Quesito 3. Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2019}}{2^x} = 0$.

Soluzione.

Il teorema di De L'Hôpital afferma che, se $f(x)$, $g(x)$ sono due funzioni derivabili in intorno I di x_0, eccetto al più x_0, tali che

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ oppure $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$
- $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, con $x \neq x_0$
- esiste $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

allora esiste anche $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e risulta: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Il teorema vale anche se $x \to \pm\infty$.

Nel nostro caso specifico abbiamo un limite della forma $\frac{\infty}{\infty}$ abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2019}}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2019\, x^{2018}}{2^x \cdot \ln 2}$$

che risulta di nuovo della forma $\frac{\infty}{\infty}$; applicando ripetutamente la regola si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2019\, x^{2018}}{2^x \cdot \ln 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2019 \cdot 2018 \cdot x^{2017}}{2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln 2} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{2019\,!}{2^x \cdot (\ln 2)^{2019}} = 0\,.$$

Proponiamo ora un procedimento alternativo. Il limite può essere riscritto nella forma equivalente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2019}}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2019}}{(2^{x/2019})^{2019}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2^{x/2019}}\right)^{2019}$$

applicando la regola per il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2^{x/2019}}$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2^{x/2019}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^{x/2019} \cdot \dfrac{\ln 2}{2019}} = 0$$

per cui

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2019}}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2^{x/2019}}\right)^{2019} = 0^{2019} = 0\,.$$

Quesito 4. Nel piano riferito a coordinate cartesiane $(x; y)$ si dica qual è l'insieme dei punti per i quali risulta: $y^2 - x^3 > 0$. [Ordinaria PNI 2008]

Soluzione. Analizziamo prima di tutto il caso $x < 0$. Essendo $x^3 < 0$, $y^2 \geq 0$ risulta

$$y^2 - x^3 > 0 \quad \text{per ogni } y \in R$$

quindi tutti i punti $(x; y)$ del semipiano $x < 0$ soddisfano la disequazione $y^2 - x^3 > 0$.

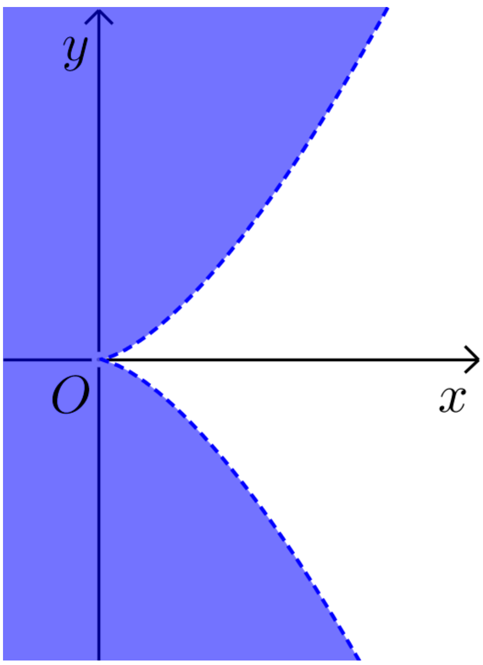
Vediamo ora $x = 0$. La disequazione in questo caso si riduce a $y^2 > 0$, che è risolta per $y \neq 0$. Restringendo la ricerca all'asse delle ordinate, tutti i punti, eccetto l'origine, risolvono la disequazione $y^2 - x^3 > 0$.

Studiamo infine il caso $x > 0$. La disequazione è risolta da

$$y^2 - x^3 > 0 \quad \rightarrow \quad y^2 > x^3 \quad \rightarrow \quad y < -x^{\frac{3}{2}} \ \cup \ y > x^{\frac{3}{2}}$$

che possiamo riscrivere anche nella forma equivalente $y < -x\sqrt{x} \ \cup \ y > x\sqrt{x}$.

Il grafico seguente riassume l'analisi fatta nel piano cartesiano. L'origine non fa parte dell'insieme.



Quesito 5. Due cariche elettriche $Q_1 > 0$ e $Q_2 < 0$ sono poste negli estremi di un segmento di lunghezza d. Qual è il punto del segmento in cui il campo elettrico ha modulo minimo?

Soluzione. Si osserva che, dal momento che i due campi elettrici in un punto P distante x (con $0 < x < d$) dalla carica Q_1 hanno la medesima direzione e lo stesso verso, il modulo E del campo elettrico è pari a

$$E = E_1 + E_2 = k\frac{Q_1}{x^2} + k\frac{|Q_2|}{(d-x)^2} = k\left(\frac{Q_1}{x^2} + \frac{|Q_2|}{(d-x)^2}\right).$$

Conviene minimizzare la funzione

$$f(x)=\frac{Q_1}{x^2}+\frac{|Q_2|}{(d-x)^2}$$

sull'intervallo $(0,d)$. La derivata prima

$$f'(x)=-\frac{2Q_1}{x^3}+\frac{2\,|Q_2|}{(d-x)^3}$$

si annulla quando

$$-\frac{2Q_1}{x^3}+\frac{2\,|Q_2|}{(d-x)^3}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{x^3}{(d-x)^3}=\frac{Q_1}{|Q_2|} \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{x}{d-x}=\sqrt[3]{\frac{Q_1}{|Q_2|}} \quad\rightarrow\quad x_0=\frac{\sqrt[3]{\frac{Q_1}{|Q_2|}}}{1+\sqrt[3]{\frac{Q_1}{|Q_2|}}}d \ ;$$

si noti che $x_0\in(0,d)$ in quanto la frazione che moltiplica d è minore di 1 (il denominatore è maggiore del numeratore). Osservando che

$$f''(x)=\frac{6Q_1}{x^4}+\frac{6\,|Q_2|}{(d-x)^4}>0$$

deduciamo che $x_0=\frac{\sqrt[3]{\frac{Q_1}{|Q_2|}}}{1+\sqrt[3]{\frac{Q_1}{|Q_2|}}}d$ è effettivamente il punto di minimo richiesto. Infatti, essendo funzione $f(x)\in C^2(0,d)$, per ogni $x\in(0,d)$ con $x\neq x_0$, esiste ξ tale che $|\xi-x_0|\le|x-x_0|$ per cui risulta

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot(x-x_0)^2 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad f(x)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot(x-x_0)^2>f(x_0)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che x_0 è un punto stazionario per la funzione f (cioè $f'(x_0)=0$), $(x-x_0)^2>0$ in quanto $x\neq x_0$ e dove abbiamo tenuto conto che $f''(\xi)>0$ essendo $f''(x)>0$ sull'intervallo $(0,d)$.

Quesito 7. La popolazione di una colonia di batteri è di 4000 batteri al tempo t = 0 e di 6500 al tempo t=3. Si suppone che la crescita della popolazione sia esponenziale, rappresentabile, cioè, con un'equazione del tipo $\frac{dy}{dt}=ky$, dove k è una costante e y la popolazione di batteri al tempo t. Al tempo t=10, la popolazione supererà i 20000 batteri?

<u>**Soluzione**</u>. Risolviamo l'equazione differenziale a variabili separabili:

$$\frac{dy}{dt} = k\, y \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = k\, dt \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int k\, dt \quad \rightarrow$$

$$\ln|y| = k\, t + C \quad \rightarrow \quad |y| = e^{kt+C} = e^{kt} \cdot e^{C}$$

essendo $y > 0$ e ponendo $e^C = b$ risulta $y = be^{kt}$.

Sfruttando le condizioni al tempo $t = 0$ e $t = 3$ si ha

$$\begin{cases} 4000 = b \cdot e^{k \cdot 0} \\ 6500 = b \cdot e^{k \cdot 3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 4000 \\ 6500 = 4000 \cdot e^{3k} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 4000 \\ k = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{13}{8}\right) \end{cases}.$$

Al tempo $t = 10$ si ha

$$y = 4000\, e^{k \cdot 10} = 4000\, e^{\frac{1}{3}\ln\left(\frac{13}{8}\right) \cdot 10} \approx 20179 > 20000.$$