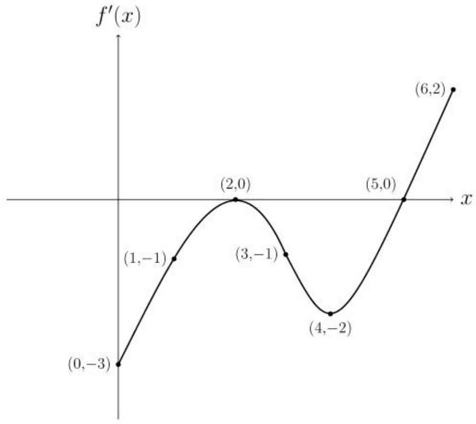
ESAMI DI STATO

SECONDA PROVA INDIRIZZO LICEO SCIENTIFICO

ESEMPIO 4 con la collaborazione di:

Lorenzo Meneghini (Problema 2), Francesco Daddi (quesiti 5 e 6) , Claudia Zampolini (quesito 1), Elisabetta Lorenzetti (quesito 8), Adriana Lanza e Emilio Ambrisi.

PROBLEMA 1



Della funzione f, definita per $0 \leq x \leq 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per $x = 2$ e $x = 4$. Si sa anche che $f(0) = 9$, $f(3) = 6$ e $f(5) = 2$.

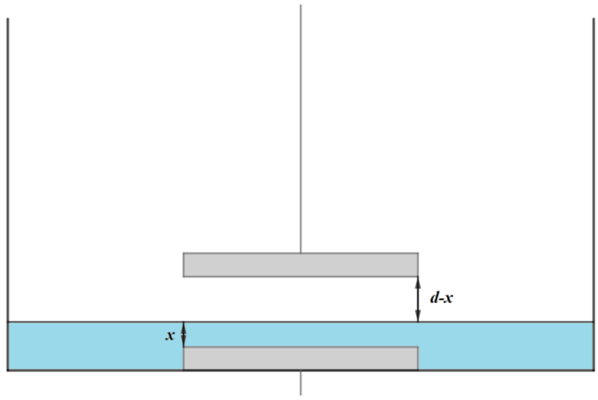
1. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di f motivando le risposte in modo esauriente.
2. Per quale valore di x la funzione f presenta il suo minimo assoluto? Sapendo che $\int_0^6 f'(t)dt = -5$ per quale valore di x la funzione f presenta il suo massimo assoluto?
3. Sulla base delle informazioni note, quale andamento potrebbe avere il grafico di f?
4. Sia g la funzione definita da $g(x) = xf(x)$. Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa $x = 3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano.

PROBLEMA 2

Più condensatori possono essere collegati tra loro per aumentare o diminuire la capacità complessivamente disponibile.

a) Chiarisci la differenza tra un collegamento in serie ed uno in parallelo di due condensatori di capacità, rispettivamente, C_1 e C_2 e determina la capacità C_{eq} del condensatore equivalente.

Una vasca a base quadrata di lato $L = 50\,cm$ contiene un condensatore piano (figura 1), le cui armature sono dei quadrati di lato $l = 20\,cm$ e distano $d = 1.2\,cm$ tra loro.



La vasca è parzialmente piena d'acqua $(\varepsilon_r = 80)$.

b) Spiega perché in queste condizioni il condensatore può essere paragonato ad una coppia di condensatori collegati in serie e trova la capacità equivalente del sistema in funzione di *x*.

Un rubinetto versa acqua nella vasca; la portata del rubinetto è di $1 \, {}^{L}\!/_{\min}$.

c) Se all'istante iniziale $t_0 = 0\,s$ l'acqua lambisce la superficie inferiore dell'armatura (cioè $x(0) = 0\,cm$), determina la legge con cui varia la capacità del condensatore in funzione del tempo. Quanto tempo impiega l'acqua a riempire per metà lo spazio tra le armature del condensatore? Quando vale la capacità C in tal caso?

Dopo 90 s il rubinetto viene chiuso ed il condensatore viene collegato ad un generatore $(\Delta V = 12V)$ mediante un cavo elettrico di resistenza $R = 10\Omega$.

d) Illustra la legge delle maglie e spiega perché, durante la fase di carica:

$$q' + \frac{q}{RC} = \frac{\Delta V}{R} \qquad (1)$$

e) La (1) è un'equazione differenziale a variabili separabili; integrala e determina dopo quanto tempo le armature del condensatore contengono il 95% del massima carica che può essere accumulata nel condensatore.

f) Utilizzando un opportuno sistema di riferimento, traccia il grafico della funzione $q = q(t)$ ottenuta al punto precedente utilizzando $\tau = RC$ come unità di misura per il tempo.

QUESTIONARIO

1. Calcolare il flusso del campo elettrico $\vec{E}(-4; 2; -2)$ attraverso una superficie piana di area 16 m^2 e vettore superficie parallelo ed equiverso al vettore $\vec{n}(1; 1; \sqrt{2})$.
2. Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \dots \dots P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?
3. Si dimostri che la curva di equazione $y = x^3 + ax + b$ ha uno ed un solo punto di flesso rispetto a cui è simmetrica
4. Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto, con molta probabilità, intorno al I secolo d.C.) consiste, assegnati due punti A e B situati dalla stessa parte rispetto ad un retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.
5. Un corpo viene lanciato da terra con velocità iniziale di modulo v_0. Si dimostri che la massima gittata si ottiene quando l'ampiezza dell'angolo di lancio è pari a 45°.
6. Si determini la massa di un corpo sferico di raggio R, sapendo che la densità ρ varia linearmente dal valore massimo ρ_0 nel centro fino al valore minimo ρ_1 in corrispondenza della superficie.
7. La "*zara*" è un gioco d'azzardo di origine araba che conobbe particolare fortuna in Italia in epoca medievale – ne parla anche Dante nella *Divina Commedia* - e si giocava con tre dadi. Si confronti la probabilità di ottenere in un lancio la somma 9 con quella di ottenere la somma 10. (proposto 2014, PNI)

8. Si provi che

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{k}{2^k}$$

si può scrivere: $2 - \frac{a}{2^b}$ con $a=51$ e $b=99$