

Periodico di Matematiche



**Organo della
MATHESIS**

Società italiana di scienze
matematiche e fisiche
fondata nel 1895

**Volume
98 (2022)**

Direttore

Francesco de Giovanni

degiovan@unina.it

Comitato di Redazione

Maria Coccozza

mariacoccozza@iscortese.com

Atalia Del Bene

atalia.delbene@istruzione.it

Umberto Dello Iacono

umberto.delloiacono@unicampania.it

Massimo Fioroni

fionimassimo@gmail.com

Paola Gario

paola.gario@unimi.it

Franco Ghione

ghione@axp.mat.uniroma2.it

Vincenzo Iorfida

vincenzo.iorfida@unical.it

Elisabetta Lorenzetti

elisabetta.lorenzetti@unife.it

Marcello Pedone

marcellopedone@tin.it

Alessio Russo

alessio.russo@unicampania.it

Annalisa Santini

annalisasantini66@gmail.com

Luigi Verolino

verolino@unina.it

Staff editoriale

Giuseppe Arnone

giuseppe.arnone@unina.it

Marco Trombetti

marco.trombetti@unina.it

Autorizzazioni e supporti Autorizzazioni Tribunale di Bologna n. 266 del 29-3-1950

Il Periodico di Matematiche è distribuito gratuitamente ai soci Mathesis. Le istruzioni per associarsi su www.mathesisnazionale.it

Abbonamenti per Scuole ed Enti Vari: Per l'Italia €60,00 - Per l'Estero €70,00

Per richiesta di numeri singoli o arretrati: segreteria@mathesisnazionale.it

c/c postale, Codice IBAN:

IT0510760104000000048597470

intestato a:

Mathesis Nazionale c/o Dipartimento di Matematica e Fisica

Università degli Studi della Campania "Luigi Vanvitelli"

Viale Abramo Lincoln 5 - 81100 Caserta (CE)

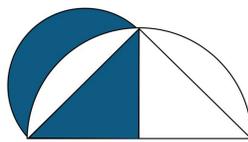
www.mathesisnazionale.it • info@mathesisnazionale.it

Volume **98** (2022)

Periodico di Matematiche

Organo della MATHESIS

*Società italiana di scienze
fisiche e matematiche
fondata nel 1895*



Mathesis

Indice

Francesco de Giovanni	
Editoriale	1
Vincenzo Iorfida	
La teoria dei nodi e gli invarianti topologici, aspetti multidisciplinari e didattici	3
Nicola Durante and Antonio Restaino	
Le coniche nella storia	21
Luca Granieri	
Continuità senza limiti	45
Francesco Daddi	
L'eleganza dei vettori nella didattica della matematica	63
Francesco de Giovanni e Carmela Musella	
Astrazione e Immaginazione	79
Bruno Carbonaro	
Matematica, letteratura, e l'ossessione per Musil	107
Carlo Maturo	
Le coniche: origine di una definizione	117
Sergio Savarino	
Rette, piani, pianeti	121
Domenico Liguori e Pasquale Barone	
Un'analisi razionale sugli oroscopi: un esempio di educazione civica scientifica	127
Nicola Fusco	
Matematica e Musica: una piacevole sinfonia	143

Massimo Esposito

Insegnare matematica con la calcolatrice grafica 157

Editoriale

Il *Periodico di Matematiche* fu fondato nel 1921 su iniziativa di *Federigo Enriques*, allora presidente nazionale della *Mathesis*, e di *Giulio Lazzari*. La rivista nasce come organo della *Mathesis - Società Italiana di Matematica* e sostituisce il precedente *Periodico di Matematica* che, nato nel 1886, aveva cessato le pubblicazioni nel 1919. Alla direzione della nuova rivista si sono poi succeduti matematici illustri, tra i quali mi piace ricordare *Oscar Chisini* e *Bruno de Finetti* per il particolare impegno nella valorizzazione del *Periodico*.

Dal 1921 al 2021 sono stati realizzati 97 volumi del *Periodico di Matematiche*, essendo stata sospesa la pubblicazione soltanto negli ultimi tristi anni del secondo conflitto mondiale (1944 e 1945) e nel biennio 1971/72. I volumi sono stati distribuiti in varie serie, che in qualche caso hanno provocato confusione nei riferimenti. Ho perciò scelto da questo numero di adottare per i volumi una numerazione complessiva, che tenga cioè conto del numero totale dei volumi pubblicati e che non faccia riferimento ad alcuna serie; di conseguenza, questo è il volume 98 (il *novantottesimo* apparso dalla fondazione della rivista). Spero che questo cambiamento non dispiaccia alle lettrici e ai lettori, che serva invece per riaccostarci ad un glorioso passato e ci stimoli a mantenere elevata la qualità del nostro giornale.

La copertina di questo numero, che dobbiamo a Clara Giannetti, presenta una bella immagine stilizzata dell'Isola di Procida, capitale italiana della cultura 2022 e sede del prossimo congresso nazionale della *Mathesis*, che si terrà dal 20 al 22 ottobre di quest'anno.

Francesco de Giovanni

La teoria dei nodi e gli invarianti topologici, aspetti multidisciplinari e didattici

Knot theory and topological invariants, multidisciplinary and didactic aspects

Vincenzo Iorfida¹

Introduzione

Particolare attenzione è stato rivolto, da parte dei matematici, allo studio della Teoria dei Nodi, anche se i risultati più rilevanti sono giunti soprattutto a partire dalla metà del XX secolo. La ricerca scientifica in questo campo è stata molto produttiva tanto che gli sforzi e i tentativi per giungere ad una teoria completa ed esaustiva sono stati premiati, più volte, con il più alto riconoscimento matematico, l'assegnazione della medaglia Fields. La Teoria dei Nodi, che apparentemente scaturisce da un semplice e singolare problema topologico, come quello della equivalenza e della classificazione, afferrisce ad un approccio matematico complesso e sofisticato come la teoria di Lie, teoria integrale del prodotto, algebre quantiche e così via. Molti contributi sulla Teoria dei Nodi sono stati di supporto per la costruzione di nuove teorie in ambito matematico, come ad esempio lo studio della teoria della codifica delle 3-varietà, ma anche in altri campi di ricerca scientifici, tra i quali la fisica subatomica, la biologia, l'ingegneria, la chimica supramolecolare ed altri ancora. La rappresentazione di un nodo è più semplicemente intesa come un oggetto matematico nello spazio S^3 (o in \mathbb{R}^3) generato da una corda deformabile, con spessore trascurabile, in cui gli estremi sono chiusi; un aspetto della geometria moderna che ci introduce in un mondo fatto da "labirinti" e concetti affascinanti ancora oggi inesplorati. Di fondamentale e particolare attenzione, dal punto di vista didattico, la trattazione della teoria dei nodi, in modo multidisciplinare, mettendo in risalto gli aspetti che inducono lo studente scoprire la potenza del calcolo matematico per descrivere e creare collegamenti su aspetti del mondo e della realtà in cui siamo immersi, non sempre di facile trattazione.

¹University of Calabria, Campus of Arcavacata, Rende CS, ITALY, vincenzo.iorfida@unical.it.

Preliminari

La teoria dei nodi si sviluppa come branca della topologia, che studia le immersioni di uno spazio topologico dentro un altro, e considera quelle proprietà che rimangono immutate quando lo spazio subisce una deformazione senza però ricorrere a strappi o buchi. Una immersione di spazio topologico X in Y avviene attraverso una trasformazione continua del primo spazio in un sottoinsieme del secondo, la cui inversa è anch'essa continua. Attraverso la proiezione normale in \mathbb{R}^2 è possibile classificare i diversi tipi di nodi. Ad esempio, un nodo topologicamente equivalente alla circonferenza è definito da una curva chiusa nello spazio Euclideo tridimensionale \mathbb{R}^3 (o nella 3-sfera S^3),² con la topologia usuale.

Fino ad oggi non esiste una classificazione completa, né tanto meno esiste un algoritmo con complessità computazionale accettabile. I nodi studiati in questo capitolo hanno generalmente le estremità chiuse.

Invarianti topologici

Un ruolo di rilievo per lo studio della teoria dei nodi e la loro classificazione è ricoperto dagli *invarianti topologici*, i quali permettono di stabilire l'equivalenza tra due nodi quando questi vengono rappresentati con due diagrammi differenti. Un invariante topologico è una proprietà intrinseca del nodo N , comune rispetto a tutti gli altri nodi equivalenti al primo. Ne discende ovviamente che due nodi che hanno proprietà diverse per uno stesso invariante non possono essere equivalenti. Un esempio banale di invariante topologico per i nodi è dato dal numero dei componenti di un link. [9] Due link aventi un numero diverso di componenti non possono ovviamente essere equivalenti; ciò può essere provato facilmente facendo notare che i movimenti di Reidemeister non cambiano il numero di componenti. Probabilmente il numero di componenti è il più debole invariante dei nodi, mentre quelli che saranno presentati in seguito sono sicuramente più potenti e interessanti. Tuttavia, un invariante che sia in grado di distinguere tutti i nodi e che non sia troppo difficile da valutare, ancora non è stato scoperto. Esiste però un algoritmo per la decisione dell'equivalenza di due nodi (W. Haken e G. Hemion, 1992). L'algoritmo è derivato dall'algoritmo di riconoscimento del nodo banale (W. Haken, 1961). Purtroppo non si conosce una versione dell'algoritmo che si applichi ai diagrammi dei nodi.

Un primo invariante lo fornisce il *crossing number* (proiezione minima) $c(N)$. Esso rappresenta il numero di incroci che si possono individuare sul diagramma di un nodo in *proiezione minima*.³ Pur fornendo la complessità $c(N)$ di un nodo non è in grado di distinguere alcuni nodi diversi tra loro, pertanto non è un invariante completo.

²Considerata come la compattificazione di \mathbb{R}^3 . Per questo, anche se definiremo il concetto di nodo ed equivalenza di nodi in una 3-varietà qualsiasi, molti degli invarianti classici e degli esempi trattati riguarderanno i nodi in \mathbb{R}^3 .

³Rappresenta quel diagramma del nodo N con il numero minimo di incroci tra tutti i possibili diagrammi piani che possono rappresentare il nodo medesimo.

Questa particolare caratteristica ha indotto alla stesura di un primo catalogo sui nodi da parte di Dale Rolfsen, *KnotsandLinks*, Publish or Perish (1976).[26] Un altro



Figura 1: Esempi di nodo trifoglio: destro a), sinistro b), proiezione non minima con dieci incroci c).

invariante topologico è rappresentato dal *linking number* (numero di concatenamento o incroci). Riferendosi al diagramma di un nodo, esso considera gli incroci in cui una componente passa sopra un'altra assegnando il valore -1 o $+1$, a seconda che sia, rispettivamente, sinistrorso o destrorso, come mostrato in figura (1). Si noti che, per poter attribuire un segno all'incrocio, ciascuna componente deve essere orientata. Il linking number tra le due componenti A e B in un link L è definito come la metà della somma dei valori associati agli incroci tra i due componenti e si indica con $\mathcal{L}(A, B)$.

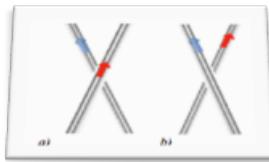


Figura 2: Esempi di tipi di incroci orientati: destrorso (+1) in a), sinistrorso (-1) in b).



Figura 3: Esempio di due nodi distinti dal loro linking number rispettivamente 1 e 2.

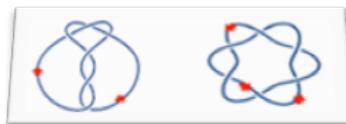


Figura 4: Esempio di due nodi differenti ma aventi lo stesso linking number che per entrambi è 3.

Definizione 1. Sia D il diagramma di un link orientato L con due componenti A e B e siano D_A e D_B le corrispondenti proiezioni di A e B .

Fissato ad ogni incrocio $c \in D_A \cap D_B$, il segno $\mathcal{L}(c) \in \{0, 1, -1\}$ di un nodo, in cui i tratti che vi confluiscono sono parte di due componenti distinti, è tale che:

- a) $\mathcal{L}(c) = +1$, se l'incrocio è destrorso e i rami appartengono a due componenti diverse.
- b) $\mathcal{L}(c) = -1$, se l'incrocio è sinistrorso e i rami appartengono a due componenti diverse.
- c) $\mathcal{L}(c) = 0$, se i rami fanno parte della stessa componente.

Resta definito il numero intero:

$$L(A, B) = \frac{1}{2} \sum \mathcal{L}(c)$$

Esso è detto linking number delle due componenti.

Osservazione 1. Al variare dell'orientazione di una componente, anche il segno del linking number cambia. Tale invariante non è completo, infatti osservando bene la fig. (3,4) si nota come due nodi non equivalenti hanno lo stesso linking number. Osservando attentamente cosa succede per le singole mosse di Reidemeister, si può facilmente affermare che questa è una buona definizione poiché non dipende dal particolare diagramma scelto. Il linking number è quindi un invariante per link con due componenti. Si dimostra, inoltre, che il valore di $L(A, B)$ non cambia applicando le mosse di Reidemeistr.

Esempio 1. Link di Hopf:

$$L(A, B) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

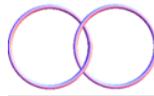


Figura 5

Link finto di Hopf:

$$L(A, B) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0$$

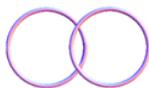


Figura 6

Invarianti polinomiali

Caratteristiche geometriche invarianti per isotopia possono essere ricercate attraverso l'ausilio di strumenti di topologia algebrica.

Gli invarianti polinomiali, oltre ad essere la categoria più "potente" degli invarianti, costituiscono la più interessante.

Un ruolo fondamentale, oltre che storico, è affidato al polinomio di James Waddell Alexander, utilizzato per il discernimento dei nodi non isotopi.[6] Successivamente, lo sviluppo della teoria si concentrò sullo studio delle proprietà di tale polinomio, giungendo a diverse interpretazioni, come nel calcolo di Ralph Fox.[6], [8] Consideriamo un diagramma per un nodo (N) orientato in modo arbitrario. Etichettiamo il numero degli archi del diagramma e quello degli incroci. Per ogni incrocio si stabilirà la rotazione, oraria (destrorsa) o antioraria (sinistrorsa), e si determineranno i valori di i, j e k secondo quanto riportato nel seguente schema:

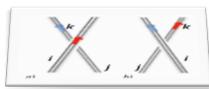


Figura 7: Schema di rotazione..destrorsa e sinistrorsa

Richiamando il teorema di Eulero [1] ne consegue che gli archi suddividono il piano in regioni, quindi si avranno $n-2$ regioni, inclusa quella esterna al nodo. Si passa quindi alla costruzione di una matrice $n \times n$ (dove n è il numero di incroci/archi del diagramma) secondo la seguente tabella:

Tipi di incroci	i	j	k	
	$1-t$	T	-1	sinistrorso
	$1-t$	-1	T	destrorso

Ciò significa che se l'incrocio è orario, si assegna il valore $1 - t$ nella colonna i della riga di appartenenza, ecc. Tra tutte le altre colonne in fila x si riporta lo zero.

Può verificarsi che i, j, k sono uguali. In questo caso, la somma delle voci nella tabella di cui sopra viene inserita nella colonna appropriata. Ad esempio, se $i = j$ in un incrocio antiorario (sinistrorso), si assegna il valore $(1 - t) + t$ nella colonna i . Successivamente si elimina l'ultima riga e colonna della matrice per ottenere una matrice del tipo $(n - 1) \times (n - 1)$. Questa matrice è detta matrice di Alexander. Il determinante della matrice di Alexander è un polinomio di Alexander (Δ_N).[44]

Esempio 2. Calcoliamo il polinomio di Alexander per il Trifoglio.

(i) etichettiamo gli archi con i numeri a_1, a_2, a_3 e gli incroci con c_1, c_2, c_3 ;

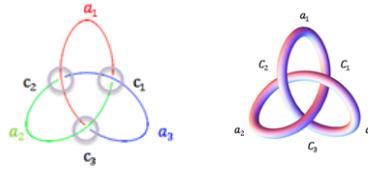


Figura 8: Archi e incroci nel nodo trifoglio

(ii) calcoliamo i, j, k per ogni incrocio;

	i	j	k
c_2	3	1	2
c_2	1	2	3
c_3	2	3	1

(iii) eliminiamo l'ultima riga e colonna calcolando il determinante.

Costruiamo una matrice 3×3 del tipo

$$\begin{pmatrix} t & -1 & 1-t \\ 1-t & t & -1 \\ -1 & 1-t & t \end{pmatrix} = t^2 - t + 1$$

si ottiene: $\Delta_N = t^2 - t + 1$, che non è altro che il polinomio di Alexander. Ad un nodo N , è possibile associare un gruppo non abeliano $G(N)$.

Definizione 2. Sia N un nodo in \mathbb{R}^3 . Sia X il complementare di N , ossia $X = \mathbb{R}^3 \setminus N$. Si definisce gruppo fondamentale⁴ di N e lo si indica con $\pi(N)$, il gruppo fondamentale $\pi(X, x_0)$ con $x_0 \in X$.

⁴Sia X uno spazio topologico ed $x_0 \in X$. Il gruppo fondamentale di X con punto base x_0 , in simboli $\pi(X, x_0)$, è il gruppo che ha come elementi le classi di equivalenza degli archi chiusi di base x_0 rispetto alla relazione di equivalenza d'omotopia relativa $\{0, 1\}$ e come operazione il prodotto tra tali classi definito da $[\lambda * \pi] = [\lambda] * [\pi]$.

Definizione 3. Il gruppo $G(N)$ è il gruppo fondamentale $\pi_1(S^3 \setminus N)$ del complementare nello spazio euclideo tridimensionale S^3 .

Vale la seguente:

Proposizione 1. Sia N un nodo, con un gruppo $G(N)$. Sia $G'(N)$ il derivato primo di $G(N)$ allora il gruppo quoziente di $G(N)$ per il derivato primo del gruppo $G'(N)$, $G(N)/G^1(N)$ è isomorfo al gruppo ciclico infinito \mathbb{Z} . $G(N)/G^1(N)$ è detto l'abelianizzato di $G(N)$ e si indica con $\mathcal{A}[G(N)]$.

Definizione 4. Sia \mathbb{F} la derivata parziale su un gruppo libero il campo primo $\mathbb{F}(x_1, \dots, x_n)$ è definita in modo ricorsivo come:

- (i) $\frac{\delta x_i}{\delta x_j} = 1$;
- (ii) $\frac{\delta}{\delta x_i}(1) = 0$;
- (iii) $\frac{\delta x_j}{\delta x_i} = 0$ se $i \neq j$;
- (iv) $\frac{\delta x_i^{-1}}{\delta x_i} = -x_i^{-1}$;
- (v) $\frac{\delta(w_1 \cdot w_2)}{\delta x_i} = \frac{\delta w_1}{\delta x_i} + w_1 \frac{\delta w_2}{\delta x_i}$;

la derivata parziale è una mappa del gruppo libero $\mathbb{F}(x_1, \dots, x_n)$ sull'algebra grup-
pale $\mathbb{Z}[\mathbb{F}]$.

Sia $G = (x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_n)$,

$\phi : \mathbb{F} = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow G(x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_{n-1})$.

La mappa ϕ può essere estesa alla mappa $\phi : \mathbb{Z}[F] \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ che è lomomorfismo di anelli t.c.:

$x_i \phi(x_j) = x_j, \forall i$ e $\phi = id$. ($\Psi : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \Omega = \mathbb{Z}[t, t^{-1}], x_i \mapsto t$;

La matrice di Alexander M è una matrice $m \times n$ così definita:

$$M = \left[\mathcal{A}\phi \left(\frac{\delta r_i}{\delta x_j} \right) \right]$$

Teorema 1. Un polinomio di Alexander di un nodo N denotato con $\Delta_N(t)$ è un polinomio di Laurent.⁵

La dimostrazione segue dall'applicazione del calcolo di Fox dalla costruzione della matrice jacobiana associata ad un gruppo G con parametr. Per la costruzione si consultino [22], [28] e [24].

⁵Polinomi del tipo $a_{-n}t^{-n} + a_{-(n-1)}t^{-(n-1)} + \dots + a_{-1}t^{-1} + \dots + a_n t^n$ dove gli elementi di a_n appartengono ad un campo \mathbb{F} .

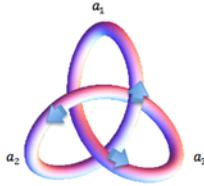


Figura 9: Nodo trifoglio orientato

Esempio 3. Siano $\mathbb{F}[a_1, a_2, a_3]$ dove $r_1 = a_1 a_2 a_1^{-1} a_3^{-1}$; $r_2 = a_2 a_3 a_2^{-1} a_1^{-1}$; $r_3 = a_3 a_1 a_3 a_2^{-1}$. Si ha:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta r_1}{\delta a_1} \right) &= \frac{\delta(a_1 a_2 a_1^{-1} a_3^{-1})}{\delta a_1} = 1 + a_1 \frac{\delta(a_2 a_1^{-1} a_3^{-1})}{\delta a_1} \\ \frac{\delta(a_2 a_1^{-1} a_3^{-1})}{\delta a_1} &= 0 + a_2 \frac{\delta(a_1^{-1} a_3^{-1})}{\delta a_1} \\ \frac{\delta(a_1^{-1} a_3^{-1})}{\delta a_1} &= -a_1^{-1} + a_1^{-1} \frac{\delta(a_3^{-1})}{\delta a_1} \\ \frac{\delta(a_3^{-1})}{\delta a_1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\delta(a_1 a_2 a_1^{-1} a_3^{-1})}{\delta a_1} = 1 + a_1 (0 + a_2 (-a_1^{-1}(0))) = 1 - a_1 a_2 a_1^{-1}$$

La matrice Jacobiana è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 - a_1 a_2 a_1^{-1} & a_1 & a_1 a_2 a_1^{-1} a_3^{-1} \\ -a_2 a_3 a_2^{-1} a_1^{-1} & 1 - a_2 a_3 a_2^{-1} & a_2 \\ a_3 & -a_3 a_1 a_3^{-1} a_2^{-1} & 1 - a_3 a_2 a_3^{-1} \end{pmatrix}$$

Ed un polinomio di Alexander è il determinante della seguente matrice 3×3

$$\mathcal{A}\phi \left(\frac{\delta r_i}{\delta x_j} \right) = \begin{pmatrix} 1-t & t & -1 \\ -1 & 1-t & t \\ t-1 & -1 & 1-t \end{pmatrix}$$

Risolvendo otteniamo $\Delta_N = t^2 - t + 1$. [18]

Nel 1969 Jonh Conway trova una tecnica per calcolare il polinomio di Alexander di un nodo o un link mediante una relazione a matassa⁶, una relazione tra il polinomio di un link e il polinomio di altri link ottenuti modificando i passaggi in una proiezione link dell'originale.

⁶Il concetto di relazione a matassa (skein relation) fu introdotto da John Merton Conway [5], essa considera tre incroci o allacciamenti orientati, e consiste in una relazione tra funzionali definiti su un insieme di diagrammi di nodi che differiscono solo localmente.



Figura 10: Diagrammi per la relazione matassa Conway

Il polinomio di Alexander Δ_N di un nodo N può essere definito dalle relazioni di Alexander - Conway:

(i) Se N è un nodo banale allora $\Delta_N = 1$

(ii) $\Delta_{(L_+)} - \Delta_{(L_-)} + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta_{L_0} = 0 \Rightarrow \Delta_{\Delta_{(L_0)}(\text{scindibile})} = 0.$

L_+ , L_- e L_0 sono tre link che differiscono solo in un incrocio, come mostrato in figura X. Il fatto che questo polinomio è un invariante nodo/link può essere mostrato facilmente verificando che sia invariante sotto Reidemeister mosse, dove L_+ , L_- e L_0 corrispondono a N_+ , N_- e N_0 . Considerando un nodo N , ed un incrocio del nodo, si chiama N_+ il nodo in cui l'incrocio è 'positivo' e N_- il nodo con incrocio "negativo". Calcolare il polinomio per un nodo comporta l'applicazione ripetuta di una relazione a matassa fino ad ottenere un insieme di nodi banali (o altri nodi i cui polinomi siano stati precedentemente determinati). Ad ogni passo, è consentita una qualsiasi sequenza di movimenti di Reidemeister. Quindi, per induzione, si dimostra che i legami scindibili con qualsiasi numero di componenti hanno il polinomio di Alexander uguale a zero. Le relazioni di Alexander- Conway permettono di calcolare in maniera induttiva il polinomio, dal momento che qualsiasi nodo può essere trasformato nel nodo banale con un numero finito di cambi nel diagramma. [19], [6]

Esempio 4. Nodo Trifoglio

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{trifold}} &= \Delta_N - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta_{N_2} = 1 - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(\Delta_{N_3} + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta_{N_4}) = \\ &= 1 - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\left(0 + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\right)1 = t^{-1} - 1 + t. \end{aligned}$$

Il polinomio non distingue le immagini speculari: entrambe le versioni del trifoglio hanno il medesimo polinomio di Conway.

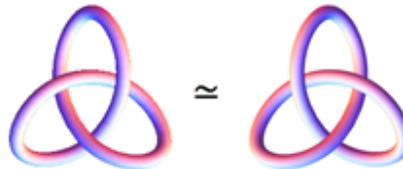


Figura 11: Immagini speculari del nodo trifoglio.

Nel 1984 Vaughan F.R. Jones, durante una ricerca sulla teoria delle algebre di Von Neumann, scopre un nuovo polinomio per nodi orientati, il polinomio di Jones.[14] Un nuovo e potente invariante polinomiale, quindi, per i nodi a più componenti, definito dalla relazione a matassa.[26] Il polinomio di Jones V_N per un nodo N è un polinomio di Laurent in \sqrt{t} , [1] tale che:

(i) Se N è un nodo banale allora $V_N(t) = 1$, qualunque sia l'orientamento di N .

(ii) Per gli schemi a matassa L_+ , L_- ed L_0 , vale la seguente relazione:

$$\frac{1}{t}V_{N_+} - tV_{N_-} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_0$$

(iii) sostiene che se due diagrammi sono uguali tra di loro, tranne ad un incrocio (dove uno passa "sopra" mentre l'altro passa "sotto"), si può modificare la formula "snodando" quell'incrocio; nella formula viene indicata solo la parte "diversa" dei due nodi.

Facendo riferimento a due relazioni:

$$\begin{aligned} V_{N_+}(t) &= t^2V_{N_-} + tzV_0 \\ V_{N_-}(t) &= t^{-2}V_{N_+} + t^{-1}zV_0 \end{aligned}$$

dove:

$$z = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Proposizione 2. *Si hanno i seguenti fatti:*

(i) *Dato un collegamento banale O_α , dotato α componenti, allora*

$$V_{O_\alpha} = (-1)^{\alpha-1} \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\alpha-1}$$

(ii) *(ii) Se L è in link, si ha :*

$$V_{L \sqcup 0_1} = -\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_L^7$$

(iii) *Dato un collegamento banale O_α dotato α componenti allora*

$$V_{L \sqcup 0_\alpha} = (-1)^\alpha \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^\alpha V_L$$

⁷Si indica con " \sqcup " unione e divisione dei link.

Si hanno i seguenti:

Teorema 2.

1) Siano N_1 ed N_2 due nodi, allora: $V_{N_1 \# N_2}(t) = V_{N_1}(t) \cdot V_{N_2}(t)$.

2) Siano N_1 ed N_2 due nodi, allora vale:

$$V_{N_1 \sqcup N_2} = -\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{N_1} \cdot V_{N_2}$$

3) Indicando con N un nodo ottenuto invertendo l'orientamento di N , allora:
 $V_{-N} = V_N$.

4) Indicando con il simbolo N^* l'immagine speculare di N , allora
 $V_{N^*} = (V_N)^{-1}$.

5) Se N è anfichirale, allora il suo polinomio di Jones è simmetrico.

Esempio 5. Nel caso del nodo trifoglio il polinomio di Jones è in grado di distinguere entrambe le versioni del nodo, ossia il trifoglio sinistro di equazione:

$V = t^{-2} + t^{-1}(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(-t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$ e quella del trifoglio destro con equazione $V = -t^4 + t^3 + t$.

Quindi possiamo concludere che il nodo trifoglio è chirale.[3]

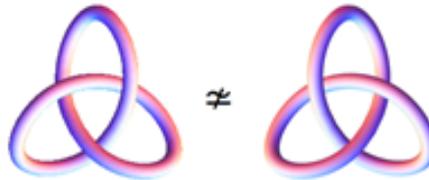


Figura 12

Proposizione 3. Sia L un collegamento orientato con α componenti allora:

$$V_{L_1}(1) = (-2)^{\alpha-1}.[19]$$

Consideriamo il polinomio del nodo moltiplicato per $(t - 1)$, gli sottraiamo il polinomio del nodo “inverso solo in un punto” moltiplicato per t e il risultato è un “Skein relation”.

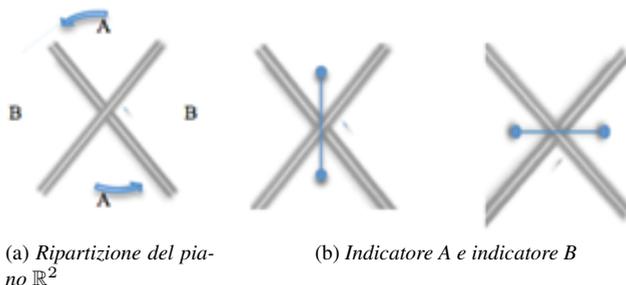
Osservazione 2. Il polinomio di Jones è più potente poichè più selettivo del polinomio di Alexander-Conway.

Tuttavia, il metodo non risolve tutti i casi. Infatti alcuni semplici nodi composti, come il nodo quadrato e il nodo della nonna, hanno lo stesso polinomio di Jones.

Il polinomio che introdurremo di seguito, secondo la notazione combinatorica di Louis H. Kauffman, è rivolto ai nodi non orientati.[17],[21]

Consideriamo un nodo N ed un punto di incrocio, tale che \mathbb{R}^2 venga ripartito in quattro regioni come da figura (12) e dove partendo dalla posizione A si procederà in senso antiorario fino a raggiungere il punto simmetricamente opposto, anch'esso etichettato con la stessa lettera A.

L'*indicatore*, per il punto relativo all'incrocio, ricadrà quindi sulla scelta di A o di B. Uno "stato" S del nodo N è la scelta di un indicatore in corrispondenza di ogni



incrocio di N . La proiezione di N da luogo a un insieme di curve semplici, chiuse e disgiunte $\Gamma_S \in S^2$, dove $|S|$ indica il numero di curve in Γ_S . Si denotano con $a(S)$ e $b(S)$ il numero di indicatori A e B, per lo stato S, mentre con $c(N)$ si indica il numero degli incroci, o degli attraversamenti del nodo N . Il numero degli stati per N sarà pari a $2^{c(N)}$. Inizialmente Kauffman ha individuato un polinomio $\langle K \rangle \in \mathbb{Z}[A, B, d]$, dato da:

$$\langle K \rangle = \sum_S A^{a(S)} B^{b(S)} d^{|S|-1}$$

dove la somma si realizza su tutti i $2^{c(N)}$ possibili stati.

Proprietà 1. del polinomio di Kauffman

- (i) $\langle 0 \rangle = 1$
- (ii) $\langle 0 \sqcup N \rangle = d \langle N \rangle$, se N è non vuoto;
- (iii) dato un nodo non orientato N e scelto un attraversamento dell'incrocio, siano D_A e D_B i diagrammi ottenuti da N collegando le due regioni A e B nell'incrocio, allora $\langle N \rangle = A \langle D_A \rangle + B \langle D_B \rangle$. [20]

Indicata con $w(N)$ il writhe (o torsione) del diagramma, ossia la somma dei segni dei punti doppi del nodo N , il polinomio di Kauffman è dato da:

$$\psi_N(A) = (-A)^{3w(N)} \langle N \rangle \quad .[134]$$

Teorema 3. Siano N_+ , N_- ed N_0 gli skein relation allora $\psi_N(0) = 1$. [7]

Proposizione 4. Il polinomio $\psi_N(A)$ è definito su classi di isotopia ambientale poiché risulta invariante per i movimenti di Reidemeister. [20],[15]

Esempio 6. (Nodo Trifoglio)

$$\psi_N(A) = (-2a^2 - a^4) + (a^3 + a^5)t + (a^2 + a^4)t^2$$

Una caratteristica fondamentale del polinomio di Kauffman è data dalla sua complessità computazionale rispetto al numero degli attraversamenti del diagramma.

Facciamo infine un accenno sul polinomio di HOMFLY (HOMFLY-PT) [9], il cui nome deriva dalle iniziali dei suoi sei scopritori: J. Hoste, A. Ocneanu, K. Millett, P. Freyd, W.B.R. Lickorish, D. Yetter.

Al momento sono conosciuti tre polinomi associati ai nodi: L'Alexander-Conway, quello di Jones e il polinomio HOMFLY, l'ultimo dei quali contenente come casi particolari i primi due.

L'approccio con il calcolo del polinomio HOMFLY-PT parte da uno schema di collegamento orientato e utilizza le seguenti regole (relazioni a matassa):



Figura 13

dove L_+ , L_- , e L_0 sono diagrammi di collegamento, e sono identici, ad eccezione nell'intorno dell'incrocio in cui si differenziano secondo gli schemi riportati in figura (11).

Il polinomio Homfly di un link orientato L , indicato con $P_L(l, m)$, può essere definito con i seguenti assiomi:

- 1) $P_L(l, m)$ è un invariante per isotopia ambientale di L nelle due variabili l ed m (verifica le mosse di Reidemeister).
- 2) Se L è il nodo banale allora $P_L(l, m) = 1$
- 3) $l \cdot P_{(L)_+}(l, m) + l^{-1}P_{(L)_-}(l, m) + m \cdot P_0(l, m) = 0$

esplicitando:

$$l \cdot P(\text{link with crossing}) + l^{-1} P(\text{link with crossing}) + m \cdot P(\text{link with crossing}) = 0$$

Con un opportuna scelta delle variabili, si può avere:

$$(i) a \cdot P_{(L^+)}(l, m) - a^{-1} \cdot P_{(L^-)}(l, m) = z \cdot P_0(l, m).$$

$$(ii) \alpha^{-1} \cdot P_{L^+}(l, m) - \alpha \cdot P_{(L^-)}(l, m) = z \cdot P_0(l, m)$$

$$(iii) \text{ Utilizzando tre variabili posso scriverlo nella seguente forma: } x \cdot P_{(L^+)}(l, m) + y \cdot P_{(L^-)}(l, m) + z \cdot P_0(l, m) = 0.$$

Proprietà 2.

1) Se L è la somma connessa dei link L_1 ed L_2 allora:

$$P_L(l, m) = P_{(L_1 \# L_2)}(l, m) = P_{(L_1)}(l, m) P_{(L_2)}(l, m)$$

2) Se L è l'unione disgiunta dei link L_1 e L_2 allora, si ha:

$$P_L(l, m) = \frac{-(l + l^{-1})}{m} P_{(L_1)}(l, m) P_{(L_2)}(l, m)$$

3) Se L^s è l'immagine speculare di L , allora: $P_{L^s}(l, m) = P_L(l^{-1}, m)$.

Esempio 7. Il polinomio di HOMFLY in caso del nodo trifoglio è il seguente:

$$P_L(l, m) = (2l^2 - l^4) + l^2 m^2.$$

Anche se il polinomio di Kauffman sembra essere equivalente, sotto opportune ipotesi, al polinomio di HOMFLY [16], per l'identificazione di un nodo, vi sono comunque nodi che il polinomio di HOMFLY riesce a distinguere a differenza del polinomio di Kauffman [27], [16].

Questo polinomio rileva la chiralità dei nodi, ma non le diverse strutture dei nodi speculari non sovrapponibili pertanto non è un invariante completo.[10]

Nodi e multidisciplinarietà

L'interesse sulla teoria dei nodi è cresciuto negli anni '50 con la scoperta della struttura a doppia elica del DNA (acido desossiribonucleico). Spesso il DNA forma dei nodi con forme diverse e tali nodi possono essere descritti e studiati attraverso la teoria dei nodi. I ricercatori, infatti, attraverso la teoria dei nodi, studiano gli enzimi, quest'ultimi responsabili della duplicazione e della trascrizione del DNA, e le loro proprietà. Conseguentemente alla duplicazione, i due filamenti che compongono il DNA si separano, e questo grazie alla topoisomerasi (isometria topologica) che è una funzione degli enzimi i quali, come nelle mosse di Reidemeister, modificano mediante tagli, ricuciture, spostamenti e torsioni le strutture a doppia elica.

Inoltre, attraverso alcune tecniche di visualizzazione sperimentale è possibile quantificare l'evoluzione con cui si annoda e si collega il DNA.

Ad esempio, nella tecnica di laboratorio chiamata elettroforesi su gel si ha un campo elettrico che induce le molecole ad attraversare una regione di gel. Le proprietà di una singola molecola determinano la velocità con cui un campo elettrico fa viaggiare la stessa all'interno del gel ed inoltre i nodi con un diverso numero di incroci hanno velocità differenti di spostamento nel gel e quindi producono bande distinte nel mezzo.

I nodi, oltre ad essere studiati nella genetica molecolare, in quanto contribuiscono a capire come individuare un avvolgimento di DNA, hanno un ruolo fondamentale nello studio della fisica delle particelle, nel tentativo di rappresentare la natura fondamentale delle particelle elementari. [18] La teoria dei nodi è strettamente connessa alla teoria delle stringhe, la quale sembra, attualmente, una delle teorie più accreditate per arrivare a determinare la teoria del tutto. La stessa teoria delle stringhe considera le particelle elementari come modi differenti di vibrazione di una stringa. Pertanto, lo spazio è pieno di curve minuscole e deformabili come elastici, le stringhe, che interagendo tra loro formano delle "ciambelle" che in topologia vengono detti tori.

Il modello fisico della teoria delle stringhe è impegnato nella ricerca del tentativo di unificare la meccanica quantistica con la relatività generale, al fine di approdare ad una teoria del tutto (TOE) attraverso cui poter spiegare tutte le interazioni fondamentali esistenti in natura, e in tal senso contribuire ai progressi matematici nella teoria dei nodi, negli spazi di Calabi Yau e in molti altri campi.

Secondo questa teoria il cosmo è pieno di curve infinitamente piccole, flessibili e deformabili simili ad elastici, alle cui vibrazioni corrispondono particelle differenti della materia. Quando più stringhe interagiscono, si formano delle strutture topologiche complesse nodali. Alcuni teorici delle stringhe evidenziarono una stretta relazione tra l'invariante di Jones e i fondamenti della teoria delle stringhe (nota come Teoria quantistica dei campi). [25],[11] e [23].

Di recente, uno studio sulle onde elettromagnetiche, pubblicato su "Physical Review Letters" da Hridesh Kedia ed altri studiosi afferenti al Dipartimento di Fisica dell'Università di Chicago, ha ottenuto delle soluzioni che soddisfano le equazioni fondamentali che descrivono il campo elettromagnetico quali le famose equazioni di Maxwell. Si è dimostrato, infatti, che esistono delle strutture di luce che, durante la loro propagazione nello spazio, presentano le linee di campo che si richiudono su se stesse deformandosi in modo continuo e formando dei nodi trifoglio ed altri nodi, noti alla teoria matematica sui nodi come ad esempio i nodi torici. Precedentemente tali strutture toroidali e a forma di nodo trifoglio erano state riscontrate in alcuni studi fatti sulla fluidodinamica, pubblicati su "Nature Physics" da Dustin Klecner William T. M. Irvine del James Franck Institute del Dipartimento di Fisica dell'Università di Chicago, sulla descrizione delle turbolenze nei sistemi fisici e le loro applicazioni nelle tecnologie, come la meteorologia ai magneti superconduttori utilizzati negli acceleratori di particelle.

Lo studio della teoria dei nodi è un esempio molto articolato di interdisciplinarietà, il cui linguaggio, sfruttando l'aspetto visivo, permette di intrecciarsi con la ricerca scientifica e filosofica più avanzata.

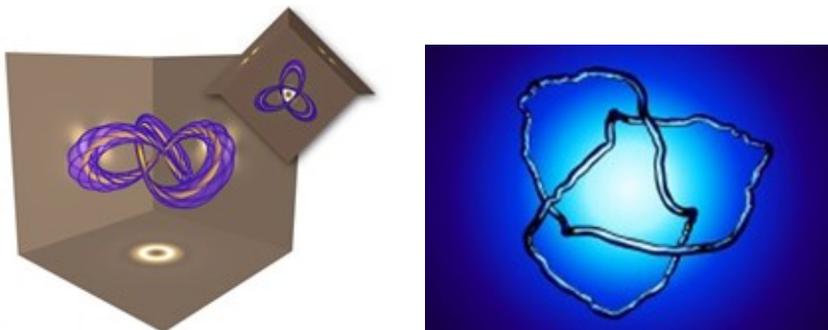


Figura 14: Nella foto a sinistra è riportata una simulazione al computer che raffigura il nodo trifoglio formato da un campo magnetico (Hridesh Kedia-Università di Chicago). Nell'immagine a destra è riportata la propagazione nello spazio delle strutture di luce e come queste mantengono la loro forma durante la propagazione pur distorcendosi (Lab/UNIVERSITY of Chicago). Immagini prese dalla rivista Scientific American 21 Ottobre 2013

Conclusioni

Molteplici sono le potenzialità del calcolatore nel processo educativo. Esistono altri strumenti tecnologici, come la realtà virtuale, che hanno ancora delle potenzialità tutte da scoprire in ambito didattico e formativo⁸. Questo si traduce nell'offrire nuove possibilità allo sviluppo di percorsi educativi basati sull'apprendimento collaborativo. È ormai una realtà la comunicazione e la collaborazione tra scuole di diverse regioni, ma anche di diverse nazioni. Certamente l'impresa che ci siamo proposti è ardua ma non impossibile. Per far comprendere le idee e gli obiettivi della Teoria delle stringhe, ai ragazzi delle scuole secondarie, è fondamentale un processo di metabolizzazione di tutti quei concetti che hanno consentito un processo evolutivo alla Fisica dai tempi di Newton ad oggi.

Ma come introdurre tale tematica? E quale percorso intraprendere per trattare argomenti legati alla fisica moderna nella scuola? [13]

Certamente non è immediato, altrimenti si rischia di banalizzare l'argomento, ma è fondamentale far riscoprire all'interno di un percorso didattico, multidisciplinare, come ad partendo da Newton e da come attinse alle leggi della caduta di gravi scoperte da Galileo e come successivamente li elaborò con quelle del moto dei pianeti scritte da Keplero, per poi sviluppare la legge sulla gravitazione universale.

Passaggio fondamentale che ci porta all'introduzione di un nuovo processo innovativo e metodologico, il calcolo infinitesimale, fondamento della moderna analisi matematica, pervenendo, infine, ad una visione dinamica della geometria, mutata dalla fisica del moto.

⁸[N. SALA, From The Virtual Reality To The Virtual Cities, Proceedings of 4th International Conference on NewEducational Environments (ICNEE 2002), Lugano, Switzerland (2002 in stampa).]

E proprio per questo bisogna partire da Newton, il quale nella sua opera *Principia Mathematicae* del 1687 spiega come il principio di gravità governa il moto dei pianeti nel sistema solare, il moto della Luna attorno alla Terra e la gravità terrestre. L'opera di Newton è ormai universalmente accettata come punto di partenza dello sviluppo moderno della meccanica, fino ad approdare a James Clerk Maxwell il quale dimostrò come elettricità e magnetismo sono soltanto aspetti differenti di un singolo fenomeno chiamato elettromagnetismo giungendo, casualmente, alla scoperta delle onde elettromagnetiche "in quanto luce". E poi Einstein che, con la teoria della Relatività Generale, considera la gravità come una curvatura nella struttura dello spazio tempo, e oltre a salvaguardarne i risultati di Newton, spiega il comportamento della gravità.[12]

Bibliografia

- [1] Aigner, A., Ziegler, G., *Tre applicazioni della formula di Eulero*, Edizione italiana a cura di A. Quarteroni, Springer, 2006.
- [2] Alexander, J.W., *Topological Invariants of Knots and Links*, *Trans. Amer. Math. Soc.*30, 1928.
- [3] Avramov, L., Green, M., Huneke, C., Smith, K., Sturmfels, B., (eds.), *Lectures in Contemporary Commutative Algebra*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [4] Collins, J., *Knot Theory*, University of Edinburgh, 2006.
- [5] Conway, J.H., An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties, *Computational Problems in Abstract Algebra*, Proc. Conf., Oxford, 1967-1970.
- [6] Crowell, R.H., Fox, R.H., *Introduction to Knot Theory*, Ginn and Company, 1963.
- [7] De La Harpe, P., Kervaire, M., Weber, C., *On the Jones Polynomial*, *L'Enseignement Mathématique*32, 1986.
- [8] Fox, R.H., *A Quick Trip through Knot Theory*, in *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*, M.K. Fort Jr., Ed. Prentice-Hall, 1962.
- [9] Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W.B.R., Millett, K., Ocneanu, A., *A New Polynomial Invariant of Knots and Links*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 12, 1985.
- [10] Goulding, D., *Knot Theory: The Yang-Baxter Equation*, Quantum Groups and Computation of the Homfly Polynomia, Durham University, 2010.
- [11] Green, B., *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimension, and the Quest for the Ultimate Theory*, W.W. Norton New York, 1999.
- [12] Iorfida, V., Francaviglia, M., *Matematica ed Arte nel Novecento: Spaziotempo, Movimento e Destrutturazione*, IX Congresso SISM – Perugia, 26-28.11.2009.

-
- [13] Iorfida, V., Francaviglia, M., *The Geometry Of Polytopes*, *Aplimat, Journal of Applied Mathematics*, 5 (1), pp. 85-0. Bratislava, 2012.
- [14] Jones, V.F.R., *The Jones Polynomial*, *Department of Mathematics*, University of California at Berkeley, U.S.A., 2005.
- [15] Kauffman, L.H., *An invariant of regular isotopy*, *Transactions of the AMS*, 318, no. 2, 417–471, 1990.
- [16] Kauffman, L.H., *Knots and Physics*, World Scientific, 2001 Series on Knots and Everything - vol. 1, World Scientific, Singapore 1991.
- [17] Kawachi, A., *A Survey of Knot Theory*, Birkhäuser, 1996.
- [18] Manchester, E.L., *Topological invariants of knots: three routes to the Alexander Polynomial*, University MT4000 Double Project Supervisor: Grant Walker May 14, 2005.
- [19] Murasugi, K., *Traslated by Bohdan Kurpita, Knot Teory and its Applications* Birkhäuser Boston, 1996.
- [20] Mauntrov, V.O., *Knot Teory*, Hardcover, 2004.
- [21] Przytycki, J., Traczyk, P., *Invariants of links of the Conway type*, *Kobe J. Math.* 4, 1988.
- [22] Rolfsen, D., *Knots and Links*, *Mathematics Lecture Series 7*, Publish or Perish, Inc. 1976.
- [23] Smolin, *L'universo senza stringhe: Fortuna di una teoria e turbamenti della scienza*, Einaudi, Torino, 2007.
- [24] Todorova, S., *The Alexander Polynomial For Knots*, *Department of Mathematics at Harvard University* in partial fulfillment of the honors requirements for the degree of Bachelor of Arts, 2000.
- [25] Vaughan F.R. Jones, *The Jones Polynomial*, *Department of Mathematics*, University of California at Berkeley, Berkeley CA 94720, U.S.A., 2005.
- [26] Witten, E., *Quantum field theory and the Jones polynomials*, *Comunications in Mathematical Physics*, 1989.
- [27] Wu, F.Y., *Knot theory and statistical mechanics*, *Reviews of Modern Physics* 64, 1992.
- [28] Yau, S.T., Nadis, N., *The SHAPE of INNER SPACE String Theory and the Geometry of the Universe's Hidden Dimensions*, Published by Basic Books, A Member of the Perseus Books Group, Philadelphia, 2012.
- [29] Yu, J., *Alexander Polynomial Of Knots*, Term Paper For Math 215b, Spring, 2004.

Le coniche nella storia

Conics in history

Nicola Durante¹ e Antonio Restaino²

Abstract

In questo articolo vogliamo ripercorrere le tappe principali della storia delle sezioni coniche. Dalle origini ai nostri giorni. Un percorso lungo piú di duemila anni attraverso il quale ritroveremo i grandi nomi della geometria e i molti modi di introdurre le coniche. Sezioni di un cono con un piano, agli inizi; poi la definizione unificante che poggia sulla nozione di eccentricit ; le definizioni metriche; quella della geometria analitica e quella della geometria proiettiva. Argomento quest'ultimo a cui sar  dedicata particolare attenzione perch  quello proiettivo   l'ambito in cui la teoria delle coniche realizza il massimo di generalit . Infine un cenno alle coniche in spazi con un numero finito di punti. Al di l  della ricostruzione storica, l'idea di mostrare che gli oggetti della matematica possono essere definiti in piú modi e studiati da piú punti di vista   sempre molto istruttiva, ed ha perci  un grande valore anche dal punto di vista didattico.

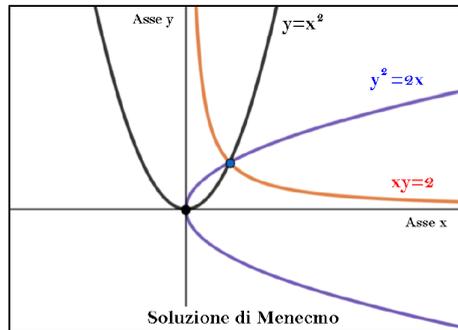
Il tempo di Menecmo e Apollonio

Nella Grecia del V sec. a.C. un'epidemia di peste stava decimando la popolazione. Atene era in ginocchio. Una delegazione di cittadini fu inviata all'oracolo di Apollo, a Delo. Il motivo della visita era avere risposte su come alleviare le sofferenze, come allontanare il male. La risposta non tard  ad arrivare. La richiesta era quella di raddoppiare l'altare cubico di Apollo. Gli ateniesi si misero al lavoro e in breve tempo portarono il compito a termine. La peste per  continuava a fare strage, e qualcuno fu incaricato di diffondere la notizia che Apollo era parecchio arrabbiato, perch  gli ateniesi si erano dimostrati del tutto ignoranti in geometria. In effetti raddoppiarono il lato del cubo di partenza, col risultato di costruire un altare otto volte piú grande del primo. Questa leggenda   all'origine del *problema di Delo* o della *duplicazione del cubo*: dato un cubo, costruirne un secondo di volume doppio, con il solo uso di riga e compasso. Tutti i matematici del tempo erano interessati ai tre problemi famosi della

¹Universit  di Napoli Federico II.

²Liceo Scientifico "Carlo Pisacane".

antichità. Uno era, appunto, quello della duplicazione del cubo, gli altri due erano la quadratura del cerchio e la trisezione angolare. Noi siamo interessati al problema di Delo perché è con questo problema che fecero irruzione nella storia della matematica le sezioni coniche. Un geometra di quel tempo, Ippocrate di Chio, era riuscito a dimostrare che se si fossero trovate delle curve con una particolare proprietà, espressa da una proporzione continua, allora si sarebbe potuto risolvere il problema di Delo. A questo punto arrivò Menecmo. Egli assicurò che le curve desiderate sapeva ottenerle: bastava sezionare un cono circolare retto con un piano perpendicolare a un lato. Queste sezioni erano circonferenze, ellissi, parabole, iperboli. Queste sezioni erano *coniche*, anche se nessuno ancora le chiamava così. Vediamo un pó piú da vicino che cosa fece Menecmo. Prese tre coni circolari retti: il primo aveva l'angolo al vertice acuto, $\alpha < 90^\circ$; il secondo l'angolo al vertice retto, $\alpha = 90^\circ$; il terzo con l'angolo al vertice ottuso, $\alpha > 90^\circ$. A questo punto prese un piano e sezionó il primo cono ponendo il piano in posizione perpendicolare a un lato del cono. La sezione conica era un'ellisse. Ripetendo l'operazione con il secondo cono la sezione era una parabola. Con il terzo cono la sezione era un ramo di iperbole. Ma in che modo le sezioni trovate da Menecmo risolvevano il problema di Delo? Usiamo il nostro linguaggio moderno per semplificare. Supponiamo dato un cubo di lato a . Vogliamo un cubo di lato x tale che $x^3 = 2a^3$. Cioé vogliamo un cubo che abbia volume doppio rispetto a quello del cubo iniziale. La soluzione di Menecmo parte dalla catena di proporzioni di Ippocrate di Chio: $a : x = x : y = y : 2a$. Dai primi due rapporti otteniamo $x^2 = ay$; dal primo e terzo $xy = 2a^2$; dal secondo e terzo $y^2 = 2ax$. A questo punto si può considerare un sistema con due qualsiasi delle tre equazioni. Eliminando y si trova $x = a \cdot \sqrt[3]{2}$. Quindi, ponendo $a = 1$, il segmento che risolve il problema è l'ascissa del punto in cui si intersecano le tre coniche $y = x^2$; $xy = 2$; $y^2 = 2x$.



Di Menecmo non si sa molto altro. E' certo comunque che di queste curve conoscesse anche alcune proprietà, che lui derivava sfruttando teoremi di geometria elementare, triangoli simili, simmetrie. Non sappiamo se sia autentico l'episodio (che si ritrova anche attribuito ad Euclide), in cui rivolgendosi al suo re Alessandro Magno, che voleva imparare in fretta la geometria, disse: "Le vie della città che percorrono i re non sono le stesse che percorrono i comuni cittadini; ma in geometria non ci sono vie speciali, neanche per un re". Ad ogni modo la storia ha deciso così: è di Menecmo il merito di avere scoperto le coniche. Morì nel 320 a.C. Aveva 60 anni.

Il prossimo matematico di cui vogliamo occuparci é uno dei grandi del suo tempo, con Euclide e Archimede. Si chiama Apollonio da Perga (262 a.C.-190 a.C.). Ne parliamo tra poco. Prima diamo un rapido sguardo al periodo che separa Menecmo da Apollonio. Se confrontiamo le date (anche se su di esse non ci sono molte certezze), vediamo che da quando é operativo Menecmo a quando lo é Apollonio passano 150 anni, piú o meno. Viene da chiedersi cosa accadde in questo tempo. Non molto. Non molto di rilevante, almeno. Per esempio si sa che Euclide scrisse dei manuali sulle coniche. Anche un altro studioso, Aristeo, fece cose del genere. Da Archimede abbiamo una definizione importante di conica, in termini di distanze e rapporti. La riportiamo di seguito.

Definizione 1 (Archimede). *Il luogo dei punti del piano tali che il quadrato della distanza da un asse fisso sta in un rapporto costante con il rettangolo costruito sulle distanze che la loro proiezione su questo asse ha da due punti fissi dell'asse stesso (vertici), é una conica a centro.*

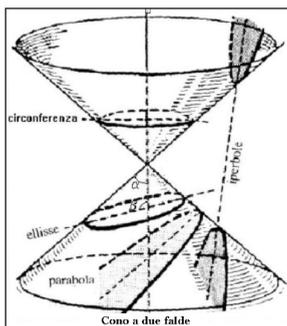
Questa definizione, a parole, non sembra molto maneggevole, in prima battuta. Però é semplice e riconoscibile. E' utile illustrarla per una circonferenza. Consideriamone una: Γ . Sia AB un suo diametro. Se P é un punto di Γ , il triangolo ABP é rettangolo e AB é la sua ipotenusa. Per il teorema di Euclide, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa, PH , é equivalente al rettangolo di lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa: $\overline{PH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{BH}$. Per tutti i punti della circonferenza il rapporto tra i due membri é costante e vale 1. Analogo discorso con l'ellisse e l'iperbole. A questo punto del racconto é opportuno mettere in evidenza un paio di cose legate al discorso precedente su Menecmo. Ci servono per capire Apollonio. Per Menecmo, e per tutti i matematici prima di Apollonio, i coni che intervenivano per le sezioni con un piano erano coni circolari retti; ed avevano una sola falda. Erano solidi limitati nello spazio. Inoltre con ciascuno dei tre coni utilizzati da Menecmo era possibile ottenere solo quella curva e non le altre. E' importante avere presenti questi punti, ce ne renderemo conto subito. Apollonio si occupó di coniche nel famoso trattato in otto libri dal titolo, famoso: *Coniche*. Sul contenuto di questi libri diremo qualcosa piú avanti. Cerchiamo ora di evidenziare i cambiamenti che furono introdotti rispetto al passato.

a) Intanto i nomi. Fu lui a chiamare le coniche con i nomi a noi familiari: ellisse, parabola, iperbole. (Secondo studi piú recenti questi nomi sarebbero stati usati già prima).

b) Apollonio dimostró che non era necessario prendere un piano perpendicolare a un lato del cono, e che da un solo cono si potevano ottenere tutte le curve. Si trattava di variare l'angolo di inclinazione del piano secante.

c) Non é necessario che il cono sia retto. Può essere anche obliquo, le proprietá delle sezioni non cambiano.

d) Introdusse il *cono a due falde* e l'iperbole assunse la forma di curva a due rami. Prima i due rami erano iperboli distinte.



La cosa di cui dobbiamo renderci conto é che questi cambiamenti espressi nell'elenco erano novità di una certa importanza. Perché fu un primo passo che unificava i tre tipi di sezioni, li metteva in relazione. E' utile notare qui che se Apollonio fosse partito da un cono a base ellittica, e non circolare, avrebbe ottenuto comunque le stesse sezioni. Anzi: qualsiasi sezione piana del cono circolare poteva essere presa come base. Quindi Apollonio avrebbe potuto spingersi un pó piú in lá e raggiungere una maggiore generalitá. Vediamo il contenuto dei libri che compongono le *Coniche*. I libri sono otto, ma l'ultimo non lo conosciamo, é andato perduto. Nel primo Apollonio racconta la nascita dell'opera. Si trovava ad Alessandria e uno studioso di geometria andó a fargli visita. L'insistenza di questo matematico, si chiamava Neucrate, fu evidentemente fruttuosa, perché Apollonio, incoraggiato alla stesura dell'opera, cominció a scrivere una prima versione. Poi questa prima bozza fu ampliata e perfezionata e il risultato fu il suo capolavoro. Ma piú interessante é sapere che i primi quattro libri, escluse alcune proposizioni del terzo, erano da lui considerati di carattere introduttivo e raccoglievano conoscenze precedenti, migliorate e ampliate. Gli ultimi libri contenevano i nuovi sviluppi teorici che l'autore apportava. E qui il livello raggiunto era alto, la teoria raggiungeva livelli avanzati. Un fatto notevole é che pur definendo le coniche in modo spaziale, con il cono, lui cercava in fretta di liberarsene per ragionare sulle sezioni "nel piano". Riuscì ad esprimere quello che é l'equivalente dell'equazione della conica usando come assi di riferimento una tangente e il diametro passante per il punto di contatto. In seguito con procedimenti che equivalgono a quelli che oggi conosciamo come trasformazioni delle coordinate, Apollonio studió i diametri, le tangenti, gli asintoti. Studió i poli e le rette polari. Studió le intersezioni retta-conica; le intersezioni di due coniche. Vale la pena ricordare che queste proprietá venivano verificate per via sintetica, sfruttando rapporti tra grandezze, congruenze e similitudini. Una nota a parte va riservata al libro terzo delle *Coniche*. A questo libro Apollonio teneva in modo particolare. Lo dice lui stesso. Il motivo é che conteneva risultati che lui considerava di speciale rilievo per la determinazione di luoghi geometrici. Il problema del luogo geometrico rispetto a tre o quattro rette, che ora vedremo, é considerato di primaria importanza. Anche Pappo, Cartesio e Newton lo considerarono importante, molto piú tardi. Tra l'altro il problema era noto ad Euclide che, a sentire Apollonio, non lo trattó in modo soddisfacente. E quindi lui ci mise le mani. Poi Pappo dirá lo stesso di tutti quelli che lo avevano preceduto. Il problema é questo, per tre rette. Date tre rette r, s, t nel piano π , determinare il luogo geometrico di un punto P che si muo-

ove in modo che il quadrato della distanza da una delle rette, sia proporzionale al prodotto delle distanze di P dalle altre due rette. Le distanze vanno prese secondo angoli assegnati α, β, γ .

$$\mathcal{L} = \left\{ P \in \pi \mid \frac{d_\alpha^2(P, r)}{d_\beta(P, s) \cdot d_\gamma(P, t)} = k \right\}.$$

E' semplice verificare con la nostra geometria analitica che questo luogo geometrico é una conica. Apollonio invece ci arrivó dopo una cinquantina di proposizioni formulate a parole. Nel caso del luogo rispetto a quattro rette la condizione é che il prodotto delle distanze da due di esse, sia proporzionale al prodotto delle distanze dalle altre due rette. Pappo, circa cinque secoli dopo, generalizzó questo problema a piú di quattro rette. Lo ricorderemo piú avanti. Gli storici che analizzano queste opere antiche ne mettono naturalmente in luce anche i punti di debolezza. Nel caso di Apollonio si é osservato, per esempio, che non si trova per i fuochi delle coniche la centralitá che avrebbero dovuto avere, e che hanno nei trattati moderni. Non c' é proprio la parola fuoco, anche se implicitamente il riferimento a questi punti c' é. Non si parla di direttrici, nè di eccentricitá. Non c' é traccia della determinazione della conica per cinque punti. Naturalmente questi rilievi, ed altri, nulla tolgono alla grandezza della matematica dei greci, nè all' opera di Apollonio. Le *Coniche* di Apollonio fino al 1600 rimase l' opera fondamentale sull' argomento, un capolavoro della geometria pura. L' autore fu salutato con tutti gli onori, tanto da essere soprannominato il *Grande Geometra*. G.W. Leibniz (1646-1716) aveva una grande ammirazione per lui: chi capisce Archimede e Apollonio, diceva, esalterá molto meno le conquiste dei matematici dei tempi successivi.

Da Pappo al Rinascimento

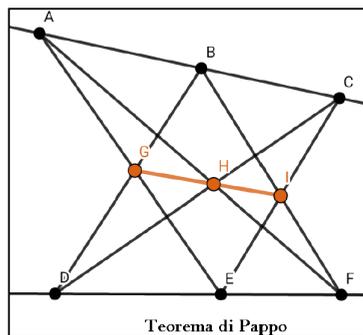
Pappo di Alessandria visse piú di quattro secoli dopo Apollonio. La morte di Apollonio risale al 190 a.C. Pappo visse dal 290 d.C. al 350 d.C. Il tempo che separa i due fu un tempo in cui la geometria classica venne un pó abbandonata. Forse perché é nella natura delle cose che ad un periodo in cui si raggiungono vette elevate segua un periodo di declino. Periodi in cui altri sentieri vengono tracciati, altri interessi diventano di moda o si sviluppano. Con Pappo quel periodo negativo si interruppe e ci fu una parziale inversione di rotta, cui seguirono vicende di cui pure diremo. Nel 320 Pappo compose la sua opera *Collezione*. Anche questa in otto libri, in cui venivano studiati vari argomenti: teoria delle medie, problemi isoperimetrici, problemi con riga e compasso ed altro ancora. Ovviamente non potevano mancare le coniche. E noi concentreremo l' attenzione su qualche aspetto del lavoro di Pappo legato alle coniche. Quello piú importante ci sembra questo di cui stiamo per dire. All' origine le coniche si presentarono ai matematici come sezioni di un cono con un piano. Siamo nello spazio tridimensionale e quindi questa maniera di definire le coniche possiamo chiamarla definizione "spaziale" di conica. O anche definizione "solida". Notiamo che il metodo di definizione é lo stesso per tutte e tre le curve. C' é uniformitá: tutte le curve sono ottenute tagliando un cono con un piano. Ma le curve sono, appunto, piane. E quindi

si dovrebbe poterle ottenere senza uscire dal piano con una definizione uniforme. Come si può aggirare questa questione? In Archimede ed anche in Apollonio troviamo la proprietà, già incontrata, secondo cui il luogo dei punti P del piano reale π , tali che il quadrato della distanza da una retta fissa x è in rapporto costante k con il rettangolo costruito sulle distanze che la proiezione P_x ha da due vertici fissi V_1 e V_2 , è una conica a centro:

$$\Gamma = \left\{ P \in \pi \mid \frac{\overline{PP_x}^2}{\overline{P_xV_1} \cdot \overline{P_xV_2}} = k \right\}.$$

Nel caso della parabola ad essere costante è il rapporto tra la distanza al quadrato di P da un asse, x , e la distanza di P_x dal vertice V . Sembra di cogliere una certa vicinanza tra quello che abbiamo appena detto e il proposito di ottenere una definizione piana e uniforme. Ci arriviamo subito. Un'altra proprietà nota ad Apollonio è quella secondo cui un'ellisse è il luogo dei punti tali che la somma delle distanze da due punti fissi è costante. Nell'iperbole è costante la differenza delle distanze. I punti fissi sono i fuochi, ovviamente; ma Apollonio non li chiamava così. Ci penserà Keplero molto dopo. Dell'analogia proprietà per la parabola non c'è traccia in Apollonio. Comunque qui arrivò Pappo, cinque secoli dopo circa, a risolvere la questione che abbiamo posto. Le considerazioni sono le seguenti. L'ellisse e l'iperbole hanno due direttrici. La parabola una. L'attenzione va ai fuochi (usiamo la parola fuoco per comodità), e alle direttrici corrispondenti. Per ciascuna delle tre curve la proprietà caratteristica è la costanza del rapporto $\varepsilon = \frac{PF}{Pd}$, per ciascun punto P della curva, F essendo un fuoco e d la direttrice più vicina. Per l'ellisse il rapporto è minore di uno; per la parabola è uno; per l'iperbole maggiore di uno. Il rapporto è chiamato *eccentricità* della curva. E così abbiamo trovato la proprietà che non ci obbliga a uscire dal piano e che unifica le tre curve. Questo è un aspetto importante del contributo di Pappo. Ora metteremo in evidenza la definizione metrica sopra richiamata e la definizione che utilizza l'eccentricità. Enunciamo prima il famoso teorema di Pappo.

Teorema (Pappo). *Se i vertici di un esagono appartengono alternativamente a due rette incidenti, i punti di intersezione dei lati opposti sono allineati.*



Definizione 2. Si dice *ellisse* il luogo dei punti del piano tali che la somma delle distanze da due punti fissi sia costante. *Iperbole* é il luogo dei punti del piano tali che la differenza delle distanze da due punti fissi sia costante. *Parabola* é il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso e una retta fissa.

Definizione 3. Si dice *conica* una curva descritta da un punto mobile in un piano in modo che il rapporto fra la sua distanza da un punto fisso (*fuoco*) e una retta fissa (*direttrice*) sia costante.

Un altro fatto storico importante é il seguente. Parlando di Apollonio abbiamo avuto modo di discutere un pó il problema delle tre o quattro rette. Pappo generalizzò questo problema a $n > 4$ rette. Pappo affermava di essere stato lui a risolvere bene la questione, perché quelli che se ne erano occupati prima di lui non avevano fatto le cose a dovere. Ora, questo problema ha anche un'importanza storica dovuta al fatto che Cartesio elaborò la sua geometria analitica ragionandoci sopra, mettendo alla prova su questo problema il suo indirizzo analitico. Si può segnalare un'ultima cosa. Nel libro ottavo della sua *Collezione*, Pappo si occupò anche della costruzione dell'ellisse per cinque punti assegnati. Poi Newton riprenderà questo problema. L'opera di Pappo é l'ultima opera importante dell'antichità. Nel tempo che seguì non ci furono studiosi confrontabili con lui. L'attività di questi studiosi consisteva in sostanza nel riprendere le opere importanti precedenti e commentarle. Questa attività andò avanti per molti secoli. Tra queste opere continuamente studiate e riproposte c'era ovviamente quella di Apollonio sulle sezioni coniche. Una figura che vogliamo menzionare, che visse in questo tempo, era il 400 d.C., é Ipazia di Alessandria. Era una giovane studiosa che commentò Apollonio, tra gli altri, e che si occupava di astronomia. Fu barbaramente massacrata da fanatici cristiani nel 415 d.C.

Nel Medioevo lo studio delle coniche venne quasi del tutto abbandonato. In realtà in epoca medievale molte cose subirono abbandoni, interruzioni. Non ci soffermeremo sulle diverse cause di questo fenomeno: sono presenti motivi di ordine politico-religiosi, motivi culturali, nuovi modi di guardare al mondo. In tutto questo però, va ricordato quello che i matematici bizantini fecero. Un lavoro molto importante: conservarono le opere di Archimede e parte dei libri dell'opera di Apollonio. Altri continuarono a riproporre opere commentate. Comunque dal punto di vista di nuovi contributi originali non c'è nulla di significativo da segnalare. I matematici arabi intorno all'anno mille lavorarono con le sezioni coniche. Le utilizzarono per risolvere equazioni di terzo grado. Ma anche in questo caso nulla di speciale: furono generalizzate alcune tecniche usate dagli antichi, Menecmo fra questi. Finalmente intorno alla metà del 1400, lo studio della geometria sembrò risvegliarsi dal lungo sonno medievale. I motivi che rilanciarono gli studi in geometria e nella teoria delle coniche in particolare sono più di uno; noi concentreremo l'attenzione su tre fatti fondamentali: gli studi sulla prospettiva; alcune traduzioni di grande successo di opere classiche; le leggi astronomiche e fisiche. Tutti fattori che contribuirono a riportare lo studio delle sezioni coniche al centro dell'attenzione, dopo secoli e secoli di abbandono.

In Italia e in Germania si stavano sviluppando rapporti tra la geometria e la pittura, tra matematica e arti figurative in genere. Un legame antico anche questo. Già nel I

I sec. a.C. Vitruvio nel trattato *De Architectura* parlava di sistemi prospettici applicati per dipingere scenografie teatrali. Legámi spezzati nel medioevo, ma che in epoca rinascimentale furono ricostruiti, rilanciati. Il bisogno di rappresentare in due dimensioni la realtà tridimensionale del mondo, portó a studi importanti sulla prospettiva. E furono coinvolti in questi studi alcuni degli uomini di maggiore valore del tempo: Leon Battista Alberti (1404-1472), nell'opera *Della pictura*; Piero della Francesca (1415-1492), nell'opera famosa *De prospectiva pingendi*; Leonardo da Vinci (1452-1519) nel *Trattato della pittura*, che si apre con l'ammonimento: "Non mi legga chi non é matematico". Ci ricorda Platone e la famosa scritta all'entrata dell'Accademia: "Non entri qui chi non sa di geometria". Tutti questi stimoli e questi lavori approdaron poi in territorio matematico grazie a G. Desargues (1591-1661). E da qui i primi semi della geometria proiettiva, che però doveva ancora attendere un bel pó prima di affermarsi definitivamente.

Un altro motivo alla base della ripresa dell'interesse per lo studio delle coniche fu quello delle traduzioni in latino delle opere antiche. Ne parleremo. Ricordiamo prima l'impegno del matematico J. Werner (1468-1528). Werner, il cui nome é familiare per le sue formule trigonometriche, nel 1522 pubblicó un'opera sulle coniche in latino. Il titolo era *Elementi delle coniche*, opera composta di ventidue libri. Un gran lavoro, almeno per le dimensioni e per l'impatto positivo che ebbe circa la ripresa dell'interesse per le coniche. Per il resto gli storici ritengono che il livello del lavoro di Werner non fosse paragonabile a quello di Apollonio. Ma, al tempo, in pochi erano in grado di leggere Apollonio, o Euclide, o Pappo, proprio perché le opere antiche erano in greco e non esistevano traduzioni in latino. E qui arrivarono, a metter mano alla questione, alcuni studiosi matematici o appassionati dell'antichità, che fecero un lavoro enorme per riportare a nuova vita i classici greci e ricostruire quello che era andato perduto. Per stare alle *Coniche* di Apollonio, una prima traduzione risale al 1501, una seconda é del 1537, poi ancora nel 1566 e nel 1654. Molto importante fu la traduzione del 1566 di F. Commandino (1509-1575), un matematico e uomo di cultura appassionato dell'antichità. Commandino merita una particolare menzione perché la sua traduzione di Apollonio diventó di riferimento in tutte le scuole europee.

A fianco agli studi sulla prospettiva, un altro elemento di grande importanza che rilanció, via via, lo studio delle coniche fu il fatto che con J. Keplero (1571-1630), le coniche non apparivano piú soltanto come creazioni della fantasia: Keplero aveva scoperto che le orbite dei pianeti erano ellissi. Fermiamoci un attimo sulla figura di Keplero. Lui si occupó di coniche prima delle famose leggi planetarie. Nell'anno 1604 Keplero si occupava di ottica e di specchi parabolici. E da qui si era interessato alle coniche. Lo fece in un capitolo dell'opera *Ad Vitellionem Paralipomena, Quibus Astronomiae Pars Optica Traditu* (Aggiunte a Witelo, con le quali viene trattata la parte ottica dell'astronomia), che Keplero stesso chiamava *Optica*, dove immaginava che le coniche si potessero ottenere una dall'altra con un movimento continuo. Vedeva allontanarsi un fuoco di un'iperbole fino a raggiungere l'infinito; a quel punto la curva diventava una parabola; poi quel fuoco girava intorno all'infinito e dall'altra parte si componeva un'ellisse: che a sua volta diventava una circonferenza avvicinando i fuochi fino a sovrapporsi. Per Keplero la parabola aveva due fuochi, di cui uno é all'infinito (fu lui a parlare per primo di fuochi, come già detto). Questi slanci di fan-

tasia, una volta introdotti i punti all'infinito, diventarono idee piú concrete. Con Desargues, praticamente. Nel 1609 arrivó *Astronomia nova*, con due leggi planetarie. La terza dieci anni piú tardi. La prima era: "I pianeti si muovono intorno al Sole in orbite ellittiche aventi il Sole in uno dei fuochi". A parte applicazioni minori, con le leggi astronomiche le coniche non furono mai piú quello che prima erano state. Le coniche furono studiate sempre senza pensare che potessero essere utili a qualcosa. Questo per circa due millenni. Erano un oggetto di studio astratto, come altri. Invece erano la chiave per arrivare ad una importante legge della natura. Questa cosa, tra l'altro, é sempre stata portata ad esempio per sostenere il valore della ricerca pura.

Galileo Galilei (1564-1642). Galileo é una figura che non dobbiamo certo presentare. La sua vicenda é nota, sia dal punto di vista umano che di scienziato. E' noto che Galileo studió tra le altre cose il moto dei proiettili, e che la traiettoria dei proiettili se si trascura la resistenza dell'aria é una parabola. E' utile osservare che le sezioni coniche trovarono il loro posto nelle scienze fisiche quasi contemporaneamente: orbite planetarie e traiettoria dei corpi lanciati in aria. Il grande geometra, per quanto fervente fosse la sua fantasia, tutto questo non poteva arrivare a concepirlo.

Il tempo di Cartesio e Desargues

Nel 1628 il filosofo francese Renè Descartes (1596-1650), noto anche con il nome di Cartesio, scrisse una lettera ad un amico olandese. In questa lettera c'era una regola che permetteva di costruire, utilizzando una parabola, le radici di qualsiasi equazione di terzo o quarto grado. Non sappiamo se Cartesio fosse a conoscenza del fatto che Menecmo, duemila anni prima, aveva fatto la stessa cosa per risolvere il problema della duplicazione del cubo. Anche un matematico arabo del 1100 aveva fatto la stessa cosa. Qualche anno piú tardi Cartesio si trasferí in Olanda, e lí un altro amico, filosofo, gli sottopose il problema di Pappo delle tre o quattro rette. Abbiamo parlato in due occasioni di questo problema: in Apollonio e in Pappo. Cartesio ignorava che il problema di Pappo fosse stato già risolto; ma applicando il suo metodo, che aveva fatto conoscere con la famosa opera *Discorso sul metodo*, riuscí a risolverlo senza particolari difficoltà. Questo episodio convinse Cartesio dell'efficacia e potenza di quel modo di procedere e scrisse *La géometrie*. E fu cosí che nacque la geometria analitica. La scoperta della geometria analitica, alla quale anche Pierre de Fermat (1601-1665) era arrivato in autonomia, e le conseguenze sullo studio delle curve, rappresenta un momento fondamentale per la storia della matematica e della scienza in generale. Quindi é il caso di fermarsi un pó per qualche riflessione in piú. Sono molto interessanti, per esempio, le considerazioni che troviamo nel libro *Introduzione alla matematica* del filosofo e matematico inglese A.N. Whitehead (1861-1947). Riportiamo un breve passo. "La scoperta della geometria analitica, come pure la scoperta della geometria proiettiva, che ebbe luogo piú o meno nello stesso tempo, illustrano un fatto che continuamente si verifica nella storia della conoscenza, e cioé che é sugli argomenti piú noti che ci sono da fare alcune tra le piú grandi scoperte. All'inizio del XVII secolo erano ormai duemila anni che si studiava la geometria, anche se si vuole far cominciare tale scienza soltanto con i greci. Era passata attraverso le menti degli

egiziani e dei greci, degli arabi e dei tedeschi. Eppure dopo tanto affaticarsi attorno ad essa per una cosí lunga serie di epoche e da parte di menti tanto diverse, i suoi segreti piú importanti erano ancora da scoprire". Whitehead elenca alcuni punti di merito del nuovo metodo geometrico analitico. Mette in risalto un punto fondamentale quando dice che a nessuno sfugge, studiando la geometria elementare, il fatto che manchi di un metodo direttivo: per ogni nuova proposizione che si voglia dimostrare occorre trovare nuovi modi. E dunque se una disciplina richiede questo sforzo, vuol dire che manca del grande requisito del pensiero scientifico. Manca cioé del metodo. E il fatto peculiare della geometria analitica é che introdusse per la prima volta il metodo. Dopodichè é possibile ottenere nuove conoscenze su qualsiasi argomento che cada in quell'ambito specifico. Un altro fatto messo in luce da Whitehead é che, sviluppandosi, le discipline matematiche vanno a saldarsi. E la geometria analitica compie questa operazione unificante: geometria, algebra, analisi diventano discipline strettamente legate. L'essenza della geometria analitica consiste nell'identificazione della correlazione algebrica con il luogo geometrico. E in questo nuovo ordine di idee, troviamo per le coniche la definizione del luogo geometrico attraverso l'equazione.

Definizione 4. *Si dice conica ogni curva algebrica del secondo ordine:*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

La distinzione tra i vari tipi di coniche si fa in base al segno della quantità $\Delta = b^2 - 4ac$. Si può provare che la conica é un'ellisse se $\Delta < 0$; una parabola se $\Delta = 0$; un'iperbole se $\Delta > 0$. Come sappiamo nella forma generale dell'equazione di una conica sono compresi i casi degeneri. L'equazione può rappresentare due rette (eventualmente coincidenti) o anche un sol punto. Casi che possono essere inseriti tra quelli ottenuti alla maniera dei greci, perché tagliando un cono doppio con un piano, in modo opportuno ossia facendo passare il piano per il vertice del cono, troviamo due rette (eventualmente coincidenti) o anche un sol punto come sezione. Volendo possiamo anche considerare un cono con vertice all'infinito (cilindro), e ottenere due rette parallele, tagliandolo. Questa cosa é utile notarla, perché vediamo qui come piú casi particolari siano inclusi in un'unica forma generale. Questo tendere alla generalità é la caratteristica fondamentale della matematica moderna. Ci sembra qui un buon punto per sottolineare la leggera differenza, almeno nel classico caso di piano reale, che intercorre tra la definizione storica di conica, come sezione piana di un cono, e quella moderna algebrica come luogo degli zeri di un polinomio di secondo grado. Quest'ultima definizione aggiunge, oltre tutte le altre possibili coniche già ottenute con la definizione classica, anche la cosiddetta "conica vuota" data ad esempio dagli zeri di un'equazione del tipo $ax^2 + by^2 + 1 = 0$ con $a, b > 0$. Questa piccola eccezione tra la definizione classica e quella moderna scompare considerando anziché il piano reale, il piano sul campo dei numeri complessi o anche, come vedremo, il piano su un campo finito.

La definizione di conica che la geometria analitica ci permette di dare é davvero molto semplice. Anche l'equazione polare di una conica é comoda ed utile nelle applicazioni: $r = \frac{e \cdot d}{1 + e \cdot \cos \theta}$, dove r e θ sono coordinate polari, d é la distanza fuocodirettrice, ed e l'eccentricità. Se pensiamo alla formulazione di qualcuna delle defini-

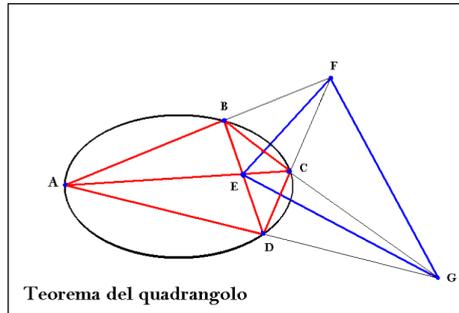
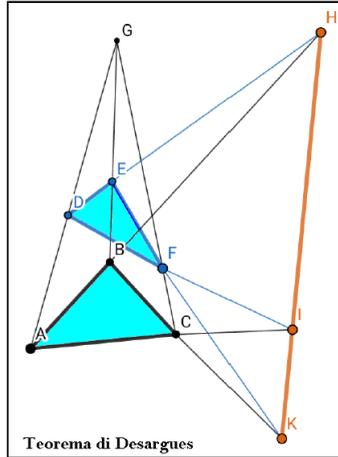
zioni che abbiamo incontrato nelle pagine precedenti, queste definizioni analitiche lasciano davvero l'impressione di non poter fare di meglio. Di questo era certamente convinto Cartesio. Tanto che quando venne a sapere che l'amico stimato, Desargues, aveva pubblicato un libro in cui trattava le coniche senza usare l'algebra, ci restó molto male. Proprio perché non vedeva motivi per evitare la comoda trattazione analitica dell'argomento coniche. Ma Desargues aveva studiato i testi rinascimentali sulla prospettiva, e da queste opere aveva estratto un'idea molto efficace, su cui poi costruí la sua personale trattazione delle coniche. L'idea di base é semplice, come sempre sono le idee che portano i frutti migliori.

Se poggiamo una palla su un piano e la illuminiamo con una torcia, il contorno dell'ombra é una conica. E il tipo di conica dipende dalla direzione del fascio di luce. Per esempio se la luce arriva da sopra, perpendicolare al piano, vediamo una circonferenza. Se incliniamo il fascio di luce vediamo un'ellisse; poi il fascio lo mandiamo parallelo al piano della palla, e così via. L'idea é quindi che le coniche sono proiezioni della circonferenza. Nel proiettare ci sono proprietà che si perdono ed altre che resistono al cambiamento: sono, cioè, invarianti per proiezione. Queste proprietà Desargues le studiò. Procedendo su questo sentiero, si accorse di dovere ammettere certi punti, nuovi. Per esempio rette parallele si incontrano in un punto all'infinito; la parabola ha un fuoco all'infinito, eccetera. Proprietá di natura proiettiva. Gli storici ritengono che il lavoro sulle coniche con i metodi proiettivi che Desargues aveva prodotto nel libro "Prima stesura del tentativo di studiare gli effetti dell'incontro di un cono con un piano", fosse un lavoro elegante ed unificante (con un titolo pessimo). Unificante perché gli enunciati dei teoremi incorporavano molti casi particolari che con la precedente impostazione metrico-analitica dovevano essere trattati separatamente. Purtroppo Desargues non fu fortunato scientificamente. Viveva in un tempo sbagliato. Il suo tempo era quello dei trionfi della geometria analitica e quindi le sue idee non solo non trovarono una buona accoglienza ma furono addirittura combattute, ostacolate in ogni modo. Insomma per la geometria proiettiva i tempi non erano ancora maturi. In questo insuccesso ci mise molto del suo, in verità. Il linguaggio che usava era del tutto inappropriato per esser accettato dai matematici del suo tempo. I matematici avevano torto sulla qualità delle idee di Desargues, ma avevano ragione sul fatto che usasse un linguaggio inadatto. Ad ogni modo le sue idee erano importanti ed innovative, anche se furono presto messe da parte e dimenticate. La stessa sorte toccó al suo libro. In chiusura su Desargues riportiamo gli enunciati di due suoi teoremi. Il primo é quello famoso sui triangoli omologici, che giocherà un ruolo fondamentale nella geometria proiettiva che verrà. Il secondo é noto come teorema del quadrangolo.

Teorema (Desargues). Se due triangoli sono disposti in modo che le rette che congiungono coppie di vertici corrispondenti concorrono in un punto, i punti di intersezione di coppie di lati corrispondenti sono punti collineari. E viceversa.

Teorema (del quadrangolo). *Se un quadrangolo completo é inscritto in una conica, la retta passante per due punti diagonali é la retta polare, rispetto alla conica, del terzo punto diagonale.*

Nota. Un *quadrangolo completo* di un piano proiettivo é la configurazione costituita da quattro punti, (A, B, C, D nel disegno), di cui mai tre allineati (vertici del quadrangolo), e dalle sei rette (lati del quadrangolo) che uniscono questi punti, a due a due. Con riferimento alla figura, i punti diagonali sono E, F, G .

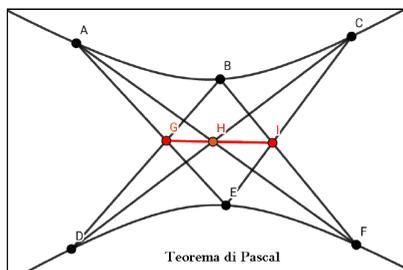


Desargues ebbe come allievo il geniale Blaise Pascal (1623-1662). Pascal, nel 1639, aveva appena sedici anni quando pubblicó un articolo sulle coniche. Una sola pagina che conteneva il noto teorema che porta il suo nome. Egli aveva un progetto piú ambizioso sulle coniche. Infatti nel 1654 compose un trattato che però non fu pubblicato e andó perduto. G.W. Leibniz (1646-1716) che aveva avuto occasione di vederne una copia ad un certo punto ne fece un estratto. La nota di Leibniz mostrava che Pascal aveva studiato in particolare il problema del luogo delle tre rette o quattro rette. Problema che torna continuamente. C'era poi la costruzione della tangente a una conica. Nella nota di Leibniz erano segnalati altri argomenti trattati da Pascal, che utilizzava sempre metodi sintetici nei suoi ragionamenti. La storia che seguí é nota: fece l'esperienza di un'estasi religiosa e abbandonó la matematica per studiare teologia. Gli storici sono concordi nel ritenere che Pascal sarebbe stato un gigante della matematica, e fu una grande perdita. Comunque fece molte cose, in ogni caso é tra i grandi. Elenchiamone alcune: inauguró, con Fermat, il calcolo delle probabilità; trovó nuove

proprietá del triangolo aritmetico; diede un contributo alla teoria dei numeri; studi la cicloide. Morí giovane, aveva trentanove anni. Ad un certo punto da qualche parte annot: quel poco che ho trovato in geometria lo devo a Desargues e al suo lavoro. E cosí Desargues, che non fu molto fortunato a causa dell'imperante cartesianesimo geometrico, non ebbe neanche la buona sorte di vedere il genio di Pascal continuare la sua opera. Riportiamo il famoso teorema di Pascal.

Teorema (Pascal). Se A, E, C, D, B, F sono i vertici successivi di un esagono inscritto in una conica, e se G é il punto di intersezione tra AE e DB ; I il punto di intersezione di EC e BF , H il punto di intersezione di CD e AF , allora i punti G, H, I sono allineati. (Retta di Pascal).

Osservazione. Con i sei punti sulla conica si possono formare sessanta esagoni semplici distinti, quindi sessanta rette di Pascal. Questa configurazione di rette fu chiamata, dallo stesso autore, *esagramma mistico*.



Con la morte di alcuni grandi matematici (Cartesio, Fermat, Desargues, Pascal), a pochi anni di distanza l'uno dall'altro, la geometria nel suo complesso andava incontro ad un periodo di declino. Come altre volte nella storia. In questi periodi di magra, ci sono sempre degli studiosi che svolgono un'attività importante. A volte fondamentali. Per stare al periodo di cui stiamo parlando, é noto agli storici che in origine *La géometrie* di Cartesio era formulata in modo poco comprensibile. In piú non venne pubblicata in latino, lingua scientifica del tempo. Ci furono studiosi anche di notevole livello che sistemarono l'opera, la tradussero, la ampliarono. Scrissero manuali, aggiunsero contributi loro stessi. Per fare qualche nome citiamo F. van Schooten (1615-1660), che elimin molti dei difetti, cui si faceva cenno, dall'opera cartesiana; J. De Witt (1629-1672), che studi la riduzione in forma canonica delle coniche con la tecnica delle rototraslazioni assiali; J. Wallis (1617-1703), un altro che contribuì al miglioramento del lavoro cartesiano con pubblicazioni importanti; fu Wallis, sostanzialmente, a definire le coniche attraverso l'equazione quadratica come oggi facciamo noi. Lo aveva gi fatto Fermat, ma la definizione di Wallis si avvicina di piú alla nostra. Sull'altro fronte ci fu chi cerc di continuare l'indirizzo di Desargues e Pascal, che tuttavia aveva vita difficile. Come dicevamo prima, dopo Cartesio i procedimenti analitici dominavano la scena. Comunque un importante continuatore dei metodi proiettivi desarguesiani fu P. De la Hire (1640-1718), che di Desargues era stato allievo. E' doveroso ricordare De la Hire perché fece cose importanti: per esempio studi ap-

profonditamente la polarità rispetto a una conica, dimostrando i teoremi fondamentali, che poi furono ripresi da altri. In questo filone desarguesiano un altro nome è J.H. Lambert (1728-1777), che pubblicò un trattato ad uso tecnico in cui usava il metodo delle proiezioni.

Il matematico di cui adesso parleremo brevemente è uno dei più grandi di sempre. I. Newton (1642-1727). Newton è certamente più noto per l'albero e la mela che per le coniche. Ma si occupò anche di coniche. E poichè stiamo parlando di un grande, vale la pena andare a vedere cosa fece. Nella sua opera principale *Philosophiae naturalis principia mathematica*, studiò il noto problema delle tre o quattro rette. Una seconda questione che affrontò fu la costruzione di coniche mediante intersezioni di rette in movimento. Cosa che i greci facevano sistematicamente, oltre a tagliare coni con un piano. Era questa una maniera dei greci di generare le coniche. E così faceva anche Newton: sulle coniche seguiva metodi e stile classici. Da qui passava alla determinazione di una conica soggetta a cinque condizioni. Poteva essere: passare per cinque punti; oppure: passare per due punti ed essere tangente a tre rette, eccetera. Un'altra cosa che lega Newton alle coniche è che dimostrò, tra tante altre cose, che le comete potevano muoversi secondo ellissi molto allungate, oppure secondo parabole, oppure secondo iperboli simili a parabole. Le comete che periodicamente ritornano seguono delle ellissi, ovviamente. In un altro libro, *Metodo delle flussioni*, dopo aver fatto uso delle coordinate cartesiane per studiare curve algebriche del terzo ordine, introdusse nuovi tipi di coordinate. Oltre a quelle polari che conosciamo, c'erano anche le coordinate bipolari. Vediamole un attimo. Fissiamo due punti nel piano, A e B . Al generico punto P diamo come coordinate le distanze dai due fissati: $x = \overline{PA}$; $y = \overline{PB}$. In questo sistema di coordinate un'ellisse ha equazione del tipo $x + y = k$; un'iperbole $x - y = h$. Le equazioni del tipo $ax + by = c$ sono rappresentative delle ovali di Cartesio (luoghi ottenuti generalizzando la *costruzione del giardiniere* dell'ellisse).

Nel racconto che stiamo portando avanti, così come ci eravamo proposti, vogliamo ricordare le tappe più importanti nella storia delle coniche e segnalare i nomi dei matematici che con le coniche hanno in qualche modo avuto a che fare. Per quello che riguarda, invece, i due che prenderemo ora in considerazione, G. Monge (1746-1818) e L. Carnot (1753-1823), il motivo della loro presenza qui è che sono fondatori, con altri, della moderna geometria sintetica. Dobbiamo capire cosa fecero in vista della successiva sezione 4, in cui racconteremo la nascita e lo sviluppo della geometria proiettiva. Una delle sezioni a cui teniamo in particolare.

Quando G. Monge (1746-1818) pubblicò la sua opera famosa *Gèomètrie descriptive* era il 1795. Si tratta di un'opera di alto livello scientifico. Raccoglieva le lezioni che l'autore aveva tenuto nel 1794 all'*École Normale*. Questa scuola e l'*École Polytechnique* erano due scuole di grande prestigio, nate in tempo di Rivoluzione. Monge aveva contribuito alla loro fondazione, e ne fu dirigente e professore. Monge era anche un abile politico. Comunque, nella sua opera, partendo da problemi di natura pratica legati ad esigenze di tipo produttivo, industriale e delle arti in genere, elaborò una teoria scientifica in cui abbracciava i problemi tecnici mettendo insieme, in modo organizzato, le varie conoscenze di matematica pura ed applicata. Il metodo alla base dei suoi ragionamenti e costruzioni era quello della *doppia proiezione orto-*

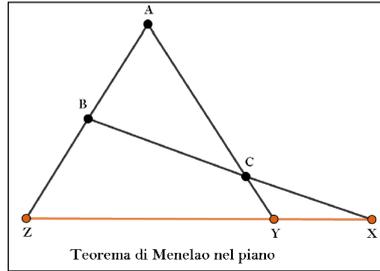
gonale. É un metodo noto dal disegno tecnico, per esempio. Ricordiamolo un attimo. Prendiamo due piani ortogonali, uno orizzontale, l'altro verticale; ora consideriamo una figura tridimensionale e proiettiamola ortogonalmente sui due piani; otteniamo sull'orizzontale la *pianta*; sul verticale la *elevazione*. Ora si ribalti il piano verticale fino a farlo coincidere con l'orizzontale. Ecco che pianta ed elevazione danno, in due dimensioni, la figura tridimensionale. Ai suoi tempi questa tecnica portó una vera rivoluzione nella progettazione, nell'ingegneria militare. Monge generalizzó i metodi della prospettiva, la geometria del piano era messa in relazione con quella spaziale. Il suo nome é legato alla geometria analitica dello spazio. E cosí la geometria di Cartesio e Fermat riprese nuova vita, riveló su piú ampia scala la sua efficacia. Monge introdusse gli elementi immaginari e il principio di continuitá, che poi Poncelet riprenderá piú avanti basandovi l'edificio proiettivo. A titolo di curiositá, in chiusura su Monge, citiamo il *problema del trasporto ottimale*, che nel 2018 ha portato il matematico A. Figalli a vincere la medaglia Fields. Il trasporto ottimale era nato con Monge: si chiedeva di ottimizzare i costi nel trasporto di terreno da un posto ad un altro. Nel caso di L. Carnot, l'opera di riferimento é *Géométrie de Position* del 1803. In questa importante opera l'autore si propose l'obiettivo di dare alla geometria pura un grado di generalitá che fosse ai livelli della geometria analitica. Come vedremo Poncelet riprenderá queste linee guida. Anche per questo Carnot é considerato un grande preparatore della geometria proiettiva, al pari di Monge. La caratteristica di Carnot matematico era che cercava di ottenere sempre piú alti livelli di generalitá. Ad un certo punto si mise in testa di fare le pulci al grande Euclide. E faceva questo esercizio: prendeva delle proposizioni dagli *Elementi* e dimostrava che tutte potevano essere considerate casi particolari di un solo teorema. Quindi di dimostrazioni ne bastava una. A Carnot dobbiamo la nozione di coordinate intrinseche. Lui osservó che qualsiasi sistema di coordinate scegliesse, cartesiane, polari o altre l'equazione di una curva fissata dipendeva dal sistema. Ma lui diceva: le proprietá della curva non sono legate a sistemi di coordinate. E da qui sviluppó il suo discorso per liberare le curve dalle catene di qualsiasi riferimento. Un'ultima annotazione. Abbiamo citato all'inizio il teorema di Menelao. Carnot riuscí ad ottenere una notevole generalizzazione di quel teorema. Lui era abilissimo a generalizzare. Lo fece con tutto quello che gli capitó tra le mani: con la formula di Erone, con note formule trigonometriche. Generalizzando coglieva il tratto essenziale della matematica del novecento. Se fosse nato nel nostro tempo sarebbe stato completamente a suo agio. Come giustamente osservó uno storico: se Carnot potesse vedere, per esempio, i risultati della topologia, sarebbe l'uomo piú felice al mondo.

La geometria proiettiva: Steiner e Staudt

In questa sezione parleremo della nascita e dello sviluppo della geometria proiettiva come disciplina organizzata e autonoma. I primi risultati di natura proiettiva arrivano dall'antichitá, e nel tempo diversi matematici che contribuirono con risultati significativi ma pur sempre parziali, ma pur sempre parziali. Ricorderemo gli autori

di questi risultati e poi racconteremo la storia che dal 1822 si sviluppò. Già i greci avevano studiato questioni proiettive. Ricordiamo un teorema di Menelao di Alessandria (I sec. d.C.). Il teorema esprime la condizione di allineamento di tre punti presi sui lati di un triangolo.

Teorema (Menelao). Sia ABC un triangolo, e siano X, Y, Z tre punti rispettivamente sui lati (o sui loro prolungamenti) AB, BC, CA . I punti X, Y, Z sono allineati se e solo se $\frac{AX}{BX} \cdot \frac{BY}{CY} \cdot \frac{CZ}{AZ} = -1$.



Nell'enunciato i numeratori e i denominatori sono le misure dei segmenti orientati indicati. Di questo teorema c'è la versione duale. E' il teorema attribuito di G. Ceva (1648-1734), un matematico italiano. In realtà il teorema di Ceva era noto già nel sec. XI.

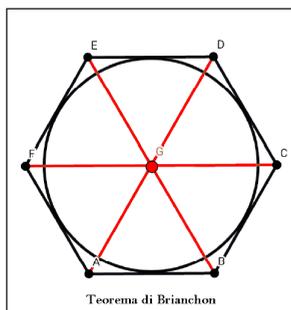
Teorema (Ceva). Condizione necessaria e sufficiente affinché in un triangolo ABC le congiungenti (dette ceviane) i vertici A, B, C con i punti X, Y, Z sui lati opposti siano concorrenti è che: $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$

Del teorema di Pappo ci siamo occupati nella sezione precedente. Ci sono poi gli studi sulla prospettiva nel Rinascimento e il successivo importante lavoro di Desargues e Pascal. Vanno ricordati i notevoli contributi di De la Hire sulla polarità. E non vanno dimenticati Monge, che usava sistematicamente il metodo delle proiezioni ortogonali, e Carnot il cui lavoro si ispirava ai metodi di Desargues e Pascal. Sono questi i nomi che prepararono la geometria proiettiva. Nomi importanti dai quali arrivarono contributi di notevole livello. Però non furono loro a portare la geometria proiettiva ad essere la scienza completa che diventò. E noi ora cercheremo di capire come tutto questo maturò.

Nel 1806, C.J. Brianchon (1785-1864) era uno studente francese della prestigiosa *École Polytechnique* parigina. Conosceva il teorema di Pascal, lo rispolverò e lo riformulò in modo nuovo. Poco tempo dopo dimostrò il suo teorema.

Teorema (Pascal). In un esagono inscritto in una conica, i punti di intersezione dei lati opposti sono sulla stessa retta.

Teorema (Brianchon). In un esagono circoscritto a una conica, le diagonali si intersecano nello stesso punto.



Pascal era molto entusiasta del suo teorema, perché riuscì a derivarne una serie di proposizioni secondarie. Esattamente la stessa cosa che accadde a Brianchon. Questa coppia di teoremi non è soltanto una coppia di bei teoremi. E' una coppia di teoremi duali. E sono due teoremi fondamentali della geometria proiettiva. Se si scambiano le parole punto e retta e si modifica un po' la frase, si vede che ciascuno emerge dall'altro, ciascuno è contenuto nell'altro. E' la proprietà di dualità. Riscriviamoli insieme.

Se i sei vertici (lati) di un esagono sono su una (tangenti a una) conica, i tre punti (lati) comuni alle tre coppie di lati (vertici) opposti hanno una retta (punto) in comune.

Poco tempo dopo si affacciò sulla scena un altro studente della stessa Scuola Politecnica. Il nome di questo giovane studioso era J.V. Poncelet (1788-1867). Nacque una collaborazione tra Brianchon e Poncelet, e pubblicarono un articolo. In questo articolo era contenuto un altro bel teorema.

Teorema (Circonferenza dei nove punti). La circonferenza che passa per i piedi delle perpendicolari, abbassate dai vertici di un triangolo qualsiasi sui lati opposti, passa anche per i punti medi di questi lati e passa anche per i punti medi dei segmenti che uniscono i vertici con il punto di intersezione delle perpendicolari.

Nel 1822 Poncelet pubblicò un trattato dal titolo *Traité des propriétés projectives des figures*. Questa opera segnò l'atto di nascita della geometria proiettiva. E' interessante la storia di Poncelet. L'opera pubblicata fu composta in Russia, in prigione. Il giovane studente della Scuola Politecnica, si era arruolato come ufficiale dell'esercito di Napoleone e partecipò alla disastrosa campagna di Russia del 1812. Fu catturato e imprigionato. Per rendersi la vita meno amara cominciò a scrivere tutto quello che ricordava di matematica. Notò che riusciva con facilità a ricostruire quello che aveva appreso, laddove poteva avvalersi di principi generali organizzatori. Era così per la geometria analitica. Non riusciva a fare lo stesso con le nozioni di geometria pura. E così decise che avrebbe speso il suo tempo per questa causa: ricercare principi generali per la geometria sintetica. E' qui, in questa decisione presa in prigione, il primo atto della nuova geometria. Tornato in Francia con i suoi quaderni del carcere, qualche anno dopo pubblicò il trattato. Ora, i principi che tirò fuori erano tre: il principio di proiezione; il principio di continuità; il principio di dualità. Commentiamoli un po'.

Il primo si basa sull'idea di riportare lo studio delle proprietà proiettive delle figure ai casi più semplici mediante proiezioni e sezioni. Per esempio nel caso delle coniche ridurle lo studio alla circonferenza. Questo aspetto era presente già in Desargues e Pascal. Il secondo principio, che arrivava da Monge, fu formulato nel modo seguente: "Le proprietà metriche scoperte per una figura originaria restano applicabili a tutte le figure correlative che si possono pensare originate dalla prima, salvo cambi di segno". Poncelet dava degli esempi per illustrarlo, però questo principio gli creò parecchie grane. Non era chiaro, non riusciva a giustificarlo adeguatamente, e fu molto criticato. Ci furono tentativi di fondare meglio il principio, di giustificarlo con le costruzioni geometriche dinamiche (per esempio rette in movimento che portano a certe configurazioni). Comunque, quello che ci interessa è che con questo principio Poncelet elaborò una teoria geometrica degli "elementi ideali". Qui venivano inclusi i punti all'infinito di cui già Desargues aveva fatto uso. Dicevamo prima che Poncelet ambiva a realizzare per la geometria pura la generalità di cui godeva la geometria analitica. Quindi fu necessario introdurre elementi impropri e punti immaginari, in modo da poter affermare, per esempio, che una retta e una circonferenza si incontrano sempre; o che tutte le circonferenze hanno due punti in comune, e così via. Vediamo un po' il principio di dualità, già tirato in ballo prima con Pascal e Brianchon. Ci torneremo anche più avanti. Qui vogliamo fare qualche osservazione intorno alla dualità. Intanto a causa di questo principio scoppiò una seria lite tra Poncelet e Gergonne (J.D. Gergonne (1771-1859)). A fare da sfondo a questa polemica c'era la vecchia contrapposizione tra i sostenitori del metodo analitico e quelli del metodo sintetico: i cartesiani e gli euclidei, potremmo dire, si fronteggiavano per stabilire quale dei due metodi fosse il migliore. Ci fu una società scientifica che bandì un premio per il migliore saggio che facesse luce sulla questione, che meglio valutasse l'impatto dei due approcci sulla geometria. In modo da decretare il vincitore. Quanto a Poncelet e Gergonne, il primo sosteneva di essere stato lui a scoprire il principio di dualità perché era conseguenza della relazione tra polo e retta polare rispetto a una conica. Lui si era occupato di polarità. Prima di lui De la Hire aveva già fatto molto sulle polarità, a onor del vero. Gergonne diceva a Poncelet: guarda che ti sbagli; per qualsiasi teorema di geometria piana che includa rette e punti, vale anche il teorema duale. Non è un fatto che presuppone la considerazione della polarità. Detta così sembra che abbia ragione Gergonne, però qualche storico ritiene che non sia facile capire bene come andarono le cose. Più interessante della polemica sul principio di dualità è questa considerazione legata alle geometrie non euclidee. Fino al 1800 l'oggetto di studio della geometria era stato lo spazio geometrico della nostra realtà circostante e le sue figure. Questa realtà osservabile determinava i principi di base, che si imponevano per la loro evidenza, da cui partire per dimostrare nuovi teoremi. Non c'era scelta, era tutto deciso là fuori. Ad un certo punto si scoprono le geometrie non euclidee, siamo nel 1829, la prima volta. Erano geometrie coerenti dal punto di vista logico, ma ottenute negando il quinto postulato della geometria euclidea. Quello della parallela unica passante per un punto fuori da una retta. Le conseguenze furono tante e importanti. La crisi dei fondamenti, che verrà, investirà tutta la matematica. Ad ogni modo con le geometrie non euclidee, si affermò via via lo studio della geometria come sistema assiomatico deduttivo: gli assiomi di base sono ipotesi che servono a fondare la teoria successiva.

Cambia anche il modo di considerare gli oggetti di cui si occupa la geometria, e la teoria é suscettibile di essere applicata a oggetti diversi nella loro natura. Ma la geometria proiettiva questo processo di astrazione lo aveva già elaborato con il principio di dualità. Le proposizioni conservano validità anche scambiando gli oggetti cui si riferiscono. Il principio di dualità aveva messo in evidenza il fatto che le parole con le quali si enuncia una teoria possono anche non designare univocamente oggetti determinati. Dal punto di vista dello storico questo aspetto é di grande rilevanza, anche per le conseguenze cui si faceva cenno. Tutta la vicenda delle geometrie non euclidee e della crisi dei fondamenti é molto appassionante; meriterebbe uno studio a sè che non possiamo condurre qui.

Un matematico che continuó il lavoro di Poncelet fu M. Chasles (1793-1880). Segnaliamo il suo impegno in relazione alle coordinate omogenee: fu uno degli scopritori. Si occupó molto della fondamentale nozione di *birapporto di quattro punti* su una retta, o di quattro rette di un fascio. Questi rapporti sono invarianti rispetto alle trasformazioni proiettive. Il birapporto é una grandezza di fondamentale importanza in geometria proiettiva, perché permette di esprimere tutte le proprietà proiettive delle figure (appartenenza, incidenza, allineamento, concorrenza). Su una retta prendiamo i punti A, B, C, D . Il birapporto dei quattro punti é il doppio rapporto dato da: $(ABCD) = \frac{AC}{BC} / \frac{AD}{BD}$. Il *birapporto di quattro rette* concorrenti é il birapporto dei quattro punti di intersezione di queste rette con una qualsiasi altra retta che non appartiene al fascio delle prime.

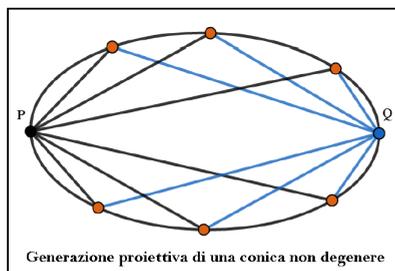
Nella sua importante opera *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Chasles citava i lavori della *scuola napoletana di geometria*: un gruppo di geometri guidati da N. Fergola (1735-1824). Erano appassionati dei classici. Studiavano Euclide, Pappo, Apollonio e i loro commentatori successivi. Chasles ebbe parole di elogio per loro: avevano il merito di tenere in vita i preziosi metodi classici. Ma questo fu anche il loro limite. Il gruppo riuscí a risolvere un problema di Pappo generalizzato: iscrivere in un cerchio un triangolo i cui lati passino per tre punti dati. Questo fatto fece notizia perché il problema era considerato di una certa importanza: tanto che se ne erano occupati Cramer, Eulero, Lagrange. Poi uno dei giovani piú brillanti, A. Giordano (1769-1859), riuscí a risolvere il problema di iscrivere in una conica un poligono i cui lati passino per altrettanti punti assegnati. Anche questo lavoro fu molto apprezzato dai matematici francesi del settore. Il fatto negativo per questo gruppo napoletano fu che erano poco aperti a cogliere gli stimoli di nuove ricerche e nuovi metodi che arrivavano da altre parti d'Italia e d'Europa. Questo finí per penalizzare molto i giovani napoletani che via via rimasero sempre piú isolati e meno considerati. Ci fu anche una versione napoletana, poco edificante, del contrasto tra analitici e sintetici, che vedeva da un lato il gruppo dei sintetici di Fergola e V. Flauti (1782-1863), dall'altro analitici come F. Tucci (1790-1875) e F. Padula (1815-1881). Flauti lanció una pubblica sfida matematica in cui si dovevano risolvere problemi (sfida un pó ridicola, da cui Flauti uscí malissimo), e alla fine persone di cultura avrebbero dovuto giudicare quale fosse la scuola superiore tra analitica e sintetica. Accadde poi che a Napoli, nel 1844, soggiornarono Steiner e Jacobi; piú tardi anche J.J. Sylvester (1814-1897). Questi illustri ed influenti ospiti sollecitarono molto i giovani studiosi ad aprirsi alle nuove tendenze della ricerca europea, contribuendo

a farli uscire dall'isolamento in cui si erano cacciati.

Un altro protagonista, un altro dei fondatori fu A.F. Möbius (1790-1860). Allievo di C.F. Gauss (1777-1855), Möbius é ricordato per il famoso "nastro", superficie ad una sola faccia ottenuta incollando le estremitá di un nastro, avendo fatto fare un giro a una delle due. Nastro a parte, Möbius pubblicó un libro dal titolo *Der barycentrische Calcül* (Il calcolo del baricentro). Qui lui seguendo un'impostazione analitica portó nuovi contributi alla geometria proiettiva. E' uno degli inventori delle coordinate omogenee, che anche altri trovarono. Il discorso legato alle coordinate omogenee é ovviamente importante. Perché gli elementi infiniti, i punti impropri, diventavano punti coordinati come tutti gli altri e quindi la geometria proiettiva poteva essere trattata analiticamente. E' doveroso anche ricordare che la nozione di corrispondenza biunivoca é dovuta a Möbius. Come pure quella di *trasformazione proiettiva* (o omografia): tra due rette o tra due fasci di rette, sono biezioni che conservano il birapporto di quattro punti qualsiasi; nel piano, o nello spazio, sono biezioni che mandano rette in rette. Osserviamo che nella geometria proiettiva le proiettività o piú in generale le collineazioni occupano il posto che occupano i movimenti rigidi in quella metrica. Con un movimento rigido una figura cambia posizione nello spazio ma le relazioni metriche non vengono alterate. Con una collineazione trasformiamo una figura in modo da preservare le relazioni grafiche, vale a dire relazioni di appartenenza di punti a rette o a piani e relazioni di incidenza. Affermazioni che con F. Klein (1849-1925) sintetizzeremmo parlando di *proprietá invarianti* rispetto al gruppo delle trasformazioni associato alla geometria. A Möbius si deve anche il concetto di *correlazione* o reciprocitá. Concetto che poi Plücker svilupperá. Lo stesso Plücker scoprí la dualitá dal punto di vista analitico. Vediamo questa cosa. Consideriamo la retta del piano proiettivo π data dall'equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$. I coefficienti (a, b, c) , a meno di proporzionalitá, individuano un'unica retta r . Mentre, se ritenuta fissata, la terna (x_1, x_2, x_3) , a meno di proporzionalitá, individua un unico punto P del piano. Possiamo chiamare coordinate omogenee della retta la terna (a, b, c) e pensare fissato il punto (x_1, x_2, x_3) . Allora l'equazione scritta rappresenta un fascio di rette per P . Quindi l'equazione lineare si puó interpretare come il luogo dei punti appartenenti alla retta fissata, oppure come la totalitá delle rette passanti per il punto fissato. Dalla simmetria algebrica evidenziata emerge subito il fatto che si vuol mostrare: e cioè che ogni teorema riguardante l'equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, si presenta in due forme una duale dell'altra. E cosí i teoremi dimostrati nel piano proiettivo vengono a raddoppiarsi automaticamente. Un altro fondatore della geometria proiettiva fu J. Steiner (1796-1863). Capofila della geometria sintetica. Steiner era un matematico svizzero. Non imparó a leggere e scrivere fino ai 14 anni e andó a scuola per la prima volta a 18 anni, contro il volere dei suoi genitori. Successivamente studió presso le Universitá di Heidelberg e Berlino, pagandosi da solo le tasse grazie alle lezioni private di matematica. Fu uno dei fondatori nel 1826 del primo giornale scientifico interamente dedicato alla matematica: il Crelle Journal. Ottenne una cattedra all'Universitá di Berlino nel 1834. Tra le altre cose scoprí la superficie romana di Steiner che ha una doppia infinitá di sezioni coniche. Si racconta che a lui non piacessero né l'algebra né l'analisi e credeva che il calcolo sostituisse il pensare, mentre la geometria lo stimolasse. Nel 1832, J. Steiner costruí le coniche usando proiettività tra due fasci di rette.

Richiamiamo la sua costruzione.

Definizione (Steiner). *Si dice conica il luogo dei punti di intersezione di rette corrispondenti in due fasci di rette proiettivi.*



E' possibile dare una definizione duale di quella appena vista. Accenniamo a questa cosa, importante perché permette di estendere la dualità del piano, inizialmente riferita a punti e rette, anche alle coniche. Se prendiamo una conica e fissiamo due tangenti, una terza tangente mobile sulla conica, incontra ciascuna delle prime in un punto, stabilendo una corrispondenza proiettiva tra le due tangenti fissate. Si può dunque pensare ad una conica come "insieme delle sue tangenti" (*curva involuppo*). Poi invertiamo il discorso e questa proprietà la usiamo per una nuova definizione.

Definizione. *Una conica (duale) è costituita dalle rette che congiungono i punti corrispondenti di due rette proiettive.*

Osserviamo che con la definizione di Steiner otteniamo tutte le coniche (ellisse, parabola, iperbole) e anche la conica unione di due rette distinte. Generalizzando leggermente la costruzione di Steiner, ossia prendendo in considerazione anche il caso in cui i centri dei due fasci di rette coincidano, si ottengono anche la conica unione di due rette coincidenti e la conica ridotta a un sol punto. Ancora una volta l'unica conica che non si riesce a ottenere (come con la definizione classica di conica ottenuta dalla sezione di un cono) è la conica vuota nel piano reale.

L'ultimo grande fondatore fu K.G.C.von Staudt (1798-1867). Anche Staudt era un convinto sostenitore della geometria pura, come Steiner. Fissò due obiettivi: dare maggiore rigore ai fondamenti della geometria; costruire una geometria proiettiva che non facesse alcun riferimento a misure o a coordinate. L'opera in cui confluiscono le ricerche di Staudt, del 1847, è un classico della matematica: *Geometrie der Lage* (Geometria della posizione). Questa opera ebbe in anni successivi un seguito a fascicoli. Quello su cui concentreremo l'attenzione è vedere come Staudt trattò l'argomento coniche. Consideriamo il piano π e indichiamo con \mathcal{L} la famiglia delle rette. Una corrispondenza biunivoca tra π e \mathcal{L} , si chiama *correlazione* se ai punti di una qualsiasi retta corrispondono le rette di un fascio (è una collineazione tra piano e suo duale).

La *polarità* rispetto a una conica é una correlazione particolare: é una correlazione involutoria. Questo vuol dire che il centro del fascio che corrisponde a una data retta, é il polo di quella retta. I punti della conica sono quelli e solo quelli che appartengono alle loro polari rispettive. Questa é la propriet  che Staudt sfruttava per definire le coniche. Considerando tutte le polarit  possibili si vede che pu  accadere che in alcune di esse nessun punto appartiene alla sua polare. Sono queste le polarit  uniformi. Se per  in una polarit  c'  un punto sulla sua polare, allora ce ne sono infiniti: e sono i punti di una conica. E arriviamo cos  a quello che volevamo porre in evidenza.

Definizione (Staudt). *Si dice conica il luogo dei punti appartenenti alla rispettiva polare in una polarit  non uniforme.*

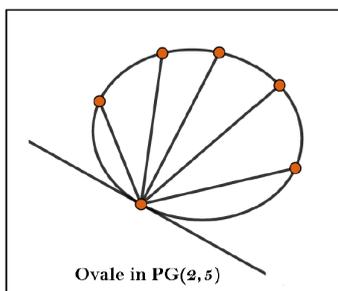
In effetti potremmo prendere in considerazione anche le polarit  uniformi dato che danno luogo, nel piano reale, alla conica vuota.

Staudt sistem  la geometria proiettiva come si era proposto, separandola dalla geometria metrica. Le propriet  grafiche caratteristiche della prima, furono distinte dalle propriet  metriche caratteristiche della seconda. Gli studiosi che in seguito studiarono ed analizzarono il nuovo assetto dato alla geometria proiettiva furono molti. Citiamo qui due figure particolarmente significative: Klein e A. Cayley (1821-1895). Il ruolo di Cayley fu importante perch  mostr  che tutte le propriet  metriche delle figure possono essere riguardate come relazioni proiettive. In seguito Klein mise in luce il fatto che oltre alla geometria euclidea, anche la geometria non euclidea era contenuta in quella proiettiva. Ricordiamo che Klein classific  i vari tipi di geometria attraverso gruppi di trasformazioni caratteristiche. Ne abbiamo fatto cenno anche in precedenza. E' il famoso discorso di Klein passato alla storia come *Programma di Erlangen*, del 1872.

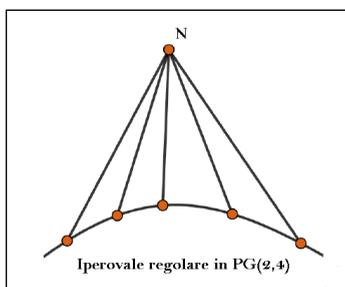
Prima di chiudere, vogliamo accennare alla nascita della geometria iperspaziale. Fu Cayley nel 1843 ad inaugurare lo studio della geometria analitica negli spazi n -dimensionali. Lo strumento che utilizz  fu il determinante. I determinanti erano noti a partire dal 1812, perch  in quegli anni furono studiati approfonditamente da Cauchy prima, e K.J. Jacobi (1801-1851) poi. In realt  avevano fatto la loro comparsa in anni molto precedenti. Tramite i determinanti la geometria in dimensione due e tre si estendeva naturalmente agli spazi in pi  dimensioni. Anche Cauchy in seguito studi  i *punti analitici* e le *rette analitiche*, in dimensione maggiore di tre. In Germania di geometria proiettiva iperspaziale si occup  H. Grassmann (1809-1877). Grassmann pubblic  anche un libro fondamentale, nel 1844, dal titolo *Ausdehnungslehre* (teoria dell'estensione). Opera ignorata inizialmente, fu ripresa e valorizzata dalla scuola italiana (G. Veronese, C. Segre). Il 1879 fu l'anno dei campi numerici astratti come noi li conosciamo: strutture con due operazioni del tipo $(K, +, \circ)$, in cui K e $K \setminus \{0\}$ sono gruppi abeliani rispettivamente con $+$ e con \circ ; e con la seconda operazione distributiva rispetto alla prima. Questa definizione fu formulata da J.W. Dedekind (1831-1916), ma la nozione era implicita nei lavori dei due giovani pi  sfortunati della matematica: E. Galois (1811-1832) e N.H. Abel (1802-1829). I campi con un numero finito di punti sono chiamati *campi di Galois*, in onore del matematico e sono spesso denotati con $GF(q)$ (Galois Field, di ordine q). Riguardo le coniche in piani proiettivi su campi fi-

niti di ordine q , denotati con $PG(2, q)$, innanzitutto diciamo che restano validi in tali piani sia la definizione classica di conica, come luogo degli zeri di un'equazione omogenea non identica di secondo grado, che la definizione di Steiner. Mentre quella di Staudt sussiste solo nei caso in cui q sia dispari. Inoltre, a differenza del caso reale, si può facilmente dimostrare (vedi [17]) che non esistono coniche vuote e, a parte i casi banali di coniche contenenti due rette (eventualmente coincidenti) o un sol punto, una conica di $PG(2, q)$ è formata da $q + 1$ punti a tre a tre non allineati (detto anche *ovale* del piano). Ebbene questa semplice proprietà, almeno nel caso q dispari, caratterizza le coniche di $PG(2, q)$. Vale infatti il seguente

Teorema (B. Segre). Un ovale di $PG(2, q)$, q dispari, è necessariamente una conica.



Lo stesso risultato non è valido nel caso q pari, dove esistono numerosi esempi di ovali, differenti dalle coniche e, con l'aggiunta del loro *nucleo* (un punto N per cui passano tutte le rette tangenti l'ovale) di *iperovali* di $PG(2, q)$, ossia insiemi di $q + 2$ punti a tre a tre non allineati. Una iperovale è detta *regolare* se è ottenuta aggiungendo a una conica il proprio nucleo.



Con questi pochi accenni alle coniche in spazi finiti si conclude il nostro lungo viaggio attraverso la storia delle coniche. Un viaggio che per gli autori è stato anche una esperienza di scoperta talvolta. E perciò crediamo possa essere adatta a descrivere questa esperienza la nota frase del grande scrittore francese Marcel Proust:

"Il vero viaggio di scoperta non consiste nel cercare nuove terre, ma nell'aver nuovi occhi"

Bibliografia

- [1] U. Amaldi, E. Artom, Coniche. Enciclopedia Italiana, 1931. [http://www.treccani.it/enciclopedia/coniche_\(Enciclopedia-Italiana\)](http://www.treccani.it/enciclopedia/coniche_(Enciclopedia-Italiana)).
- [2] E. T. Bell, I grandi matematici. Sansoni, Firenze, 1950.
- [3] L. Berzolari, G. Vivanti, D. Gigli, Enciclopedia
- [4] A. N. Whitehead, Introduzione alla matematica, Sansoni, 1962. delle matematiche elementari e complementi. Vol.II, parte 2. Hoepli, Milano, 1979.
- [5] U. Bottazzini, Il flauto di Hilbert. Utet, Torino, 2003.
- [6] C. Boyer, Storia della matematica. Mondadori, Milano, 1980.
- [7] J.R. Coolidge, A history of the conic sections and quadric surfaces. Oxford University Press, 1946.
- [8] R. Courant, H. Robbins, Che cos'è la matematica?, Bollati Boringhieri, Torino, 2000.
- [9] F. Enriques, Lezioni di geometria proiettiva. Zanichelli, Bologna, 1919.
- [10] G. Fano, Sui postulati fondamentali della geometria in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. *Giornale di Matematiche*, Vol. 30 (1892), p. 106-132.
- [11] D. Hilbert, Fondamenti della geometria, Feltrinelli, Milano, 1970.
- [12] B. Segre, Ovals in a finite projective plane. *Canadian Journal of Mathematics* 7 (1955), p. 414-416.
- [13] B. Segre, Ovali e curve σ nei piani di Galois di caratteristica due. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) (in Italian), 32 (1962) p. 785-790.
- [14] B. Segre, Istituzioni di geometria superiore. Vol. II, Ist.G. Castelnuovo, Univ. Roma, 1965.
- [15] C. Segre, C.G.C. von Staudt e i suoi lavori, (Prefazione alla trad. it. della "Geometrie der Lage" di Staudt), in: Bocca, Torino, 1889, p. 5-21.
- [16] J. Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Reimer, Berlin 1832.
- [17] A. Terracini, Necrologio di Gino Fano. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. 7 (1952), n.4, p. 485-490.
- [18] H. Van Maldeghem, On finite conics. <https://cage.ugent.be/hvm/artikels/58.pdf>

Continuità senza limiti

Continuity without limits

Luca Granieri

Introduzione

La nozione di continuità è fondamentale nel calcolo differenziale. Purtroppo, specialmente nell'insegnamento scolastico, il concetto di funzione continua è spesso ingiustamente sottovalutato o peggio bistrattato. Si può sentir ad esempio sostenere che l'iperbole equilatera $y = \frac{1}{x}$ non corrisponderebbe ad una funzione continua. Oppure alla domanda di quanto faccia ad esempio il limite $\lim_{x \rightarrow 2} 3x + 1$ rispondere (correttamente) 7, argomentando: *Perché si sostituisce*. Difficilmente si sente rispondere: perché la funzione $y = 3x + 2$ è continua ([9]).

Generalmente, il concetto di continuità è introdotto subordinandolo a quello di limite, limitandosi a dire che f è continua in x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Ma definizioni del genere possono rivelarsi insidiose e trarre in inganno. Il fatto è che il limite coinvolge la nozione di punto di accumulazione che in realtà risulta poco rilevante ai fini della continuità. Il concetto di limite è infatti *locale*, dipende cioè soltanto dal comportamento della funzione in un intorno del punto di accumulazione e non da quello che accade nel punto stesso. D'altra parte, la nozione di limite è importante per capire il comportamento di una funzione anche dove essa non è definita. Quello di continuità è invece un concetto *puntuale* (oltre che locale) e dipende in maniera essenziale dal comportamento della funzione in quel punto specifico, nonché da quanto accade nelle sue immediate vicinanze. Forse da qui il fraintendimento sull'iperbole equilatera, visto che il limite nell'origine non esiste. Ma l'origine non fa parte del dominio della funzione e quindi non rientra nella sfera della continuità, pur essendo un punto di accumulazione.

Talvolta si dice che una funzione è continua se il suo grafico può essere disegnato senza staccare la penna dal foglio. Ma ancora l'iperbole equilatera può trarre in inganno. O ancora la funzione che vale uno in $[0, 1]$ e tre in $[2, 3]$ che è continua (anche utilizzando la nozione di limite). Ma ovviamente non può essere disegnata tutta d'un pezzo. Questa nozione grafica porta anche ad un circolo vizioso. Da una parte la funzione è continua se il suo grafico si disegna in una certa maniera, dall'altra utilizziamo il fatto che la funzione sia a priori continua per disegnarne il grafico in quella maniera.

Ancora, possibili fraintendimenti nascono da come si definisce la *discontinuità*, definita sempre attraverso il concetto di limite. La mancata precisazione del contesto in cui ci si muove può ancora creare confusioni. Qualcosa del genere sembra accadere anche nella narrazione autorevole di [1, p. 105] in cui si legge:

La funzione $y = \frac{1}{x}$ può servire come esempio di funzione discontinua nel punto $x = 0$. Altre funzioni discontinue sono rappresentate nei grafici in figura. Raccomandiamo al lettore di esaminare questi grafici con attenzione. Egli noterà che le discontinuità nelle funzioni sono di specie diverse: in alcuni casi esiste il limite di $f(x)$ quando x tende al punto x_0 in cui la funzione ha la discontinuità, ma questo limite è diverso da $f(x_0)$. In altri casi il limite non esiste affatto.[...] Come esercizio raccomandiamo al lettore di considerare il seguente problema: determinare quale valore si debba assegnare alle funzioni $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x^2}$... nei punti in cui esse non sono definite (cioè nei punti dove il denominatore è uguale a zero) affinché esse possano essere ivi continue.

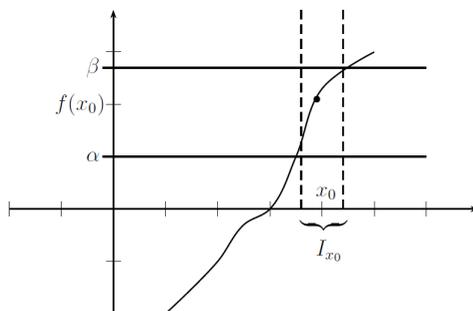
La confusione si ricompone alla fine del citato paragrafo, poiché dal contesto si capisce che si sta discutendo il problema di *estendere* una funzione continua in modo che resti tale. Dunque la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ sarebbe *discontinua* in $x_0 = 0$ nel senso che non è possibile estenderla con continuità in quel punto e comunque si definisca $f(x_0)$ la funzione risultante risulterebbe ivi discontinua. Ora, mentre possiamo sorvolare su dettagli del genere in un testo divulgativo, seppur ad altissimo livello come [1], al livello didattico, sia universitario che di scuola secondaria superiore, è bene evitare tranelli del genere in modo da non indurre lo studente a formarsi concetti incerti. Naturalmente, il concetto di continuità e quello di limite sono intimamente legati, ma a nostro avviso sarebbe preferibile una trattazione più estesa del concetto di funzione continua e possibilmente indipendente (si veda anche [9]) dal concetto di limite stesso. Anzi, introdurre da subito le funzioni continue può anche aiutare a familiarizzare con alcune problematiche propedeutiche allo studio dei limiti stessi. Ci proponiamo dunque di presentare un approccio allo studio delle principali proprietà connesse alla continuità evitando il ricorso esplicito al concetto di limite.

Funzioni continue e permanenza del segno

Le funzioni continue hanno notevoli proprietà geometriche. Una delle principali è quella di trasformare intervalli in intervalli. Tuttavia, tale proprietà non è equivalente alla continuità. Esistono funzioni che pur trasformando intervalli in intervalli non sono continue. Allo scopo è sufficiente considerare una funzione derivabile la cui derivata non sia continua (si veda la sez. 2). L'essenza geometrica della continuità consiste naturalmente nel fatto che una funzione non possa passare improvvisamente da un valore ad un altro. Se ad esempio vi trovate in una stanza al tempo t_0 , se la posizione al variare del tempo è una quantità continua, non potete trovarvene istantaneamente fuori. Concludiamo cioè che allora siete stati dentro la stanza per un certo intervallo di tempo centrato in t_0 , e quindi eravate nella stanza anche un po' prima e un po' dopo. Possiamo utilizzare questa proprietà geometrica per introdurre il concetto di continuità. Così, una funzione f è continua in x_0 se qualunque striscia contenente

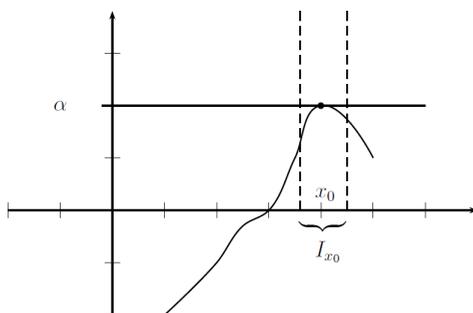
$f(x_0)$ si consideri, allora la funzione si troverà confinata nella striscia anche in un intorno di x_0 (fig.1). Diamo allora la seguente

Figura 1: Caratterizzazione geometrica delle funzioni continue.



Definizione 1 (Funzioni continue) Una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in $x_0 \in D$ se, quali che siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la disuguaglianza $\alpha < f(x_0) < \beta$ può essere estesa ad un intorno di x_0 , ovvero se $\alpha < f(x) < \beta \forall x \in I_{x_0} \cap D$, dove I_{x_0} è un intorno del punto x_0 . Diremo che f è continua in un insieme $A \subset D$ se f è continua in tutti i punti di A .

Figura 2: La disuguaglianza $f(x_0) \geq \alpha$ è soddisfatta solo nel punto x_0 e mai in un intorno.



In altre parole, da un punto di vista algebrico forse più familiare allo studente, una funzione è continua se si può passare da una disuguaglianza che vale in un solo punto ad una che valga in un intero intorno. L'usuale proprietà di conservare *il segno* delle funzioni continue si ottiene dalla definizione per $\alpha = 0$ oppure $\beta = 0$.

Osservazione 1. Nella definizione di funzione continua non si possono sostituire le disuguaglianze strette con disuguaglianze larghe. Infatti, se ad esempio x_0 è un punto di massimo locale per f , la disuguaglianza $f(x) \geq M = f(x_0)$ è vera soltanto in x_0 e mai in un suo intorno.

Dalla definizione si ottiene subito ad esempio che la funzione costante $f(x) = k$ è continua. In effetti, $\alpha < f(x_0) < \beta \Leftrightarrow \alpha < k < \beta$ e quindi se la disuguaglianza di partenza nel punto x_0 è vera, allora essa è automaticamente vera in tutto \mathbb{R} , che è naturalmente un intorno di x_0 . In termini geometrici, se la funzione si trova in una certa striscia, allora vi rimane per sempre.

Proposizione 1 (rette). *Le funzioni della forma $f(x) = ax + b$ sono continue.*

Dimostrazione. Supponiamo che sia $\alpha < f(x_0) < \beta \Leftrightarrow \alpha < ax_0 + b < \beta$. Sia ad esempio $a > 0$. Otteniamo $\frac{\alpha - b}{a} < x_0 < \frac{\beta - b}{a}$. Scegliendo

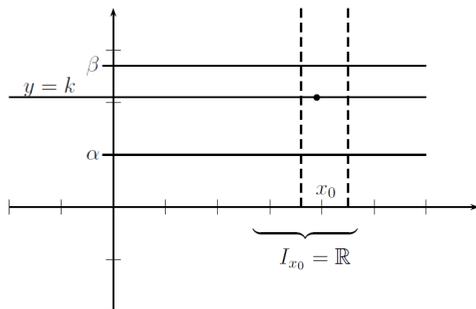
$$\delta = \frac{\alpha - b}{a} < x_0; \quad x_0 < \gamma = \frac{\beta - b}{a},$$

nell'intorno $I_{x_0} =]\delta, \gamma[$ abbiamo

$$\delta < x < \gamma \Rightarrow \frac{\alpha - b}{a} < x < \frac{\beta - b}{a} \Rightarrow \alpha < ax + b < \beta \Leftrightarrow \alpha < f(x) < \beta.$$

La disuguaglianza $\alpha < f(x_0) < \beta$ è pertanto soddisfatta anche in un intorno di x_0 . Il caso $a < 0$ è del tutto analogo. \square

Figura 3: Continuità della funzione costante.



Esempio 1. La funzione parte intera $f(x) = [x]$ è discontinua in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soluzione. Infatti, ad esempio in $x_0 = 2$ consideriamo la disuguaglianza $f(2) = 2 > \alpha$. Tale disuguaglianza non può essere valida in un intorno giacché, in tutti i punti a sinistra di x_0 si ha $1 = f(x) < \alpha$. \square

Esempio 2. La funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ 2 & x \in [2, 3] \end{cases}$$

è continua.

Soluzione. Infatti, anche negli estremi come ad esempio in $x_0 = 2$ la disuguaglianza $f(2) = 2 > \alpha$ può essere estesa ad un intorno, a patto che questo non intersechi l'intervallo $[0, 1]$. Non bisogna dimenticare che le proprietà di una funzione, e in particolare la continuità, dipendono in modo cruciale dal dominio considerato in quanto le disuguaglianze devono essere verificate in $I \cap D$. La differenza rispetto all'esempio precedente sulla funzione $y = [x]$ è che in questo caso la funzione in esame non è definita a sinistra di x_0 . \square

Figura 4: Funzione parte intera.

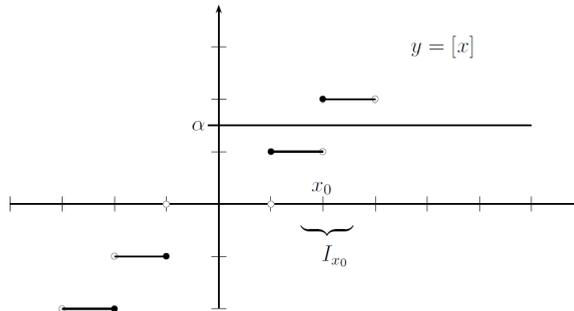
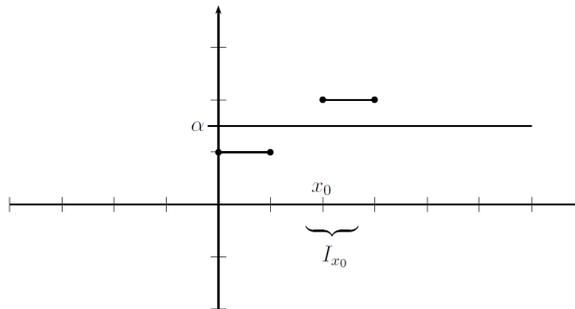


Figura 5: Una funzione continua definita a tratti.



Algebra delle funzioni continue

Si ottengono funzioni continue manipolandole algebricamente.

Teorema 2 (Algebra delle funzioni continue). *Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $x_0 \in D$. Allora*

1. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ la funzione $f + c$ è continua in $x_0 \in D$.

2. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione λf è continua in $x_0 \in D$.
3. Se $f(x_0) \neq 0$ allora la funzione $\frac{1}{f}$ è continua in $x_0 \in D$.
4. Se g è un'ulteriore funzione definita in D e continua in x_0 , allora la funzione $f + g$ è continua in $x_0 \in D$.
5. Se g è un'ulteriore funzione definita in D e continua in x_0 allora la funzione $f \cdot g$ è continua in x_0 . In particolare, se $g(x_0) \neq 0$, allora la funzione $\frac{f}{g}$ è anch'essa continua in $x_0 \in D$.

Dimostrazione.

1. Se $\alpha < f(x_0) + c < \beta$ allora $\alpha - c < f(x_0) < \beta - c$. Per la continuità di f vale la disuguaglianza $\alpha - c < f(x) < \beta - c$ in $I_{x_0} \cap D$. Pertanto $\alpha < f(x) + c < \beta$ nello stesso intorno e quindi $f + c$ è continua in x_0 .
2. Sia $\alpha < \lambda f(x_0) < \beta$. Supponiamo che sia $\lambda > 0$ (il caso $\lambda < 0$ sarà del tutto analogo). Dividendo si ottiene $\frac{\alpha}{\lambda} < f(x_0) < \frac{\beta}{\lambda}$. Per la continuità di f vale la disuguaglianza $\frac{\alpha}{\lambda} < f(x) < \frac{\beta}{\lambda}$ in $I_{x_0} \cap D$. Moltiplicando per λ si ottiene $\alpha < \lambda f(x) < \beta$ nello stesso intorno e quindi λf è continua in x_0 .
3. Se $f(x_0) \neq 0$, per fissare le idee sia ad esempio $f(x_0) > 0$. Allora, per definizione di continuità abbiamo che $f(x) > 0$ in $I \cap D$ per un intorno I di x_0 . Pertanto, la funzione $\frac{1}{f}$ è ben definita in $I \cap D$. Sia dunque $\alpha < \frac{1}{f(x_0)} < \beta$. Essendo anche $\beta > 0$ abbiamo che $\frac{1}{\beta} < f(x_0)$. Se anche $\alpha > 0$ allora $f(x_0) < \frac{1}{\alpha}$. Per la continuità di f vale la disuguaglianza $\frac{1}{\beta} < f(x) < \frac{1}{\alpha}$ in $I_{x_0} \cap D$. Moltiplicando si ottiene $\alpha < \frac{1}{f(x)} < \beta$ nello stesso intorno e quindi $\frac{1}{f}$ è continua in x_0 . Se invece fosse $\alpha < 0$, allora in tal caso abbiamo comunque $\frac{1}{\beta} < f(x)$ in $I_{x_0} \cap D$, e la $\alpha < \frac{1}{f(x)} < \beta$ è ancora valida essendo $\alpha < 0$.
4. Sia $\alpha < f(x_0) + g(x_0) < \beta$. Consideriamo le funzioni ausiliarie

$$h(x) = 2f(x) + g(x_0) - f(x_0); \quad k(x) = 2g(x) + f(x_0) - g(x_0).$$

Per quanto visto nei punti precedenti, si tratta di due funzioni continue in x_0 . Inoltre, essendo $h(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$ e $k(x_0) = g(x_0) + f(x_0)$ abbiamo che

$$\alpha < h(x_0) < \beta; \quad \alpha < k(x_0) < \beta.$$

Per la continuità di h e di k valgono le disuguaglianze

$$\alpha < h(x) < \beta \text{ per } x \in I_1 \cap D; \quad \alpha < k(x) < \beta \text{ per } x \in I_2 \cap D$$

per due intorni di x_0 . Allora basta prendere $I = I_1 \cap I_2$, che è ancora un intorno di x_0 , per avere entrambe le due disuguaglianze soddisfatte. Sommandole si ottiene

$$2\alpha < h(x) + k(x) < 2\beta \Rightarrow 2\alpha < 2f(x) + 2g(x) < 2\beta$$

in $I \cap D$. Pertanto $f + g$ è continua in x_0 .

5. Sia $\alpha < f(x_0) \cdot g(x_0) < \beta$. Supponiamo che almeno uno tra i fattori $f(x_0)$ e $g(x_0)$ sia diverso da zero, ad esempio $f(x_0) > 0$. Riscriviamo la disuguaglianza nella forma

$$\frac{\alpha}{f(x_0)} < \gamma < g(x_0) < \delta < \frac{\beta}{f(x_0)}$$

intercalando due qualsiasi numeri γ, δ . Utilizzando la continuità di g e di $\frac{1}{f}$ troviamo tre intorni di x_0 per cui $\frac{\alpha}{f(x)} < \gamma$ in $I_1 \cap D$, $\gamma < g(x) < \delta$ in $I_2 \cap D$ e infine $\delta < \frac{\beta}{f(x)}$ in $I_3 \cap D$. Pertanto, nell'intorno $I = I_1 \cap I_2 \cap I_3$ le tre disuguaglianze valgono tutte contemporaneamente e quindi alla fine

$$\frac{\alpha}{f(x)} < \gamma < g(x) < \delta < \frac{\beta}{f(x)} \Rightarrow \alpha < f(x) \cdot g(x) < \beta.$$

Resta da valutare il caso in cui $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Dunque sia $\alpha < 0 = f(x_0) \cdot g(x_0) < \beta$. Fissato $\varepsilon > 0$, per continuità di f , essendo $f(x_0) = 0$, abbiamo che $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$ in $I_1 \cap D$ per un intorno I_1 di x_0 . A questo punto vorremo moltiplicare questa disuguaglianza per g che dovrà soddisfare delle opportune disuguaglianze per ricostruire i termini α, β alle estremità della catena di disuguaglianze desiderate. A tal fine prendiamo

$$\gamma := \max\left(-\frac{\beta}{\varepsilon}, \frac{\alpha}{\varepsilon}\right); \quad \delta := \min\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}, \frac{\beta}{\varepsilon}\right).$$

Dalla continuità di g , essendo $\gamma < 0 = g(x_0) < \delta$, avremo che $\gamma < g(x) < \delta$ in $I_2 \cap D$. Moltiplichiamo ora le disuguaglianze che coinvolgono f per g in $I = I_1 \cap I_2 \cap D$. Se $g(x) > 0$ otteniamo

$$\alpha = -\varepsilon \left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) < -\varepsilon\delta < -\varepsilon g(x) < f(x) \cdot g(x) < \varepsilon g(x) < \varepsilon\delta < \varepsilon \left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right) = \beta.$$

Se invece $g(x) < 0$ la catena di disuguaglianze diventa

$$\alpha = \varepsilon \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) < \varepsilon\gamma < \varepsilon g(x) < f(x) \cdot g(x) < -\varepsilon g(x) < -\varepsilon\gamma < -\varepsilon \left(-\frac{\beta}{\varepsilon}\right) = \beta.$$

□

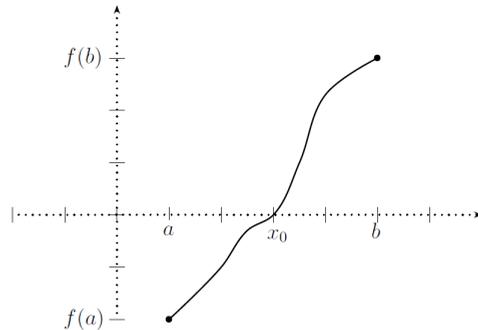
Verifichiamo la continuità della funzione composta

Teorema 2 (Continuità della funzione composta) *Sia $f : D \rightarrow E$ e $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(D) \subset E$. Sia f continua in $x_0 \in D$ e g continua in $y_0 = f(x_0) \in E$. Allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in x_0 .*

Dimostrazione. Sia $\alpha < g(f(x_0)) < \beta$. Dalla continuità di g in y_0 troviamo $\alpha < g(y) < \beta$ in $I_{y_0} \cap E$. Tale intorno contiene senz'altro un intervallo della forma $]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\subset I_{y_0}$. Dunque $y_0 - \varepsilon < f(x_0) < y_0 + \varepsilon$. Dalla continuità di f abbiamo $y_0 - \varepsilon < f(x) < y_0 + \varepsilon$ in $I_{x_0} \cap D$. Dunque i valori di f restano confinati nell'intorno I_{y_0} . Mettendo insieme queste informazioni otteniamo la disuguaglianza $\alpha < g(f(x)) < \beta$ in $I_{x_0} \cap D$. □

A questo punto abbiamo già un ampio ventaglio di funzioni continue: funzioni polinomiali e funzioni razionali ad esempio. La continuità delle funzioni elementari (esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche) si può ad esempio ottenere tramite considerazioni geometriche (si veda [6]). Prima di prendere in considerazione le funzioni inverse occupiamoci dapprima del Teorema di Bolzano (valori intermedi) che verificheremo a breve.

Le proprietà delle funzioni continue possono tutte essere stabilite sfruttando la permanenza del segno e ricorrendo alla *continuità* (o *completezza*) della retta reale (si veda [4,5,7]). **L'assioma di continuità** richiede che ogni sottoinsieme limitato superiormente (o inferiormente) sia dotato di estremo superiore (o inferiore). Per illustrare la situazione stabiliamo il cosiddetto Teorema degli zeri, che poi si vede facilmente essere equivalente alla proprietà dei valori intermedi e di trasformare intervalli in intervalli (Teorema di Bolzano).



Teorema 3 (degli zeri). *Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo I . Siano $a, b \in I$ tale che $f(a) < 0 < f(b)$. Allora esiste $x_0 \in]a, b[\subset I$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Consideriamo $E := \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Poiché $a \in E$ si tratta di un insieme non vuoto, e ovviamente limitato essendo contenuto in $[a, b]$. Per l'assioma di completezza, esiste $x_0 = \sup E$. Proviamo che $f(x_0) = 0$. Infatti, se fosse $f(x_0) < 0$, allora, per la permanenza del segno, avremmo anche $f(x_0 + \delta) < 0$ per un $\delta > 0$ opportunamente piccolo e tale che $x_0 + \delta < b$. Allora avremmo la contraddizione $x_0 + \delta \in E \Rightarrow x_0 + \delta \leq x_0$. Se infine fosse $f(x_0) > 0$, per la permanenza del segno avremmo che f sarebbe strett. positiva in un intorno $[x_0 - r, x_0 + r] \subset]a, b[$. Ma $x_0 - r < x_0$ e per le proprietà dell'estremo superiore troviamo $x \in E$ tale che $x_0 - r < x < x_0$. Avremmo allora la contraddizione $0 < f(x) < 0$. \square

Abbiamo già anticipato più volte la seguente fondamentale proprietà delle funzioni continue, ovvero di trasformare intervalli in intervalli. Una riformulazione del teorema degli zeri è in effetti la cosiddetta proprietà dei *valori intermedi*. Vale a dire che, se una funzione continua assume due valori distinti, ad esempio $y_1 = f(a) < f(b) = y_2$, nell'intervallo $[a, b]$, allora la funzione assume anche tutti i valori compresi tra y_1 e y_2 . Ora che il grosso del lavoro è stato fatto, la verifica è abbastanza semplice.

Teorema 4 (di Bolzano sui valori intermedi). *Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo I . Allora $f(I)$ è un intervallo. Ovvero, se $f(a) < y < f(b)$ con $a, b \in I$, allora esiste $x_0 \in]a, b[\subset I$ tale che $f(x_0) = y$.*

Dimostrazione. Sia infatti $f(a) = y_1 < y_0 < y_2 = f(b)$ un generico valore intermedio. Si consideri la funzione continua $g(x) = f(x) - y_0$. Abbiamo allora che $g(a) = f(a) - y_0 = y_1 - y_0 < 0$, mentre $g(b) = f(b) - y_0 = y_2 - y_0 > 0$. Allora, applicando il teorema degli zeri alla funzione continua g , esiste un punto $a < x_0 < b$ tale che $g(x_0) = 0$. Ovvero $f(x_0) = y$. \square

Questa notevole proprietà geometrica di trasformare intervalli in intervalli è stata a lungo ritenuta in qualche modo equivalente alla continuità. Ma così non è. Tale proprietà geometrica (proprietà di Darboux) è soddisfatta da una classe molto più ampia di funzioni. Si veda la sezione 2.

Veniamo infine alla continuità della funzione inversa.

Teorema 5 (Continuità della funzione inversa definita su un intervallo) *Sia $f : I \rightarrow J$ una funzione invertibile e continua in $x_0 \in I$. Sia $f^{-1} : J \rightarrow I$ la sua funzione inversa. Allora f^{-1} è continua in $y_0 = f(x_0) \in J$.*

Dimostrazione. Sia $\alpha < f^{-1}(y_0) < \beta$. Ovvero $\alpha < x_0 < \beta$. Scegliamo $\delta < \min(x_0 - \alpha, \beta - x_0)$. Per questa scelta abbiamo $\alpha < x < \beta$ per $x \in I_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Ma allora, in I_δ abbiamo

$$\alpha < x < \beta \Rightarrow \alpha < f^{-1}(f(x)) < \beta \Rightarrow \alpha < f^{-1}(y) < \beta$$

per $y = f(x) \in f(I_\delta)$. Ma, per il Teorema di Bolzano secondo cui le funzioni continue trasformano intervalli in intervalli, $f(I_\delta)$ è un intorno di y_0 . Da cui la continuità di f^{-1} in y_0 . \square

Nello stesso ordine di idee è possibile derivare il teorema di Weierstrass, col solito trucco di *estendere il più possibile* la proprietà desiderata. Ovvero mostrando che l'estremo superiore dei punti $x \in [a, b]$ per cui una funzione continua f è limitata in $[a, x]$ è proprio l'estremo b . E successivamente che il limite superiore M di f è raggiunto in $x_0 = \sup\{x \in [a, b] : f(x) < M\}$.

Funzioni continue e valori intermedi

La notevole proprietà geometrica di trasformare intervalli in intervalli è una caratteristica fondamentale delle funzioni continue (Teorema di Bolzano). Essa è stata a lungo ritenuta in qualche modo equivalente alla continuità. Ma così non è. Un possibile controesempio è il seguente

Una funzione discontinua che soddisfa la proprietà dei valori intermedi

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

non è continua in $x_0 = 0$ ma soddisfa la proprietà dei valori intermedi.

Dimostrazione. Cominciamo col mostrare che la funzione f non è continua in $x_0 = 0$. Essendo $f(0) = 1$, consideriamo ad esempio la disuguaglianza $1 = f(0) > \frac{1}{2}$. Verifichiamo che la disuguaglianza in oggetto non può essere soddisfatta in nessun intorno dell'origine. Infatti, abbiamo ad esempio che $\sin(k\pi) = 0$ quale che sia l'intero $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto, posto $x_k = \frac{1}{k\pi}$ abbiamo che $f(x_k) = \sin(\frac{1}{x_k}) = \sin(k\pi) = 0$. Abbiamo quindi infiniti valori in cui la funzione f si annulla. Ma, considerato un qualsiasi intorno $I =]-\delta, +\delta[$ dell'origine è possibile scegliere k in modo da avere $x_k \in I$. Infatti basta richiedere $x_k < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{k\pi} < \delta \Leftrightarrow k > \frac{1}{\pi\delta}$. Ma allora avremmo che $0 = f(x_k) < \frac{1}{2}$, e pertanto la disuguaglianza iniziale non può essere estesa ad un intorno. Nello stesso ordine di idee, sfruttando le oscillazioni della funzione seno, possiamo mostrare che la funzione f , pur essendo discontinua, verifica la proprietà dei valori intermedi. Sia dunque $f(x_1) < y < f(x_2)$. Verifichiamo che esiste $x \in]x_1, x_2[$ tale che $f(x) = y$. Se i punti x_1, x_2 stanno entrambi nella stessa semiretta allora non c'è nulla da verificare. In quelle zone la f è una funzione continua, essendo composta di funzioni continue, e possiamo applicare direttamente il teorema di Bolzano. Il caso dubbio è dunque quello in cui $x_1 < 0 < x_2$. Ora, essendo la nostra funzione a valori in $[-1, 1]$, la continuità della funzione seno assicura l'esistenza di un $x \in \mathbb{R}$ tale che $\sin x = y$. Per periodicità ne troviamo infiniti altri $x'_k = x + 2k\pi$. Con il truccetto di prima ne troviamo almeno uno positivo nell'intervallo $]x_1, x_2[$. In effetti, ponendo $x_k = \frac{1}{x'_k}$, per la positività è sufficiente che sia $k > -\frac{x}{2\pi}$. Mentre per soddisfare l'altra condizione basta richiedere $x_k < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2k\pi} < x_2 \Leftrightarrow k > \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{x_2} - x \right)$. Le due richieste insieme producono $x_1 < 0 < x_k < x_2$ e $f(x_k) = \sin(x'_k) = y$. \square

Tale proprietà geometrica (proprietà di Darboux) è in realtà soddisfatta da una classe molto più ampia di funzioni. Come ad esempio tutte quelle che sono derivata di qualcosa.

Teorema 6 (Darboux). *Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in I . Se $f'(x_1) < 0 < f'(x_2)$ allora esiste $c \in I$ tale che $f'(c) = 0$.*

Dimostrazione. Sia ad esempio $x_1 < x_2$. Essendo una funzione continua, per il Teorema di Weierstrass, la funzione assume minimo e massimo in $K = [x_1, x_2] \subset I$. Essendo $f'(x_1) < 0$, la f è localmente decrescente in x_1 (per la permanenza del segno del limite del rapporto incrementale). Pertanto x_1 non può essere il punto di minimo di f in K . D'altronde, essendo $f'(x_2) > 0$, la f è localmente crescente in x_2 . Pertanto, nemmeno x_2 è di minimo per f in K . Ma allora tale punto di minimo si deve trovare in $]x_1, x_2[$ e per la condizione necessaria di Fermat tale minimo deve avere derivata nulla. \square

Per verificare la proprietà dei valori intermedi, se $f'(x_1) < \alpha < f'(x_2)$ è sufficiente considerare la funzione $f(x) - \alpha x$ e applicare il teorema precedente.

Naturalmente, il fatto è che non tutte le funzioni derivabili hanno la derivata continua. A tal fine si consideri ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

la funzione f è derivabile e la sua derivata vale

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Ma la f' non è continua giacché il $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ non esiste. Oppure, non volendo utilizzare i limiti dato che ci eravamo impegnati ad utilizzarli il meno possibile, basti considerare punti della forma $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ per cui $f'(x_k) = \frac{1}{k\pi} \sin(2k\pi) - \cos(2k\pi) = -1$. Pertanto ad esempio la disuguaglianza $-\frac{1}{2} < f'(x) < \frac{1}{2}$ non può valere in nessun intorno dell'origine. L'esempio mostrato fornisce una funzione discontinua soltanto in un punto. Ma, a partire da questo esempio, *rimpicciolendo e incollando* copie di questa funzione, è possibile ottenere funzioni derivabili la cui derivata è discontinua in molti, tantissimi punti. Anzi, con una costruzione di tipo *frattale* è possibile costruire funzioni derivabili la cui derivata è discontinua *quasi ovunque*, ovvero dappertutto tranne che per un insieme di misura (secondo Lebesgue) nulla. Tuttavia, non è possibile far meglio (o peggio a seconda del punto di vista) di così. Si può infatti anche dimostrare che la derivata di una funzione su un intervallo non può essere discontinua dappertutto. La difficoltà nel maneggiare questi concetti è forse il fatto che le discontinuità della derivata non possono essere di prima specie, come si può mostrare come valido esercizio (qui utilizziamo il formalismo dei limiti giacché usualmente è attraverso di esso che si classificano le discontinuità).

Esercizio 1. Sia f' la derivata di una funzione f su un intervallo I . Mostrare che f' non può avere discontinuità di prima specie.

Soluzione. Supponiamo che x_0 sia un punto di salto per f' in x_0 . Supponiamo dunque che esistano i limiti a destra e a sinistra con ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = A < B = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x).$$

Per il Teorema dei valori intermedi di Lagrange esiste $\psi(x) \in (x, x_0)$ tale che $f'(\psi(x)) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. D'altra parte, essendo $\psi(x) \rightarrow x_0$ per $x \rightarrow x_0$, sfruttando la derivabilità di f in x_0 avremmo la contraddizione

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(\psi(x)) = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(\psi(x)) = B.$$

□

Il fenomeno delineato per le derivate ha naturalmente una validità generale. Una funzione che soddisfi la proprietà dei valori intermedi non può avere discontinuità di prima specie.

Esercizio 2. Una funzione f su un intervallo I che verifichi la proprietà dei valori intermedi non può avere discontinuità di prima specie.

Soluzione. Sia per assurdo x_0 un punto di discontinuità di prima specie con ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A < \alpha < \beta < B = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Per la permanenza del segno, possiamo trovare un intorno sinistro I^- ed uno destro I^+ di x_0 per cui $f(x) < \alpha$ in I^- , mentre $\beta < f(x)$ in I^+ . Ma, essendo valida la proprietà dei valori intermedi troviamo due valori $x_1 \in I^-, x_2 \in I^+$ tali che $f(x_1) = \alpha$ e $f(x_2) = \beta$. Trattandosi di due valori distinti, ovviamente almeno uno dei due è diverso da x_0 . Supponiamo che sia ad esempio x_1 . Allora, se $x_1 < x_0$ avremmo $f(x_1) < \alpha$ (contraddizione). Se invece $x_1 > x_0$ allora $\beta < f(x_1) = \alpha < \beta$ (ancora una contraddizione). \square

Le funzioni di Darboux possono in generale essere *totalmente discontinue*. Si deve a H. Lebesgue uno dei primi esempi di funzione che soddisfa la proprietà dei valori intermedi pur essendo discontinua in tutti i punti del suo dominio (in particolare si tratta di una funzione che non è una derivata di qualche altra funzione).

Dunque, derivate discontinue e funzioni di Darboux ci costringono a pensare delle funzioni che, in un certo senso, non possono essere disegnate. Ma la matematica esiste anche e soprattutto per questo: *rendere visibile l'inimmaginabile*. Così è possibile costruire funzioni continue che non sono mai derivabili (*mostro di Weierstrass*) o funzioni crescenti con derivata (quasi ovunque) nulla (la cosiddetta funzione di Cantor-Vitali o *scala del diavolo*), per cui, tra le altre cose, non vale il Teorema fondamentale del calcolo integrale. Ma si tratta di questioni che esulano dai nostri scopi. Un riferimento per tali problematiche è ad esempio [2].

La formulazione $\varepsilon - \delta$

Natura non facit saltus.

Carl von Linné

Se interpretiamo una funzione f come qualcosa che alla variabile x associa un effetto quantificato da $f(x)$, diremo che f è continua se a *piccole* variazioni della variabile corrispondono *piccole* variazioni degli effetti. Questo è ad esempio quello che per lo più succede nel gioco del biliardo. Il giocatore esperto sa che se colpisce la biglia in un certo punto, questa seguirà una certa traiettoria, per finire direttamente in buca. Ora, anche se si tratta di un campione dalla vista acuta e dalla mano ferma, difficilmente il giocatore riuscirà a colpire la biglia esattamente nel punto voluto e con la forza neces-

saria. Ma questo non è un problema. Se il fenomeno è continuo, sappiamo che se la stecca colpisce la biglia in un punto appena appena spostato rispetto a quello ideale, la biglia seguirà comunque una traiettoria molto vicina a quella immaginata, e con tutta probabilità andrà ancora a cadere in buca. Non tutto naturalmente è continuo. Ad esempio, tipicamente le tasse vengono pagate in modo discontinuo. Ad esempio, considerando un Ateneo in cui gli studenti con reddito inferiore a 500 euro non pagano alcuna tassa, mentre fino a 1000 euro una tassa calcolata al 10% del reddito e oltre i mille euro al 20%. Allora, basta una piccolissima variazione, guadagnando ad esempio 500 euro e un centesimo, per avere una considerevole variazione degli effetti. Una formalizzazione di queste condizioni conduce alla seguente

Definizione 2 (Continuità: formulazione $\varepsilon - \delta$) *Una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in un punto $x_0 \in D$ se*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (1)$$

f si dice continua in D se lo è in tutti i suoi punti.

In questa definizione ε quantifica la piccolezza nella variazioni degli effetti, δ invece quantifica la piccolezza delle variazioni della variabile. Allora, una funzione è continua se la variazione degli effetti può essere resa piccola quanto vogliamo ($\forall \varepsilon > 0$), ad esempio per assicurarci che la biglia vada in buca, scegliendo una opportuna *piccolezza* ($\delta > 0$) nella variazione delle variabili (scostamento massimo consentito nello scoccare il colpo). Tale formulazione *cattura* il senso della continuità in modo statico, come il senso di continuità nella scena di un film è prodotto dalla rapida successione delle immagini statiche della pellicola. Fissare un $\varepsilon > 0$, da questo punto di vista, significa fissare un *fotogramma vicino* agli altri. Per ingannare l'occhio umano e produrre il senso del movimento a partire da fotogrammi statici, questi devono essere proiettati in rapida sequenza, ad esempio 24 al secondo come è comune nella cinematografia. Se vogliamo, per *ingannare la natura* serve invece un'infinità di fotogrammi ($\forall \varepsilon > 0$). La (1) non è di facile assimilazione. Ricorrendo alla precedente immagine del biliardo, possiamo ancora interpretarla come una *scommessa di precisione*. Scegliendo una posizione $y_0 = f(x_0)$ si chiede al giocatore di mandare la palla vicino alla destinazione y_0 con una sempre maggiore precisione (quantificata da $\varepsilon > 0$). Se il giocatore riesce ogni volta a spedire la palla ad una posizione $y = f(x)$ che disti da quella richiesta y_0 meno della precisione richiesta ε , vince. Se la funzione f in oggetto è continua allora il giocatore può vincere sempre la scommessa. Basta che ad ogni richiesta di precisione ε lui risponda con il δ prodotto dalla (1). Colpendo la biglia con precisione inferiore a δ si è sicuri di spedire la biglia a destinazione con precisione inferiore ad ε .

Come ci si aspetta, le due nozioni di continuità introdotte sono perfettamente equivalenti.

Teorema 7. *Una funzione è continua nel senso della (1) se e soltanto se lo è nel senso della def. 1.*

Dimostrazione. Sia f continua nel senso della (1) e sia $\alpha < f(x_0) < \beta$. Prendiamo $\varepsilon < \min(f(x_0) - \alpha, \beta - f(x_0))$. In corrispondenza di questo $\varepsilon > 0$ possiamo determinare un $\delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Per $x \in I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$ risulta

$$\alpha < f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon < \beta$$

e dunque f è continua nel senso della def. .

Viceversa, sia ora f continua nel senso della def. . Considerato un qualunque $\varepsilon > 0$, si ponga $\alpha = f(x_0) - \varepsilon$ e $\beta = f(x_0) + \varepsilon$. Pertanto $\alpha < f(x_0) < \beta$. Per la def. troviamo un intorno I di x_0 tale che $\alpha < f(x) < \beta$ per $x \in I \cap D$. Trattandosi di un intorno possiamo determinare un $\delta > 0$ tale che $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$. Dunque

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in I \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon = \alpha < f(x) < \beta = f(x_0) + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

□

Praticamente, in questa formulazione le strisce del piano sono individuate da $\alpha = f(x_0) - \varepsilon$ e $\beta = f(x_0) + \varepsilon$.

Continuità uniforme

La nozione di continuità uniforme è spesso omessa o trascurata, specialmente a livello di scuola superiore. Un cenno, seppur circoscritto, ci appare doveroso soprattutto nell'ottica dell'integrazione delle funzioni continue, dove l'uniforme continuità delle funzioni continue negli intervalli chiusi e limitati è l'ingrediente fondamentale che ne assicura l'integrabilità. Come detto, la nozione di continuità è puntuale. Nella definizione 1 qui adottata le disuguaglianze considerate valgono in un intorno di x_0 . Ma cambiando il punto del dominio, l'intorno in cui sono verificate le disuguaglianze richieste dalla continuità può cambiare, ad esempio diventando sempre più piccolo. In altre parole, l'intorno può essere a priori variabile e dipendere dal punto considerato. Mentre in altre occasioni, come ad esempio per la funzione costante con l'intorno $I = \mathbb{R}$, uno stesso intorno può funzionare ugualmente bene per tutti i punti. Questo accade anche per la funzione $f(x) = ax + b$, per la quale gli intorni possono essere presi tutti della forma $]\frac{\alpha-b}{a}, \frac{\beta-b}{a}[$ nella striscia delimitata da α, β . In questi casi la nozione di continuità diventa *globale* valendo *uniformemente* su tutti i punti del dominio. Ma questi sono casi davvero speciali e in genere questo non accade. Si veda ad esempio il prossimo esempio con la funzione $f(x) = x^2$. In termini di $\varepsilon - \delta$, la nozione locale di continuità si traduce nel fatto che la scelta di $\delta > 0$ può dipendere anche dal punto x_0 , oltre che da $\varepsilon > 0$. In altre parole, $\delta > 0$ può anche variare da punto a punto. Quando invece si può effettuare una scelta di $\delta > 0$ indipendente dal punto, si dice che la funzione è uniformemente continua. In tal caso potremo dire che punti *vicini* tra loro hanno immagini *vicine* tra loro. La relativa definizione di funzione f uniformemente continua in A è allora la seguente

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x, y \in A : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (2)$$

Ovviamente, ogni funzione uniformemente continua è a maggior ragione una funzione continua.

Esempio 3. La scelta di δ dipende anche dal punto x_0 oltre che da ε . In effetti in generale non si può far molto di meglio. La funzione $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua. Infatti, se lo fosse ci sarebbero gli ε, δ previsti dalla (2). Per $x > 0$ si consideri $y = x + \frac{\delta}{2}$ per cui $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Ma allora per definizione di continuità uniforme dovrebbe essere $|x^2 - y^2| < \varepsilon$. D'altra parte

$$|x^2 - y^2| = \left| x^2 - x^2 - \frac{\delta^2}{4} - \delta x \right| = \left| \delta x + \frac{\delta^2}{4} \right| > \delta x.$$

Scegliendo allora $x > \frac{\varepsilon}{\delta}$ si avrebbe la contraddizione $|x^2 - y^2| > \varepsilon$.

Tuttavia la relazione tra continuità ed uniforme continuità è piuttosto stretta. Basta ridursi ad un intervallo chiuso e limitato affinché le due nozioni diventino interscambiabili tra loro (Teorema di Heine-Cantor). Un modo abbordabile senza dover introdurre troppe nozioni nuove è a nostro avviso quella di introdurre la proprietà di Heine-Borel per gli intervalli chiusi e limitati che permette di passare da condizioni locali a condizioni globali. A tal fine si consideri un insieme I . Per $x \in I$ sia I_x un intervallo aperto contenente $x \in I$. Diremo che la famiglia di intorno I_x è un *ricoprimento aperto* di I . Un ricoprimento di I è cioè costituito da una famiglia di insiemi la cui unione contiene per intero l'insieme I . Ora, per ricoprire l'intero insieme I si può in genere ridurre il numero di intorno, giacché diversi punti di I potrebbero appartenere allo stesso intorno. Parleremo allora di un *sottoricoprimento*. Il meglio che ci auguriamo in questo caso è di poter ricoprire l'insieme con un numero **finito** di intorno scelti dalla famiglia di intorno di partenza. Diremo che

Definizione 3 (Proprietà di Heine-Borel). *Un insieme I soddisfa la proprietà di Heine-Borel se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.*

Il fatto notevole è che tutti gli insiemi chiusi e limitati di \mathbb{R} soddisfano tale proprietà

Teorema 8 (Heine-Borel). *Tutti gli intervalli $[a, b]$ soddisfano la proprietà di Heine-Borel.*

Dimostrazione. Sia $I_x =]x - \delta_x, x + \delta_x[$ una famiglia di intorno aperti che ricopre $[a, b]$. Si consideri l'insieme

$$A := \{x \in [a, b] : [a, x] \text{ ammette un sottoricoprimento finito}\}.$$

Vogliamo verificare che $b \in A$. Intanto ovviamente $a \in A \neq \emptyset$ bastando in tal caso a ricoprire A l'intorno I_a . Utilizzando l'assioma di completezza, possiamo allora considerare $x_0 = \sup A$. Ovviamente $x_0 \leq b$. Se fosse $x_0 < b$ allora l'intorno I_{x_0} coprirebbe anche punti più piccoli di $x_0 + r$ con $x_0 + r \in I_{x_0}$. In altre parole avremmo che anche $[a, x_0 + r]$ ammetterebbe un sottoricoprimento finito e pertanto si otterrebbe

la contraddizione $x_0 + r \leq x_0 = \sup A$ essendo $x_0 + r \in A$. Pertanto $x_0 = b$. Essendo $b = \sup(A)$ possiamo determinare $r > 0$ tale che $[b - r, b + r] \subset I_b$, con $b - r \in A$. Allora $[a, b - r]$ ammette un sottoricoprimento finito. Aggiungendo I_b a tale sottoricoprimento si ottiene un sottoricoprimento finito di $[a, b]$. \square

Il potersi restringere ad un numero finito di intorni è un passo cruciale. Ad esempio, dalla definizione () di funzione continua segue immediatamente che le funzioni continue sono tutte localmente limitate. Allora, per la proprietà di Heine-Borel l'intervallo $[a, b]$ si può coprire con un numero finito di tali intervalli su ciascuno dei quali la funzione è limitata. Prendendo il più grande limite superiore (tra un numero finito) si ottiene il fatto che la funzione continua è (globalmente) limitata in $[a, b]$. Seguendo una linea simile possiamo enunciare finalmente il seguente

Teorema 9 (di Heine-Cantor). *Ogni funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, consideriamo $\frac{\varepsilon}{2}$ (visto che vorremo in seguito considerare due contributi prodotti dalla disuguaglianza triangolare). Ad ogni $x \in [a, b]$ possiamo associare il $\delta_x > 0$ che proviene dalla definizione di continuità di f nel punto x . Ovvero $|y - x| < \delta_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. La famiglia di intorni $I_x =]x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}[$ è un ricoprimento aperto di $[a, b]$. Per la proprietà di Heine-Borel, possiamo ridurci ad un sottoricoprimento finito, diciamo dato dagli x_i per $i = 1, \dots, n$. Consideriamo allora $\delta < \min\left(\frac{\delta_{x_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{x_n}}{2}\right)$. Siano $x, y \in [a, b]$ due qualsiasi punti tali che $|x - y| < \delta$. Trattandosi di un ricoprimento, questi punti appartengono a qualcuno degli intorni del sottoricoprimento finito trovato. Sia ad esempio $x \in I_{x_i}$. Allora

$$|y - x_i| \leq |y - x| + |x - x_i| < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i}.$$

Andiamo allora a valutare la distanza tra le immagini

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

\square

Alcune considerazioni finali

La definizione geometrica di continuità qui delineata potrebbe essere introdotta anche molto prima della trattazione sistematica dell'analisi matematica, già a livello di biennio di scuola secondaria superiore, una volta che sia acquisita una minima padronanza delle disuguaglianze algebriche. Un possibile percorso potrebbe legare la nozione di continuità alla geometria euclidea e poi alla geometria analitica. In fondo il Teorema degli zeri è se vogliamo una generalizzazione dell'assioma di separazione del piano o dell'intersezione tra circonferenze. Oltre ad inquadrare i problemi di continuità della geometria, compresa quella analitica, un tale approccio avrebbe il vantaggio non se-

condario di incorporare la geometria in un quadro unitario sottraendola alla diffusa percezione di corpo estraneo inserito di punto in bianco (talvolta malvolentieri) nel curriculum scolastico. Un'ulteriore prospettiva è quella di prendere sin da subito confidenza (apprezzandone l'importanza) di questo nodo cruciale dell'analisi matematica, consentendo poi un'assimilazione più *naturale* del concetto di *limite* nonché, sempre nell'ottica di una cornice unitaria degli insegnamenti di matematica, consentire la giustificazione di molte questioni importanti man mano che esse si presentano, piuttosto che (come anche molti libri di testo fanno) semplicemente *sorvolare* di sana pianta, oppure riconducendole a teorie più avanzate, o ancora rimandandole a chissà quando. Possiamo pensare ad esempio alla questione dell'esistenza dei radicali, che si può agevolmente ottenere come applicazione del Teorema degli Zeri. O ancora alla definizione di funzione esponenziale, che in genere viene ricondotta ad una fantomatica estensione della potenza ad esponente razionale a quella ad esponente reale. Una definizione geometrica permetterebbe invece una introduzione meno involuta (e assicurandone la continuità) degli esponenziali (si veda [6,8]) e più in generale delle funzioni elementari. Naturalmente, il percorso abbozzato in questo articolo contiene spunti e discussioni che in diversi punti potrebbero essere considerate *troppo avanzate* per il livello liceale. A dispetto del fatto che l'estensione dai razionali ai reali dell'esponenziale, o la locale integrabilità delle funzioni continue, utilizzano tacitamente la nozione di uniforme continuità, certamente non si deve pensare che in classe si debba e/o si possa far tutto e/o dimostrare tutto. Ma uno degli obiettivi principali dell'insegnamento della matematica dovrebbe consistere nel presentare un quadro ampio della disciplina e soprattutto *aperto*, lasciando intravedere tutto il vasto mondo matematico che ci attende là fuori, suscitando la curiosità a saperne di più, molto di più. Così, molti degli spunti tratteggiati in questo articolo potrebbero servire anche da stimolo o sfida per l'insegnante e per lo studente all'approfondimento, alla proposta di esercizi e problemi che abbiano anche uno scopo esplorativo, conoscitivo e non soltanto allo scopo di addestrare a tecniche di calcolo. A che serve, ad esempio, proporre una dettagliata classificazione dei punti di discontinuità di una funzione se poi non si propongono mai dei contesti significativi nei quali tali nozioni sono importanti? Oltre a motivazioni di completezza, la presentazione di questi argomenti può essere occasione per gettare lo sguardo oltre i tradizionali contenuti didattici. Ad esempio, il Teorema di Weierstrass è il fondamento essenziale di tutte le teorie di *ottimizzazione*. E la sua validità è strettamente collegata alla *dimensione*. Ma spesso, ad esempio per risolvere alcune equazioni differenziali, occorre lavorare in spazi di funzioni che hanno *dimensione infinita*. Ma in tale contesto la nozione di *intervallo chiuso e limitato* deve essere generalizzata al concetto di *insieme compatto*, e la proprietà di Heine-Borel è proprio uno dei modi possibili per considerare tale nozione. Anche il Teorema di Heine-Cantor è indipendente dalla dimensione (a patto di considerare domini compatti). Il fatto è che gli insiemi chiusi e limitati coincidono con quelli compatti solo in dimensione finita. Un semplice conseguenza è che (in dimensione finita) le funzioni continue sono localmente uniformemente continue. Visto che l'appetito vien mangiando, a tal proposito ci limitiamo ad osservare che questa proprietà non è in generale vera in dimensione infinita, si possono addirittura trovare funzioni continue che non sono localmente uniformemente continue in nessun punto.

Bibliografia

- [1] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrentev, *Le Matematiche*, Bollati Boringhieri, 1977.
- [2] R.P. Boas, *A Primer in Real Functions*, AMS, 1996.
- [3] R. Courant, H. Robbins, *Che Cos'è la Matematica*, Bollati Boringhieri, 2000.
- [4] L. Granieri, *Geometria Piana*, per il biennio della scuola secondaria superiore, in preparazione.
- [5] L. Granieri, *Matematica*, per la scuola secondaria superiore, in preparazione.
- [6] L. Granieri, *Elementare Watson!*, La Dotta, 2018.
- [7] L. Granieri, *Retta reale e geometria metrica*, in preparazione.
- [8] L. Granieri, *Al ritmo naturale del logaritmo*, *MatematicaMente* N. 282-283, 2021.
- [9] G. Prodi, *Riflessioni sull'insegnamento dell'analisi matematica*, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* Vol. 16 N. 5-6, Maggio-Giugno 1993.

L'eleganza dei vettori nella didattica della matematica

The vectors' elegance in didactics of mathematics

Francesco Daddi¹

Abstract

The main target of the present article is to improve the vectorial calculus in Didactics of Mathematics, highlighting all the advantages of its use in the full resolution of sixteen problems focused on two-dimensional analytic geometry.

Nell'articolo vengono presentati 16 esempi di applicazione del calcolo vettoriale nel piano cartesiano. Si tratta di un percorso didattico che può essere seguito al terzo anno del liceo scientifico, dedicando ad esso almeno due settimane (8 ore in totale). Ritengo che sia molto importante dedicare spazio a questo argomento in quanto i vettori, oltre ad essere fondamentali anche in altre discipline (prima su tutte la fisica), rendono semplice e talvolta immediata la risoluzione di molte problematiche geometriche.

Esempio 1

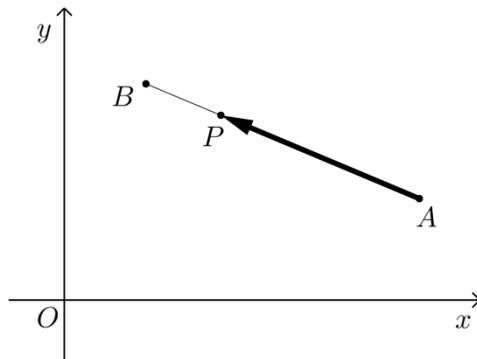
Si determini il punto P che divide il segmento AB , dove $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ in due parti in modo che risulti $\overline{BP} = k \cdot \overline{AP}$.

Si osserva subito che $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AB}$, da cui $\overline{AP} + k \cdot \overline{AP} = \overline{AB}$ e quindi $\overline{AP} = \frac{1}{k+1} \cdot \overline{AB}$. Utilizzando i vettori si ha:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{k+1} \cdot \overrightarrow{AB} \rightarrow \\ \overrightarrow{OP} &= \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \frac{1}{k+1} \cdot \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{kx_A + x_B}{k+1} \\ \frac{ky_A + y_B}{k+1} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

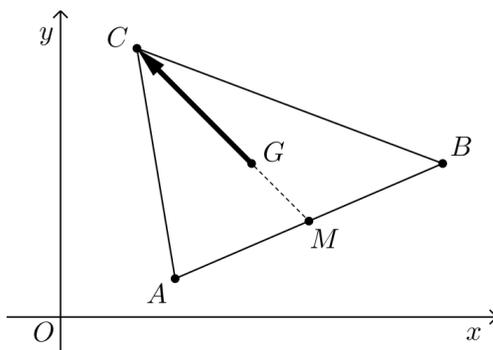
in definitiva le coordinate del punto richiesto sono $P\left(\frac{kx_A + x_B}{k+1}, \frac{ky_A + y_B}{k+1}\right)$.

¹Liceo scientifico "Fermi" Cecina (LI), francesco.daddi@libero.it



Esempio 2

Di un triangolo ABC si conoscono i punti $A(3; 1)$, $B(10; 4)$ e il baricentro $G(5; 4)$. Si calcolino le coordinate del vertice C .



Ricordando che il baricentro G del triangolo divide la mediana CM (M è il punto medio del lato AB) in due parti in modo che $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM}$ ed essendo $M\left(\frac{13}{2}; \frac{5}{2}\right)$, risulta:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{OG} + 2 \cdot \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{OG} + 2 \cdot (\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OM}) = \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 - 13/2 \\ 4 - 5/2 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esempio 3

Dati i punti $A(2; 4)$ e $B(8; 6)$, si determini il punto C di ordinata negativa in modo che il triangolo ABC , isoscele di base AB , abbia area uguale a 40.

Risulta $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, dunque $AB = 2\sqrt{10}$, quindi l'altezza è $h = 4\sqrt{10}$. Indicato con $M(5; 5)$ il punto medio del segmento AB , risulta $\|\overrightarrow{MC}\| = h = 4\sqrt{10}$; preso in considerazione il versore $\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, si ottiene:

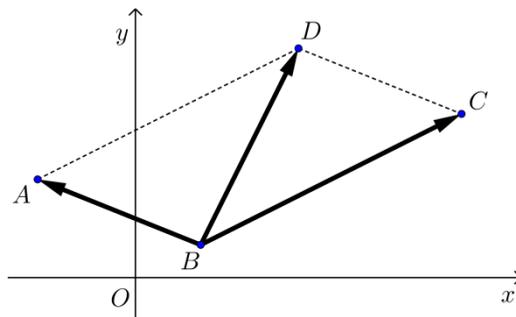
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + 4\sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Esempio 4

Dati i punti $A(-3; 3)$, $B(2; 1)$, $C(10; 5)$, si determinino le coordinate del punto D in modo che il quadrilatero $ABCD$ sia un parallelogrammo.

Per la regola del parallelogrammo risulta:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow D(5; 7). \end{aligned}$$



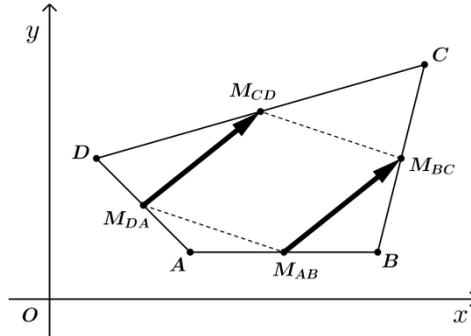
In alternativa possiamo seguire questo calcolo:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Esempio 5

Si dimostri che i punti medi di un quadrilatero $ABCD$ sono i vertici di un parallelogrammo (teorema di Varignon).

Per dimostrare che il quadrilatero di vertici M_{AB} , M_{BC} , M_{CD} , M_{DA} è un parallelogrammo è sufficiente dimostrare che $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{DA}M_{CD}}$ (oppure $\overrightarrow{M_{BC}M_{CD}} = \overrightarrow{M_{AB}M_{DA}}$).



Risulta:

$$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{OM_{BC}} - \overrightarrow{OM_{AB}} = \begin{pmatrix} \frac{x_B + x_C}{2} - \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_B + y_C}{2} - \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_C - x_A}{2} \\ \frac{y_C - y_A}{2} \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{M_{DA}M_{CD}} = \overrightarrow{OM_{CD}} - \overrightarrow{OM_{DA}} = \begin{pmatrix} \frac{x_C + x_D}{2} - \frac{x_A + x_D}{2} \\ \frac{y_C + y_D}{2} - \frac{y_A + y_D}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_C - x_A}{2} \\ \frac{y_C - y_A}{2} \end{pmatrix}.$$

I due vettori coincidono, quindi il teorema è dimostrato.

Esempio 6

Determinare le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle rette $r : y = -\frac{12}{5}x + \frac{31}{5}$, $s : y = \frac{3}{4}x + 2$.

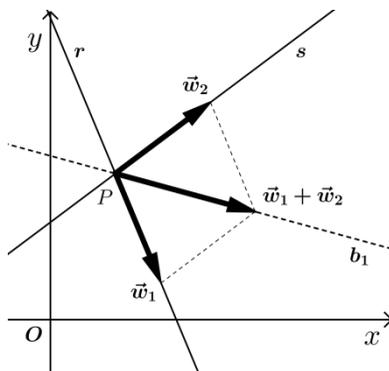
La retta r ha direzione $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$, mentre la retta s ha direzione $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Per avere la bisettrice b_1 con pendenza negativa è sufficiente osservare che la direzione si ottiene semplicemente sommando i vettori \vec{w}_1 e \vec{w}_2 ottenuti normalizzando \vec{v}_1 e \vec{v}_2 :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{b_1} &= \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} + \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{13} \vec{v}_1 + \frac{1}{5} \vec{v}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 5/13 \\ -12/13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77/65 \\ -21/65 \end{pmatrix} = \frac{7}{65} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

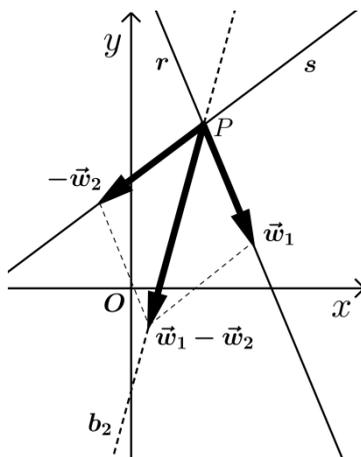
Quindi la retta b_1 , dovendo passare per il punto $P = r \cap s = (\frac{4}{3}; 3)$ ed avendo direzione $\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix}$, ha equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow y = -\frac{3}{11}x + \frac{37}{11}.$$



Si procede analogamente per determinare l'equazione di b_2 ; stavolta, invece di fare la somma, si considera la differenza dei vettori normalizzati:

$$\vec{v}_{b_2} = \frac{1}{13} \vec{v}_1 - \frac{1}{5} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5/13 \\ -12/13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27/65 \\ -99/65 \end{pmatrix} = -\frac{9}{65} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}.$$



Per l'equazione della bisettrice b_2 risulta:

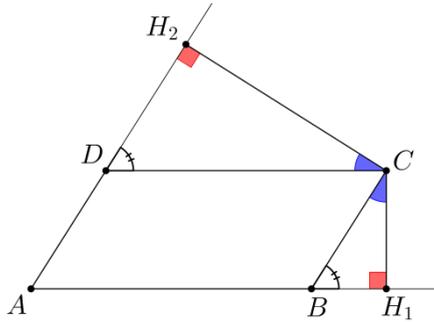
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} \rightarrow y = \frac{11}{3}x - \frac{17}{9}.$$

In alternativa basta osservare che b_2 passa dal punto P ed è ortogonale a b_1 .

Esempio 7

Assegnate le rette $r : y = -\frac{12}{5}x + \frac{31}{5}$, $s : y = \frac{3}{4}x + 2$, determinare le equazioni delle rette a_1, a_2 costituite dai punti Q per cui risulta $d(Q, r) = 2 \cdot d(Q, s)$.

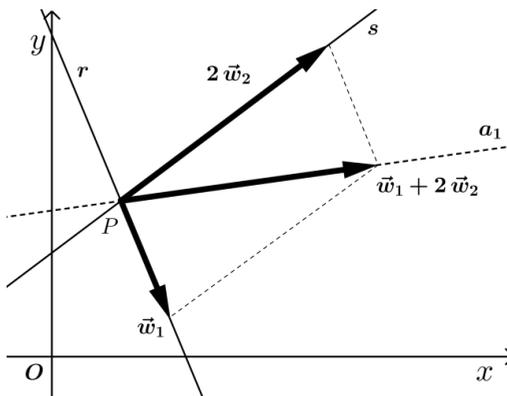
Per risolvere questo problema è utile osservare che, dato il parallelogramma $ABCD$, in cui $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$, dalla similitudine dei triangoli rettangoli CH_1B e CH_2D risulta $\overline{CH_2} = 2 \cdot \overline{CH_1}$.



Facendo riferimento all'esempio 6, in questo caso si ottiene:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{a_1} &= \vec{w}_1 + 2\vec{w}_2 = \frac{1}{13}\vec{v}_1 + 2 \cdot \frac{1}{5}\vec{v}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 5/13 \\ -12/13 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 129/65 \\ 18/65 \end{pmatrix} = \frac{3}{65} \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 6 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

la retta a_1 ha pertanto equazione $y = \frac{6}{43}(x - \frac{4}{3}) + 3 \rightarrow y = \frac{6}{43}x + \frac{121}{43}$.



Procedendo in modo analogo (non riportiamo la figura) si ottiene la retta a_2 :

$$\begin{aligned}\vec{v}_{a_2} &= \vec{w}_1 - 2\vec{w}_2 = \frac{1}{13}\vec{v}_1 - 2 \cdot \frac{1}{5}\vec{v}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 5/13 \\ -12/13 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -79/65 \\ -138/65 \end{pmatrix} = -\frac{1}{65} \cdot \begin{pmatrix} 79 \\ 138 \end{pmatrix};\end{aligned}$$

la retta a_2 ha quindi equazione

$$y = \frac{138}{79} \left(x - \frac{4}{3} \right) + 3 \rightarrow y = \frac{138}{79}x + \frac{53}{79}.$$

Esempio 8

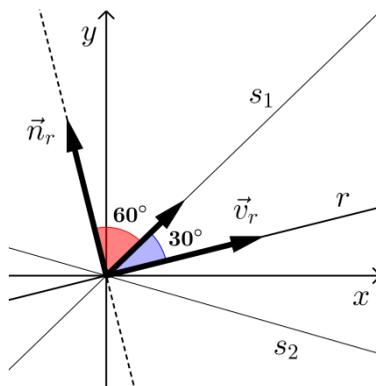
Determinare le equazioni delle rette s_1, s_2 passanti per l'origine delle coordinate sapendo che formano un angolo $\alpha = 30^\circ$ con la retta $r: ax + by = 0$, con $a \neq \pm\sqrt{3}b$.

La generica retta da determinare ha equazione $y = mx$, quindi è sufficiente determinare le due espressioni di m imponendo che l'angolo compreso tra i vettori

$\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ e $\vec{n}_r = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ abbia ampiezza $\beta = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$:

$$\frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|} = \cos(60^\circ) \rightarrow \frac{|1 \cdot a + m \cdot b|}{\sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$m_{1,2} = \frac{4ab \pm \sqrt{3} \cdot (a^2 + b^2)}{a^2 - 3b^2}.$$



Esempio 9

Calcolare le ampiezze degli angoli del triangolo di vertici $A(2; 3)$, $B(-1; -2)$, $C(8; 5)$.

Consideriamo i vettori $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ e sfruttiamo il loro prodotto scalare per determinare l'ampiezza dell'angolo α :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \cos \alpha \rightarrow$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{-3 \cdot 6 + (-5) \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 5^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2}} \right) = \arccos \left(-\frac{7}{\sqrt{85}} \right) \approx 139,4^\circ.$$

Si procede allo stesso modo per l'angolo β :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \cos \beta \rightarrow$$

$$\beta = \arccos \left(\frac{3 \cdot 9 + 5 \cdot 7}{\sqrt{3^2 + 5^2} \cdot \sqrt{9^2 + 7^2}} \right) = \arccos \left(\frac{31}{\sqrt{1105}} \right) \approx 21,2^\circ.$$

L'angolo γ si ottiene per differenza, cioè $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ da cui:

$$\gamma = 180^\circ - \arccos \left(-\frac{7}{\sqrt{85}} \right) - \arccos \left(\frac{31}{\sqrt{1105}} \right) \rightarrow \gamma \approx 19,4^\circ.$$

Esempio 10

Si determini la distanza del punto $P(x_P; y_P)$ dalla retta $r: ax + by + c = 0$.

Per prima cosa scegliamo sulla retta r un punto $A(x_A; y_A)$; la distanza $d(P, r) = \overline{PH}$ può essere ottenuta nel modo seguente:

$$\overline{PH} = \overline{AQ} = \|\overrightarrow{AP}\| \cdot |\cos \varphi|.$$

L'angolo φ è quello compreso tra i due vettori $\vec{v} = \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x_P - x_A \\ y_P - y_A \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, quindi per il modulo del coseno si trova:

$$|\cos \varphi| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{|(x_P - x_A) \cdot a + (y_P - y_A) \cdot b|}{\|\vec{v}\| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

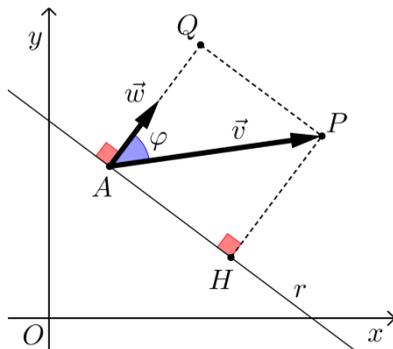
La distanza richiesta dunque è uguale a:

$$d(P, r) = \|\overrightarrow{AP}\| \cdot |\cos \varphi| = \|\vec{v}\| \cdot \frac{|(x_P - x_A) \cdot a + (y_P - y_A) \cdot b|}{\|\vec{v}\| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow$$

$$d(P, r) = \frac{|(x_P - x_A) \cdot a + (y_P - y_A) \cdot b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Osservando ora che $(x_P - x_A) \cdot a + (y_P - y_A) \cdot b = ax_P + by_P + c$, si arriva alla consueta formula

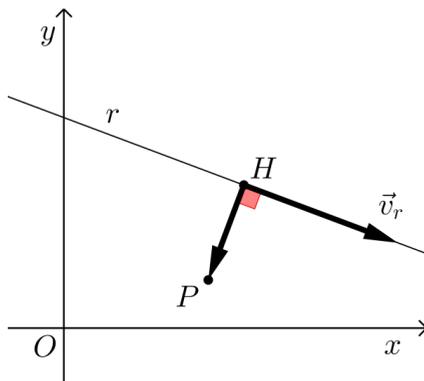
$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Esempio 11

Assegnato il punto $P(3; 1)$, si determini la sua proiezione ortogonale H sulla retta $r : y = -\frac{3}{8}x + \frac{35}{8}$. Sfruttando il risultato ottenuto, si determini poi il punto P' simmetrico di P rispetto a r .

Determiniamo il punto $H \in r$ tale che \overrightarrow{HP} risulti ortogonale al vettore $\vec{v}_r = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$.



Essendo $H(t; -\frac{3}{8}t + \frac{35}{8})$, si ha

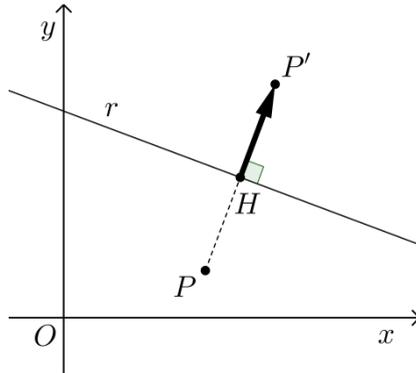
$$\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 3-t \\ 1 + \frac{3}{8}t - \frac{35}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-t \\ \frac{3}{8}t - \frac{27}{8} \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HP} \cdot \vec{v}_r &= 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 3-t \\ \frac{3}{8}t - \frac{27}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow (3-t) \cdot 8 + \left(\frac{3}{8}t - \frac{27}{8}\right) \cdot (-3) = 0 \rightarrow t = \frac{273}{73}. \end{aligned}$$

Sostituendo il valore trovato si ottiene la proiezione ortogonale: $H(\frac{273}{73}; \frac{217}{73})$.

Per quanto riguarda la simmetria rispetto alla retta r , osserviamo prima di tutto che H è il punto medio del segmento di estremi P e P' , per cui si ha $\overrightarrow{HP'} = \overrightarrow{PH}$.



Risulta:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP'} \rightarrow \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} \rightarrow$$

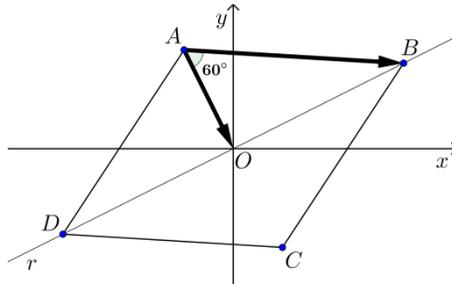
$$\overrightarrow{OP'} = 2 \cdot \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{273}{73} \\ \frac{217}{73} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{327}{73} \\ \frac{361}{73} \end{pmatrix}$$

e quindi $P'(\frac{327}{73}; \frac{361}{73})$.

Esempio 12

Assegnati due punti $A(-3; 6)$ e $C(3; -6)$, determinare gli altri due vertici B , D del rombo $ABCD$ in modo che l'angolo in A abbia ampiezza pari a 120° .

I vertici B e D appartengono all'asse del segmento AC di equazione cartesiana $y = \frac{1}{2}x$. Risulta $B(2k; k)$ con $k > 0$, pertanto l'angolo tra i vettori $\vec{AO} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ e $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k+3 \\ k-6 \end{pmatrix}$ deve essere di ampiezza uguale a 60° .



Sfruttando il prodotto scalare risulta:

$$\frac{\vec{AO} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{AO}\| \cdot \|\vec{AB}\|} = \cos(60^\circ) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3 \cdot (2k+3) + (-6) \cdot (k-6)}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{(2k+3)^2 + (k-6)^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow k = 3\sqrt{3}$$

dove abbiamo preso la soluzione positiva (il vincolo infatti è $k > 0$). In definitiva, le coordinate dei vertici mancanti sono $B(6\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$ e $D(-6\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$.

In alternativa, essendo $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2k+3 \\ k-6 \end{pmatrix}$, $\vec{AD} = \begin{pmatrix} -2k+3 \\ -k-6 \end{pmatrix}$, con $k > 0$, possiamo imporre che l'angolo compreso tra essi abbia ampiezza 120° :

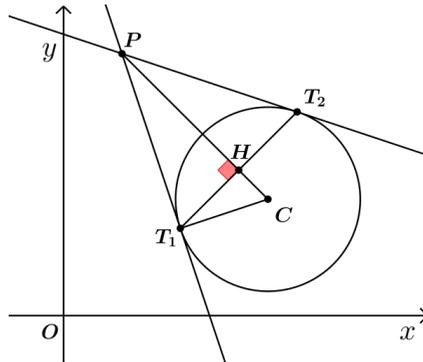
$$\frac{(2k+3) \cdot (-2k+3) + (k-6) \cdot (-k-6)}{\sqrt{(2k+3)^2 + (k-6)^2} \cdot \sqrt{(-2k+3)^2 + (-k-6)^2}} = \cos(120^\circ) \rightarrow k = 3\sqrt{3}.$$

Esempio 13

Considerate le rette tangenti alla circonferenza $(x-7)^2 + (y-4)^2 = 10$ condotte dal punto $P(2; 9)$, si determinino le coordinate dei punti di contatto T_1 e T_2 .

Utilizzando i vettori abbiamo che il punto T_1 di tangenza è tale che

$$\vec{OT}_1 = \vec{OC} + \vec{CH} + \vec{HT}_1$$



dove H è il punto del segmento CP tale che $\|\vec{CH}\| = \frac{r^2}{\|\vec{CP}\|}$ (derivante dalla similitudine dei triangoli rettangoli PT_1C e T_1HC) dove r è il raggio della circonferenza assegnata. Risulta:

$$\vec{CH} = \frac{r^2}{\|\vec{CP}\|} \cdot \frac{\vec{CP}}{\|\vec{CP}\|}, \quad \vec{HT}_1 = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r^2}{\|\vec{CP}\|}\right)^2} \cdot \vec{n}_1$$

dove $\frac{\vec{CP}}{\|\vec{CP}\|} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; le coordinate di T_1 sono:

$$\vec{OT}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{10}{5\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \sqrt{10 - \left(\frac{10}{5\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Con $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, opposto di \vec{n}_1 , si trovano invece le coordinate di T_2 :

$$\vec{OT}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{10}{5\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \sqrt{10 - \left(\frac{10}{5\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Esempio 14

Determinare i due punti dai quali escono le rette tangenti comuni alle due circonferenze

$$\gamma_1 : (x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 25; \quad \gamma_2 : (x - 30)^2 + (y - 1)^2 = 100.$$

Facendo riferimento alla figura, sfruttando la similitudine dei due triangoli rettangoli $P_1C_1A_1$ e $P_1C_2B_1$ si ricava:

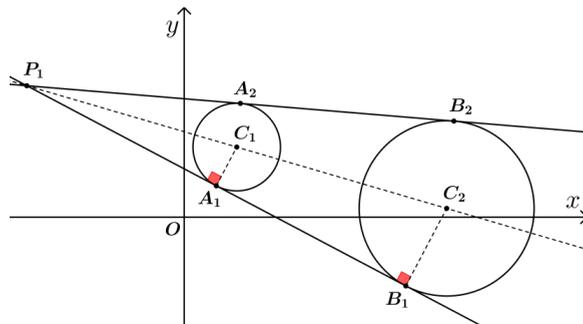
$$\frac{r_1}{\|\overrightarrow{C_1P_1}\|} = \frac{r_2}{\|\overrightarrow{C_2C_1}\| + \|\overrightarrow{C_1P_1}\|} \rightarrow \|\overrightarrow{C_1P_1}\| = \frac{r_1}{r_2 - r_1} \cdot \|\overrightarrow{C_2C_1}\|.$$

Per determinare il punto P_1 si ha:

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1P_1} = \overrightarrow{OC_1} + \frac{\overrightarrow{C_2C_1}}{\|\overrightarrow{C_2C_1}\|} \cdot \|\overrightarrow{C_1P_1}\| \rightarrow$$

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OC_1} + \frac{\overrightarrow{C_2C_1}}{\|\overrightarrow{C_2C_1}\|} \cdot \frac{r_1}{r_2 - r_1} \cdot \|\overrightarrow{C_2C_1}\| \rightarrow$$

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OC_1} + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \cdot \overrightarrow{C_2C_1}.$$



Sostituendo i valori numerici dell'esercizio si ottiene:

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{5}{10 - 5} \cdot \begin{pmatrix} 6 - 30 \\ 8 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

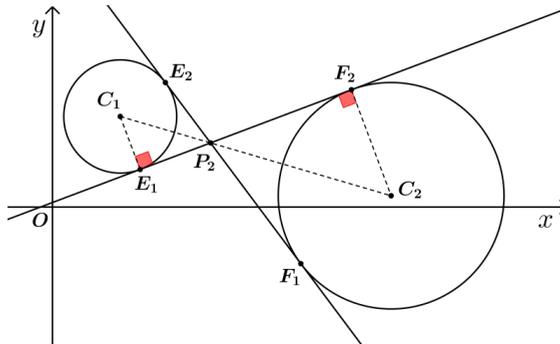
Analogamente, per determinare il secondo punto P_2 si sfrutta la similitudine dei triangoli rettangoli $P_2C_1E_1$ e $P_2C_2F_2$:

$$\frac{r_1}{\|\overrightarrow{C_1P_2}\|} = \frac{r_2}{\|\overrightarrow{C_1C_2}\| - \|\overrightarrow{C_1P_2}\|} \rightarrow \|\overrightarrow{C_1P_2}\| = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \cdot \|\overrightarrow{C_1C_2}\|.$$

Per determinare il punto P_2 si ha:

$$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1P_2} = \overrightarrow{OC_1} + \frac{\overrightarrow{C_1C_2}}{\|\overrightarrow{C_1C_2}\|} \cdot \|\overrightarrow{C_1P_2}\| \rightarrow$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_2} &= \overrightarrow{OC_1} + \frac{\overrightarrow{C_1C_2}}{\|\overrightarrow{C_1C_2}\|} \cdot \frac{r_1}{r_1 + r_2} \cdot \|\overrightarrow{C_1C_2}\| \rightarrow \\ \overrightarrow{OP_2} &= \overrightarrow{OC_1} + \frac{r_1}{r_1 + r_2} \cdot \overrightarrow{C_1C_2}.\end{aligned}$$



Sostituendo i valori numerici dell'esercizio si ottiene:

$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{5}{5+10} \cdot \begin{pmatrix} 30-6 \\ 1-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 17/3 \end{pmatrix}.$$

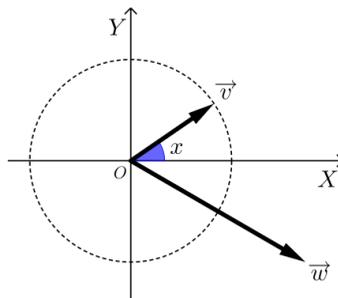
Esempio 15

Determinare il massimo, il minimo e i flessi della funzione

$$f(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x + 5.$$

Si osserva che possiamo interpretare la situazione utilizzando il prodotto scalare nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + 5.$$



Per determinare i valori di x possiamo trascurare la costante additiva 5; il massimo si ha quando il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore $\vec{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{con } \lambda > 0;$$

risulta $\lambda = \frac{1}{2}$ e quindi

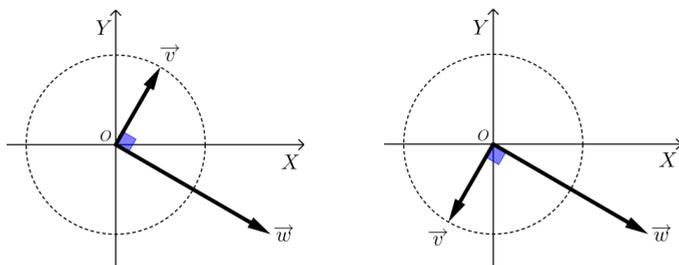
$$\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

mentre il valore corrispondente è $f(-\frac{\pi}{6}) = \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \right\| + 5 = 2 + 5 = 7$.

Il minimo si raggiunge quando il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$ ha la stessa direzione di $\vec{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$, ma verso opposto, ossia quando $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$. Risulta $f(\frac{5}{6}\pi) = -\left\| \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \right\| + 5 = -2 + 5 = 3$.

I flessi corrispondono agli zeri di $g(x) = f(x) - 5$ e si ricavano in corrispondenza dell'ortogonalità tra i due vettori \vec{v} e \vec{w} ; si ricava quindi

$$\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$



Si osservi infine che l'angolo tra i due vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ ha ampiezza $\varphi = x + \frac{\pi}{6}$; l'espressione analitica della funzione $f(x)$ può essere riscritta nella forma equivalente:

$$f(x) = \vec{v} \cdot \vec{w} + 5 = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \varphi + 5 \rightarrow$$

$$f(x) = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + 5.$$

Esempio 16

Si calcoli l'accelerazione di un punto che si muove secondo la legge oraria

$$\begin{cases} x = -2 + 5t + 3t^2 \\ y = 3 - 8t + 4t^2. \end{cases}$$

Possiamo riscrivere la legge oraria nella forma equivalente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot t^2;$$

tenendo conto che il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ha norma 5, si trova l'accelerazione:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot t^2 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}at^2 \rightarrow a = 10 \text{ m/s}^2.$$

Astrazione e Immaginazione

Abstraction and Imagination

Francesco de Giovanni¹ e Carmela Musella²

Lo spunto (emotivo) per queste riflessioni risale a due anni fa, e deriva dalla lettura dell'articolo "Quelle linee tra Mondrian e mia nonna" di Tomaso Montanari, apparso sul Venerdì di Repubblica nell'ottobre 2020. Per ricordare la nonna Maria, nata un secolo fa e mancata durante il suo centesimo anno di vita, Montanari sceglie un quadro dipinto proprio nel 1921: *Composizione con grande piano rosso, giallo, nero, grigio e blu*, in cui Piet Mondrian (1872–1944) costruì "un sistema di rette ortogonali e di colori puri che riuscisse a tenere in tensione armonica, in equilibrio, forze opposte" (fig.1). L'opera di Mondrian sembra perfetta a Montanari per ricordare la nonna, tra le poche laureate in matematica della sua generazione, e per rappresentarne la razionalità e la lucidità. Montanari suggerisce di leggere anche l'arte astratta con la stessa libertà con cui ci accostiamo alle opere figurative che l'hanno preceduta.

Una libertà finalizzata ad immaginare e capire, che sembra la stessa indicata da Ennio De Giorgi (1928-1996) come peculiare del matematico tra gli scienziati. In un'intervista del 1996, il grande matematico leccese infatti dichiarava: "Il matematico ha una libertà che forse altri scienziati hanno meno o non hanno, di pensare alle cose che lo interessano di più, scegliere gli argomenti che ritiene più belli e il modo che ritiene più bello di affrontarli, perfino fissare gli assiomi da cui vuole partire nelle sue successive elaborazioni [...] Io penso che all'origine della creatività in tutti i campi ci sia quella che io chiamo la capacità o la disponibilità a sognare, a immaginare mondi diversi, cose diverse, a cercare di combinarle nella propria immaginazione in vario modo. A questa capacità, forse alla fine molto simile in tutte le discipline (in matematica, in filosofia, in teologia, in arte, in pittura, in scultura, in fisica, in biologia, eccetera) si unisce poi la capacità di comunicare i propri sogni".

¹francesco.degiovanni2@unina.it - Università degli Studi di Napoli Federico II

²carmela.musella@unina.it - Università degli Studi di Napoli Federico II

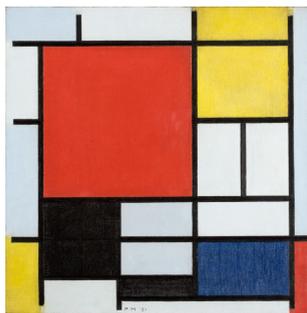


fig. 1 - P. Mondrian: Composizione con grande piano rosso ... (1921)

A noi pare che la *Composizione* in fig.1 rappresenti soprattutto la relazione tra i rettangoli colorati disposti sul piano. L'astrazione permette di prescindere dalla natura degli oggetti e quindi di prescindere dal particolare.

È questa l'impostazione dell'*algebra moderna* (astratta), che si è sviluppata a partire dai primi anni del Novecento, sostanzialmente come studio delle strutture algebriche, cioè di insiemi in cui siano definite operazioni. Non conta quali siano gli oggetti, ma quanti siano e il modo con cui essi si "compongono". Cercheremo di chiarire nel seguito questa affermazione.

Algebra moderna è il titolo dell'opera di Bartel Ludwig van der Waerden, in cui all'inizio degli anni trenta del secolo scorso trovò una prima sistemazione tale nuova teoria. In realtà la locuzione "algebra moderna" non è del tutto felice, nè è rigoroso il termine "astratta", perché la matematica è sempre astrazione (lo è anche il concetto di numero). Così affermava Lucio Lombardo Radice (1916–1982) in una trasmissione radiofonica del 1972, ricordando come l'opera di van der Waerden dopo qualche decennio fosse diventata un classico e che d'altra parte l'algebra classica che si studia nelle scuole secondarie superiori è essa stessa frutto di astrazioni di alto livello.

La sequenza di tele rappresentate nelle figure 2–5 fornisce un'immagine a nostro parere efficace di un processo evolutivo verso l'astrazione; in questo caso quello che ha portato Mondrian dalla sua fase figurativa a quella astratta, nel breve periodo che va dal 1909 al 1912.

Nel primo dipinto di questa serie è ancora chiara una certa adesione alla realtà, in particolare nella rappresentazione dei rami e del tronco e nella scelta dei colori.



fig. 2 - P. Mondrian: Albero rosso (1909)



fig. 3 - P. Mondrian: Albero blu (1910)

La ricerca formale di Mondrian procede nel terzo dipinto. L'allontanamento dal reale è ormai evidente: pur essendo ancora chiaro il soggetto, i rami si riducono a semplici linee quasi ricoperte dal colore denso.

Un anno dopo, Mondrian rielaborò lo stesso soggetto in una forma ben più schematica e stilizzata; in questa nuova versione scompaiono molti dettagli e l'impostazione cromatica è radicalmente differente.



fig. 4 - P. Mondrian: Albero grigio (1911)



fig. 5 - P. Mondrian: Melo in fiore (1912)

Anche la storia dell'algebra è rappresentata da un'evoluzione verso livelli sempre più spinti di astrazione, rispetto ai quali gli oggetti e le conoscenze precedenti diventano casi concreti e particolari.

Nel "Melo in fiore" il processo di astrazione si è completato: l'albero non è più riconoscibile, i rami sono ormai sottili linee, il tronco è quasi scomparso, sostituito da macchie di colore al centro della tela.

Nello studio della matematica è bene acquisire consapevolezza di tale processo evolutivo della disciplina, altrimenti gli argomenti possono apparire cristallizzati nel tempo e si rischia di non cogliere il movimento delle idee. Occorre avere uno sguardo di insieme, in modo da non percepire gli argomenti come staccati gli uni dagli altri, pericolo che si corre ad esempio quando nell'insegnamento si pone l'accento sui metodi piuttosto che sui concetti.

L'astrazione consiste, seguendo Kant, in un'operazione di estrazione: non si *astrae qualcosa*, ma *si astrae da qualcosa*. Ne *L'intuizione creativa* (2012), Andrea Gentile osserva che “per elaborare, formare e definire concetti sulla base delle rappresentazioni, bisogna essere in grado di comparare, riflettere e astrarre. Secondo Kant, queste tre operazioni logiche dell'intelletto, infatti, sono le condizioni *essenziali e universali* per la produzione di qualunque concetto in generale”.



fig. 6 - Immanuel Kant (1724–1804)

Nella *Critica della Ragion Pura*, il grande filosofo tedesco scrive: “Io vedo, per esempio, un salice e un tiglio. Confrontando questi oggetti tra loro, innanzi tutto, noto che essi sono diversi l'uno dall'altro riguardo al tronco, ai rami, alle foglie, al colore; ma poi, riflettendo solo su ciò che essi hanno in comune tra di loro: il tronco, i rami e le foglie stesse, e astraendo dalle loro caratteristiche variabili particolari (dalla loro grandezza, dalla loro figura), ottengo il concetto di albero”.

Riguardo agli albori della matematica, è chiaro che inizialmente la necessità fu quella di contare, legata a diversi aspetti della vita quotidiana. Un pastore, pur non avendo cognizione del numero delle sue pecore, per controllare che tutte rientrassero all'ovile, era solito fare una tacca su un bastone per ogni pecora al momento dell'uscita dall'ovile e al ritorno scorrere con un dito le tacche del bastone, una per ogni pecora che rientrava, e verificare così di averne quante ce n'erano alla partenza.

In un primo tempo le nozioni primitive di forma, grandezza e numero facevano forse riferimento più ai contrasti che alle somiglianze: la differenza tra una belva e molte belve, tra la dimensione di un cucciolo e di un adulto, tra la forma di un albero e della luna. Poi si acquisì la consapevolezza delle somiglianze, da cui la nascita della matematica. Un lupo, una pecora, un sasso hanno qualcosa in comune: la loro unicità. Le mani possono essere appaiate con i piedi, con gli occhi, con le narici. Da questo riconoscimento di una proprietà astratta che certi enti hanno in comune ha origine il processo graduale che porta alla formazione del concetto di numero.

Lo sviluppo di un linguaggio è stato essenziale per il sorgere di un pensiero matematico astratto. Le espressioni numeriche verbali primitive facevano riferimento a raggruppamenti concreti; solo con il tempo un'espressione del tipo "due pesci" fu usata per indicare un qualunque insieme con due elementi; l'evoluzione del linguaggio da forme concrete verso forme astratte si coglie in parecchie delle attuali unità di misura.

Probabilmente, all'inizio furono utilizzati dei segni per indicare i numeri; poi si passò ad usare le parole. La nozione di numero intero è tra i più antichi concetti matematici, rintracciabile all'inizio della Preistoria, mentre l'uso delle frazioni si può far risalire all'Età del Bronzo.

Sappiamo dalle fonti che gli Egiziani usavano le frazioni già nel secondo millennio a.C., ma solo di alcuni tipi. Erano ad esempio a loro agio con la frazione $2/3$, per la quale avevano un particolare segno ieratico. Per calcolare $1/3$ di una certa quantità, ne calcolavano $2/3$ e poi ne sottraevano la metà.

Nel *Papiro di Ahmes*, il più esteso papiro egizio di argomento matematico giunto fino a noi e che deve il suo nome allo scriba che lo trascrisse verso il 1650 a.C., vengono esposti molti problemi che fanno uso di frazioni; altri quesiti propongono equazioni lineari della forma $x + ax = b$ oppure $x + ax + bx = c$. L'incognita viene indicata con il termine di *aha*, cioè *mucchio*: ad esempio il problema 24 chiede quale sia il valore del mucchio se il mucchio e un settimo del mucchio sono uguali a 19.

I babilonesi sapevano risolvere equazioni di secondo grado ed avevano sviluppato notevoli capacità di calcolo, usando un principio posizionale sia per gli interi che per le frazioni; essi però non disponevano di un simbolo per lo zero, non giunsero quindi ad un sistema in cui le cifre avessero un valore posizionale assoluto.

La matematica greca concepiva l'aritmetica come una disciplina intellettuale, oltre che come una tecnica; questa transizione avvenne soprattutto nell'ambito della scuola pitagorica, che si servì di essa come base di unificazione degli aspetti del mondo circostante.

Euclide nei suoi *Elementi* (la maggiore e più antica opera matematica greca che ci sia pervenuta, del terzo secolo a.C.) dedica alcuni libri all'algebra, in particolare alla teoria dei numeri. I numeri considerati sono sempre naturali e rappresentati da un segmento. Troviamo nel settimo libro l'argomento oggi noto come *Algoritmo di Euclide* per la determinazione di un massimo comune divisore di due numeri e nel nono libro una dimostrazione della famosa proposizione *i numeri primi sono più di qualsiasi assegnata moltitudine di numeri primi*.

Un contributo importante all'evoluzione del linguaggio simbolico dell'algebra venne dato da Diofanto di Alessandria, tra il terzo e il quarto secolo d.C. Nello sviluppo storico dell'algebra si possono distinguere tre fasi: una prima fase, in cui tutto è descritto a parole, una seconda in cui si usano abbreviazioni (fase sincopata), ed una terza, lo stadio simbolico o finale. Si tratta ovviamente di una semplificazione, ma in questo schema, l'opera di Diofanto va collocata nella seconda fase.

In tutti i libri della *Arithmetica* di Diofanto che ci sono pervenuti, vengono usate abbreviazioni e lettere per indicare le incognite e le loro potenze, si trovano polinomi scritti in una forma concisa tanto quanto quella usata oggi, ma mancano simboli specifici per operazioni e relazioni.

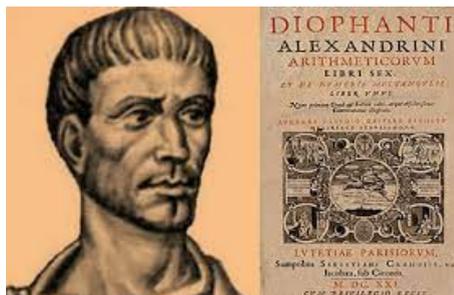


fig. 7 - Diofanto di Alessandria



fig. 8 - Muhammad al-Khwarizmi

Per molti secoli lo studio dell'algebra fu soprattutto studio delle equazioni algebriche. L'obiettivo era quello di passare dal considerare casi particolari di equazioni, a risoluzioni generali.

I metodi di risoluzione delle equazioni di terzo e di quarto grado furono resi noti nell'*Ars magna* di Gerolamo Cardano nel 1545 e sono dovuti ai suoi contemporanei Nicolò Tartaglia e Ludovico Ferrari, rispettivamente. I risultati di Tartaglia e Ferrari servirono soprattutto come stimolo alle ricerche successive, ad esempio nello studio delle equazioni di quinto grado e delle sue connessioni con i numeri complessi coniugati.

Vero padre dell'algebra si può considerare il persiano Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, (IX secolo); dalla latinizzazione della parola *al-jabr* nel titolo della sua opera deriva la parola *algebra*. Anche se compie passi indietro rispetto ai greci nell'uso dei simboli (anche i numeri venivano scritti con le lettere), presenta spiegazioni chiare ed organizzate dei metodi di soluzione delle equazioni.

Solo nel 1824 il norvegese Niels Abel dimostrò l'impossibilità di determinare una formula generale, espressa in termini di operazioni sui coefficienti dell'equazione (cioè una risoluzione per radicali), se questa ha grado superiore al quarto (una dimostrazione meno soddisfacente e meno nota di questo fatto era stata fornita da Paolo Ruffini nel 1799).



fig. 9 - Niels Abel (1802–1829)

Notevoli contributi allo sviluppo della matematica astratta vengono nel XIX secolo dalla scuola britannica, tra i cui esponenti citiamo George Peacock (soprattutto per il suo ruolo di docente e divulgatore), Augustus De Morgan e George Boole, che si può considerare il fondatore della logica matematica.

Nel suo *Trattato di Algebra* del 1830, Peacock cercò di dare all'algebra una struttura logica simile a quella della geometria negli *Elementi* di Euclide. Tentò di formulare le proprietà associativa e commutativa dell'addizione e della moltiplicazione e la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione. Questo metodo, sviluppato ulteriormente in un'opera in due volumi pubblicati nel 1842 e nel 1845, segnò l'inizio del metodo assiomatico dell'algebra. Tuttavia sembra che Peacock avesse in mente soprattutto l'insieme dei numeri naturali ed avesse la pretesa che le proprietà delle operazioni in tale insieme dovessero valere in qualsiasi ambiente, anche nel "sistema più astratto".

Peacock trovò un sostegno nell'opera di De Morgan, il quale si preoccupò non solo di attribuire un significato preciso alle lettere usate, ma anche ai simboli per le operazioni. Nel suo trattato *Logica formale*, De Morgan asserisce che "fatta eccezione per un solo caso, nessun termine o segno aritmetico o algebrico possiede il minimo significato in tutto questo capitolo, che tratta di simboli e di leggi delle loro combinazioni, e presenta un'algebra simbolica che può in seguito diventare la grammatica di centinaia di algebre differenti dotate di significati specifici". Boole portò avanti questa concezione formalista dell'Algebra, affermando che la caratteristica principale della matematica non è il suo contenuto ma la sua forma.

Uno dei concetti più importanti del XIX secolo è la nozione di *gruppo* (un particolare tipo di struttura algebrica), la cui elaborazione è legata in maniera rilevante alla figura di Évariste Galois, il matematico francese morto tragicamente quando non aveva ancora ventuno anni.



fig. 10 - Évariste Galois (1811–1832)

Durante la notte che precedette il duello a seguito del quale perse la vita, Galois raccolse in una lettera inviata ad un amico i risultati delle sue scoperte. Lo scopo principale delle sue ricerche era stabilire in quali casi un'equazione sia risolvibile per radicali. Dimostrò un criterio legato alle proprietà del *gruppo delle permutazioni* dei coefficienti dell'equazione.

La teoria sviluppata da Galois può effettivamente fornire un metodo per determinare le radici delle equazioni, ma l'attenzione è posta principalmente sullo studio della struttura algebrica, più che sulla trattazione di casi specifici. Galois non fu compreso dai matematici dei suoi tempi. Le sue idee si sono affermate solo dopo oltre un secolo dalla sua tragica fine e sono disseminate nella matematica attualmente insegnata.

Tra la fine del XIX secolo e l'inizio del secolo scorso, si rafforza l'idea che la matematica è una forma di pensiero assiomatico, in cui a partire da premesse arbitrarie si traggono conclusioni valide. I concetti fondamentali dell'algebra "moderna" vengono elaborati tra il 1920 e il 1940. Da commistioni con la topologia algebrica nasce in tale periodo una nuova disciplina, l'algebra omologica.

Nel secondo dopoguerra, nonostante lo sviluppo della matematica fosse stimolato soprattutto da problemi sorti al suo interno, si moltiplicarono le applicazioni alla fisica e alle altre scienze della natura, poiché anche nello studio delle altre scienze l'astrazione e la ricerca di schemi e di strutture era divenuto sempre più rilevante.

Nel 1934, un gruppo di matematici francesi, tra i quali André Weil e Jean Dieudonné, avviò un'opera di sistemazione dell'intera matematica, fondata sulla teoria degli insiemi; essi decisero di pubblicare i loro lavori collettivamente, utilizzando lo pseudonimo *Nicolas Bourbaki*.

“Da un punto di vista assiomatico, la matematica si presenta come un deposito di forme astratte: le strutture matematiche; ed accade così, senza che ne sappiamo il perché, che certi aspetti della realtà empirica si adattino a queste forme, quasi in virtù di una sorta di predisposizione” (Bourbaki, *The architecture of Mathematics*).

Weil sottolineò il ruolo centrale dell'analogia nell'investigazione matematica: cose diverse a un livello concreto possono essere interpretate come manifestazioni di una stessa cosa a un livello astratto; cogliere "gli indistinti riflessi tra una teoria e un'altra" porta al necessario tentativo di unificazione.



fig. 11 - André Weil (1906–1998)

È un momento storico nel quale la matematica riesce ad avere un impatto su altre discipline, ad interagire anche con la linguistica, la psicologia, la filosofia, le arti figurative. A Weil si ispirò l'antropologo Claude Lévi-Strauss per la sua opera *Le strutture elementari della parentela*; lo psicologo Jean Piaget, dopo un incontro con Dieudonné, pensò di utilizzare le strutture della matematica come modello di strutture psicologiche fondamentali (comuni al funzionamento di ogni mente umana).

Secondo Carlo Felice Manara (cfr. [4]), l'immaginazione, la formazione di un'immagine, interviene in tutte le costruzioni di oggetti mentali, talvolta anche limitando l'estensione teorica del concetto costruito. Si pensi alle immagini che più comunemente si associano ad un cilindro circolare retto, in confronto a quelle di un compact disc o di un segmento di capello teso, che pure sono a tutti gli effetti dei cilindri. Si pensi anche ai poligoni regolari di 17 e di 19 lati, difficilmente distinguibili se si considerano le loro immagini, ma che lo sono marcatamente in base alle loro proprietà (il primo è costruibile con riga e compasso, il secondo non lo è).

D'altra parte, la costruzione dei concetti astratti può realizzarsi proprio con la presentazione di esempi. È attraverso la presentazione di esempi che nell'insegnamento elementare vengono introdotti i numeri e gli algoritmi delle operazioni. Si potrebbe dire quindi che i numeri e le operazioni vengono acquisiti mediante un'operazione di astrazione che conduce dagli esempi particolari alla generalità del concetto.

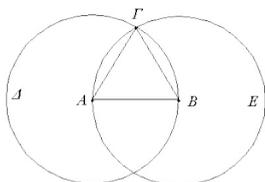
D'altra parte, non è possibile definire tutto. Non è possibile, in particolare, definire i numeri naturali mediante un sistema finito di assiomi.

"L'insieme dei numeri naturali è un insieme così complesso, così misterioso, che qualunque informazione noi riusciamo con le nostre capacità di linguaggio umano a dare sui numeri naturali non è ancora mai la descrizione esauriente della struttura dei numeri naturali" (Ennio De Giorgi).

La ragione può essere assistita dalla stimolo dell'immaginazione; a tale riguardo ci piace citare dal sito di Carlo Casolo

un'ode giovanile di Samuel T. Coleridge (1772–1834), inserita in una lettera al fratello, che riproduce l'argomento della prima proposizione del primo libro degli Elementi di Euclide:

“Costruire un triangolo equilatero su un segmento dato”



Astrazione e immaginazione si incontrano nell'opera di Italo Calvino e dello scultore Fausto Melotti. L'incontro con lo scultore stimola in Calvino l'invenzione di città “sottili come le sue sculture: città su trampoli, città ragnatela”; d'altra parte, si devono a Melotti le illustrazioni delle copertine di romanzi di Calvino per una nota collana editoriale. Il tratto comune è la leggerezza, cara a Calvino e tipica delle opere di Melotti. Fra le città-ragnatela, citiamo Ottavia, “dove la vita degli abitanti è meno incerta che in altre città. Sanno che più di tanto la rete non regge”.

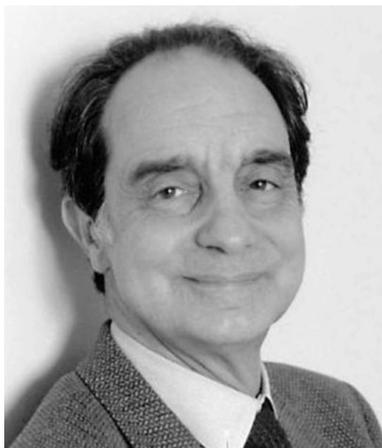


fig. 12 - Italo Calvino (1923–1985)

La leggerezza si può applicare anche ai concetti, levigandoli fino a lasciarne solo lo scheletro. Nella parte finale della raccolta di racconti *Ti con zero*, i testi non sono solo rigorosi ed astratti dal punto di vista stilistico, ma anche sul piano del contenuto, mettendo in luce la narrazione del ragionamento. “Ho cercato di far diventare racconto un mero ragionamento deduttivo”, affermò Calvino stesso in un'intervista rilasciata a pochi mesi dall'uscita della raccolta (cfr. [1]).

Nella (ri)progettazione di una città o del suo centro storico, l'astrazione delle relazioni tra le parti che costituiscono le differenti spazialità porta alla formazione degli archetipi. L'astrazione prende forma, si concretizza ad esempio nel *Cretto di Gibellina* realizzato nel 1985 da Alberto Burri (1915–1995): su una distesa di cemento che ricopre le macerie del centro storico della cittadina distrutta dal terremoto, l'artista ne ricorda la pianta richiamando le strade con dei solchi. Così il *Cretto* restituisce solo i rapporti volumetrici di un centro storico che non c'è più, riportando fedelmente i pieni e i vuoti della città distrutta (si veda [3]).

Abbiamo visto come l'astrazione possa essere declinata in tanti modi. In matematica il percorso verso l'astrazione ha condotto allo studio dell'algebra fondato sulla teoria degli insiemi e inteso come analisi delle strutture algebriche.

In questa seconda parte il nostro obiettivo è la realizzazione di una breve introduzione allo studio dell'algebra a livello universitario, sperando di agevolare una continuità di vedute con ciò che si studia nelle scuole secondarie superiori. Immagineremo di rivolgerci ad una studentessa o ad uno studente o che abbia appena concluso il proprio percorso scolastico e si affacci a quello universitario.

Abbiamo già detto che la base dell'*algebra moderna* è la *teoria degli insiemi*.

Talvolta, nei testi scolastici gli elementi di teoria degli insiemi vengono relegati ad un'appendice. Invece apprendere il linguaggio proprio della matematica, imparare simboli e notazioni, acquisire gli elementi basilari della teoria degli insiemi, è indispensabile per una comprensione matematica moderna e corretta.

Le nozioni di *ente*, *insieme* e *proprietà* non vengono definite, in quanto considerate *primitive* (cioè implicitamente acquisite) per ciascun individuo. Gli insiemi vengono indicati con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino, mentre gli enti (o oggetti) con le lettere minuscole. La scrittura

$$A = \{x, y, z\}$$

indica che A è l'insieme costituito dagli oggetti x, y e z . Gli oggetti di un insieme possono essere elencati (eventualmente si possono usare i puntini sospensivi quando non possono essere elencati tutti gli elementi, ma da quelli indicati si può intendere senza possibilità di equivoci quali siano gli elementi non elencati) oppure possono essere individuati attraverso una proprietà. Ad esempio si può scrivere indifferentemente

$$A = \{0, 1, 2, 3\}$$

oppure

$$A = \{\text{numeri naturali minori o uguali di } 3\},$$

mentre il simbolo

$$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

denota in maniera sufficientemente chiara l'insieme di tutti i numeri naturali. Qualunque sia il modo di assegnare un insieme (e il modo deve essere tale che sia possibile stabilire se un elemento appartenga a tale insieme oppure no), esso è individuato dagli elementi che lo costituiscono.

La teoria degli insiemi nei corsi del primo anno generalmente prescinde dalla formulazione esplicita degli assiomi (le regole del gioco) che vengono assunti; si parla allora di trattazione ingenua o naive. Collocandosi tra l'impostazione assiomatica e quella naive, quella che adotteremo qui (e nei nostri insegnamenti universitari), potremmo definirla semi-ingenua: non enunceremo tutti gli assiomi utilizzati (la scelta cadrà su alcuni di essi, per motivi di rilievo storico o contenutistico); in qualche occasione almeno avvertiremo che dietro una certa affermazione o costruzione c'è un assioma che non si sta esplicitando.

Bisognerà comunque tener presente che a seconda delle regole che si assumono, si possono costruire teorie matematiche anche alternative. I teoremi (i risultati che costituiscono una teoria) vengono dimostrati a partire dagli assiomi e dai risultati precedentemente noti, in una costruzione di concatenazioni. Se si cambiasse uno degli assiomi (una delle regole) tutto il castello crollerebbe. Tutto è opinabile! Tutto (anche i calcoli) dipendono dall'ambiente in cui ci collochiamo, altro che "la matematica non è un'opinione".

D'altra parte, Alain Badiou, nel suo *Elogio delle matematiche* (2017), afferma che, poiché la matematica descrive il mondo che ci circonda, allora la fantasia dei matematici trova un suo argine proprio nella concretezza del mondo che li circonda. Secondo Badiou, l'espressione "la matematica non è un'opinione" è invece sensata in riferimento al fatto che le affermazioni in matematica non si basano su un presupposto di autorità; invece, nel linguaggio comune la stessa frase viene spesso usata in riferimento ad una presunta meccanicità dei processi matematici.

Nell'elencare gli oggetti di un insieme non conta l'ordine e non contano le ripetizioni. Si nasconde dietro questa affermazione un assioma: un insieme è individuato solo dagli oggetti che lo costituiscono, indipendentemente dal modo di assegnarlo; è già questa una *decisione* assunta. Gli insiemi S e T sono uguali e si scrive $S = T$ se S e T hanno gli stessi oggetti.

Se \mathcal{P} e \mathcal{P}' sono proprietà, si dice che \mathcal{P} implica \mathcal{P}' (e si scrive $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}'$) se non vi è nessun ente per cui \mathcal{P} sia vera e \mathcal{P}' sia falsa. Ad esempio, se \mathcal{P} è la proprietà per un numero intero di essere multiplo di 6 e \mathcal{P}' è la proprietà per un numero intero di essere multiplo di 2, allora \mathcal{P} implica \mathcal{P}' (non c'è nessun intero che sia multiplo di 6 ma non multiplo di 2), il viceversa non è vero, in quanto 4 è multiplo di 2 ma non di 6. Se \mathcal{P} e \mathcal{P}' sono proprietà, si dice che \mathcal{P} equivale a \mathcal{P}' (e si scrive $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{P}'$) se \mathcal{P} implica \mathcal{P}' e \mathcal{P}' implica \mathcal{P} . Ad esempio, per un numero intero la proprietà di essere multiplo di 6 è equivalente a quella di essere multiplo sia di 2 che di 3.

L'*insieme vuoto* si denota con il simbolo \emptyset e si può definire mediante una proprietà falsa (non verificata da nessun ente), per esempio dalla proprietà per un oggetto di essere diverso da sé ($x \neq x$).

L'insieme N_0 dei numeri naturali viene introdotto come conseguenza di un assioma che stabilisce l'esistenza di un insieme infinito. Che cosa significhi infinito, lo accenneremo più avanti. Dall'insieme dei numeri naturali si costruisce poi l'insieme Z dei numeri interi relativi e, a partire da Z , l'insieme Q dei numeri razionali. Un ulteriore ampliamento si ottiene con la costruzione dell'insieme R dei numeri reali. Vedremo tra poco qual è il modo formale di definire l'addizione e la moltiplicazione nell'insieme dei numeri naturali (e il concetto stesso di operazione ha una precisa formulazione). Tali operazioni vengono estese da N_0 a Z , da Z a Q , "guadagnando" in ogni ampliamento delle proprietà delle operazioni: l'esistenza dell'*opposto* in Z , l'esistenza dell'*inverso* in Q , per ogni elemento non nullo; la possibilità di estrarre le *radici quadrate* in R , per ogni elemento non negativo.

Ovviamente è possibile considerare insiemi i cui oggetti non siano numeri: l'insieme delle capitali europee, l'insieme delle lettere dell'alfabeto, l'insieme dei punti di un piano.

Si dice che S è *contenuto* in T (o anche che S è un *sottoinsieme* di T) se ogni oggetto di S appartiene a T e in tal caso si scrive $S \subseteq T$. In alternativa, possiamo descrivere questa situazione anche affermando che non c'è nessun oggetto che appartenga a S e non appartenga a T . Ad esempio, l'insieme dei numeri interi multipli di 6 è contenuto nell'insieme degli interi multipli di 2. Si ha subito che $S = T$ se e solo se $S \subseteq T$ e $T \subseteq S$. Si dice che S è *contenuto propriamente* in T (e si scrive $S \subset T$)

se ogni oggetto di S appartiene a T ma c'è almeno un oggetto di T che non appartiene a S . Dunque $S \subset T$ se e solo se $S \subseteq T$ e $S \neq T$ (S è diverso da T).

Ogni insieme è contenuto in se stesso, ma ovviamente non è contenuto propriamente in se stesso. L'insieme vuoto è contenuto in ogni insieme S : non esiste nessun oggetto che appartenga al primo insieme che non appartenga al secondo (il vuoto non ha oggetti!).

Mediante una proprietà \mathcal{P} si può definire un sottoinsieme di un insieme A : si può infatti considerare l'insieme B degli oggetti di A che verificano \mathcal{P} . In questo caso si scrive

$$B = \{x \in A \mid \mathcal{P}\}$$

o anche

$$B = \{x \in A : \mathcal{P}\}$$

e si legge B è l'insieme degli x appartenenti ad A che verificano \mathcal{P} .

L'*insieme delle parti* di un insieme S è l'insieme i cui oggetti sono tutti i sottoinsiemi di S , e si denota con il simbolo $P(S)$. In particolare, l'insieme delle parti dell'insieme vuoto è $\{\emptyset\}$ (che ovviamente non è vuoto). Se S è non vuoto, $P(S)$ ha almeno due oggetti: S stesso e l'insieme vuoto. L'insieme delle parti di $\{1\}$ ha due elementi, \emptyset e $\{1\}$, esattamente come l'insieme delle parti di $\{\emptyset\}$, in quanto $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. A scuola si incontra il problema di calcolare il numero di scelte possibili di k oggetti tra n (con $k \leq n$), indipendentemente dal loro ordine; tale numero coincide con il numero dei sottoinsiemi con k oggetti di un insieme con n elementi.

L'*unione* degli insiemi A e B è l'insieme degli oggetti che appartengono almeno ad uno tra A e B e si denota con $A \cup B$. Dualmente, l'*intersezione* $A \cap B$ di A e di B è l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A che a B .

Quando si risolve un sistema di equazioni, si determina l'intersezione degli insiemi delle soluzioni di ciascuna delle equazioni. Se una delle due equazioni non ammette soluzioni (l'insieme delle sue soluzioni è vuoto), il sistema non ammette soluzioni: l'intersezione di qualunque insieme con l'insieme vuoto è l'insieme vuoto.

Se A e B sono insiemi, l'*insieme differenza* $A \setminus B$ è formato dagli oggetti che appartengono ad A ma non appartengono a B . Se B è un sottoinsieme di A , la differenza $A \setminus B$ si chiama anche *complemento* di B in A .

Osserviamo che se X e Y sono sottoinsiemi di un insieme S , si ha $X \subseteq Y$ se e solo se $S \setminus Y \subseteq S \setminus X$. Infatti, se $X \subseteq Y$ e se z è un elemento di $S \setminus Y$, allora z non appartiene a Y e quindi neppure a X (poiché ogni oggetto di X appartiene a Y), sicché z appartiene a $S \setminus X$. Per l'altra inclusione: se un elemento x di X non appartenesse a Y , allora x starebbe in $S \setminus Y$ e quindi anche in $S \setminus X$, il che non è.

L'unione, l'intersezione e la differenza tra insiemi sono collegate dalle cosiddette *uguaglianze di De Morgan*: qualunque siano gli insiemi S, T e V , si ha

$$S \setminus (T \cup V) = (S \setminus T) \cap (S \setminus V) \quad \text{e} \quad S \setminus (T \cap V) = (S \setminus T) \cup (S \setminus V).$$

Per dimostrare la prima di tali uguaglianze, si consideri un qualunque elemento x di $S \setminus (T \cup V)$, sicché $x \in S$ e $x \notin (T \cup V)$; in particolare, x non appartiene né a T né a V , quindi x appartiene a $(S \setminus T)$ e a $(S \setminus V)$ e dunque a $(S \setminus T) \cap (S \setminus V)$. L'altra inclusione si prova analogamente.

Similmente, per quanto riguarda la seconda uguaglianza, sia x un qualunque elemento di $S \setminus (T \cap V)$, sicché $x \in S$ e $x \notin (T \cap V)$; in particolare, x non appartiene a T oppure x non appartiene a V , quindi x appartiene a $(S \setminus T)$ o a $(S \setminus V)$ e dunque a $(S \setminus T) \cup (S \setminus V)$. L'altra inclusione si dimostra analogamente.

Se, nel considerare degli enti x e y , vogliamo specificare l'ordine con cui li prendiamo, è necessario introdurre una nuova nozione in quanto l'insieme $\{x, y\}$ non è distinto dall'insieme $\{y, x\}$. Chiameremo allora *coppia ordinata* di prima coordinata x e seconda coordinata y l'insieme $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, che sarà denotato con il simbolo (x, y) . Questa definizione potrebbe sembrare un po' artificiosa, ma è efficace, in quanto permette di stabilire quale tra gli elementi x e y sia stato scelto per primo.

Il prodotto cartesiano $S \times T$ degli insiemi S e T è l'insieme costituito da tutte le coppie ordinate con prima coordinata in S e seconda coordinata in T . I concetti di coppia ordinata e di prodotto cartesiano vengono utilizzati per definire le fondamentali nozioni di corrispondenza tra insiemi e di funzione usando solo termini matematici. Non può andar bene affermare: una funzione è una *legge*, una corrispondenza è *qualcosa* che fa corrispondere elementi di un insieme a quelli di un altro. In qualunque modo si sia sentito parlare corrispondenze ed in particolare di funzioni, è acquisito che a partire da una corrispondenza si costruisce un *grafico*, considerando le coppie di elementi in "corrispondenza". Il problema può essere aggirato nel seguente modo. Se S e T sono insiemi non vuoti, una corrispondenza \mathcal{R} tra S e T è una qualunque coppia del tipo $(S \times T, G)$, dove G è un sottoinsieme di $S \times T$; se $x \in S$ e $y \in T$, diremo che x è nella corrispondenza \mathcal{R} con y (e scriveremo $x\mathcal{R}y$) se la coppia (x, y) appartiene al *grafico* G di \mathcal{R} . Si ritrova così il concetto di grafico come lo si conosce dalla scuola. Assegnare una corrispondenza significa fissare un *insieme di partenza* e un *insieme di arrivo* (mediante l'assegnazione del loro prodotto cartesiano) e un grafico (ripetiamolo, mediante l'assegnazione di un sottoinsieme del prodotto cartesiano dei due insiemi).

Una *funzione* f di S in T è una corrispondenza tra S e T tale che ad ogni elemento di S corrisponde uno ed un solo elemento di T . L'insieme S è detto *dominio* di f mentre T è chiamato *codominio* di f ; se $x \in S$, l'unico elemento di T che corrisponda a x viene indicato con $f(x)$ e chiamato *immagine* di x mediante f . Il grafico G di f è dunque l'insieme delle coppie $(x, f(x))$, dove x è un qualunque elemento di S . Per indicare che f è una funzione di S in T si usa il simbolo

$$f : S \longrightarrow T$$

e se vogliamo esprimere in maniera compatta qual è la posizione che definisce il grafico, scriveremo

$$f : x \in S \mapsto f(x) \in T.$$

Ad esempio, sia $f = (R \times R, G)$, dove $G = \{(x, x^2) \mid x \in R\}$. Tale corrispondenza è una funzione perchè ad ogni numero reale corrisponde uno ed un solo numero reale; con la notazione precedente scriveremo

$$f : x \in R \mapsto x^2 \in R.$$

Si osservi però che l'insieme G è anche grafico della corrispondenza $(C \times C, G)$, che non è una funzione in quanto ogni numero complesso non reale è privo di corrispondente. Un altro esempio: la scrittura

$$g : x \in Z \mapsto -x \in Z$$

ci dice che g è la funzione di Z in Z che ad ogni numero intero fa corrispondere il suo opposto. Quindi il grafico di g è il sottoinsieme di $Z \times Z$ costituito dalle coppie $(x, -x)$, dove x è un qualsiasi numero intero.

Per rappresentare sul piano cartesiano i grafici di funzioni del tipo dei due esempi precedenti, ogni punto del piano viene identificato con una coppia di numeri reali: le sue coordinate. Rappresentare il grafico G di una funzione reale significa individuare sul piano cartesiano l'insieme dei punti le cui coordinate appartengono a G .

Nel primo degli esempi che abbiamo appena citato si ottiene un luogo geometrico noto: i punti che devo individuare sul piano hanno la seconda coordinata (l'ordinata, in genere denotata con y) che è il quadrato della prima; costituiscono la parabola di equazione $y = x^2$. Questa equazione ci dice appunto come l'ordinata di ciascun punto della parabola sia legata alla sua ascissa.

Nel secondo esempio, il grafico è il sottoinsieme

$$\{ \dots, (-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (2, -2), \dots \}$$

di $Z \times Z$ perchè, lo ripetiamo, rappresentare un grafico sul piano cartesiano significa individuare tutti i punti che hanno coordinate nel grafico stesso. Quindi non devo considerare ad esempio il punto $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$, né il punto $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; se prendo tutti i punti con coordinate del tipo $(x, -x)$, facendo variare x in R , disegno infatti la retta di equazione $y = -x$, che è il grafico della funzione

$$f : x \in R \mapsto -x \in R.$$

Una funzione $f : S \rightarrow T$ si dice *iniettiva* se ad elementi distinti di S corrispondono elementi distinti di T , cioè se da $f(x) = f(y)$ segue $x = y$.

Ad esempio, la funzione $f : N_0 \rightarrow N_0$, definita ponendo $f(x) = x + 1$ per ogni $x \in N_0$, è iniettiva. Invece, se $S = \{1, 2, 3\}$ e $T = \{a, b, c\}$, la funzione $g : S \rightarrow T$, definita ponendo $g(1) = a$, $g(2) = a$, $g(3) = c$, il cui grafico quindi è l'insieme $G = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$, non è iniettiva.

Una funzione $f : S \rightarrow T$ si dice *suriettiva* se per ogni elemento y di T esiste un elemento x di S tale che $f(x) = y$, cioè se ogni elemento di T compare come seconda coordinata di qualche coppia nel grafico di f . Se X è un sottoinsieme del dominio di una funzione $f : S \rightarrow T$, l'immagine $f(X)$ di X mediante f è l'insieme degli elementi di T che sono immagine di qualche elemento di X . In particolare, f è suriettiva se e solo se $f(S) = T$.

Una funzione $f : S \rightarrow T$ si dice *biettiva* se è sia iniettiva che suriettiva. Qualunque sia l'insieme non vuoto S , la funzione di S in sé che fa corrispondere ad ogni elemento se stesso è ovviamente biettiva; tale funzione viene chiamata *funzione identica* di S e denotata con il simbolo i_S . Un esempio meno banale di funzione biettiva è fornito dalla funzione f che ad ogni $x \in N_0$ fa corrispondere $x + 1 \in N = \{n \in N_0 \mid n \geq 1\}$; in realtà f ha lo stesso grafico di una funzione (iniettiva ma non suriettiva) considerata poco prima, ma in questo caso la suriettività (e quindi la biettività) è garantita dall'aver sostituito il codominio con l'insieme delle immagini di oggetti del dominio.

Le funzioni biettive hanno un'importante proprietà: esse sono invertibili. A scuola si studiano le "funzioni trigonometriche inverse", la "funzione logaritmo" e la sua inversa, la "funzione esponenziale". Precisiamo quindi la nozione di inversa di una funzione biettiva. Occorre innanzitutto definire la composta di due funzioni. Se

$$f : S \rightarrow T \quad e \quad g : T \rightarrow V$$

sono funzioni tali che il dominio di g coincida con il codominio di f , di chiama *composta* di f e di g la funzione

$$g \circ f : x \in S \rightarrow g(f(x)) \in V.$$

È opportuno sottolineare che la possibilità di comporre due funzioni sussiste soltanto quando il codominio della prima coincide con il dominio della seconda. Ad esempio, se

$$f : x \in R \mapsto x + 1 \in R \quad e \quad g : x \in R \mapsto x^3 \in R,$$

allora si può considerare la funzione composta

$$g \circ f : x \in R \mapsto (x + 1)^3 \in R.$$

Si osservi che, in questo esempio, le funzioni f e g si possono comporre anche nell'ordine opposto e si ha

$$f \circ g : x \in R \mapsto x^3 + 1 \in R,$$

per cui $g \circ f \neq f \circ g$. Pertanto la composizione di funzioni (anche quando possibile nei due versi) non è in generale commutativa. Nello studio di una funzione è spesso utile riconoscere che essa si può ottenere come composta di altre funzioni, di cui risulti più facile analizzare le proprietà.

Se S e T sono insiemi non vuoti, una funzione $f : S \rightarrow T$ si dice *invertibile* se esiste un'altra funzione $g : T \rightarrow S$ tale che $g \circ f = i_S$ e $f \circ g = i_T$. Si dimostra che

una funzione $f : S \rightarrow T$ è invertibile se e solo se è biettiva ed in tal caso c'è un'unica funzione che l'inverte: è la funzione di T in S che associa ad ogni elemento y di T l'unico elemento di S di cui y è immagine mediante f . Tale funzione viene chiamata *inversa* di f e denotata con il simbolo f^{-1} . È allora chiaro che il grafico di f^{-1} è l'insieme

$$\{(f(x), x) \mid x \in S\}.$$

Siano S e T insiemi non vuoti. Si dice che S è *equipotente* a T se esiste una funzione biettiva di S in T . In tal caso c'è anche una funzione biettiva di T in S (l'inversa di f), e quindi anche T è equipotente a S . Banalmente ogni insieme non vuoto è equipotente a se stesso.

Gli insiemi distinti $S = \{a, b, c\}$ e $T = \{e, f, g\}$ sono equipotenti, e ciascuno di essi è anche equipotente a $\{1, 2, 3\}$, e ad ogni insieme contenente esattamente 3 oggetti. D'altra parte, il numero degli oggetti di T è maggiore di quello di $X = \{a, b\}$; in questo caso esiste una funzione iniettiva di X in T , ma non esiste alcuna funzione suriettiva di X su T . In questo modo abbiamo di fatto confrontato gli insiemi S, T e X contando i loro oggetti.



fig. 13 - Equipotenza tra insiemi

Questo confronto tra insiemi mediante le funzioni può essere esteso agli insiemi infiniti. Un insieme non vuoto si dice *infinito* se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Ad esempio, si è già notato che gli insiemi N_0 e N sono equipotenti, per cui N_0 è infinito (nel senso formale della definizione).

Siano S e T insiemi non vuoti. Si dice che S ha *potenza minore o uguale* a T se esiste una funzione iniettiva di S in T ; se la potenza di S è minore o uguale a quella di T e in più S e T non sono equipotenti, si dice che S ha *potenza strettamente minore* di T . Si può allora dimostrare che S ha potenza strettamente minore di T se e solo se esiste una funzione iniettiva di S in T ma non esiste alcuna funzione suriettiva di S su T (teorema di Cantor-Bernstein).

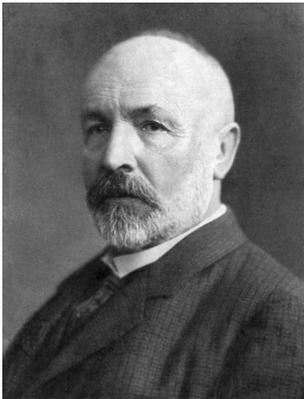


fig. 14 - Georg Cantor (1845–1918)

Un altro importante teorema dovuto a Cantor assicura che ogni insieme non vuoto S ha sempre potenza strettamente minore del suo insieme delle parti $P(S)$. Questo risultato ci permette di considerare insiemi di potenza sempre più grande. Ad esempio, partendo dall'insieme dei numeri naturali si ottiene una *gerarchia illimitata* di insiemi infiniti: $N_0, P(N_0), P(P(N_0)), P(P(P(N_0))), \dots$

Se S è un insieme non vuoto, una corrispondenza tra S e S si chiama anche *relazione* in S . Una relazione \mathcal{R} in S si dice di *equivalenza* se verifica le seguenti condizioni:

- $x\mathcal{R}x$ qualunque sia l'elemento x di S (\mathcal{R} è *riflessiva*);
- se x e y sono elementi di S e $x\mathcal{R}y$, allora $y\mathcal{R}x$ (\mathcal{R} è *simmetrica*);
- se x, y, z sono elementi di S tali che $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, allora $x\mathcal{R}z$ (\mathcal{R} è *transitiva*).

Se \mathcal{R} è una relazione di equivalenza in S , la *classe di equivalenza* di un elemento $x \in S$ è l'insieme di tutti gli oggetti y di S tali che $x\mathcal{R}y$.

Ad esempio, si consideri in Z la relazione $\mathcal{R} = (Z \times Z, G)$, dove G è l'insieme delle coppie (x, y) di numeri interi tali che $x - y$ sia un numero pari (cioè un multiplo di 2); si può verificare facilmente che \mathcal{R} è riflessiva, simmetrica e transitiva, e quindi è una relazione di equivalenza. La relazione \mathcal{R} determina esattamente due classi di equivalenza: la classe di 0, che contiene tutti i numeri interi pari, e quella di 1, che contiene tutti i numeri interi dispari (cioè della forma $2q + 1$, con $q \in Z$).

Se S è un insieme non vuoto, una relazione binaria \mathcal{R} in S si dice di *ordine* se verifica le seguenti condizioni:

- $x\mathcal{R}x$ qualunque sia l'elemento x di S (\mathcal{R} è *riflessiva*);
- se x e y sono elementi di S tali che $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$, allora $x = y$ (\mathcal{R} è *asimmetrica*);
- se x, y, z sono elementi di S tali che $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, allora $x\mathcal{R}z$ (\mathcal{R} è *transitiva*).

Si dice invece che \mathcal{R} è una relazione di *ordine stretto* se è *transitiva* e *antiriflessiva* (cioè se ogni elemento di S non è in relazione con se stesso).

Un importante esempio di relazione d'ordine si ottiene considerando, nell'insieme $P(S)$ delle parti di un insieme S , la relazione \mathcal{R} definita ponendo $X\mathcal{R}Y$ se X e Y sono sottoinsiemi di S e $X \subseteq Y$ (cioè assegnando come grafico l'insieme

delle coppie (X, Y) di sottoinsiemi di S tali che X sia contenuto in Y). Tale relazione è riflessiva ($X \subseteq X$, per ogni $X \in P(S)$), è asimmetrica (se X e Y sono sottoinsiemi di S tali che $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, allora $X = Y$), è transitiva (se X, Y e Z sono sottoinsiemi di S tali che $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$, allora $X \subseteq Z$). Se invece in $P(S)$ poniamo $X \mathcal{R}' Y$ se $X \subset Y \subset S$, allora definiamo una relazione di ordine stretto \mathcal{R}' .

Usualmente una qualunque relazione d'ordine viene denotata con il simbolo \leq , mentre il simbolo $<$ si utilizza per denotare una generica relazione di ordine stretto. Considerare un insieme S munito di una relazione di ordine \leq , significa sostanzialmente prendere in esame la coppia (S, \leq) , che prende il nome di *insieme ordinato*; in questo caso si dice anche che S è *ordinato* mediante \leq .

Negli insiemi ordinati si introducono le nozioni di minimo, massimo, minorante, maggiorante, sottoinsieme limitato, estremo inferiore ed estremo superiore; è utile focalizzare bene tali nozioni, in particolare per comprendere diverse questioni che riguardano le funzioni reali e che sono utili per lo studio dell'analisi matematica.

Sia (S, \leq) un insieme ordinato e sia X un sottoinsieme non vuoto di S . Un elemento $a \in X$ si dice *minimo* di X se $a \leq x$ per ogni $x \in X$. Se X ha minimo, questo è unico; infatti, se a e a' sono entrambi minimi di X , si ha $a \leq a'$ e $a' \leq a$, e quindi $a = a'$ per la proprietà asimmetrica. Ad esempio, nell'insieme ordinato $(P(S), \subseteq)$, l'intero insieme $P(S)$ ha minimo, e questo è l'insieme vuoto. D'altra parte, se $S = \{1, 2, 3\}$, allora

$$P(S) = \{\emptyset, S, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

e il suo sottoinsieme $\{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ non ha minimo, poiché $\{1, 3\}$ non è contenuto in $\{2, 3\}$ e $\{2, 3\}$ non è contenuto in $\{1, 3\}$.

Dualmente, un elemento b di X si dice *massimo* di X se $x \leq b$, per ogni $x \in X$. Come nel caso del minimo, se X ha massimo, questo è unico. Negli esempi precedenti, S è il massimo dell'insieme $P(S)$ ordinato mediante l'inclusione, mentre se $S = \{1, 2, 3\}$, il sottoinsieme $\{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ di $P(S)$ non ha massimo.

Un elemento y di S si dice un *minorante* di X in S se $y \leq x$ per ogni $x \in X$; il sottoinsieme X si dice *inferiormente limitato* in S se ha minoranti in S . Se X è inferiormente limitato in S , l'eventuale massimo dell'insieme dei minoranti di X in S è chiamato *estremo inferiore* di X in S . Ovviamente, se X ha minimo, questo è anche il suo estremo inferiore.

Dualmente, un elemento z di S si dice un *maggiorante* di X in S se $x \leq z$ per ogni $x \in X$, e X si dice *superiormente limitato* in S se ha maggioranti in S . Se X è superiormente limitato, l'eventuale minimo dell'insieme dei maggioranti di X in S prende il nome di *estremo superiore* di X in S . Come prima, se X ha massimo, questo è il suo estremo superiore.

Fin qui abbiamo considerato insiemi e funzioni tra insiemi. Se negli insiemi sono definite delle relazioni di ordine, ci si chiede come una funzione tra di essi si comporti rispetto a tali relazioni, se *conservi* l'ordine tra elementi del dominio quando si passa alle loro immagini; se questo avviene, diremo che la funzione è *crescente*. Più precisamente, se (S, \leq) e (S', \leq') sono insiemi ordinati, una funzione $f : S \rightarrow T$ si

dice *crescente* se da $x \leq y$ in S segue $f(x) \leq f(y)$ in S' , mentre si dice che f è *strettamente crescente* se da $x < y$ segue $f(x) < f(y)$. Si dice poi che f è *de-crescente* se da $x \leq y$ segue $f(x) \geq f(y)$, e che f è *strettamente decrescente* se risulta $f(x) > f(y)$ ogni volta che $x < y$.

Un insieme ordinato (S, \leq) si dice *naturalmente ordinato* se ogni sua parte non vuota è dotata di minimo e, se superiormente limitata, anche di massimo. Si può dimostrare che esiste un insieme naturalmente ordinato e privo di massimo, e che tra due insiemi di questo tipo c'è sempre un'unica funzione biettiva e crescente, sicché essi sono equipotenti e hanno lo stesso comportamento rispetto all'ordine. Fondamentale

in questo ambito è stato il contributo dell'italiano Giuseppe Peano (1858–1932). È in base a questo risultato che è possibile introdurre l'insieme N_0 dei *numeri naturali* come un qualunque insieme naturalmente ordinato e privo di massimo, ed assumerlo come modello per lo studio degli insiemi ordinati con tale proprietà. Fissato in questo modo N_0 , il simbolo 0 denoterà il suo minimo, 1 il *successivo* di 0, cioè il minimo del sottoinsieme di N_0 costituito dagli elementi maggiori di 0, 2 il successivo di 1 e così via.

Nell'insieme N dei numeri naturali diversi da 0, è possibile introdurre un'altra interessante relazione d'ordine (diversa da quella usuale), ponendo $a \leq b$ se a e b sono elementi di N ed esiste $c \in N$ tale che $b = ac$, cioè se a divide b . Ad esempio, se abbiamo ordinato N mediante la divisibilità, il suo sottoinsieme $X = \{2, 6, 8\}$ ha come minimo 2 (che è anche il suo minimo rispetto alla relazione d'ordine usuale), ma non ha massimo. È facile rendersi conto che il minimo, rispetto alla divisibilità, tra i maggioranti di X in N , cioè l'estremo superiore di X , è il *minimo comune multiplo* dei numeri in X , ovvero 24.

Sulle proprietà della divisibilità tra numeri interi torneremo più avanti.

Se S è un insieme non vuoto, un'operazione in S è una funzione

$$\diamond : S \times S \longrightarrow S.$$

L'immagine di una coppia di elementi $(x, y) \in S \times S$ mediante \diamond viene denotata con il simbolo $x \diamond y$ (ed è il *composto* di x e y mediante \diamond). L'operazione \diamond è *commutativa* se $x \diamond y = y \diamond x$ qualunque siano gli oggetti x e y di S , mentre è *associativa* se risulta $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$ per tutti gli elementi x, y, z di S . Come esempio di operazione sia commutativa che associativa si può considerare, per un qualunque insieme S , la funzione

$$\cap : (X, Y) \in P(S) \times P(S) \longmapsto X \cap Y \in P(S).$$

Sia \diamond un'operazione in un insieme non vuoto S . Si dice che un elemento $u \in S$ è *neutro* rispetto a \diamond se

$$x \diamond u = x = u \diamond x$$

per ogni $x \in S$. Supponiamo che u e u' siano elementi in S con questa proprietà; allora risulta $u = u \diamond u' = u'$, e quindi l'elemento neutro, se esiste, è unico.

Supponiamo \diamond associativa ed esista in S l'elemento neutro u rispetto a \diamond . Un elemento x di S si dice *invertibile* (rispetto a \diamond) se esiste $x' \in S$ tale che

$$x \diamond x' = x' \diamond x = u;$$

in questo caso, l'elemento x' è unico perchè, se x'' è un qualunque elemento di S con la stessa proprietà, si ha

$$x' = x' \diamond u = x' \diamond (x \diamond x'') = (x' \diamond x) \diamond x'' = u \diamond x'' = x''.$$

L'elemento x' viene detto *inverso* di x (rispetto a \diamond). In questa situazione, se per l'operazione si usa il simbolo \cdot anzichè \diamond , l'inverso di x si denota col simbolo x^{-1} ; analogamente, se \diamond è sostituito dal simbolo $+$, l'inverso di x si denota con $-x$ ed è chiamato *opposto* di x .

Se X è un insieme non vuoto e \mathcal{A} è l'insieme delle funzioni di X in sé, l'operazione

$$\circ : (f, g) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto g \circ f \in \mathcal{A}$$

non è commutativa (a meno che X non sia costituito da un solo elemento), ma si può facilmente verificare che è associativa. Inoltre la funzione identica di X è elemento neutro in \mathcal{A} rispetto a \circ in quanto, se x è un qualunque elemento di X e $f \in \mathcal{A}$, si ha

$$(i_X \circ f)(x) = i_X(f(x)) = f(x) \quad \text{e} \quad (f \circ i_X)(x) = f(i_X(x)) = f(x).$$

Gli elementi di \mathcal{A} invertibili rispetto a \circ coincidono con le funzioni biettive di X in sé, cioè con le *permutazioni* di X . Se allora denotiamo con S_X l'insieme delle permutazioni di X e restringiamo l'operazione \circ a $S_X \times S_X$, otteniamo un'operazione associativa in S_X , rispetto alla quale S_X è dotato di elemento neutro ed ogni elemento di S_X è invertibile. Queste sono esattamente le proprietà che definiscono un gruppo: un *gruppo* è un insieme in cui sia definita un'operazione associativa e dotata di elemento neutro, rispetto alla quale ogni elemento sia invertibile. Quindi l'insieme S_X è un gruppo rispetto a \circ , chiamato *gruppo simmetrico* su X . Si osservi che il gruppo S_X è *abeliano* (cioè l'operazione in S_X è commutativa) soltanto se X è costituito da al più due elementi.

Un *isomorfismo* tra gruppi è una funzione biettiva che *conservi le operazioni*, cioè tale che l'immagine del composto di due elementi coincida con il composto delle loro immagini. In tal caso i due gruppi possono essere portati a *combaciare*. Prescindendo dai nomi assegnati ai loro oggetti, i due gruppi diventano *indistinguibili*; conta solo la loro *potenza* (la quantità degli oggetti che li costituiscono) e il modo in cui si compongono gli oggetti.

L'operazione di addizione $+$ nell'insieme N_0 dei numeri naturali si può definire nel seguente modo. Qualunque sia il numero naturale k , il sottoinsieme N_k di N_0 costituito dai numeri naturali $n \geq k$ è naturalmente ordinato e privo di massimo (rispetto alla relazione d'ordine usuale), e quindi esiste un'unica funzione biettiva e

crescente di N_0 in N_k , che chiameremo t_k . Ad esempio, per $k = 1$, la funzione t_1 è quella che porta 0 in 1, 1 in 2, e in generale ogni numero naturale n nel suo successivo. Queste funzioni vengono usate per definire l'addizione in N_0 : la *somma* di due numeri naturali m ed n è per definizione il numero naturale $m + n = t_n(m)$. In particolare, $m + 1 = t_1(m)$ è proprio il successivo di m .

Questa definizione è la formalizzazione di quanto si fa nella scuola primaria, quando si eseguono le addizioni *facendo i salti sulla linea dei numeri*.

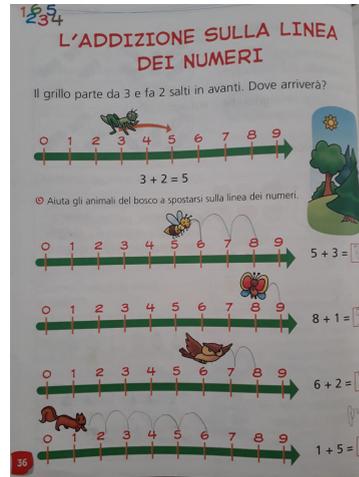


fig. 15 - L'addizione

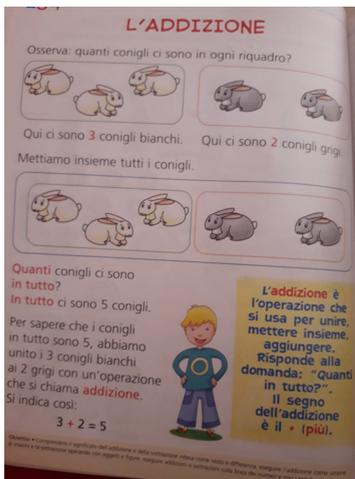


fig. 16 - L'addizione e l'unione di insiemi

È opportuno osservare che, se S è un insieme con m oggetti, T è un insieme con n oggetti e $S \cap T = \emptyset$, allora l'insieme $S \cup T$ ha esattamente $m + n$ oggetti. Allora la somma di due numeri naturali può essere utilizzata per rappresentare la quantità di oggetti che si trovano nell'unione di due insiemi disgiunti.

Siano m ed n numeri naturali tali che $m \geq n$. Esiste allora un unico numero naturale k tale che $t_n(k) = m$, perché m appartiene a N_n e t_n è la funzione biettiva; il numero naturale k si chiama *differenza* di m e n e si denota con il simbolo $m - n$. Poiché $n + k = m$, si ha $n + (m - n) = m$.

Se m ed n sono numeri naturali tali che $m \geq n$, S è un insieme con m oggetti e X è un sottoinsieme di S con n oggetti, la differenza $m - n$ è il numero degli oggetti che si trovano nel complemento $S \setminus X$ di X in S .



fig. 17 - La sottrazione

Il seguente risultato è un importante strumento molto usato in matematica, in particolare per dimostrare proprietà dei numeri naturali.

Principio di induzione *Sia X un insieme non vuoto di numeri naturali con minimo m . Se, per ogni n in X , anche $n + 1$ appartiene a X , allora ad X appartiene ogni numero naturale maggiore o uguale ad m , cioè $X = N_m$.*

Come esempio per illustrare la rilevanza del principio di induzione proviamo, utilizzando, la seguente uguaglianza che permette il calcolo immediato della somma dei primi n numeri interi positivi, qualunque sia $n \in N$:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Occorre evidentemente provare che l'insieme X , costituito dai numeri naturali n per i quali tale uguaglianza è vera, coincide con N . Certamente X contiene il minimo 1 di $N = N_1$ (questo passo di verifica per il minimo si chiama *base dell'induzione*). Il secondo passo riguarda la verifica che se un certo numero naturale n appartiene a X (cioè se l'uguaglianza è vera per n), anche $n + 1$ appartiene a X (cioè l'uguaglianza da provare è vera per anche per $n + 1$). Questo significa che stiamo supponendo

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(la cosiddetta *ipotesi induttiva*) e dobbiamo provare che l'analogha uguaglianza sussiste anche quando sostituiamo n con $n + 1$. Infatti si ha

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) &= (1 + 2 + \dots + n) + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione.

Il principio di induzione può anche essere usato efficacemente per dare delle definizioni: si parte dal minimo da definire, si dà la *ricetta* su come passare dal caso di un numero naturale a quello del suo successivo, e questo basta per completare la definizione.

Anche l'operazione di moltiplicazione \cdot in N_0 si definisce usando il principio di induzione. Si pone infatti $m \cdot 0 = 0$ per ogni numero naturale m , e supposto di aver definito il prodotto $m \cdot n$, si pone $m \cdot (n+1) \cdot n = m \cdot n + m$. In questo modo il prodotto risulta definito per ogni coppia di naturali. È facile verificare che in N_0 la moltiplicazione è *distributiva* rispetto all'addizione, cioè che risulta $(m+n)r = mr + nr$ qualunque siano i numeri naturali m, n, r .

Abbiamo già menzionato che a partire da N_0 si costruisce l'insieme Z dei numeri interi relativi, mediante un procedimento che viene detto di *simmetrizzazione*. Si definisce nell'insieme $N_0 \times N_0$ delle coppie di numeri naturali una opportuna relazione di equivalenza, e i numeri interi non sono altro che le classi di equivalenza rispetto a tale relazione; in particolare, i numeri naturali possono essere identificati con le classi di equivalenza di coppie del tipo (a, b) con $a \geq b$, mentre i numeri negativi sono le classi di equivalenza delle coppie (a, b) con $a < b$.

All'insieme Z si estendono la relazione di ordine e le operazioni di addizione e moltiplicazione definite in N_0 . Rispetto all'addizione ogni numero intero x è dotato di opposto $-x$, e la *sottrazione* $-$ si può definire in Z ponendo $x - y = x + (-y)$ qualunque siano i numeri interi x e y . Gli unici numeri interi dotati di inverso rispetto alla moltiplicazione sono 1 e -1 ; per guadagnare gli inversi degli altri elementi non nulli occorre ampliare Z costruendo l'insieme Q dei numeri razionali. Ogni numero razionale si può rappresentare come una *frazione* $\frac{a}{b}$, con a e b interi e $b \neq 0$. Formalmente le frazioni sono classi rispetto alla relazione di equivalenza \mathcal{R} , definita nell'insieme $Z \times (Z \setminus \{0\})$ ponendo $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ se e solo se $ad = bc$, il che assicura che $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

se e solo se $ad = bc$. Le operazioni e la relazione di ordine in Q sono definite a partire da quelle in Z , ponendo

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

e $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ se e solo se $ad \leq cb$.

Le operazioni in Q sono commutative e associative, e Q è dotato di elemento neutro rispetto a ciascuna di esse; inoltre ogni numero razionale ha opposto rispetto all'addizione e, se non nullo, inverso rispetto alla moltiplicazione. La moltiplicazione in Q è distributiva rispetto all'addizione e, se x e y sono numeri razionali tali che $x \leq y$ si ha $x + z \leq y + z$ per ogni $z \in Q$ e $xz \leq yz$ se $z \geq 0$. Conseguentemente, con tali operazioni e tale ordinamento, Q è quello che si chiama un *campo ordinato*.

In Q vale la *legge di cancellazione* rispetto alla moltiplicazione, cioè da $xy = xz$ e $x \neq 0$ segue $y = z$; si può infatti moltiplicare entrambi i membri dell'uguaglianza per l'inverso di x , e quindi cancellare x . Questa proprietà è vera anche in Z , pur non sussistendo l'invertibilità degli elementi non nulli e ciò dipende dalla cosiddetta *legge di annullamento del prodotto*: in conseguenza della sua definizione, un prodotto di

due interi è nullo se e solo se tale è uno dei fattori. Di conseguenza, se $ab = ac$, con a, b, c in Z e $a \neq 0$, si ha $0 = ab - ac = a(b - c)$, per cui $b - c = 0$ e $b = c$.

In Z vale il seguente rilevante teorema riguardante la divisibilità.

Algoritmo della divisione euclidea *Se m e n sono numeri interi e $n \neq 0$, esistono e sono unici dei numeri interi q ed r tali che $m = nq + r$ e $0 \leq r < |n|$.*

Nell'enunciato precedente $|n|$ denota il *valore assoluto* di n , cioè il massimo dell'insieme $\{n, -n\}$; gli interi q ed r sono chiamati rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di m per n .

I resti possibili della divisione di un numero intero per 2 sono 0 e 1; hanno resto 0 gli interi del tipo $2q$, hanno resto 1 gli interi del tipo $2q + 1$. Se si esegue la divisione di un qualunque intero m per 3, i resti possibili sono 0, 1 e 2; nel primo caso m è un intero del tipo $3q$, nel secondo del tipo $3q + 1$, nel terzo del tipo $3q + 2$. Ogni intero appartiene ad uno (e ad uno soltanto) dei sottoinsiemi cosí individuati.

Se nella divisione di m per n il resto è nullo, si ha $m = nq$, dove q è il quoziente della divisione; in tal caso si dice che n è un *divisore* di m o anche che m è un *multiplo* di n . Un numero intero m ha tra i suoi divisori almeno 1, -1 , m , $-m$, che si chiamano *divisori banali*. Un numero intero diverso da 0, da 1 e da -1 si dice *primo* se i suoi unici divisori sono quelli banali. I numeri primi sono i mattoni su cui è costruita l'aritmetica, come mostra il seguente importante risultato.

Teorema fondamentale dell'aritmetica *Un qualunque numero intero diverso da 0, da 1 e da -1 è primo oppure prodotto di numeri primi, e tale decomposizione è unica a meno dell'ordine dei fattori e del loro segno.*

Su questo risultato si basa il procedimento per la determinazione di un massimo comune divisore e di un minimo comune multiplo di due numeri interi non nulli, che già si insegna nella scuola secondaria inferiore. Si ricordi che, se a e b sono numeri interi non nulli, un *massimo comune divisore* di a e b è un numero intero che divida sia a che b ed è diviso da ogni loro divisore comune, mentre un *minimo comune multiplo* di a e b è un multiplo sia di a che di b e divida ogni loro multiplo comune.

Il teorema fondamentale dell'aritmetica ha come conseguenza che è possibile decomporre i numeri interi non nulli a e b nel prodotto di potenze di numeri primi; per esprimersi in maniera più compatta, si può scegliere di far comparire in queste decomposizioni potenze degli stessi numeri primi, eventualmente con esponente nullo. Ad esempio, se si considerano i numeri 75 e 36, si ottengono le decomposizioni $75 = 2^0 \cdot 3 \cdot 5^2$ e $36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0$. Il numero $2^0 \cdot 3 \cdot 5^0$ è allora un massimo comune divisore di 75 e 36, perché divide tali numeri ed è diviso da ogni loro divisore comune; similmente $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ è un minimo comune multiplo di 75 e 36, perché è un multiplo dei due numeri e divide ogni loro multiplo comune. Nel caso generale, se $a = p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_t^{m_t}$ e $b = p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_t^{n_t}$, con p_1, \dots, p_t numeri primi, ci si rende conto facilmente che un massimo comune divisore di a e b si ottiene considerando il prodotto $p_1^{u_1} \cdot \dots \cdot p_t^{u_t}$, dove u_i è il minimo tra m_i e n_i per ogni $i = 1, \dots, t$, mentre un minimo comune multiplo di a e b è fornito dal prodotto $p_1^{v_1} \cdot \dots \cdot p_t^{v_t}$, dove v_i è il massimo tra m_i e n_i per ogni $i = 1, \dots, t$.

Quanti sono i massimi comuni divisori e i minimi comuni multipli di una coppia di numeri interi non nulli? Evidentemente 3 non è il solo massimo comune divisore di 36 e 75, in quanto anche -3 ha la proprietà di dividere entrambi i numeri considerati e di essere diviso da ogni loro divisore comune. In generale, per ogni coppia di interi non nulli, individuiamo almeno due massimi comuni divisori di a e b , perchè se d è un loro massimo comune divisore, anche $-d$ lo è. Osserviamo che non possono essercene altri. Infatti, se d' è un qualunque massimo comune divisore di a e b , si ha che d divide d' e d' divide d , per cui $d = d'c$ e $d' = dc'$ con c e c' in Z ; allora $d = d(c'c)$, sicchè $c'c = 1$, da cui segue $c = c' = 1$ oppure $c = c' = -1$ e quindi $d' = d$ oppure $d' = -d$.

È interessante vedere come, utilizzando argomenti elementari di aritmetica in Z , si possa provare che:

Non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia 2.

Si supponga infatti per assurdo che esista $m/n \in Q$ tale che $(m/n)^2 = 2$. È possibile assumere che m e n siano coprimi (dividendo numeratore e denominatore per eventuali fattori primi comuni). Poichè $m^2 = 2n^2$, si ha che m^2 è pari e quindi anche m deve essere pari, cioè $m = 2k$, con k intero; allora $4k^2 = 2n^2$, per cui $n^2 = 2k^2$, e di conseguenza n^2 è pari. Pertanto n è pari, il che è una contraddizione, in quanto m e n sono coprimi.

Da questo risultato segue che l'insieme costituito da tutti i numerali razionali positivi x tali che $x^2 < 2$, pur essendo ovviamente dotato di maggioranti in Q , non ha estremo superiore in Q . Per superare questo ostacolo, a partire da Q si costruisce l'insieme R dei numeri reali, a cui si estendono le operazioni e la relazione di ordine di Q con tutte le loro caratteristiche, ma con una proprietà aggiuntiva: è un insieme ordinato *completo*, cioè ogni suo sottoinsieme limitato inferiormente è dotato di estremo inferiore e ogni suo sottoinsieme limitato superiormente è dotato di estremo superiore. A questo punto, usando la completezza di R , è possibile dimostrare che

per ogni numero reale positivo y e per ogni numero intero positivo n , esiste un unico numero reale positivo x tale che $x^n = y$.

Tale numero reale x si chiama *radice n -sima* di y ; in particolare la *radice quadrata* di y è l'unico numero reale positivo il cui quadrato è y . Quindi l'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni in Q , mentre ha soluzioni in R .

Quando si affronta lo studio di un'equazione, occorre tenere ben presente a quale insieme appartengono i coefficienti e in quale insieme si stanno cercando le soluzioni. Ad esempio, l'equazione $x^2 = 4$ ha una sola soluzione in N_0 ma ne ha due in Z , l'equazione $x + 2 = 1$ non ha soluzioni in N_0 ma ha una soluzione in Z , $3x = 1$ non ha soluzioni in Z ma ha una soluzione in Q .

Più in generale, in Q o in R l'equazione $ax = b$, con $a \neq 0$, si risolve moltiplicando entrambi i membri per l'inverso di a , ricavando $x = a^{-1}b$. Anche quando si risolve un'equazione a coefficienti interi della forma $x + a = b$, usiamo le proprietà dell'operazione; infatti possiamo sommare ad entrambi i membri l'opposto di a , ottenendo $x + a + (-a) = b + (-a)$ e quindi $x = b - a$.

Il *grado* di un polinomio non nullo $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ è il massimo indice i tale che $a_i \neq 0$. I numeri reali a_0, a_1, \dots, a_n sono chiamati *coefficienti* del polinomio. I polinomi di grado 0 sono detti *costanti*. Assumiamo qui noti dalla scuola secondaria i procedimenti per sommare e moltiplicare due polinomi a coefficienti reali., cioè l'introduzione delle operazioni usuali nell'insieme $R[x]$ dei polinomi (in una indeterminata) a coefficienti reali.

Le operazioni in $R[x]$ godono delle stesse proprietà delle operazioni in Z . I numeri interi con l'addizione e la moltiplicazione e gli elementi di $R[x]$ con la somma e il prodotto costituiscono lo stesso tipo di struttura algebrica. È per questo motivo che ci sussistono importanti analogie tra i risultati sui numeri interi e quelli sui polinomi: decomposizione, algoritmo della divisione, massimo comune divisore e minimo comune multiplo . . .

Ad esempio, la divisione tra polinomi poggia sul seguente risultato.

Siano f e g elementi di $R[x]$, con $g \neq 0$. Allora esistono e sono unici dei polinomi q ed r a coefficienti reali tali che $f = gq + r$, dove $r = 0$ oppure il grado di r è minore del grado di g .

I polinomi q ed r così ottenuti vengono chiamati rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di f per g . La dimostrazione di tale teorema fornisce di fatto un procedimento concreto per la determinazione del quoziente e del resto in una divisione tra polinomi. Dall'enunciato appare evidente come il ruolo svolto dal valore assoluto nella divisione tra numeri interi sia assunto, nella divisione tra polinomi, dal grado.

Se $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ è un polinomio a coefficienti in R , un numero reale c si dice *radice* di f se risulta

$$f(c) = a_0 + a_1c + \dots + a_nc^n = 0.$$

Le radici di un polinomio sono caratterizzate dal seguente importante risultato dovuto a Paolo Ruffini (1765–1822).

Teorema. *Un numero reale c è radice di un polinomio $f \in R[x]$ di grado positivo se e solo se f è divisibile per il polinomio $x - c$ (cioè se e solo se il resto della divisione di f per $x - c$ è 0).*

Al fine di provare il teorema di Ruffini, siano q ed r il quoziente ed il resto della divisione di f per $x - c$. Allora $f = (x - c)q + r$, e r è nullo oppure ha grado 0 (cioè r è un polinomio *costante*). Poichè risulta

$$f(c) = (c - c)q(c) + r = r,$$

si ha che c è radice di f , ovvero che $f(c) = 0$, se e solo se $r = 0$, il che prova l'enunciato.

Il teorema di Ruffini assicura che, se si riesce a determinare una radice di un polinomio f di grado $n > 0$, allora f può essere decomposto nel prodotto di polinomi di grado minore di n , il che ovviamente ne semplifica lo studio. In particolare, se f ha grado 2 ed è stata individuata una sua radice, è possibile decomporre f nel prodotto di due polinomi di grado 1. Quando, come in questo caso, un polinomio f è prodotto di

polinomi di primo grado, lo studio del *segno* di f (cioè la determinazioni dei valori c per i quali $f(c)$ sia maggiore di 0), può essere ricondotto allo studio del segno di polinomi di grado 1. D'altra parte, se un polinomio f è decomponibile nel prodotto di polinomi di grado 1, si determinano facilmente le sue radici: sono i numeri reali che annullano uno di tali fattori. Ad esempio, se $f = (x - 1)(x - 3)$, i valori di x che annullano f sono 1 e 3.

Supponiamo invece $f = x^2 - 7x + 10$. Poiché $\Delta = 7^2 - 10 \cdot 4 = 9 > 0$, la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado con $\Delta > 0$, permette di determinare le due radici di f , che sono 2 e 5. Per il teorema di Ruffini, f è divisibile per $x - 2$ e $x - 5$; ne segue che $f = (x - 2)(x - 5)$ e i numeri reali c per i quali $f(c) > 0$ sono quelli per i quali $c - 2$ e $c - 5$ sono entrambi positivi o entrambi negativi, quindi $f(c) > 0$ se e solo se $c < 2$ oppure $c > 5$.

Bibliografia

- [1] L. BIANCHI: "Il grafico e la mappa. Astrazioni e deduzioni in *Ti con zero*", *Italies* 16 (2012), 121–140.
- [2] C.B. BOYER: "Storia della Matematica", *Mondadori* (1990).
- [3] F. FERRARA: "Le forme dello spazio pubblico", tesi di dottorato in *Composizione Architettonica e Progettazione Urbana*, Napoli (2005).
- [4] C.F. MANARA: "Il concetto di «astrazione» in matematica", *Scuola Italiana Moderna* 13 (1994), 24–27.

Matematica, letteratura, e l'ossessione per Musil

Mathematics, literature and the obsession with Musil

Bruno Carbonaro¹

Abstract

In the framework of present studies about the relationship between mathematics and literature, the attention is mainly directed to the texts in which mathematics appears among the objects of discourse or among the expressive tools. In this perspective, a reference to Musil and to his *The man without qualities* seems to be considered mandatory. The aim of the present paper is twofold: (a) on one hand, we try to show that such a reference is rather forced; (b) on the other hand, we suggest that there could be other perspectives, perhaps more interesting, to understand and describe the interplay between mathematics and literature.

Dubbi introduttivi

Da parecchi anni (almeno quasi trenta, a quanto ci risulta [20], e qualche testo pionieristico sull'argomento era già apparso quasi settant'anni fa [15]) è andato esplodendo, tanto tra i matematici quanto tra un discreto numero di letterati, un interesse intensissimo per lo studio delle relazioni tra matematica e letteratura, quasi come se si volesse in questo modo finalmente riparare la frattura tra le due culture, umanistica e scientifica, e da un lato i letterati volessero valutare cos'hanno perso trascurando la matematica e il mondo delle sue nozioni non solo come oggetto di narrazione ma anche come arsenale di strumenti tecnici per la concezione e la strutturazione dei testi letterari [9,15,19] (e si vedano anche i pionieristici scritti di E. Colerus [2,3]), e come la letteratura possa nutrirsi del linguaggio e almeno di alcune nozioni matematiche di base per arricchire tanto le proprie capacità espressive quanto i contenuti della propria immaginazione [15], e i matematici volessero non solo da un lato rivendicare il ruolo della loro disciplina nella cultura umanistica, ma dall'altro anche studiare la possibilità di adottare toni, metafore e strutture linguistiche narrative per comunicare

¹Dipartimento di Matematica e Fisica, Università degli Studi della Campania "L. Vanvitelli", Viale Lincoln 5, I- 81100 Caserta, Italy; email: bruno.carbonaro@unicampania.it

i contenuti della matematica con la massima immediatezza possibile [7,10,20], per superare l'avversione, o almeno la paura, che la matematica suscita tanto spesso negli studenti 17. In questa prospettiva, ed obbedendo a queste sanissime istanze, è stato prodotto di recente nell'ambiente matematico italiano un certo numero di scritti nei quali si analizza e sottolinea come e quanto in un gran numero di opere letterarie classiche o importanti si citino nozioni matematiche (per esempio π), o problemi e teoremi, o si usino conoscenze matematiche, per quanto perlopiù elementari, come mezzi espressivi (per esempio, come metafore o analogie, o per descrivere ambienti e situazioni in termini particolarmente precisi, almeno nelle intenzioni) [11,12] (ma si veda soprattutto l'interessantissimo volumetto [16], l'unico nel quale quest'uso sia inquadrato, senza banalizzarne ma senza esaltarne il significato, nelle sue reali proporzioni).

Seguendo questo atteggiamento mentale, sembra che alcuni matematici coi quali ho avuto occasione di discutere ritengano essenziale, se non quasi obbligatorio, in qualsiasi saggio sui rapporti tra matematica e letteratura che voglia essere riconosciuto come «serio» e «completo», un riferimento al grande scrittore Robert Musil (nato a Klagenfurt am Worthersee il 6 novembre 1880 e morto a Ginevra il 15 aprile 1942) e al suo monumentale libro *L'uomo senza qualità* [14]. Ora, a parte il fatto che ogni occasione per parlare di questa grande opera può essere la benvenuta, è comunque opportuno, se non doveroso, tentare anzitutto di capire fino in fondo la connessione del libro con l'oggetto della nostra analisi. Ebbene, a quanto possiamo vedere, i motivi di questo apparente imperativo categorico sono due.

Il primo, più vistoso ma più banale (e che speriamo non essere l'unico per qualcuno), sembra essere che Ulrich, il protagonista del racconto, è un matematico! E, sia detto per la gioia dei sostenitori della rilevanza della matematica nella letteratura, è presentato da Musil come un matematico importante, uno che – al momento in cui comincia la storia narrata nel libro – ha già pubblicato alcuni lavori che gli hanno dato una certa fama internazionale tra i colleghi studiosi.

Sorge allora spontanea la domanda: e con questo? Ne segue un particolare impatto della matematica, non diremo sulla letteratura nel suo complesso, ma sull'economia del libro e sul suo significato? Mastro Geppetto è un falegname, e questo è fondamentale nell'economia del racconto di Collodi [4], poiché, se fosse stato un ceramista, il suo Pinocchio sarebbe stato troppo fragile, e se fosse stato un pittore, Pinocchio sarebbe stato bidimensionale, e in ogni caso, troppo poco mobile. Ne concluderemo a favore dell'importanza della falegnameria nella letteratura? *Moby Dick* [13] si svolge tutto su una nave baleniera: ne inferiremo una particolare importanza per la letteratura dei metodi di caccia alla balena nel XIX secolo? Certo, se non fosse esistita questa attività, dove avrebbe trovato Melville la metafora giusta per l'ossessione della lotta al mostro gigantesco e apparentemente invincibile che adombra il destino dell'uomo? E comunque, si tratta di incontri rubati, momentanei, non possono – ovviamente – istituire un intreccio tra la letteratura e le attività descritte.

Si deve dire, in effetti, che la risposta più probabile alla precedente domanda sarà che l'aver attribuito a Ulrich la professione di matematico ha un profondo significato ed è destinata a suggerire un'importante chiave di lettura del libro (e si spera che a nessuno venga in mente di parlare *della* chiave di lettura). Questa affermazione va discussa, e lo sarà nella prossima Sezione. Ma, ammesso per il momento che essa sia vera, in analogia con quanto abbiamo osservato a proposito di Pinocchio [4] e Moby Dick [13] sui rapporti tra falegnameria (o baleneria) e letteratura, resta la domanda: questo incontro isolato tra matematica e letteratura, in questo particolare testo fra le migliaia e migliaia (almeno) che si annoverano nella letteratura mondiale degli ultimi due secoli basterà a gettare una luce significativa sulla relazione tra matematica e letteratura? E, più in generale, basterà contare e descrivere le apparizioni, anche limitate e momentanee, e ridotte a pura menzione, della matematica nei testi narrativi o poetici noti di ogni tempo e luogo per comprendere, o definire, l'importanza della matematica per la letteratura? Come vedremo nelle Sezioni 3 e 4, ci vuol ben altro, com'è stato convincentemente mostrato con grande chiarezza in [10,16].

Ulrich matematico: ha davvero importanza?

Chi si desse realmente la pena di leggere davvero *L'uomo senza qualità* (e prima di parlare di un'opera letteraria bisognerebbe sempre leggerla, o anche solo consultarne brani scelti a caso in vari punti) scoprirebbe – forse con sorpresa – che la professione matematica di Ulrich, contrariamente a quanto forse ci piacerebbe pensare, gioca un ruolo molto limitato nel complesso delle sue esperienze, che costituiscono il romanzo volutamente senza trama e senza evoluzione temporale, e quasi nessun ruolo nello sviluppo della sua analisi critica della vita e del suo senso. Ulrich nomina la matematica sei volte in tutto il libro (esclusi i frammenti che dovevano servire come base per completarlo), e perlopiù di sfuggita: una sola volta con vero trasporto; espone nozioni matematiche soltanto quando spiega a Gerda – in termini volutamente superficiali – la funzione della legge dei grandi numeri; nomina un teorema una sola volta in tutto il libro, nel capitolo 22 della Parte Terza, discutendo con la dottoressa Strastil, un'astronoma di sua conoscenza, di un'inesistente dimostrazione e di tre . . . matematici? fisici? filosofi? . . . altrettanto immaginari; dalle discussioni che di quando in quando affronta nel corso della sua vicenda, è sempre assente – anche solo come allusione – qualsiasi articolazione di un ragionamento da ipotesi a tesi; e, fortunatamente, non capita mai di leggere che pronunci la terribile, banalizzatissima frase «come volevasi dimostrare». Il suo essere un matematico (e, fatto non secondario, un matematico ampiamente rispettato e riconosciuto tra i suoi colleghi) si esplicita di rado, soprattutto nelle sue analisi introspettive, nei suoi intermittenti dialoghi con se stesso, e mai come metodo di pensiero, ma solo come dato di fatto, destinato a concorrere alla definizione precisa delle sue attitudini e dei suoi scopi. Ma nella definizione delle attitudini, quegli aspetti della matematica che ci sembrerebbero più caratteristici non si considerano mai.

Perché dunque Ulrich è un matematico? Senza dubbio, come vedremo meglio nella Sezione 3, dev'essere un personaggio dotato di cultura matematica, affinché gli sparsi riferimenti alla matematica nel testo, per quanto non numerosi (né profondi, per la verità) risultino dotati di un senso preciso. Ma probabilmente, al di sotto di questa, e per assicurare la coerenza delle scelte narrative, possiamo trovare un'altra ragione, forse più profonda. Esaminiamo il carattere e le condizioni di vita del personaggio. Sappiamo che è agiato, che non ha bisogno di lavorare per guadagnare, e gode della massima libertà nel decidere l'impiego del suo tempo. A dispetto del titolo che lo definisce, è ben lungi dall'esser privo di qualità, a anzi è intelligente e profondo, ma è disincantato nei confronti di persone e fatti, e – sebbene non privo di affettività – il costante esercizio del suo spirito critico particolarmente acuto lo rende estremamente cauto nel prendere decisioni e lento nel realizzarle. In quasi tutte le vicende nelle quali è coinvolto, nelle sue relazioni col mondo esterno, al di fuori dell'inevitabile isolamento che ogni lavoro puramente intellettuale comporta, egli è più uno spettatore che un attore. Più che un uomo senza qualità è (nella maggior parte dei casi, non sempre, e certamente sempre meno nello svolgimento della sua storia) un uomo privo di conseguenze: ma poiché le qualità di ogni oggetto dell'esperienza, vivente o no, si definiscono tramite le sue interazioni, la mancanza di conseguenze si traduce in mancanza di qualità.

Ora, qualcuno potrebbe sostenere che il precedente sintetico ritratto si attaglia con particolare precisione all'iconografia popolare del matematico come persona persa dietro le proprie fantasie e con la testa fra le nuvole, priva di ogni spirito pratico. Ma dovrebb'essere chiaro che ci sono differenze profonde tra questo prototipo e il personaggio di Ulrich come sopra descritto, e che perciò, mentre da un lato sarebbe offensivo nei confronti di Musil anche solo prospettare che egli abbia scelto per Ulrich quest'attività anche solo in parte per aderire a uno schema ritratto, dall'altro sarebbe grossolanamente ingenuo considerare in qualche modo «naturale» la corrispondenza tra l'essere matematico e l'essere Ulrich. È sin troppo evidente che tantissimi matematici, di qualsiasi livello, non somigliano ad Ulrich quasi in alcun modo, e che esistono individui caratterialmente molto simili a Ulrich che detestano la matematica. L'essere un matematico non è in alcun modo condizione necessaria né sufficiente per essere Ulrich. Associare la scelta di Musil per l'attività di Ulrich all'economia del racconto, ovvero a particolari obiettivi comunicativi, comincia a sembrarci perciò pretestuoso e pretensioso. Se proprio vogliamo trovare una spiegazione alla scelta di Musil del lavoro di Ulrich, dobbiamo proprio riflettere sulle condizioni iniziali di vita di quest'ultimo, condizioni che devono da un lato rendere necessari il suo ingresso nella società e la sua ricerca di «conseguenze» e dall'altro configurare lo sviluppo di questa ricerca e i risultati che essa può produrre. All'inizio della storia, Ulrich – che, come abbiamo visto, è agiato – non dev'essere un fannullone, ma svolgere un lavoro non remunerativo (per Musil è evidentemente necessario sottolineare che Ulrich non ha bisogno di lavorare per guadagnare), che semplicemente lo appaghi e metta in luce le sue vere qualità, che possano essere riconosciute da coloro che condividono i suoi interessi ma restino invisibili o scarsamente decifrabili in ambito sociale (e, si badi bene, specialmente all'interno della classe agiata, tradizionalmente considerata anche

colta, nella quale, non a caso, l'attività di matematico di Ulrich è del tutto ignorata e quasi mai nominata). Nessun'altra attività, per quanto intellettuale e altrettanto poco remunerativa della ricerca matematica svolta al di fuori dell'ambito accademico, avrebbe funzionato così bene: pittura, musica, scultura, letteratura, avrebbero comunque avuto, sulla società nella quale Ulrich va inserendosi da *emphoutsider* (come figlio di un senatore, non come matematico) un impatto percettibile. Occorreva un'attività «senza conseguenze» (apparenti) come il personaggio. Così se proprio vogliamo trovare nella scelta di Musil un messaggio riguardante la matematica, questo sarà proprio il riconoscimento della frattura tra «le due culture» nella società alto-borghese e aristocratica austriaca del primo Novecento, che peraltro Musil si guarda bene dal lamentare esplicitamente. Se ne serve, ma sembra non esserne affatto toccato. Il suo interesse è un altro: l'analisi filosofica, politica, sociale e, incidentalmente, economica della morente Austria imperiale, come vissuta da questo spettatore, che – avviandosi a farne parte come attore – deve scegliere che ruolo svolgervi; e, attraverso questa, la ricerca etica sulla vita dell'uomo nella società e quella sui rapporti tra razionalità e «istintività».

Musil e la matematica

In realtà, l'analisi precipuamente morale condotta da Musil nel suo libro [14] va ben aldilà dell'Austria, che serve solo, come si direbbe in un libro di matematica, «per fissare le idee» trattando una porzione di mondo che Musil conosce bene: è una ricerca sul posto dell'uomo del mondo, sul crollo delle convenzioni sociali spazzate via dal secolo XX (e dalla cosiddetta Grande Guerra), e su come queste convenzioni vadano sostituite, e soprattutto come si possa trovare un equilibrio tra l'individualità più ignara del mondo (rappresentata dall'assassino Moosbrugger e, a livelli meno intensi, da Clarisse e da Gerda Fischel), l'assoluta *soggettività*, e l'appartenenza al consorzio umano, costruendo un'*oggettività* che non si riduca al conformismo borghese del XIX secolo o alla morale religiosa («mistica»), e soprattutto ne eviti la rigidità, il cui risultato non può essere che l'asfissia.

È una ricerca estremamente attuale, che probabilmente resterà tale fino all'inevitabile implosione del capitalismo (o, in alternativa, all'estinzione del genere umano), ma soprattutto sembra costituire la base più solida per considerare Musil un imprescindibile esempio di interazione tra matematica e letteratura. A tal proposito, va anzitutto sottolineato che secondo Musil la vita umana, nel mondo che egli conosce e intende criticare attraverso la sua ironica narrazione, si svolge invariabilmente tra due poli: (1) la «soggettività», che può riguardarsi tanto come una sorta di culto dell'Io, dei suoi impulsi e dei suoi scopi, quanto come il rifiuto di valutarli «oggettivamente» alla luce degli schemi dettati dalla società (o dai diversi tipi di aggregazioni sociali e religiose), e (2) l'«oggettività», che è la razionalità tecnologica ed economica, ma anche ogni tipo di schema ideologico e di comportamento sociale codificato. Alla razionalità correttamente intesa spetta il compito di stimolare e regolare l'interazione dialettica di questi due opposti, che in troppi convivono ignorandosi e concedendosi reciproca-

mente spazi rigidamente definiti. E l'importanza della matematica per Musil è espressa nei capitoli 10 e 11 della Parte Prima del libro, che di fatto – sottilmente, allusivamente – raffrontano le capacità progettuali e le abilità matematiche degli ingegneri, tutte rivolte alla tecnica e al calcolo, con la pratica della matematica come studio di oggetti che essa stessa definisce e come strumento fondamentale del modo di pensare scientifico e del suo carattere autocorrettivo.

Ma, dopo questa sorta di dichiarazione d'amore per il metodo scientifico (principalmente, ma non solo, matematico) e questa risoluzione di dedicarsi alla matematica e alla fisica per conquistare, e possibilmente diffondere, la capacità di pensare, ogni esplicito riferimento a questo ruolo della matematica scompare dal libro, se non in un altro punto importante:

«Ma forse credo che fra un po' di tempo gli uomini saranno parte molto intelligenti e parte dei mistici. Forse avverrà che anche ai nostri giorni la morale si divida in queste due componenti. Potrei anche dire: in matematica e mistica. In miglioramento pratico e avventura ignota!» ([14], Parte terza, Capitolo 12)

Nell'*Uomo senza qualità*, la presenza della matematica è elusiva e fantomatica, e il fatto che essa abbia una valenza letteraria appare dubbio. Dobbiamo renderci conto che *L'uomo senza qualità* è un racconto molto speciale, anzi, più che un racconto, lo si potrebbe definire un saggio di filosofia morale sviluppato con molti esempi. Le vicende del libro sono perlopiù narrate alquanto brevemente, e quasi regolarmente commentate da lunghe digressioni sui temi psicologici e filosofici emersi dai comportamenti e dai dialoghi dei loro protagonisti. E questi temi sono tutti subordinati al problema filosofico che anima e motiva il libro, un problema al tempo stesso etico ed epistemologico, che potrebbe riassumersi così: come possiamo definire i limiti e le reciproche interazioni tra la nostra soggettività (impulsi, desideri, affetti) e l'oggettività (regole sociali e legge morale) per stabilire il modo migliore di vivere? Il mezzo per giungere all'obiettivo è l'esercizio della razionalità non limitata alla pura pratica. E in un paio di punti del romanzo (sopra citati), Musil allude al potere della matematica come forma più perfetta e generale di razionalità. In diverse occasioni (interviste, conversazioni, lettere) Musil esplicita ed argomenta questa tesi, ma nel romanzo se ne astiene. Così ogni connessione tra la matematica e il progresso del pensiero cui Musil ambisce sta più nella mente di coloro che interpretano la sua opera nel suo complesso che nel romanzo. Quando N. Engelhardt [8] descrive gli scopi e gli sforzi di Ulrich sostituendo sistematicamente la parola «matematica» alla parola «razionalità», fa una scelta personale, che non è in alcun modo conseguenza necessaria della lettura del libro.

Tutto ciò stabilito, o almeno ammesso in buona parte, riconosciamo che l'intervento della matematica nell'*Uomo senza qualità* si riduce a pura menzione. E questo ci riporta all'altro problema adombrato nell'introduzione: in quale prospettiva desideriamo discutere i rapporti tra matematica e letteratura?

Interazioni tra matematica e letteratura

Sembra dunque che non dobbiamo chiederci tanto se sia essenziale citare Musil come esempio capace di illustrare i rapporti tra matematica e letteratura, ma addirittura se ne valga la pena o se abbia senso. Più in generale, ha senso considerare in questa prospettiva tutti i testi nei quali alcune nozioni matematiche siano occasionalmente utilizzate come mezzi espressivi o anche semplicemente menzionate? O magari si faccia un occasionale riferimento alla matematica come oggetto di studio o di pratica da parte di qualche personaggio? Riterremo importante la matematica per Arthur Conan Doyle perché il professor Moriarty, genio del crimine avversario di Sherlock Holmes, era un fisico matematico autore di un celebre trattato, *Dinamica di un asteroide* [5]? Oppure per Michael Crichton, perché uno dei personaggi di rilievo del romanzo *Jurassic Park* [6] è il matematico Ian Malcolm, esperto di caos («chaotician»)? Certo, se ci va, possiamo applicarci (considerando soltanto narrativa e poesia, perché se includiamo anche la saggistica, di saggi sulla matematica ce ne sono ovviamente un'infinità) a fare un catalogo il più possibile completo dei testi letterari in cui la matematica compare a vario titolo, e magari a compilare una graduatoria: prima i testi nei quali si rappresenti il valore culturale della matematica secondo l'autore; poi quelli in cui si usino, all'occorrenza, metodi matematici, per quanto elementari, per risolvere problemi particolari (in *Guerra e Pace* [18], Tolstoj proponeva l'uso del linguaggio matematico delle funzioni per interpretare la storia dell'umanità); poi quelli in cui si usino similitudini e metafore matematiche; quindi quelli che narrano la biografia di qualche grande matematico (e che poi sono trasposti per il cinema, si vedano per esempio *A beautiful mind*, o *L'uomo che vide l'infinito* (*The man who knew infinity*) o *The imitation game*); infine, quelli che semplicemente menzionino la matematica un certo numero di volte, magari soltanto per far dire a un personaggio che a scuola la odiava, o per etichettarne un altro come «scienziato» soltanto perché conosce cinque cifre decimali di π . Ma cosa impariamo da questo? Con questa procedura si arriva soltanto alla banalizzazione. Come ha bene e molto opportunamente sottolineato G. I. Schini [16], quando uno scrittore (e, dualmente, un lettore) ha imparato una buona dose di matematica a livello scolastico, essa entra a far parte del suo linguaggio, e di conseguenza del suo modo di descrivere, e perciò di pensare, il mondo (e, dualmente, di comprenderne questa descrizione). Perciò, non dovrebbe meravigliarci, ma neppure esaltarci, il fatto che vi siano moltissimi scrittori che hanno studiato abbastanza matematica elementare da utilizzare occasionalmente metafore o descrizioni geometriche o aritmetiche, e che il nostro catalogo possa risultare sorprendentemente ricco. In conclusione, un'analisi approfondita dei rapporti tra matematica e letteratura sembrerebbe doversi concentrare su un diverso ordine di problemi: quanto la prima risulti – in quanto tale – elemento fondamentale della cultura umana nel suo complesso, e quanto la letteratura – considerando anche la saggistica – riesca ad esprimere questo carattere (ad esempio, nel romanzo *Noi* di E. Zamiatin [21], per quanto in una visione iperbolica e deformata, o nei libri di Zellini [22-24], volti a sottolineare e analizzare la costante interazione tra la nozioni di numero e di infinito e gli aspetti più profondi della riflessione filosofica e del sentire mistico dell'umanità); oppure quanto matematica e letteratura interagiscano di fatto nella realizzazione delle strutture dei testi, siano es-

si opere narrative oppure esposizioni didattiche o tecniche di risultati matematici (interessante a questo proposito, anche se rivolto soprattutto alla matematica che sta alla base dei nuovi strumenti di comunicazione, è il libro di A. Cappello [1]). Ancora una volta, qualche interessante passo su questa strada si trova in [16], dove – non a caso – i capitoli più interessanti sono quelli su Pirandello, Calvino, Sinisgalli e Saramago (ma anche le riflessioni su Orwell, Volponi e il presidente Lincoln meritano attenta lettura).

La bellezza della matematica e il rigore della buona letteratura sono due punti di contatto, ed anzi di mutua integrazione, che attendono ancora di essere esplicitati e completamente descritti.

Bibliografia

- [1] CAPPELLO, A. P.: *Matematica della letteratura*, Mimesis, Milano, 2021.
- [2] COLERUS, E.: *Du point à la quatrième dimension, ou La Géométrie pour tous*, Flammarion, Paris, 1992.
- [3] COLERUS, E.: *Mathematics for Everyman: From Simple Numbers to the Calculus (English Edition)*, Dover, New York, 2013.
- [4] COLLODI, C.: *Le avventure di Pinocchio. Storia di un burattino*, Einaudi, Torino, 2014.
- [5] CONAN DOYLE, A.: *The valley of fear*, Harper, London, 2016 (trad. it. Sherlock Holmes. La valle della paura, Newton Compton, Milano, 2015).
- [6] CRICHTON, M.: *Jurassic Park: A Novel*, Ballantine Books, New York, 2012 (trad. it. Jurassic Park, Garzanti, Milano, 2018).
- [7] D'AMBROSIO, U.: *Mathematics and Literature*, in A. White (a cura di), *Essays in Humanistic Mathematics*, Mathematical Association of America.
- [8] ENGELHARDT, N.: *Modernism, Fiction and Mathematics*, Edinburgh University Press, Edinburgh, 2019.
- [9] ENZENSBERGER, H. M.: *Der Zahlenteufel: Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben*, Carl Hanser, Munchen-Wien, 1997 (trad. it., Il mago dei numeri, Einaudi, Torino, 1997).
- [10] LOLLI, G.: *Matematica come narrazione*, Il Mulino, Bologna, 2018.
- [11] MAROSCIA, P., TOFFALORI, C., TORTORIELLO, F. S., VINCENZI, G. (eds.): *Letteratura e matematica. Analogie e convergenze*, UTET, Torino, 2016.
- [12] MAROSCIA, P., TOFFALORI, C., TORTORIELLO, F. S., VINCENZI, G. (eds.): *Letteratura e matematica. Spiragli d'infinito*, UTET, Torino, 2019.

-
- [13] MELVILLE, H.: *Moby Dick: or, the Whale*, Penguin Classics, London, 2015 (trad. it. *Moby Dick*, Feltrinelli, Milano, 2013).
- [14] MUSIL, R.: *Der Mann ohne Eigenschaften*, Penguin Random House Verlagsgesellschaft GmbH, Anaconda Verlag, Munchen, 2013 (trad. it., *L'uomo senza qualità*, Einaudi, Torino, 1972).
- [15] PLOTZ, H. (A cura di): *Imagination's Other Place: Poems of Science and Mathematics*, Crowell, New York, 1955.
- [16] SCHINI, G. I.: *Matematica e letteratura. Dalla Divina Commedia al Noir*, Collana AL1C3&B08, Egea, Milano, 2015.
- [17] SIETY, A.: *Mathématiques, ma chère terreur*, Hachette Littératures, "Pluriel", Paris, 2002 (trad. it. *Matematica, mio terrore. Alla scoperta del lato umano della matematica*, Salani, Milano, 2001).
- [18] TOLSTOIJ, L. N.: *Guerra e Pace* (trad. it.), Mursia, Milano, 1966.
- [19] TUBBS, R., JENKINS, A., ENGELHARDT, N. (eds.): *The Palgrave Handbook of Literature and Mathematics*, Palgrave Macmillan, New York, 2020.
- [20] WHITE, A. M. (ed.): *Essays in Humanistic Mathematics*, Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1993.
- [21] ZAMJATIN, E.: *Noi*, Oscar Mondadori, Milano 2020.
- [22] ZELLINI, P.: *Breve storia dell'Infinito*, Adelphi, Milano, 2021.
- [23] ZELLINI, P.: *Gnomon*, Adelphi, Milano, 1993.
- [24] ZELLINI, P.: *Numero e Logos*, Adelphi, Milano, 2010.

Le coniche: origine di una definizione

Conics: the origin of a definition

Carlo Maturo¹

Abstract

The study of a conic section requires a definition that characterizes it not only as an intersection line of two surfaces but also as a curve on a plane. The construction that we present below eludes the use of trigonometry and justifies, thanks to simple transformations, the link between the different elements that characterize the usual definitions of these curves.

Premessa

La natura geometrica delle ellissi, delle iperboli e delle parabole viene messa in luce dalle sezioni (intersezioni) di una superficie conica circolare con un piano².

Lo studio di una sezione conica richiede una definizione che la caratterizzi oltre che come *linea* intersezione di due superfici anche come *curva* su un piano.

A partire da Apollonio di Perga, per giungere al matematico di origine franco-belga G. P. Dandelin, le diverse costruzioni prese in considerazione, per definire queste curve, coinvolgono solo alcuni degli oggetti geometrici utili allo scopo; per esempio, nell'opera di Apollonio non compare il concetto di *direttrice*.

Quella che presentiamo di seguito elude l'uso della trigonometria e giustifica, grazie a semplici trasformazioni, il legame esistente fra i diversi elementi che caratterizzano le abituali definizioni di queste curve.

La sezione di una superficie conica circolare

Sia K una superficie conica circolare retta di vertice v e apertura ϑ , Π un piano che la interseca lungo una linea C , Σ una superficie sferica di centro o tangente sia a K che al piano Π .

¹carlomaturo@outlook.it - Miur.

²Escludiamo le sezioni con un piano che passa per il vertice della superficie.

Σ incontra Π in un punto f e K secondo una circonferenza Γ che ha per centro un punto c dell'asse. Il piano Ω che include Γ taglia il piano Π secondo una retta D . Il piano Φ , che contiene l'asse della superficie conica e passa per il punto f , è ortogonale sia al piano Ω che al piano Π . La retta A , comune ai piani Π e Φ , forma con l'asse della superficie conica un *angolo acuto* φ di vertice h ; A è ortogonale alla retta D in un punto s e risulta asse di simmetria della sezione conica che interseca in punti detti *vertici*.

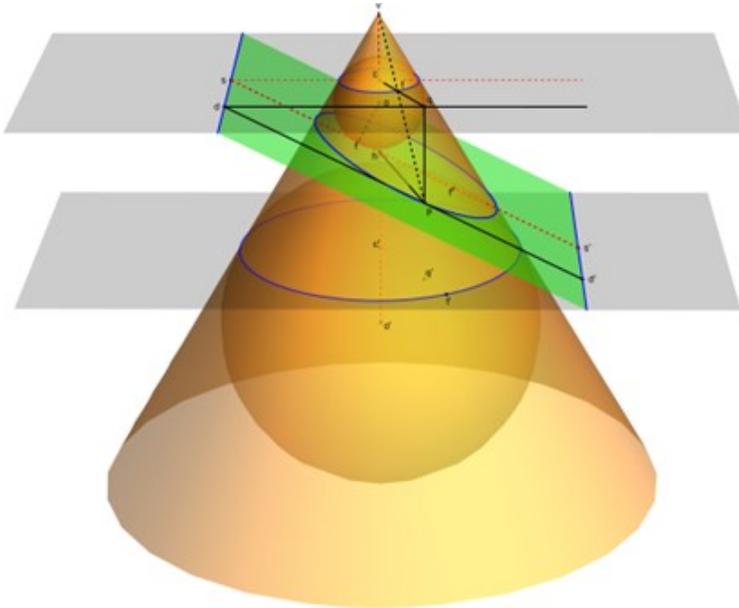


Figura 1: Immagine realizzata con Wolfram Mathematica

Indicato con p un punto generico di C , consideriamo due piani, di particolare interesse, che passano per questo punto:

- il piano Ψ parallelo al piano Φ : esso è ortogonale alla retta D in un punto d ;
- il piano Φ che contiene l'asse della superficie conica: esso interseca K lungo una generatrice che è tangente alla superficie sferica Σ in un punto t del cerchio Γ .

I piani Ψ e Θ non sono paralleli e risultano entrambi ortogonali al piano Ω ; la retta in comune non può che risultare ortogonale a quest'ultimo. L'intersezione di Ψ e Θ contiene la proiezione q di p sul piano Ω .

L'omotetia che ha centro sulla retta D e porta il punto d nel punto s , porta i punti q e p rispettivamente nei punti c e h . I triangoli rettangoli $\Delta(hcs)$ e $\Delta(pdq)$ sono omotetici, quindi

$$\frac{hc}{hs} = \frac{pq}{pd}$$

Al piano Θ appartengono le rette parallele pq e cv , nonché una loro trasversale, vp . L'omotetia di centro t che porta il punto v nel punto p , porta il punto c nel punto q . I triangoli rettangoli $\Delta(tvc)$ e $\Delta(tpq)$ sono omotetici, per cui risulta

$$\frac{vt}{vc} = \frac{pt}{pq}$$

Se si tiene presente che $pt = pf$, allora la costante $\varepsilon = \frac{vt}{vc} \times \frac{hc}{hs}$, detta *eccentricità* della conica, è uguale al rapporto $\frac{pf}{pd}$.

Siamo giunti a una proprietà che presa come definizione caratterizza la sezione conica come "curva" su un piano: *una conica è il luogo geometrico dei punti p del piano per i quali la distanza da un punto fisso f , detto fuoco, e la distanza da una retta fissata D , detta direttrice, stanno in un rapporto costante.*

Le diverse sezioni

La forma di una conica dipende dall'eccentricità, cioè dal rapporto $\frac{pt}{pd}$. Nei triangoli rettangoli $\Delta(pqt)$ e $\Delta(pqd)$, con il cateto pq in comune, tale rapporto è determinato dal confronto delle lunghezze delle rispettive ipotenuse o, ciò che è lo stesso, da quello delle ampiezze degli angoli θ e ϕ . Abbiamo:

$pt < pd$	$pt = pd$	$pt > pd$
$\varepsilon < 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon > 1$
$\vartheta < \phi$	$\vartheta = \phi$	$\vartheta > \phi$

Supponiamo che l'angolo ϑ sia minore dell'angolo ϕ .

In questo caso, il piano Π incontra tutte le generatrici di K . Le due superfici sferiche, tangenti sia a K che a Π , appartengono ciascuna a un semispazio di Π . La proprietà $\frac{pf}{pd} = \varepsilon$, dedotta ragionando con una delle due superfici sferiche, può essere dedotta ripercorrendo lo stesso ragionamento con l'altra; si tratta di sostituire la direttrice D con la direttrice D' , il fuoco f con il fuoco f' , ecc. Quindi, $\frac{pf'}{pd'} = \varepsilon$.

I punti d , p e d' sono allineati e p è interno al segmento dd' di lunghezza L costante³, donde l'equazione geometrica:

$$pf + pf' = \varepsilon L$$

che caratterizza l'*ellisse*. La grandezza εL esprime la distanza tra i vertici della conica che appartengono al tratto della retta A interno alla striscia determinata dalle due direttrici.

Analizziamo il caso in cui l'angolo ϑ è uguale all'angolo ϕ .

Il piano Π è parallelo a una delle generatrici che appartengono al piano Φ e quindi interseca tutte le generatrici della superficie conica tranne quella. Vi è una sola superficie sferica tangente sia a K che a Π .

³ L esprime la distanza fra le rette parallele D e D' .

I triangoli rettangoli $\Delta(hcs)$ e $\Delta(vct)$ risultano *simili*. Si ha $\frac{hc}{hs} = \frac{vc}{vt}$; ε assume il valore 1, la sezione conica prende il nome di *parabola*.

Sia l'ampiezza di ϕ minore di quella di ϑ .

Il piano Π incontra una parte delle generatrici della superficie conica su una falda, mentre delle altre incontra i prolungamenti sull'altra falda; la sezione consiste di due rami separati. Le superfici sferiche, tangenti sia a K che a Π , appartengono a falde diverse ma allo stesso semispazio di Π .

Il punto p è allineato con d e d' ma, a differenza dell'ellisse, è esterno al segmento che li unisce, quindi $L = |pd - pd'|$. L'equazione geometrica:

$$|pf - pf'| = \varepsilon L$$

definisce l'*iperbole*. La grandezza εL esprime la distanza tra i vertici della conica che appartengono ciascuno a una delle parti della retta A esterna alla striscia determinata dalle due direttrici.

Un caso particolare

Se ϕ è nullo, allora il piano Π è parallelo all'asse della superficie conica e ortogonale al piano Ω ; il rapporto $\frac{hc}{hs}$ si è ridotto all'unità e l'eccentricità a $\frac{vt}{vc}$. Se il triangolo rettangolo $\Delta(vct)$ è isoscele, l'iperbole si dice *equilatera*.

Bibliografia

- [1] ALEKSANDROV, A.D, KOLMOGOROV A.N., LAVRENT'EV M.A.: Le Matematiche, Boringhieri, 1977.
- [2] KLINE, M.: Storia del pensiero matematico, G. Einaudi Editore, 1999.
- [3] COURANT, R., ROBBINS H.: Che cos'è la Matematica? Boringhieri, 2020.

Rette, piani, pianeti

Lines, Planes, Planets

Sergio Savarino¹

Abstract

Here are some simple astronomical observations made with the naked eye or with the help of an amateur telescope or with the "Star Walk 2" application. Considerations are drawn from this on the Earth's rotation, on lines and planes, on their reciprocal positions in space.

Le osservazioni

Il cielo dell'estate 2020 è stato segnato dalla vicinanza (angolare) di Giove e Saturno. Poi, verso mezzanotte, compariva anche Marte. Tre pianeti, ben visibili, distribuiti su un grande arco in cui si percepiva il piano dell'eclittica. Giove e Saturno sono vicinissimi, ben visibili anche a occhio nudo sin dalle prime ore della sera, prima con Saturno in basso e Giove in alto, poi alla stessa altezza, poi con Saturno in alto e Giove in basso, come in Fig. 1, 2, e 3. Con il passar del tempo le posizioni reciproche cambiavano, nel modo detto prima.

Inoltre, osservazioni con un telescopio amatoriale (da 400 mm con una lente Barlow 2x), ripetute a intervalli, evidenziano cambiamenti nella distribuzione dei satelliti di Giove e degli anelli di Saturno secondo la stessa sequenza: da sinistra a destra prima crescente, poi parallela all'orizzonte, poi decrescente.

Giove e Saturno

Nelle Fig. 1, 2, 3 sono riportate rilevazioni dei due pianeti fatte da Roma (latitudine 42°). Si vede chiaramente come le rispettive posizioni cambiano nel tempo. Alle ore 20 Giove è più alto di Saturno sull'orizzonte dell'osservatore, dopo qualche ora sono quasi alla stessa altezza, poi Saturno è più alto di Giove.

¹Mathesis Roma, s.savarino@tiscali.it

Ore 20, ora legale, 7 settembre 2020. La linea da Saturno a Giove è crescente, da sini-stra a destra. Le freccette indicano i due pianeti.



Figura 1

Ore 22, ora legale, 7 settembre 2020. La linea da Saturno a Giove è quasi orizzontale.



Figura 2

Ore 23, ora legale, 7 settembre 2020. La linea da Saturno a Giove è decrescente



Figura 3

Le immagini di Fig. 1, 2 e 3 sono tratte dalla applicazione "Star Walk 2".

Una cosa del tutto analoga si osserva con gli anelli di Saturno e con i satelliti di Giove: Io, Europa, Ganimede, Callisto (i cosiddetti satelliti galileiani).

Ore 20. Ora legale, 7 settembre 2020 L'altezza di Saturno: 22°



Figura 4

Ore 22. L'altezza di Saturno: 26° .



Figura 5

Ore 23. L'altezza di Saturno: 25° . Elaborazione grafica GeoGebra.

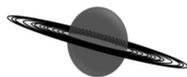


Figura 6

Ore 20. Altezza di Giove: 23° .

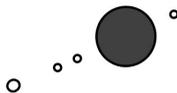


Figura 7

Ore 22. Altezza di Giove: 25° .



Figura 8

Ore 24. Altezza di Giove: 21° .

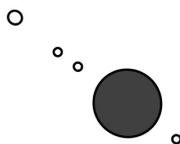


Figura 9

Osservazioni fatte con un telescopio (400 mm e lente Barlow 2x). Elaborazioni grafiche GeoGebra.

La cosa si spiega con il fatto che l'orizzonte dell'osservatore è inclinato rispetto al piano dell'eclittica, quello su cui ruotano "quasi" tutti i corpi del sistema solare.

La posizione dell'osservatore, e quindi il piano del suo orizzonte, cambia con la rotazione della Terra (Fig. 10, 11, 12).

Rette e piani

La percezione di oggetti nello spazio 3D non è mai scontata; perché non è possibile farne una chiara rappresentazione sul piano, perché facilmente si hanno illusioni ottiche, perché ci possono essere deformazioni prospettiche. Stelle e pianeti appaiono tutti alla stessa distanza dall'osservatore, tutti su un'unica volta celeste. E li vediamo ruotare, mentre è la Terra a farlo.

La percezione delle posizioni reciproche è diversa da un'ora all'altra, ed è fortemente influenzata dal fatto che l'osservatore terrestre si trova su una superficie sferica in rotazione.

Il piano dell'orizzonte è inclinato su quello dell'eclittica, con un angolo che dipende dalla latitudine dell'osservatore e dal momento dell'osservazione. Le figure seguenti (10, 11, 12) si riferiscono alle osservazioni di cui sopra, a latitudine 37° , e schematizzano le situazioni delle Fig. 1, 2, 3.

Giove si sta alzando sull'orizzonte dell'osservatore (puntino rosso). Saturno è sotto il piano dell'orizzonte, non è ancora visibile. Elaborazione grafica "Geogebra".

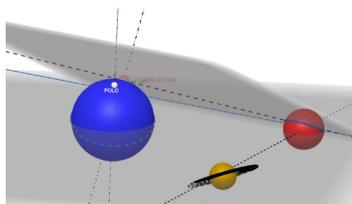


Figura 10

Giove è in culminazione, la linea immaginaria congiungente i due pianeti è quasi orizzontale, parallela allo spigolo del diedro “piano eclittica-piano orizzonte”. Elaborazione grafica “Geogebra”.

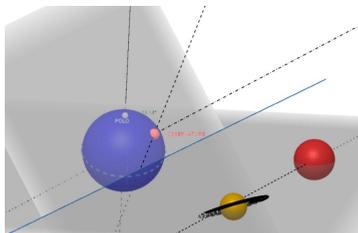


Figura 11

Giove è scomparso sotto il piano dell’orizzonte. Saturno è sul filo dell’orizzonte. Elaborazione grafica “Geogebra”.

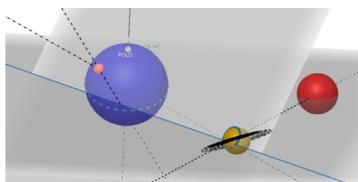


Figura 12

Considerazioni del tutto analoghe si possono fare sulle posizioni dei satelliti di Giove (Fig. 7, 8 e 9) e degli anelli di Saturno (Fig. 4, 5, 6).

I due piani, orizzonte ed eclittica, formano quello che nella geometria 3D si chiama “diedro”.

Due "rette" sono rilevanti: la congiungente Giove-Saturno e lo spigolo del diedro “orizzonte-eclittica”.

Sono sghembe, tranne quando Giove è in culminazione, in quel momento le due “rette” sono parallele. E la congiungente i due pianeti è parallela al piano orizzonte dell’osservatore.

Conclusioni

La percezione di oggetti e di configurazioni tridimensionali non è mai banale. La teoria della Gestalt ne ha studiato le difficoltà e i criteri organizzativi.

Lo studio, anche solo di pochi aspetti del sistema solare, pone subito qualche problema. Per es. un osservatore “ingenuo” si aspetterebbe che due pianeti abbiano sempre la stessa differenza di altezza e che i satelliti di Giove e gli anelli di Saturno fossero disposti sempre nello stesso modo rispetto all’orizzonte.

Osservazioni astronomiche, pur fatte con mezzi poveri, possono risultare formative: la percezione delle cose secondo diversi punti di vista, i piani e le rette nello spazio, la sfericità e la rotazione della Terra, lo sviluppo di una visione geometrica, una palestra per le rappresentazioni mentali tridimensionali.

Bibliografia

- [1] HERMANN, J.: Atlante di astronomia, Oscar Mondadori, 1975.

Un’analisi razionale sugli oroscopi: un esempio di educazione civica scientifica

A rational analysis on the horoscope: a scientific civic education example

Domenico Liguori¹ e Pasquale Barone²

Abstract

This work aimed to raise questions in students about the reliability of horoscopes and their pseudo-scientific nature. To this end, an analysis of the random nature of the horoscopes and the analogies with some characteristics of the random walk are carried out. This study is inserted in the context of interdisciplinary teaching of civic education, in accordance with the law no. 92 of 20 August 2019, in order to expand the educational offer of students and give them scientific tools for the reality and information analysis, and the choices they will make in their life.

Introduzione

Viviamo un’epoca dominata dalla tecnologia, ma è altrettanto vero che la cultura scientifica fatica a diffondere attraverso le nostre menti e soprattutto fra quelle dei giovani. I prodotti tecnologici sono alla portata di tutti, ma spesso si usano ignorando perfino le basi dei processi scientifici che li hanno partoriti. In un’epoca in cui il metodo scientifico troppo spesso viene sostituito dalla credulità e dalla superstizione, investire maggiormente sulla formazione scientifica dei giovani significa assicurare, per tutta l’umanità, un futuro migliore contribuendo a “... formare cittadini responsabili e attivi ed a promuovere la partecipazione piena e consapevole alla vita civica, culturale e sociale delle comunità... ”³.

¹mim_lig@alice.it - Liceo Scientifico “Stefano Patrizi” di Cariatì (CS).

²pasquale.barone@unical.it – Liceo Scientifico Linguistico Classico Statale “Enrico Medi” - Battipaglia (SA).

³Art. 1, comma 1, Legge 20 agosto 2019, n. 92: <https://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/2019/08/21/19G00105/sg>.

Come si può, quindi, in questa ottica prendere sul serio gli oroscopi e non dubitare della loro attendibilità? Con questo percorso si è cercato di fornire, agli studenti coinvolti, una serie di strumenti scientifici per rispondere in modo rigoroso a queste domande. Sul pubblico, l'astrologia riscuote un notevole successo ed in questo, purtroppo, viene aiutato anche dai canali di comunicazione. La vaghezza con cui vengono formulati gli oroscopi non è percepita dalla massa, gli astrologi fanno affermazioni vaghe oppure valide per tutti, nelle quali è facile riconoscersi e vedere rappresentata la propria situazione personale e questo viene confuso come predizione. Una analisi scientifica degli oroscopi può evidenziare tutte le contraddizioni presenti e l'abilità degli autori nel nasconderle attraverso l'utilizzo di un linguaggio vago studiato appositamente per colpire i meccanismi psicologici della percezione umana che tendono a selezionare, interpretare ed adattare, inconsapevolmente, anche solo una minima parte di ciò che si legge o si ascolta per poi crearne una falsa convinzione di veridicità⁴, [1]. Acuire la mente al senso critico ed abituarla al ragionamento rigoroso con l'utilizzo del metodo scientifico può e deve costituire il vaccino alla pandemia dell'ignoranza scientifica che dilaga ancora oggi. L'analisi statistica sugli oroscopi che viene qui proposta vuole essere un piccolo esempio in questa direzione ed inserito nell'ambito dell'insegnamento trasversale dell'educazione civica come educazione civica scientifica⁵.

Verifica statistica della natura casuale degli oroscopi

Per 44 giorni, sono stati somministrati ad un campione di 200 studenti i 12 oroscopi dello zodiaco facilmente reperibili su numerose riviste o più semplicemente in rete⁶. Ciascun profilo è stato privato dell'indicazione del segno zodiacale e contrassegnato da un codice che ne permette il riconoscimento in fase di analisi. Ogni partecipante è stato invitato ad indicare l'oroscopo che riteneva proprio comunicando il proprio segno zodiacale. Durante l'esperimento sono stati utilizzati fonti di oroscopi differenti allo scopo di avere un campione statistico dei dati più rappresentativo e non fortemente dipendente dalla singola fonte. I dati relativi all'esperienza condotta sono sintetizzati nella tabella I.

Partecipanti (n. alunni × n. giorni)	8800
Risposte corrette (casi in cui l'oroscopo selezionato coincide con quello del proprio segno zodiacale)	747
Risposte errate (casi in cui l'oroscopo selezionato non coincide con quello del proprio segno zodiacale)	8053

Tab.1: Dati dell'esperimento.

⁴<https://www.cicap.org/n/articolo.php?id=200263>

⁵<https://www.sif.it/static/SIF/resources/public/files/congr20/ri/Sapia.pdf>,
<https://www.cicap.org/n/articolo.php?id=274804>

⁶<http://www.gallito.eu/oroscopo-del-giorno/>

La teoria della probabilità [2] indica che estraendo a caso uno dei 12 segni si ottiene una frequenza teorica favorevole ad indovinare il proprio segno zodiacale pari a $p = 1/12$, corrispondente a circa l'8.3%, mentre la probabilità contraria è $q = (1 - p) = 11/12$ pari a circa il 91.7%. Con i dati del nostro esperimento (vedi tabella I), possiamo calcolare la frequenza sperimentale⁷, pS , delle risposte corrette come rapporto tra il numero delle risposte corrette ed il numero dei casi totali, quindi: $pS = 747/8800$ pari a circa l'8.5%. Il valore medio atteso (μ) ed il valore dello scarto quadratico medio⁸ (σ), [2,3], sono, rispettivamente, pari a

$$\mu = np, \quad \sigma = \sqrt{npq} \quad (3)$$

dove n è il numero dei partecipanti, p è la probabilità teorica favorevole e q quella contraria: $\mu = 8800 \cdot 1/12 = 733$ e $\sigma = \sqrt{(8800 \cdot 1/12 \cdot 11/12)} = 26$.

Il numero delle risposte corrette indovinate a caso, pertanto, può cadere nell'intervallo tra $\mu + \sigma$ e $\mu - \sigma$ che nel nostro caso risulta essere 733 ± 26 e la frequenza sperimentale, pS , è confrontabile con la probabilità p che gli eventi siano casuali. Possiamo, pertanto, affermare che gli eventi di risposte corrette dell'oroscopo rientrano nel puro ambito della casualità e che la statistica dimostra l'incoerenza e la non scientificità degli oroscopi evidenziando, invece, la loro natura puramente casuale ed ingannevole.

Il random walk

In questa esperienza ci siamo occupati anche dello studio di alcune caratteristiche del random walk, di seguito analizzate, per determinare delle eventuali analogie con il processo di associazione dei contenuti degli oroscopi alla propria personalità. Il random walk, noto anche come *passeggiata aleatoria* o *cammino dell'ubriaco*, è un processo stocastico a parametro discreto, nel quale si ipotizza che una variabile casuale (o aleatoria) X_t descriva la posizione assunta al tempo t da un punto in movimento. Nel caso di moto monodimensionale se immaginiamo che inizialmente il punto si trovi nella posizione $X_0 = 0$, al tempo $t = 1$ il punto può compiere un salto o in avanti (raggiungendo la posizione $X_1 = 1$) o all'indietro (raggiungendo la posizione $X_1 = -1$) con eguale probabilità pari ad $1/2$ per entrambi i casi e così via al variare di t perché la probabilità di andare avanti o indietro ai diversi tempi rimane costante e non dipende dai risultati precedenti. I valori della variabile X_t (cioè le possibili posizioni del punto al periodo t) rappresentano gli *stati del processo* e l'insieme dei possibili stati costituisce lo *spazio degli stati*. La successione delle X_t costituisce la traiettoria di questo processo stocastico, cioè una possibile traiettoria della passeggiata

⁷La *legge dei grandi numeri*, nota anche come *legge empirica del caso* o *teorema di J. Bernoulli*, ci assicura che all'aumentare del numero delle prove eseguite il valore della frequenza tende sempre più al valore teorico della probabilità.

⁸Per il teorema del limite centrale e nell'ipotesi che n sia grande a piacere, la distribuzione binomiale può essere approssimata da quella normale con media np e varianza $np(1-p)$. La regola operativa secondo la quale n deve essere grande abbastanza per avere $np \geq 5$ e $n(1-p) \geq 5$ (nel nostro caso con $n = 836$, $p = 1/12$ e $(1-p) = q = 11/12$ le suddette condizioni sono soddisfatte).

aleatoria. La distribuzione della variabile X_t può essere simulata con una macchina di Galton⁹, [4], e, all'aumentare di t , essa tende ad avere distribuzione normale. Il modello random walk viene applicato in diversi campi di ricerca: dalla descrizione fisica dei *moti browniani*^{10,11}, [5,6], ad applicazioni in campo economico ad esempio per lo studio dell'andamento dei prezzi^{12,13}.

Le variabili principali che caratterizzano il tipo di random walk sono: il passo del camminatore e la probabilità di spostamento nelle varie direzioni.

Il passo (Δx) può essere:

- discreto con lunghezza costante L , oppure variabile di passo in passo;
- continuo con lunghezza del passo distribuita casualmente.

Se la probabilità di spostamento nelle varie direzioni è sempre uguale il random walk si dice simmetrico, altrimenti è non simmetrico. Nel nostro esempio tratteremo un random walk discreto e simmetrico e attraverso delle simulazioni abbiamo cercato delle risposte alle seguenti domande:

1. Qual è la distanza media percorsa, dal punto di partenza, che ci si aspetta dopo N passi?
2. Qual è lo scarto quadratico medio dello spostamento che ci si aspetta in media dopo N passi?
3. Cosa si può dire sulla probabilità che un singolo camminatore si trovi ad una distanza x dal punto di partenza dopo N passi?

Consideriamo il caso di random walk monodimensionale, con passo costante L , in cui il moto può avvenire, a partire dalla posizione iniziale $x_0 = 0$, verso destra con probabilità p , oppure verso sinistra con probabilità $q = (1 - p)$ con $p + q = 1$ (condizione di normalizzazione). Nel caso simmetrico sarà $p = q = 1/2$. Dopo N passi la posizione x_N sarà data dalla somma algebrica dei singoli passi verso destra e sinistra ed in generale lo spostamento medio dopo N passi sarà:

⁹<https://www.asimmetrie.it/illuminazioni-testa-o-croce>

¹⁰I moti browniani furono descritti per la prima volta, nel 1827, dal naturalista inglese Robert Brown osservando il comportamento casuale di corpuscoli, ad esempio dei granelli di polline, in sospensione su dell'acqua. La teoria del moto browniano proposta da Einstein nel 1905 (<http://www.massimobanfi.it/Sito/fisicamatematica/maturita/Studio%20del%20moto%20Browniano.pdf>), [5], divenne poi una fondamentale conferma del modello atomico e molecolare della materia e quindi una dimostrazione indiretta dell'esistenza degli atomi indirizzando la fisica a non considerare soltanto fenomeni di tipo deterministico.

¹¹<http://www.fisica.unipg.it/~luca.gammaitoni/fisen/Document/Boffetta-Vulpiani-Cap4-MotoBrowniano.pdf>,

<https://viaggionellascienza.it/materia/fisica/einstein-e-il-moto-browniano/>,

<http://www.massimobanfi.it/Sito/fisicamatematica/maturita/Studio%20del%20moto%20Browniano.pdf>

¹²In base a questo modello vi è uguale probabilità che la variazione dei prezzi nel tempo sia positiva o negativa per cui le fluttuazioni del prezzo delle azioni, le quali compiono una serie di movimenti aleatori, possono salire o scendere, ma in media oscilleranno intorno al punto di partenza.

¹³<https://www.startingfinance.com/approfondimenti/nascita-finanza-moderna-fisica/>

$$\langle x_N \rangle = N_+L + N_-(-L) = NL(p - q) \quad (4)$$

Dove N_+ ed N_- rappresentano, rispettivamente, il numero medio di passi verso destra e sinistra (tutti indipendenti tra di loro) con $N_+ = Np$, $N_- = Nq$ e $N_+ + N_- = N$. Si può dimostrare¹⁴, invece, che la varianza può essere scritto nella seguente forma:

$$\langle (\Delta x_N)^2 \rangle = \langle x_N^2 \rangle - \langle x_N \rangle^2 = 4pqNL^2 + [NL(p - q)]^2 \quad (5)$$

Risulta immediato verificare che nel caso di random walk simmetrico con $p = q = 1/2$ la (2) e la (3) diventano:

$$\langle x_N \rangle = 0 \quad (6)$$

e

$$\langle (\Delta x_N)^2 \rangle = NL^2 \quad (7)$$

Le equazioni (4) e (5) mostrano la regolarità e la caratteristica di questo tipo di random walk analizzato. Lo spostamento medio è nullo rispetto alla posizione di partenza, mentre lo spostamento quadratico medio (la varianza) è proporzionale al numero di passi (vedi figura 4). Quindi la radice della distanza quadratica media (deviazione standard) cresce con la radice del numero di passi e non con il numero di passi come in un cammino ordinato sulla stessa direzione. Questo risultato, inoltre, ricorda quello trovato da Einstein¹⁵ nella sua formulazione del modello del moto browniano [5,6] in cui lo spostamento quadratico medio dipende linearmente dall'intervallo di tempo entro cui la particella compie i suoi "passi" nel moto browniano.

Consideriamo un random walk monodimensionale e simmetrico, con passo costante $L = 1$, che parta dalla posizione iniziale zero, quindi con probabilità $P = 1$ di essere in $x = 0$ all'inizio della camminata. Dallo schema riportato nella figura 1 si evince che al passo 1 ci possiamo trovare o nella posizione $x = 1$ o in quella $x = -1$, a seconda se ci siamo mossi verso destra o verso sinistra, con entrambe le probabilità pari ad $1/2$. In questo caso è impossibile ($P = 0$) ritrovarsi nella posizione $x = 0$. Al passo 2 le posizioni possibili sono $x = -2$, $x = 0$ oppure $x = 2$ con le rispettive probabilità $P = 1/4$, $P = 2/4$ e $P = 1/4$. Lo schema può essere interpretato notando che le posizioni estreme, ad un certo passo, sono raggiungibili da una sola posizione

¹⁴<https://math.stackexchange.com/questions/285377/null-recurrence-of-a-random-walk>,
<https://medium.com/swlh/random-walk-a-comprehensive-illustration-aa13373830d1>,
<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.59.8014&rep=rep1&type=pdf>

¹⁵Nella sua teoria sul moto browniano [5,6], Einstein ricava la seguente equazione per la diffusione, in un liquido, di particelle sospese: $P(x, t) = \sqrt{1/(4\pi Dt)}e^{-x^2/(4Dt)}$ con deviazione standard (scarto quadratico medio) $\sigma = \sqrt{2Dt}$, dove D rappresenta il coefficiente di diffusione. La distribuzione di probabilità delle particelle in moto browniano è gaussiana con spostamenti che hanno un valore quadratico medio proporzionale alla radice quadrata di t che, in questo caso, rappresenta il tempo tra due urti consecutivi quindi simile al passo del random walk, nell'ipotesi di un tempo t discreto e più piccolo del tempo di interazione tra le stesse particelle in sospensione.

del passo precedente, mentre le altre sono raggiungibili dalle posizioni precedente e seguente del passo precedente. Ad esempio la posizione $x = 0$ al passo 2 è raggiungibile sia dalla posizione $x = -1$ che dalla posizione $x = 1$ del passo 1. Nel primo caso la probabilità di essere nella posizione x ad un dato passo è data dalla probabilità della posizione precedente moltiplicata $1/2$ mentre negli altri casi bisogna prima sommare le probabilità delle due posizioni, al passo antecedente, che contribuiscono a raggiungere la posizione x al nuovo passo e poi moltiplicare per $1/2$. Ad esempio la probabilità di essere in $x = 3$ al passo 3 è $P_3(3) = 1/4 \cdot 1/2 = 1/8$ cioè $P_2(2) \cdot 1/2$ (la probabilità di essere in $x = 2$ al passo 2 per la probabilità di spostarsi a destra che è pari ad $1/2$) mentre la probabilità di essere in $x = 1$ al passo 3 è $P_3(1) = (2/4 + 1/4) \cdot 1/2 = 3/8$ cioè $P_2(0) \cdot 1/2 + P_2(2) \cdot 1/2$ (la probabilità di essere in $x = 0$ al passo 2 moltiplicata per la probabilità di andare verso destra, pari ad $1/2$, sommata alla probabilità di essere in $x = 2$ al passo 2 moltiplicata per la probabilità di andare verso sinistra, in questo caso pari sempre ad $1/2$).

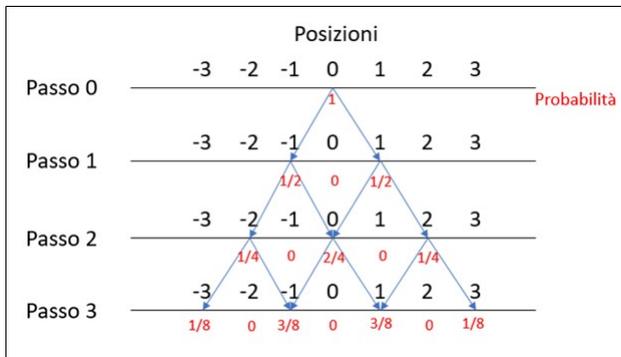


Figura 1: Schema del random walk monodimensionale simmetrico. Da notare la somiglianza del triangolo di Tartaglia al triangolo formato con i valori delle probabilità relative ad ogni posizione raggiunta nel random walk. In questo caso, però, ogni riga è moltiplicata per il fattore $1/2$ e tra due valori successivi, su ogni riga, c'è sempre uno zero.

Generalizzando, quindi, avremo:

$$P_{N+1}(x) = P_N(x-1)p + P_N(x+1)q \quad (8)$$

ed applicando la (6) in modo ricorsivo si ottiene¹⁶:

$$P_N(x) = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} + \frac{x}{2}\right)! \left(\frac{N}{2} - \frac{x}{2}\right)!} p^{\frac{N}{2} + \frac{x}{2}} q^{\frac{N}{2} - \frac{x}{2}} \quad (9)$$

¹⁶<https://medium.com/swlh/random-walk-a-comprehensive-illustration-aa13373830d1>,
<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.59.8014&rep=rep1&type=pdf>,
<https://slideplayer.com/slide/4515153/>

che nel limite di N molto grande e per probabilità uguali, permette di ricavare (con l'ausilio dell'approssimazione di Stirling¹⁷) l'espressione della distribuzione di probabilità valida nel caso del random walk simmetrico semplice¹⁸:

$$P_N(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} e^{-\frac{x^2}{2N}} \quad (10)$$

ovvero una gaussiana centrata intorno alla posizione di partenza con varianza pari ad N , che si allarga quindi all'aumentare di N (vedi figura 4). Anche in questo caso la (8) ricorda l'equazione di diffusione ricavata da Einstein nella sua teoria del moto browniano [5,6].

La figura 2 mostra una simulazione, per il random walk monodimensionale simmetrico, dell'andamento del quadrato della posizione finale al variare del numero di passi effettuati. Nel nostro caso la posizione iniziale è $x = 0$. Si nota che al variare del numero dei passi la variazione delle posizioni (distanza totale percorsa) varia in funzione della radice quadrata del numero N di passi o, come illustrato nella figura 2, il quadrato della distanza percorsa varia linearmente come il numero N dei passi compiuti. La figura 3 mostra che la distribuzione delle posizioni finali è gaussiana come previsto dalla (8). Questo non significa che ci troviamo sempre nella posizione $x = 0$, ma che la distribuzione di probabilità di trovarci in un punto qualsiasi è centrata in $x = 0$ e che questa distribuzione di probabilità si allarga con l'aumentare del numero di passi N . La figura 4, infatti, mostra come la varianza cresce linearmente con il numero dei passi N , in accordo con l'equazione (8). In questo caso, quindi, la distanza totale percorsa, mediamente dopo N passi, è proporzionale a \sqrt{N} . A parità di distanza percorsa, quindi, in condizioni di random walk occorrono N^2 passi e non soltanto gli N che occorrerebbero in caso di moto rettilineo orientato sempre nella stessa direzione. In altre parole, se immaginiamo che un ubriaco (il cui moto sarà un random walk che, per semplicità, assumiamo essere monodimensionale e simmetrico) e un passeggiatore sobrio (il cui moto è rettilineo sempre nella stessa direzione) debbano andare da un punto A ad un punto B con lo stesso passo, se quest'ultimo impiegherà ad esempio 100 passi l'ubriaco ne dovrà fare mediamente 10000.

¹⁷<https://mathworld.wolfram.com/RandomWalk1-Dimensional.html>,
https://it.wikipedia.org/wiki/Passeggiata_aleatoria,
<https://www.youmath.it/domande-a-risposte/view/5399-formula-di-stirling.html>,
<https://www.matematicamente.it/forum/una-dimostrazione-elementare-della-formula-di-stirling-t107369.html#p705979>

¹⁸<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.59.8014&rep=rep1&type=pdf>,
<https://slideplayer.com/slide/4515153/>.

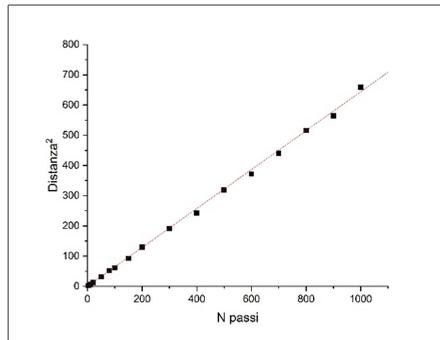


Figura 2: Andamento del quadrato della distanza in funzione del numero N dei passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk monodimensionale e simmetrico.

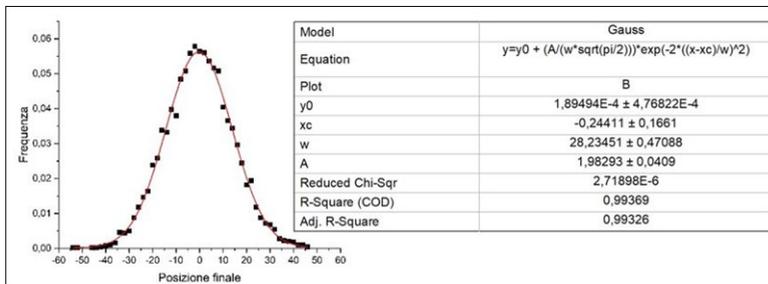


Figura 3: Distribuzione delle posizioni finali dopo 200 passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk monodimensionale e simmetrico.

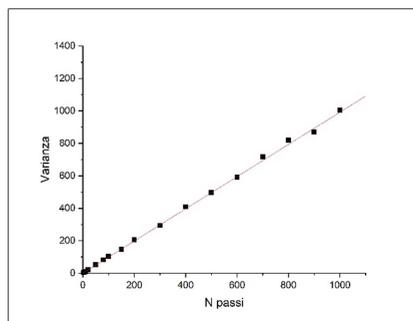


Figura 4: Dipendenza lineare della varianza dal numero N di passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk monodimensionale e simmetrico.

Lo stesso algoritmo di simulazione¹⁹ è stato adattato al caso di due e tre dimensioni. I risultati sono sintetizzati nelle figure 5, 6 e 7 per il random walk simmetrico in due dimensioni e nelle figure 8, 9 e 10 per quello tridimensionale. Come si può vedere dai grafici le proprietà suddette rimangono inalterate: il quadrato della distanza percorsa è una funzione lineare del numero di passi N e le distribuzioni finali delle coordinate x , y e z sono gaussiane con varianza direttamente proporzionale al numero dei passi N .

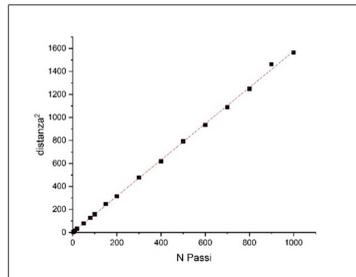
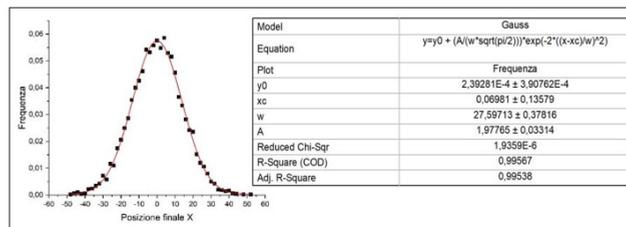
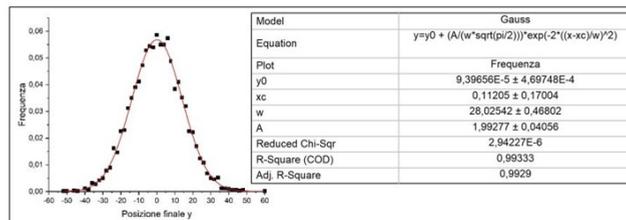


Figura 5: Andamento del quadrato della distanza in funzione del numero N dei passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk bidimensionale e simmetrico.



(a)



(b)

Figura 6: Distribuzione delle posizioni finali x ed y dopo 200 passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk bidimensionale e simmetrico

¹⁹L'algoritmo utilizzato in tutte le simulazioni crea le coordinate degli spostamenti (x , y e z) in modo random con possibilità discreta di movimento in avanti (+1) ed indietro (-1).

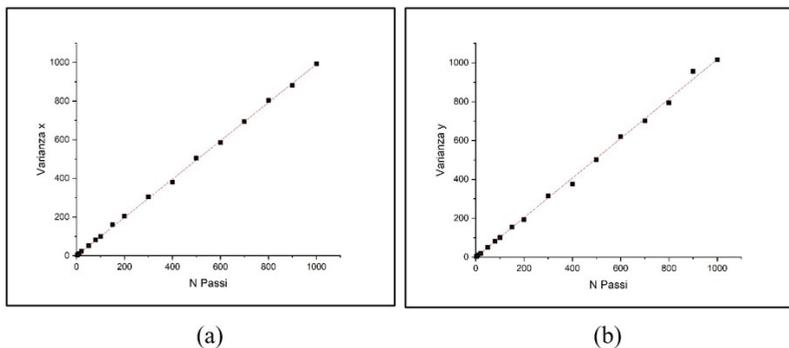


Figura 7: Dipendenza lineare della varianza di x e di y dal numero N di passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk bidimensionale e simmetrico.

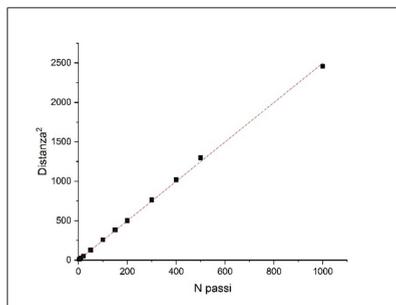
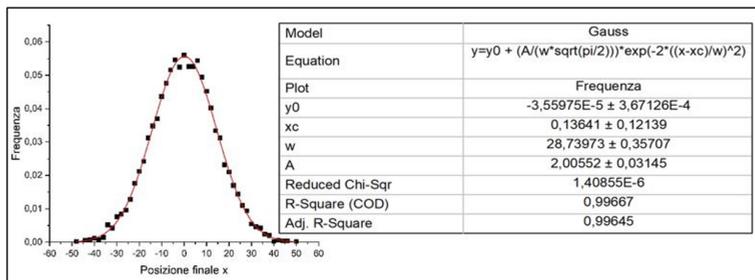
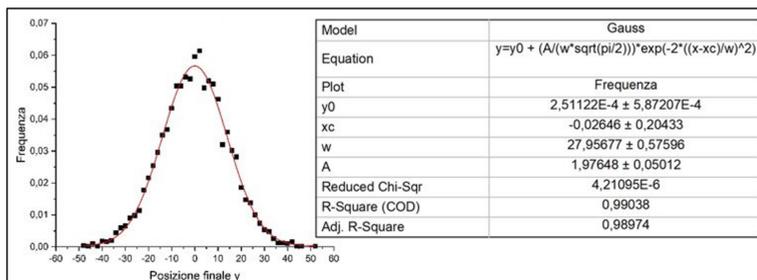


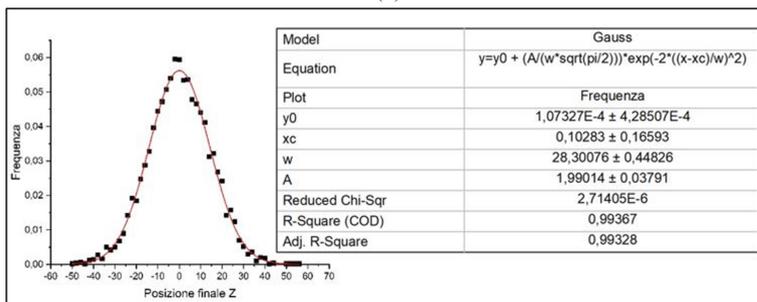
Figura 8: Andamento del quadrato della distanza in funzione del numero N dei passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk tridimensionale e simmetrico.



(a)



(b)



(c)

Figura 9: Distribuzione delle posizioni finali x , y e z dopo 200 passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk tridimensionale e simmetrico.

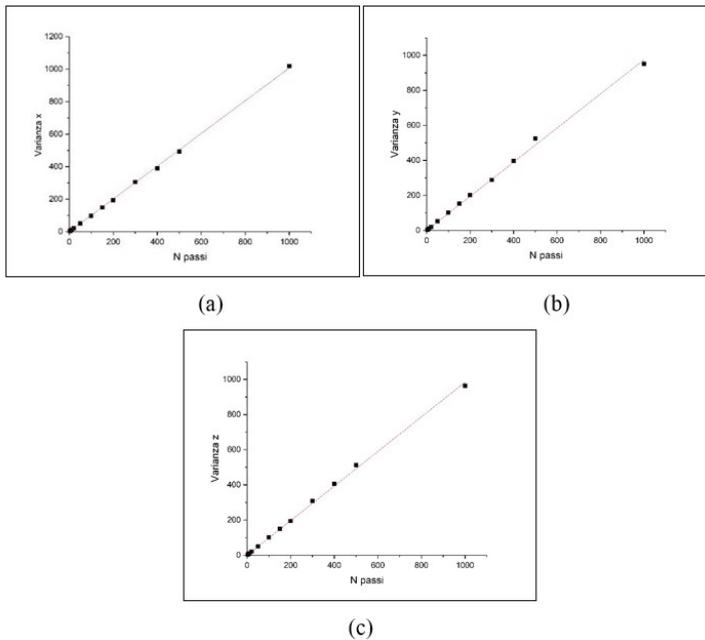


Figura 10: Dipendenza lineare della varianza di x , y e di z dal numero N di passi. Dati mediati su 5000 cicli di simulazione per un random walk tridimensionale e simmetrico

Gli oroscopi come random walk

Come seconda verifica della natura casuale degli oroscopi è stato studiato il random walk per determinare delle eventuali analogie nel processo di associazione dei contenuti degli oroscopi alla propria personalità.

Consideriamo un dodecagono ai cui lati vengono associati i dodici segni dello zodiaco (vedi figura 11). Nella prima parte ogni studente, dei 200 partecipanti a questa esperienza, ha generato una sequenza di 44 oroscopi (una scelta al giorno) ritenuti attribuibili alla propria personalità. Se numeriamo i segni zodiacali da 1 a 12 avremo 200 sequenze di 44 valori, compresi tra 1 e 12, corrispondenti alle scelte personali di ciascun alunno. Adesso si procede centrando il dodecagono nell'origine di un sistema di assi ortogonali cartesiani con il punto medio del lato 1 sull'asse delle ascisse. Per comodità il dodecagono viene costruito con l'apotema (altezza dei dodici triangoli isosceli che compongono il dodecagono) pari ad una unità. I dodici angoli al centro sono pari a 30° ciascuno. Il percorso, derivante dalle scelte degli oroscopi, viene costruito spostando di volta in volta il centro del dodecagono sul punto medio del lato corrispondente allo zodiaco selezionato. Se, ad esempio, uno studente riconosce come proprio oroscopo il numero 2, 10 e 7 in tre tentativi diversi su tre panieri di 12 oroscopi diversi (nel nostro caso una scelta al giorno), il percorso che ne deriva si costruisce unendo i punti O, A, B, C. Il punto O coincide con l'origine degli assi, il punto A con

il punto medio del lato 2. Si centra il dodecagono, senza cambiarne l'orientamento, sul punto A e il punto medio del lato 10 diventa il punto B. Si centra nuovamente il dodecagono, senza cambiarne l'orientamento, sul punto B e il punto medio del lato 7 diventa il punto C. Si procede in questo modo fino a completamento della sequenza.

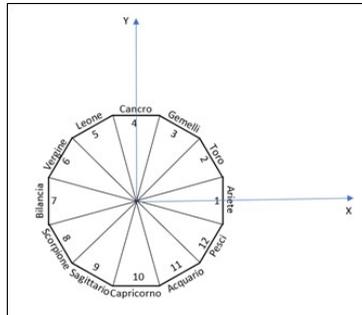


Figura 11: Dodecagono con l'associazione dei segni dello zodiaco.

La distanza d del punto finale della sequenza dal centro degli assi (punto di partenza) può essere calcolata come:

$$d = \sqrt{(x_{tot})^2 + (y_{tot})^2} \quad (11)$$

Dove x_{tot} ed y_{tot} rappresentano le componenti della posizione finale (rispetto all'origine degli assi), rispettivamente sull'asse x ed y , ottenuti come somma algebrica dei singoli spostamenti che compongono tutta la sequenza del percorso. Se il lato interessato è l' n -esimo si può verificare che $x_n = \cos[30(n-1)]$ ed $y_n = \sin[30(n-1)]$. Gli angoli sono misurati in senso antiorario rispetto al semiasse positivo delle ascisse. Utilizzando i dati raccolti in precedenza sono state create 200 sequenze, una per ogni studente partecipante, di 44 passi ciascuna. La figura 12 riporta l'andamento del quadrato della distanza in funzione del numero N di passi mentre le figure 13a e 13b mostrano le distribuzioni delle coordinate x ed y dopo 44 passi, mediati su 200 sequenze.

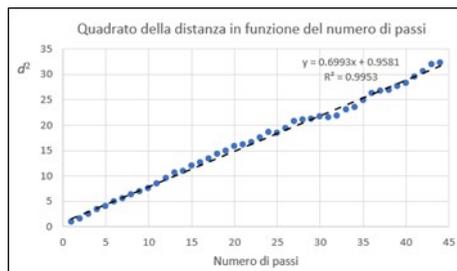


Figura 12: Linearità tra il quadrato della distanza ed il numero dei passi con i dati reali, 200 sequenze da 44 passi.

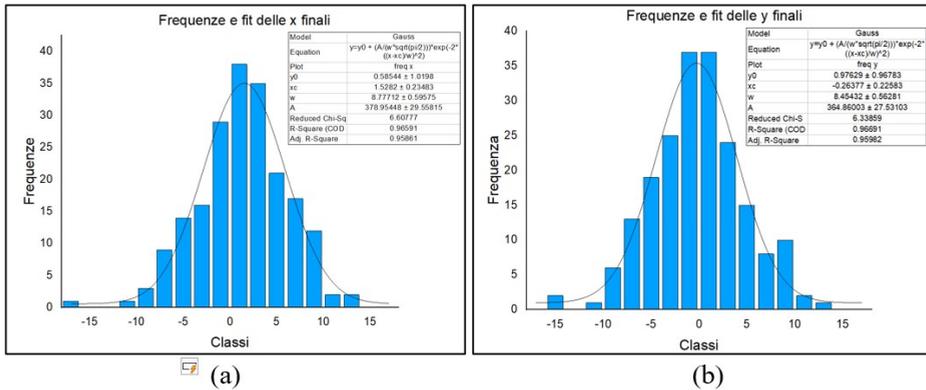


Figura 13: Distribuzione delle posizioni x ed y finali ricavati con l'algoritmo del do-decagono applicato ai dati reali, 200 sequenze da 44 passi.

La figura 14 mostra, invece, un grafico a dispersione delle posizioni x ed y . Ogni punto su questo grafico rappresenta una posizione finale a distanza d dall'origine, di coordinate x ed y , al 44-esimo passo per ognuno delle 200 sequenze (una per alunno). La figura mostra un addensamento centrale le cui dimensioni dipendono dalla deviazione standard delle distribuzioni di x e di y (vedi figure 13a e 13b).

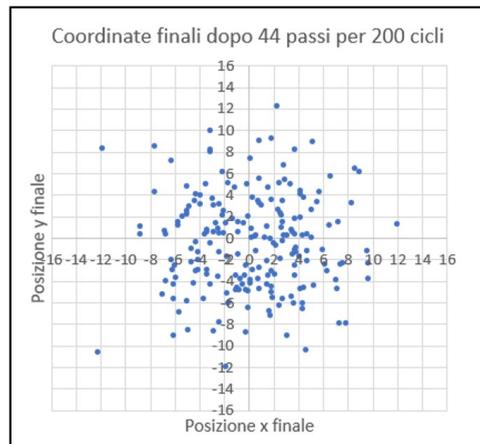


Figura 14: Coordinate x ed y finali dopo 44 per tutti i 200 cicli. La distanza di ogni punto dall'origine rappresenta la distanza finale percorsa dopo 44 passi. Si può dimostrare che al crescere del numero di passi aumenta il numero di volte che si ripassa dal punto di partenza.

Conclusioni

L'andamento lineare del quadrato della distanza in funzione del numero N dei passi, illustrato in figura 12 e l'andamento gaussiano, evidenziato dal fit della distribuzione dei dati x ed y nelle figure 13a e 13b, mostrano un accordo con le caratteristiche del random walk bidimensionale analizzato in precedenza (vedi figure 5, 6a e 6b). Possiamo quindi concludere che il processo di associazione dei contenuti degli oroscopi alla propria personalità, analizzato con l'algoritmo del dodecagono come descritto in questo lavoro, è del tutto casuale e del tipo random walk. Il metodo sperimentale e gli strumenti di analisi scientifica hanno permesso, a tutti gli studenti partecipanti al progetto, di verificare, sperimentare e rendersi conto dell'inattendibilità degli oroscopi. Questo percorso ha dato la possibilità anche di riflettere su quanto i fenomeni pseudoscientifici siano divaganti, diffusi e di come attecchiscano facilmente nell'immaginario collettivo rafforzando, così, la propria percezione di veridicità. Costatare con gli studenti che questi fenomeni potranno essere contenuti e combattuti solo investendo sulla cultura scientifica e sull'educazione dei giovani al dubbio scientifico, ha rappresentato il miglior successo formativo che questo percorso di educazione civica scientifica sperava di ottenere.

Bibliografia

- [1] LIGUORI D. et al. "Progetto interdisciplinare: Scienza e Profezia", Giornale di Astronomia, F. Serra Vol. 38 n°4 dicembre 2012.
- [2] TAYLOR, J. R., "Introduzione all'analisi degli errori", Zanichelli, Bologna (1986).
- [3] LIGUORI, D., SERAFINI G.: "Fisica in Laboratorio" (Editoriale Progetto 2000, Cosenza) 2009.
- [4] LIGUORI D.: "La statistica con la macchina di Galton", La Fisica nella Scuola, Anno XLVII n°4, Ott.- Dic. 2014.
- [5] STACHEL J.: "L'anno memorabile di Einstein", Edizione Dedalo, pp. 97-109, Bari (2001)
- [6] Annalen der Physik, 17, 1905, pp. 549-560

Matematica e Musica: una piacevole sinfonia¹

Mathematics and Music: a pleasant symphony

Nicola Fusco²

Abstract

In the 2020/2021 school year, in the first class of the Liceo Scientifico “A. Scacchi” in Bari with a specialization in Mathematics, an intertwined path between Mathematics and Music has developed. The pupils initially followed, in laboratory mode, the path of the Pythagorean construction of the musical scale, through analysis and comparisons on musical pieces chosen ad hoc and through the construction of a “sound box” which, with poor material, reproduces the monochord of Pythagoras. We then moved on to creative interweaving: geometric transformations and the basics of substitute cryptography were presented, concepts used later to generate or vary phrases on scores. In groups, pupils composed completely original pieces using these mathematical tools and their creativity.

Presentazione

Il progetto di cui parleremo nasce per mettere in evidenza il legame tra la Matematica e la Musica: la Matematica come strumento per conoscere meglio la Musica e la Musica come laboratorio per la Matematica. Si è costruito un percorso che ha oscillato tra Matematica, Musica e Fisica per mostrare la Matematica non fine a sé ma dialogante con le altre discipline. Il seguente quadro sinottico riassume gli argomenti che sono stati affrontati.

¹*Per questo articolo all'autore è stato assegnato il premio Bruno Rizzi 2022.*

²Docente di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico “A. Scacchi” di Bari (BA), nicola.fusco@gmail.com, fusco.nicola@liceoscacchibari.it.

Musica	Matematica	Fisica
Le note e la scala dodecafonica	Prodotto e potenza di frazioni	Le onde in un oggetto elastico
Il timbro degli strumenti musicali	Suddivisione in parti uguali di un segmento	La frequenza fondamentale e gli armonici superiori delle onde stazionarie
La notazione musicale sul pentagramma	Le trasformazioni geometriche, la crittografia per sostituzione	I grafici orari

Il progetto ha coinvolto una classe prima di Liceo Scientifico ad Indirizzo Matematico, composta da 24 alunni, di cui circa la metà studiava uno strumento musicale o lo aveva fatto nel recente passato, ed è stato integrato completamente nel curricolo didattico della classe, svolto con una calendarizzazione di due ore settimanali in orario antimeridiano con il docente di Matematica e Fisica della classe.

L'attività è iniziata con la classe in presenza ma, con il procedere delle condizioni sanitarie regionali, la classe ha finito per seguire completamente a distanza. Le attività non ne hanno comunque risentito in quanto si è riusciti a svolgere le attività manuali anche da casa (grazie alla scelta dei materiali poveri) mentre la parte finale prevedeva l'utilizzo di software e quindi questa fase è stata facilitata dall'accesso degli alunni ai propri PC. La distanza non ha penalizzato l'aspetto laboratoriale dell'attività, anzi sono stati valorizzati il lavoro individuale e l'interazione interna ai gruppi.

Passo 1: le note e le corde

L'attività è iniziata con l'ascolto di un brano musicale³ e successivamente la classe è stata stimolata a riflettere e rispondere alle seguenti domande:

- Perché l'acqua del pesce rosso vibra quando la chitarrista si avvicina?
- Perché il violino e la chitarra sembrano suonare bene insieme anche se emettono suoni molto diversi tra loro?
- Che legame può esserci tra matematica e musica?

Gli studenti si sono confrontati sulle domande e le risposte che ognuno di loro ha elaborato. Quasi tutti hanno messo in relazione l'evento del pesce rosso (la cui acqua inizia ad agitarsi all'avvicinarsi della chitarrista) con l'emissione del suono, sebbene nessuno abbia parlato di onde. Anche riguardo alla seconda domanda la classe si è ritrovata concorde nel giustificare l'armonia dei suoni perché gli strumenti suonavano le stesse note. Ma a questo punto è sorta un'altra domanda: cosa significa suonare la stessa nota? La risposta a questa domanda è stata rinviata al passo successivo del progetto. La terza domanda ha lasciato tutti un po' spiazzati, nessuno ha dato delle risposte sicure, solo qualcuno ha ipotizzato un collegamento tramite il ritmo o la metrica musicale. L'attività è proseguita con la costruzione di una "scatola sonora" con materiale povero: scatola da scarpe, elastici di gomma e nastro adesivo⁴.

³“Canon Rock” di Jerry Chang, nella versione punk della band Golden Salt <https://tinyurl.com/canonrockGS>.

⁴Video tutorial: <https://tinyurl.com/scatolasonora>.



La classe al lavoro sulla scatola sonora, a scuola e a casa.

In prima battuta, avendo fatto tagliare gli elastici a lunghezze diverse, la scatola è stata utilizzata per fissare il lessico: in particolare la distinzione tra suoni acuti e gravi. Successivamente agli studenti è stato assegnato il compito di “giocare” a casa con la propria scatola sonora e annotare tutte le osservazioni e intuizioni a riguardo. L’incontro successivo è iniziato con la relazione da parte degli alunni su tali esperimenti che hanno provato a suonare la scatola pizzicando gli elastici in punti diversi, a pizzicarli con il foro aperto e chiuso, a pizzicarli tenendoli bloccati ad una lunghezza più corta rispetto a quella determinata dalla scatola. In tutti i casi sono state notate variazioni nel suono emesso: gli alunni già in possesso di un background musicale hanno riconosciuto facilmente le condizioni in cui venivano emesse note più alte e note più basse. A questo punto erano pronti per il passo successivo.

Passo 2: le scale, le onde, la frequenza

Questo passo del progetto è iniziato con un’introduzione generale al personaggio di Pitagora e al suo ruolo filosofico/mistico nella Grecia classica che va al di là del suo famoso teorema di geometria. Successivamente si è approfondito il ruolo di Pitagora nella storia della musica con la visione del video “Paperino e la Matematica”⁵ e narrando l’origine del suo interesse per la musica: passando vicino ad un’officina di un fabbro aveva sentito i colpi dei martelli su un’incudine, martelli che avevano dimensioni diverse e che producevano suoni diversi, aveva quindi osservato che, quando due martelli colpivano insieme l’incudine, a volte i due suoni producevano un accordo armonioso, a volte dissonante e aveva notato che questo accadeva in base al rapporto tra le dimensioni dei martelli.

Pitagora aveva quindi cercato di riprodurre il fenomeno con uno strumento appositamente costruito. A questo punto in classe è stato mostrato un monocordo di Pitagora, regolato e suonato in diversi modi per mostrare il legame tra tensione e lunghezza delle corde con le note emesse e si è fatto notare come la scatola sonora costruita dagli alunni non fosse altro che una sua versione meno precisa. Dopodiché tale strumento è stato usato per approfondire i dettagli di quanto visto nel video Disney riguardo al collegamento dei numeri razionali con le note musicali e la costruzione della scala musicale dodecafonica. Agli alunni è stato quindi chiesto di calcolare una successione di frazioni nel modo seguente: partendo da 1 ogni termine della successione è ottenuto dal termine

⁵<https://tinyurl.com/paperinomatemagica> dal minuto 2:47 al minuto 6:59.

termine precedente moltiplicandolo per $\frac{2}{3}$ e poi attuando il seguente controllo,

- Se il risultato ottenuto è maggiore di $\frac{1}{2}$ lo si lascia invariato,
- Se il risultato ottenuto è minore di $\frac{1}{2}$, il termine della successione lo si ottiene raddoppiando il risultato appena calcolato.

Ogni termine va anche valutato in forma decimale con la calcolatrice in modo da arrestare la procedura quando gli alunni ritenevano di aver ottenuto una frazione praticamente indistinguibile da $\frac{1}{2}$.

Gli alunni hanno quindi determinato la seguente successione di frazioni: $1, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \frac{64}{81}, \frac{128}{243}$. Tutti gli alunni hanno valutato di arrestare la procedura a questa frazione dato che $\frac{128}{243} = 0.5267\dots$ ed è distante da $1/2$ per meno di tre centesimi. A questo punto agli alunni è stato chiesto di misurare una delle corde della scatola sonora e segnare sul cartone della scatola le frazioni ottenute in relazione a tale lunghezza. Facendo suonare la corda prima libera e poi tenendola bloccata in corrispondenza dei diversi segni (seguendo non l'ordine della successione ma in ordine decrescente di lunghezza), gli alunni hanno potuto verificare che la successione dei sei suoni ottenuti con queste lunghezze corrisponde ad una scala musicale. I musicisti hanno poi osservato che le note corrispondenti a 1 e $\frac{1}{2}$ sono in realtà la stessa nota di due ottave consecutive.

A questo punto è stato posto alla classe il problema di capire cosa determina il suono e cosa cambia da una situazione all'altra quando si sentono note diverse. Dal confronto tra gli alunni è emerso che dovesse essere la vibrazione delle corde a produrre il suono, dato che quella è l'unica cosa che differenziava la scatola sonora quando è silenziosa da quando emette suoni e che dovesse esserci un collegamento diretto tra la lunghezza o la tensione della corda e la nota emessa. Tuttavia, forse comprensibilmente, la classe non è arrivata in modo del tutto autonomo a stabilire come il suono poi si propaghi dalla corda all'orecchio e come la lunghezza o la tensione della corda influenzino la nota. Di conseguenza, per fornire uno spunto di riflessione su questi punti rimasti in sospeso, si è passati all'analisi di un sistema meccanico che permette di visualizzare più facilmente questi elementi che appaiono "invisibili" su una corda tesa vibrante: la molla slinky.



Un esempio di molla slinky.

Questa molla è molto lunga e presenta una costante elastica molto piccola, per cui può essere allungata e perturbata senza troppi sforzi. La piccolezza della costante elastica genera inoltre una propagazione molto lenta delle perturbazioni attraverso di essa, e pertanto si presta benissimo a visualizzare le caratteristiche costitutive delle onde elastiche: frequenza, lunghezza d'onda e interferenza. Dopo aver posizionato la molla slinky in orizzontale sul piano della cattedra (come mostrato nella figura seguente), la molla è stata perturbata in vari modi in modo da mostrare la propagazione ondosu mediante il meccanismo della successione di compressioni e dilatazioni e successivamente il fenomeno dell'interferenza di onde che giungono in uno stesso punto da sorgenti diverse (fenomeno che è alla base della localizzazione delle sorgenti sonore).⁶ Dopodiché ogni alunno ha sperimentato autonomamente (sul banco o a casa) quanto eseguito alla cattedra dal docente, mediante molle slinky fornite dalla scuola o che gli alunni a casa si erano procurati su richiesta del docente.



La molla slinky disposta sul tavolo.

A questo punto gli alunni, dopo una semplice sollecitazione, hanno collegato quanto sperimentato sulla slinky al suono e immaginato che tale meccanismo di compressione e dilatazione potesse avvenire anche attraverso l'aria (era già noto, dagli studi effettuati nella scuola media di I grado, che il suono ha bisogno della presenza dell'aria per propagarsi) e, riprendendo in mano la scatola sonora, hanno prestato attenzione che a lunghezze o tensioni diverse delle corde corrispondevano oscillazioni più o meno lente e quindi a frequenze diverse delle onde emesse in aria.

Ecco cosa distingue le note musicali tra loro! Ecco perché le stesse note emesse da strumenti diversi “suonano bene insieme”!

Su questa scoperta si è chiuso il secondo passo e la fase del progetto dedicata alla generazione delle note e alla matematica e fisica sottostante. Era giunto il momento di fare musica “sul serio” e grazie alla matematica!

Passo 3: il pentagramma come spazio geometrico

Tra il passo 2 e il 3 le scuole superiori pugliesi sono entrate in DaD. Ma ciò ha avuto una ricaduta positiva perché da questo momento lo svolgimento del progetto si è avvantaggiato della disponibilità per ogni alunno di un computer o un tablet su cui operare sui software coinvolti nelle attività. È stato introdotto il pentagramma e la rappresentazione su di esso dell'altezza e della durata delle note (e delle pause). Su sollecitazione del docente alcuni alunni hanno colto l'analogia tra pentagramma e i diagrammi orari studiati in fisica: il pentagramma musicale è una sorta di grafico cartesiano che ha sull'asse delle ascisse il tempo e sull'asse delle ordinate l'altezza delle note (a ciò fanno parziale eccezione le alterazioni bemolle e diesis).

⁶<https://tinyurl.com/ondeslinky> mostra la ripresa di cosa è stato mostrato.



Il pentagramma come diagramma orario della musica.

Inoltre esiste un'origine delle altezze fissata con la chiave dello spartito: la chiave di violino (la "f maiuscola") indica con il "ricciolo" il rigo del SOL, la chiave di basso (la "virgola") indica, mediante i due punti, la riga del FA.

Un esempio di spartito musicale con due stadi. Lo stadio superiore (violino) ha note colorate in giallo con sillabe DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, DO, RE, MI, FA, SOL, LA. Lo stadio inferiore (basso) ha note colorate in giallo con sillabe DO, SI, LA, SOL, FA, MI, RE, DO, SI, LA, SOL, FA, MI.

La chiave dello spartito come "origine" delle altezze sul pentagramma.

La differenza fondamentale, rispetto ai diagrammi orari, è che l'asse delle ascisse è solo qualitativo, perché il posizionamento orizzontale delle note sul pentagramma serve solo a rappresentarne la successione temporale, mentre la rappresentazione quantitativa della loro durata è data mediante una convenzione grafica sui "disegni" che rappresentano le diverse note.

Segno grafico	Nome	Durata
	<i>intero</i> (o semibreve)	4/4
	<i>metà</i> (o minima)	2/4
	<i>quarto</i> (o semiminima)	1/4
	<i>ottavo</i> (o croma)	1/8
	<i>sedicesimo</i> (o semicroma)	1/16
	<i>trentaduesimo</i> (o biscroma)	1/32
	<i>sessantaquattresimo</i> (o semibiscroma)	1/64



Convenzioni grafiche per la durata delle note.

Questa introduzione è stata "sperimentata" passo passo dagli alunni tramite il software gratuito MuseScore⁷ che si presenta innanzitutto come un editor molto versatile di spartiti ma che permette poi anche di suonare qualunque spartito sia stato composto grazie ad un emulatore MIDI interno. In questo modo gli alunni hanno toccato con mano il significato di ogni aspetto della notazione musicale e nello stesso tempo hanno preso confidenza con un software che avrebbero usato più intensamente nell'immediato futuro.

⁷https://portableapps.com/apps/music_video/musescore_portable.

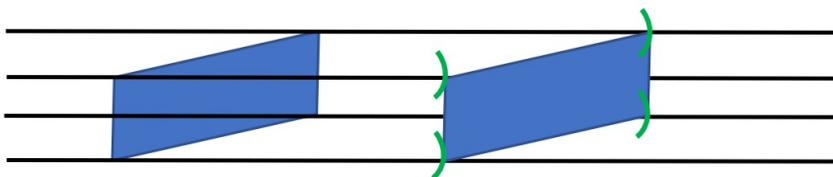
Passo 4: le trasformazioni geometriche nella musica

Sono state introdotte le varie trasformazioni geometriche che si possono eseguire sulle figure piane mediante costruzioni con riga e compasso. Ogni trasformazione geometrica è stata affiancata da una corrispondente trasformazione eseguita sulle note sul pentagramma. Gli alunni, dopo la definizione di ogni trasformazione e la spiegazione della sua esecuzione con riga e compasso, hanno realizzato la trasformazione geometrica su un foglio di carta e poi l'hanno eseguita con MuseScore su un gruppo di note prestabilito, ascoltandone poi l'effetto.

Traslazioni

La **traslazione** è la riproduzione esatta di una figura in una posizione diversa da quella iniziale e può essere eseguita con riga e compasso con la seguente successione di operazioni:

- si tracciano le rette parallele passanti per i vertici del poligono da traslare lungo la direzione di traslazione;
- si apre il compasso alla distanza di traslazione;
- per ciascun vertice del poligono si traccia un arco di circonferenza che intersechi la retta che lo attraversa in un altro punto;
- si uniscono ordinatamente i punti individuati.



Traslazione di un rettangolo con riga e compasso.

Sul pentagramma la traslazione ad un gruppo di note può essere applicata in verticale o in orizzontale con effetti musicali diversi. Dato che sul pentagramma in orizzontale si rappresenta la successione temporale delle note, traslare in orizzontale significa ripetere lo stesso gruppo di note identiche in successione.



Questo effetto può essere usato per creare una seconda voce che suona “in ritardo” lo stesso spartito della prima voce. In tal caso la traslazione orizzontale avviene su una “distanza temporale” inferiore rispetto alla durata dell'intero gruppo di note.



Ciò può essere fatto anche più volte, creando molteplici voci uguali che attaccano a intervalli regolari. In questo caso si ha una partitura nota come Canone Diretto, di cui l'esempio più famoso è "Fra Martino". In verticale il pentagramma rappresenta l'altezza delle note, quindi traslare un gruppo di note in verticale produce una partitura in cui vengono suonati contemporaneamente due gruppi di note separate tra loro da una distanza in altezza costante. Si hanno in questo caso i cosiddetti canoni di terza, o di quinta, o altro, in base alla distanza in altezza tra le voci. Un esempio è proprio il brano Canon Rock ascoltato nella prima lezione.



La combinazione delle due traslazioni (cioè l'applicazione di una traslazione "obliqua") corrisponde, in gergo musicale, alla modulazione: una stessa frase musicale viene suonata più volte e, ad ogni ripetizione, il gruppo di note viene alzato o abbassato rigidamente di uno stesso valore.



Nella musica pop la modulazione è spesso usata come espediente per produrre un coinvolgimento emotivo crescente durante il brano. Un esempio molto interessante e non banale di uso di questa tecnica è nel brano «Love On Top» di Beyoncé⁸, dove ci sono 4 modulazioni consecutive, ciascuna di un semitono (e quindi con un innalzamento complessivo di ben due toni).

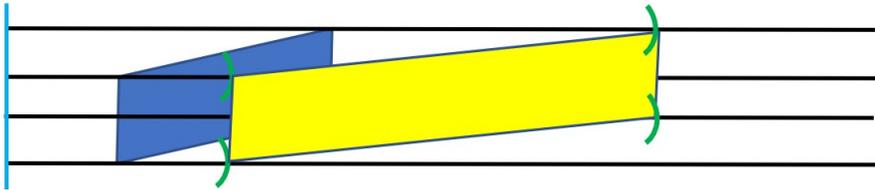
Dilatazioni

La **dilatazione** è la riproduzione di una figura in cui le distanze lungo una direzione sono moltiplicate per uno stesso fattore e può essere eseguita con riga e compasso con la seguente successione di operazioni:

- si tracciano le rette parallele passanti per i vertici del poligono da dilatare lungo la direzione di dilatazione e una retta ad esse perpendicolare;
- per ogni vertice del poligono si punta il compasso sul punto di intersezione tra la retta parallela passante per quel vertice e la perpendicolare di riferimento e si apre il compasso fino al vertice scelto;

⁸video reperibile all'URL <https://tinyurl.com/modulazionebeyonce>

- si allarga l'apertura così misurata in modo da moltiplicare l'ampiezza originaria per il fattore di dilatazione e si traccia un arco sulla stessa retta;
- si uniscono tra loro ordinatamente i punti così individuati.



La dilatazione di un gruppo di note può essere applicata sostanzialmente in un unico modo: in orizzontale: Una dilatazione verticale, dovendo essere fatta rispetto ad un valore di frequenza di riferimento, altererebbe i rapporti reciproci tra le note rovinando conseguentemente l'armonia.

Dilatazione orizzontale in questo caso significa aumentare o ridurre la durata di tutte le note di uno stesso fattore, tipicamente una potenza di 2. Nell'esempio che segue la prima battuta nel primo pentagramma è stata raddoppiata in durata nel secondo pentagramma.



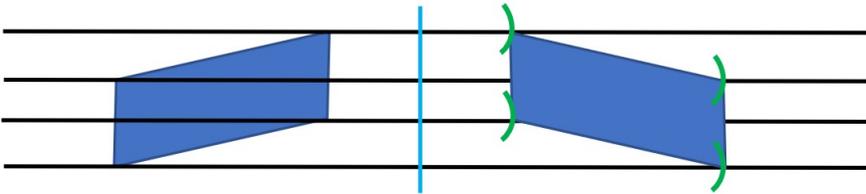
La dilatazione è interessante quando viene usata per generare voci diverse di uno stesso brano che eseguono la stessa melodia a velocità diverse.



Riflessioni

La **riflessione speculare**, detta anche **simmetria assiale**, è la riproduzione di una figura invertendone la disposizione rispetto ad una direzione e anche questa trasformazione può essere eseguita con riga e compasso con l'opportuna sequenza di operazioni:

- si tracciano le rette parallele passanti per i vertici del poligono da riflettere che siano perpendicolari alla retta di riflessione (asse di simmetria);
- Si punta il compasso su ciascuno dei punti di intersezione tra le rette parallele e l'asse di simmetria e lo si apre fino al vertice del poligono posto sulla stessa retta parallela;
- con tale apertura si traccia un arco di circonferenza sulla stessa retta parallela ma dalla parte opposta rispetto all'asse di simmetria;
- si uniscono ordinatamente i punti così individuati.



Riflessione verticale significa suonare contemporaneamente due gruppi di note in cui ad ogni innalzamento di tono in un gruppo corrisponde un equivalente abbassamento di tono per l'altro, e viceversa. I brani con questa caratteristica sono detti **Canoni Inversi**.



Riflettere in orizzontale sul pentagramma significa ripetere lo stesso gruppo di note invertendo l'ordine di esecuzione.



La riflessione orizzontale può essere usata per scrivere due voci diverse di una partitura. In questo caso le due voci suonano il medesimo spartito ma una delle due lo esegue al contrario. Le partiture con questa caratteristica sono detti **Canoni Retrogradi** o **Cancrizzanti**. Sono tali i **Canoni 1 e 2 di Bach**.

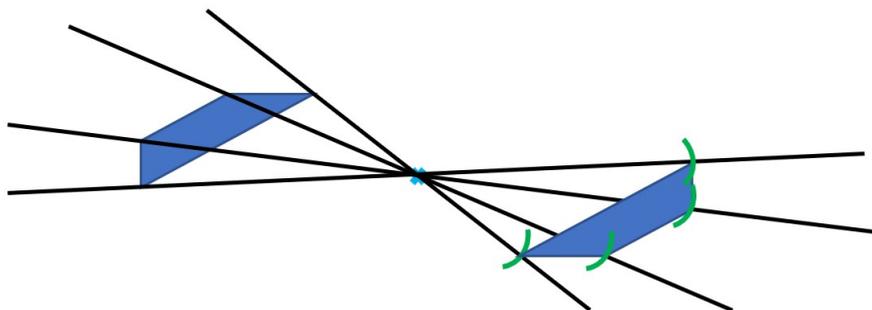
CANONE RETROGRADO



Simmetria puntuale

La **simmetria puntuale** è la riproduzione di una figura dopo una rotazione di 180° intorno ad un punto. Le operazioni per costruirla sono:

- si tracciano le rette che passano per i vertici del poligono da trasformare e il punto del piano che fa da centro di simmetria;
- si punta il compasso nel punto prescelto e lo si apre fino a ciascun vertice del poligono;
- si traccia un arco con questa apertura sulla retta corrispondente dal lato opposto rispetto al centro di simmetria;
- si uniscono ordinatamente i punti così ottenuti.



Come è noto la simmetria puntuale equivale a due simmetrie assiali, rispetto a due rette perpendicolari tra loro. Pertanto, in musica, usare questa trasformazione porta alla composizione di una partitura che unisce insieme le caratteristiche del Canone Inverso e del Canone Cancrizzante.

Passo 5: composizione matematica

Dopo aver sperimentato gli effetti delle trasformazioni geometriche gli alunni hanno applicato quanto appreso in forma creativa.

La classe è stata suddivisa in cinque gruppi che contenessero ciascuno un minimo di 2 alunni con esperienza musicale pregressa. Ogni gruppo ha composto un brano strumentale della durata di circa 3 minuti, partendo da una frase musicale di loro scelta (del tutto originale o ricavata da un brano preesistente) e rielaborandola mediante le trasformazioni geometriche sullo spartito. Il software MuseScore si è ben prestato a questa operazione grazie all'ampia libertà di intervento che permette. Gli alunni hanno lavorato suddivisi in diverse videoconferenze per tre sessioni da due ore ciascuna.



Alcuni gruppi durante il lavoro di composizione.

Successivamente la classe è stata “rimascolata” in altri cinque gruppi con una consegna quasi identica a quella precedente ma con un'importante differenza: la frase musicale da cui partire è stata generata mediante il sito di crittografia musicale www.clarallel.com: questo sito sfrutta un algoritmo che fa corrispondere ad ogni lettera o gruppo di lettere un semitono con una specifica durata, per cui è possibile tradurre in musica qualunque parola o frase si digiti. Oltre al nuovo compito di composizione ad ogni gruppo è stato anche chiesto di analizzare le “traduzioni” in modo da scoprire l'algoritmo di crittazione, richiamando in tal modo un'attività svolta a inizio sulla crittografia classica.

L'attività di composizione ha quindi portato alla stesura di 10 brani diversi, tutti originali e con una certa orecchiabilità. Su YouTube è presente l'intera playlist ascoltabile liberamente all'URL <https://tinyurl.com/playlistIM2021>. Di seguito sono riportate alcune delle partiture prodotte. In uno degli spartiti sono evidenziate alcune delle trasformazioni applicate: in arancione una dilatazione temporale e in blu una traslazione di tonalità e di tempo.

<p>Puzzle Musicale Luca Pintorri, Francesco Pignati, Andrea Pisoni, Emanuele Orsini, Aino Carimato</p>	<p>L'essenza della matematica è la sua libertà Luca Pintorri, Luisa Chirico, Vito Ricci, Alessandro Sposaro</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Conclusioni

Il lavoro svolto è stato molto stimolante e si è arricchito costantemente grazie all'entusiasmo che la classe ha profuso durante tutto l'anno scolastico (anche durante l'attività didattica curricolare). Questa attività ha permesso di sviluppare in modo alternativo e, forse, più efficace sia il senso della Matematica come linguaggio unificante e strumento di espressione e creatività, sia il passaggio dalla rappresentazione geometrica al simbolismo, creando un precursore intuitivo rispetto a quello che rappresenterà più avanti la Geometria Analitica. Ha rappresentato inoltre un efficace modello di didattica per problemi, in quanto si sono affrontati con la matematica problemi non matematici.

Ringraziamenti

Per la realizzazione di questo progetto si ringraziano i Proff. MONTONE Antonella, FIORENTINO Michele e PERTICHINO Michele del gruppo MA.TE. di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università degli Studi "Aldo Moro" di Bari per la preziosa collaborazione.

Bibliografia

- [1] IACINO, S., La Geometria di Bach, youtube.com/watch?v=O7WtoQ4ZiLw.
- [2] MAOR, E., La musica dai numeri. Musica e matematica da Pitagora a Schoenberg, Codice Edizioni.
- [3] PERES E., Concerto pitagorico: le basi matematiche della musica, Iacobelli.
- [4] ValentinaD, <https://blog.redooc.com/musica-e-matematica-legame-indissolubile/>.

Insegnare matematica con la calcolatrice grafica¹

Teaching mathematics with the graphic calculator

Massimo Esposito

Abstract

In this paper the use of a graphic calculator as a teaching tool will be discussed. Far from being just a “computing machine”, the graphic calculator must be regarded as a powerful “teaching mediator”, exerting a strong impact on the teacher effectiveness toward the goal of strengthening mathematical competences in students. The topic of assessment is also discussed, with reference to different kinds of tasks that may be proposed in a classroom equipped with graphic calculators.

Introduzione

L'utilizzo a fini didattici della calcolatrice grafica (nel seguito, CG) nelle scuole secondarie di secondo grado è aumentato in modo significativo negli ultimi dieci anni. Tale incremento è stato anche favorito da alcune meritorie iniziative provenienti dal ministero dell'istruzione, tra cui la decisione di autorizzare, a partire dal 2017, l'utilizzo delle calcolatrici nell'ambito degli esami di Stato del secondo ciclo di istruzione.

Tuttavia – nonostante questi importanti sviluppi – il livello di adozione di questo strumento nella prassi didattica della matematica e delle scienze sperimentali rimane abbastanza basso in confronto con altri paesi europei paragonabili all'Italia per dimensioni e/o cultura e tradizioni. Ciò è dovuto a una molteplicità di fattori, i più rilevanti tra i quali, in base alla nostra esperienza, sono:

¹Gli screenshot inseriti nel testo dell'articolo sono prelevati da una calcolatrice CASIO fx-cg50, in quanto si tratta – di gran lunga – del modello più diffuso nelle scuole italiane. Naturalmente, le considerazioni sviluppate nell'articolo sono di carattere assolutamente generale, e prescindono dal modello di calcolatrice preso in considerazione.

- una carente conoscenza delle caratteristiche e delle potenzialità della CG;
- il sussistere di pregiudizi culturali in merito all'adozione di artefatti tecnologici visti come *strumenti compensativi* delle insufficienti competenze degli studenti;
- il diffuso timore, da parte dei docenti, che l'investimento di tempo necessario per prepararsi e preparare gli studenti all'utilizzo della CG sia eccessivo.

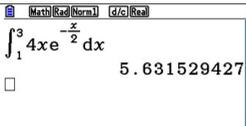
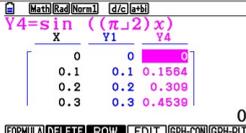
Dal primo di questi fattori dipendono in parte gli altri due; in particolare il secondo, peraltro, affonda le sue radici in una sorta di “riflesso condizionato” improntato alla diffidenza verso uno strumento che sembra “*sminuire*” l'importanza delle competenze di calcolo, “*semplificare senza sforzo*” la risoluzione di problemi matematici, “*dispensare*” gli studenti dall'acquisire le suddette competenze, e in definitiva renderli dipendenti (ancora di più di quanto già non siano!) dalla tecnologia.

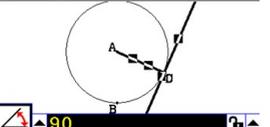
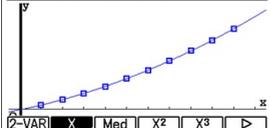
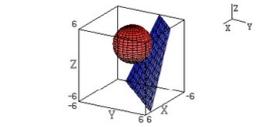
Ci proponiamo con questo articolo di illustrare come la CG possa invece rappresentare un potente strumento per rendere molto più efficace, coinvolgente e realmente *inclusiva* l'azione didattica del docente, a condizione di modificare opportunamente lo stile di insegnamento, in modo da valorizzarne appieno le caratteristiche e farne un vero e proprio *mediatore didattico*.

Che cos'è una calcolatrice “grafica”?

Non a caso abbiamo parlato sopra di “riflesso condizionato”: in molteplici circostanze abbiamo potuto constatare come molti docenti, quando sentono parlare di “calcolatrice grafica”, istintivamente appuntano l'attenzione sul sostantivo “calcolatrice” anziché sull'aggettivo “grafica”, perdendo così di vista la ricchezza dello strumento e le opportunità didattiche che esso può offrire. Cerchiamo quindi innanzitutto di mettere a fuoco l'oggetto e le sue caratteristiche.

L'ambiente di lavoro è organizzato in menu, attraverso i quali si accede alle diverse applicazioni. Nella tabella seguente vengono riportate le più tipiche:

CALCOLATRICE SCIENTIFICA	 <p>Math Rec Norm d/c Real</p> $\int_1^3 4xe^{-\frac{x}{2}} dx$ <p>5.631529427</p> <p>□</p> <p>JUMP DELETE MATH</p>															
ELABORATORE GRAFICO	 <p>Selez. posizione avvio</p> $Y1=4x(e^{-\frac{x}{2}})$ <p>(4.2,1658)</p> <p>Tangente</p> $Y=-0.541X+4.3307$ $X=4$ $Y=2.165364532$															
RAPPRESENTAZIONE TABELLARE	 <p>Math Rec Norm d/c tbl</p> $Y4=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ <table border="1"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>Y1</th> <th>Y4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0.1</td> <td>0.1</td> <td>0.1564</td> </tr> <tr> <td>0.2</td> <td>0.2</td> <td>0.309</td> </tr> <tr> <td>0.3</td> <td>0.3</td> <td>0.4539</td> </tr> </tbody> </table> <p>0</p> <p>FORMULA DELETE ROW EDIT GPH-SON GPH-PRN</p>	X	Y1	Y4	0	0	0	0.1	0.1	0.1564	0.2	0.2	0.309	0.3	0.3	0.4539
X	Y1	Y4														
0	0	0														
0.1	0.1	0.1564														
0.2	0.2	0.309														
0.3	0.3	0.4539														

<p>GEOMETRIA EUCLIDEA</p>																															
<p>FOGLIO DI CALCOLO</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>SHE</th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>95.8</td> <td>96.4</td> <td>1.902</td> <td>-1.598</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>96.1</td> <td>96.4</td> <td>0.1687</td> <td>-1.598</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>96.25</td> <td>96.1</td> <td>-0.718</td> <td>0.1687</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>96.175</td> <td>96.1</td> <td>-0.279</td> <td>0.1687</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>96.137</td> <td>96.1</td> <td>-0.08</td> <td>0.1687</td> </tr> </tbody> </table> <p>=E1</p>	SHE	A	B	C	D	1	95.8	96.4	1.902	-1.598	2	96.1	96.4	0.1687	-1.598	3	96.25	96.1	-0.718	0.1687	4	96.175	96.1	-0.279	0.1687	5	96.137	96.1	-0.08	0.1687
SHE	A	B	C	D																											
1	95.8	96.4	1.902	-1.598																											
2	96.1	96.4	0.1687	-1.598																											
3	96.25	96.1	-0.718	0.1687																											
4	96.175	96.1	-0.279	0.1687																											
5	96.137	96.1	-0.08	0.1687																											
<p>ELABORATORE STATISTICO</p>																															
<p>SUCCESSIONI E RICORSIONE</p>	<p>Ricorsione</p> <p>$a_n = 3 + 4(n-1)$ [←]</p> <p>$b_n = \frac{n \times (6 + 4 \times (n-1))}{2}$ [←]</p> <p>$C_n :$ [←]</p>																														
<p>RISOLTORE DI EQUAZIONI</p>	<p>Eq: $e^{-x} + \sin x = 0$</p> <p>$x = 3.183063012$</p> <p>Lft = 0</p> <p>Rgt = 0</p>																														
<p>GEOMETRIA 3D</p>																															

Le diverse applicazioni condividono denominazioni e definizioni di oggetti matematici (espressioni, parametri, etc.) che sono collocati – dal punto di vista dell’architettura informatica – a un livello “globale”, rendendo così estremamente intuitivo e agevole il passaggio tra rappresentazioni diverse (simbolica, grafica, tabellare) dello stesso oggetto. Questo è probabilmente l’aspetto principale da tenere in considerazione dal punto di vista didattico, in quanto il maggiore valore aggiunto dell’uso della CG risiede proprio nello sviluppo delle competenze relative all’utilizzo dei codici grafico-simbolici della matematica. Inoltre, questa flessibilità e ricchezza di rappresentazione viene incontro alle diverse intelligenze degli studenti che, come sappiamo, possono parlarli a prediligere linguaggi diversi: simbolico, grafico, numerico, visuale.

Perché la calcolatrice grafica a scuola

Una calcolatrice “scientifica” può essere inserita nella prassi didattica senza che questo comporti grandi cambiamenti nell’ambiente di apprendimento: si tratta infatti di un dispositivo di “puro calcolo”, che può intervenire solo in un punto ben preciso del processo risolutivo e che, pur risultando indispensabile in alcune circostanze (basti pensare alla valorizzazione di una funzione esponenziale o goniometrica in un punto non “notevole”) non fornisce alcun contributo nelle fasi di esplorazione del problema, di individuazione della strategia risolutiva, di argomentazione e riflessione metacognitiva: in altre parole, una calcolatrice scientifica agisce esclusivamente come un “booster” delle capacità di calcolo dello studente.

All’opposto, *la CG non può essere inserita nella prassi didattica senza cambiarla profondamente*. È bene che il docente che valuta la possibilità di adottarla in classe sia pienamente consapevole del fatto che la funzione di mediazione didattica che essa può svolgere si esplica appieno e produce grandi benefici solo nel quadro di un ambiente di apprendimento profondamente diverso da quello tradizionale. Come non ci stanchiamo di ripetere, non si tratta certo di buttare alle ortiche il “fare scuola” tradizionale (lezione frontale – esercitazione – compito in classe – interrogazioni) ma di inserirlo in un quadro più ampio di esperienze di apprendimento e di valutazione diversificate (basate su approccio laboratoriale, problem posing & solving, protagonismo dello studente, autovalutazione, argomentazione, peer learning, valorizzazione degli atteggiamenti, adozione di indicatori di competenza *ortogonali rispetto ai contenuti*) che vada a realizzare un’autentica *didattica delle competenze*.

Ciò premesso, proviamo a individuare almeno alcuni di questi benefici che derivano dal pieno e corretto utilizzo didattico della CG:

- stimolo all’intuizione matematica, grazie alla facilità con cui essa consente di muoversi tra rappresentazioni diverse (simbolica, grafica, tabellare);
- attivazione di meccanismi di apprendimento basati sulla dimensione laboratoriale del «fare matematica» in aula, a casa, ovunque;
- promozione di competenze di problem solving, tramite formulazione e verifica di ipotesi, analisi what... if, diversificazione delle strategie risolutive;
- spostamento dell’attenzione dal calcolo alla modellizzazione, ai concetti, alle proprietà degli oggetti matematici;
- incoraggiamento alla collaborazione e al confronto tra pari;
- possibilità di lavorare su problemi altrimenti intrattabili;
- superamento dei limiti del disegno manuale;
- incoraggiamento degli studenti più sfiduciati, che vengono stimolati a “rimettersi in gioco”.

L'elenco precedente non pretende certamente di essere esaustivo: piuttosto, esso riassume le osservazioni effettuate nel corso dell'esperienza diretta di insegnamento e le informazioni tratte dai sondaggi – formali e informali – effettuati nel corso degli anni presso i docenti che hanno “accettato la sfida” e hanno fatto della CG un importante elemento di innovazione didattica.

Coordinate didattiche

Per progettare una efficace attività didattica con l'uso della CG, occorre tenere ben presenti i seguenti punti chiave:

- la CG consente, in generale, di effettuare *osservazioni* (limitate alla finestra grafica in uso!) e formulare congetture. Tali *congetture*, nonché le ipotesi, le intuizioni, gli spunti che derivano dalle osservazioni effettuate con la calcolatrice devono essere inseriti dallo studente all'interno di un ragionamento matematico *argomentato*;
- La CG può essere usata nella fase di *esplorazione* del problema, per orientarsi nell'individuazione della strategia risolutiva, e nella fase di *verifica*, per riscontrare i risultati. Entrambe le modalità sono istruttive e stimolanti, e possono anche coesistere. L'utilizzo in fase di esplorazione si presta molto bene a un'organizzazione della lezione in piccoli gruppi di lavoro. Spetta al docente scegliere la modalità più adeguata, in funzione dell'argomento, delle caratteristiche della classe e dell'ambiente di apprendimento che ha in animo di realizzare;
- l'utilizzo da parte dello studente delle funzionalità della CG *può fornire evidenze* per la valutazione, sia nello svolgimento di attività «tradizionali», sia attraverso attività pensate specificamente per essere eseguite con la calcolatrice. È fondamentale, a tal fine, un'attenta riflessione da parte del docente sulla *formulazione* delle richieste e dei quesiti posti agli studenti, nonché sulla – eventuale! – predisposizione di attività e verifiche che richiedano *esplicitamente* l'uso della calcolatrice (nel seguito di questo lavoro vengono proposti alcuni esempi);
- il tipo di CG che prendiamo in considerazione *non effettua operazioni di calcolo simbolico* (sviluppo di espressioni, fattorizzazioni, semplificazioni, calcolo di limiti, funzione derivata, integrale indefinito, etc.). Nessuna «banalizzazione» della matematica, quindi: piuttosto, educazione all'utilizzo consapevole della calcolatrice come strumento di esplorazione matematica e verifica, e non come «lampada di Aladino» al servizio dello studente. Sotto questo aspetto, il ruolo del docente è di cruciale importanza, anche in un'ottica di promozione della competenza digitale;
- la CG risolve le equazioni attraverso *metodi numerici*, e fornisce soluzioni *approssimate* (1.571 e non $\pi/2$, 7.389 e non e^2 , etc.). Questo aspetto è importante sia dal punto di vista della valutazione, in quanto la soluzione presentata fornisce informazioni sul procedimento risolutivo adottato dallo studente, sul

ruolo in esso svolto dalla calcolatrice, sulla consapevolezza da parte dello studente delle peculiarità della risoluzione numerica, sia dal punto di vista culturale e professionale, per l'importanza che tali metodi rivestono nelle professioni di ambito tecnico-scientifico.

L'idea di fondo, da cui partire per costruire una progettazione didattica che valorizzi l'uso della CG, è che le competenze matematiche e le competenze di utilizzo della CG *si rinforzano a vicenda*.



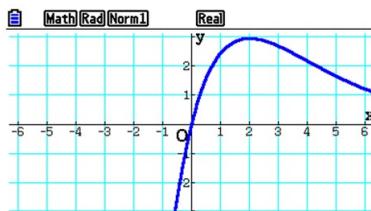
Esempi di attività “tradizionali” effettuate con la calcolatrice grafica

Nel seguito proponiamo due esempi di problemi analoghi a quelli tradizionalmente affrontati nel segmento finale del percorso del liceo scientifico, per discutere l'impatto derivante dall'uso della CG, con particolare attenzione all'aspetto valutativo.

Studio di funzione

“Studia la funzione $f(x) = 4xe^{-\frac{x^2}{2}}$ motivando opportunamente i risultati ottenuti e verificando, in particolare, che il suo grafico presenta un unico punto di flesso. Determina l'equazione della tangente al grafico della funzione nel punto F .”

Il classico problema dello “studio di funzione” è un esempio molto significativo del cambiamento di prospettiva causato dall'uso della calcolatrice: mentre in una trattazione “tradizionale” il punto di arrivo è costituito dal grafico della funzione, in questo caso il grafico diventa il *punto di partenza*! Infatti, lo studente dotato di CG può immediatamente osservare sullo schermo un'immagine come quella riportata in figura:



Nella fase di “esplorazione” del problema, lo studente potrà agevolmente manipolare la finestra di visualizzazione ed effettuare indagini ed elaborazioni sul grafico stesso. Ad esempio, potrà:

- cambiare gli intervalli di visualizzazione $[x_{min}, x_{max}]$ e $[y_{min}, y_{max}]$;
- effettuare “zoom in” e “zoom out”;
- “percorrere” il grafico della funzione con il cursore, oppure portarsi direttamente su qualunque punto del grafico stesso, osservando i valori assunti dalla funzione;
- individuare zeri, massimi e minimi relativi *all'interno della finestra grafica osservata*;
- visualizzare l'andamento delle derivate prima e seconda (*ma non l'espressione simbolica delle derivate!*);
- visualizzare la tangente al grafico in un punto e la sua equazione.

Quali evidenze per la valutazione potremo estrarre dal lavoro dello studente fornito di CG?

Innanzitutto, adottiamo come indicatori della nostra rubrica di valutazione quelli definiti dal ministero per la seconda prova scritta del liceo scientifico (D.M. 769/2018); per ciascuno di essi, proviamo a identificare alcune evidenze che possono concorrere alla valutazione.

- 1) *Analizzare la situazione problematica. Identificare i dati ed interpretarli. Effettuare gli eventuali collegamenti e adoperare i codici grafico-simbolici necessari.*

Relativamente a dominio, segno, zeri, massimi e minimi relativi e assoluti, punti di flesso, monotonia, concavità, presenza di asintoti, continuità, lo studente potrà effettuare delle congetture basandosi sulle osservazioni nella finestra grafica, o dei riscontri di risultati ricavati analiticamente. Solo nello studio della parità la CG potrà dare allo studente una certezza, e solo nel caso in cui la funzione non sia pari né dispari! In ogni caso, congetture e riscontri presuppongono competenze di lettura e interpretazione corretta del grafico e dei dati significativi che da esso emergono. A questo proposito, è anche rilevante la presentazione dei risultati da parte dello studente: se il valore del massimo assoluto viene fornito come 2,943 anziché $\frac{8}{e}$, c'è consapevolezza della natura approssimata di tale soluzione? Ovviamente, essa emergerà dall'argomentazione che deve accompagnare la procedura risolutiva.

- 2) *Conoscere i concetti matematici utili alla soluzione. Analizzare possibili strategie risolutive ed individuare la strategia più adatta*

Lo studente in possesso di competenze matematiche saprà trarre spunto dalle osservazioni effettuate con la CG per orientare la sua ricerca. Dovrà azionare, a tale scopo, conoscenze e abilità relative alle proprietà delle funzioni elementari, alle interpretazioni geometriche delle derivate prima e seconda, alle relazioni tra derivata prima e punti estremanti e tra derivata seconda e flessi del grafico. Ad esempio, l'individuazione del valore $8/e$ come massimo assoluto della funzione o la dimostrazione dell'unicità del punto di flesso in F di coordinate $(4, \frac{16}{e^2})$ richiederà una strategia di indagine e di argomentazione che, pur accompagnata e supportata dall'uso competente della CG, non potrà che scaturire dalle conoscenze e abilità dello studente.

- 3) *Risolvere la situazione problematica in maniera coerente, completa e corretta, applicando le regole ed eseguendo i calcoli necessari.*

Per quanto riguarda le evidenze relative agli aspetti procedurali e di calcolo, esse si presenteranno nei passaggi attraverso i quali lo studente dovrà individuare *tutti* gli zeri, *tutti* i massimi e minimi relativi, mostrare l'unicità del flesso in F , l'assenza di asintoti obliqui, le caratteristiche di monotonia, concavità, parità, la presenza di un asintoto orizzontale.

L'equazione della tangente in F potrà invece essere fornita direttamente dalla CG, ma i coefficienti saranno ricavati con tecniche numeriche, e saranno quindi di natura approssimata. Lo studente in possesso delle necessarie conoscenze e abilità sarà invece in grado di fornire i valori esatti dei coefficienti dell'equazione, oltre a descrivere il procedimento per la loro individuazione. Il docente che ritenga necessario enfatizzare l'importanza di queste specifiche conoscenze e abilità potrebbe formulare diversamente la richiesta, ad esempio:

«*Determina, in funzione del parametro k , l'equazione della tangente (orizzontale, passante per l'origine, inflessionale) al grafico della funzione $f(x) = kxe^{-\frac{x}{2}}$* »

Lo studente non potrà in questo caso ricorrere alla soluzione numerica, ma dovrà procedere esclusivamente per via analitica; la CG, attraverso la funzionalità "grafici dinamici" potrà invece essere usata per riscontrare, in maniera molto rapida ed efficace, l'evoluzione del grafico della funzione e della tangente in questione al variare del parametro k in un qualsiasi intervallo di valori.

- 4) *Commentare e giustificare opportunamente la scelta della strategia risolutiva, i passaggi fondamentali del processo esecutivo e la coerenza dei risultati al contesto del problema*

La capacità di riflettere sul percorso risolutivo, di descrivere in modo chiaro e corretto le scelte effettuate, di discutere i risultati ottenuti, già di per sé rappresenta un elemento fondamentale della competenza in generale e, nello specifico, della competenza matematica.

Da quanto detto sopra, risulta del tutto evidente che tale capacità diventa ancora più rilevante nel momento in cui lo studente si avvale del supporto della CG: la riflessione sull'utilizzo delle informazioni fornite dalla calcolatrice all'interno del procedimento, e sul loro "valore" matematico, è importante sia rispetto al rafforzamento delle competenze matematiche, sia rispetto al tema dell'utilizzo consapevole dei supporti tecnologici. Nel formulare la traccia di una verifica, di un problema, di un'esercitazione, dunque, il docente non dovrebbe mai tralasciare la richiesta allo studente di spiegare, argomentare, giustificare e dovrebbe *valutare accuratamente le evidenze che da tale argomentazione scaturiscono*.

Integrale definito e probabilità

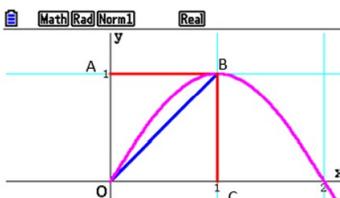
"Date le funzioni,

$$f(x) = x, \quad g(x) = 1, \quad s(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

nell'intervallo $[0,1]$, dimostra che la porzione quadrata di piano $OABC$ viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $g(x)$ in tre parti distinte e determina la probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato ricada in ciascuna delle tre parti individuate.

Considerando ora le funzioni $f(x)^2$ e $g(x)^2$ discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni in aumento o in diminuzione dei tre valori di probabilità precedentemente determinati."

Il grafico che si presenta allo studente che utilizza la CG è il seguente (le etichette dei punti A, B, C, O sono state aggiunte successivamente):



Lo studente può così *osservare* che il quadrato $OABC$ viene suddiviso in tre parti, ma *dimostrarlo* è tutt'altra cosa, e sicuramente non è un compito che può essere affidato alla CG! La dimostrazione, che produce evidenze relativamente a tutti i quattro indicatori di cui sopra, può però essere orientata dall'osservazione effettuata con la CG. Ad esempio, uno spunto potrebbe venire dal considerare la concavità di $s(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$, oppure il teorema di Lagrange applicato alle funzioni $f(x)$ e $s(x)$ nello stesso intervallo.

Il calcolo delle probabilità presuppone il calcolo di semplici integrali definiti; analogamente a quanto già detto per le derivate e per la tangente al grafico, la CG può fornire per via numerica il valore approssimato di un'integrale definito, ma *non può individuare le primitive della funzione in questione*.

Per ragioni di brevità, lasciamo al lettore la riflessione sulle evidenze, relative ai quattro indicatori, che possono scaturire dalla risoluzione del problema proposto. È interessante però, anche in questo caso, valutare eventuali formulazioni alternative, e magari più stimolanti; un possibile esempio è il seguente:

«determina l'espressione di una funzione $s(x)$ tale che il suo grafico, insieme a quelli delle funzioni $f(x) = x$, $g(x) = 1$ suddivida il quadrato $OABC$ in **quattro** parti [con o senza il vincolo $s(0) = 0$, $s(1) = 1$]»

L'aspetto interessante di una richiesta così formulata, nell'ottica di una didattica delle competenze, risiede nel fatto che si richiede allo studente di *proporre* una funzione che abbia certe caratteristiche, di farsi in qualche modo parte attiva del laboratorio di matematica, di *operare e valutare delle scelte* e di mobilitare le sue competenze a questo scopo. La CG sosterrà questo processo, mettendo a disposizione le funzionalità di calcolo e rappresentazione che consentono di esplorare in modo rapido e agevole le diverse situazioni che si presentano al variare delle scelte e delle ipotesi formulate dallo studente.

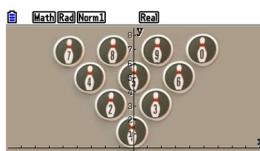
Attività innovative con la calcolatrice grafica

Infine, proponiamo alcuni esempi di problemi *pensati per essere affrontati con la CG*; problemi di questo tipo sono particolarmente interessanti, perché evidenziano come l'uso di questo strumento consenta di ampliare notevolmente il repertorio di attività e di verifiche che il docente può adoperare, diversificandone anche la tipologia. In particolare, queste attività possono risultare decisamente “sfidanti” per gli studenti, con elementi di creatività e di “gioco” che – come ampiamente riscontrato nella letteratura scientifica – sono particolarmente efficaci per promuovere l'acquisizione di competenze.

Grafici con sfondo

La CG consente di applicare uno sfondo alla finestra grafica, che può essere un'immagine importata dall'esterno o una di quelle precaricate nella memoria della calcolatrice. Si chiede quindi agli studenti di impostare i parametri di una funzione in modo che il suo grafico risponda a certi requisiti relativamente allo sfondo. Ad esempio:

A partire da questo sfondo:



Imposta i parametri A , B , C e D della funzione,

$$f(x) = A \sin(Bx + C) + D$$

in modo che il grafico di $f(x)$ separi i birilli 1, 2 e 3 dagli altri.

Imposta i parametri m e q in modo che la retta di equazione

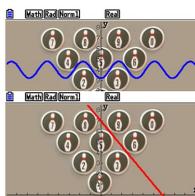
$$y = mx + q$$

separi i birilli 9, 6, 0 dagli altri.

Imposta i parametri A , B , C in modo che la parabola di equazione

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

separi i birilli 7, 4, 8 dagli altri.



Attività di questo tipo sviluppano competenze grafico-simboliche e di interpretazione dei dati, nonché la conoscenza delle proprietà di coniche e funzioni elementari, e contengono un elemento di sfida e di “gioco” che le rende accattivanti. Esse possono essere ulteriormente sviluppate a partire, ad esempio, dal confronto tra le diverse soluzioni proposte dai diversi studenti o gruppi di studenti.

Impostazione della finestra grafica

Un'altra tipologia interessante di attività è quella che richiede agli studenti, a partire dalla definizione di un oggetto matematico, di impostare la finestra grafica della calcolatrice in modo che la rappresentazione dell'oggetto risponda a certe caratteristiche. Ad esempio:

Imposta i parametri della finestra di visualizzazione della calcolatrice in modo che la sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z - 9 = 0$$

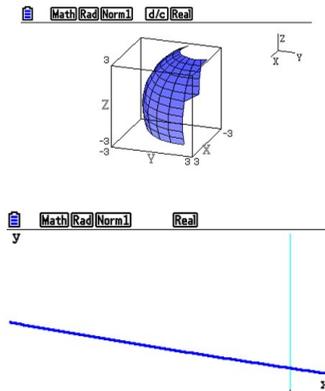
sia interamente visibile.

Oppure:

Imposta i parametri della finestra di visualizzazione della calcolatrice in modo che il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$$

appaia approssimativamente come in figura, cioè una curva con pendenza compresa tra $-\frac{1}{5}$ e $-\frac{1}{7}$.



Anche in questi esempi è evidente lo stimolo alle competenze di tipo grafico-simbolico; in particolare il secondo presenta un possibile approccio laboratoriale al concetto di sviluppo al primo ordine di una funzione. Anche questa attività può essere arricchita ulteriormente, individuando il punto della funzione intorno al quale è stata effettuata la linearizzazione, e l'equazione della retta approssimante.

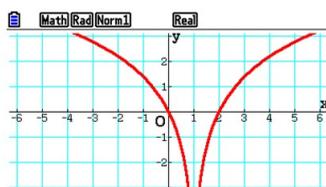
Composizione di funzioni

La CG si presta molto bene alle attività basate sulla composizione di funzioni, per la facilità e rapidità con cui si può esplorare il modo in cui le proprietà delle singole funzioni – in particolare segno, parità, monotonia – si proiettano nel grafico della funzione composta.

La composizione delle tre funzioni:

$$f_1(x) = \log(x), \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x - 1$$

Produce il grafico in figura, con l'impostazione di default di visualizzazione della calcolatrice. Individua l'espressione della funzione composta, motivando la tua risposta.



È evidente, in un'attività di questo tipo, l'importanza della richiesta di carattere argomentativo, dalla quale deve emergere la conoscenza delle proprietà delle funzioni coinvolte e della corrispondenza tra queste e l'aspetto del grafico. È preferibile limitare il numero n delle funzioni componenti, e di conseguenza il numero $n!$ delle possibili permutazioni tra di esse, e richiedere allo studente la riflessione di cui sopra, per scoraggiare un possibile approccio puramente "combinatorio" (che comunque evidenzerebbe una competenza!).

Come emerge da questa sia pur breve rassegna di attività matematiche effettuate con la CG, è possibile un significativo ampliamento delle esperienze didattiche e delle situazioni valutative che il docente può progettare. Ci piace inoltre sottolineare che oltre alle consuete richieste: "dimostra", "calcola", "verifica", "determina", "discuti", abbiamo adoperato "imposta", "scegli", "costruisci", che prefigurano quel ruolo "attivo" dello studente cui si è fatto cenno più volte, a proposito dell'approccio laboratoriale all'apprendimento della matematica.

Considerazioni conclusive

In questa discussione sull'utilizzo didattico della CG, abbiamo cercato di evidenziare le caratteristiche fondamentali dello strumento e di mostrare come esso possa costituire un elemento di profondo rinnovamento dell'approccio didattico, e favorire coinvolgimento e partecipazione degli studenti – meglio, di *tutti* gli studenti.

Riteniamo che il lavoro che indubbiamente è richiesto al docente per poter introdurre la CG nella didattica possa essere ampiamente ripagato sia in termini di risultati di apprendimento che di soddisfazione per il docente stesso; a tale proposito, è opportuno concludere questa riflessione sottolineando nuovamente che per un proficuo utilizzo didattico della CG non è assolutamente necessaria una conoscenza completa e approfondita delle caratteristiche e delle funzionalità dello strumento, né da parte del docente né degli studenti. Tutte le attività riportate a titolo di esempio nel presente lavoro, volendole prendere come riferimento, possono essere condotte con la conoscenza e la dimestichezza acquisite dopo poche ore di esperienza d'uso.

Istruzioni per gli autori

Il *Periodico di Matematiche* pubblica articoli di Matematica e di Fisica che abbiano carattere scientifico, storico e didattico, previa valutazione di contenuti ed originalità. Ciascun lavoro presentato è giudicato da esperti anonimi che riferiscono al Direttore, cui compete il giudizio finale.

Formattazione del testo

- L'articolo deve essere in formato .doc. Può essere scritto in italiano o in inglese, su libera scelta degli autori, ad eccezione del sunto (abstract) da scrivere in sola lingua inglese.
- Il testo deve essere redatto in Times New Roman, con dimensione del carattere di 11 pt, interlinea 1 e testo giustificato su ambo i lati.
- I margini di scrittura sono: 5,7 cm superiore; 6,2 cm inferiore; 4,5 cm destra e sinistra
- Il titolo dell'articolo deve essere in grassetto, centrato e non completamente maiuscolo, con dimensione del carattere di 15 pt. Devono essere lasciati 36 pt di spazio prima di quest'ultimo. Qualora il titolo sia in italiano, va riportato anche in inglese.
- Il nome degli autori deve essere in grassetto e centrato, con dimensione del carattere di 12 pt. Devono essere lasciati 20 pt di spazio prima e 40 pt di spazio dopo.
- Gli autori devono inserire una nota a piè della prima pagina, fornendo gli indirizzi mail e le rispettive afferenze/occupazioni, con dimensione del carattere di 10 pt e rientro di 5mm.
- Il nome del sunto (abstract) deve essere giustificato a sinistra, grassetto e con dimensione del carattere di 12 pt. Il testo dell'abstract non deve superare le 10 righe, con dimensione del carattere di 10 pt.
- I titoli dei paragrafi devono essere in grassetto e giustificati a sinistra, con dimensione del carattere di 14 pt. A conclusione di ogni paragrafo, gli autori devono lasciare uno spazio verticale di 11 pt.
- L'articolo non può superare le 12 pagine, salvo dirette autorizzazioni della Direzione e/o dei componenti del Comitato di Redazione del Periodico di Matematiche.
- A conclusione del testo e prima della bibliografia, gli autori possono inserire il paragrafo Ringraziamenti (con titolo in grassetto, giustificato a sinistra e con dimensione del carattere di 14 pt). In suddetto paragrafo, gli autori possono inserire opportuni ringraziamenti a persone, progetti o funding, questi ultimi esplicitamente indicati.

Bibliografia

- Gli autori devono lasciare due spazi verticali di 11 pt a conclusione dell'ultimo paragrafo (i ringraziamenti, qualora siano inseriti) che precede la bibliografia, per la quale deve essere usata la seguente formattazione:

Bibliografia (12 pt)

[1] CATTANEO C., *Sulla conduzione del calore*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena (3), 1948. (11 pt)

[2] ...

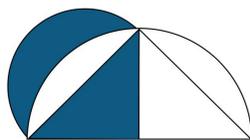
- I riferimenti bibliografici devono essere in ordine di citazione.
- Tutti i riferimenti bibliografici devono essere numerati fra parentesi quadre ([1,2]) nel corpo del testo, seguendo la rispettiva numerazione.

Copyright

Gli autori possono corredare il corpo del testo con immagini in formato .jpeg .jpg con una risoluzione minima di 300 dpi. Ad ogni immagine va associata un'apposita didascalia. Per ogni immagine che non sia di autoproduzione va indicata la fonte, con un eventuale URL. Qualora l'immagine sia di proprietà degli autori sarebbe opportuno indicare il software con il quale la si è realizzata.

Inizio dei lavori

Gli articoli vanno inviati a mezzo posta elettronica al Direttore e a ciascuno dei componenti del Comitato di Redazione del Periodico di Matematiche.



Mathesis

Presidente

Francesco de Giovanni

E' presidente dal 4 febbraio 2021, ventiquattresimo dal 1895, anno della fondazione.

presidente@mathesisnazionale.it

Consiglio Nazionale

Vincenzo Iorfida *vice presidente*, Alessio Russo *segretario*, Roberto Franzina *tesoriere*, Serenella Iacino, Giulio Maletta, Susi Osti, Marcello Pedone, Annalisa Santini, Francesco Sicolo, Pasqualina Ventrone.

Sezioni

Abruzzo – Avellino – Bari – Brescia – Caserta – Castellamare di Stabia – Catania – Crotone – Ferrara – Firenze – Grottaglie – Latina – Lecce – Mantova – Messina – Milano – Mondragone – Napoli – Napoli Flegrea – Olbia – Roma – Rovigo – Salerno – Serra San Bruno – Spoleto – Terni – Udine – Varese – Venezia – Verona – Vicenza.

Rivista

Periodico di Matematiche

Dal 1886 Periodico di Matematica, dal 1921 "di Matematiche". La proprietà della testata è della Mathesis dal 2012 per concessione dell'Editore Zanichelli.

Sito web

www.mathesisnazionale.it



Il disegno di copertina è dovuto a **Clara Giannetti**, docente di Scienze presso l'Istituto Superiore "F. Caracciolo – G. Da Procida" di Procida. Laureata presso la Federico II di Napoli in scienze naturali con indirizzo biologia marina, è da sempre attenta alle tematiche ambientali. Appassionata di arte, ha frequentato corsi di riciclo creativo e disegno naturalistico a Roma e in Gran Bretagna, nonché corsi di pittura e di maiolica.

MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche

c/o Dipartimento di Matematica e Fisica
Università degli Studi della Campania "Luigi Vanvitelli"
Viale Abramo Lincoln 5 - 81100 Caserta (CE)
www.mathesisnazionale.it • info@mathesisnazionale.it