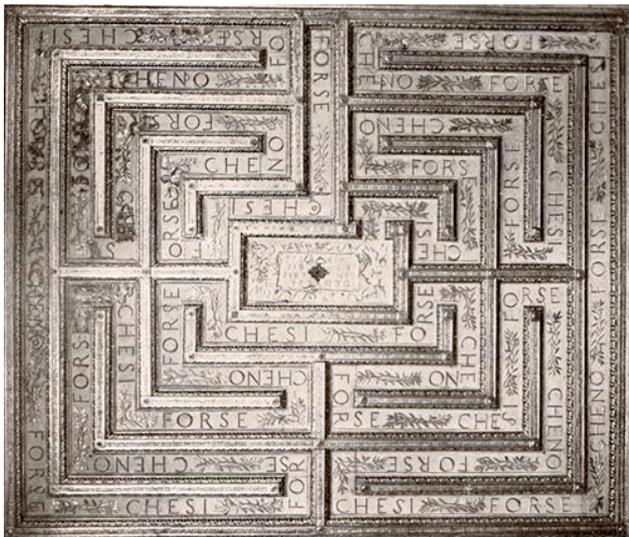


LA MUSICA DEI NUMERI PRIMI

di Daniele Trucco

Leggendo il libro di Paul Hoffman sulla vita di Paul Erdős (*L'uomo che amava solo i numeri*, n.d.c.) mi sono imbattuto in un passo dedicato alla spirale di Ulam e ad alcune considerazioni relative ai numeri primi. Da anni svolgo ricerche sui giochi musicali legati alla matematica e l'idea di convertire quello schema numerico in un elaborato musicale poteva risultare interessante. Ho terminato da poco un'operazione analoga sfruttando il labirinto mantovano di Palazzo Ducale¹ e il suo motto *Forse che sì forse che no* e facendoli diventare un corale e una passacaglia per organo; essendo il procedimento adottabile per questa nuova operazione molto simile, ho iniziato la trasposizione.



Libero

F o h c
e n e n
e s r o
o r s e
h e f i h c F o
c h o r s e i f
s e o r
f i h c
e s e s
e s r o
o r F s e

La spirale di Ulam, nata nel 1963 probabilmente come un semplice passatempo del matematico polacco, ha fornito alcune idee aggiuntive allo studio dei numeri primi anche se, a oggi, non ha ancora prodotto dei risultati chiari né si è ancora stabilito se possa essere significativamente utile. In ogni caso l'effetto, soprattutto visivo, che si genera è affascinante.

In una variante del suo 'gioco' Ulam inserì al centro del quadrato il numero 17 (e non l'1) notando così che procedendo a spirale con tutti gli altri numeri successivi si veniva a formare una diagonale di numeri primi decisamente significativa ma che non prosegue oltre né verso l'alto né verso il basso ma si rigenera in altri settori.

Proprio da questa variante sono partito per la conversione in musica:

¹ Cfr. la scheda in <https://danieletrucco.blogspot.com/2020/02/math-music.html>.

272	271	270	269	268	267	266	265	264	263	262	261	260	259	258	257
213	212	211	210	209	208	207	206	205	204	203	202	201	200	199	256
214	161	160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149	198	255
215	162	117	116	115	114	113	112	111	110	109	108	107	148	197	254
216	163	118	81	80	79	78	77	76	75	74	73	106	147	196	253
217	164	119	82	53	52	51	50	49	48	47	72	105	146	195	252
218	165	120	83	54	33	32	31	30	29	46	71	104	145	194	251
219	166	121	84	55	34	21	20	19	28	45	70	103	144	193	250
220	167	122	85	56	35	22	17	18	27	44	69	102	143	192	249
221	168	123	86	57	36	23	24	25	26	43	68	101	142	191	248
222	169	124	87	58	37	38	39	40	41	42	67	100	141	190	247
223	170	125	88	59	60	61	62	63	64	65	66	99	140	189	246
224	171	126	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	139	188	245
225	172	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	187	244
226	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	243
227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242

Diverse sono le curiosità matematiche, dalle più ovvie alle più astruse, che hanno origine da queste disposizioni come ad esempio² quella per cui la differenza fra le differenze dei numeri della diagonale, partendo sia dall'alto sia dal basso, dà come risultato sempre 8 (anche procedendo oltre il quadrato):

272	271	270	269	268	267	266	265	264	263	262	261	260	259	258	257
213	212	211	210	209	208	207	206	205	204	203	202	201	200	199	256
214	161	160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149	198	255
215	162	117	116	115	114	113	112	111	110	109	108	107	148	197	254
216	163	118	81	80	79	78	77	76	75	74	73	106	147	196	253
217	164	119	82	53	52	51	50	49	48	47	72	105	146	195	252
218	165	120	83	54	33	32	31	30	29	46	71	104	145	194	251
219	166	121	84	55	34	21	20	19	28	45	70	103	144	193	250
220	167	122	85	56	35	22	17	18	27	44	69	102	143	192	249
221	168	123	86	57	36	23	24	25	26	43	68	101	142	191	248
222	169	124	87	58	37	38	39	40	41	42	67	100	141	190	247
223	170	125	88	59	60	61	62	63	64	65	66	99	140	189	246
224	171	126	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	139	188	245
225	172	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	187	244
226	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	243
227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242

Attratto da questo schema ho provato a convertire i numeri in note esattamente come avevo convertito le lettere del motto mantovano, così da verificare se anche sul pentagramma ne fosse nato qualche cosa degno di nota.

Questi i semplici passaggi per la trasformazione:

1. si considerino le 12 note comprese nell'ottava (do, do#, re, re#, etc.);
2. partendo dal numero 1 si associ ogni nota a un numero in ordine crescente (do=1; do#=2; re=3; etc.);

² Ringrazio la prof.ssa Vilma Ponzio per la segnalazione.

- dopo il dodicesimo numero si riparta da capo con la nota do (do=13; do#=14; re=15; etc.) e così all'infinito;
- dato che le note comprese nell'ambito di un'ottava sono dodici, ho scelto di utilizzare battute con 12 suddivisioni e dunque (per pura comodità) il metro di 12/8.



Interessandoci solo i numeri primi, tutti gli altri corrisponderanno a delle pause così che non si generi confusione nella lettura. In questo modo si otterrà oltretutto una semplificazione visiva nella ricerca dei numeri: si saprà a priori che in ognuna delle infinite battute che si genereranno la nota 'do' sarà sempre nella prima suddivisione della battuta, il 're' nella terza e il 'fa' nella sesta e che per ritrovare la stessa nota sarà sufficiente aggiungere o togliere 12 (o un suo multiplo) al suo numero.



Ho proceduto a questo punto alla creazione dello spartito dei numeri primi (mi sono dato come limite quelli compresi tra 1 e 1000) con le regole date:

Numeri Primi

Sequenza

Daniele Trucco

Se si escludono il 2 e il 3 si noterà che tutti gli altri numeri corrispondono sempre alle stesse 4 note: do, mi, fa#, la# anche se disposte in una sequenza apparentemente casuale. Non ho verificato ciò che capita su numeri primi superiori alle 3 cifre ma penso che il meccanismo continui identico.

Detto ciò saltano all'occhio questi quattro gruppi di note che ho associato ai loro relativi numeri primi:

Do: 13, 37, 61, 73, 97, 109, 157, 181, 193, 229, 241, 277, 313, 337, 349, 373, 397, 409, 421, 433, 457, 541, 577, 601, 613, 661, 673, 709, 733, 757, 769, 829, 853, 877, 937, 997...

Mi: 5, 17, 29, 41, 53, 89, 101, 113, 137, 149, 173, 197, 233, 257, 269, 281, 293, 317, 353, 389, 401, 449, 461, 509, 521, 557, 569, 593, 617, 641, 653, 677, 701, 761, 773, 797, 809, 821, 857, 881, 929, 941, 953, 977...

Fa#: 7, 19, 31, 43, 67, 79, 103, 127, 139, 151, 163, 199, 211, 271, 283, 307, 331, 367, 379, 439, 463, 487, 499, 523, 547, 571, 607, 619, 631, 643, 691, 727, 739, 751, 787, 811, 823, 859, 883, 907, 919, 967, 991...

La#: 11, 23, 47, 59, 71, 83, 107, 131, 167, 179, 191, 227, 239, 251, 263, 311, 347, 359, 383, 419, 431, 443, 467, 479, 491, 503, 563, 587, 599, 647, 659, 683, 719, 743, 827, 839, 863, 887, 911, 947, 971, 983...

Non considerando l'1 come primo e tralasciando come ho detto il 2 e il 3, se consideriamo i successivi quattro numeri primi (5, 7, 11, 13) come punto di origine delle sequenze, si noterà che aggiungendo 12 o un suo multiplo a questi numeri si otterrà sempre ad un certo punto un numero primo.

Di conseguenza per sapere se un numero primo appartiene a uno dei 4 gruppi è sufficiente sottrarre 12 tante volte quante sono necessarie per ottenere come risultato uno dei 4 numeri primi 'base'.

È possibile pertanto che ci siano delle relazioni tra i numeri appartenenti ai gruppi e per meglio visualizzare una possibile legge che regoli l'alternarsi dei numeri ho pensato di semplificare lo schema dei 4 gruppi indicando i multipli di 12 con numeri progressivi tale che 12=1, 24=2, 36=3, etc.; in questo modo si verranno a generare le seguenti sequenze:

Do: 2, 2, 1, 2, 1, 4, 2, 1, 3, 1, 3, 3, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 7, 3, 2, 1, 4, 1, 3, 2, 2, 1, 5, 2, 2, 5, 5...

Mi: 1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 4, 1, 4, 1, 3, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 5, 1, 2, 1, 1, 3, 2, 4, 1, 1, 2...

Fa#: 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 4, 3, 1, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 2, 1, 4, 2...

La#: 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 4, 3, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 5, 2, 1, 4, 1, 2, 3, 2, 7, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 1...

Lo studio andrebbe approfondito e applicato su larga scala, magari comparando i gruppi tra loro così da ricavarne informazioni aggiuntive.

Non ci si dimentichi però l'obiettivo originario di tutto questo lavoro: convertire la spirale di Ulam in musica. A questo punto diviene semplice applicare lo stesso principio di conversione anche alla spirale (questa volta ho scelto il metro di 4/8 perché il quadrato era composto da righe di 16 numeri e quindi la divisione in 4 battute per rigo mantiene graficamente l'idea della/e diagonale/i):

Decisamente evidente anche la sequenza che si genera seguendo la diagonale dal basso verso l'alto:

Di nuovo una cosa interessante: la serie musicale continuerebbe ancora uguale pur non essendo il 323 un numero primo ma rispettando comunque lo stesso principio di conversione con la medesima posizione sul pentagramma (lo schema procede identico anche nell'altra direzione perché il 289 corrisponderebbe a un do e il 359, questa volta numero primo, confermerebbe la serie in modo corretto con il la#).

Per completare il discorso teorico non rimane che fornire la scala che si genera da questa operazione e che diventa la base 'armonica' (e naturalmente melodica) per la composizione di un brano basato sui numeri primi.