ESEMPIO DI SECONDA PROVA – GIUGNO 2019

PROBLEMA 1[i]
Data la funzione

$$f(x) = \frac{3 - x}{x^2 + a} \quad con\ a \in R$$

1. Si determini, per quali valori di a, f(x) è continua su tutto R e, per quali valori di a, ammette punti di discontinuità, riconoscendone il tipo.
2. Successivamente si determinino il luogo geometrico Γ_1 dei punti di massimo e il luogo Γ_2 dei punti di minimo relativi al variare del parametro a, e si verifichi che Γ_1 e Γ_2 sono due rami della stessa curva Γ
3. Dopo aver dimostrato che Γ rappresenta una funzione invertibile, g(x), si dimostri che essa è simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante e se ne tracci il grafico.
4. Si tracci infine il grafico del modulo della funzione inversa di g(x).

PROBLEMA 2[ii]
Nella teoria della relatività ristretta una particella avente massa a riposo m_0 e velocità v ha un'energia cinetica E_c data dall'espressione:

$$E_c = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \qquad (*)$$

dove $c \cong 3 \cdot 10^8 m/sec$ è la velocità della luce nel vuoto e $m_0 c^2$ è l'energia a riposo della particella.

1. Qual è la velocità di una particella che ha un'energia cinetica uguale a 9 volte la sua energia a riposo?
2. Dall'espressione (*) si ricavi v^2 in funzione di E_c, verificando che risulta:

   $$v^2 = c^2 \frac{E_c^2 + 2m_0 c^2 E_c}{(E_c + m_0 c^2)^2}$$

   Si studi la funzione $v^2 = f(E_c)$ e se ne tracci un grafico qualitativo.
3. Si scriva l'equazione della tangente al grafico nell'origine e la si confronti con l'espressione classica di v^2 in funzione di E_c.
4. Il grafico di cui sopra si può ottenere anche sperimentalmente tramite gli acceleratori di particelle: quali conclusioni si possono trarre da un suo attento esame?

QUESTIONARIO

1. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto (1, 2). [iii]
2. Si determini il valore di una d.d.p. V che, applicata ad una resistenza R=80Ω, immersa in un litro di acqua inizialmente a 10°C, porta la temperatura dell'acqua a 80°C in 30 minuti.

3. Nell'osservazione di un fenomeno, al fine di poterlo descrivere correttamente, può accadere di dover valutare l'accordo tra i valori sperimentali delle grandezze fisiche in relazione alle incertezze di misura. Si illustri la questione.
4. Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.[iv]
5. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64[a] casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore. [v]
6. Un corpo sta viaggiando alla velocità $v = 30\frac{m}{s}$ quando frena con decelerazione di modulo te^{2t}. Si determini la sua legge oraria $x(t)$, sapendo che all'istante iniziale $t = 0s$ il corpo si trova in $x = 0.$ [vi]
7. Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale?

   A) $\cos(\sin(x^2+1))$ B) $\text{sen}(\cos(x^2+1))$ C) $\text{sen}(\ln(x^2+1))$ D) $\cos(\ln(x^2+1))$

   Si giustifichi la risposta.[vii]

8. In un'urna ci sono palline, di cui 2 rosse e le restanti bianche. Qual è la probabilità che, estraendone 2 senza reinserimento, siano entrambe rosse? Qual è il minimo valore di n per cui tale probabilità è minore di 10^{-4}? Come cambiano i risultati se l'estrazione avviene con reinserimento?[viii]

NOTE

Durata della prova: cinque ore

---

[i] Il problema è proposto dalla prof.ssa Serenella Iacino del Liceo Newton di Roma

[ii] Il problema è proposto dall'isp. Domenico Bruno

[iii] Anno 2007

[iv] Anno, 2012, Pni

[v] Anno 2006

[vi] Proposto da Francesco Daddi docente liceo di Volterra

[vii] Anno 2012, ord.

[viii] Proposto da Francesco Daddi, docente liceo di Volterra