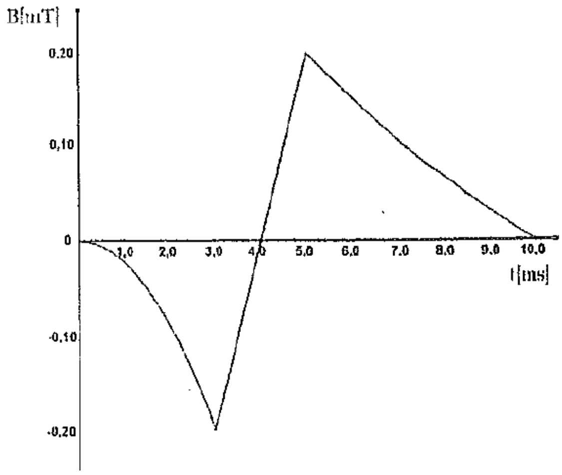
QUESITO 6

Una spira di rame, di resistenza $R = 4{,}0\ m\Omega$, racchiude un'area di 30 cm^2 ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alla superficie della spira. La componente del campo magnetico perpendicolare alla superficie varia nel tempo come indicato in figura.



Spiegare la relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta,
Calcolare la corrente media che passa nella spira durante i seguenti intervalli di tempo:

a) $da\ 0{,}0\ ms\ \ a\ \ 3{,}0\ \ ms;$
b) $da\ 3{,}0\ ms\ \ a\ \ 5{,}0\ ms;$
c) $da\ 5{,}0\ ms\ \ a\ \ 10\ ms.$

Soluzione

La direzione del vettore $\vec{B}$ resta sempre perpendicolare alla superficie S della spira ma, come si evince dall'andamento della componente normale, l'intensità e il verso variano nel tempo.
Nella spira si genera pertanto una forza elettromotrice indotta, secondo la legge di Faraday-Neumann-Lenz $fem_{indotta} = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}=$
Essendo $\overrightarrow{B}$ parallelo alla normale alla spira possiamo scrivere

$$\phi(\vec{B}) = BS \to -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = -S\frac{dB}{dt}$$

Primo svolgimento

Negli intervalli da 0ms a 3ms e da 4ms a 10 ms la componente del campo magnetico B diminuisce, quindi nella spira girerà una corrente indotta tale da creare un campo magnetico diretto come B, in modo da sommarsi e compensare la diminuzione. Nell'intervallo da 3ms a 5ms B aumenta quindi la corrente ruoterà in senso inverso, in modo da creare un campo che si opponga all'aumento di B. La formula di Faraday-Neumann-Lenz:

$i = \frac{V}{R} = -\frac{d(BS)}{R\,dt} = -\frac{S}{R}\frac{d(B)}{dt}$ il segno ha proprio quel significato.

Nei primi 3 ms la componente del campo varia con un andamento di tipo parabolico.

La parabola è del tipo $y=ax^2$ e deve passare per $(3\cdot10^{-3}\,;\,-0{,}20\cdot10^{-3})$. Quindi: $a\cong -22$ il primo arco di curva

È all'incirca una parabola di equazione: $B(t)= -22\cdot t^2$

La corrente: $i(t) = -\frac{S}{R}(-44t) = 33t$

Il valor medio sull'intervallo in questione:

$$i_m = \frac{S}{R}\frac{1}{T}\int_0^T -2at\,dt = 5 \cdot 10^{-2}A$$

Nell'intervallo da 3 a 5 ms l'andamento di B è lineare:

$$i_m = \frac{S}{R}\frac{\Delta B}{\Delta t} = 0.15\ A$$

Nell'intervallo da 5 a 10 ms l'andamento di B è quasi lineare:

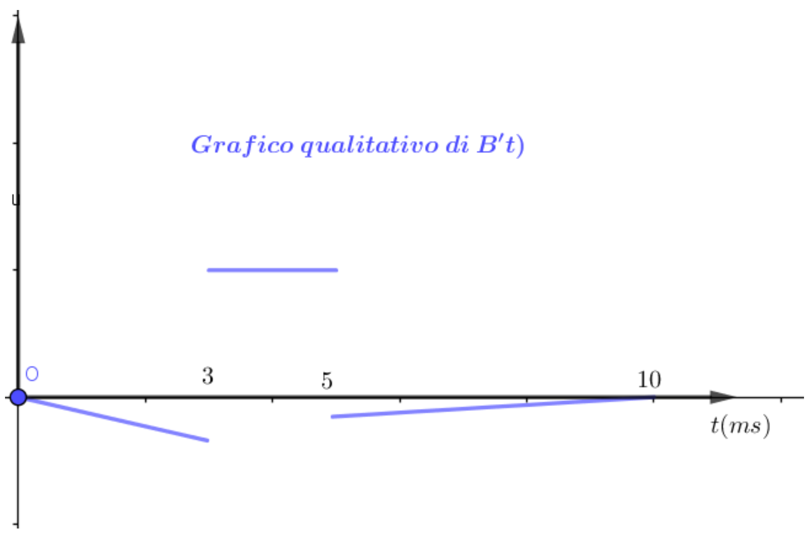
$$i_m = \frac{S}{R}\frac{\Delta B}{\Delta t} = 0.03\ A$$

Secondo svolgimento

Studio della derivata $B'(t)$

Cominciamo con l'osservare che dal grafico ella componente $B(t)$ si può dedurre l'andamento qualitativo della derivata $B'(t)$, la quale è nulla in O e ammette due punti di discontinuità a salto nei punti angolosi di $B(t)$, precisamente per t= 3ms e t =5ms.

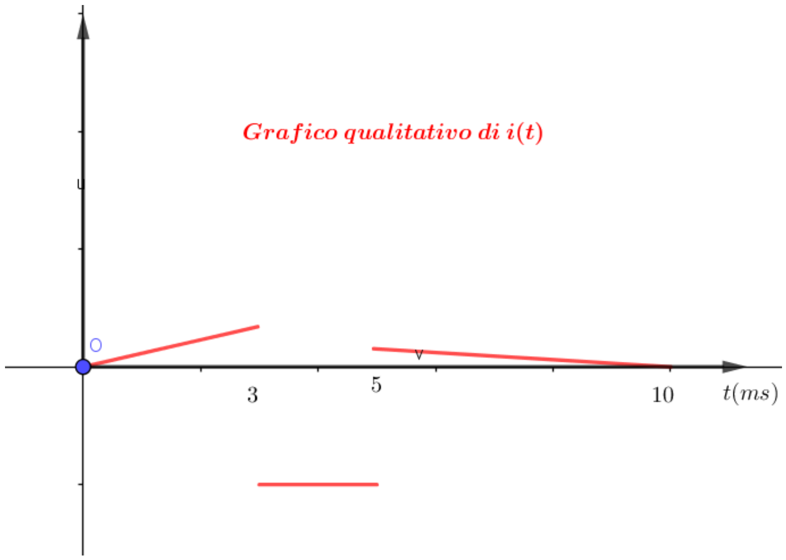
- Nell'intervallo$[0; 3[$ $B(t)$è negativa, il suo grafico è decrescente e volge la concavità verso il basso, pertanto la derivata $B'(t)$ è negativa e decrescente
- Nell'intervallo $]3; 5[$ $B(t)$ cresce linearmente e passa da valori negativi a valori positivi pertanto la derivata $B'(t)$ è costante e positiva.
- Nell'intervallo $]5; 10]$ $B(t)$è positiva, il suo grafico è decrescente e volge la concavità verso l'alto, pertanto la derivata $B'(t)$ è negativa e crescente



Andamento qualitativo di $i(t)$ e suo significato fisico

L'intensità della corrente indotta, secondo la legge di Ohm, è $i(t) = \frac{fem_{indotta}}{R} = -\frac{S}{R}B'(t)$

A questo valore è associato un segno che ne determina il verso



Negli intervalli in cui i(t) è positiva (negativa) la corrente circola in senso antiorario (orario) e genera un campo magnetico parallelo ed equiverso (di verso opposto) alla normale, orientata in modo da uscire dalla faccia considerata.

Dal grafico di $B(t)$ si deduce che

a) nel primo intervallo il flusso del vettore $\vec{B}$ è negativo (entrante) e aumenta in valore assoluto.
Nello stesso intervallo la corrente circola nella spira in senso antiorario e quindi genera un campo magnetico parallelo ed equiverso a $\vec{B}$ al quale corrisponde un flusso positivo (uscente). Questo è in accordo con la legge di Lenz, in quanto il campo magnetico indotto deve contrastare un aumento di flusso entrante

b) Nell'intervallo $]3;4[$ il flusso del vettore $\vec{B}$ è negativo (entrante) e diminuisce in valore assoluto mentre nell'intervallo $]4;5[$ è positivo (uscente) e aumenta in valore assoluto.

Nell'intervallo $]3;5[$ la corrente circola nella spira in senso orario e quindi genera un campo magnetico parallelo ma di verso opposto a $\vec{B}$,al quale corrisponde un flusso negativo (entrante), Anche in questo caso il verso della corrente è in accordo con la legge di Lenz in quanto deve contrastare prima una diminuzione di flusso entrante e poi un aumento di flusso uscente.

c) Nel terzo intervallo il flusso del vettore $\vec{B}$ è positivo (uscente) e diminuisce in valore assoluto.
Nello stesso intervallo la corrente circola nella spira in senso antiorario e quindi genera un campo magnetico parallelo ed equiverso a $\vec{B}$ al quale corrisponde un flusso positivo (uscente).in grado di contrastare una diminuzione di flusso uscente,

Valore medio di i(t)

Per determinare il valore medio dell'intensità di corrente negli intervalli considerati è sufficiente calcolare il valore assoluto del rapporto $-\frac{1}{R}\frac{\Delta\emptyset(t)}{\Delta t}$= - $\frac{S}{R}\frac{\Delta B}{\Delta t}$-

In questo caso è preferibile prescindere dal segno che, come abbiamo visto, è associato al verso della corrente

Nel primo intervallo si ottiene il valore $-\frac{30\cdot 10^{-4}}{4\cdot 10^{-3}}\frac{-0{,}2\cdot 10^{-3}}{3\cdot 10^{-3}} = \quad 0{,}5\cdot 10^{-1}A$

Nel secondo intervallo si ottiene il valore $-\frac{30\cdot 10^{-4}}{4\cdot 10^{-3}}\frac{0{,}4\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^{-3}} = \quad -1{,}5\cdot 10^{-1}A$

Nel terzo intervallo si ottiene il valore $-\frac{30\cdot 10^{-4}}{4\cdot 10^{-3}}\frac{-0{,}2\cdot 10^{-3}}{5\cdot 10^{-3}} = \quad 0{,}3\cdot 10^{-1}$ A

Pertanto

$$i_1 = 0{,}5\cdot 10^{-1}A$$
$$i_2 = 1{,}5\cdot 10^{-1}A$$
$$i_3 = 0{,}3\cdot 10^{-1}A$$

COMMENTO

Il quesito, che mostra una forte analogia con un quesito e un problema delle due ultime simulazioni ministeriali, è degno di nota per il carattere interdisciplinare dei contenuti e per la formulazione

che ne privilegia l'aspetto concettuale; riesce a ben collegare e integrare due argomenti che compaiono in varie prove d'esame o simulazioni: la relazione che intercorre tra il grafico di una funzione e quello della sua derivata e il fenomeno dell'induzione elettromagnetica con particolare attenzione al significato della legge di Faraday -Neumann-Lenz.

La soluzione può essere affrontata su diversi livelli di approfondimento.