili ABB', ACC' danno $\frac{AB}{b} = \frac{AC}{c}$. Qui si hanno due eguaglianze, di cui la prima contiene il rapporto $\frac{AC}{a}$, la seconda il rapporto $\frac{AC}{c}$. Per avere in tutte e due lo stesso rapporto, ad es. $\frac{AC}{a}$ e poterle così confrontare, moltiplicherò ambo i membri della seconda per $\frac{c}{a}$, col che ottengo

$$\frac{AB}{b} \cdot \frac{c}{a} = \frac{AC}{c} \cdot \frac{c}{a} \quad \text{cioè} \quad AB : \frac{ab}{c} = AC : a$$

Ora $\frac{ab}{c}$ è una quantità nota dai dati del problema ed è geometricamente costruibile, essendo essa la quarta proporzionale, che dirò d, dopo c, a, b. E invero dalla proporzione $c : a :: b : d$ si ricava appunto $d = \frac{ab}{c}$.

Dunque si hanno le eguaglianze

$$\frac{AC}{a} = \frac{BC}{b}; \quad \frac{AB}{d} = \frac{AC}{a}; \text{ onde } \frac{AC}{a} = \frac{BC}{b} = \frac{AB}{d}.$$

Quest' ultima dimostra che i tre lati AC, BC, AB del triangolo da costruirsi sono rispettivamente proporzionali alle tre rette *a*, *b*, *d*: vale a dire il triangolo formato con queste tre rette sarà simile al cercato. Adesso che sappiamo costruire un triangolo simile al voluto, facilmente costruiremo anche quest'ultimo.

Incomincieremo dunque a determinare la lunghezza *d*, costruendo nel modo noto la quarta proporzionale dopo *c*, *a*, *b* (fig. VII). Ciò fatto costruiremo un triangolo APQ i cui lati sieno quei tre segmenti, e cioè $AP = a$, $AQ = d$, $PQ = b$; e che sarà simile al domandato. Per ottenere il quale basterà dunque condurre la parallela BC al lato QP, determinando B in guisa che l'altezza BB′ eguagli la *b*, come si è fatto nella figura. Il triangolo ABC risolve il problema.

Condotte infatti le tre altezze AA′, BB′, CC′ si trova, ripetendo il ragionamento di prima, che queste altezze sono risp. proporzionali ad *a*, *b*, *c*; ma la seconda è per costruzione eguale alla stessa *b*; dunque anche $AA' = a$, $CC' = c$; e il triangolo soddisfa al problema.

Del resto si può anche osservare che ABC è simile ad APQ e quindi anche al domandato cui questo secondo fu dimostrato simile; ma con esso ha eguale un'altezza omologa *b*, quindi gli è eguale.

Come si vede, il problema presenta una sola soluzione; per la cui possibilità è poi necessario che coi tre segmenti *a*, *b*, *d* si possa costruire un triangolo.

XIII.

Per convalidare con un esempio le osservazioni del n. IV ci proporremo ora la seguente questione:

Esempio V. — *Determinare il vertice d'un triangolo rettangolo eguale a un triangolo dato* ABC *e che abbia gli estremi dell'ipotenusa rispettivamente su due rette perpendicolari date.*

È evidente che esistono infiniti punti i quali soddisfanno al problema, perchè l'ipotenusa del triangolo si può mettere in quella direzione che più aggrada: cosicchè non sarà questione di determinare uno fra questi infiniti punti, ma piuttosto la linea costituita dal loro assieme.

E il problema sarà meglio espresso così:

Trovare il luogo dei vertici, dei triangoli rettangoli eguali a un dato ABC *e nei quali gli estremi dell'ipotenusa giacciano rispettivamente su due rette perpendicolari.*

od anche:

Trovare la linea percorsa dal vertice C *di un triangolo rettangolo* ABC *il quale si muova nel proprio piano in guisa che i due estremi* A *e* B *dell'ipotenusa scorrano rispettivamente su due rette perpendicolari* OM, OQ (fig. VIII).

Prendiamo come prima posizione del triangolo mobile quella OMN nella quale l'ipotenusa AB si trovi tutta sul lato OM dell'angolo retto, e precisamente A in M, B in O; dove A è un punto del *primo* lato OM, e O un punto del *secondo* lato OQ: e imaginiamo poi che il triangolo vada movendosi in guisa che il vertice A discenda lungo il primo lato, e il vertice B si avanzi lungo il secondo lato, finchè il primo vertice sarà venuto in O e il secondo in Q e il triangolo avrà assunta l'ultima posizione OPQ nella quale l'ipotenusa sia disposta invece lungo il secondo lato dell'angolo. È chiaro che in questa posizione finale il cateto OP dovrà essere sovrapposto al cateto ON nella posizione iniziale (perchè i due angoli acuti del dato triangolo sono complementari); e cioè il vertice P dell'angolo retto si troverà sulla stessa retta ON sulla quale giaceva nella posizione iniziale del triangolo.

Quest'analisi ci fa subito capire che il luogo domandato è la retta ON. E invero se indichiamo ora con $A'B'C'$ una qualunque posizione del triangolo mobile, facile riesce dimostrare che il vertice C' deve essere sulla ON. Se infatti indichiamo per un istante con C'' il punto in cui il lato $A'C'$

sega ON, per i 4 punti $A'OB'C''$ passerà una circonferenza, essendo ang$A'OC''$ = ang$A'B'C''$; ma, essendo retto l'angolo $A'OB'$, l'arco $A'OB'$ sarà una semicirconferenza; e una semicirconferenza sarà pertanto il rimanente arco $A'C''B'$, il che prova che l'angolo $A'C''B'$ è retto, al pari di $A'C'B'$; epperò che C'' coincide con C', cioè che questo vertice giace per l'appunto su ON.

Al muoversi dunque del triangolo il suo vertice percorre la ON, e precisamente quel segmento di essa che intercede fra il punto S, per cui OS è eguale all'ipotenusa (massima distanza da O) e il punto P, per cui OP è eguale al cateto minore (minima distanza da O): ed è chiaro che al principio del movimento il vertice va da N verso S; poi ritorna indietro, camminando da S fino in P.

Ed ecco che, nel mentre abbiamo risolta la proposta questione, siamo giunti a un teorema (cfr. n. IV):

« Se un triangolo rettangolo si muove cogli estremi
» dell'ipotenusa lungo due rette perpendicolari il cui incontro
» sia O, il suo vertice percorre, su una retta uscente da O,
» e formante coi lati del dato angolo due angoli rispettiva-
» mente eguali a quelli acuti del triangolo, il segmento com-
» preso fra i due punti che distano da O di grandezze ris-
» pettivamente eguali all'ipotenusa e al cateto minore del
» triangolo. »

Se in particolare il triangolo fosse isoscele il suo vertice si muoverebbe sulla bisettrice dell'angolo retto; e il segmento, che in questo caso sarebbe eguale alla differenza fra l'ipotenusa e il cateto, sarebbe percorso per intero due volte; la prima allontanandosi da O, la seconda avvicinandosi ad O.

Il teorema è suscettibile di diversi altri enunciati forse non privi d'interesse, fra cui questo:

Se tanti cerchi eguali hanno gli estremi del diametro su due rette perpendicolari uscenti da un punto O, e su ognuno di essi si prende lo stesso arco a partire dal punto di segamento con uno dei lati dell'angolo, tutti i punti così ottenuti, estremi degli archi, si troveranno su una retta uscente da O; teorema che permette di costruire infiniti punti, col solo compasso, della retta che divide un dato angolo retto in due parti stabilite (in due angoli dati per mezzo degli archi che li misurano).

XIV.

Prima di dare qualche esempio anche per la stereometria, rammenteremo che un problema di questo ramo di scienza si può ritener risolto quando siasi ridotto a condurre rette, piani, sfere, datini i sufficienti elementi giovandosi anche all'uopo dei problemi elementari, come condurre rette o piani paralleli o perpendicolari ecc. Del resto valgano in tutto le osservazioni generali che abbiamo fatto fin dal principio; se non che il più delle volte la mancanza di metodi grafici, per eseguire una figura anche approssimativa nello spazio, è causa di non lievi difficoltà, la quale fa sì che essi vengano trascurati troppo nell'insegnamento. Converrebbe invece insistere su essi, essendo questo il metodo più acconcio per rendere famigliari e mostrare le applicazioni di verità astratte e troppo astruse alla mente di chi imprende lo studio della geometria solida.

Esempio VI. — *Segare un dato angolo tetraedro in modo che la sezione sia un parallelogrammo.*

Supponiamo sia ABCD (fig. IX) la sezione domandata: dovrà allora il lato AB essere parallelo all'opposto lato CD, e quindi anche alla faccia su cui è situato questo lato; e parimenti BC parallela alla faccia su cui giace l'opposto lato AD.

Per cui tosto si presenta la soluzione seguente. Preso un punto qualunque A su uno spigolo si conduca per esso, a segare una faccia lungo la retta AB, il piano parallelo alla faccia opposta; per il punto B si conduca, a segare lungo BC la faccia consecutiva, il piano parallelo alla faccia opposta. Il piano delle due rette AB, BC segherà le altre due facce lungo due rette AD, DC, e il poligono piano ABCD sarà un parallelogrammo. E invero AB e CD essendo sezioni di due piani paralleli (la faccia su cui è la CD e il piano ad essa parallelo condotto per AB) con un terzo piano (quello del quadrilatero) saranno paralleli, e così pure AD, BC.

Il problema, come si vede, presenta infinite soluzioni: una per ogni punto preso su uno spigolo dell'angolo tetraedro dato; giacchè il punto A fu scelto ad arbitrio. E che ciò dovesse avvenire era da prevedersi, perchè tutte le sezioni parallele d'un angolo solido sono figure simili; e quindi se una è parallelogrammo sono tali anche le altre.

Esempio VII. — *Costruire un tetraedro dato un punto su ciascuno spigolo.*

Il problema è della massima semplicità e per risolverlo non ci occorrerà nemmeno la figura. Indichiamo ordinatamente con 1, 2, 3, 4, 5, 6 i punti dati. Le quattro facce del tetraedro conterranno ognuna tre di questi punti (contenendo ognuna tre spigoli), e le facce a due a due (segandosi in uno spigolo) avranno a comune uno ed uno solo di essi. Basterà dunque, per risolvere il problema, condurre 4 piani ognuno dei quali contenga 3 di questi 6 punti ed abbia un punto comune (fra questi 6) con ciascuno degli altri 3. La soluzione presenta molto di arbitrario.

Si può ad esempio partire dalla faccia 123, cioè condurre un piano per i tre punti 1, 2, 3. Allora le altre tre facce dovranno contenere rispettivamente il punto 1, il punto 2, e il punto 3. Quella che contiene 1 potrà poi contenere 4 e 5, oppure 4 e 6, oppure 5 e 6. Se prendiamo la prima combinazione 145, la terza faccia, quella che contiene 2 dovrà contenere anche uno dei due punti 4 e 5 e poi il sesto punto 6; e potrà quindi essere o 246 oppure 256. Se assumiamo 246 come terza faccia, la quarta, dovendo avere un punto e uno solo a comune con ognuna delle altre tre, e un punto non potendo giacere su più di due facce, sarà necessariamente 356.

Partendo dalla faccia 123 si possono così formare i 6 tetraedri:

123	123	123	123	123	123
145	145	146	146	156	156
246	256	245	265	254	264
356	346	356	345	346	345

ed è evidente che ognuno di questi 6 tetraedri soddisfa al problema. Ma invece di partire dalla faccia 123, noi avremmo potuto partire da uno qualunque dei $\frac{6.5.4}{1.2.3}$ piani che congiungono quei 6 punti a 3 a 3 in tutti i modi possibili; e ripetendo lo stesso procedimento per ognuno di essi avremmo costrutto 6 tetraedri. I $\frac{6.5.4 \cdot 6}{1.2.3}$ tetraedri così ottenuti non sono però tutti differenti, ma a 4 a 4 coincidono, vale a dire un medesimo tetraedro sarebbe così contato quattro volte. Questo è evidente, giacchè ad es. il primo tetraedro si ottiene non solo partendo dalla combinazione 123, ma anche partendo dalle tre combinazioni 145, 246, 356 corrispondenti alle altre sue facce. Quindi i tetraedri distinti che si possono formare sono in numero di $\frac{6.5.4.6}{1.2.3.4} = 30$.

Abbiamo così veduto che si possono costruire 30 tetraedri i cui spigoli passino rispettivamente per 6 punti dati nello spazio; ed è da notarsi che tutte queste costruzioni sono possibili, potendosi sempre condurre un piano per 3 punti. (*)

XV.

Daremo un ultimo esempio per mostrare come in certe questioni riesca utile l'applicazione dell'algebra.

Esempio VIII. — *Segare con un piano una sfera*

(*) La configurazione dell'assieme di questi 30 tetraedri e specie dei loro 120 vertici potrebbe forse essere argomento di studio.

in modo che uno dei due segmenti sia equivalente al cono retto inscritto nell'altro segmento.

Indicando con r il raggio della sfera, con x la saetta del primo segmento, il problema sarà risolto quando sia noto x in termini di r, giacchè allora è nota la distanza che il piano segante deve avere dal centro. Se x è la saetta del segmento, l'altezza del cono sarà evidentemente $2r - x$, e il quadrato del raggio della base del cono e del segmento sarà $(2r - x)x$ dovendo esso essere la media proporzionale fra i due segmenti del diametro perpendicolare.

Il volume del cono sarà quindi $\frac{2r - x}{3} \pi x (2r - x)$, e quello del segmento, secondo la nota formola, $\pi x^2 \left(r - \frac{x}{3}\right)$

Sussisterà pertanto l'eguaglianza

$$\frac{\pi x}{3} (2r - x)^2 = \pi x^2 \left(r - \frac{x}{3}\right) \qquad (I).$$

ossia

$$(2r - x)^2 = x\,(3r - x)$$

onde

$$x = \frac{r}{4}\,(7 \pm \sqrt{17})$$

Dei due segni qui non piglieremo che il –, giacchè $\frac{7 + \sqrt{17}}{4} r$ è maggiore del diametro e in questo caso il valore di x sarebbe geometricamente insignificante. La soluzione

$$x = \frac{r}{4}\,(7 - \sqrt{17})$$

è la sola che soddisfi al problema. Per questo valore di x infatti si verifica tosto che il volume del cono è eguale a quello del segmento, essendo entrambi $\frac{\pi r^3}{48}\,(23 - \sqrt{17})$.

L'altro valore

$$x = \frac{r}{4}(7 + \sqrt{17})$$

potrebbe però interpretarsi introducendo le soluzioni imaginarie; l'area del circolo sezione sarebbe negativa, e il suo raggio imaginario; ma essendo negativa anche l'altezza del cono, il volume del cono risulterebbe positivo ed eguale a $\frac{\pi r^3}{48}(23+\sqrt{17})$, eguale poi ancora a quello del segmento. La comparsa di questo valore proviene algebricamente dal fatto che si può soddisfare alla relazione (I) anche con un valore negativo di $2r - x$, perchè questa espressione non vi compare che al quadrato.

Valga questa discussione a mostrare come i risultati che si hanno applicando l'algebra alla geometria vadano esaminati e discussi.

XVI.

Gli esempi precedenti basteranno a dare una chiara idea del metodo analitico. Non ne daremo alcuno per il metodo sintetico, giacchè su tutti i testi di geometria se ne trovano: così i problemi fondamentali, come condurre una retta perpendicolare, una parallela a un'altra, dividere a metà un segmento rettilineo o un angolo, costruire un triangolo eguale a un altro ecc, sono sempre risolti sinteticamente, cioè senza costruzioni preparatorie ed esami di mutue relazioni. Del resto le soluzioni precedenti stesse, qualora si ommettano le due prime parti, ossia si incominci addirittura dalla costruzione finale, potrebbero altresì servire come esempi di metodo sintetico.

Osserveremo però, e il ripeterlo non sarà soverchio, che, eccettuato il caso in cui la soluzione d'un problema si sappia immediatamente far discendere da quella d'un altro noto, epperò le costruzioni preparatorie riescano inutili, sarà sempre da preferirsi il metodo analitico.

Dott. VITTORIO MURER.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Raffaele Badia. — *Lezioni di Geometria complementare* ad uso degli Istituti Tecnici. — Città di Castello, S. Lapi editore, 1885: prezzo Lire 2, 50.

L'A., insegnante di matematiche nell'istituto tecnico di Perugia, ha pubblicato questo libro specialmente per uso dei giovani che frequentano il 3.º anno d'istituto tecnico nella sezione fisico-matematica. Esso dichiara nella prefazione che nel medesimo sono raccolte le teorie che servono, per dir così, d'introduzione alla geometria superiore (sono sue parole), comprese nel nuovo programma sotto il titolo di *complementi di geometria.* Veramente questo libro contiene più di quello che si possa insegnare agli alunni in rapporto alle accennate teorie, tenuto anche conto della libertà che i nuovi programmi d'insegnamento consentono al docente; per altro questo per me è piuttosto titolo di lode, e ciascun insegnante che adotti il libro di cui si tratta ne svolgerà quelle parti che crederà, tanto più facilmente inquantochè diversi capitoli stanno da sè e possono essere ommessi senza pregiudizio dei rimanenti.

L'A. anzichè seguire i puri metodi dalla geometria di posizione, di cui si hanno belli esempi nella *Geometria proiettiva* del Cremona e nella *Geometrie der Lage* del Reye, si è principalmente attenuto a quelli che informano il classico *Traité de géométrie supérieure* del Chasles e di cui si ha un saggio nelle note che il prof. Novi aggiunse, fino dal 1858, alla traduzione italiana del *Traité de géométrie élémentaire* di A. Amiot, e di questo veramente chi scrive non sa se sia da attribuirgliene lode. È vero che questi metodi si scostano meno da quelli divenuti già famigliari agli alunni per i precedenti studi, ma non è men vero che gli altri, di cui si fa uso nella geometria proiettiva propriamente detta, nulla prova siano più difficili e men propri all'insegnamento elementare.

L'esposizione dell'A. è molto chiara e nel complesso rigorosa, e queste *lezioni* hanno, a giudizio mio, notabile valore didattico, tanto che l'A. può esser lieto d'aver raggiunto lo scopo prefissosi. Aggiungasi poi che le medesime aumentano la nostra letteratura scolastica d'un libro il quale, tenuto conto del metodo geometrico-analitico da cui è informato, per quanto io sappia, non trova riscontro che nella menzionata traduzione italiana dell'Amiot.

Le *lezioni di geometria complementare* del prof. Badia, constano di XIX capitoli dei quali, senza trascriverne l'indice per esteso, mi limiterò a citare gli argomenti. Capo I. Preliminari intorno alla grandezza e direzione dei segmenti determinati dai punti d'una retta. Relazione fra i segmenti determinati da tre e quattro punti d'una retta. — II. Rapporto semplice di punti. — III. Doppio rapporto o rapporto anarmonico di punti. — IV. Rapporto armonico di punti. — V. Preliminari intorno alla grandezza e direzione degli angoli. Doppio rapporto di quattro rette d'un fascio. — VI. Rapporto armonico di quattro rette. — VII. Potenza d'un punto rispetto a due altri d'una stessa punteggiata. Punto d'ugual potenza. Involuzione; equazioni che l'esprimono. — VIII. Centro e punti doppi d'una involuzione. Equazioni dell'involuzione in un caso speciale. — IX. Fasci di rette in involuzione. Equazioni esprimenti l'involuzione di sei rette. — X. Potenza d'un punto rispetto ad un cerchio. Centro e asse radicale. — XI. Elementi correlativi delle figure, legge di dualità. — XII. Alcune proprietà del triangolo e trilatero (*). — XIII. Teoremi sul quadrangolo e quadrilatero completo (**). — XIV. Concetto di poligoni e poliedri semplici convessi. Rappresentazione di un sistema di punti nel piano e nello spazio per mezzo d'un poligono o d'un poliedro semplice convesso. — XV. Omotetia. — XVI. Generalità del metodo di proiezione centrale. Sezioni coniche. — XVII. Proprietà dell'ellisse. — XVIII. Proprietà dell'iperbole. — XIX. Proprietà della parabola.

Stimo utile aggiungere alcune considerazioni critiche che daranno ulteriori indicazioni circa il contenuto del libro.

Primieramente un'osservazione generale. Poichè le relazioni che l'alunno deve ricordare sono numerose e spesso

(*) Teorema di Menelao e correlativo, e corollari.
(**) Teoremi di Desargues relativi al quadrilatero isolato e inscritto in un circolo, e correlativi.

complesse, sarebbe stato utile, a mio giudizio che l'A. avesse aggiunto, per le principali, dei criteri pratici da servire a comporle. Le formole o relazioni di cui sarebbe stato opportuno accennare una genesi pratica sono: quella del §. 5 che stabilisce una relazione fra i sei segmenti determinati da quattro punti A B C D in linea retta (espressione di tre termini dove il primo è AB.CD e gli altri due s'ottengono lasciando ferma la A e permutando circolarmente BCD); le due, facilmente deducibili l'una dall'altra, che trovansi ai §§. 10 e 11 le quali danno l'espressione del rapporto semplice di tre punti ABC in funzione delle quantità reciproche delle distanze di A da B e C, l'espressione dello stesso rapporto in cui entra un quarto punto arbitrario M, e le relazioni analoghe pel doppio rapporto di quattro punti che trovansi ai §§. 19 e 20; la prima formola dei gruppi (I) o (I') e (II), al §. 65, esprimenti l'involuzione di sei punti di una retta, l'ultima delle quali può ottenersi scrivendo il prodotto AB. BC. CA. poi applicando le virgolette alle tre ultime lettere di ciascun fattore ed uguagliandolo allo stesso prodotto, cambiato di segno, in cui le virgolette sono invece da aggiungere alle tre prime lettere, mentre l'altra che è la prima del gruppo (I) si rendeva chiara con un semplice accenno al significato dei suoi due membri, e così la prima del gruppo (I'); finalmente la relazione alla fine del §. 71 che esprime l'involuzione di sei punti in linea retta, in cui entrano le distanze dei medesimi da un settimo punto arbitrario e le singole distanze dei punti medi dei segmenti che hanno le estremità in due punti coniugati l'uno all'altro.

Stando sempre in quest'ordine d'idee, trovo assai proprio che l'A. abbia premesso all'esposizione delle diverse forme del rapporto anarmonico di quattro punti, quelle analoghe del rapporto semplice di tre punti; ma non ho capito perchè, nell'imprendere la trattazione del doppio rapporto, non abbia avvertito che con quattro punti A B C D sono possibili 24 rapporti, uguali quattro a quattro, cosicchè la sua esposizione potrebbe lasciare nei giovani il dubbio che oltre ai sei considerati, altri ne fossero possibili. Ancora: nel dedurre i sei differenti rapporti anarmonici anzichè ricorrere a scambi successivi, credo sarebbe stata miglior cosa ch'egli avesse fatto osservare che dal primo se ne deducono altri due pernutando circolarmente BC D, e dai tre primi i rimanenti cambiandovi le due ultime lettere. Facendo ciò l'esplicazione lelle relazioni esistenti fra questi sei rapporti, da lui esposte l §. 17, e le conseguenti formole che esprimono il valore di inque di essi in funzione del rimanente, ne sarebbe stata notabilmente avvantaggiata. Finalmente, se le relazioni esistenti ra quattro punti formanti un gruppo armonico, avessero ogni volta seguito quelle per il rapporto anarmonico da cui si deducono, pare a me che ne avrebbe guadagnato l'economia dell'opera e non scapitata la chiarezza.

Al §. 36 l'A., trasformando l'espressione del doppio rapporto in cui entra un punto arbitrario, accenna ad un artifizio di calcolo complesso più del bisogno. L'espressione trasformata potevasi dedurre dalla precedente dividendo semplicemente il numeratore e denominatore di questa per $\frac{MB}{MA}$. La stessa osservazione è estendibile alle formole analoghe del doppio rapporto di quattro rette, in cui entra una quinta retta arbitraria. Il problema: *Date tre rette in un piano concorrenti in un punto costruire la quarta retta del fascio in modo che il doppio rapporto delle quattro rette sia* $=\lambda$, trattato al §. 39, potevasi risolvere anche applicando quello del §. 22, costruendo cioè il quarto punto, che coi tre determinati da una trasversale qualsiasi sulle rette date, forma un doppio rapporto $=\lambda$. L'A. non l'ha avvertito, pure ricorre ad un mezzo consimile al §. 79 quando tratta il problema: *Date cinque rette concorrenti in un punto, condurre per questo punto una retta tale che le sei rette formino un'involuzione.*

Al §. 45, in cui è dimostrato il teorema: *Se per un punto fisso* P *preso nel piano d'un angolo* S, *si conducono due secanti qualunque le quali taglino rispettivamente i lati nei punti* A, A' *e* B, B' *e si unisce* A *con* B' *ed* A' *con* B, *il luogo geometrico delle intersezioni delle due rette* AB', *ed* A' B *è la polare di* P *rispetto all'angolo dato*, l'A. è incorso in una lieve inesattezza. L'eguaglianza alla fine della pag. 55 dev'essere: $(PP'AA') = (PP''B'B)$, in base alla quale per proseguire la dimostrazione conveniva scrivere: ma $(PP'AA') = -1$, quindi sarà anche: $(PP''B'B) = -1$, ed avendosi (16): $(PP''BB') = \frac{1}{(PP''B'B)}$, risulta altresì: $(PP''BB') = -1$, ecc..

Alla fine del §. 56 è affermato che il valore della *potenza* di un punto O, rispetto ad altri due AA′ in linea retta col primo diviene *massimo* quando O è il punto medio di AA′. Non sarebbe stato utile in una nota dichiararne la ragione?

Al successivo §. 57 dove trattasi di risolvere il problema: *Dati quattro punti* AA′BB′ *in una linea retta s, coniugati due a due, trovare su questa un punto che sia d'ugual potenza rispetto alle due coppie di punti coniugati*, è detto che, preso un punto arbitrario M fuori di *s*, le due circonferenze AA′M, BB′M si segheranno necessariamente in un secondo punto M′. Veramente le due circonferenze potrebbero riuscire tangenti in questo punto.

Nel capo VII al §. 62 l'A. dà la seguente definizione: *Se più circonferenze, le quali siano descritte in uno stesso piano e passino tutte per due punti fissi, sono segate da una trasversale condotta nel piano, il sistema di punti formato dalle intersezioni della trasversale colle circonferenze si chiama involuzione di punti.* Ora quando tre coppie di punti AA′ BB′ CC′, situati sopra una stessa retta, sono in involuzione, esistono fra i segmenti determinati dai medesimi, sette relazioni che l'A. determina in questo capitolo; a me sembra però ch' egli non abbia messo abbastanza in rilievo come l'esistenza di una qualsiasi delle relazioni medesime porti a concludere che i sei punti che compariscono in essa sono in involuzione secondo la definizione.

Al capitolo XIII trovansi esposti due teoremi che vanno sotto il nome di Desargues (il secondo però esteso al solo cerchio) e i loro correlativi. La dimostrazione dell'ultimo teo: a destra cioè: *Se nel piano di un quadrilatero mnpq circoscritto ad un cerchio si prende un punto* S *in modo che da esso si possano condurre due tangenti d, d′ alla circonferenza, queste formeranno un' involuzione con due qualunque delle tre coppie di rette coniugate aa′ bb′ cc′ che il punto determina con i sei vertici del quadrilatero*, pare a me che sia insostenibile e ciò perchè, dopo aver chiamato *e* la retta che congiunge i due vertici opposti *mq* ed *np*, a un certo punto l'A., per giungere alla tesi, stabilisce le eguaglianze: sen *eq*. sen *em* = sen *ep*. sen *en*; sen *a′p*. sen *a′n* = sen *a′d*. sen *a′d′*; sen *aq*. sen *am* = sen *ad*. sen *ad′*. Ora quest'eguaglianze esprimono la proposizione: *se un quadrilatero è* *circoscritto ad un cerchio e si tira la retta che congiunge due vertici opposti, gli angoli che essa forma coi due lati che passano per ciascuno di questi vertici son tali che il prodotto dei seni della prima coppia è uguale a quello dei seni dell'altra coppia*, proposizione che in generale non è vera. Del resto il teorema correlativo a quello di Desargues, seguendo il metodo adottato dall'A., si può facilmente dimostrare fondandosi sul teorema: *Il prodotto delle distanze d'una tangente mobile a due vertici opposti d'un quadrilatero circoscritto al cerchio sta al prodotto delle sue distanze agli altri due vertici, in un rapporto costante.* Infatti siano d_1, d_2 e d'_1, d'_2 le distanze delle due coppie di vertici opposti qm, np e nq, mp rispettivamente dalla tangente d, e δ_1, δ_2 e δ'_1, δ'_2 le distanze dei medesimi vertici dall'altra tangente, e si rappresentino con a_1 a'_1 b_1 b'_1 i segmenti delle rette aa' bb' estesi da S ai vertici considerati del quadrilatero. È chiaro che si avrà:

$$\operatorname{sen} ad = \frac{d_1}{a_1};\ \operatorname{sen} ad' = \frac{\delta_1}{a_1};\ \operatorname{sen} a'd = \frac{d_2}{a'_1};\ \operatorname{sen} a'd' = \frac{\delta_2}{a'_1}$$

$$\operatorname{sen} bd = \frac{d'_1}{b_1};\ \operatorname{sen} bd' = \frac{\delta'_1}{b_1};\ \operatorname{sen} b'd = \frac{d'_2}{b'_1};\ \operatorname{sen} b'd' = \frac{\delta'_2}{b'_1},$$

onde:

$$\frac{\operatorname{sen} ad . \operatorname{sen} a'd}{\operatorname{sen} ad' . \operatorname{sen} a'd'} = \frac{d_1 . d_2}{\delta_1 . \delta_2};\ \frac{\operatorname{sen} bd . \operatorname{sen} b'd}{\operatorname{sen} bd' . \operatorname{sen} b'd'} = \frac{d'_1 . d'_2}{\delta'_1 . \delta'_2}.$$

Ma per l'accennato teorema si ha:

$$\frac{d_1 . d_2}{d'_1 . d'_2} = \frac{\delta_1 . \delta_2}{\delta'_1 . \delta'_2},$$

quindi anche:

$$\frac{\operatorname{sen} ad . \operatorname{sen} a'd}{\operatorname{sen} ad' . \operatorname{sen} a'd'} = \frac{\operatorname{sen} bd . \operatorname{sen} b'd}{\operatorname{sen} bd' . \operatorname{sen} b'd'},$$

uguaglianza che dimostra come le sei rette aa' bb' dd' formino un fascio in involuzione.

In questo capitolo XIII avrei veduto con piacere i teoremi di Pascal e Brianchon per il cerchio, che invece l'A. ha confinato semplicemente fra gli esercizi, e questi insieme ai due accennati di Desargues avrebbe potuto con facilità, servendosi della proiezione centrale, da lui esposta al capo XVI, estendere altresì alle coniche.

Al capitolo XV che verte sull'omotetia, prima di passare al §. 112, sarebbe stato opportuno osservare, quantunque ciò possa parere ovvio, che la figura omotetica d'una figura piana è parimenti una figura piana, col suo piano parallelo a quello della prima figura. Sullo stesso capitolo ho poi due altre osservazioni a fare. La prima, che la dimostrazione del §. 113 regge solo per il caso in cui O sia esterno al segmento AA' o, ciò che torna lo stesso, che i poligoni considerati siano direttamente simili, mentre giovava estenderla anche al caso in cui la similitudine fosse stata inversa, e ciò tanto più che al §. 114, ov'è esaminato il teorema analogo pei poliedri, l'A. accenna al caso dell'omotetia sia diretta che inversa. La seconda osservazione riguarda il §. 124 in cui trovasi dimostrato il teorema: *I centri di omotetia di due circoli omotetici, e i quattro punti in cui la retta da essi determinata è tagliata dalle due circonferenze, formano un sistema di sei punti in involuzione*. Ivi a un certo punto nel corso della dimostrazione l'A. scrive: si conduca la retta O' Q che incontrerà la circonferenza C' in N'. Ora la retta O' Q incontra in generale questa circonferenza in due punti, e fra questi dev'esser scelto quello che corrisponde a Q rispetto al centro O' d'omotetia; conveniva quindi a rigore esprimersi così: conducasi la O'Q e dei due punti in cui questa retta taglia in generale la circonferenza C', scelgasi quello più prossimo o più lontano da O', secondochè il segmento O'Q taglia o meno la circonferenza C.

Nel capitolo XVI al §. 128 trovasi dimostrato il teorema: *La proiezione di un cerchio descritto sulla superficie d'una sfera, fatta sopra un piano di circolo massimo, prendendo per centro di proiezione il polo di questo, è un cerchio*. L'A. avrebbe, secondo me, bene operato, deducendo anche il reciproco, il che potevasi fare con molta facilità. Ai §§. 130 al 135 di questo capitolo si considerano la superficie conica inviluppante due sfere fisse, nelle due posizioni ch'essa può avere, e le sezioni di questa mediante un piano tangente alle sfere medesime: si presentano così le sezioni coniche: ellisse, iperbole e parabola. Questo metodo di generazione per le curve di 2° ordine pone immediatamente in rilievo la posizione di alcuni elementi delle medesime, quali sono i fuochi, i vertici, le direttrici, gli assi e diverse altre particolarità; ma poteva fornire altresì con grande agevolezza le proprietà che le caratterizzano riflettenti la somma o differenza costante dei raggi vettori per le prime due e l'ugual distanza di ciascuno de' suoi punti dal fuoco e dalla direttrice per la terza (*), che l'A. ha creduto di dedurre solo più tardi, dopo avere ricavate le equazioni che le definiscono (§§. 141, 153, 164), nei tre capitoli che chiudono l'opera. Seguendo una tal via l'esposizione delle proprietà delle sezioni coniche sarebbe riuscita più spedita e uniforme.

Finalmente sarebbe stato utile esporre anche il teorema: *La sezione obliqua d'un cilindro circolare retto è un'ellisse.* E per questa sezione potevasi poi adottare un metodo di generazione analogo a quello seguito per le sezioni del cono.

Il libro termina con una raccolta d'esercizi, appropriati e disposti in ordine alla materia del testo; però mi sarebbe piaciuto di trovare fra questi il problema: *descrivere una circonferenza tangente a tre circonferenze date*, che avrebbe fornito ai giovani un mezzo efficace di porre in giuoco le teorie dei poli e delle polari, degli assi radicali e dell'omotetia. Anzi a mio parere il problema stesso avrebbe potuto con vantaggio essere svolto nel testo.

A. Lugli.

TEMI PER LAVORI SCOLASTICI (**)

Calcolare il raggio di una sfera sapendo che il suo volume supera di un decimetro cubo quello del tetraedro regolare in essa inscritto.

Un triedro trirettangolo è tagliato con un piano in modo che la sezione risulta un triangolo equilatero. Calcolare: 1) il rapporto del volume della piramide così ottenuta al volume del cubo il cui lato è eguale a quello del triangolo equilatero; 2) le inclinazioni delle facce del triedro sul piano del triangolo equilatero.

(*) Veggasi: Briot et Bouquet — *Leçons de géométrie analytique.*

(**) Questi temi sono estratti dalla raccolta di quelli proposti per la promozione dalla terza alla quarta classe nell'Istituto tecnico di Roma.

1) Un emisfero è diviso in tre segmenti di eguale altezza da due piani paralleli alla sua base: trovare i rapporti dei loro volumi. 2) Calcolare il maggiore dei tre angoli d'un triangolo i lati del quale sono proporzionali ai numeri 2, 3, 4.

Il rapporto del volume d'una sfera a quello d'un tronco di cono retto ad essa circoscritto è eguale ad m: esprimere in funzione di m il rapporto del raggio della base minore del tronco al raggio della base maggiore.

1) Assegnare un metodo pel calcolo del seno di $1°\ 52'\ 30''$ senza presupporre alcuna cognizione sul rapporto della circonferenza al diametro. 2) Trovare due limitazioni del rapporto della circonferenza al diametro sapendo che il seno di $1°\ 52'\ 30''$ è compreso fra 0,03271 e 0,03272.

La base BC d'un triangolo isoscele BAC è divisa in tre parti eguali nei punti D ed E; esprimere le tangenti degli angoli BAD, DAE, EAC in funzione della tangente dell'angolo BAC, e calcolare quelli angoli nell' ipotesi che l' angolo BAC sia retto.

Di un prisma triangolare sono dati: il volume, la lunghezza dello spigolo laterale, la superficie laterale, e il diedro di due facce laterali. Assegnare le formole pel calcolo dei diedri delle altre due coppie di facce laterali.

Il volume d'un parallelepipedo rettorettangolo è di cent. cubi 564, 48, l'altezza di cent. 24 e la diagonale di cent. 25. Calcolare: 1) la superficie totale del parallelepipedo; 2) gli angoli che le diagonali formano col piano della base.

1) Supposta la terra sferica, calcolare la latitudine del parallelo la cui lunghezza è $\frac{3}{7}$ di quella dell'equatore. 2) Da un' urna in cui sono 100 palline numerate dall'1 al 100 se ne estraggono a sorte 10; qual' è la probabilità che fra le 10 estratte sieno quelle quattro segnate coi numeri 28, 59, 70, 83?

In un tronco di prisma retto triangolare avente il volume d'un metro cubo, gli spigoli laterali sono rispettivamente $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{11}{20}$ del perimetro della base, e i lati di questa sono proporzionali ai numeri 5, 12, 13: calcolare il perimetro della base.

TEOREMI A DIMOSTRARE

1. Il luogo dei punti, del piano d'un triangolo dato, tali che i piedi delle perpendicolari, condotte da uno qualunque di essi ai tre lati, formino un triangolo di data area, è una circonferenza concentrica a quella circoscritta al triangolo dato.

G. Loria.

2. Se da un punto qualunque della superficie d'un triangolo sferico trirettangolo si conducono tre archi di circonferenze massime perpendicolari ai suoi lati, il perimetro del triangolo sferico, che ha per vertici i piedi dei tre archi, è eguale alla metà d'una circonferenza massima.

F. Nicoli.

3. Se le coppie di punti A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sono situate rispettivamente sulle tre rette BC, CA, AB, così che le rette AA_1, BB_1, CC_1 concorrano in uno stesso punto, e che anche le rette AA_2, BB_2, CC_2 concorrano in uno stesso punto, e s' indichino rispettivamente con α, β, γ i punti di incontro di AA_1 con B_2C_2, di BB_1 con C_2A_2 e di CC_1 con A_2B_2, le tre rette $A_2\alpha$, $B_2\beta$, $C_2\gamma$ concorreranno pure in uno stesso punto.

D. Besso.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica rédigée par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1886. N.° 1.

L'Eco della Associazione nazionale fra gli insegnanti delle scuole secondarie. Anno III, n. 13 e 14. Torino, 1886.

Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXIV. Gennaio e Febbraio 1886. Napoli, Benedetto Pellerano, editore.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira*. Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VI, n. 6. Coimbra, 1885.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy* Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe 2e série. Dixième année. N. 1, 2, 3, 4. Paris, 1886.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*. 10e Année. N. 12, 13, 14, 15. Paris, E. Nony, 17, Rue des Écoles.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome sixième, Mars et Avril 1886.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XVII. N. 3, 4, 5, 6. Firenze, 1886.

E. Beltrami. — Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell (1886).

E. Bertini. — Le omografie involutorie in uno spazio lineare a qualsivoglia numero di dimensioni (1886).

G. Da Como. — Formola pratica per la quadratura delle aree delle figure comprese fra una curva piana ed una base rettilinea, e delle figure piane curvilinee in generale (1886).
numero di dimensioni (1886).

A. Faifofer. — Elementi di Geometria ad uso dei Licei, quinta edizione. Venezia, tipografia Emiliana, 1886.

V. Grünwald. — Saggio di Aritmetica non decimale con applicazioni del calcolo duodecimale e trigesimale a problemi sui numeri complessi (1884). — Intorno all'Aritmetica dei sistemi numerici a base negativa con particolare riguardo al sistema numerico a base negativa-decimale per lo studio delle sue analogie coll'Aritmetica ordinaria (decimale) (1884). — Dei sistemi numerici a base imaginaria (1886).

G. Jung. — Sulle trasformazioni birazionali di tre forme geometriche di seconda specie (1886). — Sulle superficie generate da tre sistemi deducibili l'uno dall'altro mediante trasformazioni birazionali (1886).

G. de Longchamps. — Applications nouvelles des transversales réciproques (1886). — Étude sur une transformation réciproque. — Courbes diamétrales et transversales reciproques. — Sur les cubiques unicursales (1877). — Transformation plane des quadriques. — La Géométrie récurrente (1882). — Sur les conchoïdales (1879). — Sur un mémoire de M. Laudry (1884). — Des fractions étagées. — Sur la décomposition en facteurs premiers des nombres $2^n \pm 1$ (1877). — Sur les nombres de Bernouilli. — Sur les intégrales Eulériennes de seconde espèce. — La première leçon sur la théorie des équations (1885). — Sur une nouvelle espèce de fractions continues (1884). — Sur les séries récurrentes proprement dites et sur un théorème de Lagrange (1880).

E. Padova. — Proprietà del moto di un corpo di rivoluzione soggetto a forze che hanno la funzione potenziale H $\cos^2 \vartheta$ (1886).

S. Pincherle. — Note sur une intégrale définie (1885). — Sur une formule dans la théorie des fonctions (1886).

G. Pittarelli. — Gli elementi immaginari nelle forme binarie cubiche (1885). — Le curve di terz'ordine e di quarta classe (1885).

E. Vigarié. — Note de Géométrie (1886).