

Periodico di Matematiche



**Organo della
MATHESIS**

Società italiana di scienze
matematiche e fisiche
fondata nel 1895

Numero 3 (Set-Dic 2021)

Volume 13 Serie XIV

Anno CXXXI

Direttore

Francesco de Giovanni

degiovan@unina.it

Comitato di Redazione

Maria Coccozza

mariacoccozza@iscortese.com

Atalia Del Bene

atalia.delbene@istruzione.it

Umberto Dello Iacono

umberto.delloiacono@unicampania.it

Massimo Fioroni

fionimassimo@gmail.com

Paola Gario

paola.gario@unimi.it

Franco Ghione

ghione@axp.mat.uniroma2.it

Vincenzo Iorfida

vincenzo.iorfida@unical.it

Elisabetta Lorenzetti

elisabetta.lorenzetti@unife.it

Marcello Pedone

marcellopedone@tin.it

Alessio Russo

alessio.russo@unicampania.it

Annalisa Santini

annalisasantini66@gmail.com

Luigi Verolino

verolino@unina.it

Staff editoriale

Giuseppe Arnone

giuseppe.arnone@unina.it

Marco Trombetti

marco.trombetti@unina.it

Autorizzazioni e supporti Autorizzazioni Tribunale di Bologna n. 266 del 29-3-1950

Il Periodico di Matematiche è distribuito gratuitamente ai soci Mathesis. Le istruzioni per associarsi su www.mathesisnazionale.it

Abbonamenti per Scuole ed Enti Vari: Per l'Italia €60,00 - Per l'Estero €70,00

Per richiesta di numeri singoli o arretrati: segreteria@mathesisnazionale.it

c/c postale, Codice IBAN:

IT051076010400000048597470

intestato a:

Mathesis Nazionale c/o Dipartimento di Matematica e Fisica

Università degli Studi della Campania "Luigi Vanvitelli"

Viale Abramo Lincoln 5 - 81100 Caserta (CE)

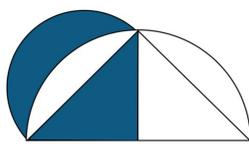
www.mathesisnazionale.it • info@mathesisnazionale.it

Numero 3 (Set-Dic 2021) Volume 13 Serie XIV Anno CXXXI

Periodico di Matematiche

Organo della MATHESIS

*Società italiana di scienze
fisiche e matematiche
fondata nel 1895*



Mathesis

Indice

Corrado Simone Binetti	
Educazione civica e matematica	93
Antonio Salmeri e Mary Ellen D’Innocenzo	
Come abbiamo avvicinato i giovani alla matematica	101
Luca Granieri	
Matematica vs Religione?	109
Manola Gavazzi e Annalisa Santini	
La benda in DAD, i docenti e il futuro dell’istruzione	115
Francesco di Paola Bruno	
La Stanza di Ames: geometria analitica nello spazio dal buco della serratura	121
Paolo Francini	
Microbi, duelli, figurine e molto altro ancora. Calcolare probabilità senza perdersi nell’infinito	133
Alessandro De Paris	
What foundation for undergraduate space geometry?	157

Educazione civica e matematica

Pandemia e Matematica: le due facce della stessa medaglia, buone pratiche per uscir fuori da questo incubo il prima possibile, rispettando la Costituzione Italiana ed il suo codice civile

Civics and mathematics

Pandemic and Mathematics: the two sides of the same coin good practices to get out of this nightmare as soon as possible, respecting the Italian Constitution and its civil code

Corrado Simone Binetti¹

Abstract

By carefully analyzing with my students, the articles of the Italian Constitution and the Civil Code, I felt the moral obligation to discuss with them some terms that the media now make extensive use of to inform us about the progress of the pandemic still ongoing. From an informal dialogue with my students, it emerged that they were not yet completely aware of the concept of virus (whose definition below I carry after the legislative articles), and they were also eager to better internalize concepts such as exponential growth, peak, R_0 index, R_t index, logistic curve, SIR model, etc.

Riferimenti costituzionali e biologici:

Articolo 32 della Costituzione:

“La Repubblica tutela la salute come fondamentale diritto dell’individuo e interesse della collettività, e garantisce cure gratuite agli indigenti. Nessuno può essere obbligato a un determinato trattamento sanitario se non per disposizione di legge.

La legge non può in nessun caso violare i limiti imposti dal rispetto della persona umana”.

Viene dunque tutelato “l’individuo”, non il solo cittadino.

Tutti siamo tutelati e dobbiamo tutelare tutti.

¹corradoBINETTI@libero.it - Docente di ruolo di Matematica presso l’I.P.S.E.O.A. di Molfetta, settore Prodotti dolciari; socio della Mathesis Nazionale Città Metropolitana di Bari.

Articolo 41 della Costituzione:

L'iniziativa economica privata è libera. Non può svolgersi in contrasto con l'utilità sociale o in modo da recare danno alla sicurezza, alla libertà, alla dignità umana...

Articolo 2087 del Codice Civile:

L'imprenditore è tenuto ad adottare nell'esercizio dell'impresa le misure che, secondo la particolarità del lavoro, l'esperienza e la tecnica, sono necessarie a tutelare l'integrità fisica e la personalità morale dei prestatori di lavoro.

Definizione di Virus:

Il *virus* (dal latino *vīrus*, "veleno") è un'entità biologica con caratteristiche di parassita obbligato, in quanto si replica esclusivamente all'interno delle cellule degli organismi. I virus possono infettare tutte le forme di vita, dagli animali, alle piante, ai microrganismi (compresi altri agenti infettanti come i batteri) e anche altri virus.

Parafrasando un testo di manzoniana memoria, I Promessi Sposi, ho pensato a cosa avrebbe detto Don Abbondio, se fosse vissuto nel 2020, nel nostro mondo afflitto dalla pandemia: "*R*", *chi era costui? Nominava tra sé don Abbondio seduto sul suo seggiolone [...] tanto il pover uomo era lontano da prevedere che burrasca gli si addensasse sul capo!*"² Se fosse protagonista in questa epidemia da Covid19 invece che in quella della peste manzoniana forse don Abbondio non si sarebbe chiesto chi fosse Carneade bensì quale fosse il significato dell'indice R!

Questa sigla un tempo riservata solo al mondo della medicina e degli infettivologi in particolare e dimenticata in qualche tomo universitario di Igiene, oggi è ritornata alla ribalta riempiendo giornali, televisioni, dibattiti e decreti governativi. Sarebbe importante darne una spiegazione chiara e circostanziata, soprattutto agli studenti che affollano il mondo scolastico, perché in realtà una spiegazione è stata data ma non tutti l'hanno afferrata.

Viene ritenuto da molti esperti di settore, che fu l'epidemiologo George Mac Donald nel 1952 a proporre per primo questo indice in una epidemia di febbre malarica con l'articolo, *Malaria in Britain*, *BMJ*, vol.2, n.4775, 12 luglio 1952, pag 92³ e per una sua storia si può leggere l'articolo di J.A.P Heesterbeek, *A brief history of R0 and a recipe for its calculation*, in *Acta Biotheorica*, vol. 50, n.3, 2002, pp 189-204⁴.

²Ricordiamo che sia nel romanzo *I Promessi Sposi* che nel saggio storico *Storia della colonna infame*, A. Manzoni aveva narrato della peste che colpì Milano nel 1630, e poi si diffuse in gran parte dell'Italia, portando morte e sofferenze nella popolazione.

³www.bmj.com/content/2/4775/92.2.extract.jpg

⁴link.springer.com/article/10.1023/A:1016599411804

“R” viene considerato, in grammatica, come un cosiddetto prefisso verbale iterativo che dà significato di ripetizione ad un evento: ri-chiudere, ad esempio, significa chiudere nuovamente, ri-infettare significa infettare nuovamente; l’indice R è quindi, un indice usato per misurare quindi le capacità di ri-infettare di un agente patogeno. Ma perché in alcuni grafici statistici lo troviamo con il pedice zero?, perché quindi R_0 ? Perché viene riferito ad una situazione riguardante il paziente zero, o per essere più precisi al tempo zero dell’epidemia, quando non si è ancora attuata alcuna misura di contenimento e di contrasto dell’infezione. Se un soggetto infettato viene collocato in una generica collettività, maturerà la facoltà di infettare un numero variabile di persone durante il suo periodo di infettività, e più alto sarà questo numero più contagioso si dovrà considerare l’agente patogeno. Quindi questo indice viene calcolato come rapporto tra il numero di soggetti che sono stati contagiati e il numero di soggetti contagianti che hanno diffuso l’infezione.

Se l’indice vale 1, significa che ogni infetto arriva a contagiare solo un altro soggetto e quindi l’epidemia si riproduce ma rimane costante come numero di soggetti, se invece l’indice è >1 allora l’epidemia si svilupperà esponenzialmente assumendo proprio l’ R_0 come parametro fondamentale della funzione esponenziale, se invece è < 1 e continua ad esserlo allora l’epidemia tende ad esaurirsi e tanto più l’indice sarà basso tanto più veloce l’epidemia si esaurirà. Se poi l’indice diventasse addirittura pari a zero, allora vorrà dire che l’agente patogeno ha esaurito le sue capacità di infettare. I nomi dati all’indice R_0 sono molteplici: “numero di riproduzione di base”, “numero di riproduzione netto”, “tasso di riproduzione virale”, ecc., però tra tutte le definizioni precedenti appare inappropriata, l’espressione tasso in quanto, nella sua formulazione originale, l’ R_0 non misura l’infettività nell’unità di tempo bensì il numero di soggetti che possono venir infettati da un solo individuo durante tutto il suo periodo di infezione. Il valore dell’ R_0 è stato stimato per diverse epidemie e ad esempio è stato calcolato un valore tra 0,9 e 2,1 nelle epidemie influenzali stagionali, tra 1,4 e 2,8 nell’influenza spagnola del 1918, tra 3 e 5 nel vaiolo, tra 10 e 12 nella parotite, tra 12 e 18 nel morbillo, ecc.

Ovviamente il valore di R_0 può dipendere da molti fattori e non solo dall’infettività propria dell’agente patogeno ed è per questo che in questo ultimo periodo, durante l’epidemia di coronavirus, molti esperti e studiosi hanno preferito utilizzare l’espressione R_t , cioè l’indice di riproduzione al tempo t, dipendente quindi dalle misure di contenimento adottate e spesso, a differenza dell’ R_0 , l’ R_t viene utilizzato proprio come tasso di riproduzione, cioè come numero di soggetti contagiati da un soggetto infetto nell’unità di tempo.

Ogni processo di accrescimento può essere *lineare* o *esponenziale*.

Si dice che una grandezza cresce linearmente quando ad intervalli di tempo uguali corrispondono incrementi uguali: così, ad esempio, è lineare l’andamento dei risparmi di un bambino a cui la mamma inizialmente mette da parte 1000 euro e poi ogni anno, aggiunge 100 euro: dopo un anno il bambino si troverà con 1100 euro di risparmi, dopo due anni con 1200 euro, dopo tre anni con 1300 euro e così via.

Si dice invece che una grandezza cresce *esponenzialmente* allorché ad intervalli di tempo uguali corrispondono *incrementi pari ad una frazione costante del totale*.

Se un'altra mamma invece che mettere ogni anno 100 euro nel salvadanaio del figlio ne avesse messo mille in banca al tasso di interesse ad esempio del 7% annuo, alla fine dell'anno il bambino avrebbe 1000 euro + 70 euro. L'anno successivo, l'interesse del 7% verrebbe calcolato su 1.070 euro e produrrebbe altre 75 euro circa di interesse che si andrebbero ad aggiungere alla somma già posseduta.

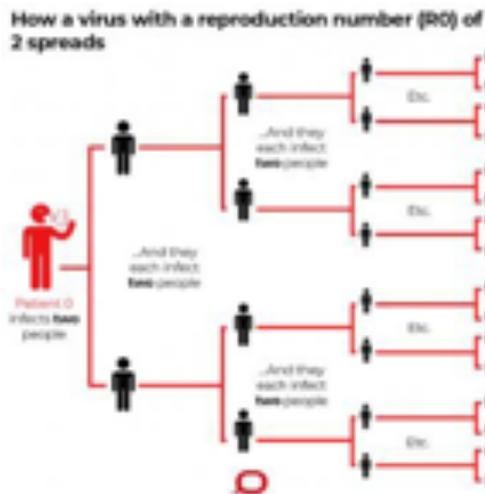
L'anno ancora successivo l'interesse verrebbe quindi calcolato su una cifra nuovamente più alta.

Ora è facile comprendere che quanto maggiore è la somma depositata sul conto tanto più denaro verrà aggiunto ogni anno come interesse; ma quanto più se ne aggiunge tanto più ve ne sarà nel conto l'anno successivo e quindi ancora più se ne aggiungerà come interesse. La caratteristica delle crescite esponenziali è proprio questa: più è grande la quantità di cui si dispone, più essa si accresce. Se la quantità è piccola aumenta poco, se è media aumenta moderatamente, se è grande aumenta molto.

I processi di crescita esponenziale sono assai comuni in campo finanziario, in biologia, in medicina e in tanti altri settori del sapere, dove a volte possono produrre conseguenze sorprendenti.

Ritornando ad R_0 , quindi, possiamo definirlo come un *dato statistico* fondamentale da analizzare all'inizio di una epidemia, poiché consente di conoscere la velocità di diffusione del virus e consente di sviluppare il modello epidemiologico più adatto.

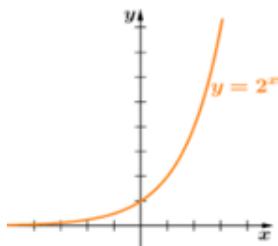
All'inizio della pandemia, in Italia, si è stimato un R_0 pari a 2 che ha comportato una *crescita esponenziale* degli infetti, secondo il seguente modello:



Dal punto di vista matematico avremo: $N = 2^n$, dove N è il numero degli infetti e n il numero dei giorni in cui si sta effettuando l'indagine; utilizzando quindi la simbologia delle funzioni avremo: $y = 2^x$.

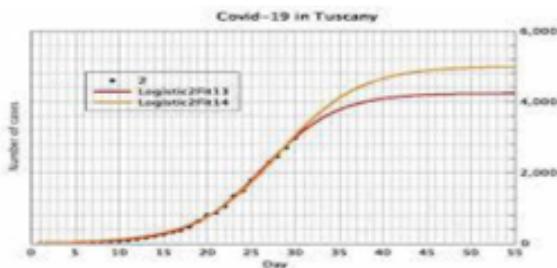
PAZIENTE ZERO	GIORNO 0	GIORNO 1	GIORNO 2	GIORNO ...	GIORNO n
	x=0 y=1 paziente	x=1 y=2 pazienti	x=2 y=4 pazienti	x=... y=... pazienti	x=n y=2 ⁿ pazienti

Quindi, come precedentemente affermato se $R_0 > 1$, il fenomeno epidemico è in fase embrionale, per cui il modello di crescita più appropriato per descriverlo, è quello esponenziale e la curva che lo rappresenta quindi al meglio è quella della funzione esponenziale:

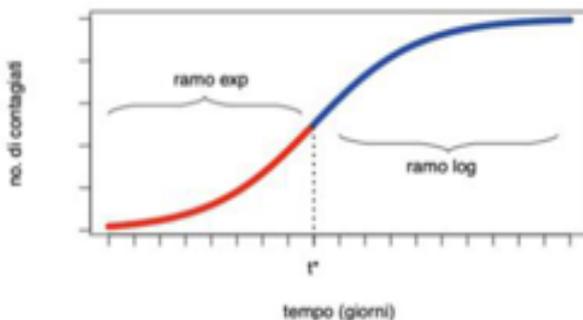


Maggiore è R_0 , maggiore è la velocità di crescita della curva e quindi maggiore è il numero dei contagiati.

Questo modello però, *con l'avanzare dell'epidemia*, risulta *irrealistico* perché dovendo la funzione continuare a crescere all'infinito, come si evince dal grafico, prima o poi il virus colpirebbe l'intera popolazione, esaurendo quindi le sue risorse e la popolazione risulterebbe inerme nell'impedirne la diffusione. Grazie ai vari lockdown locali e nazionali ed alle forti campagne di sensibilizzazione per l'igiene atte ad incentivare il distanziamento sociale e l'uso di mascherine, la popolazione mondiale ha *costretto il virus a cambiare percorso*. La diffusione dell'epidemia, dopo queste misure, è stata infatti più contenuta, seguendo l'andamento della *Curva Logistica*:



Una *funzione logistica* o *curva logistica* descrive una curva ad S di crescita di alcuni tipi di popolazioni P. All'inizio la crescita è quasi esponenziale, successivamente rallenta, diventando quasi lineare, per raggiungere una posizione asintotica dove non c'è più crescita.



Da quest' ultimo grafico possiamo notare che il ramo esponenziale (ramo in rosso) della curva che ha caratterizzato la prima fase dell'epidemia subisce un progressivo rallentamento, per poi nel momento in cui R_0 o R_t si avvicinano o sono pari a 1, nel punto di flesso (t^*), la curva inizia a «virare» e si assesta, raggiungendo una posizione asintotica, senza più crescere, prendendo l'aspetto di un ramo di curva logaritmica (parte in blu).

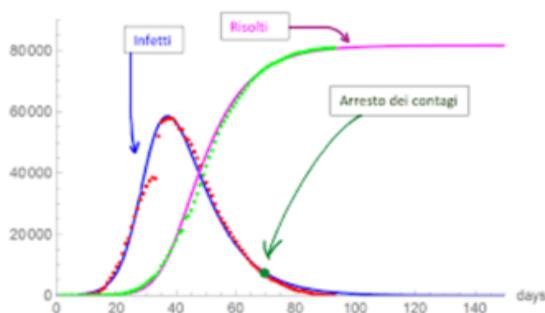
Anche il *modello logistico* comunque presenta dei limiti evidenti perché, nonostante riesca ad inquadrare bene la fase di rallentamento e di un certo assestamento dei contagi, non ammette la possibilità che ci possa essere una regressione della malattia o di nuove crescite esponenziali.

Il modello matematico più accreditato e più realistico, utilizzato da tutti gli scienziati ed epidemiologi che si stanno occupando di questa pandemia, è il *modello SIR*, grazie al quale si può prevedere più facilmente l'andamento futuro della malattia.

In epidemiologia, un modello matematico è un modello simbolico costituito da una o più equazioni che prendono in considerazione i diversi *parametri* che sono coinvolti nella genesi e nell'evoluzione del fenomeno di interesse sanitario (in genere: una malattia) studiato. Il modello SIR si colloca tra i modelli comportamentali, cioè quei modelli nei quali si assumono delle ipotesi per semplificare la simulazione matematica della dinamica delle malattie infettive, sinteticamente tali ipotesi presumono che la popolazione sia divisa in compartimenti e che ogni individuo nello stesso compartimento abbia le stesse caratteristiche. I modelli compartimentali sono di solito costruiti con equazioni differenziali ordinarie (che sono deterministiche).

Il modello SIR classifica una certa popolazione N in comportamenti, che possono essere elencati nel seguente modo:

- 1) S = suscettibili,
- 2) I = infetti/infettivi,
- 3) R = recuperati, guariti, non infettabili perché immuni, dopo aver contratto la malattia. (Alcuni autori nei loro modelli interpretano la R , come resistenti o rimossi, in quanto non partecipano al processo epidemico, immuni o isolati o deceduti).



Questo modello epidemiologico, nella curva blu, presenta *tre fasi*: la prima fase è *esponenziale*, la seconda descrive il *picco* della malattia, la terza l'*arresto dei contagi* (R_0 o R_t minore di 1). Infine, la curva rosa-verde, è quella dei casi risolti: essa descrive una situazione epidemica dove i guariti riescono a rimanere in salute, o perché diventati immuni, oppure perché hanno utilizzato la buona "pratica" del distanziamento sociale o perché ancora "immunizzati" da nuovi farmaci e vaccini.

Qui di seguito infine un problema di realtà da analizzare con i propri studenti, per verificare l'avvenuta interiorizzazione dei nuovi concetti spiegati.

Problema di realtà:

In un laboratorio di pasticceria, in seguito ad una indagine epidemiologica sui dipendenti (i dipendenti sono stati sottoposti a tamponi rapidi, in seguito ad una positività accertata nella struttura), si è stimato che l'indice di contagiosità da Covid-19 è pari a $R_0 = 2,2$. Quanti saranno i contagiati dopo 3 giorni?

Disegna nel piano cartesiano la curva che descriva l'andamento della malattia infettiva nella sua fase "embrionale". Quale nome assume?

Quale valore deve assumere R_t affinché l'epidemia possa ritenersi in fase di regressione?

Quale è infine il valore di R_t che può confermare che l'agente patogeno ha esaurito le sue capacità di infettare?

Ringraziamenti

Intendo ringraziare il Dipartimento di Matematica dell'I.P.S.E.O.A. di Molfetta (BA), che ho l'onore di presiedere, per la collaborazione nella scelta oculata e professionale sull'argomento trattato nell'articolo, in vista anche dell'introduzione della disciplina Educazione Civica fra le materie di studio ed il mio amico fraterno Dott. Giovanni Favuzzi, Dirigente Biologo nell' U.O. C. di diagnostica di laboratorio e nell' U.O. S. Dip. di Emostasi e Trombosi presso l' I.R.C.C.S. Ospedale Casa Sollievo della Sofferenza, San Giovanni Rotondo (FG), per il supporto materiale e morale fornitomi.

Sitologia

- [1] <https://www.epiprev.it/r0-rt-rdt-che-sono-e-che-significano>.
- [2] <https://liceosocratebari.edu.it/wp-content/uploads/2020/06/la-matematica-del-contagio.pdf>.
- [3] https://www.matematicapovolta.it/ebookquinta/funzioni_esponenziali/esCrescitaEsp.htm.
- [4] <https://www.neodemos.info/2020/03/17/la-curva-dei-contagiati-da-covid-19-la-ricerca-del-punto-di-svolta/>.
- [5] https://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_logistica.
- [6] https://it.wikipedia.org/wiki/Modelli_matematici_in_epidemiologia.
- [7] [https://it.wikipedia.org/wiki/Virus_\(biologia\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Virus_(biologia)).

Come abbiamo avvicinato i giovani alla matematica

How we brought the youth closer to mathematics

Antonio Salmeri¹ e Mary Ellen D’Innocenzo²

Se ho il dono d’essere profeta e di conoscere tutti i misteri, se possiedo tutta la scienza e anche una fede da smuovere i monti, ma non ho amore, io non sono niente.

Prima lettera ai Corinzi, 13,1

Abstract

The history of science has known many forms of popularisation, from university readings in past centuries to the use of mass media today. The magazine "Euclide. Giornale di matematica per i giovani" was created as a form of popularisation of mathematics, above all to give young people the opportunity to participate actively, as the founder did when he encountered the first mathematics journals. The profile of the journal was then broadened to become an expression of 'third culture.

Prefazione

Il racconto del tempo del giornale Euclide, fino ad oggi, avvalorato come i giovani abbiano il diritto di avere una guida e segnali da seguire, in piena libertà di espressione e gratuità.

Euclide realizza anche il potere taumaturgico degli incontri tra le persone, lo scambio vicendevole delle idee, dei progetti, senza la predominanza di uno con l’altro, per creare una comunità della divulgazione della scienza e della conoscenza.

¹info@euclide-scuola.org - Direttore Generale Euclide. Giornale di matematica per i giovani.

²info@euclide-scuola.org - Co Editore Generale Euclide. Giornale dei giovani.

Questi sono le due grandi colonne, diritto dei giovani di avere una guida e la creazione di una comunità, che sorreggono il tempio di Euclide.

Un progetto realizzato dalla provenienza di una terra, destinata al pascolo e alla semina, la Sicilia, ma anche terra di numerosi templi, e trovando, nella distante Roma, quello stesso terreno, fu fondato il tempio Euclide. Ovunque ci sia la stessa consistenza e fertilità venne, e viene tutt'ora eretto, con gli editori regionali, un luogo dove celebrare, raccontare, un luogo che continuerà nel tempo, un luogo di collegamento tra il divino e l'umano, dove portare le proprie statue di terracotta, ma anche dove banchettare insieme.

Perché quello che fa Euclide è quella che viene chiamata la "terza cultura", il collegamento tra il mondo umano e il mondo della natura, tra la cultura scientifica e umanistica, per essere uomini nel mondo.

Un luogo dove lo scambio di idee, di emozioni, di stupore che non ha gerarchie, dove i giovani sono parte attiva e viva, un luogo dove per comprendere il presente e dare forma al futuro, si guarda anche al passato. Euclide dà l'opportunità di seguire quel filo storico che ha portato alle innovazioni e alle scoperte attuali.

Solo attraverso la storia e la conoscenza si può attraversare il viaggio della vita, e in questo viaggio abbiamo Euclide, che ispira e rende consapevoli i giovani nella loro attività scolastica, nel loro quotidiano, nelle loro passioni. Gli articoli pubblicati sul giornale, i vari temi proposti sono un incentivo per i giovani, ma anche per gli insegnanti, in modo che si rivolgano allo studio non solo come attività finalizzata per avere un futuro lavorativo realizzato, ma per poter essere pienamente nel mondo, per saper fare scelte consapevoli, per affrontare gli eventi della vita.

Questo tempio, il giornale Euclide, è orientato verso la stella polare, per essere da bussola, per indicare la direzione ai giovani durante il loro viaggio.

Antefatto

La storia di *Euclide. Giornale di matematica per i giovani* nasce da molto lontano, precisamente nel 1952, quando, studente della V D del Liceo Scientifico "Arcangelo Scacchi" di Bari, conobbi con mia grande gioia la rivista *La Scienza per i Giovani* supplemento di *Archimede*, edita proprio quell'anno da Felice Le Monnier di Firenze.

Moltissime copie del primo numero di questa rivista furono diffuse in tutte le scuole superiori d'Italia e gli insegnanti di matematica invitarono i propri alunni ad abbonarsi ed eventualmente partecipare al concorso dalla stessa indetto. Nella presentazione del primo numero si leggeva:

Al Lettore.

Il successo ottenuto dalla Rivista Archimede ha incoraggiato la Direzione e la Casa Editrice a dar vita a un Supplemento destinato agli studenti delle scuole superiori e ai cultori di matematica e fisica elementari.

Scopo principale di La Scienza per i Giovani é di far maggior-mente avvertire l'importanza e l'utilità degli studi scientifici e di mettere in luce la loro suggestiva bellezza [...].

Gli argomenti che saranno trattati in La Scienza per i Giovani non perseguiranno un fine di originalità ma quello di suscitare vivo interesse nei lettori. Sarà quindi evitato quanto non sia ca-pace di rafforzare i benefici di una appropriata educazione scientifica e di promuovere vocazioni per questi studi.

La Direzione di Archimede è convinta che non si debba accettare l'opinione assai diffusa secondo la quale i giovani d'oggi non vogliono dedicarsi allo studio di queste discipline perché non sentono verso di esse nessuna seria attrazione, ma ha invece piena fiducia nei giovani e nella loro capacità di lavoro: fa quindi affidamento anche nella loro diretta collaborazione a questa Rivista, non solo attraverso la Palestra delle Gare, risoluzione di problemi e questioni a premio, ma pure con l'invio di note che rappresentino il frutto di personali ricerche in questo campo di studi.

F.to La Direzione di Archimede.

Fu proprio l'ultima frase che mi spinse a interessarmi maggiormente alla nuova rivista. Leggevo gli articoli con grande attenzione e inoltre, poiché venivano proposti problemi da risolvere, la cosa mi stimolò a cimentarmi su argomenti nuovi di cui non sospettavo l'esistenza.

Grande fu la soddisfazione nel ricevere alla fine dell'anno una lettera dal Direttore che mi comunicava:

[...] il numero e la bontà delle risoluzioni inviate alle questioni da risolvere proposte da La Scienza per i Giovani nei fascicoli della prima annata Le hanno fatto meritare, per giudizio espresso da apposita Commissione, il primo premio consistente in una macchina da scrivere Olivetti lettera 22 completa di valigetta flessibile gentilmente offerta dalla Società Olivetti. [...]

La Rivista sarebbe anche lieta di poter pubblicare nella rubrica La Parola ai Giovani due o tre Sue pagine sopra qualche argomento di matematica o fisica elementari che presenti interesse per i lettori e che si senta in grado di poter trattare compiuta-mente. Se interpellati, potremo darle qualche consiglio in merito. Insieme ai nostri più vivi rallegramenti, Le inviamo i più cordiali saluti e auguri.

Il Direttore Roberto Giannarelli.

Colsi immediatamente la proposta e inviai, con trepidazione, un paio dei tanti modesti risultati (ma per me allora importanti) che ero riuscito a trovare nel corso degli ultimi anni di Liceo, per la pubblicazione dei quali (ma la meritavano?) non sapevo a chi rivolgermi. E iniziai così, su un giornale per i giovani, a pubblicare i frutti delle mie ricerche.

Riprendo a occuparmi di matematica

Gli anni passano... Terminata la mia attività lavorativa nel campo della progettazione industriale, ho incominciato a interessarmi di storia della matematica, di didattica, del mondo della scuola in generale, ed ho dovuto prendere atto che l'esperienza di noi studenti con *La Scienza per i Giovani*, diventata poi *La Scienza e i Giovani*, non si era più ripetuta, a parte la effimera vita della rivista, di notevole livello culturale ed editoriale, *XLatangente*, con redazione presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano. Ma come far rinascere una rivista tipo *La Scienza per i Giovani*? Tutti i tentativi dal 1870 al 1970, di riviste destinate alle giovani leve hanno avuto una vita breve, a volte davvero difficile, e certo non per il valore del contenuto ma, soprattutto, per motivi legati ai costi di stampa.

Così avvalendomi dei nuovi mezzi informatici, nell'aprile 2011 ho pubblicato, ovviamente con grande trepidazione, il primo numero di *Euclide.Giornale di Matematica per i Giovani* all'indirizzo www.euclide-scuola.org.

La motivazione che mi ha spinto a creare questo giornale online è stata in primo luogo quella di cercare di emulare *La Scienza per i Giovani* ispirandomi per quanto possibile alla sua impostazione ed alle sue finalità.

Euclide è nato soprattutto per ospitare articoli di studenti. Ho iniziato con i testi ricavati dalle conferenze che alcuni ragazzi hanno tenuto nella Sezione Romana Mathesis; poi ho invitato le scolaresche che hanno partecipato al concorso indetto dal MIUR, dalla Mathesis Nazionale e dall'Istituto Storico Italiano del Medioevo di Roma a mandarmi i loro contributi per essere pubblicati. A questo punto mi ero posto il problema se ospitare soltanto il lavoro vincente, o includere i lavori segnalati, o anche tutti i lavori meritevoli. Dopo avere riflettuto, mi sono deciso per quest'ultima opzione, in quanto, sia per i ragazzi, sia per gli insegnanti, il confronto con gli altri partecipanti era occasione di arricchimento e di stimolo. Ritengo che l'idea sia stata buona poiché le scuole delle quali ho pubblicato le ricerche hanno continuato a collaborare con entusiasmo, anche partecipando ai concorsi banditi dallo stesso *Euclide* su temi vari. Agli studenti viene rilasciato un attestato online di partecipazione alla rivista. Per una più immediata consultazione, i lavori elaborati dai ragazzi e contenuti nei singoli numeri ordinatamente archiviati sono riuniti in Ebook.

Euclide non ospita soltanto lavori di studenti, ma pubblica al suo interno anche:

- brani di storia della matematica e della didattica;
- biografie di grandi matematici;
- indici delle principali riviste italiane di matematica, utili ad agevolare ricerche specialistiche che vengono quando possibile continuamente aggiornati.

Matematica e Teatro

Ai concorsi si è deciso anche di fare partecipare alunni delle primarie ed un anno prendendo spunto da alcuni componimenti di studenti di una IV primaria di Roma, Il gruppo di ricerca e sperimentazione di didattica e divulgazione della matematica di Castel San Pietro Terme (BO) ha organizzato uno spettacolo teatrale che ha avuto come attori gli stessi studenti nell'ambito di uno dei suoi frequentatissimi Congressi.

Matematica e Didattica

Nel 2018 è stata creata anche la testata *Euclide.Giornale dei Giovani*, diretto dagli stessi studenti e supervisionato da Editori Regionali.

Scopo di questa testata è quella di pubblicare lavori non solo scientifici e di matematica in particolare, ma contributi sociali, di didattica, di disegno, di astronomia, di sport, ecc. Per questa testata sono gli stessi studenti che propongono i temi che vengono banditi.

Il primo tema proposto è stato *La scuola che vorrei*. Questo tema ha avuto un grande successo in quanto gli studenti hanno espresso i loro pensieri, le loro critiche ad una scuola gestita esclusivamente da grandi. I componimenti hanno avuto una insperata eco, tanto che la rivista *Prisma* della Bocconi in un numero del settembre 2019 ha trattato lo stesso tema includendo ben otto lavori degli studenti che avevano partecipato al Concorso *Euclide*.

Matematica e Poesia

L'anno 2020 è stato proclamato dall'Unesco *Anno Internazionale della Matematica* ed il 25 marzo dello stesso anno è stato proclamato *Dantedì*, ovvero anno della poesia in quasi concomitanza del settecentesimo anniversario della morte di Dante Alighieri. Era pertanto opportuno bandire un concorso che facesse riferimento al connubio Matematica Poesia.

Nella cultura contemporanea è abituale contrapporre la cultura umanistica a quella scientifica. Nel 1959 lo scienziato C.P. Snow sintetizzò quest'idea con la celebre conferenza sulle «due culture», in cui, oltre a presentarle come assolutamente distinte e irriconciliabili, accusava la prima di essere dannosa all'umanità, in quanto preoccupata più di far letteratura sulla sofferenza che di risolvere i problemi della società. Più tardi si cercò di ag-giungere le scienze sociali come una «terza cultura», ma questo non ottenne nessun effetto di riconciliazione sulle altre due. Questa idea è tuttavia molto recente nella storia dell'umanità. La stessa rivoluzione scientifica ebbe certo l'obiettivo di abbattere definitivamente l'autorità scientifica per esempio di Aristotele, ma non certo quello di ripudiare la cultura letteraria, che tutti i grandi scienziati condividevano. Matematica e poesia sembrano due ottime candidate per osservare quanto questa mentalità sia appunto cambiata.

Certamente oggi la prima gode spesso la fama di essere arida, rigida, oggettiva, la seconda al contrario viene immaginata come il campo della più totale e incontenibile fantasia, che riuscirebbe a superare qualsiasi limite imposto dalla realtà. Le cose ovviamente non stanno così. Circa un quarto di secolo fa, venne proposta come traccia per il tema di maturità proprio l'idea contraria, attraverso una citazione di D. E. Smith del 1947: «La matematica è generalmente considerata proprio agli antipodi della poesia. Eppure la matematica e la poesia sono nella più stretta parentela, perché entrambe sono il frutto dell'immaginazione. La poesia è creazione, finzione: e la matematica è stata detta da un suo ammiratore la più sublime e la più meravigliosa delle finzioni». Un'osservazione di questo tipo certamente mette in primo piano un elemento essenziale della matematica: il fatto che essa possa essere applicata ad oggetti reali non significa che il suo contenuto sia reale. Nella realtà non esiste il numero tre, esso è il risultato di un'astrazione; tanto più le operazioni, le funzioni, gli assiomi, i teoremi. Sono oggetti ideali, come la filosofia (e sicuramente anche la matematica) antica aveva perfettamente capito. Platone considerava lo studio della matematica come la premessa indispensabile per lo studio della filosofia, perché è essa che insegna anzitutto a guardare al di là della realtà empirica che abbiamo sotto gli occhi. È anche vero che sicuramente in tutte le scoperte matematiche c'è una fortissima dose di intuizione, di fantasia: ovviamente non esiste nessuna regola per produrre nuovi teoremi, ed è proprio la capacità di vedere qualcosa che nessun altro aveva visto prima che distingue il grande matematico dal semplice conoscitore della matematica: in maniera analoga a come c'è una bella differenza tra essere conoscitori della poesia ed essere poeti. Gli stessi matematici descrivono spesso le loro scoperte come il risultato di un'ispirazione non molto diversa da quella di un poeta. «Un matematico che non è in nessun senso un poeta non potrà mai essere un matematico completo, scriveva il matematico Karl Weierstrass.

Ma la vicinanza tra le due cose si nota anche dal punto di vista della poesia. Già Aristotele notava, in maniera paradossale, che la poesia è più «scientifica» della storia: intendeva dire che mentre la seconda descrive fatti singoli, la prima intende rappresentare qualcosa di universale, seppure con la descrizione di episodi, circostanze e sentimenti singolari: tant'è vero che tutti più o meno si riconoscono nel contenuto di una poesia. Da questo punto di vista, quindi, il contenuto della poesia è un'astrazione tanto quanto lo è quello della matematica, e probabilmente le doti che essa che richiede non sono differentissime. C'è però anche un aspetto probabilmente più profondo: se eccettuano alcuni sviluppi contemporanei, tipico della poesia è il fatto che le parole devono rispettare una certa forma, espressa in modo aritmetico: un certo numero di sillabe, certe posizioni degli accenti (nella poesia latina e greca certe lunghezze delle sillabe), un certo numero e disposizione di versi. Certamente questo lavoro addizionale della poesia può essere spiegato in diversi modi: per esempio come l'imposizione di una struttura che rende il testo più facile da ricordare (gli interi poemi omerici furono dapprima tramandati solo a memoria!), oppure come la ricerca di una forma che, attraverso la simmetria e la ripetizione, è istintivamente percepita come più piacevole. Queste spiegazioni sono giuste, ma l'effetto finale è che la poesia si presenta di sua natura come un discorso in una forma matematicamente strutturata.

Se poi si volesse considerare anche la musica, che in origine era inseparabile dalla poesia, l'aspetto matematico sarebbe ancora più evidente: non soltanto il ritmo, ma anche l'altezza delle note è determinata matematicamente. Non è un caso che la prima teoria musicale dell'antichità viene attribuita a Pitagora. Ancora Leibniz (contemporaneamente matematico e filosofo) aveva perfettamente presente questo aspetto quando nel 1712 definiva la musica come «un esercizio nascosto di aritmetica da parte dell'anima che non si rende conto di contare»: una definizione che si adatta perfettamente anche all'aspetto ritmico della poesia. Sicuramente queste annotazioni non bastano per ricomporre la frattura tra sapere umanistico e sapere scientifico: però possono almeno ispirare la fiducia nel fatto che questa frattura può essere ricomposta. In ogni caso *Euclide* ha bandito un concorso su un sonetto in endecasillabi inneggiante all'importanza della matematica in acrostico, ovvero le prime lettere di ogni verso dovevano formare le parole EUCLIDE GIOVANI.

In realtà speravo poco che i nostri giovani sapessero comporre un sonetto in endecasillabi e inoltre in acrostico.

La mia sorpresa fu grandissima in quanto oltre a più di 700 frasi inneggianti la matematica in acrostico, sono pervenuti oltre 40 sonetti in acrostico. Qui di seguito riportiamo i sonetti Vincitori con Lode:

Realizzato dalla classe 3A della Scuola Media di Piazza del Serchio (Lucca) con insegnanti referenti Giuseppina Grandini e Valeria Agostini.

*Eterna notte di domande piena
 Universo mistero sconosciuto
 Coordinate di sapienza appena
 Lasciano il vuoto, freddo ed insoluto
 Incontrano effemeridi brillanti
 Domando al viaggiator certo sentiero
 Etereo aiuto a incerti naviganti
 Girano le sfere planetarie
 Intorno a mille soli, luminose
 Or danzano galassie, millenarie
 Vanno per loro strade, nebuloze.
 Ansiosi di scoprire ancora il vero
 Novelli pitagorici curiosi
 Indagano da sempre, il gran mistero.*

Realizzato da Walter Reina del 3 Liceo Scientifico "Albert Einstein" di Palermo con insegnante referente Marilena La Rosa.

*E' strano potere solo pensare
 Un tipo di linguaggio universale,
 Con il quale potremmo conversare.
 Lo si riterrebbe un qualcosa astrale,
 Incomprensibile da attuare e usare:
 Dell'algebra si potrebbe parlare!
 E se di ciò non ne avrete abbastanza,*

*Geometria avrete in abbondanza:
Intriganti triangoli mozzamente,
Orgoglio di un Euclide intelligente.
Varietà di calcolo scoprirete,
Analizzando schemi lo farete!
Non per questo dovrete spaventarvi,
Invece converrebbe rallegrarvi!*

Realizzato da Stefano Braccini e Sara Faedda del 3 Liceo Scientifico “Galileo Galilei” di Civitavecchia (Roma) con insegnante referente Elena Renzi. In realtà i sonetti erano tre di cui questo in romanesco.

*E mo' finalmente se n'è annata
Un po' co' ritardo, ma mejo che mai!
Come 'n gufo portava solo guai:
L'esami sapeo fa solo 'a data!
In tutto 'r monno 'na gioia sfrenata,
De qua e de là strilli e zompi assai.
E poi dar sogno de botto me svejai:
Grazie a Dio, ma che brutta nozzata!
In testa 'a matematica c'ho a ogni ora:
Ormai fa parte de me... so' sincero!
Vedi 'n po' se nu 'a tratto da signora!
A matematica serve pe' davvero:
Nessuno può, solo lei 'r monno mijora!
Io a esse matematico so' fiero!*

I contributi pervenuti sono stati più di settecento da singoli studenti a intere classi, dove la maggior parte era costituita, come da bando, da frasi in acrostico e ben quarantatré in sonetti endecasillabi, non solo da studenti, ma anche da insegnanti medi e universitari e persino da poeti professionisti. Questi ultimi sono reperibili come Ebook in www.euclide-scuola.org.

La Redazione, derogando dal bando, volle proclamare Vincitore con Lode, ovvero con premio in denaro, soltanto i contributi inviati da studenti non appartenenti a classi collegate comunque con la Redazione di Euclide, i rimanenti, tutti di ottima qualità furono proclamati semplicemente Vincitori.

La Cerimonia di Premiazione era stata organizzata presso il Consiglio Nazionale delle Ricerche di Roma proprio il giorno di Dante.dì, ma l'emergenza sanitaria, dopo un paio di rinvii, ha sconsigliato la cerimonia già definita in tutti i dettagli.

Bibliografia

- [1] Salmeri, A. (2013). I giornali di matematica per i giovani. *Periodico di Matematiche*, s. XI, 5 (1), 51-64,

Matematica vs Religione?

Maths vs Religion?

Luca Granieri¹

Abstract

We discuss some interdisciplinary points in maths connected with religion starting from the paper *Matematica e Religione* appeared on this journal some time ago.

—

La Matematica è una scienza esatta. Anzi, la scienza esatta per antonomasia. Per alcuni risulta a volte sin troppo esatta. Tanto da renderla antipatica anche a molti studenti, contribuendo alla sua fama di materia arida, asettica, e lontana dal mondo della cultura. Ma la cultura, perlomeno una che non sia troppo superficiale, ha un crescente bisogno di matematica, come ingrediente essenziale per una conoscenza solida e per guardarsi dalle derive pseudoscientifiche e dagli *influencer tuttologi* oggi tanto diffusi sui mass media di ogni ordine e grado. Lo scopo di questo articolo è trattare, seppur sommariamente, un tema pervasivo e onnipresente in qualunque cultura: *la religione*. Presentando alcune riflessioni circoscritte stimulate dall'articolo [7]. In particolare, ci concentreremo su qualche aspetto che potrebbe risultare più controverso o di dubbia interpretazione, allo scopo di fornire qualche elemento in più per un confronto equilibrato su un tema tanto delicato.

Il fatto è che nell'accostarsi ad argomenti siffatti non è per nulla facile mantenere l'obiettività e il rigore necessario per un dialogo costruttivo che non scada, anche nostro malgrado, in contrapposizioni ideologiche, magari perpetuando polemiche datate e stantie. Soprattutto quando ci si confronta su temi che investono gli aspetti più profondi e intimi dell'animo umano, con il rischio di utilizzare la matematica, o la scienza in generale, per meri fini strumentali.

Un difetto quasi inevitabile della cultura laica è quello di ignorare quanto profonde siano le radici religiose nei popoli e nelle comunità, e quanto le stesse comunità siano costruite sulla religione. [2, p. 14].

¹Liceo Scientifico E. Fermi, Bari. E-mail: granieriluca@libero.it

Dogmatismo

Uno dei punti lamentati in [7, p. 72] che rendono difficili i rapporti tra la scienza e la religione è *l'intolleranza che discende dalla pretesa del possesso esclusivo della verità*. Quale illustrazione di questo pericolo si riferisce il commento Teologico del Cardinal Biffi sulle avventure di Pinocchio:

Pinocchio è una storia sacra, che è la storia cristiana della salvezza. È un burattino che figlio lo diventa davvero. È un capolavoro teologico. [...] Pinocchio è conforme alla vicenda salvifica proposta dal cristianesimo. Giudicare di questa conformità spetta ai maestri di fede (ed è l'arte mia), certo non ai critici letterari o agli storici sociali e politici.

In [7] non si concorda con il commento del cardinale ritenendolo non pertinente e richiamando allo scopo il tema della metamorfosi. E rivendicando ai critici letterari il diritto di fare ciò. Ci permettiamo di avanzare un'interpretazione diversa per avvicinarla maggiormente alla matematica. In effetti, anche il lettore non esperto potrebbe rilevare che la riportata citazione del cardinale possa andare in una direzione meno perentoria e intransigente di quanto possa apparire. Intanto, non sembra si neghi la libertà dei critici letterari o di altri nel trattare certe questioni, quanto piuttosto si rivendichi la libertà di fare il proprio mestiere di *teologo*. Semplicemente che "ognuno faccia il suo mestiere" insomma. Questo non significa che i critici letterari non possano esprimersi su questo o su quello. Tutti possono discutere su quanto possa ruotare attorno a cure e vaccini, ad esempio. Ma giudicarne la validità medica spetta, o dovrebbe spettare, agli scienziati esperti del settore, giacché quello è il loro mestiere. Ma se vogliamo stabilire se la vicenda di Pinocchio sia conforme o no alla teologia cattolica magari non sarebbe male tenere in debita considerazione chi è esperto del settore. Già, perché anche la teologia richiede una certa preparazione e il possesso di non poco elevate competenze.

A meno che non si voglia insinuare che qualcuno il suo mestiere non lo sappia fare o lo faccia male. Di fatti, il riferimento al tema della metamorfosi, semmai possa giocare qualche ruolo, sembra piuttosto infelice e nell'interpretazione teologica cui si accenna intervengono sicuramente altre motivazioni che nulla hanno a che fare con la metamorfosi (si pensi ad esempio al libro biblico di Giona). Ma non abbiamo l'intenzione di portare avanti un dibattito per stabilire se Pinocchio sia o no in relazione con la teologia cattolica. Né se la Chiesa Cattolica debba o non debba essere (o faccia bene ad essere) dogmatica. Certo, le discussioni sul dibattito interno alla dottrina cattolica evocato in [7, p. 71], considerando la *Correctio filialis de haeresibus propagatis* (una generica lettera di relativa importanza) *contrapposta dal conservatorismo ecclesiastico all'azione pontificale esplicitata nella Esortazione apostolica postsinodale Amoris Laetitia del Santo Padre Francesco* appare perlomeno bizzarra. Visto che siamo in tema citeremmo invece la Lettera Enciclica '*Laudato si'*' di Papa Francesco, molto più rilevante rispetto al tema scienza-fede, come discusso in modo autorevole e documentato in [2]. Anche se la matematica, purtroppo, in questo discorso papale è piuttosto trascurata. Un motivo in più per approfondire il ruolo culturale di questa disciplina.

Sul fatto che poi ci sia stata una “perfidia teologica” ad arrestare il progresso della matematica all’epoca del cardinale R. Bellarmino ([7, p.71]) non ci pronunciamo più di tanto in questa sede: è forse questa una di quelle affermazioni che discende dalla pretesa del possesso esclusivo della verità? Paradigmatico è anche il riferimento alla vicenda Giordano Bruno, *denudato, arso vivo, così come erano state bruciate le sue opere messe all’Index librorum prohibitorum. Fu come se fosse stata data alle fiamme la scienza stessa e con essa la matematica* ([7, p.87]). Come pure i paragrafi *Insidie matematiche nella musica, Il timore dell’eversione profana e La teologia medioevale contro la matematica* in ([7]). Forse si corre il rischio di riproporre luoghi comuni non trattandoli con la dovuta rigosità. Newton, ad esempio, non era affatto un ecclesiastico cattolico! Al contrario di quanto sembra essere suggerito in [7, pag. 86]. In effetti, uno tra i principali obiettivi teologici di Newton era proprio quello di dimostrare che il pontefice romano fosse l’anticristo in persona! Se, portando all’estremo la provocazione, un contadino fosse stato bruciato anche lui come eretico sul rogo nel 1600, diremmo forse che la Chiesa intendeva perseguire l’agricoltura? Giordano Bruno fu condannato in quanto eretico, e ancor più che nel caso Galileo, le connessioni con la scienza e la matematica sono di secondaria importanza.

Forse la fonte principale di equivoco consiste nel fatto che Bruno abbia sostenuto alcune delle sue tesi eretiche supportandole con argomenti dal sapore vagamente scientifico. Certamente le opere di Bruno contengono anche intuizioni audaci e suggestive, talvolta precorrendo quasi profeticamente temi che la scienza moderna farà propri solo successivamente. Tuttavia, il contributo netto del “poeta-filosofo” Bruno all’imminente emergere della scienza moderna risulta in realtà piuttosto marginale e inconsistente.

Ad ogni modo, anche volendosi staccare da questo giudizio, quale che sia il ruolo nella storia della scienza che volessimo attribuire a Bruno questo non modificherebbe affatto le motivazioni della condanna in quanto essenzialmente indipendenti dalla matematica e dalla scienza in generale, come si evince facilmente dall’unicità del caso Bruno (e Galileo). Quand’anche si volesse sostenere che con Bruno si volesse dare alle fiamme la matematica e la scienza, questo sarebbe un accidente secondario piuttosto che la manifestazione di un disegno organizzato di repressione nei confronti della matematica e della scienza in generale. Ovviamente possiamo giustamente recriminare sulla circostanza che il potere possa perseguire brutalmente soggetti ritenuti ostili e nemici dell’ordine costituito a causa delle proprie idee. Ma questa è un’altra storia, purtroppo non così rara anche ai giorni nostri.

Quello che è certo è che il rapporto tra scienza, matematica e religione è sicuramente notevole, profondo, in un certo qual modo costitutivo e intimo, ma molto intricato. E facilmente soggetto a strumentalizzazioni di parte. Ma basterebbe approfondire appena le questioni per incontrare diverse sorprese rispetto ai ritornelli più spesso ripetuti in materia. Non serve ad esempio essere degli storici per sapere che l’Index librorum prohibitorum comprendeva anche molte versioni della Bibbia stessa, o ad esempio qualsiasi libro di qualunque natura che provenisse da certe stamperie (ad esempio quelle luterane). Non era certo la matematica quello che si voleva bruciare sul rogo ma ben altro... Comunque, per un’introduzione al tema dei rapporti tra la scienza, la matematica e la religione, come pure per il caso Galilei, rimandiamo

il lettore al saggio *Dio c'è e la scienza...* ([5]), nonché al sito <https://disf.org> per un'utile e approfondita guida ai temi interdisciplinari scienza-fede, al fine di avviare confronti equilibrati soprattutto nell'ottica di eventuali percorsi interdisciplinari in ambito scolastico.

La scommessa di Pascal

In riferimento al celebre argomento di Pascal, in [7, p. 88] si ritiene che *la scommessa di Pascal ha suscitato nel tempo gli interventi critici più svariati, generalmente negativi, in qualche caso positivi. La negatività comunque prevale*. Ci si potrebbe chiedere: Negativo rispetto a cosa? Interventi critici di chi? In base a cosa si afferma che la negatività prevale? Rispetto al problema scienza-fede all'inizio di [7] si affermava giustamente l'inutilità di contare il numero di matematici credenti o non-credenti. A proposito di Pascal invece sembra si attinga a un elenco di favorevoli e contrari al suo famoso argomento della scommessa. Ma non ci è dato sapere che tipo di elenco sia (storici della filosofia, storici della scienza, matematici, studiosi di Pascal, ecc.). Forse tale presunto elenco contempla solo certe correnti intellettuali? Oppure lo scopo è contrapporre il presunto giudizio negativo di una non meglio precisata *intelligenza* a quello religioso-cattolico, impersonato dagli evocati Woityla e Ratzinger? Citazioni quest'ultime poco felici. A proposito di Ratzinger si dice infatti: *diamo avvio alle nostre personali riflessioni, constatando che Blaise Pascal contribuisce ad aumentare il dubbio piuttosto che rinvigorire la fede. Riflessioni, quindi, alquanto distanti dalla posizione teologica che fu di Joseph Aloisius Ratzinger, Papa della Chiesa cattolica col nome di Benedetto XVI, il quale sarebbe giunto ad affermare, secondo una certa versione del suo pensiero, di avere ricevuto direttamente da Dio la conferma della validità delle argomentazioni pascaliane. Al contrario, tali argomentazioni mettono in gioco non tanto l'esistenza o meno di Dio, quanto la libertà dell'essere umano, il primato dell'etica, la validità della matematica. Essere obbligati a giocare è una negazione della libertà* [7, p. 89]. Ma Ratzinger ha affermato o non ha affermato quanto l'autore riporta? Ci sono documenti, registrazioni o altro? Su quali fonti è basata una tale dichiarazione così importante? In cosa consiste questa *certa versione del suo pensiero*? Versione prodotta da parte di chi? Non sarebbe male ricordare il celebre motto: *Affermazioni straordinarie richiedono prove straordinarie*. Così com'è posto, quanto riportato su Ratzinger può apparire come un *pettegolezzo* o poco più. Ma vogliamo esaminare sommariamente anche noi l'argomento di Pascal per proporre qualche considerazione sulla matematica. Per ulteriori discussioni si veda il capitolo espressamente dedicato al tema in [5] (si veda anche [4]), e a [1] per un'introduzione al pensiero di Pascal.

Dunque, in [7] si parte dall'osservazione che *gli esseri umani non possono fare a meno di scommettere* per concludere che l'argomento di Pascal sia "negativo" (eticamente?), mettendo in discussione la libertà dell'essere umano. *Essere obbligati a giocare è una negazione della libertà*. Intanto giova ricordare che quelli di Pascal sono dei "Pensieri", dei frammenti provvisori, ricomposti alla sua purtroppo prematura morte, su un'opera maggiore che meditava di comporre, degli appunti insomma. Pertanto non sempre è possibile stabilire con sufficiente chiarezza le intenzioni dell'autore.

Tuttavia, e il bello è anche questo, la proposta di Pascal, per quanto frammentaria possa essere, ha suscitato, e continua a suscitare, moltissime discussioni interessanti. Ora, nello specifico del “problema etico” sollevato in [7] osserviamo che la libertà umana è un concetto relativo piuttosto che assoluto. Saremmo cioè liberi in una certa misura e in certe circostanze. Vincolati dalla nostra natura e da quella del mondo che ci circonda. Non siamo liberi di venire al mondo e in un certo senso siamo stati *obbligati* a vivere. Come direbbe Pascal: *Non so chi mi abbia messo al mondo, né che cosa sia il mondo, né che cosa io stesso. Sono in un'ignoranza spaventosa di tutto.[...] mi trovo confinato in un angolo di questa immensa distesa, senza sapere perché sono collocato qui piuttosto che altrove, né perché questo po' di tempo che mi è dato da vivere mi sia assegnato in questo momento piuttosto che in un altro di tutta l'eternità che mi ha preceduto e di tutta quella che mi seguirà. Tutto quel che so è che debbo presto morire; ma quel che ignoro di più è, appunto, questa stessa morte, che non posso evitare* (Pensieri 194). Se abbiamo il mal di gola, diciamo, siamo costretti a prendere una decisione: curarci o non curarci. Siamo obbligati a giocare a questo gioco e a “scommettere” sulla medicina prescrittaci dal medico. E non possiamo eludere la questione. Anche rifiutarsi di decidere alla fine costituirebbe una decisione implicita. *Oui, mais il faut parier; cela n'est pas volontaire, vous etes embarqué* ci direbbe il solito Pascal (Pensieri 233). È la natura stessa delle cose. Che ci piaccia o no. Facciamo nostro al riguardo quanto riportato in [5, p.113]: *Pascal ci direbbe (Pensieri 451) che con la sola ragione non possiamo decidere se Dio c'è o non c'è. Perché accusare di irrazionalità chi fa la sua scelta? Ma potremmo non decidere affatto! No, bisogna scegliere, prendere posizione, il condividere la vita umana ci pone tutti sulla stessa barca. [...] La mia idea al proposito è che lo scopo di Pascal in merito all'argomento della scommessa fosse non tanto quello di rendere ragionevole il Cristianesimo in quanto tale, quanto quello di mostrare la ragionevolezza e necessità di porsi il problema religioso in generale. In altre parole, che valga la pena di esaminare la questione religiosa. E non si tratta di una questione frivola, [...] Per il fatto stesso di vivere Voi siete impegnati direbbe Pascal. In modo implicito o esplicito, ognuno di noi prende alla fine una qualche posizione rispetto al problema religioso. Per questo siamo incastrati e perlomeno vale la pena porsi seriamente il problema.*

Ora, una volta che il problema è stato identificato, la sua analisi dal punto di vista logico-matematico può rivelarsi importante. In realtà, quest'ultima considerazione rappresenta in fondo uno degli aspetti più interessanti e stimolanti dell'argomento di Pascal, costituendo un precursore della cosiddetta “teoria delle decisioni”. Se p rappresenta la probabilità che Dio esista e V indica, diciamo, il premio conseguente, l'utilità della scommessa su Dio è il prodotto $p \cdot V$. Se ad esempio fosse $p = 0,5$, ovvero una probabilità del 50%, se il premio V è molto superiore a quello corrispondente alle scelte terrene non avrete difficoltà a fare la vostra scelta ci direbbe Pascal. In [3] si critica giustamente l'opzione paritaria tra le due probabilità sull'ipotesi Dio e l'utilizzo del principio di indifferenza. *Ma le stroncature del “pari” che si appoggiano a questo solo rilievo trascurano il fatto che Pascal considera anche l'ipotesi che le probabilità sfavorevoli siano finite, ma più d'una, e addirittura infinite. Ora, Pascal cerca di far*

vedere che la proposta della scommessa regge anche nell'ipotesi di chances sfavorevoli superiore a una, o addirittura di chances sfavorevoli infinite ([1, p. 85]). In effetti, in quest'ultimo caso Pascal ritiene ancora favorevole la scommessa su Dio perché, posta la regola aritmetica $p \cdot (+\infty) = +\infty$ (come è consueto fare nel considerare la cosiddetta *retta reale ampliata*) la sua utilità sarebbe infinita sia, diciamo, nello spazio (celeste o terreno che sia) che nel tempo (eternità). Quindi una sorta di ∞^2 , mentre la scommessa alternativa condurrebbe al più ad un infinito semplice nello spazio (terreno) ma non nel tempo (limitato dalla durata della vita terrena stessa). In altre parole, per Pascal la scommessa su Dio produrrebbe comunque un *infinito di ordine superiore*. Un fenomeno analogo a quanto accade nel calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = +\infty$$

Tutto questo a patto che la probabilità p che Dio esista sia non nulla. Magari estremamente piccola, ma non zero. Poiché in tal caso è ragionevole porre $0 \cdot (+\infty) = 0$, come si pone in genere in teoria della misura e della probabilità (e anche il Padreterno potrebbe essere d'accordo).

Ma chi può dire che l'esistenza di Dio abbia probabilità esattamente zero?

Bibliografia

- [1] BAUSAULA A.: *Introduzione a Pascal*, Laterza (1997).
- [2] BORZACCHINI L.: *La Scienza di Francesco*, Dedalo (2016).
- [3] BRUNO D.: *La scommessa di Pascal*, Periodico di Matematiche, Mathesis, N.1 (2017).
- [4] FESTA F.: *La scommessa tra Pascal e De Finetti*, MatematicaMente N. 255-277 (2020).
- [5] GRANIERI L.: *Dio c'è e la Scienza...*, LaDotta Editore (2014).
- [6] PASCAL B.: *Pensieri*, FME (1990).
- [7] SCOGNAMIGLIO B.: *Matematica e religione I*, Periodico di Matematiche, Mathesis, N.3 (2017).

La benda in DAD, i docenti e il futuro dell’istruzione

A blindfold for DAD, teachers and the future of education

Manola Gavazzi¹ e Annalisa Santini²

Abstract

This article expresses some views on the condition of Italian teachers.

*“...se ...sarà molesto
nel primo gusto, vital nutrimento
lascerà poi quanto sarà digesto.”*
(Dante Alighieri, Paradiso, c. XVII)



Figura 1: Paul Delaroche, *L'esecuzione di Lady Jane Grey*, 1833.

¹Docente di Lingua e letteratura inglese presso il Liceo scientifico “N. Copernico”, Brescia, e-mail: manolagavazzi@gmail.com

²Docente di Matematica e Fisica presso il Liceo scientifico “N. Copernico”, Brescia, e-mail: annalisa-santini66@gmail.com

Le notizie che riguardano il mondo della scuola sembrano talvolta appartenere alle pagine di gossip: possono essere lette e subito dopo dimenticate.

Un esempio ne è la notizia della studentessa bendata durante una lezione di DAD³, il cui clamore ha attirato l'attenzione del lettore occasionale, ben presto svanita. I contorni della vicenda non sembrano lasciare dubbi su chi abbia il ruolo di vittima (una liceale di Verona costretta a bendarsi gli occhi per dimostrare l'attendibilità delle proprie risposte durante un'interrogazione online) e chi quello del carnefice da esecrare (la docente che escogita la misura estrema, incurante della delicata situazione psicologica in cui versano gli adolescenti dopo quasi due anni di scuola a distanza). All'apparenza, quindi, un caso di eclatante insensibilità di un'educatrice verso una sua discente, di cui interessa solo valutare l'apprendimento di contenuti, anche a costo di violarne la dignità personale.

Evidenziamo però un elemento che induce a riflettere: la lettera di alcuni genitori della classe che esprimono immutata stima nella docente sotto accusa, riconoscendole la serietà professionale oltre al tatto con cui ha gestito la situazione specifica (questi genitori sono stati testimoni oculari dell'episodio, avendo assistito alla lezione insieme ai figli)⁴.

Meno scalpore ha suscitato invece, sempre nello stesso periodo, la notizia dell'insegnante sessantacinquenne che, avendo segnalato il basso rendimento di uno studente durante il colloquio con la famiglia, è stata presa a pugni dalla madre ed anche querelata per maltrattamenti, diffamazione e calunnia⁵.

Pur non potendo giudicare le vicende senza conoscerne tutte le circostanze, ci pare sia necessario considerare gli aspetti che fanno da sfondo, in particolare al primo episodio riportato dalle cronache, considerando la realtà della didattica a distanza (DAD) così come si è concretizzata nella scuola superiore, partendo da due interrogativi. Chi è il docente nel secondo decennio degli anni 2000? Qualcuno si è chiesto cosa sarebbe stato degli studenti italiani durante i mesi di *lockdown* se non ci fosse stata la didattica a distanza?

Giova ricordare che la DAD, pur con le sue criticità, è stata una spontanea quanto sorprendente impresa dei docenti italiani⁶.

³<https://www.ilfattoquotidiano.it/2021/04/17/il-caso-della-studentessa-bendata-durante-linterrogazione-dice-molto-sulla-scuola-di-oggi/6168074/>

⁴Si legga: "Studentessa bendata in dad, i genitori: «Immutata la stima per quella prof»", Il Gazzettino.it, 13/04/2021

⁵Si legga V. Valente: "Docente presa a pugni durante il colloquio scuola-famiglia, a processo la madre di uno studente", Lecceprima, 22/04/2021

⁶Si legga M. Recalcati: "Basta parlar male della Dad!", Tecnica della scuola, 21/04/2021.



Figura 2: Jan Steen, *Scuola del villaggio*, c.1626 –1679.

Per poter continuare a “far scuola”, i docenti hanno sacrificato parte della loro privacy e praticamente reso pubbliche, a domicilio, le loro lezioni. Dopo alcune comprensibili esitazioni, essi hanno superato l'imbarazzo di stare di fronte alla telecamera, consapevoli che l'obiettivo primario era mantenere il contatto con le studentesse e con gli studenti, per dar loro una dimensione di normalità e non privarli di un servizio/diritto fondamentale.

Questi elementi sono stati i motori di un'impresa che non ha casi analoghi. Nel volgere di poche settimane e nel silenzio di una macchina burocratica inerte di fronte alla situazione inaudita, gli insegnanti sono stati in grado di attrezzarsi per scongiurare l'interruzione *tout court* delle lezioni scolastiche e, in modo ancora più significativo, si sono attivati affinché la relazione educativa con i loro studenti non si spezzasse.

Per contro, sono poche le voci di addetti ai lavori ed opinionisti che hanno sottolineato come gli insegnanti abbiano, letteralmente, tenuto in piedi il sistema scolastico durante la chiusura delle scuole per la pandemia (fra queste voci, spicca per autorevolezza il presidente Mattarella, che non ha mancato di ringraziare la categoria dei docenti nel messaggio di fine anno alla nazione). Si noti il paradosso: nelle indagini internazionali, i docenti italiani vengono descritti come i più anziani d'Europa, in genere poco motivati e poco preparati all'uso della tecnologia in classe. Eppure, da marzo del 2020, nella situazione traumatica creatasi con il dilagare della pandemia, si è verificata un'accelerazione imprevedibile della capacità dei docenti di usare la tecnologia ai fini didattici: una prova di vitalità che ha stupito gli stessi protagonisti!

La volontà e la consapevolezza dei docenti hanno fatto la differenza. Perché bisogna ricordarlo: apprendere ad utilizzare uno *smartphone* è un conto, imparare ad utilizzare le *app* necessarie per poter gestire la didattica a distanza, la comunicazione attraverso le diverse piattaforme, le prove e la valutazione, adeguandosi alle modifiche e agli aggiornamenti che sono stati pubblicati dal mese di marzo in poi, è ben altra cosa.

Non solo: l'obbligatorietà della DAD ha spinto molti docenti ad indagare e sperimentare pratiche didattiche innovative le quali si sono tradotte anche in motivo di gratifica-

zione professionale per gli stessi⁷.

Tornando al tema del primo episodio di cronaca, ricordiamo che è spettato ai docenti fare fronte alle nuove difficoltà evidenziate dalla DAD durante i momenti di verifica degli apprendimenti, impegnando tempo e perizia nel trovare le soluzioni opportune per garantire la coerenza con il processo educativo e l'attendibilità che tali momenti richiedono.

Contestualmente, i docenti hanno ripensato obiettivi e rimodulato contenuti per adeguare l'intero apparato della didattica e per dipanare le questioni legate ai Bisogni Educativi Speciali (BES).

Di questa dedizione e di questo fermento del 'fare scuola', cosa rischia di filtrare alla pubblica opinione? Cosa viene esaminato dai tavoli tecnici? Probabilmente, che la presenza a scuola è stata ridotta al 50% e che ci sono stati comportamenti di scarsa attenzione alle esigenze delle ragazze e dei ragazzi da parte dei docenti, i quali non hanno adeguato le proprie lezioni alle mutate condizioni ambientali. O ancora le criticità di questa didattica, dovute alla mancanza degli strumenti e della rete o l'idea, diffusa dai media, di adolescenti che per troppo tempo sono stati privati del loro diritto di partecipare alle lezioni in presenza. Quest'ultima opinione è peraltro smentita da un sondaggio condotto da Skuola.net, secondo cui, alle superiori, sei ragazzi su dieci erano contrari al rientro in aula al 100%⁸.

Non tutti, pertanto, sono ancora consapevoli del fatto che dietro l'operato dei docenti durante la DAD, c'è stata un'enorme mole di lavoro, fatta anche di riunioni e redazione di documenti, in continuo divenire e aggiornamento. È un ruolo che compete ai docenti in quanto professionisti dell'educazione, ma che ancora una volta hanno dovuto svolgere da soli, in regime di 'autonomia'. Bisogna allora avere il coraggio di ripensare con lucidità a quanto è avvenuto e sta ancora accadendo, avendo la capacità di analizzare tutti gli aspetti di una trasformazione che è in corso. È inderogabile una riflessione che vada al di là delle questioni sindacali e sposti il focus dell'attenzione al mondo dell'istruzione verso problematiche rimaste troppo a lungo in secondo piano rispetto a presunte priorità, esclusivamente di convenienza politica ed economica. Come all'interno dei consigli di classe e dei dipartimenti i docenti, nell'ottica di un'autovalutazione del proprio operato, si cimentano nel confronto tra gli obiettivi fissati e i traguardi raggiunti, sarebbe necessario che tutti gli *stakeholder* cominciassero a ragionare in termini nuovi, escogitando le soluzioni adeguate a proiettare il sistema dell'istruzione in una dimensione futura, più aderente alla realtà.

Non è la prima volta che il "Periodico di matematiche" della Mathesis accoglie considerazioni di carattere generale riguardo al sistema d'istruzione italiano e forse è nuovamente il momento di riconsiderare la situazione attuale: una rete con numerosi

⁷76% degli insegnanti dichiara un netto miglioramento del loro rapporto con le nuove tecnologie, l'87% del campione ritiene che la Didattica digitale integrata sia uno strumento molto utile per potenziare l'apprendimento. (dati tratti da Emotion Revolution Survey – studio Microsoft realizzato in collaborazione con PerLAB sugli effetti emotivi della Didattica a distanza durante la pandemia) <http://scuola24.ilsole24ore.com/art/scuola/2021-04-21/dopo-anno-dad-docenti-si-scoprono-piu-motivati-e-apprezzano-piu-nuove-tecnologie-183233.php?uclid=AEj7yjC>

⁸Si legga: "Sei studenti delle superiori su dieci sono contrari al ritorno in presenza al cento per cento", Edscuola, 22/04/2021.

nodi che negli anni, invece di essere sciolti, sono aumentati, sminuendo il ruolo stesso dell'istituzione nella società.

Un punto di partenza potrebbe essere la riflessione sugli esiti della ridefinizione dei programmi, delle modifiche ai curricula, del passaggio dalle sperimentazioni ai potenziamenti (nel nome dell'autonomia scolastica), delle discipline aggiunte al piano di studi (PCTO, Educazione civica) senza le opportune modifiche ai quadri orario e ai contenuti disciplinari.

In primis, questa situazione ci ha però insegnato che è ormai improrogabile chiedersi quali competenze deve possedere un docente se, oltre all'insegnamento delle proprie discipline, deve anche essere in grado di spiegare le norme necessarie negli ambienti di lavoro, di leggere la documentazione che accompagna certificazioni di Bisogni Educativi Speciali (fenomeno in decisivo aumento, ma che la politica non mostra interesse ad indagare).

Quali mansioni specifiche ritagliare per i docenti come professionisti dell'educazione, che oggi sono altresì chiamati a progettare attività per l'interazione con il territorio o per l'adesione ai Programmi Operativi Nazionali, a suscitare l'approvazione degli studenti e dei genitori, a farsi carico di situazioni di accoglienza e tutela di minori con situazioni familiari difficili? E, sempre più, a sorvegliare e proteggere gli studenti dall'abuso e dai comportamenti scorretti nell'uso dei social, nonché ad avere indubbie doti di psicologo di gruppo?

Certamente, alla luce del processo innescato dalla DAD, non è più procrastinabile confrontarsi sul concetto di istruzione nei vari ordini di apprendimento e sulla figura dei suoi professionisti, nonché sul ruolo che gli studenti e le famiglie possono assumere.

Sitologia

- [1] <https://www.ilfattoquotidiano.it/2021/04/17/il-caso-della-studentessa-bendata-durante-linterrogazione-dice-molto-sulla-scuola-di-oggi/6168074/>
- [2] https://www.ilgazzettino.it/nordest/verona/studentessa_bendata_in_dad_i_genitori-5896349.html
- [3] <https://www.lecceprima.it/cronaca/docente-presa-a-pugni-durante-il-colloquio-scuola-famiglia-a-processo-la-madre-di-uno-studente.html>
- [4] <https://www.tecnicadellascuola.it/recalciti-basta-parlar-male-della-dad>
- [5] <http://scuola24.ilsole24ore.com/art/scuola/2021-04-21/dopo-anno-dad-docenti-scoprono-piu-motivati-e-apprezzano-piu-nuove-tecnologie-183233.php?uuiid=AEj7yjC>
- [6] <https://www.edscuola.eu/wordpress/?m=20210422>
- [7] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PAUL_DELAROCHE_-_Ejecuci%C3%B3n_de_Lady_Jane_Grey_\(National_Gallery_de_Londres,_1834\).jpg#/media/File:PAUL_DELAROCHE-Ejecuci3n_de_Lady_Jane_Grey_\(National_Gallery_de_Londres,_1834\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PAUL_DELAROCHE_-_Ejecuci%C3%B3n_de_Lady_Jane_Grey_(National_Gallery_de_Londres,_1834).jpg#/media/File:PAUL_DELAROCHE-Ejecuci3n_de_Lady_Jane_Grey_(National_Gallery_de_Londres,_1834).jpg)

8 <http://theartgalleryintheworld.blogspot.com/2015/09/jan-steen-c1626-1679-leiden-scuola-del.htm>

La Stanza di Ames: geometria analitica nello spazio dal buco della serratura

The Ames Room: solid analytic geometry through the keyhole

Francesco di Paola Bruno¹

Abstract

The design to practically build the perspective illusion known as “Ames Room” presents interesting teaching opportunities of problem posing and problem solving by applying analytic geometry of space, which is a topic generally dealt with during the fourth year of scientific high school. In particular, we used equations of lines and planes in space and conditions of coplanarity of several points, and show how analytic geometry of space represents a powerful tool to model and solve problems drawn from reality.

Introduzione

La “stanza di Ames” [1] è una divertente illusione ottica, spesso presente in mostre o musei interattivi, consistente in una ampia cabina il cui interno può essere osservato dall'esterno attraverso una sorta di “buco della serratura”. Per chi sta fuori e guarda attraverso il foro, l'ambiente interno appare come una normalissima stanza a pianta rettangolare, con due pareti laterali parallele e una parete di fondo sempre rettangolare con eventuali finestre o motivi architettonici simmetrici. Se però nella stanza entrano due persone che si collocano in piedi presso i due spigoli verticali della parte di fondo, per chi osserva dal buco, uno dei due appare come un gigante mentre l'altro magicamente diventa un lillipuziano; l'illusione poi diventa sconvolgente se le persone si muovono scambiandosi di posto, perché chi guarda le vede ingrandirsi e rimpicciolirsi sotto i propri occhi. Ma sarebbe meglio dire sotto “il proprio occhio”, perché l'illusione funziona bene solo se il tutto viene osservato con un solo occhio senza sfruttare la visione binoculare.

¹effe.bruno@virgilio.it, docente di Matematica e Fisica - Liceo Scientifico Statale “F. Severi” Castellammare di Stabia (NA)

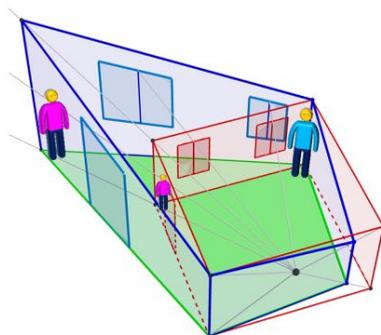


Figura 1

In effetti la stanza non è affatto un parallelepipedo rettangolo, come appare vista dal foro, ma pareti, pavimento e soffitto sono quadrilateri ottenuti deformando opportunamente dei rettangoli in modo da costringere la mente a interpretarli come tali, creando così l'illusione prospettica.

Tale illusione è possibile grazie al fatto che lo spazio reale 3D in cui viviamo non può essere messo in corrispondenza biunivoca con le immagini 2D mediante le quali noi lo percepiamo. Immagini come foto o come quelle che inconsapevolmente si formano sulla retina e che vengono elaborate dal cervello in base ai modelli regolari che la mente è abituata a decodificare.

Pertanto ogni punto di un'immagine 2D è in corrispondenza con gli infiniti punti della semiretta che passa per quel punto e ha origine nel centro visivo che è l'occhio. In tal modo un solo occhio potrebbe non riuscire a distinguere l'esatta collocazione spaziale di più punti allineati sullo stesso "raggio visivo" se opportunamente collegati con altri punti in modo da ricreare un'immagine che la mente è abituata a riconoscere con una certa regolarità. Un po' come avviene con le costellazioni, laddove stelle disposte nello spazio sconfinato, creano l'illusione di una figura nel cielo.

Questo lavoro è nato dall'idea di costruire una "stanza di Ames", anche in scala ridotta, per la giornata di *Open Day* a scuola. Poi la pandemia ha infranto ogni prospettiva di realizzazione concreta, ma non ha distrutto la possibilità di lavorare sulle idee matematiche. In effetti in rete si trovano vari esempi di sviluppo di una "stanza di Ames" da ingrandire, ripiegare e incollare, ma lo scopo era "capire" le regole del gioco e oltretutto "verificare" se gli schemi già belli e pronti fossero effettivamente corretti, perché creavano problemi nella realizzazione, producendo pavimento e soffitto sghembi.

Deformiamo il parallelepipedo apparente

Indicato con $OABC$ il rettangolo che visivamente dovrebbe apparire come pavimento, chiameremo $O'A'B'C'$ il corrispondente rettangolo che verrà visto come soffitto ad altezza h dal pavimento. Chiaramente OO' , AA' , BB' , CC' appariranno come gli spigoli verticali della stanza.

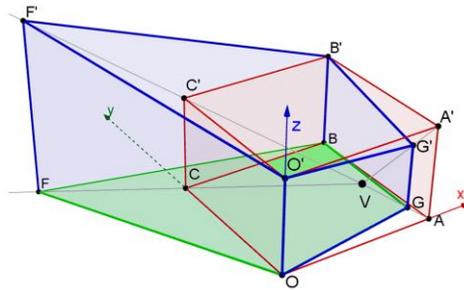


Figura 2

Posto che la stanza apparirà di larghezza a , profondità b , altezza h , nel riferimento cartesiano di figura 2 dove gli assi x, y, z sono orientati rispettivamente lungo i segmenti OA, OC, OO' , si avrà:

$$\begin{aligned} O & (0, 0, 0) & A & (a, 0, 0) & B & (a, b, 0) & C & (0, b, 0) \\ O' & (0, 0, h) & A' & (a, 0, h) & B' & (a, b, h) & C' & (0, b, h) \end{aligned}$$

Il punto $V(c, 0, d)$ rappresenterà il foro da cui guardare, posto sulla parete $OAA'O'$, a distanza c dallo spigolo di sinistra OO' e ad altezza d dal pavimento.

Consideriamo ora le equazioni delle rette VC e VC' che fungono da raggi visivi per determinare le posizioni dei vertici F e F' della reale parete di fondo $FBB'F'$ che illusoriamente verranno visti come i vertici C e C' dell'apparente parete rettangolare $CBB'C'$.

$$\text{retta } VC \begin{cases} x = c - ct \\ y = 0 + bt \\ z = d - dt \end{cases} \quad \text{retta } VC' \begin{cases} x = c - ct \\ y = 0 + bt \\ z = d + (h - d)t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Se vogliamo che la persona posta nello spigolo di sinistra FF' appaia la metà di quanto dovrebbe essere (figura 1), occorre porla a una distanza reale doppia di quella che sembra e per far questo basta scegliere il valore del parametro $t=2$ sia nelle equazioni di VC che in quelle di VC' , ottenendo rispettivamente i seguenti punti:

$$F(-c, 2b, -d) \quad F'(-c, 2b, 2h - d)$$

È immediato verificare che $\overline{FF'} = 2h$.

Ora sorge un problema; il quadrilatero $OABF$, che dovrebbe fungere da pavimento, risulta sghembo in quanto, rispetto al piano orizzontale xy del riferimento, il vertice F è posto più in basso e quindi, per realizzare un pavimento reale piano, il vertice A dovrebbe essere posto leggermente più in alto. Indichiamo allora con G e G' i vertici reali posti rispettivamente sui raggi visivi VA e VA' , in modo che la parete frontale, invece di essere il rettangolo apparente $OAA'O'$, sia il trapezio reale $OGG'O'$ in cui richiediamo che GG' sia verticale.

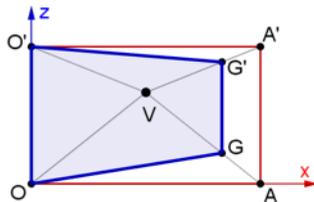


Figura 3

Deve essere $G(x, 0, z)$, $G'(x, 0, z')$ Ricordando che $V(c, 0, d)$, $A(a, 0, 0)$, $A'(a, 0, h)$ si ha:

$$z = \frac{d}{c-a}(x-a) \quad z' = \frac{d-h}{c-a}(x-a) + h$$

Per assicurare la complanarità dei vertici del quadrilatero reale $OGBF$ che funge da pavimento (figura 2), basta imporre che i vettori OG , OB , OF siano linearmente dipendenti ossia che le loro componenti verifichino la seguente condizione:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & z \\ a & b & 0 \\ -c & 2b & -d \end{vmatrix} = 0$$

da cui:

$$x \begin{vmatrix} b & 0 \\ 2b & -d \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} a & b \\ -c & 2b \end{vmatrix} = 0 - bdx + \frac{d(x-a)}{c-a}(2ab+bc) = 0$$

$$x = \frac{2a+c}{3}z = \frac{d}{3}G\left(\frac{2a+c}{3}; 0; \frac{d}{3}\right)$$

Ripetendo il procedimento per il quadrilatero $O'G'B'F'$ che costituisce il soffitto, occorre imporre la complanarità dei vettori $O'G'$, $O'B'$, $O'F'$ ottenendo:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & z'-h \\ a & b & 0 \\ -c & 2b & h-d \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{2a+c}{3}z' = \frac{2h+d}{3}G'\left(\frac{2a+c}{3}; 0; \frac{2h+d}{3}\right)$$

È immediato verificare che $\overline{GG'} = \frac{2h}{3}$

Costruiamo le pareti

A questo punto riassumiamo le dimensioni che caratterizzano ogni parete trapezoidale che apparirà come se fosse rettangolare.

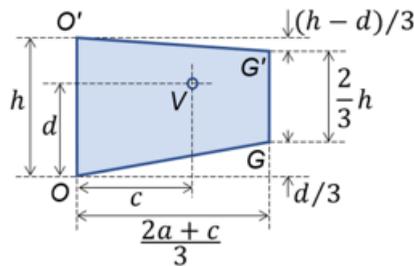
Parete frontale $OGG'O'$

$$\overline{OG} = \sqrt{\left(\frac{2a+c}{3}\right)^2 + \left(\frac{d}{3}\right)^2}$$

$$\overline{GG'} = \frac{2}{3}h$$

$$\overline{G'O'} = \sqrt{\left(\frac{2a+c}{3}\right)^2 + \left(\frac{h-d}{3}\right)^2}$$

$$\overline{O'O} = h$$



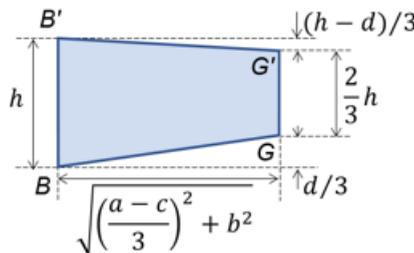
Parete di destra $BGG'B'$

$$\overline{BG} = \sqrt{\left(\frac{a-c}{3}\right)^2 + b^2 + \left(\frac{d}{3}\right)^2}$$

$$\overline{G'G} = \frac{2}{3}h$$

$$\overline{G'B'} = \sqrt{\left(\frac{a-c}{3}\right)^2 + b^2 + \left(\frac{h-d}{3}\right)^2}$$

$$\overline{B'B} = h$$



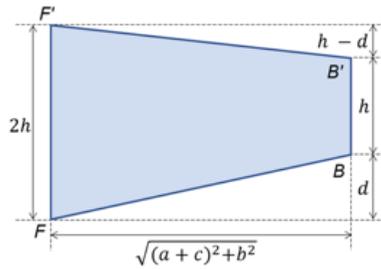
Parete di fondo $FBB'F'$

$$\overline{FB} = \sqrt{(a+c)^2 + b^2 + d^2}$$

$$\overline{BB'} = h$$

$$\overline{B'F'} = \sqrt{(a+c)^2 + b^2 + (h-d)^2}$$

$$\overline{F'F} = 2h$$

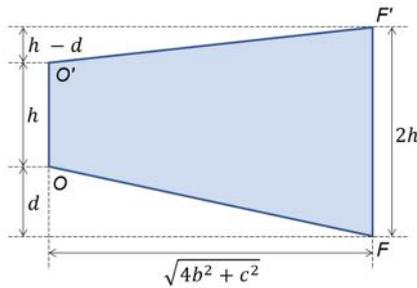
**Parete di sinistra $OFF'O'$**

$$\overline{OF} = \sqrt{4b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\overline{FF'} = 2h$$

$$\overline{F'O'} = \sqrt{4b^2 + c^2 + (h-d)^2}$$

$$\overline{O'O} = h$$



Pavimento $OGBF$

I lati OG , GB , BF , FO hanno lunghezze note perché sono gli spigoli inferiori delle pareti. Per fissare la forma del quadrilatero irregolare $OGBF$ è opportuno calcolare le lunghezze delle diagonali, usando le coordinate dei vertici:

$$\overline{OB} = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \overline{GF} = \sqrt{\left(\frac{2a + 4c}{3}\right)^2 + 4b^2 + \left(\frac{4}{3}d\right)^2}$$

Soffitto $O'G'B'F'$

Anche per definire il soffitto, oltre agli spigoli superiori delle pareti $O'G'$, $G'B'$, $B'F'$, $F'O'$, già noti, occorrono le lunghezze delle diagonali:

$$\overline{O'B'} = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \overline{G'F'} = \sqrt{\left(\frac{2a + 4c}{3}\right)^2 + 4b^2 + \left(\frac{4h - 4d}{3}\right)^2}$$

Disegniamo le finestre sul fondo

Definita la forma delle singole facce della stanza, studiamo come introdurre porte e finestre sulle pareti (figura 1) in modo tale che appaiano rettangolari quando vengono osservate dal punto V .

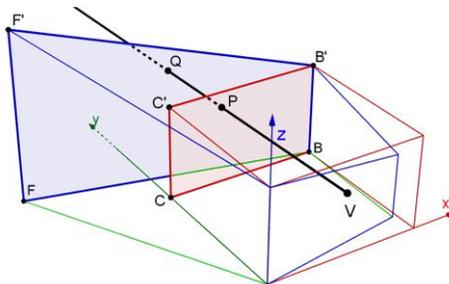


Figura 4

In particolare (figura 4), dobbiamo individuare la posizione di un punto Q posto sulla vera parete trapezoidale di fondo a partire dalla posizione del corrispondente punto P posto sull'apparente parete rettangolare, essendo P e Q appartenenti alla stessa semiretta con origine nel punto di vista V .

Osservando che il piano passante per $FBB'F'$ è parallelo all'asse z del riferimento e ricordando che $F(-c, 2b, -d)$ e $B(a, b, 0)$, facilmente si ricava la sua equazione che formalmente è uguale all'equazione della retta passante per i punti $(-c, 2b)$ e (a, b) del piano xy .

$$y - b = \frac{-b}{a + c} (x - a) \qquad bx + (a + c)y - b(2a + c) = 0$$

Consideriamo il generico punto $P(x_P, b, y_P)$ della parete apparente $CBB'C'$ dove x_P e y_P rappresentano le sue coordinate cartesiane nel riferimento bidimensionale sulla parete, con origine in C , asse delle ascisse su CB e asse delle ordinate su CC' . Ricordando che $V(c, 0, d)$ si ha:

$$\text{retta } VP \begin{cases} x = c + (x_P - c)t \\ y = 0 + (b - 0)t \\ z = d + (y_P - d)t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Il sistema seguente, impostato a sinistra e risolto a destra, fornisce le coordinate del punto Q di intersezione della retta VP col piano $FBB'F'$:

$$\begin{cases} x = c + (x_P - c)t \\ y = bt \\ z = d + (y_P - d)t \\ bx + (a + c)y - b(2a + c) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{2a}{a + x_P} \\ x = \frac{2a}{a + x_P} (x_P - c) + c \\ y = \frac{2ab}{a + x_P} \\ z = \frac{2a}{a + x_P} (y_P - d) + d \end{cases}$$

$$Q \left(\frac{(2a + c)x_P - ac}{a + x_P}; \frac{2ab}{a + x_P}; \frac{dx_P + 2ay_P - ad}{a + x_P} \right)$$

Se consideriamo il punto Q_0 come proiezione ortogonale di Q sullo spigolo verticale FF' , la distanza tra Q e Q_0 rappresenterà l'ascissa di Q nel riferimento bidimensionale sulla parete $FBB'F'$, con asse delle ordinate su FF' e asse delle ascisse passante per B e perpendicolare a FF' (figura 5).

$$Q_0 \left(-c; 2b; \frac{dx_P + 2ay_P - ad}{a + x_P} \right) \qquad \overline{QQ_0} = \frac{2x_P}{a + x_P} \sqrt{(a + c)^2 + b^2}$$

Si può quindi concludere che il punto $P(x_P, y_P)$ nel riferimento della parete apparente $CBB'C'$ corrisponde al punto $Q(X_Q, Y_Q)$ nel riferimento della parete vera $FBB'F'$

$$X_Q = \frac{2x_P}{a + x_P} \sqrt{(a + c)^2 + b^2} \qquad Y_Q = \frac{dx_P + 2ay_P - ad}{a + x_P}$$

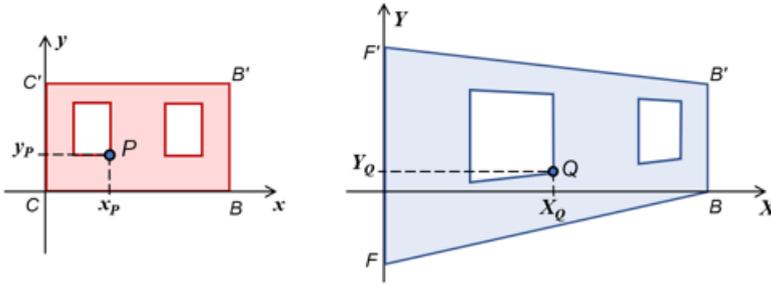


Figura 5

È immediato verificare la correttezza delle formule di trasformazione almeno per i 4 vertici della parete:

$$x_P = 0; y_P = 0 \quad C(0, 0) \rightarrow F(0; -d)$$

$$x_P = a; y_P = 0 \quad B(a, 0) \rightarrow B(\sqrt{(a+c)^2 + b^2}; 0)$$

$$x_P = a; y_P = h \quad B'(a, h) \rightarrow B'(\sqrt{(a+c)^2 + b^2}; h)$$

$$x_P = 0; y_P = h \quad C'(0, h) \rightarrow F'(0; 2h - d)$$

Inoltre considerando che la trasformazione in esame, pur non conservando il parallelismo, porta rette in rette, per disegnare un qualsiasi poligono basta semplicemente trasformarne i vertici dalla parete $CBB'C'$ alla parete $FBB'F'$.

Disegniamo la porta sulla parete di sinistra

Possiamo ripetere tutto il precedente procedimento applicandolo alla parete di sinistra.

In particolare (figura 6) dobbiamo individuare la posizione di un punto S posto sulla vera parete trapezoidale di sinistra a partire dalla posizione del corrispondente punto R posto sull'apparente parete rettangolare, essendo R e S appartenenti alla stessa semiretta con origine nel punto di vista V .

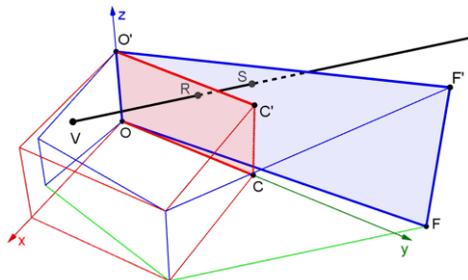


Figura 6

Osservando che il piano passante per $OFF'O'$ è parallelo all'asse z del riferimento e ricordando che $O(0, 0, 0)$ e $F(-c, 2b, -d)$, facilmente si ricava la sua equazione che formalmente è uguale all'equazione della retta passante per i punti $(0, 0)$ e $(-c, 2b)$ del piano xy .

$$y = -\frac{2b}{c}x \qquad 2bx + cy = 0$$

Consideriamo il generico punto $R(0, x_R, y_R)$ della parete apparente $OCC'O'$ dove x_R e y_R rappresentano le sue coordinate cartesiane nel riferimento bidimensionale sulla parete, con origine in O , asse delle ascisse su OC e asse delle ordinate su OO' . Ricordando che $V(c, 0, d)$ si ha:

$$\text{retta } VR \begin{cases} x = c + (0 - c)t \\ y = 0 + (x_R - 0)t \\ z = d + (y_R - d)t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Il sistema seguente, impostato a sinistra e risolto a destra, fornisce le coordinate del punto S di intersezione della retta VR col piano $OFF'O'$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = c - ct \\ y = x_R t \\ z = d + (y_R - d)t \\ 2bx + cy = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{2b}{2b - x_R} \\ x = c - \frac{2bc}{2b - x_R} \\ y = \frac{2b}{2b - x_R} x_R \\ z = d + \frac{2b}{2b - x_R} (y_R - d) \end{array} \right.$$

$$S \left(\frac{-cx_R}{2b - x_R}; \frac{2bx_R}{2b - x_R}; \frac{-dx_R + 2by_R}{2b - x_R} \right)$$

Se consideriamo il punto S_0 come proiezione ortogonale di S sullo spigolo verticale OO' , la distanza tra S e S_0 rappresenterà l'ascissa di S nel riferimento bidimensionale sulla parete $OFF'O'$, con asse delle ordinate su OO' e asse delle ascisse passante per O e perpendicolare a OO' (figura 7).

$$S_0 \left(0; 0; \frac{-dx_R + 2by_R}{2b - x_R} \right) \overline{SS_0} = \frac{x_R}{2b - x_R} \sqrt{4b^2 + c^2}$$

Si può quindi concludere che il punto $R(x_R, y_R)$ nel riferimento della parete apparente $OCC'O'$ corrisponde al punto $S(X_S, Y_S)$ nel riferimento della parete vera $OFF'O'$

$$X_S = \frac{x_R}{2b - x_R} \sqrt{4b^2 + c^2} Y_S = \frac{-dx_R + 2by_R}{2b - x_R}$$

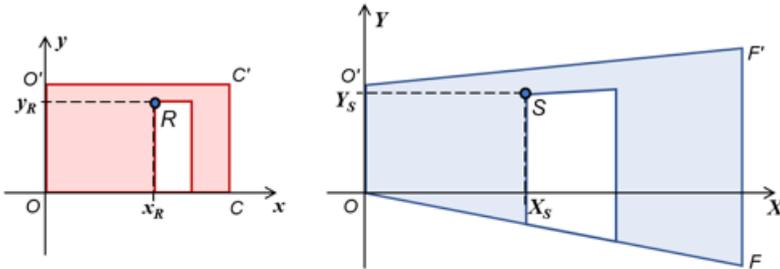


Figura 7

Anche in questo caso è immediato verificare la correttezza delle formule di trasformazione almeno per i 4 vertici della parete:

$$x_R = 0; y_R = 0 \quad O(0, 0) \rightarrow O(0; 0)$$

$$x_R = b; y_R = 0 \quad C(b, 0) \rightarrow F(\sqrt{4b^2 + c^2}; -d)$$

$$x_R = b; y_R = h \quad C'(b, h) \rightarrow F'(\sqrt{4b^2 + c^2}; 2h - d)$$

$$x_R = 0; y_R = h \quad O'(0, h) \rightarrow O'(0; h)$$

Conclusioni e prospettive future

Sebbene il problema presentato potrebbe anche servire per introdurre le proiettività come trasformazioni geometriche nello spazio che vanno oltre le affinità, lo scopo era focalizzato a un esempio applicativo della sola geometria analitica nello spazio prevista nel percorso del liceo scientifico, usata con fini pratici per risolvere un problema vero, quando spesso invece i libri di testo propongono situazioni astratte, avulse dalla realtà e già matematizzate.

Il forte carattere modulare dell'attività si presta al suo sviluppo da parte di più gruppi di studenti, come ad esempio la ricerca delle varie trasformazioni prospettiche, una per ogni faccia della stanza.

Un'interessante prospettiva futura, di carattere informatico, del presente lavoro potrebbe essere l'uso di *Geogebra* o di un semplice foglio di calcolo, in modo tale che a partire dai valori numerici assegnati ai parametri progettuali a, b, c, d, h , vengano fornite le dimensioni costruttive dei vari componenti della stanza, magari con l'aggiunta del loro sviluppo grafico in scala.

L'augurio ovviamente è di poter tornare al più presto in una Scuola dove si possa stare a contatto e si possa lavorare gomito a gomito, in quella "bottega" laboratoriale che è la classe, per poter costruire una vera "stanza di Ames". Infatti se è vero che la Matematica è bella perché si può fare anche solo con la mente, poter "toccare con mano" la Matematica è da sempre una delle più emozionanti soddisfazioni.

Sitologia

[1] https://it.wikipedia.org/wiki/Stanza_di_Ames

Microbi, duelli, figurine e molto altro ancora. Calcolare probabilità senza perdersi nell'infinito

Microbes, duels, stickers and much more. Calculate probabilities without getting lost in infinity

Paolo Francini¹

Una colonia di microbi

Leggendo un vecchio numero della rivista *Archimede*, ormai molti anni fa, rimasi colpito da un problema. Fu come un incantesimo, ne ho conservo ancora il ritaglio.

Problema 1. *Un microbo si divide in due microbi perfettamente uguali a se stesso o si estingue; se la probabilità di dimezzarsi è p , qual è la probabilità che un microbo siffatto dia origine ad una colonia che non si estingue?*

Prima di proseguire, vorrei invitare chi non sia già familiare con questo problema -o altri simili- ad affrontarlo con dedizione, a costo di rischiare di perdersi nelle infinite biforcazioni della sorte, come del resto capitò a me - altrimenti sarà difficile apprezzarne davvero il sapore.

Il problema m'incuriosì per varie ragioni, in particolare per il contesto in cui si colloca: un contesto discreto ma infinito, che non corrispondeva a nessuna delle variabili aleatorie più familiari, né pareva facilmente esprimibile come una loro combinazione. La domanda chiedeva conto della probabilità di andare avanti all'infinito - come fosse un evento che possa attualmente verificarsi o meno. A dire il vero, non mi era nemmeno del tutto chiaro da quale urna -precisamente- stessimo sorteggiando e come si dovesse fare per contarne o misurarne il contenuto. Piccoli tarli ai quali, spavaldo, non prestai troppa attenzione. Il piano era di ricavare una formula che esprimesse la probabilità di trovare qualche microbo in vita dopo 1, 2, ... n generazioni, per poi calcolare il limite di tale probabilità per $n \rightarrow \infty$. Il piano che avrebbe potuto anche funzionare, se organizzato nella giusta ottica - invece imboccai una strada che si rivelò un vicolo cieco - o meglio un dedalo di sentieri che si perdevano nel loro intreccio.

¹paolo.francini@gmail.com, Liceo Scientifico "Tullio Levi-Civita", Roma

Proviamo a costruire un minimo di notazione - la notazione infonde sempre quel minimo di fiducia. Indichiamo con $P_n(k)$ la probabilità che, dopo n generazioni, vi siano precisamente k microbi superstiti. La quantità chiamata in causa per rispondere alla domanda è la successione $S_n = 1 - P_n(0)$, appunto la probabilità che dopo n generazioni sopravviva ancora qualche microbo - vogliamo trovare il limite di questa successione per $n \rightarrow \infty$. Osservato che, evidentemente, in ogni generazione dopo quella iniziale la popolazione complessiva dovrà essere pari, se $n \geq 1$ si avrà $P_n(k) = 0$ per k dispari. Chiaramente, dopo n generazioni la popolazione potrà essere al massimo di 2^n microbi e non è difficile vedere che $P_n(2^n) = p^{2^n-1}$.

Per trovare $P_n(0)$ possiamo servirci dei precedenti valori di $P_{n-1}(k)$. Si avrà infatti

$$\begin{aligned} P_n(0) &= P_{n-1}(0) + (1-p)^2 \cdot P_{n-1}(2) + (1-p)^4 \cdot P_{n-1}(4) + \dots \\ &\quad + (1-p)^{2^{n-1}} \cdot P_{n-1}(2^{n-1}) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq 2^{n-1}} (1-p)^k \cdot P_{n-1}(k) \end{aligned}$$

Calcoliamo questi valori per le prime generazioni, sperando di individuare uno schema generale.

- situazione iniziale (generazione 0): $P_0(1) = 1$;
- 1^a generazione: $P_1(2) = p \quad P_1(0) = 1 - p$;
- 2^a generazione: $P_2(4) = p^3 \quad P_2(2) = 2p^2(1-p) \quad P_2(0) = (1-p) + p(1-p)^2$;
- 3^a generazione: $P_3(8) = p^7 \quad P_3(6) = 4p^6(1-p) \quad P_3(4) = 2p^4(1-p) + 6p^5(1-p)^2$,
 $P_3(2) = 4p^3(1-p)^2 + 4p^4(1-p)^3 \quad P_3(0) = (1-p) + p(1-p)^2 + 2p^2(1-p)^3 + p^3(1-p)^4$.

Se ne ricava:

$$\begin{aligned} P_4(0) &= (1-p) + p(1-p)^2 + 2p^2(1-p)^3 + 5p^3(1-p)^4 + 6p^4(1-p)^5 + 6p^5(1-p)^6 \\ &\quad + 4p^6(1-p)^7 + p^7(1-p)^8 \end{aligned}$$

Ammettiamolo: tutto questo già non promette nulla di buono - dovremmo ricavare il limite di questa successione in funzione di p , ma come? Proviamo a guardare, intanto, come si evolve la popolazione attesa. Indicata con X_n la popolazione dopo n generazioni, vogliamo trovare il valore $\mathbb{E}(X_n)$. Si avrà:

- $E(X_1) = p \cdot 2 + (1-p) \cdot 0 = 2p$
- $E(X_2) = p^3 \cdot 4 + 2p^2(1-p) \cdot 2 + ((1-p) + p(1-p)^2) \cdot 0 = 4p^2$

$$\begin{aligned} \bullet E(X_3) &= p^7 \cdot 8 + 4p^6(1-p) \cdot 6 + (2p^4(1-p) + 6p^5(1-p)^2) \cdot 4 \\ &\quad + (4p^3(1-p)^2 + 4p^4(1-p)^3) \cdot 2 \\ &\quad + ((1-p) + p(1-p)^2 + 2p^2(1-p)^3 + p^3(1-p)^4) \cdot 0 = 8p^3 \end{aligned}$$

Più che sufficiente per azzardare l'uguaglianza $\mathbb{E}(X_n) = (2p)^n$. Ma come dimostrarla in generale, senza restare impigliati in una verifica algebrica che rischia di essere inestricabile?

Conviene fare ricorso all'idea di *media condizionata* di una variabile aleatoria. Data una variabile aleatoria X e dato un evento A , il *valore medio di X condizionato a A* - che si indica con $\mathbb{E}(X|A)$ - è il valore medio assunto dalla variabile X supponendo che si verifichi l'evento A .

Allora vale l'uguaglianza

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{E}(X|A) + \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{E}(X|\bar{A})$$

dove \bar{A} indica l'evento complementare di A . Più in generale, se la famiglia di eventi $\{A_k\}_{k=1,2,\dots}$ è una partizione finita o numerabile dell'intero spazio campionario, si avrà

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k \mathbb{P}(A_k) \cdot \mathbb{E}(X|A_k) \quad [\text{legge dell'aspettativa totale}]$$

Ciò detto, indicando con D_1 l'evento "la prima duplicazione riesce", possiamo procedere per induzione. La proposizione $\mathbb{E}(X_n) = (2p)^n$ è chiaramente vera per $n = 0$ (o, se si preferisce, per $n = 1$, come abbiamo appena verificato). Supponendo dunque di avere $\mathbb{E}(X_n) = (2p)^n$ per un certo n , calcoliamo il valore $\mathbb{E}(X_{n+1})$. In base a quanto appena esposto, tenuto conto dell'ipotesi induttiva, si ha dunque:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}) &= \mathbb{P}(D_1) \cdot \mathbb{E}(X_{n+1}|D_1) + \mathbb{P}(\bar{D}_1) \cdot \mathbb{E}(X_{n+1}|\bar{D}_1) \\ &= p \cdot (\mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(X_n)) + (1-p) \cdot 0 = p \cdot (2\mathbb{E}(X_n)) = 2p \cdot (2p)^n \\ &= (2p)^{n+1} \end{aligned}$$

che è quello che si voleva. Il passaggio chiave è che, se l'esito della prima duplicazione è favorevole, i due microbi generati danno vita a due discendenze entrambe con le stesse caratteristiche dell'intera colonia, salvo che la generazione $(n+1)$ -esima dell'intera colonia corrisponde all'unione delle generazioni n -esime di queste due discendenze. Da qui si traggono indicazioni piuttosto chiare circa l'andamento atteso della popolazione nel lungo periodo: se $2p < 1$, ci aspettiamo che la colonia si estingua; al contrario, se $2p > 1$ la popolazione dovrebbe tendere all'infinito. Se $2p = 1$, la situazione è incerta: la popolazione attesa in ogni generazione rimane costantemente uguale a 1, ma la sopravvivenza del ceppo appare precaria - una serie di esiti appena un po' sfortunata porta facilmente all'estinzione. Queste considerazioni ci indirizzano in maniera abbastanza precisa, ma non bastano ancora a dedurre quale sia la probabilità che la popolazione sopravviva per sempre.

Tuttavia, l'idea che dopo la prima duplicazione scaturiscono due ceppi di microbi con le stesse caratteristiche del ceppo iniziale si rivela decisiva. Questo problema ha una natura autoreferenziale, potremmo dire *autosimilare*, che -per quanto macroscopica- all'epoca non avevo saputo realmente vedere, imprigionato com'ero in una casistica minuta. Il mio errore fondamentale era di concentrarmi su ciò che accade all'ultima generazione, e calcolare così le probabilità relative al passo successivo. Ma questo porta a una complessità crescente, che diviene presto difficile da gestire e, soprattutto, da generalizzare. Invece, la dimostrazione circa la popolazione attesa ci porta nella direzione opposta e ci suggerisce di guardare a ciò che accade all'inizio, alla prima duplicazione. Eseguendo il calcolo a partire dall'ultima generazione, si trova quasi per miracolo il valore $(2p)^n$, ma non si avrebbe idea di come estendere questo calcolo ai passi successivi - dove la situazione sarà algebricamente sempre più intricata; se, invece, si riparte dalla prima generazione, il calcolo diviene rapido e limpido, perfettamente ricorsivo.

Quando sfogliai la soluzione pubblicata in uno dei numeri seguenti della rivista, ricordo ancora lo stupore ed il senso come di vertigine che mi colsero fin dalla prima riga: *indichiamo con x la probabilità cercata*. Un'equazione! Il ragionamento era cristallino: se il processo dura all'infinito, vorrà dire che -in primo luogo- si parte col piede giusto (il microbo si duplica al primo passo, cosa che avviene con probabilità p); inoltre almeno una delle due discendenze che scaturiscono darà luogo a un ceppo che dura all'infinito. Quest'ultimo è l'evento complementare all'estinzione di entrambe le discendenze, perciò ha probabilità $1 - (1 - x)^2$ di accadere. Ecco allora l'equazione:

$$x = p(1 - (1 - x)^2).$$

Niente a che vedere con un affannoso, inconcludente tentativo di enumerazione: una semplice equazione che in un colpo cattura l'intero processo. Senza dannarsi ad inseguire l'intreccio delle possibili sequenze di esiti.

Con questa equazione il problema è essenzialmente risolto, salvo qualche dettaglio ancora da sistemare. Vediamoli da vicino questi dettagli, in questo caso non sono banali, né del tutto indolori. Intanto risolviamo l'equazione, che è di 2° grado:

$$\begin{aligned} x = p(2x - x^2) &\longleftrightarrow x = px(2 - x) \longleftrightarrow [x = 0] \vee [1 = p(2 - x)] \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow [x = 0] \vee \left[x = 2 - \frac{1}{p} \right]. \end{aligned}$$

La probabilità cercata deve pertanto trovarsi nell'insieme $\left\{ 0, 2 - \frac{1}{p} \right\}$ - il che lascia aperte due possibilità. Indichiamo con x_p la probabilità cercata, per ricordare in modo esplicito la dipendenza dal valore p .

Qualora la quantità $2 - \frac{1}{p}$ risulti negativa (ossia per $p < \frac{1}{2}$), essa non può essere il valore di x_p , che dovrà quindi essere 0. Il che appare plausibile e coerente con quanto osservato circa l'andamento della popolazione media nel lungo periodo.

Per $p = \frac{1}{2}$ le due espressioni concordano nel fornire $x_{1/2} = 0$: in tal caso, come già osservato, la popolazione media è costante e vale 1 ad ogni generazione, ma la sopravvivenza della colonia è appesa a un filo e prima o poi si estingue con probabilità 1.

Il dubbio si pone per $p > \frac{1}{2}$. Quale delle due sarà in tal caso l'alternativa corretta? L'andamento del valore medio della popolazione suggerirebbe che la probabilità di andare avanti all'infinito non sia in tal caso nulla, ma la cosa va dimostrata.

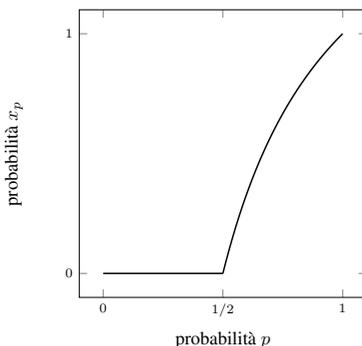
Potrebbe tornare utile pensare x_p appunto come funzione di $p \in [0, 1]$. Per ovvie ragioni, si tratta di una funzione non decrescente, nulla per $p \in [0, \frac{1}{2}]$. Ciò basta a dedurre che si abbia $x_p = 0$ fino a un certo valore $p_0 \geq \frac{1}{2}$ e poi, eventualmente, $2 - \frac{1}{p}$ una volta superato p_0 [per via della monotonia, i due valori non potranno alternarsi a singhiozzo]. D'altro canto, è palese che $x_1 = 1$, per cui basterebbe dimostrare la continuità di x_p nell'intervallo $[0, 1]$. La cosa è intuitivamente plausibile (perché mai dovrebbe esserci un salto?), ma non ovvia.

Una via d'uscita si trova esprimendo finalmente la corretta relazione ricorsiva per la successione S_n , che -una volta inquadrata la questione nella giusta ottica- appare adesso più semplice da individuare. Per ragioni di brevità, nel seguito alcuni dei risultati che potranno essere utili -o anche necessari- verranno lasciati come esercizio per il lettore. Il fatto che siano indicati come *esercizi* non implica che siano necessariamente facili o veloci da svolgere -alcuni di essi sono, anzi, tutt'altro che facili. Ciò renderà da un lato più impegnativa la lettura, ma così potrà forse risultare anche più coinvolgente.

Esercizio 1. Detta S_n la probabilità che, dopo n generazioni, la colonia non sia estinta, dimostrare che si ha $S_{n+1} = p(1 - (1 - S_n)^2)$. Dimostrare inoltre che, se $\frac{1}{2} < p < 1$, allora si ha $2 - \frac{1}{p} < S_{n+1} < S_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Questo implica che, se $p > \frac{1}{2}$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq 2 - \frac{1}{p} > 0$, il che chiude il discorso.

In definitiva, come già suggeriva l'andamento della popolazione attesa, per $p > \frac{1}{2}$ vi è una probabilità non nulla che la colonia sopravviva all'infinito. Ed ecco il grafico corrispondente all'andamento della probabilità x_p in funzione di $p \in [0, 1]$.

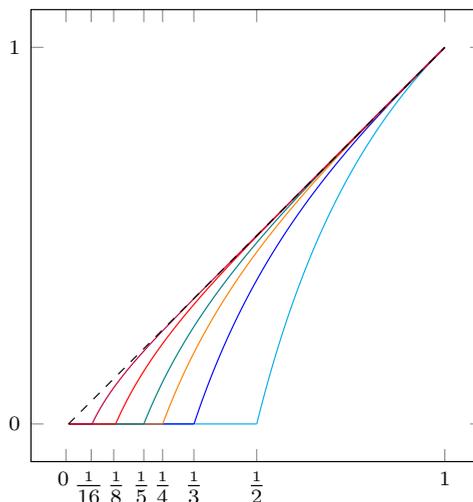


Tra l'altro questo problema descrive una dinamica per replicazione su scala temporale discreta che, seppur elementare, ha qualche tratto realistico. Si coglie, per esempio, la tendenza di base al comportamento esponenziale, come anche la possibilità che vi siano ceppi a lunga sopravvivenza - in apparenza pressoché perenni. Naturalmente, nella realtà le cose si complicano ed intervengono innumerevoli fattori, ma come schema di fondo non è privo di senso.

Chiaramente, sono possibili numerose varianti, a seconda delle alternative ammesse nella replicazione (non necessariamente riferibili a microbi - ad esempio possiamo immaginare un gioco, o un qualsiasi sistema dinamico). Una possibilità interessante è generalizzare il problema supponendo che, anziché dare luogo a 2 microbi, ciascun microbo si suddivida con probabilità p in un fissato numero m di microbi. In tal caso, detta $a_m(p)$ la probabilità che la colonia originata da un microbo siffatto non si estingua, si può dimostrare che, per $p > \frac{1}{m}$, il valore di $a_m(p)$ è tale che, posto $x = 1 - a_m(p)$, si ha l'uguaglianza $\frac{1-x^m}{1-x} = 1 + x + \dots + x^{m-1} = \frac{1}{p}$.

Esercizio 2. Nell'ipotesi che, ad ogni passo, ciascun microbo si replichi in un fissato numero m di microbi con probabilità p e muoia con probabilità $1 - p$, dimostrare che, a partire da 1 microbo iniziale, avviene quanto segue:

- alla generazione n -esima ($n > 0$), la popolazione sarà sempre un multiplo di m ed è in media di $(mp)^n$ microbi;
- detta $a_m(p)$ la probabilità che la colonia sopravviva per sempre, si ha $a_m(p) = 0$ per $p \leq \frac{1}{m}$ e $\frac{1 - (1 - a_m(p))^m}{a_m(p)} = \frac{1}{p}$ per $p > \frac{1}{m}$;
- per ogni $p \in [0, 1]$, si ha $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m(p) = p$.



L'ultima affermazione indica che, per m grande, la probabilità che la colonia sopravviva per sempre è circa pari a p . Se va a buon fine la prima replicazione, difficilmente il ceppo potrà estinguersi. La figura qui sopra riporta i grafici delle funzioni a_m per $m = 2, 3, 4, 5, 8, 16$. Si può cogliere anche visivamente la convergenza verso la funzione $a(p) = p$.

Prima di lasciare questo problema, è forse opportuno spendere un paio di parole sul convitato di pietra nascosto nell'ombra: l'esistenza stessa della probabilità cercata. Abbiamo trattato come un evento, al quale attribuire una probabilità, la sopravvivenza perenne della colonia: qualcosa che non è verificabile in tempo finito, su cui non potremmo mai effettuare una statistica o una scommessa e rilevare esiti e frequenze. Quali oggetti, esattamente, stiamo contando o misurando, quali quantità stiamo riportando, per stabilire tale probabilità? L'evento S_∞ "la colonia non si estingue mai" è pensato come complementare dell'unione degli eventi E_n "la colonia si estingue entro la generazione n -esima",

$$S_\infty = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{E_n}.$$

Se la colonia si estingue, infatti, ciò deve avvenire entro una certa generazione n_0 , quindi si verifica l'evento E_{n_0} insieme a tutti i successivi E_n ; altrimenti non si estingue mai e si verifica l'evento S_∞ . La probabilità di estinzione sarà quindi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_n)$$

e, naturalmente,

$$\mathbb{P}(S_\infty) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = 1 - \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\overline{E_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\overline{E_n}).$$

Che tutto ciò sia ragionevole ed ammissibile è accettato comunemente, senza troppa fatica: ricade nelle ipotesi cosiddette di σ -additività, che fanno parte degli abituali assiomi della probabilità. Non ci turba più di tanto che, nel futuro, non avremmo mai modo di stabilire se una data colonia sia o meno tra quelle che non si estingueranno (nel caso essa lo sia) e che inoltre, per $p > 1/2$, siffatte colonie perenni debbano per forza di cose esistere - e ce ne devono essere infinite. Tale livello di astrazione chiama in causa la tribolata, mai risolta, relazione tra infinito potenziale (nel quale cerchiamo rifugio prudentemente) ed infinito attuale (il nostro vero obiettivo, che mai vorremo abbandonare). Ma in matematica possiamo tutto questo e non solo.

Duelli, monete, dadi ed altre sfide

La lezione che si trae dall'esempio del paragrafo precedente si rivela molto fruttuosa: seguendone le orme si possono affrontare molti altri problemi dello stesso tenore, i quali appaiono adesso quasi del tutto innocui. Una volta entrati nel giusto ordine d'idee, non occorre più attendere l'illuminazione - basta aver chiaro cosa stiamo

cercando ed organizzarsi con accortezza. In molti casi si ottengono equazioni lineari, quindi con una sola soluzione: sarà allora sufficiente risolvere tali equazioni, senza necessità di ulteriori discussioni. Ma anche senza particolari insidie, giocherellare in questo modo con l'infinito è estremamente appagante, non ci si annoia mai.

Problema 2 *Due persone, Alberto e Barbara, si sfidano in un duello, sparandosi a turno l'uno contro l'altro. Il primo che colpisce l'altro vince il duello. In ciascun colpo, Alberto ha probabilità $1/3$ di andare a segno, mentre Barbara ha probabilità $3/5$ di colpire quando è il suo turno. Il primo a sparare è Alberto. Quali sono le probabilità di vittoria di ciascuno dei due? Quanti colpi possiamo aspettarci che verranno sparati in tutto il duello?*

Intanto un po' di notazione. Indichiamo, ad esempio, con a la probabilità che il duello sia vinto da Alberto e con b la probabilità che sia vinto da Barbara. Notiamo che Alberto, sparando per primo, vince se e solo se o va a segno al primo colpo oppure sbaglia il primo sparo, poi sbaglia anche Barbara e poi Alberto vince il duello che inizia in quel momento (dove egli spara per primo). Traduciamo in un'equazione: $a = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot a$. Questo perché, dopo l'errore di Barbara, il duello che parte in quel momento è identico a quello iniziale (non contano qui il morale e la psicologia), dove quindi la probabilità di vittoria di Alberto è sempre a . Da ciò si ricava che $a = \frac{5}{11}$. Per ricavare b , possiamo scrivere l'equazione $b = \frac{2}{3} \cdot (\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot b)$, da cui si ottiene $b = \frac{6}{11}$. Poiché $a + b = 1$, segue che, diversamente dal problema di prima, la probabilità che il duello vada avanti all'infinito è nulla, circostanza del resto facilmente intuibile (come succede, ahimé, nella roulette russa).

Per rispondere alla seconda domanda, indichiamo con X_A e X_B le variabili aleatorie che contano il numero di complessivo colpi sparati in un duello dove il primo a sparare è Alberto o, rispettivamente, Barbara. Indichiamo inoltre con A_1 e B_1 gli eventi "Alberto va a segno al suo primo colpo" e "Barbara va a segno al suo primo colpo", in quest'ordine.

Per quanto detto sopra e per le ipotesi del problema, si avrà

$$\mathbb{E}(X_A) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{E}(X_A|A_1) + \mathbb{P}(\overline{A_1}) \cdot \mathbb{E}(X_A|\overline{A_1}) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_A|\overline{A_1}).$$

È immediato constatare che $\mathbb{E}(X_A|\overline{A_1}) = 1 + \mathbb{E}(X_B)$: infatti, supponendo che Alberto abbia fallito il colpo iniziale, la durata attesa complessiva sarà di un colpo in più di un duello dove inizia Barbara (dopo l'errore di Alberto inizia un duello dove spara per prima Barbara, ma va computato un colpo in più rispetto alla durata di questo secondo duello che inizia adesso, appunto il colpo a vuoto di Alberto).

In maniera analoga, si avrà

$$\mathbb{E}(X_B) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{E}(X_B|B_1) + \mathbb{P}(\overline{B_1}) \cdot \mathbb{E}(X_B|\overline{B_1}) = \frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5}\mathbb{E}(X_B|\overline{B_1}).$$

Poiché, a sua volta, $\mathbb{E}(X_B|\overline{B_1}) = 1 + \mathbb{E}(X_A)$, si ottiene $\mathbb{E}(X_B) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot (1 + \mathbb{E}(X_A)) = 1 + \frac{2}{5}\mathbb{E}(X_A)$, da cui

$$\mathbb{E}(X_A|\overline{A_1}) = 1 + (1 + \frac{2}{5}\mathbb{E}(X_A)) = 2 + \frac{2}{5}\mathbb{E}(X_A).$$

Dunque si conclude che $\mathbb{E}(X_A) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot (2 + \frac{2}{5} \mathbb{E}(X_A))$. Siamo giunti a un'equazione nella sola incognita $\mathbb{E}(X_A)$, che ci permette di ricavare di valore $\mathbb{E}(X_A) = \frac{25}{11} = 2,27$.

Esercizio 3. Achille ed Ettore fanno un duello, sparando a turno l'uno contro l'altro. Ettore, che in ogni colpo ha probabilità $4/5$ di andare a segno, lascia che sia Achille a sparare per primo. In questo modo i due avversari hanno le stesse probabilità di vittoria. Quale sarà la durata attesa del duello?

Esercizio 4. Variante più difficile: triello. Andrea, Bruno e Carla, disposti in quest'ordine in senso orario, si sfidano in un triello all'ultimo sangue. Le probabilità che un colpo sparato da ciascuno dei tre vada a segno sono, rispettivamente, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{5}$. A partire da Andrea, ciascuno spara un colpo contro uno degli altri due; chi viene colpito è eliminato; dopo ogni sparo, tocca al successivo superstite, procedendo in senso orario da chi ha sparato per ultimo. Stabilire le probabilità di vittoria di ciascuno in due diverse ipotesi: che i tre siano a conoscenza delle rispettive abilità, oppure che ne siano ignari. Di quanti colpi sarà la durata attesa della sfida nei due casi? [nella prima ipotesi, ciascun contendente si comporta razionalmente, sparando sempre al più forte degli altri due - in caso di parità, sparerà casualmente a uno dei due; nella seconda ipotesi, ogni volta sparerà casualmente contro uno degli altri]

Problema 3. Una persona lancia più volte una moneta, fino a quando realizza due teste di fila. Qual è la probabilità che il numero complessivo di lanci sia pari? Qual è il numero di lanci atteso?

Indichiamo con A l'evento "il numero totale di lanci è pari" e con B l'evento "il numero totale di lanci è dispari". Indicheremo poi con T_1, T_2, T_3, \dots gli eventi "al lancio numero 1, 2, 3, ... esce testa" e con C_1, C_2, C_3, \dots gli eventi "al lancio numero 1, 2, 3, ... esce croce". Con questa notazione, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
 \bullet \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap C_1) + \mathbb{P}(A \cap T_1) = \mathbb{P}(C_1) \cdot \mathbb{P}(A|C_1) + \mathbb{P}(T_1) \cdot \mathbb{P}(A|T_1) \\
 &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(B) + \frac{1}{2} \left(\mathbb{P}(C_2) \cdot \mathbb{P}(A|T_1 \cap C_2) + \mathbb{P}(T_2) \cdot \mathbb{P}(A|T_1 \cap T_2) \right) \\
 &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(B) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\mathbb{P}(A) + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(B) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(A) + \frac{1}{4} \\
 \\
 \bullet \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap C_1) + \mathbb{P}(B \cap T_1) = \mathbb{P}(C_1) \cdot \mathbb{P}(B|C_1) + \mathbb{P}(T_1) \cdot \mathbb{P}(B|T_1) \\
 &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(A) + \frac{1}{2} \left(\mathbb{P}(C_2) \cdot \mathbb{P}(B|T_1 \cap C_2) + \mathbb{P}(T_2) \cdot \mathbb{P}(B|T_1 \cap T_2) \right) \\
 &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(A) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\mathbb{P}(B) + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) \\
 &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(A) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(B)
 \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema si ricava $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{5}$ e $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{5}$. La probabilità cercata è quindi $\frac{3}{5}$. La maggior probabilità di A rispetto a B si spiega col fatto che A potrebbe verificarsi già in 2 soli lanci, cosa impossibile per B .

Per stabilire il numero atteso di lanci, indichiamo con X la variabile aleatoria che conta il numero complessivo di lanci fino al momento in cui si realizzano due teste di fila. Si avrà :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(C_1) \cdot \mathbb{E}(X|C_1) + \mathbb{P}(T_1) \cdot \mathbb{E}(X|T_1) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}(X) + 1) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(X|T_1).$$

E ancora:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|T_1) &= \mathbb{P}(C_2) \cdot \mathbb{E}(X|T_1 \cap C_2) + \mathbb{P}(T_2) \cdot \mathbb{E}(X|T_1 \cap T_2) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}(X) + 2) + \frac{1}{2} \cdot 2 \\ &= 2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

Si ottiene dunque:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}(X) + 1) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(X|T_1) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}(X)) = \frac{3}{4}\mathbb{E}(X) + \frac{3}{2}.$$

Ne segue $\frac{1}{4}\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$, vale a dire $\mathbb{E}(X) = 6$.

Esercizio 5. Numerose varianti possibili.

Variante 1: una persona lancia più volte una moneta, fino a quando realizza tre teste di fila. Qual è la probabilità che il numero complessivo di lanci sia pari? Qual è il numero di lanci atteso?

Variante 2: una persona lancia più volte una moneta, fino a quando realizza due teste di fila. Qual è la probabilità che il numero complessivo di lanci sia un multiplo di 3?

Esercizio 6. Nel tennis, vince un gioco della partita chi per primo realizza 4 punti, a condizione che abbia almeno 2 punti di vantaggio sull'altro. Se i due avversari si trovano entrambi a 3 punti, proseguono fino a quando uno dei due riesce a distaccare l'altro di 2 punti. Anna e Giulia hanno realizzato 3 punti ciascuna ed, in questo gioco, è Giulia al servizio. Essendo una buona servitrice, supponiamo che, per ogni punto, Giulia abbia il 60% di probabilità di aggiudicarselo. Qual è la probabilità che sia Giulia a vincere il gioco? Quanti altri punti possiamo aspettarci che saranno necessari per concludere il gioco?

Esercizio 7. Piero e Michela giocano lanciando ripetutamente un dado a 6 facce. Appena esce un 5, la partita è vinta da Piero; appena escono due numeri pari di fila, la partita è vinta da Michela. Quali sono le probabilità di vittoria di Piero e di Michela? Quanti lanci durerà in media una partita? Quale sarà, in media, la somma complessiva dei numeri usciti nel corso di una partita?

Serie geometrica e dintorni

Abbiamo visto all'opera più volte la stessa idea: trarre informazioni su processi di lunghezza indefinita (eventualmente anche infinita), i quali riproducono al proprio

interno copie di se stessi (con proprietà invariate), per mezzo di equazioni riguardanti quantità associate al processo (probabilità, valori attesi, valori asintotici, e così via). Tali equazioni si ricavano proprio basandosi sull'autosimilarità e l'autoreferenzialità dei processi: in questo modo tali caratteristiche, derivanti dall'infinità dei processi in gioco e dunque connaturate alle difficoltà che si incontrano, divengono la chiave di volta per la loro comprensione e descrizione.

Mi ricordo che, diversi anni fa, poteva capitare di vedere in televisione un'inquadratura contenente uno schermo, il quale riproduceva in piccolo l'inquadratura stessa, compreso quello schermo - generando così una sequenza infinita di inquadrature identiche, sempre più piccole, annidate una nell'altra. Poteva capitare nei videoclip, nei balletto, ma anche -a volte- in notiziari o interviste. Mi sono sempre domandato quanto la sequenza potesse andare avanti e dove andasse a finire quella folle rincorsa di schermi. Ricordo me stesso avvicinarmi all'apparecchio per capire *quale e come* fosse l'ultima schermata della sequenza, come se mi sfuggisse qualcosa. Credo che in questo vezzo vi fosse un pizzico di compiacimento da parte degli operatori televisivi - una piccola sfida allo spettatore nel mostrare questa capacità d'imprigionare l'infinito in una semplice inquadratura.

Fin da Achille e la tartaruga, la serie geometrica è in un certo senso l'antenato dei calcoli dove l'autoreferenzialità entra in gioco. Osservando gli esempi delle pagine precedenti, non sfuggirà la presenza ricorrente di svariate serie geometriche, spesso intrecciate tra loro. Prima di proseguire, sarà bene quindi fare un po' mente locale sulla serie geometrica e riesaminarla nei suoi termini generali.

Per $|a| < 1$, posto $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$, si avrà

$$S = 1 + a(1 + a + a^2 + a^3 + \dots) = 1 + aS.$$

Il punto chiave, qui come negli altri esempi, si nasconde naturalmente in quei puntini di sospensione ... La somma $1 + a + a^2 + a^3 + \dots$ è ancora uguale a S per via del fatto che si va avanti all'infinito [per il momento, lasciamo da parte la questione della convergenza; ci tornerò dopo]. Delicata sarebbe anche la validità della legge distributiva per infiniti addendi (la a raccolta a fattor comune). Ma nessuno sarebbe disposto a credere che possa abbandonarci sul più bello. Troviamo così che $S - 1 = aS$, ossia $S = 1 + aS$. Un mattone pesa un kilo più a mattoni - tutto è saper vedere il mattone. Si conclude che $(1 - a)S = 1$, vale a dire $S = \frac{1}{1-a}$.

La controparte probabilistica di questo discorso è la variabile aleatoria cosiddetta *geometrica*. Si tratta della variabile che, in una sequenza di esperimenti casuali (ciascuno con la stessa probabilità di riuscita p), conta il numero di tentativi occorrenti per ottenere il primo successo. È immediato constatare che la probabilità che il primo successo avvenga al tentativo n -esimo è data da $p(1 - p)^{n-1}$. Cosa che, tra l'altro, può essere utilizzata anche per provare la convergenza della serie geometrica quando

$0 < a < 1$. Posto $a = 1 - p$, è chiaro che dovrà risultare $\sum_{1 \leq n \leq k} a^{n-1}(1-a) \leq 1$ qualunque sia $k \geq 1$: la somma delle probabilità di k eventi incompatibili (rispettivamente: che il primo successo avvenga al tentativo numero 1, numero 2, numero 3, e così via) non può superare 1. Ne segue che $\sum_{1 \leq n \leq k} a^{n-1} \leq \frac{1}{1-a}$ qualunque sia k : le somme parziali sono limitate, dunque la serie converge. [il caso $-1 < a < 0$ viene come ovvia conseguenza della convergenza per $0 < a < 1$]

Quale sarà il valore atteso di una variabile geometrica? Per esempio, per ottenere il primo 4 lanciando un dado a 6 facce, ci aspettiamo che debbano servire in media 6 lanci.

Il valore atteso di una variabile aleatoria X avente distribuzione geometrica con probabilità di riuscita p è uguale proprio a $1/p$ (lanciando un dado, il primo 4 uscirà in media al 6° lancio). Infatti, indicando con A_1 l'evento "il primo esperimento riesce", si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{E}(X|A_1) + \mathbb{P}(\overline{A_1}) \cdot \mathbb{E}(X|\overline{A_1}) \\ &= p \cdot 1 + (1-p) \cdot (1 + \mathbb{E}(X)), \end{aligned}$$

da cui si ottiene $p \cdot \mathbb{E}(x) = 1$, ossia $\mathbb{E}(X) = 1/p$.

In modo simile, si può stabilire anche la varianza di X :

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}\left(\left(X - \frac{1}{p}\right)^2\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{E}\left(\left(X - \frac{1}{p}\right)^2|A_1\right) + \mathbb{P}(\overline{A_1}) \cdot \mathbb{E}\left(\left(X - \frac{1}{p}\right)^2|\overline{A_1}\right) \\ &= p \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 + (1-p) \cdot \mathbb{E}\left(\left(X - \frac{1}{p} + 1\right)^2\right) \end{aligned}$$

Osserviamo che $\mathbb{E}\left(\left(X - \frac{1}{p} + 1\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(X - \frac{1}{p}\right)^2\right) + 2\mathbb{E}\left(X - \frac{1}{p}\right) + \mathbb{E}(1) = \text{Var}(X) + 2 \cdot 0 + 1$.

Si ha pertanto l'uguaglianza $\text{Var}(X) = p \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 + (1-p) \cdot (\text{Var}(X) + 1)$, da cui:

$$p \cdot \text{Var}(X) = p \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 + (1-p), \text{ ossia } \text{Var}(X) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 + \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p^2}.$$

Nella comune esperienza scolastica, abbiamo a che fare con ragionamenti autoreferenziali applicati a processi infiniti fin da ragazzi, sebbene in genere la cosa non sia immediatamente chiara. Per esempio, quando ci viene spiegato come ricavare la frazione generatrice di un numero periodico per mezzo di un'equazione del tipo

$$\begin{aligned} x = 2,\overline{4776} &\longrightarrow 10000x = 24776,\overline{4776} \longrightarrow 10000x - x = 24776,\overline{4776} - 2,\overline{4776} \\ &\longrightarrow 9999x = 24774. \end{aligned}$$

Quell'infinità di cifre che vanno a combaciare, senza lasciare buchi nella coda della sequenza decimale, è una manifestazione tipica dell'infinito - una delle prime soste

che abbiamo occasione di fare al Grand Hotel Hilbert. Dunque un'occasione d'oro - un peccato che rimanga in molti casi senza seguito, senza tuffarsi nell'abisso che vi si nasconde. Ce ne accorgiamo, più o meno confusamente, quando la nostra mente vi si affaccia ed è colta da senso di vertigine e smarrimento, insieme ad una curiosità improvvisa, proprio come me bambino davanti alla sequenza infinita degli schermi annidati.

L'intento principale di questo articolo è cercare di disseminare qualche idea per condividere il piacere di giocare e *calcolare* con l'infinito, seppure l'infinito -per così dire- di piccola taglia dei numeri naturali. Il terreno che ho in parte esplorato propone un insieme di spunti e di possibili percorsi, anche in vista di una presentazione agli alunni di questa tematica (con le innumerevoli varianti nelle quali chiunque può scatenarsi). Una sua trattazione offrirebbe a mio parere diversi aspetti promettenti:

- l'incontro con l'infinito e l'acquisizione di un certo controllo su di esso, in relazione a fenomeni di autoreferenzialità ed autosimilarità: un filo rosso che corre lungo tutta la storia della matematica e non solo (da Zenone a Cantor, Russel, fino a Gödel o Mandelbrot), insieme al disorientamento o perfino gli sconquassi che ne sono potuti derivare - che in così tante occasioni ci hanno portato a interrogarci e ci hanno costretto a comprendere più a fondo;
- la familiarizzazione con la probabilità in un contesto creativo, aperto all'intuizione e non banalmente enumerativo (comunque non privo di aspetti combinatorici ed enumerativi);
- la possibilità di dare luogo in maniera naturale ad attività esplorative, congetture, ragionamenti per induzione, connessioni con varie aree e concetti rilevanti (l'emergere di nozioni come quella di successione, serie, limite, l'idea di procedura ricorsiva, e così via);
- l'uso significativo e naturale delle equazioni come strumento conoscitivo e, quindi, il rafforzamento della capacità di ricavarle;
- la varietà di esercizi e problemi interessanti che si possono generare, su diverse scale di complessità, adattabili a diverse tappe del cammino scolastico.

Un terreno molto fertile dunque, dai frutti inesauribili: mille e mille occasioni per farsi domande, scavare, sperimentare, rimettere insieme i pezzi - e, in tutto questo, giocare e divertirsi un bel po'.

Problema 4. *Sorteggiando ripetutamente tra le lettere dell'alfabeto, quante estrazioni occorreranno, in media, per trovare la sequenza JJJ (3 lettere J consecutive)?*

Per comodità, indicheremo con p la probabilità di estrarre la lettera J (vale a dire $1/26$) e con X_3 la variabile che conta i sorteggi necessari per trovare 3 volte di fila J. Denoteremo inoltre con J_1 e J_2 gli eventi, rispettivamente, "la prima lettera estratta è J" e "la seconda lettera estratta è J". Possiamo allora scrivere:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_3) &= \mathbb{P}(\overline{J_1}) \cdot \mathbb{E}(X_3|\overline{J_1}) + \mathbb{P}(J_1) \cdot \mathbb{E}(X_3|J_1) = (1-p) \cdot (\mathbb{E}(X_3) + 1) + p \cdot \mathbb{E}(X_3|J_1) \\
&= (1-p) \cdot (\mathbb{E}(X_3) + 1) + p \cdot (\mathbb{P}(\overline{J_2}) \cdot \mathbb{E}(X_3|J_1 \cap \overline{J_2}) + \mathbb{P}(J_2) \cdot \mathbb{E}(X_3|J_1 \cap J_2)) \\
&= (1-p) \cdot (\mathbb{E}(X_3) + 1) + p \cdot ((1-p) \cdot (\mathbb{E}(X_3) + 2) + p \cdot \mathbb{E}(X_3|J_1 \cap J_2)) \\
&= (1-p) \cdot (\mathbb{E}(X_3) + 1) + p \cdot ((1-p) \cdot (\mathbb{E}(X_3) + 2) + p \cdot ((1-p) \cdot (\mathbb{E}(X_3) + 3) + p \cdot 3)) \\
&= (1-p)(1+p+p^2) \cdot \mathbb{E}(X_3) + (1-p)(1+2p+3p^2) + 3p^3 \\
&= (1-p^3) \cdot \mathbb{E}(X_3) + (1+p+p^2).
\end{aligned}$$

Ne segue che $p^3 \cdot \mathbb{E}(X_3) = 1 + p + p^2$, ossia $\mathbb{E}(X_3) = \frac{1+p+p^2}{p^3} = \frac{1-p^3}{p^3(1-p)}$, vale a dire

$$\mathbb{E}(X_3) = 26 \cdot \frac{26^3-1}{25} = 26 \cdot 703 = 18278.$$

Esercizio 8. Dimostrare, più in generale, che

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1+p+\dots+p^{n-1}}{p^n} = \frac{1-p^n}{p^n(1-p)}$$

dove X_n indica il numero di tentativi necessari per avere n successi consecutivi in una sequenza di esperimenti (ciascuno dei quali ha probabilità di riuscita p).

In particolare, se si sorteggiano lettere da un alfabeto avente k simboli, il numero di estrazioni necessarie ad ottenere una (qualsivoglia) sequenza fissata di lunghezza n , visto che $p = \frac{1}{k}$ a ciascun passo, sarà pari in media a $k(1+k^2+\dots+k^{n-1}) = k \cdot \frac{k^n-1}{k-1}$ (peraltro, un numero intero che è sempre multiplo di k).

Breve digressione. A tanti, nell'età delle Grandi Domande, sarà capitato di chiedersi -per esempio- se mai si troveranno 100 o, perché no, 1000 cifre consecutive uguali a 0 nello sviuppo decimale di π , e quando potrà accadere, quante volte, o altre cose simili. Al momento, non si conosce con certezza la risposta a questa domanda o altre dello stesso tenore (finora, esplorando le cifre di π , è stata trovata massimo una dozzina di 0 consecutivi, o poco più). Ciò nonostante, più o meno chiunque, davanti a un oracolo onnisciente, punterebbe sul sì: qualcosa ci dice che prima o poi ci saranno 100 e anche 1000 cifre consecutive uguali a 0 e che ciò accadrà infinite volte. E lo stesso ci si aspetta debba succedere negli altri numeri irrazionali abitualmente ottenuti per via geometrica, algebrica o analitica, come e , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ln 2$ e così via. Ma siamo ben lontani da una dimostrazione di tutto ciò. È plausibile ritenere che tutti questi siano esempi di numeri cosiddetti *normali* in qualsiasi base di numerazione b - ossia numeri il cui sviluppo contiene infinite volte qualsivoglia sequenza finita di n cifre, ciascuna con frequenza tendente asintoticamente a $1/b^n$ (la frequenza che ci aspetta in un sorteggio equo). Già Borel dimostrò che *quasi* ogni numero reale -ad eccezione appunto di un insieme di misura nulla- è normale in tutte le basi di numerazione. Tuttavia, provare la normalità di numeri assegnati si è rivelato estremamente difficile, se non proibitivo: al momento, in pratica, si è dimostrata la normalità solo per alcuni

esempi di numeri costruiti appositamente, definendone la scrittura in una certa base b (anche in tali casi, non si sa però dimostrare la normalità nelle altre possibili basi). Ma di nessuno dei numeri -per così dire- *familiari* è stata finora provata la normalità (in nessuna base). Piuttosto di recente, è stato dimostrato che, nello sviluppo binario dei numeri irrazionali di forma \sqrt{n} , le cifre 0 e 1 compaiono con frequenze tendenti a $1/2$: il risultato è dovuto a Richard Isaac - che io sappia, è al momento il risultato più vicino alla normalità di qualche numero che sia computabile e significativo (non costruito *ad hoc*).

Nell'ipotesi di normalità, il numero di cifre atteso per trovarne 100 di fila uguali a 0, come per qualsiasi altra sequenza della stessa lunghezza, corrisponde a quello che si avrebbe in un sorteggio - vale a dire $10 \cdot \frac{10^{100}-1}{9} \approx \frac{10^{101}}{9}$. Per numeri irrazionali come π , e o $\sqrt{2}$ al momento non esistono stime più precise o più fondate. Si può anche provare a fare una tabella che riporti, per valori piccoli di n , in quale posizione decimale si realizza la prima occorrenza di n cifre 0 consecutive per i suddetti esempi di numeri irrazionali, a confronto con l'aspettativa $\mathbb{E}(X_n)$ che si avrebbe per un sorteggio.

n	$\mathbb{E}(X_n)$	attesa in π	attesa in e	attesa in $\sqrt{2}$
1	10	32	13	13
2	110	308	113	416
3	1110	603	330	1881
4	11110	13393	7691	12658
5	111110	17538	89300	109816
6	1111110	1699932	89301	109817
7	11111110	3794578	2332688	158815
8	111111110	172330857	3597154	129460496

Talvolta le attese sono più lunghe del previsto e talvolta più brevi, com'è naturale che sia; in certi casi possono essere anche molto più brevi (tipo la sequenza di 7 cifre 0 in $\sqrt{2}$, che arriva in poco più di $1/100$ dell'attesa prevista). In 2 casi su 21 l'attesa ulteriore tra n e $n+1$ cifre 0 consecutive è di un solo passo - la probabilità di ciò sarebbe appunto di $1/10$ in un sorteggio. Per quanto una tabella del genere non possa, ovviamente, dimostrare o confutare alcuna proprietà asintotica, può comunque aiutare a farsi un'idea - ad esempio potrebbe aiutare a cogliere regolarità o schemi sottostanti, se ve ne fossero (molteplici congetture scaturiscono proprio da statistiche similari, più o meno complesse). Può apparire vagamente paradossale che si sappia dimostrare la normalità di quasi tutti i numeri reali mentre non si sa -in pratica- dimostrare la normalità di alcun numero dato. Niente di nuovo od inaudito in fin dei conti: basta pensare al caso dei numeri trascendenti, dove la situazione è solo un po' meno disperata (ma non si discosta troppo). Non appena ci mettiamo a scavare poco più a fondo in quella poderosa astrazione chiamata *numeri reali*, facilmente restiamo sopraffatti dalla complessità infinita che vi si cela (ma continuiamo pazienti a scavare).

Esercizio 9. Fissato un alfabeto avente un numero di simboli $k \geq 2$, indichiamo con T_n il numero di sorteggi che occorrono per trovare n volte di fila uno stesso simbolo (non fissato); indichiamo inoltre con Y_n il numero di sorteggi che occorrono per trovare n volte di fila uno stesso simbolo e, in seguito, altre n volte di fila uno stesso simbolo che sia diverso dal primo. Dimostrare che $\mathbb{E}(T_n) = 1 + k + \dots + k^{n-1} = \frac{k^n - 1}{k - 1}$ e che $\mathbb{E}(Y_n) = (1 + \frac{k}{k-1}) \cdot \mathbb{E}(T_n)$.

Da notare, in quest'ultimo esercizio, che $\mathbb{E}(Y_n) > 2\mathbb{E}(T_n)$: infatti l'attesa per il secondo blocco durerà in media più della prima, considerato il rischio di ritrovare un blocco uguale al primo. Ma, se l'alfabeto ha molti simboli (ossia $k \rightarrow \infty$), si ha $\mathbb{E}(Y_n) \rightarrow 2\mathbb{E}(T_n)$: diviene infatti estremamente improbabile ritrovare proprio lo stesso blocco già trovato.

Tempi d'attesa... "armonici"

Per finire, ancora un paio di variazioni, sempre legate al tema dei tempi d'attesa in distribuzioni geometriche o loro parenti strette.

Problema 5. Consideriamo una coppia di microbi, ciascuno dei quali ha, ogni giorno, una certa probabilità di morte p . Quanti giorni impiegheranno in media a morire entrambi? [in questo caso i microbi non si riproducono, possono solo sopravvivere più o meno a lungo]

La durata della vita di ciascun microbo è una variabile aleatoria con distribuzione geometrica - in questo caso la riuscita consiste nella morte del microbo. Tuttavia, i tempi di attesa delle rispettive morti corrono *in parallelo*; la sopravvivenza o meno di uno dei microbi non influisce sulla probabilità di sopravvivenza dell'altro. In altre parole, la variabile aleatoria che indicheremo con X_2 , la quale conta i giorni necessari alla scomparsa di entrambi, non è la somma delle due variabili geometriche (chiamiamole X_1) che misurano la durata dei singoli microbi. La variabile X_2 misura la durata del più longevo tra i due microbi - non sappiamo quale dei due sarà. Si può quindi prevedere che il valore atteso di X_2 sarà compreso tra $\frac{1}{p}$ e $\frac{2}{p}$, cioè tra il valore atteso di X_1 ed il suo doppio.

Per calcolare $\mathbb{E}(X_2)$, usiamo lo stesso metodo visto negli esempi precedenti. Indichiamo con Y la variabile che conta il numero di microbi che muoiono il primo giorno. Si ha l'uguaglianza

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_2) &= \mathbb{P}(Y=2) \cdot \mathbb{E}(X_2|Y=2) + \mathbb{P}(Y=1) \cdot \mathbb{E}(X_2|Y=1) + \mathbb{P}(Y=0) \cdot \mathbb{E}(X_2|Y=0) \\ &= p^2 \cdot 1 + 2p(1-p) \cdot (\mathbb{E}(X_1) + 1) + (1-p)^2 \cdot (\mathbb{E}(X_2) + 1) \\ &= p^2 + 2p(1-p) \cdot (\frac{1}{p} + 1) + (1-p)^2 \cdot \mathbb{E}(X_2) + (1-p)^2 \end{aligned}$$

Perciò $(1 - (1-p)^2) \cdot \mathbb{E}(X_2) = p^2 + 2(1-p)(1+p) + (1-p)^2$, ossia $(2p - p^2) \cdot \mathbb{E}(X_2) = 3 - 2p$.

In conclusione, si è trovato che $\mathbb{E}(X_2) = \frac{3-2p}{p(2-p)}$.

Non è difficile verificare che, come detto, risulta in effetti $\frac{1}{p} < \mathbb{E}(X_2) < \frac{2}{p}$ per ogni $p \in (0, 1)$. Per fare un esempio, se fosse $p = \frac{1}{3}$, l'aspettativa di vita di un microbo sarebbe di 3 giorni, mentre per la popolazione di due microbi sarà di $\frac{21}{5} = 4,2$ giorni. Quando la probabilità di sopravvivenza di ciascun microbo è molto elevata, vale a dire per $p \rightarrow 0$, il rapporto $\frac{\mathbb{E}(X_2)}{\mathbb{E}(X_1)}$ tende a $\frac{3}{2}$, dunque la sopravvivenza attesa della popolazione sarà di circa una volta e mezza quella di un singolo individuo. Inoltre, ovviamente, $\mathbb{E}(X_2) = 1$ per $p = 1$ e $\mathbb{E}(X_2)$ va all'infinito per $p \rightarrow 0$.

Proviamo a vedere cosa succede con una popolazione iniziale più numerosa, formata da n microbi, sempre nell'ipotesi che gli individui presentino ogni giorno la stessa mortalità. Nel seguito, dato il tasso p di mortalità giornaliera di ciascun microbo, $E_n(p)$ denoterà il valore atteso $\mathbb{E}(X_n)$ del tempo necessario per l'estinzione di una popolazione formata inizialmente da n microbi. La popolazione ancora in vita dopo k giorni sarà in media di $n(1-p)^k$ microbi. Questo, però, non basta di per sé a stabilire quale sia l'aspettativa di sopravvivenza della popolazione.

Esercizio 10. Dimostrare che $E_3(p) = \frac{11-19p+12p^2-3p^3}{p(2-p)(3-3p+p^2)}$ e che, per ogni $p \in (0, 1)$, si ha $\frac{1}{p} < \mathbb{E}(X_3) < \frac{3}{p}$. Verificare inoltre che $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_3(p)}{E_1(p)} = \frac{11}{6}$.

A questo punto, è inevitabile la curiosità di giungere a un'espressione generale che fornisca $E_n(p)$ per n qualsiasi. Questi primi casi mostrano, però, una crescente complicazione delle espressioni algebriche, che proseguendo aumenta sempre più. Con lo stesso tipo di ragionamento fatto prima (contare quanti microbi muoiono il primo giorno), non è difficile trovare quanto segue.

Esercizio 11. Dimostrare che, per ogni $n \geq 0$, si ha:

$$\left(\sum_{0 \leq j \leq n} (1-p)^j \right) \cdot E_{n+1}(p) = \frac{1}{p} + \sum_{0 \leq j \leq n} (1-p)^j p^{n-j} \binom{n+1}{j} E_j(p). \quad [E_0(p) = 0]$$

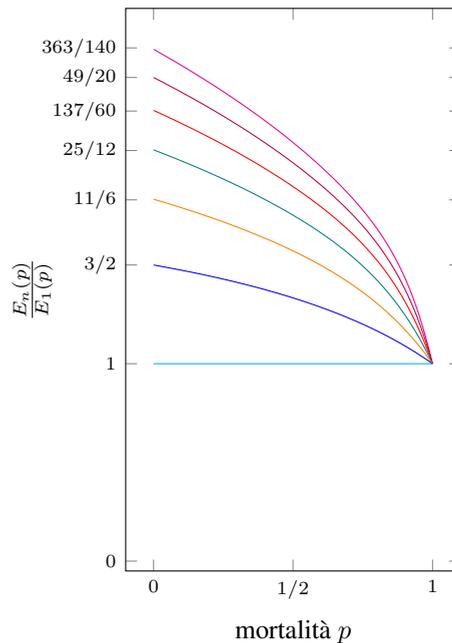
Si possono così ricavare, una dopo l'altra, tutte le funzioni $E_n(p)$, le quali presentano in effetti espressioni via via più complicate: si tratta di funzioni razionali, con numeratore e denominatore di grado crescente e dove al denominatore compaiono, oltre al fattore p , prodotti di polinomi ciclotomici nella variabile $(1-p)$. La tabella sottostante contiene alcune di queste espressioni. Visto che al denominatore compare sempre il fattore p , nella tabella converrà riportare le espressioni relative alla quantità $pE_n(p) = \frac{E_n(p)}{E_1(p)}$, che presentano anche il vantaggio di essere funzioni limitate. Inoltre, esse assumono un aspetto più semplice scrivendole in funzione della variabile $x = 1-p$ (il tasso di sopravvivenza dei microbi), e così faremo.

n	$pE_n(p) = \frac{E_n(p)}{E_1(p)}$
1	1
2	$\frac{3-2p}{2-p} = \frac{1+2x}{1+x}$
3	$\frac{11-19p+12p^2-3p^3}{(2-p)(3-3p+p^2)} = \frac{1+4x+3x^2+3x^3}{(1+x)(1+x+x^2)}$
4	$\frac{1+5x+3x^2+10x^3+2x^4+4x^5}{(1+x)(1+x+x^2)(1+x^2)}$
5	$\frac{1+7x+8x^2+23x^3+22x^4+26x^5+20x^6+20x^7+5x^8+5x^9}{(1+x)(1+x+x^2)(1+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)}$
6	$\frac{1+7x-x^2+31x^3-2x^4+35x^5+14x^6+34x^7-4x^8+29x^9-3x^{10}+6x^{11}}{(1+x)(1+x+x^2)(1+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x+x^2)}$
7	$\frac{A}{(1+x)(1+x+x^2)(1+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)}$

dove:

$$A = 1 + 9x + 4x^2 + 48x^3 + 29x^4 + 79x^5 + 86x^6 + 134x^7 + 104x^8 + 151x^9 + 100x^{10} + 127x^{11} + 77x^{12} + 70x^{13} + 21x^{14} + 42x^{15} + 7x^{17}$$

Ed ecco i rispettivi grafici.



Non è difficile vedere che, fissato $p < 1$, la successione $E_n(p)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente e divergente. Che sia crescente è abbastanza chiaro: aumentando i microbi presenti inizialmente, l'aspettativa di sopravvivenza della popolazione non può che aumentare. Forse un po' meno immediato è che, al crescere della popolazione iniziale, l'aspettativa di vita della popolazione tenderà all'infinito, qualunque sia $p < 1$. Ciò avviene nonostante il fatto che, aggiungendo nuovi microbi, i rispettivi contributi alla vita media della popolazione sembrano decrescere piuttosto rapidamente.

Per provare quanto sopra, osserviamo in primo luogo che la probabilità che, dopo i primi k giorni, una popolazione di n microbi non sia ancora estinta, è uguale a $1 - (1 - (1 - p)^k)^n$. Infatti si ha che:

$1 - p$ è la probabilità che un microbo sopravviva un giorno;

$(1 - p)^k$ è la probabilità che un microbo sopravviva per k giorni;

$1 - (1 - p)^k$ è quindi la probabilità che un microbo muoia entro il k -esimo giorno;

$(1 - (1 - p)^k)^n$ sarà allora la probabilità che tutti gli n microbi muoiano entro il k -esimo giorno;

$1 - (1 - (1 - p)^k)^n$ è pertanto la probabilità che non tutti gli n microbi muoiano nei primi k giorni.

Tale valore corrisponde a $\mathbb{P}(X_n > k)$, la probabilità che la variabile aleatoria X_n assuma un valore maggiore di k .

Poiché si ha $E_n(p) = \sum_{k \geq 1} k \cdot \mathbb{P}(X_n = k) = 1 \cdot \mathbb{P}(X_n = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X_n = 2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X_n = 3) + \dots$,

una volta scelto un certo intero positivo k , si avrà:

$$\begin{aligned} E_n(p) &> 1 \cdot \mathbb{P}(X_n = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X_n = 2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X_n = 3) + \dots + k \cdot \mathbb{P}(X_n = k) \\ &\quad + (k + 1) \cdot \mathbb{P}(X_n = k + 1) + (k + 1) \cdot \mathbb{P}(X_n = k + 2) \\ &\quad + (k + 1) \cdot \mathbb{P}(X_n = k + 3) + \dots \\ &= 1 \cdot \mathbb{P}(X_n = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X_n = 2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X_n = 3) + \dots + k \cdot \mathbb{P}(X_n = k) \\ &\quad + (k + 1) \cdot \mathbb{P}(X_n > k) \\ &> (k + 1) \cdot \mathbb{P}(X_n > k) \end{aligned}$$

Perciò, fissato il tasso di mortalità $p < 1$, se si vuole che il valore di $E_n(p)$ superi un arbitrario valore $K > 0$, sarà sufficiente, per esempio, scegliere n abbastanza grande da rendere il prodotto $(k + 1) \cdot \mathbb{P}(X_n > k)$ maggiore di K , per qualche intero $k > K$ scelto a piacimento. È rapido verificare che, scelto come k un qualsiasi intero $k > K$, al crescere di n il valore di $(k + 1) \cdot \mathbb{P}(X_n > k)$ prima o poi supererà K . Infatti $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n > k) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - (1 - (1 - p)^k)^n = 1$, dal momento che, se $0 \leq p < 1$, si ha $0 \leq (1 - (1 - p)^k) < 1$ per ogni intero positivo k e quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} (k + 1) \cdot \mathbb{P}(X_n > k) = k + 1 > K$.

In conclusione, aumentando la popolazione iniziale, il tempo medio necessario all'estinzione potrà essere arbitrariamente lungo, anche nel caso che la mortalità sia molto elevata (purché non del 100%, evidentemente).

Esercizio 12. Mostrare che, per ogni $n, k \geq 1$, si ha: $\mathbb{P}(X_n = k) = (1 - (1 - p)^k)^n + (1 - (1 - p)^{k-1})^n$.

Interessante osservare cosa avviene quando la mortalità è molto bassa, ossia per valori di p prossimi a 0.

Proposizione. Qualunque sia l'intero positivo n , si ha

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_n(p)}{E_1(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p E_n(p) = H_n$$

dove $H_n = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ è l' n -esimo numero armonico.

In altre parole: se la mortalità è bassa, al crescere della numerosità iniziale, l'aspettativa di sopravvivenza della popolazione aumenterà (in rapporto alla speranza di vita di un singolo microbo) con un andamento simile a quello della serie armonica.

La cosa si può dimostrare per induzione, basandosi sulla relazione ricorsiva contenuta nell'esercizio 11.

Il caso iniziale $n = 1$ è immediato, dato che $p E_1(p) = 1 = H_1$.

Preso $n \geq 1$, supponiamo dunque di avere $\lim_{p \rightarrow 0} p E_j(p) = H_j$ per tutti i casi $j \leq n$ e vediamo qual è il valore di $\lim_{p \rightarrow 0} p E_{n+1}(p)$. In base alla relazione dell'esercizio 11 (moltiplicando ambo i lati per p), si può scrivere:

$$\left(\sum_{0 \leq j \leq n} (1-p)^j \right) \cdot p E_{n+1}(p) = 1 + \sum_{0 \leq j \leq n} (1-p)^j p^{n-j} \binom{n+1}{j} \cdot p E_j(p).$$

Facendo tendere $p \rightarrow 0$ da ambo i lati e considerando l'ipotesi induttiva, si ottiene:

$$(n+1) \cdot \left(\lim_{p \rightarrow 0} p E_{n+1}(p) \right) = 1 + \sum_{0 \leq j \leq n} (1-p)^j p^{n-j} \binom{n+1}{j} H_j = 1 + (n+1)H_n,$$

dal momento che, per $p \rightarrow 0$, tutti i termini della somma si annullano, salvo quello corrispondente a $n - j = 0$, cioè $j = n$. Si ha pertanto

$$\lim_{p \rightarrow 0} p E_{n+1}(p) = \frac{1}{n+1} + H_n = H_{n+1}.$$

Con ciò è dimostrata la proposizione.

La serie armonica diverge piuttosto lentamente, con crescita logaritmica. In effetti, se gli individui presentano lo stesso tasso di mortalità giornaliera, è ragionevole aspettarsi che gran parte di essi moriranno in tempi tra loro ravvicinati; nella coda della distribuzione troveremo sporadici superstiti. Un noto risultato di Eulero stabilisce che la differenza $H_n - \ln n$, per $n \rightarrow \infty$, tende a un valore finito $\gamma \approx 0,577\dots$ (la cosiddetta *costante di Eulero-Mascheroni*). Il numero γ è celebre per essere ancor oggi tra i più sfuggenti: per quanto sia più o meno scontato che debba trattarsi di un numero trascendente [un'identità algebrica per γ avrebbe del prodigioso], tuttora non se ne sa dimostrare neppure l'irrazionalità - si sa che, se fosse una frazione, il denominatore dovrebbe essere un numero alquanto spropositato. Lo si può comunque approssimare con la precisione voluta.

Proviamo a stimare l'aspettativa di sopravvivenza di una popolazione di 1 milione di microbi, supponendo una mortalità giornaliera dell'1%. Dopo circa 69 giorni la popolazione si sarà dimezzata - infatti $0,99^{69} < 0,5$ - notare che la sopravvivenza mediana dipende solo dal tasso di mortalità p e non dalla popolazione iniziale. Per quanto riguarda la completa estinzione, il risultato precedente indica che $0,01 \cdot E_{10^6}(0,01) \approx H_{10^6}$, vale a dire $E_{10^6}(0,01) \approx \frac{H_{10^6}}{0,01} \approx 100 \cdot (\gamma + \ln 10^6) \approx 1439$ giorni. Possiamo prevedere che l'ultimo superstite vivrà oltre 14 volte la vita media dei suoi simili (che è di $\frac{1}{0,01} = 100$ giorni) e quasi 21 volte la loro vita mediana (che è di circa 69 giorni). Simili disparità nella longevità di questi microbi derivano dall'ipotesi che la mortalità quotidiana sia costante nel tempo: ciò equivale a supporre che non vi sia invecchiamento. Si capisce come questa ipotesi sia ben poco realistica rispetto alle comuni specie viventi.

Esercizio 13. Per quanto tempo possiamo aspettarci che una popolazione di n microbi -sempre con tasso di mortalità giornaliero p - sopravviva per intero, fino alla morte di un individuo qualsiasi?

Concludiamo su una nota un po' meno tetra.

Problema 6. *Quante figurine occorre acquistare, in media, per completare un album di n figurine?*

Partiamo con un esempio semplice. Supponiamo che l'album abbia in tutto solo 5 figurine; indichiamo con X_5, X_4, X_3, X_2 e X_1 le variabili che contano le figurine acquistate per trovare una figurina mancante quando restano ancora da sistemare, nell'ordine, 5, 4, 3, 2 e 1 figurine dell'album. Con questa notazione, detto $X(5)$ il numero di figurine acquistate per completare un tale album di 5 figurine, si avrà $X(5) = X_5 + X_4 + X_3 + X_2 + X_1$. Il problema chiede di stabilire il valore atteso di $X(5)$, che indicheremo con F_5 . Dal momento che $F_5 = \mathbb{E}(X_5 + X_4 + X_3 + X_2 + X_1) = \mathbb{E}(X_5) + \mathbb{E}(X_4) + \mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_1)$, si tratta di trovare i valori attesi delle singole variabili X_5, X_4, X_3, X_2, X_1 .

Evidentemente $X_5 = 1$ e dunque $\mathbb{E}(X_5) = 1$: all'inizio l'album è vuoto e la prima figurina acquistata sarà certamente mancante. Ma già alla seconda potremmo trovare un doppione. La probabilità che la seconda sia mancante è $\frac{4}{5}$. Potremmo trovarci a doverne acquistare anche parecchie prima di trovarne una mancante (se fossimo parecchio sfortunati). Si tratta cioè di fare vari tentativi, sempre con la stessa probabilità di riuscita, arrendendoci al primo successo. In altre parole, la variabile aleatoria X_4 ha una distribuzione geometrica con probabilità di riuscita $\frac{4}{5}$. Il suo valore atteso è dunque $\mathbb{E}(X_4) = \frac{5}{4}$. Sistemata anche la seconda figurina, la probabilità che una nuova figurina sia mancante diviene $\frac{3}{5}$. Perciò X_3 sarà una variabile geometrica con probabilità di riuscita $\frac{3}{5}$ e quindi $\mathbb{E}(X_3) = \frac{5}{3}$. Proseguendo, è ormai chiaro che avremo $\mathbb{E}(X_2) = \frac{5}{2}$ e infine $\mathbb{E}(X_1) = \frac{5}{1} = 5$. Il numero di figurine da acquistare è quindi la somma di 5 variabili aleatorie con distribuzione geometrica, con probabilità di riuscita via via decrescenti. In conclusione, si è trovato che

$$F_5 = 1 + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + 5 = 5 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{137}{12} \approx 11,4.$$

La situazione è dunque più semplice rispetto al problema precedente: abbiamo ancora delle variabili aleatorie con distribuzione geometrica, ma stavolta sono disposte -per così dire- *in serie* e non più in parallelo; ciascuna di esse comincia a vivere dopo che la precedente è morta. È di tutta evidenza che il ragionamento può essere trasportato senza modifiche al caso di un numero qualsiasi n di figurine:

$$F_n = \mathbb{E}(X_n + X_{n-1} + \dots + X_2 + X_1) = n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right) = n \cdot H_n$$

dove $H_n = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{j}$ indica, ancora, l' n -esimo numero armonico. Tutto ciò, chiaramente, nell'ipotesi che le figurine siano stampate e messe in vendita in maniera effettivamente casuale, senza che vi siano figurine "rare" - come invece per un disguido accade al leggendario portiere Pier Luigi Pizzaballa, divenuto introvabile.

Non è difficile stimare anche la deviazione standard, dato che le variabili $X_n, X_{n-1}, \dots, X_2, X_1$ sono indipendenti. Posto $V_n = \text{Var}(X_n + X_{n-1} + \dots + X_1)$, si avrà $V_n = \text{Var}(X_n) + \text{Var}(X_{n-1}) + \dots + \text{Var}(X_1)$. Dato che la probabilità di successo per X_k è pari a $\frac{k}{n}$, si ha $\text{Var}(X_k) = \frac{1 - \frac{k}{n}}{(\frac{k}{n})^2} = \frac{n^2 - kn}{k^2} \leq \frac{n^2}{k^2}$ e perciò

$$V_n < n^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \dots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{1^2} \right) = n^2 \cdot K_n$$

dove $K_n = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{j^2}$. Eulero, sempre lui, con uno dei suoi numeri più strabilianti

dimostrò che questa somma K_n converge al valore $\pi^2/6$. Ecco che quindi $V_n < \frac{\pi^2}{6} n^2$ e la deviazione standard è minore di $\frac{\pi}{\sqrt{6}} n$.

Può essere interessante stabilire quante figurine bisognerà in media acquistare per completare una parte, ad esempio la metà, dell'album. Rifacendo gli stessi passi, si trova che il numero atteso $F_n(1/2)$ di figurine da acquistare sarà circa pari a

$$\begin{aligned} F_n(1/2) &\approx \mathbb{E}(X_n + X_{n-1} + \dots + X_{n/2}) \approx n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n/2} \right) \\ &\approx n (H_n - H_{n/2}) \approx n(\gamma + \ln n - (\gamma + \ln \frac{n}{2})) = n \ln 2 \approx 0,7n. \end{aligned}$$

Le cose non sembrano andare così male, fino a un certo punto - è qui che nascono le illusioni. Acquistando poco più dei $2/3$ del totale delle figurine, abbiamo già riempito circa la metà dell'album. Purtroppo, però, *in cauda venenum* - per terminare la collezione i dolori si faranno sempre più cocenti.

Esercizio 14. Mostrare che, in un album di n figurine (con n grande), acquistando n figurine si troveranno circa n/e doppioni.

Esercizio 15. Fissato un alfabeto avente k simboli, indichiamo con Z_n il numero di sorteggi che occorrono per trovare n volte di fila uno stesso simbolo (non fissato), poi altre n volte di fila un secondo simbolo (diverso dal primo), poi altre n volte di fila un terzo simbolo (diverso dai primi 2), e così via, fino a quando si sono trovati k blocchi (uno per ogni simbolo dell'alfabeto), ciascuno formato da una sequenza di n simboli uguali. Dimostrare che $\mathbb{E}(Z_n) = k \cdot H_k \cdot (1 + k + \dots + k^{n-1}) = H_k \cdot \frac{k^{n+1} - k}{k-1}$.

Proviamo a tirare qualche somma dal lato dell'economia domestica. Per completare un album di 900 figurine (grossomodo la dimensione degli album dei calciatori degli ultimi anni), in media occorrerà acquistarne circa $900 \cdot H_{900} \approx 900 \cdot (\gamma + \ln 900) \approx 6641$, con una deviazione standard di (quasi) $\frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot 900 \approx 1154$. Considerato il prezzo di ogni figurina pari a 13 centesimi, il costo atteso per completare l'album sarà di circa 863 euro. Un'ipotesi ottimistica potrebbe essere -diciamo- di circa $6641 - 1154 \approx 5487$ figurine da acquistare, oltre 700 euro. Non così poco... ma poteva andare anche peggio - in fin dei conti la serie armonica diverge lentamente. Fortuna che esiste lo scambio dei doppioni - alla fine proprio quello è il bello, no?

Postilla. La notizia della scomparsa di John Conway mi ha raggiunto proprio quando stavo iniziando a scrivere l'articolo. Non posso fare a meno di ricordare e di ringraziare questo grande visionario, creatore -o forse scopritore- di mondi sconfinati ed infiniti giochi. La gioia pura, la meraviglia che ci ha donato rimarranno qui con noi, molto più a lungo di quanto sia rimasto lui.

Bibliografia

- [1] EULER L. (1740), *De progressionibus harmonicis observationes*, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, vol. 7, pag. 150-161
- [2] EULER L. (1740), *De summis serierum reciprocarum*, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, vol. 7, pag. 123-134
- [3] BOREL E. (1909), *Les probabilitès dènombrables et leurs applications arithmètiques*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 27, pag. 247-271
- [4] HOFSTADLER D. (1979), *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*, Basic Books
- [5] MANDELBROT B. (1982), *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Co.
- [6] RUCKER R. (1982), *Infinity and the Mind*, Birkhäuser FRANZONI T. [curatore] (1989), *Archimede Eureka (problema 81)*, Archimede, vol.1 e vol.3
- [7] ISAAC R. (1995), *The Pleasures of Probability*, Springer-Verlag
- [8] CHAITIN G. (2007), *How Much Information Can There Be in a Real Number?*, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 17 n. 6, pag. 1933-1935
- [9] BATTISTINI E. (2016), *In viaggio con π* , Franco Angeli
- [10] ISAAC R. (2018), *A proof that \sqrt{s} for s not a perfect square is simply normal to base 2*, arXiv:1309.0666v5

What foundation for undergraduate space geometry?

Alessandro De Paris

Abstract

In first-level undergraduate Geometry courses worldwide, apart from those in which a direct coordinate approach is understood, the ordinary space (the ambient of solid geometry) is introduced either by directly stipulating that its axiomatic model is given by a 3D Euclidean affine space, in the modern structural sense, or on the basis of high school geometry, basically grounded on Euclid's Axioms, in which case the fact that it gives an example of a 3D Euclidean affine structure is *proved*.

In the present work after a reasonably accurate, though far from being complete, discussion about the mentioned different attitudes, we propose a concise version of Euclid-Hilbert axioms and a reasonably complete deduction of the consequent 3D Euclidean affine structure in the modern sense. This is done with no essential reference to high-school geometry, and much in the style in which other basic mathematical notions are presented in the undergraduate courses.

Introduction

Geometry of the ordinary space is part of almost all undergraduate scientific and engineering curricula. We shall refer to the courses which that topic is explicitly part of as “first-level Geometry courses”, though many of them do not focus on Geometry but only include something of it. Since that matter is involved much beyond those first-level courses, it is natural to wonder what foundation for Geometry is supposed in the undergraduate curricula.

The question may seem to have an obvious answer: in the mathematical curricula, an optional course on Foundations is also offered, and it gives a more precise and advanced viewpoint on the foundations proposed in the high schools. Basically, this foundation consists in some variants of the classical Euclid-Hilbert Axioms, among which, notably, those that may fit into the Erlangen Program to some extent. This would give the underlying foundation of all undergraduate courses but, on the contrary, there is strong evidence that often it is not the case. For instance, many first-level Geometry courses teach that the proper foundation for (ordinary) Space Geometry is the notion of a three-dimensional (affine) Euclidean space; that is, a set on which

freely and transitively acts the additive group of a vector space over the field of real numbers, of dimension 3 and equipped with a (positive definite) inner product.

In spite of its cumbersome technical appearance, that modern notion is extremely simple and powerful. It is the arrival point (though perhaps not the ultimate one) of a millennial process of clarification of basic geometry. Of course, a landmark in that process has been the introduction of Cartesian coordinates. This reflects in the widespread attitude of considering the ordinary Euclidean space just as the set of triples of real numbers, with the properties of such numbers giving the rigorous foundation for geometry. Pursuing this viewpoint coherently, one actually kicks off reference frames out of mathematics and look at them, as a matter of facts, only as a kind of physical measurement devices, serving to put Space Geometry into the rigorous mathematical framework.

To summarize, we have three main ways to formalize Space Geometry, which may be called *synthetic* (Euclid-Hilbert, sometimes with a Klein viewpoint), *analytic* (direct coordinate approach) and *modern* (3D Euclidean affine space, in a set-theoretic and structural framework). Though we lack means to perform a thorough statistical investigation, we have reasons to believe that these three viewpoints coexist worldwide in the undergraduate curricula. On one hand, these viewpoints are obviously equivalent, so that their differences can be disregarded when using Space Geometry at an advanced level, for applicative purposes. On the other hand, if a lecturer is honestly clear and sufficiently careful of important logical details, her/his presentation of the elementary geometric considerations that often occur in scientific undergraduate courses, strongly depends on the foundational viewpoint he/she tacitly assumes.

In our experience, when dealing with geometric issues, courses in analysis tend to understand a direct coordinate approach, whereas courses in mathematical physics tend to freely switch between the synthetic and the coordinate viewpoint. Both attitudes can comfortably fit into the modern approach, but there are signs that not all courses assume yet this fact, which would make more solid the overall logical structure of the curriculum they are in.

Following from the above considerations, no doubt that a first level Geometry course should convey the idea that elementary Space Geometry can efficiently be grounded on the modern definition of affine Euclidean spaces. In doing so, basically two paths are in view: a revolutionary one, where the modern setting drastically replaces the classical, and a transitional one, where the defining properties of a 3D Euclidean affine space are proved on the basis of the classical Euclid-Hilbert axioms (or of a suitable variant).

The effectiveness of the modern approach would constitute an indication in favor of the revolutionary choice. But, if so, why not to adopt it since primary schools? Maybe the two main answers we would expect to this question are

1. There is no reason that prevents from teaching the modern approach at a very early stage.
2. Because the modern approach looks too abstract and technically cumbersome to newcomers.

Maybe in the second answer the stress should be more on abstraction than on heaviness, because from a formal viewpoint the classical Euclid-Hilbert apparatus is much more complicated than the modern one. The latter may appear cumbersome because the basic abstract notions that are involved may easily look abstruse, and this is because, generally, an abstract notion becomes simple to students only after they have got sufficient experience of its concrete instances. A similar issue may arise on axioms: the intuitive evidence of the defining properties of real numbers and of vector spaces may be questionable when applied to elementary geometry. On the contrary, the classical approach allows to *prove* those properties, and the geometric instances provide an insightful understanding of the modern abstract notions.

To maintain answer (1) taking into account the mentioned disadvantage, one could provide an alternative way to guide pupils from concrete to abstract in this particular, but fundamental situation. To provide a proposal in that direction might appear too pretentious on our part, hence we address the reader to [1, Introduction] for arguments in favor of (1), maintained by the perhaps most famous of its supporters. On the opposite side, a transition from the classical to the modern formalization of elementary geometry has already been provided by many authors, since long time, at various levels and in various ways. But we dare to present here a proposal on our own, that we hope can reasonably fit in the literature on a subject that continues to be analyzed, since long up to recent times. Most of that literature focuses on the high-school programs, but particularly noticeable in our opinion is the book [3], which addresses both high-school and undergraduate programs. Our proposal strictly focuses on first-level undergraduate Geometry course programs.

It is reasonable to hypothesize that curricula that are still in use nowadays, were designed (consciously or not) pursuing the transitional choice. Besides, though most of geometry professors probably make the drastic choice (maybe influenced by [1]), at present there is no lack of first-level Geometry courses that do not directly assume the modern Euclidean space formalization, and instead understand the classical formalization of elementary geometry as a prerequisite. This way, elementary geometry can serve as an excellent source of illustrating examples for the new abstract notions, within a setup that complies with the modern standards of rigor. However, a complete account of the needed results had been transferred to the optional course on Foundations, perhaps because it is believed that it would have taken too long in a first-level Geometry course.

But at the present date, some of the foundational style of modern mathematics (set theory in particular) have begun to be enclosed to some extent in the high school curricula. Consequently, what we argue in the present work is that a first-level Geometry course may include a reasonably complete, and completely rigorous proof of the modern axioms of elementary geometry on the basis of a suitable version of the classical axioms.

A way to make things rigorous would be to understand a formal language (in the strict sense that this term has in Logic), with a semantic that directly refers to the geometric objects. This attitude is not uncommon, because a strict adherence to the Hilbert's treatise straightly leads to it. What is more, someone seems to adopt this framework for the whole of Mathematics (maybe assuming that the formal language

may be tacitly extended whenever needed). Maybe more surprisingly, the author experienced the impression that some people who do not like Bourbaki, may even reject the nowadays standards of rigor, and often keep an old-fashioned style, in which a proof can be convincing even if its premises have not been thoroughly worked out. On the contrary, our proposal below is intended for those that like to put things into a very precise and structured framework, and preferably assume set theory (say, in its ZFC formalization) as the underlying foundational backbone.

A proposal

We propose to define the ordinary space as a set \mathbf{E} , together with a structure $(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathfrak{D}, \equiv)$ satisfying the list of axioms displayed below. In that list the following terminology is assumed. We name the elements of \mathbf{E} *points*, those of \mathcal{L} *lines*, those of \mathcal{P} *planes*, those of \mathfrak{D} *directions*, and \equiv *congruence*. By a *figure* we mean a subset of \mathbf{E} . Lines and planes are figures, each direction is a binary relation on some line, and congruence is a binary relation in the set of all figures $\{P, Q\}$ (possibly with $P = Q$). We say that the points of a figure F are *collinear* when F is contained in some line. We say that a figure is *planar* when is contained in some plane, and that some figures are *coplanar* if their union is planar.

Of course one could reduce the structure, say to only \mathfrak{D} (or to the ternary relation of betweenness) and \equiv , but we prefer not to bring the topic too far from the classical setting in its usual presentation.

Our deductions will be from scratch, assuming as understood only a few basics about sets, groups, partially ordered sets (which we shall call *ordered sets* for short, as partial orders under our explicit consideration will always be total orders) the ordered fields \mathbb{Q} and \mathbb{R} , and vector spaces.

We hope it is sufficiently clear that the axioms 1–13 are close to Euclid-Hilbert Axioms. The main difference is that they are Bourbaki-like grounded on set theory, rather than on an understood geometric formal language. Of course, once the 3D Euclidean structure (in the modern sense) has been proved, this also implies the Euclid-Hilbert axioms. Since, conversely, the axioms in our list almost immediately follow from Euclid-Hilbert axioms, we have the equivalence.

One may note the lack of the congruence relation between angles, but that is because it could be obtained as a derived notion. Indeed, let α be an angle with vertex O and α' an angle with vertex O' (assuming whatever reasonable definition of angles the reader wants). To decide if α and α' have to be declared congruent, one considers points P, Q different from O , each on one side of α , and the uniquely determined (up to exchanging them) P', Q' different from O' , each on one side of α' , such that

$$\{O, P\} \equiv \{O', P'\}, \quad \{O, Q\} \equiv \{O', Q'\}.$$

Then, α and α' can be defined congruent if and only if for some, hence for every (according to the axiom 13), such choice of P, Q , one gets $\{P, Q\} \equiv \{P', Q'\}$. In our opinion, this definition sufficiently complies with the intuitive notion of amplitude of angles. The axiom 12c corresponds just to the Euclid-Hilbert axiom on the existence

Axioms' list

1. Every direction is a complete total order (on some line).
2. On each line there are exactly two (distinct) directions, opposite to each other.
3. There exist at least two (distinct) planes.
4. If the intersection of two planes is nonempty, it contains at least two (distinct) points.
5. Given distinct points P, Q , there exists exactly one line containing them, which we denote by l_{PQ} .
6. If a plane contains distinct points P, Q , then it contains l_{PQ} .
7. Every plane contains points P, Q, R that are not collinear.
8. Whenever P, Q, R are points that are not collinear, there exists exactly one plane containing them.
9. Given a line l and a point P , there exists exactly one line that contains P and is *parallel* to l , that is, the lines are coplanar and either do not intersect or coincide.
10. Given a plane π and a line $l \subset \pi$, $\pi \setminus l$ is the union of exactly two disjoint subsets, which we call (open) *half-planes* of π with *edge* l , such that for every given $P, Q \in \pi \setminus l$, they lie in different such half-planes if and only if exists $O \in l$ and a direction \preceq such that $P \preceq O \preceq Q$.
11. \equiv is an equivalence relation.

12. Given points O, P, Q, O' and a direction \preceq' on a line $l' \ni O'$, then

- (a) there exists exactly one $P' \in l'$ such that

$$O' \preceq' P' \quad \text{and} \quad \{O', P'\} \equiv \{O, P\};$$

- (b) when $O \preceq P \preceq Q$ for some direction \preceq , the points $Q'_0, Q'_1 \in l'$, such that

$$O' \preceq' Q'_0 \quad \text{and} \quad \{O', Q'_0\} \equiv \{O, Q\},$$

$$P' \preceq' Q'_1 \quad \text{and} \quad \{P', Q'_1\} \equiv \{P, Q\},$$

do coincide; in other words, there exists exactly one $Q' \in l'$ such that

$$P' \preceq' Q', \quad \{O', Q'\} \equiv \{O, Q\} \quad \text{and} \quad \{P', Q'\} \equiv \{P, Q\};$$

- (c) when $O \neq P$ and $Q \notin l_{OP}$, on every half-plane with edge l' there exists exactly one point Q' such that

$$\{O', Q'\} \equiv \{O, Q\} \quad \text{and} \quad \{P', Q'\} \equiv \{P, Q\}.$$

13. Let O, P, Q, O', P', Q' be points such that

$$O \notin \{P, Q\} \quad \text{and} \quad O' \notin \{P', Q'\},$$

by abuse of notation let \preceq be each of the directions on the lines $l_{OP}, l_{OQ}, l_{O'P'}, l_{O'Q'}$ such that

$$O \prec P, \quad O \prec Q, \quad O' \prec P', \quad O' \prec Q',$$

and suppose that

$$\{O', P'\} \equiv \{O, P\}, \quad \{O', Q'\} \equiv \{O, Q\} \quad \text{and} \quad \{P', Q'\} \equiv \{P, Q\};$$

then for every

$$A \in l_{OP}, \quad B \in l_{OQ}, \quad A' \in l_{O'P'}, \quad B' \in l_{O'Q'}$$

such that

$$O \preceq A, \quad O \preceq B, \quad O' \preceq A', \quad O' \preceq B',$$

$$\{O', A'\} \equiv \{O, A\} \quad \text{and} \quad \{O', B'\} \equiv \{O, B\},$$

we have $\{A', B'\} \equiv \{A, B\}$.

and uniqueness of an angle in a given half-plane, and with a given ray (half-line) on its edge as a side, that is congruent to a given angle.

In any case, luckily, to give \mathbf{E} a canonical structure of an affine Euclidean space of dimension three, we can avoid angles at all. It suffices to deal with orthogonality (like in the Choquet's approach, but as a derived notion), in a way we are going to discuss soon in a subsequent remark.

Remark 1. In notation of the axiom 12a let us suppose that $P = O$. Exploiting 12b with $Q := O$ as well, we get $O' \preceq' P' \preceq' Q'$ and $\{O', Q'\} \equiv \{O, O\}$ and $\{P', Q'\} \equiv \{O, O\}$. Exploiting the same axiom with \preceq' replaced by the opposite direction and O' replaced by Q' , we have that P' stays the same, because $\{Q', P'\} \equiv \{O, O\}$. Then $\{Q', O'\} \equiv \{O, O\}$ implies $O' = P'$ by the uniqueness of P' .

This shows that $P' = O'$ whenever $P = O$. Exchanging the roles of O, P and O', P' we also deduce that $P' \neq O'$ whenever $P \neq O$. In conclusion, the singletons $\{O\} = \{O, O\}$ fill a congruence class.

Remark 2. Let l, l' be lines with directions \preceq, \preceq' , respectively. Suppose that $O, P, Q \in l, O' \in l'$. Then there exists exactly one $P' \in l'$ such that

$$\begin{cases} \{O', P'\} \equiv \{O, P\} \text{ and} \\ O' \preceq' P' \iff O \preceq P, \end{cases} \quad (1)$$

by the axiom 12a (when $P \prec O$ one exploits the axiom with the opposite of \preceq' here in place of \preceq' there, and Remark 1).

Moreover, let $Q' \in l'$ be the (unique) point such that

$$\begin{cases} \{O', Q'\} \equiv \{O, Q\} \text{ and} \\ O' \preceq' Q' \iff O \preceq Q, \end{cases} \quad (2)$$

When $O \preceq P \preceq Q$ the axiom 12b trivially gives

$$\begin{cases} \{P', Q'\} \equiv \{P, Q\} \text{ and} \\ P' \preceq' Q' \iff P \preceq Q, \end{cases} \quad (3)$$

but the same conclusion holds in whatever order O, P, Q are. Indeed that second point can be exploited as follows:

- when $O \preceq Q \preceq P$, by exchanging the roles of P, Q ;
- when $P \preceq O \preceq Q$, by exchanging the roles of O, P ;
- when $Q \preceq O \preceq P$, with Q, O, P in place of O, P, Q , respectively;
- when $Q \preceq P \preceq O$, replacing \preceq' with its opposite;
- when $P \preceq Q \preceq O$, replacing \preceq' with its opposite and exchanging the roles of P, Q ;

In conclusion, for whatever given points $O, P, Q \in l, O', P', Q' \in l'$,

$$(1) \text{ and } (2) \Rightarrow (3).$$

Remark 3. In the classical setting, when an angle and one of (hence all) its supplementary angles are congruent, then they are called right angles. Intersecting lines l, l' are perpendicular when the angles they generate are right angles. To have a direct (angle-independent) definition for perpendicularity of two lines l, l' that intersect in a point O , one can take $P, Q \in l$ on opposite sides with respect to O and such that $\{O, P\} \equiv \{O, Q\}$, and $P' \in l'$ different from O . As we explained before, congruence of angles is encoded in the axiom 13; accordingly, we can stipulate that l' is perpendicular to l if and only if $\{P', P\} \equiv \{P', Q\}$ (for some, hence for every choice of P, Q, P').

The first step toward the Euclidean structure in the modern sense, is to define free vectors by means of equipollence. Of course, instead of directed segments one can work with (ordered) pairs of points. But let us take this occasion for a little general set-theoretic foundational digression. A good way to define n -tuples is to consider functions defined on $\{1, \dots, n\}$. What is more, assuming the Von Neumann definition of cardinal numbers, according to which $n = \{0, \dots, n - 1\}$, one might even build a nice definition of n -tuples as functions defined on n . The technical problem is that in a full detailed ZFC approach (not infrequent in first-level algebra courses), functions are defined by means of pairs, and pairs in terms of sets, following, say, Kuratowski. This way, pairs and 2-uples happen to be different things. Not a big problem, of course, but a smoother strategy may be to use the Kuratowski trick $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ (or, maybe better, $\{\{0, a\}, \{1, b\}\}$) to define an arrow \overrightarrow{ab} instead of a pair (a, b) . Then functions can be defined by means of sets of such arrows and n -tuples (in particular, pairs) as functions defined on $\{1, \dots, n\}$ (or, maybe better, on $n = \{0, \dots, n - 1\}$). This also hints at the widely shared opinion, that a foundation for mathematics better than ZFC should be based on arrows (maybe somewhat similarly to Church's lambda calculus or to some kind of category theory). Following from this discussion, we propose to define equipollence of *geometric arrows* (or maybe *steps*), that is, arrows \overrightarrow{PQ} between points. Note that this way equipollence classes, that is, geometric (free) vectors, automatically give functions, and indeed translations. Please be careful of that, in our notation, an arrow \overrightarrow{PQ} does not denote the free vector it represents (as an element of an equivalence class), for which we shall use the notation $Q - P$ instead.

The only tricky part in the definition of equipollence is about directions: it can be handled as follows. Let us start from the observation that if l and t are distinct lines in a plane π , that intersects at a point O , then the points of t that (strictly) follow O in a given direction all belongs to the same half-plane of π with edge l , whereas the points of t that precede O all belongs to the other half-plane.

Proposition 4. *Let l, l' be distinct parallel lines with given directions \preceq, \preceq' , respectively, let π be the plane containing them and suppose that are given points $A \preceq B, A' \preceq' B'$. Then B and B' do not lie in the same (open) half-plane of π with edge $l_{AA'}$ if and only if A and A' do not lie in the same half-plane of π with edge $l_{BB'}$.*

Dimostrazione. Of course the ‘if’ follows from the ‘only if’ by considering the opposite directions. Suppose then that B and B' do not lie in the same half-plane of π with edge $l_{AA'}$. According to the axiom 10, there exists $O \in l_{AA'} \cap l_{BB'}$ and a direction $\preceq_{BB'}$ on $l_{BB'}$ such that $B \preceq_{BB'} O \preceq_{BB'} B'$. Let $\preceq_{AA'}$ be the direction on $l_{AA'}$ such that $A \preceq_{AA'} A'$. Now O and B' lie in the same half-plane σ of π with edge l , unless $O = B$, in which case we have $A = B$. Moreover, A' lies in σ because $\sigma \ni B'$ and l' do not intersect l . But the points preceding A in $l_{AA'}$ can not be contained in σ , hence $A \preceq_{AA'} O$. In a similar way, considering the half-plane σ' of π with edge l' , we have $O \preceq_{AA'} A'$. We have shown that $O \in l_{BB'} \cap l_{AA'}$ is such that $A \preceq_{AA'} O \preceq_{AA'} A'$. Hence A and A' do not lie in the same half-plane of π with edge $l_{BB'}$. \square

Proposition 5. *Let l, l' be parallel lines with given directions \preceq, \preceq' , respectively, π a plane containing both l and l' , $t \subset \pi$ a line not parallel to l, l' , set $t \cap l =: \{O\}$, $t \cap l' =: \{O'\}$, let P be a point that follows O on l and P' a point that follows O' on l' . If P and P' lie on the same half-plane of π with edge t , then for every plane α containing both l and l' (only one, unless $l = l'$) and every line $s \subset \alpha$ not parallel to l, l' , setting $s \cap l =: \{Q\}$, $s \cap l' =: \{Q'\}$, we have that the points that follow Q on l and the points that follow Q' on l' lie on the same half-plane of α with edge s .*

Dimostrazione. When $l = l'$, both the hypothesis and the thesis amount to $\preceq = \preceq'$. When l, l' are distinct, it suffices to consider $R \in l$ following both O and Q , and $R' \in l'$ following both O' and Q' (existence of such points may be left as an exercise to students), and exploit Proposition 4. \square

Definition 6. Let l, l' be parallel lines with given directions \preceq, \preceq' , respectively. Suppose that for some, hence for every (according to the above proposition), choice of a plane containing both l and l' , a line $t \subset \pi$ not parallel to l, l' , with $t \cap l =: \{O\}$, $t \cap l' =: \{O'\}$, a point P that follows O on l and a point P' that follows O' on l' , we have that P and P' lie on the same half-plane of π with edge t . Then we say that the directions \preceq and \preceq' agree.

Definition 7. We say that geometric arrows \overrightarrow{PQ} and $\overrightarrow{P'Q'}$ are congruent when $\{P, Q\} \equiv \{P', Q'\}$, and we shall still write $\overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{P'Q'}$ by abuse of notation. We say that they are parallel when there exist parallel lines $l \ni \{P, Q\}, l' \ni \{P', Q'\}$; and in this case if there are directions \preceq, \preceq' on l, l' , respectively, that agree and for which $P \preceq Q$ and $P' \preceq Q'$, we say that the parallel arrows \overrightarrow{PQ} and $\overrightarrow{P'Q'}$ agree.

Definition 8. We say that geometric arrows \overrightarrow{PQ} and $\overrightarrow{P'Q'}$ are equipollent if they are congruent, parallel and agree.

Once equipollence is defined, one has to show that it is an equivalence relation. The parallel's axiom 9 immediately implies that parallelism between lines in a plane is an equivalence relation, but a little more work is needed to show that parallelism is in fact an equivalence relation in \mathcal{L} .

Proposition 9. *The parallelism relation in the set \mathcal{L} of all lines is an equivalence relation.*

Dimostrazione. Only the transitive property deserves some explanation. So, let l be parallel to l' , and l' be parallel to l'' . If $l \cap l'' \neq \emptyset$ the statement follows from the axiom 9, hence we can assume that l and l'' do not intersect; and also that are both distinct from l' (otherwise the statement would obviously follow). Then there exist exactly one plane α that contains both l and l' , and exactly one plane β that contains l' and l'' . We can assume $\alpha \neq \beta$, otherwise l and l'' are coplanar and the statement follows. This implies $\alpha \cap \beta = l'$.

Choosing a point $P \in l$, we have exactly one plane γ that contains P and l'' , and we can suppose that it does not coincide with α , otherwise again the statement immediately follows. Then we have a line $p := \alpha \cap \gamma$ through P . Since $p \cap l'' = p \cap l'' \cap \beta = \alpha \cap \beta \cap \gamma \cap l'' = l' \cap l'' = \emptyset$ and $p \subset \gamma \supset l''$, p and l'' are parallel. Since p and l' are both parallel to l'' , if they intersect then they must coincide; and since $p \subset \alpha \supset l'$, this shows that p and l' are parallel. Hence p and l are lines through P both parallel to l' , therefore they coincide. But p was proved to be parallel to l'' , hence $l = p$ and l'' are parallel. \square

To prove that agreement between directions is transitive (again a quite immediate fact in the coplanar case), we shall use the fact that through a given point P outside a plane π , there always exists a plane σ that does not intersect π . To this end, it suffices to fix points $Q, Q', Q'' \in \pi$ that are not collinear, and take σ as the plane containing the line through P that is parallel to $l_{QQ'}$ and the line through P that is parallel to $l_{Q'Q''}$.

Proposition 10. *Let l, l', l'' be lines parallel to each other, and give them directions $\preceq, \preceq', \preceq''$, respectively. If \preceq agrees with \preceq' , and \preceq' agrees with \preceq'' , then \preceq agrees with \preceq'' .*

Dimostrazione. Let α be a plane that contains l and l' , β a plane that contains l' and l'' , and γ a plane that contains l and l'' . Choosing a plane π that intersect l in exactly one point O , we also get uniquely determined intersections points $O' \in l'$ and $O'' \in l''$. Let us also choose P on l that follows O and take a plane σ through P that does not intersect π . We also get uniquely determined intersection points $P' \in l'$ and $P'' \in l''$ with σ . We have that P and P' lie in the same half-plane of α with edge $\pi \cap \alpha$, that P' and P'' lie in the same half-plane of β with edge $\pi \cap \beta$, and that P and P'' lie in the same half-plane of γ with edge $\pi \cap \gamma$. Since \preceq and \preceq' agree, P' follows O' , and since \preceq' and \preceq'' agree, P'' follows O'' . Then \preceq and \preceq'' agree, since P follows O , P'' follows O'' and P and P'' lie in the same half-plane of γ with edge $\pi \cap \gamma$. \square

Proposition 11. *Equipollence is an equivalence relation.*

Dimostrazione. By definition of equipollence, the statement easily follows from the fact that parallelism between lines and agreement between directions are equivalence relations, and the fact that congruence is an equivalence relation, taking into account Remark 1. \square

Definition 12. The equipollence class of a geometric arrow \overrightarrow{PQ} is a *geometric vector* and is denoted by $Q - P$.

We say that geometric vectors \mathbf{v}, \mathbf{v}' are *congruent* (and write $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}'$ by abuse of notation), are *parallel*, and that they *agree*, respectively, when the arrows that represent \mathbf{v} and the arrows that represent \mathbf{v}' are congruent, when they are parallel, and when they agree.

For applications, geometric vectors are qualified *free* and, though bound vectors might be identified with geometric arrows, to define them as pairs made by a point and a free vector would be perhaps conceptually closer to their use.

Proposition 13. *Given a point O and a geometric vector \mathbf{v} , there exists exactly one point P such that $\mathbf{v} = P - O$.*

Dimostrazione. Let l be a line through O parallel to \mathbf{v} (that is, parallel to some, hence to all representative arrows of \mathbf{v} , where an arrow \overrightarrow{AB} is said to be parallel to l when there is a line through A and B that is parallel to l). Let \preceq be a direction on l that agrees with \mathbf{v} (that is, that agree with some direction \preceq' for which $A \preceq' B$ for some, hence for all representatives \overrightarrow{AB} of \mathbf{v}). By the axiom 12 there exists exactly one $P \in l$ such that $O \preceq P$ and $\{O, P\} \equiv \{A, B\}$ for any representative \overrightarrow{AB} of \mathbf{v} . This means that \overrightarrow{OP} is a representative of \mathbf{v} that is, $\mathbf{v} = P - O$. Besides, if P' is any point for which $\overrightarrow{OP'}$ is a representative of \mathbf{v} , we have $P' \in l$ by the parallel's axiom (if all representing arrows are singletons that axiom is not needed: in that case we have $P' = P = O \in l$ even without invoking Remark 1). But if $P' \in l$, we must have $O \preceq P'$ and $\{O, P'\} \equiv \{A, B\}$ for any representative \overrightarrow{AB} of \mathbf{v} . Then $P = P'$, by the uniqueness of the point with these properties (axiom 12a). This shows the uniqueness of P as a point such that $\mathbf{v} = P - O$. \square

Definition 14. Given a point O and a geometric vector \mathbf{v} , the unique point P such that $\mathbf{v} = P - O$ will be denoted by $O + \mathbf{v}$. For every set \mathcal{S} of geometric vectors we also assume the notation

$$O + \mathcal{S} := \{O + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathcal{S}\}.$$

Accordingly,

$$O + \mathbf{v} = P \iff \mathbf{v} = P - O \quad (4)$$

(as if they were numeric equations).

It also follows that for whatever point O and vectors \mathbf{v}, \mathbf{w} ,

$$O + \mathbf{v} = O + \mathbf{w} \iff \mathbf{v} = \mathbf{w} \quad (5)$$

Remark 15. Let A, B, A', B' be points on a line l , and suppose that

$$B' - A' = B - A.$$

To comply with the notation of Remark 2, let us set $O := A, P := B, Q := O' := B', l' := l$, and let \preceq, \preceq' be the two opposite directions on l . Accordingly, we have $P' = A', Q' = A$, and therefore (2) means

$$B' - B = A' - A.$$

We want to show that even if we remove from the above remark the hypothesis that A, B, A', B' are aligned, we can get to the same conclusion. To this end, we need the following preliminary fact.

Lemma 16. *Let O, Q, O' be points that are not aligned, π the plane containing them, σ the half-plane of π with edge $l_{OO'}$ that contains Q , σ' the other half-plane of π with the same edge, and Q' the unique point in σ' such that $\{O', Q'\} \equiv \{O, Q\}$ and $\{O, Q'\} \equiv \{O', Q\}$ (according to the axiom 12 with $l' := l_{OO'}$ and $P := O'$). Then $l_{O'Q'}$ is parallel to l_{OQ} .*

Dimostrazione. Let us suppose, by contrary, that the lines $l_{O'Q'}$ and l_{OQ} (both contained in π) intersect in a point X . Since X can not lie in $l_{OO'}$, it is contained either in σ or in σ' . By the axiom 12, we have uniquely determined $Y \in l_{OQ}$ and $Y' \in l_{O'Q'}$ that do not lie in the half-plane containing X (among σ, σ') and such that $\{O, Y\} \equiv \{O', X\}$, $\{O', Y'\} \equiv \{O, X\}$. These congruence relations, since X does not coincide with O , nor with O' , imply that the same happens for Y and Y' , by Remark 1. Hence Y, Y' lie in the same half-plane among σ, σ' (the one that does not contain X). Note also that since X belongs to one of the two half planes, Y, Y' to the other, and $\{Y', O'\} \equiv \{X, O\}$, $\{O', X\} \equiv \{O, Y\}$, then from the axiom 12b follows $\{Y', X\} \equiv \{X, Y\}$.

- Let us first suppose that $X \in \sigma$. Since $\{O', O\} \equiv \{O, O'\}$, $\{O', Q'\} \equiv \{O, Q\}$ and $\{O, Q'\} \equiv \{O', Q\}$, according to the axiom 13 from $\{O', O\} \equiv \{O, O'\}$, $\{O', Y'\} \equiv \{O, X\}$ follows $\{O, Y'\} \equiv \{O', X\}$.

And since $\{Y', O\} \equiv \{X, O'\}$, $\{Y', O'\} \equiv \{X, O\}$, and $\{O, O'\} \equiv \{O', O\}$, by the axiom 13 from $\{Y', O\} \equiv \{X, O'\}$, $\{Y', X\} \equiv \{X, Y\}$ follows $\{O, X\} \equiv \{O', Y\}$.

- Let us now suppose that $X \in \sigma'$. Since $\{O', O\} \equiv \{O, O'\}$, $\{O', Q'\} \equiv \{O, Q\}$ and $\{O, Q'\} \equiv \{O', Q\}$, according to the axiom 13, from $\{O', O\} \equiv \{O, O'\}$, $\{O', X\} \equiv \{O, Y\}$ follows $\{O, X\} \equiv \{O', Y\}$.

Since $\{X, O\} \equiv \{Y, O'\}$, $\{X, O'\} \equiv \{Y, O\}$ and $\{O, O'\} \equiv \{O', O\}$, by the axiom 13 from $\{X, O\} \equiv \{Y, O'\}$, $\{X, Y'\} \equiv \{Y, X\}$ follows $\{O, Y'\} \equiv \{O', X\}$.

We have shown that, regardless whether X belongs to σ or σ' ,

$$\{O, X\} \equiv \{O', Y\} \quad \text{and} \quad \{O, Y'\} \equiv \{O', X\}.$$

But $Y \in l_{OQ}$ and $Y' \in l_{O'Q'}$ must be distinct, as they differ from the intersection point X , they belong to the same half-plane of π with edge $l_{OO'}$, and we have

- $\{O', Y\} \equiv \{O, X\}$, $\{O, Y\} \equiv \{O', X\}$;
- $\{O', Y'\} \equiv \{O, X\}$, $\{O, Y'\} \equiv \{O', X\}$.

This contradicts the axiom 12c, and therefore shows that $l_{O'Q'}$ must be parallel to l_{OQ} . \square

Now we can show the announced general result.

Proposition 17. *Given points A, B, A', B' , we have*

$$B' - A' = B - A \iff B' - B = A' - A.$$

Dimostrazione. Each implication in the statement gives the other, by an exchange of A' and B , hence it suffices to prove ‘ \Rightarrow ’.

If $A = B$, then $A' = B'$ by Remark 1, and $B' - B = A' - A$ becomes obvious. Hence we assume $A \neq B$, and consequently $A' \neq B'$. By the hypothesis $B' - A' = B - A$, the lines l_{AB} and $l_{A'B'}$ are parallel. The case $l_{AB} = l_{A'B'}$ is settled in Remark 15, hence we assume $l_{AB} \cap l_{A'B'} = \emptyset$.

Under the above assumptions, the points $O := A, Q := B, O' := B'$ are not aligned, so that Lemma 16 applies. In notation of that lemma, we have that $l_{O'Q'}$ is parallel to $l_{OQ} = l_{AB}$, as $l_{A'B'}$. These parallel lines contain $O' = B'$, hence they coincide and therefore $Q' \in l_{A'B'}$. The direction \preceq on l_{AB} for which $A \preceq B$ and the direction \preceq' on $l_{A'B'}$ for which $A' \preceq B'$ agree, because of the hypothesis $B' - A' = B - A$. By definition of Q' , we have $Q' \preceq' B'$ and $\{B', Q'\} = \{O', Q'\} \equiv \{O, Q\} = \{A, B\}$, hence $Q' = A'$. But again by definition of Q' , we have $\{O, Q'\} \equiv \{O', Q\}$ that is,

$$\{A, A'\} \equiv \{B', B\}.$$

To prove that $l_{AA'}$ is parallel to $l_{BB'}$ it suffices to exploit again Lemma 16, now with the role of Q played by A' (and with the same O and O'): since $\{B', B\} \equiv \{A, A'\}$, $\{A, B\} \equiv \{B', A'\}$, and B and A' lie in different half-planes of π with edge $l_{AB'}$, the role of Q' is taken by B by uniqueness, and hence we have parallel lines $l_{B'B}$ and $l_{AA'}$. Finally, since $l_{AB} \cap l_{A'B'} = \emptyset$, A' and B' must lie in the same half-plane of π with edge l_{AB} , and this shows that the direction on $l_{AA'}$ for which A' follows A agree with the direction on $l_{BB'}$ for which B' follows B . \square

Proposition 18. *Given points O, O' and geometric vectors \mathbf{v}, \mathbf{w} , we have*

$$((O' + \mathbf{v}) + \mathbf{w}) - O' = ((O + \mathbf{v}) + \mathbf{w}) - O.$$

Dimostrazione. Let $P := O + \mathbf{v}, Q := P + \mathbf{w}, P' := O' + \mathbf{v}, Q' := P' + \mathbf{w}$. Hence $P' - O' = P - O$ and $Q' - P' = Q - P$. By Proposition 17 we have $P' - P = O' - O$ and $Q' - Q = P' - P$. Hence $Q' - Q = O' - O$ and again by Proposition 17 this gives $Q' - O' = Q - O$, which is what we had to show. \square

Definition 19. Given geometric vectors \mathbf{v}, \mathbf{w} , their *sum* $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ is the vector equal to

$$((O + \mathbf{v}) + \mathbf{w}) - O$$

for every point O .

Proposition 20. *The set \mathcal{V} of all geometric vectors together with addition is an abelian group, with zero element equal to $O - O$ for every point O .*

Dimostrazione. To show the associative property, note that by definition of a sum $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ of vectors, we have

$$O + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (O + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

for every point O . Using repeatedly this fact, for whatever vectors \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} and for every point O we can write

$$\begin{aligned} O + ((\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}) &= (O + (\mathbf{a} + \mathbf{b})) + \mathbf{c} = ((O + \mathbf{a}) + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \\ &= (O + \mathbf{a}) + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = O + (\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})), \end{aligned}$$

which by (5) implies

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

To show the commutative property, for whatever vectors \mathbf{a} , \mathbf{b} let us fix a point A and set

$$B := A + \mathbf{b}, \quad A' := A + \mathbf{a}, \quad B' := A' + \mathbf{b}.$$

Then $B' - A' = \mathbf{b} = B - A$, and therefore

$$\mathbf{a} = A' - A = B' - B$$

by Proposition 17. Hence $B' = B + \mathbf{a}$ and we can write

$$A + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (A + \mathbf{a}) + \mathbf{b} = A' + \mathbf{b} = B' = B + \mathbf{a} = (A + \mathbf{b}) + \mathbf{a} = A + (\mathbf{b} + \mathbf{a}).$$

Then (5) gives $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

Next, given a vector \mathbf{a} , for every point O we have $O + (O - O) = O$ by (4), hence we can write

$$O + ((O - O) + \mathbf{a}) = (O + (O - O)) + \mathbf{a} = O + \mathbf{a},$$

which by (5) implies $(O - O) + \mathbf{a} = \mathbf{a}$. Taking into account the commutative property, this shows that $O - O$ is the zero element for every point O .

Finally, for whatever vector \mathbf{a} and any point O let us set

$$-\mathbf{a} := O - (O + \mathbf{a}),$$

so that

$$(O + \mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) = O = O + (O - O)$$

by (4). Hence

$$O + (\mathbf{a} + (-\mathbf{a})) = (O + \mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) = O + (O - O),$$

which by (5) gives $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = O - O$. Taking into account the commutative property, this shows that $-\mathbf{a}$ is the opposite element of \mathbf{a} . \square

As for every abelian group, it is defined the multiple $n\mathbf{v}$ for every $n \in \mathbb{Z}$ and geometric vector \mathbf{v} . The assignment $n \mapsto n\mathbf{v}$ gives the unique group homomorphism $h_{\mathbf{v}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{V}$ that sends 1 to \mathbf{v} . For any given $n, m \in \mathbb{Z}$ and $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ we have

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad (n + m)\mathbf{v} = n\mathbf{v} + m\mathbf{v},$$

simply because $h_{\mathbf{v}}$ is a group homomorphism. Moreover, for any given $n \in \mathbb{Z}$ and $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ we have

$$n(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = n\mathbf{v} + n\mathbf{w},$$

simply because the homomorphism $h_{\mathbf{v}} + h_{\mathbf{w}}$ sends 1 to $\mathbf{v} + \mathbf{w}$. Finally, for any given $n, m \in \mathbb{Z}$ and $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ we have

$$n(m\mathbf{v}) = (nm)\mathbf{v}.$$

Indeed, $h_{\mathbf{v}} \circ \mu_m$, with μ_m being the group endomorphism of \mathbb{Z} given by multiplication by m , sends 1 to $m\mathbf{v}$, hence coincides with $h_{m\mathbf{v}}$. Therefore $n(m\mathbf{v}) = h_{m\mathbf{v}}(n) = h_{\mathbf{v}}(\mu_m(n)) = (mn)\mathbf{v} = (nm)\mathbf{v}$.

Definition 21. Given a line, the set of all geometric vectors that are parallel to it is called a *vector line*. For each nonzero geometric vector \mathbf{v} , we denote by $\ell_{\mathbf{v}}$ the vector line of all vectors that are parallel to \mathbf{v} . For uniformity of speech in some situations, we also set $\ell_{\mathbf{0}} := \{\mathbf{0}\}$ (which is not a vector line) for the zero vector.

Remark 22. Let \mathbf{v} be a nonzero geometric vector, and let $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \ell_{\mathbf{v}}$. Choose a point O and let l be the unique line through O parallel to \mathbf{v} . Since \mathbf{a} is parallel to \mathbf{v} , $O + \mathbf{a} \in l$. Hence $-\mathbf{a} = (O - (O + \mathbf{a}))$ is parallel to \mathbf{v} . Moreover, since $O + \mathbf{a} \in l$ and \mathbf{b} is parallel to \mathbf{v} , we also have $(O + \mathbf{a}) + \mathbf{b} \in l$. Hence $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (O + \mathbf{a}) + \mathbf{b} - O$ is parallel to \mathbf{v} . This shows that $\ell_{\mathbf{v}}$ (being obviously also nonempty) is a subgroup of \mathcal{V} . For the zero vector, $\ell_{\mathbf{0}}$ is trivially a subgroup as well.

In particular, $n\mathbf{v}$ is always parallel to \mathbf{v} for every integer n .

Remark 23. Let ℓ be a vector line. For each point O , $O + \ell$ is the unique line through O that is parallel to the vectors of ℓ , and the map

$$f_O : \ell \rightarrow O + \ell, \quad \mathbf{v} \mapsto O + \mathbf{v}$$

is bijective, as its inverse is obtained by associating to $P \in O + \ell$ the vector $P - O$. Therefore, given a direction on the line $O + \ell$, there exists exactly one order on ℓ such that f_O is a morphism of ordered sets.

Proposition 24. *Let ℓ be a vector line, O, O' points, and \leq, \leq' the orders on ℓ that are induced, according to Remark 23, by directions \preceq, \preceq' on the lines $O + \ell, O' + \ell$, respectively. If \preceq and \preceq' agree, then $\leq = \leq'$.*

Dimostrazione. Let $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \ell$ and set $P := O + \mathbf{v}, Q := O + \mathbf{w}, P' := O' + \mathbf{v}, Q' := O' + \mathbf{w}$. If \preceq and \preceq' agree, by Remark 2 we have that $P \preceq Q$ if and only if $P' \preceq' Q'$. But by definition $\mathbf{v} \leq \mathbf{w}$ means that $P \preceq Q$ and $\mathbf{v} \leq' \mathbf{w}$ means that $P' \preceq' Q'$. This shows that $\mathbf{v} \leq \mathbf{w}$ if and only if $\mathbf{v} \leq' \mathbf{w}$ for every $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \ell$, that is, $\leq = \leq'$. \square

Proposition 25. *There exist exactly two complete total orders on a given vector line ℓ , opposite to each other, such that for some, hence for every point O (according to Proposition 24), the map of f_O given in Remark 23 is a morphism of ordered sets for some of the two directions on $O + \ell$.*

Each of these orders makes ℓ an ordered group, that is, given $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \ell$, we have

$$\mathbf{v} \leq \mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \leq \mathbf{u} + \mathbf{w} .$$

Dimostrazione. The orders are two, opposite to each other and complete, because so are directions on lines.

Let \leq be one of these orders and let $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \ell$. Let us fix a point O and set $O' := O + \mathbf{u}$, so that $O + \ell = O' + \ell$. By Proposition 24 the direction \leq on this line such that f_O is a morphism of ordered sets, makes $f_{O'}$ a morphism of ordered sets as well. We have $f_O(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f_{O'}(\mathbf{v})$ and $f_O(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = f_{O'}(\mathbf{w})$. Hence $\mathbf{v} \leq \mathbf{w}$ if and only if $\mathbf{u} + \mathbf{v} \leq \mathbf{u} + \mathbf{w}$. \square

Definition 26. The two orders in the statement of Proposition 25 will be called *directions* on the vector line ℓ . For uniformity of speech in some situations, we also name (trivial) *direction* on ℓ_0 its trivial order (which is opposite to itself).

Proposition 27. *Let \mathbf{v} be a nonzero geometric vector, and let \leq be the direction on $\ell_{\mathbf{v}}$ such that $\mathbf{0} < \mathbf{v}$. Then for all positive integers n we have $\mathbf{0} < n\mathbf{v}$.*

Dimostrazione. We have $\mathbf{0} < \mathbf{v}$ by definition, and $(n - 1)\mathbf{v} < n\mathbf{v}$ for every integer n , by compatibility with addition (last statement in Proposition 25). Hence the statement under proof immediately follows by induction. \square

Remark 28. From Proposition 27 easily follows that $n\mathbf{v}$ can not be zero when n and \mathbf{v} are both nonzero.

Proposition 29. *Let ℓ, ℓ' be distinct vector lines, O a point, π the plane that contains the lines $O + \ell$ and $O + \ell'$. Then for every $A, B \in \pi$ there exist uniquely determined $\mathbf{c} \in \ell, \mathbf{c}' \in \ell'$ such that $B - A = \mathbf{c} + \mathbf{c}'$.*

Dimostrazione. The lines $A + \ell$ and $B + \ell'$ are contained in π because are parallel to $O + \ell$ and $O + \ell'$, respectively, and $A, B \in \pi$. Moreover, $A + \ell$ and $B + \ell'$ are not parallel because $\ell \neq \ell'$. Therefore these lines intersect in exactly one point $C \in \pi$. Now, for all geometric vectors \mathbf{c}, \mathbf{c}' ,

$$B - A = \mathbf{c} + \mathbf{c}' \iff A + \mathbf{c} = B + (-\mathbf{c}') .$$

But when $\mathbf{c} \in \ell, \mathbf{c}' \in \ell'$, we have $A + \mathbf{c} \in A + \ell, B + (-\mathbf{c}') \in B + \ell'$, hence $B - A = \mathbf{c} + \mathbf{c}'$ if and only if $A + \mathbf{c} = C = B + (-\mathbf{c}')$, that is, if and only if

$$\mathbf{c} = C - A \quad \text{and} \quad \mathbf{c}' = B - C .$$

This shows that the required \mathbf{c}, \mathbf{c}' exist and are uniquely determined. \square

Proposition 30. *Let \mathbf{v}, \mathbf{w} be geometric vectors such that $\ell_{\mathbf{v}} \neq \ell_{\mathbf{w}}$. Then for every $\mathbf{u} \in \ell_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}$ there exist uniquely determined $\mathbf{u}_{\mathbf{v}} \in \ell_{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_{\mathbf{w}} \in \ell_{\mathbf{w}}$ such that $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathbf{v}} + \mathbf{u}_{\mathbf{w}}$.*

Moreover, if we fix on $\ell_{\mathbf{v}}, \ell_{\mathbf{w}}, \ell_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}$ the directions (all denoted by \leq , by abuse of notation) for which $\mathbf{0} \leq \mathbf{v}, \mathbf{0} \leq \mathbf{w}, \mathbf{0} \leq \mathbf{v} + \mathbf{w}$, then the maps

$$\ell_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} \rightarrow \ell_{\mathbf{v}}, \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}_{\mathbf{v}}, \quad \ell_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} \rightarrow \ell_{\mathbf{w}}, \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}_{\mathbf{w}},$$

are homomorphisms of ordered groups.

Dimostrazione. When \mathbf{v} or \mathbf{w} is the zero vector, the statement is quite obvious, hence we can assume that $\ell_{\mathbf{v}}, \ell_{\mathbf{w}}$ are (distinct) vector lines. Let us choose a point A and consider the plane π containing the lines $A + \ell_{\mathbf{v}}$ and $A + \ell_{\mathbf{w}}$. Then for every $\mathbf{u} \in \ell_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}$ it suffices to set $B := A + \mathbf{u}$ and exploit Proposition 29 to conclude that there exist uniquely determined $\mathbf{u}_{\mathbf{v}} \in \ell_{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_{\mathbf{w}} \in \ell_{\mathbf{w}}$ such that $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathbf{v}} + \mathbf{u}_{\mathbf{w}}$. The maps in the statements are group homomorphisms simply because when $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathbf{v}} + \mathbf{u}_{\mathbf{w}}$ and $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'_{\mathbf{v}} + \mathbf{u}'_{\mathbf{w}}$, we have

$$\mathbf{u} + \mathbf{u}' = (\mathbf{u}_{\mathbf{v}} + \mathbf{u}_{\mathbf{w}}) + (\mathbf{u}'_{\mathbf{v}} + \mathbf{u}'_{\mathbf{w}}),$$

hence to show that they are homomorphism of ordered groups it suffices to show that $\mathbf{0} \leq \mathbf{u}$ implies $\mathbf{0} \leq \mathbf{u}_{\mathbf{v}}$ and $\mathbf{0} \leq \mathbf{u}_{\mathbf{w}}$.

Suppose, then, $\mathbf{0} < \mathbf{u}$ (as the statement for $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ is obvious). The commutative property also makes sufficient to show only that $\mathbf{0} \leq \mathbf{u}_{\mathbf{v}}$. Let σ be the half-plane of π with edge $A + \ell_{\mathbf{w}}$ that contains \mathbf{v} , and let us give $A + \ell_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}$ the direction for which $A + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ follows A , so that a point $B \in A + \ell_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}$ (strictly) follows A if and only if it belongs to σ , and if and only $\mathbf{0} < B - A$. In particular, $A + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ and $A + \mathbf{u}$ are in σ . Note also that σ contains $A + \mathbf{v}$ as well, because \mathbf{w} is parallel to the edge. Hence, giving $A + \ell_{\mathbf{v}}$ the direction for which $A + \mathbf{v}$ follows A , we have that a point $C \in A + \ell_{\mathbf{v}}$ follows A if and only if it belongs to σ , and if and only $\mathbf{0} < C - A$. But $\sigma \ni A + \mathbf{u} = A + \mathbf{u}_{\mathbf{v}} + \mathbf{u}_{\mathbf{w}}$, hence $\sigma \ni A + \mathbf{u}_{\mathbf{v}}$ because $\mathbf{u}_{\mathbf{w}} \in \ell_{\mathbf{w}}$ is parallel to the edge. This shows that $\mathbf{0} < \mathbf{u}_{\mathbf{v}}$ and concludes the proof. \square

Proposition 31. *For every geometric vector \mathbf{v} and nonzero integer n , there exists a geometric vector \mathbf{v}_n such that $n\mathbf{v}_n = \mathbf{v}$.*

Dimostrazione. Let us choose a geometric vector $\mathbf{u} \notin \ell_{\mathbf{v}}$ and set $\mathbf{w} := n\mathbf{u} - \mathbf{v}$. By Remark 28 we have $n\mathbf{u} \notin \ell_{\mathbf{v}}$, hence $\ell_{\mathbf{w}} \neq \ell_{\mathbf{v}}$. Since $\mathbf{u} \in \ell_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} = \ell_{n\mathbf{u}}$, we can exploit Proposition 30 and find $\mathbf{u}_{\mathbf{v}} \in \ell_{\mathbf{v}}$ and $\mathbf{u}_{\mathbf{w}} \in \ell_{\mathbf{w}}$ that sum up to \mathbf{u} . By the same proposition, \mathbf{v} and \mathbf{w} are the only possible vectors in $\ell_{\mathbf{v}}, \ell_{\mathbf{w}}$, respectively, that sum up to $n\mathbf{u} = n\mathbf{u}_{\mathbf{v}} + n\mathbf{u}_{\mathbf{w}}$. Hence $n\mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ and therefore we can take $\mathbf{v}_n := \mathbf{u}_{\mathbf{v}}$. \square

In other terms, Remark 28 says that the abelian group \mathcal{V} is torsion-free and Proposition 31 that it is divisible. As for every torsion-free divisible abelian group, we have a well-defined multiple $q\mathbf{v}$ for every $q \in \mathbb{Q}$ and geometric vector \mathbf{v} . The assignment $q \mapsto q\mathbf{v}$ gives the unique group homomorphism $\mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{V}$ that sends 1 to \mathbf{v} . This straightly leads to the properties

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad (q+r)\mathbf{v} = q\mathbf{v} + r\mathbf{v}, \quad q(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = q\mathbf{v} + q\mathbf{w}, \quad q(r\mathbf{v}) = (qr)\mathbf{v}$$

for all $q, r \in \mathbb{Q}$ and $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ (it suffices to argue in the same way we did for \mathbb{Z}).

In a course that equally deals with Geometry and Algebra, it may be motivating to contextually present the construction of \mathbb{Q} as a ring of fractions of \mathbb{Z} . The introduction of the abstract notion of a vector space may also be motivated at this point, by noting that the above list of properties holds as well when, in place of geometric vectors, rational numeric vectors of given order n (that is, n -tuples of rational numbers) are considered.

By Proposition 27, for each geometric vector \mathbf{v} the homomorphism $\mathbb{Q} \rightarrow \ell_{\mathbf{v}}$ given by $q \mapsto q\mathbf{v}$ is also a morphism of ordered sets, with $\ell_{\mathbf{v}}$ equipped with the direction such that $\mathbf{0} \leq \mathbf{v}$. Since the order on $\ell_{\mathbf{v}}$ is complete (assuming the trivial order when $\mathbf{v} = \mathbf{0}$), there exists exactly one morphism $\mathbb{R} \rightarrow \ell_{\mathbf{v}}$ of ordered sets that extends it. This gives the definition of the multiple $x\mathbf{v}$ for every $x \in \mathbb{R}$; explicitly:

$$x\mathbf{v} := \sup_{q \in \mathbb{Q}, q \leq x} q\mathbf{v} .$$

Since the order on $\ell_{\mathbf{v}}$ is compatible with the sum, the assignment $x \mapsto x\mathbf{v}$ gives the unique ordered group homomorphism $k_{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \rightarrow \ell_{\mathbf{v}}$ that sends 1 to \mathbf{v} . Of course it gives also a group homomorphism $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}$, but that is not an order homomorphism, simply because \mathcal{V} is not ordered. To contextually present in a course the construction of \mathbb{R} as a completion of \mathbb{Q} can be motivating. The properties

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v} , \quad (x + y)\mathbf{v} = x\mathbf{v} + y\mathbf{v} , \quad x(y\mathbf{v}) = (xy)\mathbf{v}$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$ and geometric vectors \mathbf{v} , follow like before, with only a little subtlety on the third property when $y < 0$. Indeed in this case $k_{\mathbf{v}} \circ \mu_y$, where $\mu_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is the multiplication by y , reverses the order if on the target $\ell_{\mathbf{v}}$ is supposed the order of $k_{\mathbf{v}}$. Giving $\ell_{\mathbf{v}} = \ell_{y\mathbf{v}}$ the other order instead, we get the equality $k_{\mathbf{v}} \circ \mu_y = k_{y\mathbf{v}}$ as ordered group homomorphism, and the third property follows like in the cases of \mathbb{Z} and \mathbb{Q} .

On the contrary, now the property

$$x(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = x\mathbf{v} + x\mathbf{w} , \quad \forall x \in \mathbb{R} , \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} , \tag{6}$$

can be derived by summing up $k_{\mathbf{v}}$ and $k_{\mathbf{w}}$ only when $\ell_{\mathbf{v}} = \ell_{\mathbf{w}}$, otherwise we would have to enlarge those targets to \mathcal{V} , but in this case we do not have order homomorphisms. When $\ell_{\mathbf{v}} \neq \ell_{\mathbf{w}}$ the workaround is provided by Proposition 30: composing on the left $k_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}$ with the maps $\ell_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} \rightarrow \ell_{\mathbf{v}}$, $\ell_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} \rightarrow \ell_{\mathbf{w}}$ given in the statement of that proposition, we get ordered group homomorphisms that send 1 to \mathbf{v} and to \mathbf{w} , respectively; hence they must coincide with $k_{\mathbf{v}}$ and with $k_{\mathbf{w}}$, respectively, and this gives (6).

This completes the proof of the list of properties that are needed to establish the following proposition.

Proposition 32. *The abelian group \mathcal{V} together with the above defined multiplication by real numbers is a vector space over \mathbb{R} .*

From now on, we shall assume some basics about vector spaces. To show that $\dim \mathcal{V} = 3$, we first need a sort of Archimedean property on $\ell_{\mathbf{v}}$.

Proposition 33. *Let \mathbf{v} be a geometric vector and give $\ell_{\mathbf{v}}$ the direction such that $\mathbf{0} \leq \mathbf{v}$. Then for every $\mathbf{w} \in \ell_{\mathbf{v}}$ there exist an integer n such that $\mathbf{w} \leq n\mathbf{v}$.*

Dimostrazione. Suppose by contrary that the set of all integer multiples of \mathbf{v} is bounded above by a vector that is not an integer multiple of \mathbf{v} . Then, by completeness, it has the supremum \mathbf{w} that is not an integer multiple of \mathbf{v} . By compatibility with addition, $\mathbf{w} - \mathbf{v} \leq \mathbf{w}$, hence there exists an integer n such that $\mathbf{w} - \mathbf{v} \leq n\mathbf{v}$. This implies $\mathbf{w} \leq (n+1)\mathbf{v}$, which contradicts the choice of \mathbf{w} . \square

Remark 34. From Proposition 33 easily follows that the ordered group homomorphism $f : \mathbb{R} \rightarrow \ell_{\mathbf{v}}, x \mapsto x\mathbf{v}$, is surjective. Hence $\ell_{\mathbf{v}}$ is the linear span of \mathbf{v} . The basic zero-product law in vector spaces implies that when $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, f is actually an isomorphism (of ordered groups and of vector spaces).

Proposition 35. *The dimension of the \mathbb{R} -vector space \mathcal{V} is 3.*

Dimostrazione. Let us pick two distinct vector lines ℓ, ℓ' , nonzero vectors $\mathbf{v} \in \ell$, $\mathbf{w} \in \ell'$, a point O and a point P outside the plane π that contains the lines $O + \ell$ and $O + \ell'$, and set $\mathbf{t} := P - O$. Since \mathbf{v} and \mathbf{w} are not parallel, they must be linearly independent. For every linear combination $x\mathbf{v} + y\mathbf{w}$ we have $O + x\mathbf{v} + y\mathbf{w} \in \pi$ because $O + x\mathbf{v} \in O + \ell \subset \pi$ and $y\mathbf{w}$ is parallel to $O + \ell' \subset \pi$, hence $\mathbf{w} \notin \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ (the linear span of \mathbf{u}, \mathbf{v}). This shows that $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{t}$ are linearly independent.

It suffices to show that whatever geometric vector \mathbf{a} is a linear combination of $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{t}$. Let π' be a plane containing $O + \ell_{\mathbf{t}}$ and $O + \mathbf{a}$, so that $\pi \cap \pi'$ is a line. It follows that there exists a point $Q \in \pi \cap ((O + \mathbf{a}) + \ell_{\mathbf{t}})$ and according to Remark 34 we have

$$(O + \mathbf{a}) - Q = z\mathbf{t}$$

for some $z \in \mathbb{R}$. By the same remark and by Proposition 29, we have

$$Q - O = x\mathbf{v} + y\mathbf{w}$$

for some $x, y \in \mathbb{R}$. Then we can conclude

$$\mathbf{a} = (O + \mathbf{a}) - O = (Q - O) + ((O + \mathbf{a}) - Q) = x\mathbf{v} + y\mathbf{w} + z\mathbf{t},$$

as required. \square

The last step to be made is to define the inner product and prove its fundamental properties. On the classically defined Euclidean space \mathbf{E} , the natural inner product is determined up to a positive factor, depending on the choice of a unit of measurement. It may be nice to define a *distance* as an equivalence class with respect to \equiv (a *length* may be defined as an equivalence class with respect to the corresponding equivalence relation on segments). A distance is nonzero when it is the class of a (unordered) pair of distinct points. A *unit of measurement* is just a nonzero distance u ; a *unit vector* with respect to it is a vector represented by \overrightarrow{PQ} , with $\{P, Q\} \in u$. From the axiom 12 can easily be deduced that for every vector \mathbf{v} there exists a unit vector \mathbf{i} that is parallel and agrees with \mathbf{v} , and only one such \mathbf{i} when \mathbf{v} is nonzero. Then there exists exactly one nonnegative $x \in \mathbb{R}$ such that $\mathbf{v} = x\mathbf{i}$ (which is 0 when $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, for whatever choice of \mathbf{i}).

Definition 36. The *modulus* of a geometric vector \mathbf{v} with respect to a unit of measurement u is the unique $x \in \mathbb{R}$ such that $\mathbf{v} = x\mathbf{i}$ for whatever unit vector \mathbf{i} that is parallel and agrees with \mathbf{v} . It will be denoted by $|\mathbf{v}|_u$, or even simply by $|\mathbf{v}|$ when u can be understood.

Let us now recall that in Remark 3 it has been established the notion of a line l' perpendicular to a line l (for which we always assume that l' intersects l , and for the moment we do not say that perpendicularity is a symmetric relation).

Remark 37. Let l, l' be lines that intersect in a point O (at least). To give points P, P', Q as in Remark 3 is the same as to give nonzero vectors \mathbf{v}, \mathbf{v}' parallel to l, l' , respectively. Indeed, given P, P', Q , we can set $\mathbf{v} := P - O = O - Q$, $\mathbf{v}' := P' - O$ and, conversely, given \mathbf{v}, \mathbf{v}' , we can set $P := O + \mathbf{v}$, $Q := O + (-\mathbf{v})$, $P' := O + \mathbf{v}'$. Since $\overrightarrow{PP'}$ represents $\mathbf{v}' - \mathbf{v}$ and $\overrightarrow{QP'}$ represents $\mathbf{v}' + \mathbf{v}$, we have that l' is perpendicular to l if and only if

$$\mathbf{v}' - \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}' + \mathbf{v} .$$

Since a vector is congruent to its opposite, we deduce that l' is perpendicular to l if and only if l is perpendicular to l' . We also immediately have that intersecting lines that are respectively parallel to perpendicular lines, are perpendicular as well (nonintersecting lines that are respectively parallel to perpendicular lines, may be called *orthogonal*). Finally, we have that a line is never perpendicular to itself, hence perpendicular lines intersects at exactly one point.

Definition 38. We say that geometric vectors \mathbf{v}, \mathbf{v}' are *orthogonal* to each other if there exist perpendicular lines l, l' , parallel to \mathbf{v}, \mathbf{v}' , respectively.

Proposition 39. Given a plane π , a line $l' \subset \pi$ and a point $P \in \pi$, there exists exactly one perpendicular line $l \ni P$ to l' in π .

Dimostrazione. Let us first suppose that $P \notin l'$. Let σ be the half-plane of π with edge l' that does not contain P , and let us choose distinct points $P', R' \in l'$. According to the axiom 12, there exists exactly one point $Q \in \sigma$ such that $\{P, P'\} \equiv \{Q, P'\}$, $\{P, R'\} \equiv \{Q, R'\}$.

Since P, Q belong to different half-planes with edge l' , l_{PQ} must intersect l' in a point O , and by the axiom 13, we have $\{O, P\} \equiv \{O, Q\}$. Hence (according to Remark 3, and replacing P' with R' when $P' = O$), l' is perpendicular to the line $l_{PQ} \ni P$, which is contained in π . To show the uniqueness, it suffices to note that if l' is perpendicular to a line $l \ni P$ in π , and if Q_l is the point of l on the opposite side with respect to the intersection point O_l with l' such that $\{O_l, P\} \equiv \{O_l, Q\}$, then $\{P, P'\} \equiv \{Q_l, P'\}$, $\{P, R'\} \equiv \{Q_l, R'\}$ (along with $\{P', R'\} \equiv \{P', R'\}$). Hence $Q_l = Q$ by the uniqueness requirement in the axiom 12c, and therefore $l = l_{PQ}$.

In the case when $P \in l'$, let us fix whatever point $\bar{P} \in \pi \setminus l'$ and let $\bar{l} \ni \bar{P}$ be the perpendicular to l' in π (which has been shown to exist). Then the line through P parallel to \bar{l} is contained in π , and is perpendicular to l' because of Remark 37. Conversely, if $l \ni P$ is perpendicular to l' in π , then the line through \bar{P} parallel to l is perpendicular to l' (again by Remark 37). Hence that line must coincide with \bar{l} , and therefore l must be the line through P parallel to \bar{l} . □

The existence of perpendiculars to any given line implies that the zero vector is orthogonal to every vector. Moreover, since a line is not perpendicular to itself, a vector is both orthogonal and parallel to a nonzero vector if and only if it is the zero vector.

Given a point P outside a line l , there exists only one plane containing them, hence a unique perpendicular through P to l , and as usual we call the intersection point the *orthogonal projection* of P on l . When $P \in l$, of course every perpendicular through P to l (one for each plane through l) intersects l in P , which is therefore natural to consider as the orthogonal projection of itself on l .

Proposition 40. *Let a unit of measurement u be fixed, let \mathbf{v}, \mathbf{v}' be geometric vectors and let \mathbf{i} be a unit vector (with respect to u) that is parallel and agree with \mathbf{v} . Then there exists exactly one $x' \in \mathbb{R}$ such that $x'\mathbf{i} - \mathbf{v}'$ is orthogonal to \mathbf{i} .*

Dimostrazione. Let us choose a point O , let π be a plane containing O , $P := O + \mathbf{i}$ and $P' := O + \mathbf{v}'$, and let $l' \ni P'$ be perpendicular in π to l_{OP} . For each $x' \in \mathbb{R}$, set $H_{x'} := O + x'\mathbf{i}$.

If $H_{x'} \in l'$, then $x'\mathbf{i} - \mathbf{v}' = H_{x'} - P'$ is orthogonal to \mathbf{i} . By Remark 37, if $x'\mathbf{i} - \mathbf{v}' = H_{x'} - P'$ is nonzero and orthogonal to \mathbf{i} , then $l_{P'H_{x'}}$ must be perpendicular to l_{OP} , and it must coincide with l' by Proposition 39; hence $H_{x'} \in l'$. When $x'\mathbf{i} - \mathbf{v}' = H_{x'} - P'$ is the zero vector (hence orthogonal to \mathbf{i}) we have $H_{x'} = P' \in l'$.

This shows that $x'\mathbf{i} - \mathbf{v}' = H_{x'} - P'$ is orthogonal to \mathbf{i} if and only if $H_{x'} \in l'$, that is, it coincides with the orthogonal projection H of P' on l_{OP} . Then the $x' \in \mathbb{R}$ required in the statement is the (only) one for which $H_{x'} = H$ (in other terms, the only one for which $H - O = x'\mathbf{i}$). \square

Definition 41. The (natural) *inner product* (with respect to a unit of measurement) in the space of all geometric vectors, is the real-valued external operation that associates to each pair of vectors $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ the corresponding product $|\mathbf{v}|x' \in \mathbb{R}$, with x' being determined as in Proposition 40. The inner product of \mathbf{v}, \mathbf{v}' here will be denoted by $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'$.

Since a vector is both orthogonal and parallel to a nonzero vector if and only if it is the zero vector, we have that $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$ for every \mathbf{v} .

To check the commutative (symmetric) property of the natural inner product, we need a little preparation.

Proposition 42. *Let ℓ, ℓ' be vector lines, with fixed respective directions \leq, \leq' . For each $\mathbf{v} \in \ell$ there exists exactly one $\mathbf{v}' \in \ell'$ such that $\mathbf{v}' \equiv \mathbf{v}$ and $\mathbf{0} \leq' \mathbf{v}'$ if and only if $\mathbf{0} \leq \mathbf{v}$.*

Moreover, the assignment $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$ gives an isomorphism $\ell \rightarrow \ell'$ of ordered groups.

Dimostrazione. Let us choose points O, O' , let $l := O + \ell, l' := O' + \ell'$, respectively, and let \preceq, \preceq' be the directions on l, l' , respectively, such that the functions

$$\ell \rightarrow l, \mathbf{v} \mapsto O + \mathbf{v}, \quad \ell' \rightarrow l', \mathbf{v}' \mapsto O' + \mathbf{v}',$$

are order isomorphisms. For given $\mathbf{v} \in \ell, \mathbf{v}' \in \ell'$, setting $P := O + \mathbf{v}, P' := O' + \mathbf{v}'$, we have that the requirement

$$\mathbf{v}' \equiv \mathbf{v} \text{ and } \mathbf{0} \preceq' \mathbf{v}' \text{ if and only if } \mathbf{0} \preceq \mathbf{v}$$

is equivalent to the condition

$$\begin{cases} \{O', P'\} \equiv \{O, P\} \text{ and} \\ O' \preceq' P' \iff O \preceq P. \end{cases}$$

According to Remark 2, for each $P \in l$ there exists exactly one $P' \in l'$ for which the above condition is fulfilled. Hence for each $\mathbf{v} \in \ell$ there exists exactly one \mathbf{v}' that satisfies the requirement in the statement.

To show that the map $\varphi : \ell \rightarrow \ell'$ given by $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$ is a group homomorphism, let $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \ell$, and set $A := O + \mathbf{a}, B := A + \mathbf{b}, A' := O' + \varphi(\mathbf{a}), B' := A' + \varphi(\mathbf{b})$. Again by Remark 2 we have that $B' - O' = \varphi(B - O)$, and since $B - O = \mathbf{a} + \mathbf{b}, B' - O' = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b})$, we conclude that φ is a group homomorphism.

As every group homomorphism between ordered groups, it is an ordered group homomorphism if and only if it sends positive elements into positive elements, but this is obvious by the second requirement on \mathbf{v}' . Also the fact that it is an isomorphism is obvious, as its inverse is obtained simply by exchanging the roles of ℓ and ℓ' . \square

Proposition 43. *Let \mathbf{v}, \mathbf{v}' be geometric vectors, \mathbf{i}, \mathbf{i}' unit vectors that are parallel to \mathbf{v}, \mathbf{v}' , respectively, and let us fix the directions \preceq, \preceq' on $\ell_{\mathbf{i}}, \ell_{\mathbf{i}'}$, respectively, for which $\mathbf{0} < \mathbf{i}, \mathbf{0} < \mathbf{i}'$. Then the condition*

$$\mathbf{v}' \equiv \mathbf{v} \text{ and } \mathbf{0} \preceq' \mathbf{v}' \text{ if and only if } \mathbf{0} \preceq \mathbf{v}$$

is equivalent to

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ such that } \mathbf{v} = x\mathbf{i}, \mathbf{v}' = x\mathbf{i}'.$$

Dimostrazione. Let $\varphi : \langle \mathbf{i} \rangle \rightarrow \langle \mathbf{i}' \rangle$ be the ordered group homomorphism in the statement of Proposition 42. Then

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \varphi(x\mathbf{i})$$

gives a ordered group morphism $\mathbb{R} \rightarrow \ell_{\mathbf{i}'}$ that sends 1 to \mathbf{i}' . But the unique such ordered group homomorphism is given by $x \mapsto x\mathbf{i}'$. Hence

$$\varphi(x\mathbf{i}) = x\mathbf{i}',$$

and the statement readily follows if one takes into account Remark 34. \square

In particular, the case when \mathbf{i} and \mathbf{i}' agree with \mathbf{v} and \mathbf{v}' , respectively, gives that $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}'$ if and only if $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|$.

Proposition 44. *Let l, l' be perpendicular lines intersecting in O_0 and let $P_0 \in l, P'_0 \in l'$ be distinct from O_0 . If O_1, P_1, P'_1 are such that $\{O_1, P_1\} \equiv \{O_0, P_0\}$, $\{O_1, P'_1\} \equiv \{O_0, P'_0\}$ and $\{P_1, P'_1\} \equiv \{P_0, P'_0\}$, then $l_{O_1 P_1}$ and $l_{O_1 P'_1}$ are perpendicular.*

Dimostrazione. Let $Q_0 \in l$ be the point on the opposite side of P_0 with respect to O_0 such that $\{O_0, Q_0\} \equiv \{O_0, P_0\}$, and $Q_1 \in l_{O_1 P_1}$ be similarly defined. Then we have $\{P_1, Q_1\} \equiv \{P_0, Q_0\}$ and the axiom 13 gives $\{Q_1, P'_1\} \equiv \{Q_0, P'_0\}$. Since l' is perpendicular to l , we have $\{Q_0, P'_0\} \equiv \{P_0, P'_0\}$. Therefore $\{Q_1, P'_1\} \equiv \{P_1, P'_1\}$, and consequently $l_{O_1 P'_1}$ is perpendicular to $l_{O_1 P_1}$. \square

Proposition 45. *Let l, l' be lines in a plane π , not perpendicular but meeting at a point O (at least), let $P \in l, P' \in l'$ be such that $\{O, P'\} \equiv \{O, P\}$, let H, H' be their orthogonal projections on l', l , respectively, and \preceq, \preceq' directions on l, l' , respectively, such that $O \preceq P$ and $O \preceq' P'$. Then $\{O, H'\} \equiv \{O, H\}$ and $O \preceq H'$ if and only if $O \preceq' H$.*

Dimostrazione. We can assume that l, l' are distinct and also that P (and hence H, H', P') differs from O , otherwise $H = P$ and $H' = P'$, and the statement trivially follows. Let K' be the (only) point in l' such that $\{O, K'\} \equiv \{O, H\}$ and $O \preceq K'$ if and only if $O \preceq' H$.

Suppose first that $O \prec' H$, so that $O \prec K'$. Then we can exploit the axiom 13 with O also in place of O' , P also in place of A and Q', P' also in place of A' and Q, H in place of B and K' in place of B' . We obtain $\{P', K'\} \equiv \{P, H\}$. Then $l_{P' K'}$ is perpendicular to l by Proposition 44. Hence $K' = H'$ and the statement follows by the choice of K' .

Suppose now that $H \prec' O$, so that $K' \prec O$. Then we have $\{K', P\} \equiv \{H, P'\}$ by the axiom 12. Again we exploit the axiom 13, now with P here also in place of A and O' there, P' here also in place of A' and O there, O here in place of Q, Q', H in place of B , and K' in place of B' . We obtain again $\{P', K'\} \equiv \{P, H\}$ and the statement follows as before. \square

Proposition 46. *For all geometric vectors \mathbf{v}, \mathbf{v}' we have*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}.$$

Dimostrazione. Let \mathbf{i}, \mathbf{i}' be unit vectors, parallel to and agreeing with \mathbf{v}, \mathbf{v}' , respectively. Let us fix any point O , set $P := O + \mathbf{i}, P' := O + \mathbf{i}'$, let H be the orthogonal projection of P on $l_{O' P'}$ and H' the orthogonal projection of P' on $l_{O P}$. According to Proposition 45 and Proposition 43 (with $H - O$ and $H' - O'$ in place of \mathbf{v}, \mathbf{v}' there), there exists $c \in \mathbb{R}$ such that $H' - O = c\mathbf{i}$ and $H - O = c\mathbf{i}'$ ($c = 0$ when \mathbf{i}, \mathbf{i}' are orthogonal). Therefore $\mathbf{i} - c\mathbf{i}' = P - H$ is orthogonal to \mathbf{i}' and $\mathbf{i}' - c\mathbf{i} = P' - H'$ is orthogonal to \mathbf{i} . Then $\mathbf{v} - |\mathbf{v}|c\mathbf{i}' = |\mathbf{v}|\mathbf{i} - |\mathbf{v}|c\mathbf{i}'$ is orthogonal to \mathbf{i}' and $\mathbf{v}' - |\mathbf{v}'|c\mathbf{i} = |\mathbf{v}'|\mathbf{i}' - |\mathbf{v}'|c\mathbf{i}$ is orthogonal to \mathbf{i} . Then $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = |\mathbf{v}||\mathbf{v}'|c = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}$. \square

Proposition 47. For all geometric vectors \mathbf{v}, \mathbf{v}' and scalars $x \in \mathbb{R}$ we have

$$\mathbf{v} \cdot x\mathbf{v}' = x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') .$$

Dimostrazione. Let \mathbf{i} be a unit vector that is parallel and agree with \mathbf{v} and let $x' \in \mathbb{R}$ be such that $\mathbf{v}' - x'\mathbf{i}$ is orthogonal to \mathbf{i} . Then $x\mathbf{v}' - xx'\mathbf{i}$ is orthogonal to \mathbf{i} as well. Hence

$$\mathbf{v} \cdot x\mathbf{v}' = |\mathbf{v}|(xx') = x (|\mathbf{v}|x') = x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') .$$

□

A subtle problem in the proof of additivity (the distributive-like property) may arise. For instance, in [2] some properties of orthogonal projections are used but often, at least in our experience in the past, they are proved in high schools only in the plane case. Also on the internet one can find recent discussions on this issue (see [4], for instance).

Remark 48. Let $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}''$ be geometric vectors, \mathbf{i} a unit vector parallel to and agreeing with \mathbf{v} , and $x', x'' \in \mathbb{R}$ such that $\mathbf{p}' := \mathbf{v}' - x'\mathbf{v}, \mathbf{p}'' := \mathbf{v}'' - x''\mathbf{v}$ are orthogonal to \mathbf{i} . If we show that $\mathbf{p}' + \mathbf{p}''$ is orthogonal to \mathbf{i} then

$$(\mathbf{v}' + \mathbf{v}'') \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}$$

immediately follows.

From a geometric viewpoint, in order to prove additivity one basically needs the orthogonal planes to a line l , that is, planes that contains all lines perpendicular to l in their intersection point. A recent reference for that result is [3, Chap. IV, Th. 1.2] and we are not aware of earlier references, apart from those directly grounded on the modern approach, of course. That proof is of a purely geometric nature and nowadays can be found in some schoolbooks, but although it could easily be adapted to the statement of our next proposition, here we opt for a different proof that is mainly grounded on Algebra. The algebraic tools counterbalance the higher conceptual simplicity of the purely geometric proof, so that from a formal viewpoint the two proofs turn to be of similar length (to be honest, still with a certain advantage by the geometric one).

Let us preliminarily note that the proof of

$$(\mathbf{v}' + \mathbf{v}'') \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}$$

when \mathbf{v}, \mathbf{v}' and \mathbf{v}'' are all parallel to some plane is easy, basically because in this case Proposition 49 below easily follows from Proposition 39. Then one can readily prove the Pythagorean theorem, and more precisely that geometric vectors \mathbf{v} and \mathbf{w} are orthogonal if and only if

$$|\mathbf{v} + \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{w}|^2$$

(as \mathbf{v}, \mathbf{w} and $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ are all parallel to some plane, and additivity and symmetry imply that $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$).

Proposition 49. *If \mathbf{v}' , \mathbf{v}'' are orthogonal to a geometric vector \mathbf{v} , then every vector in the linear span $\langle \mathbf{v}', \mathbf{v}'' \rangle$ is orthogonal to \mathbf{v} as well.*

Dimostrazione. We can assume that \mathbf{v}' , \mathbf{v}'' are (nonzero and) not parallel, otherwise the statement easily follows. By Proposition 40, there exists $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $\mathbf{p} := \mathbf{v}'' - \lambda\mathbf{v}'$ is orthogonal to \mathbf{v}' . We have

$$|\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v}' + \mathbf{p}|^2 = |\mathbf{v} + \mathbf{v}''|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}''|^2 \quad (7)$$

and for all $\mu \in \mathbb{R}$,

$$|\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v}'|^2 + |\mu\mathbf{p}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\lambda\mathbf{v}'|^2 + |\mu\mathbf{p}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\lambda\mathbf{v}' + \mu\mathbf{p}|^2. \quad (8)$$

Setting $\mu = 1$ in (8) and comparing with (7) we get

$$|\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{p}|^2 = |\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v}' + \mathbf{p}|^2.$$

Hence $\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v}'$ is orthogonal to \mathbf{p} , and more generally to $\mu\mathbf{p}$, for all $\mu \in \mathbb{R}$. Therefore, for all $\mu \in \mathbb{R}$,

$$|\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v}' + \mu\mathbf{p}|^2 = |\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v}'|^2 + |\mu\mathbf{p}|^2 \stackrel{(8)}{=} |\mathbf{v}|^2 + |\lambda\mathbf{v}' + \mu\mathbf{p}|^2,$$

thus \mathbf{v} is orthogonal to $\lambda\mathbf{v}' + \mu\mathbf{p} = \lambda(1 - \mu)\mathbf{v}' + \mu\mathbf{v}''$, and more generally to $\nu(\lambda(1 - \mu)\mathbf{v}' + \mu\mathbf{v}'')$ for all $\nu \in \mathbb{R}$. Now, a linear combination $x\mathbf{v}' + y\mathbf{v}''$ equals $\nu(\lambda(1 - \mu)\mathbf{v}' + \mu\mathbf{v}'')$ when

$$\mu = \frac{\lambda y}{x + \lambda y}, \quad \nu = \frac{x + \lambda y}{\lambda}.$$

Note also that $\lambda = 0$ if and only if \mathbf{v}' and \mathbf{v}'' are orthogonal. Therefore, if \mathbf{v}' and \mathbf{v}'' are not orthogonal, every vector in the span $\langle \mathbf{v}', \mathbf{v}'' \rangle$ is orthogonal to \mathbf{v} , except at most the multiples of \mathbf{p} (that are the linear combinations with $x + \lambda y = 0$). Since \mathbf{p} is orthogonal to \mathbf{v}' and we are assuming that \mathbf{v}' and \mathbf{v}'' are not parallel, \mathbf{p} is not orthogonal to \mathbf{v}'' (say, by Proposition 39), hence exchanging the roles of \mathbf{v}' and \mathbf{v}'' in the above argument, we get that the multiples of \mathbf{p} are orthogonal to \mathbf{v} as well.

We are left with the case when \mathbf{v}' and \mathbf{v}'' are orthogonal. Let us fix as unit of measurement the length of \mathbf{v} (the statement is trivial when $\mathbf{v} = \mathbf{0}$), let \mathbf{i}' , \mathbf{i}'' be unit vectors parallel to \mathbf{v}' , \mathbf{v}'' , respectively, and set $\mathbf{s} := \mathbf{i}' + \mathbf{i}''$ and $\mathbf{d} := \mathbf{i}' - \mathbf{i}''$. We have

$$|\mathbf{v} + \mathbf{s} + \mathbf{d}|^2 = |\mathbf{v} + 2\mathbf{i}'|^2 = 5 = |\mathbf{v} + 2\mathbf{i}''|^2 = |\mathbf{v} + \mathbf{s} - \mathbf{d}|^2,$$

hence $\mathbf{v} + \mathbf{s}$ and \mathbf{d} are orthogonal by Remark 37.

Therefore

$$|\mathbf{v} + \mathbf{s}|^2 + |\mathbf{d}|^2 = |\mathbf{v} + \mathbf{s} + \mathbf{d}|^2 = 5 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{s}|^2 + |\mathbf{d}|^2,$$

which gives

$$|\mathbf{v} + \mathbf{s}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{s}|^2.$$

Hence \mathbf{v} is orthogonal to \mathbf{s} . Since \mathbf{s} is not orthogonal to \mathbf{i}' , we proved that in this hypothesis every vector in $\langle \mathbf{i}', \mathbf{s} \rangle$ is orthogonal to \mathbf{v} . To conclude the proof, it suffices to note that $\langle \mathbf{i}', \mathbf{s} \rangle = \langle \mathbf{v}', \mathbf{v}'' \rangle$. \square

Proposition 50. *For all geometric vectors $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}''$ we have*

$$(\mathbf{v}' + \mathbf{v}'') \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}$$

Dimostrazione. A quite immediate consequence of Remark 48 and Proposition 49. □

Conclusions

We have completed the proof that natural scalar products, in the 3D real vector space \mathcal{V} of geometric vectors, are symmetric and positive definite bilinear forms. We also presented a canonical action $P \mapsto P + \mathbf{v}$ of geometric vectors \mathbf{v} on \mathbf{E} , which clearly give a free and transitive action of the group $(\mathcal{V}, +)$. In other words, \mathbf{E} is in a canonical way (up to the choice of a unit of measurement) a 3D Euclidean space in the modern sense. The ground Axioms' list 1–13 can be compacted in less than one page and requires little introductory terminology. Our quite detailed deduction can be presented in a few hours of a course and is substantially complete, up to elementary consequences of the incidence axioms and a few basics about abelian groups, ordered sets, fields and vector spaces (which can be introduced in conjunction with the geometric exposition, gaining in motivation).

In a first-level Geometry course, a discussion of the list of axioms together with some of its consequences may also serve for recapitulation of and comparison with high-school geometry. That may give students a common background, which helps them to avoid ambiguities that can likely arise from the differences among the high-school courses they come from. We suggest not to exceed in the recapitulation, and make instead the presentation of \mathbf{E} much in the style in which the other basic mathematical structures are presented in the first-level undergraduate courses, on geometry or not.

For the sake of those who want to extend the high-school recapitulation a bit beyond the strictly necessary facts, here we want just to express the following opinion about the definition of angles, which has been thrown out of our approach. To begin with, segments and rays (half-lines) are obviously defined. The definition of angles as intersections of half-planes would be handy but, in our opinion, it is better to replace it by taking sets of rays. Indeed, on the set of all rays with given initial point in a given plane, two orientations are induced by the directions on lines in the plane not passing through the initial point. Though there exists a notion of a circular relation, it is not the one required to formally define such orientations; one needs instead ternary relations with properties similar to that of a total order (in [2] such circular orientations as ternary relations are considered, but without establishing general defining properties). Then angles can be defined like segments, using rays in place of points.

Once the modern backbone for geometry is reached, the lecturer can start with the general theory of Euclidean Spaces. The introduction of the general notions can be motivated by the very geometric case, and some basic properties that has been necessary in the transitional proofs can be proved in general by the usual techniques. This gives occasion to note that the starting elementary axioms can be deduced from

the modern ones, so that they constitute equivalent axiomatic systems for classical Space Geometry. Then one can proceed with more advanced results, and show how the modern techniques provide short and elegant proofs of many important classical theorems.

Acknowledgements

The author is particularly grateful to Roberto Tortora for his careful reading and his fine suggestions, and to Sara Dragotti for her insightful comments. Many thanks also go to a group of selected experts that accepted to participate in an online survey on the topic of the present paper, which was set up in order to gain a better idea on what are the current views.

Bibliografia

- [1] DIEUDONNÉ, J. A. *Linear algebra and geometry*. Hermann Publishers in Arts and Sciences, Paris (1969)
- [2] FRANCHETTA, A. *Algebra lineare e geometria analitica*. Liguori Editore (1979)
- [3] SHAPIROV, R. *Foundation of geometry for university students and high-school students*. arXiv:math/0702029
- [4] math.stackexchange.com/questions/1109142/proving-that-the-dot-product-is-distributive

Istruzioni per gli autori

Il *Periodico di Matematiche* pubblica articoli di Matematica e di Fisica che abbiano carattere scientifico, storico e didattico, previa valutazione di contenuti ed originalità. Ciascun lavoro presentato è giudicato da esperti anonimi che riferiscono al Direttore, cui compete il giudizio finale.

Formattazione del testo

- L'articolo deve essere in formato .doc. Può essere scritto in italiano o in inglese, su libera scelta degli autori, ad eccezione del sunto (abstract) da scrivere in sola lingua inglese.
- Il testo deve essere redatto in Times New Roman, con dimensione del carattere di 11 pt, interlinea 1 e testo giustificato su ambo i lati.
- I margini di scrittura sono: 5,7 cm superiore; 6,2 cm inferiore; 4,5 cm destra e sinistra
- Il titolo dell'articolo deve essere in grassetto, centrato e non completamente maiuscolo, con dimensione del carattere di 15 pt. Devono essere lasciati 36 pt di spazio prima di quest'ultimo. Qualora il titolo sia in italiano, va riportato anche in inglese.
- Il nome degli autori deve essere in grassetto e centrato, con dimensione del carattere di 12 pt. Devono essere lasciati 20 pt di spazio prima e 40 pt di spazio dopo.
- Gli autori devono inserire una nota a piè della prima pagina, fornendo gli indirizzi mail e le rispettive afferenze/occupazioni, con dimensione del carattere di 10 pt e rientro di 5mm.
- Il nome del sunto (abstract) deve essere giustificato a sinistra, grassetto e con dimensione del carattere di 12 pt. Il testo dell'abstract non deve superare le 10 righe, con dimensione del carattere di 10 pt.
- I titoli dei paragrafi devono essere in grassetto e giustificati a sinistra, con dimensione del carattere di 14 pt. A conclusione di ogni paragrafo, gli autori devono lasciare uno spazio verticale di 11 pt.
- L'articolo non può superare le 12 pagine, salvo dirette autorizzazioni della Direzione e/o dei componenti del Comitato di Redazione del Periodico di Matematiche.
- A conclusione del testo e prima della bibliografia, gli autori possono inserire il paragrafo Ringraziamenti (con titolo in grassetto, giustificato a sinistra e con dimensione del carattere di 14 pt). In suddetto paragrafo, gli autori possono inserire opportuni ringraziamenti a persone, progetti o funding, questi ultimi esplicitamente indicati.

Bibliografia

- Gli autori devono lasciare due spazi verticali di 11 pt a conclusione dell'ultimo paragrafo (i ringraziamenti, qualora siano inseriti) che precede la bibliografia, per la quale deve essere usata la seguente formattazione:

Bibliografia (12 pt)

[1] CATTANEO C., *Sulla conduzione del calore*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena (3), 1948. (11 pt)

[2] ...

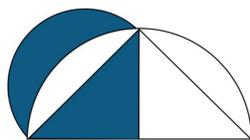
- I riferimenti bibliografici devono essere in ordine di citazione.
- Tutti i riferimenti bibliografici devono essere numerati fra parentesi quadre ([1,2]) nel corpo del testo, seguendo la rispettiva numerazione.

Copyright

Gli autori possono corredare il corpo del testo con immagini in formato .jpeg .jpg con una risoluzione minima di 300 dpi. Ad ogni immagine va associata un'apposita didascalia. Per ogni immagine che non sia di autoproduzione va indicata la fonte, con un eventuale URL. Qualora l'immagine sia di proprietà degli autori sarebbe opportuno indicare il software con il quale la si è realizzata.

Inizio dei lavori

Gli articoli vanno inviati a mezzo posta elettronica al Direttore e a ciascuno dei componenti del Comitato di Redazione del Periodico di Matematiche.



Mathesis

Presidente

Francesco de Giovanni

E' presidente dal 4 febbraio 2021, ventiquattresimo dal 1895, anno della fondazione.

presidente@mathesisnazionale.it

Consiglio Nazionale

Vincenzo Iorfida *vice presidente*, Alessio Russo *segretario*, Roberto Franzina *tesoriere*, Serenella Iacino, Giulio Maletta, Susi Osti, Marcello Pedone, Annalisa Santini, Francesco Sicolo, Pasqualina Ventrone.

Sezioni

Abruzzo – Avellino – Bari – Brescia – Caserta – Castellamare di Stabia – Catania – Crotone – Ferrara – Firenze – Grottaglie – Lanciano Ortona – Latina – Lecce – Mantova – Messina – Milano – Mondragone – Napoli – Napoli Flegrea – Olbia – Roma – Rovigo – Salerno – Serra San Bruno – Spoleto – Terni – Udine – Varese – Venezia – Verona – Vicenza.

Rivista

Periodico di Matematiche

Dal 1886 Periodico di Matematica, dal 1921 "di Matematiche". La proprietà della testata è della Mathesis dal 2012 per concessione dell'Editore Zanichelli.

Sito web

www.mathesisnazionale.it



L'illustrazione in copertina è dell'artista colombiano **Omar Figueroa Turcios**, che vive e lavora in Spagna. Omar Turcios ha ricevuto numerosi premi e riconoscimenti internazionali, tra cui il premio “Luigi Mari 2019” alla XXX Biennale dell'Umore di Tolentino per il suo ritratto di Frida Kahlo. Ha già collaborato con matematici italiani, realizzando in particolare i loghi originali dell'associazione “AGTA – Advances in Group Theory and Applications” e del convegno internazionale “Ordered Statistical Data 2020”.

MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche

c/o Dipartimento di Matematica e Fisica
Università degli Studi della Campania “Luigi Vanvitelli”
Viale Abramo Lincoln 5 - 81100 Caserta (CE)
www.mathesisnazionale.it • info@mathesisnazionale.it