Mathesis
Società italiana di scienze
matematiche e fisiche
fondata nel 1895

La Probabilità nella Seconda Prova di Matematica degli Esami di Stato

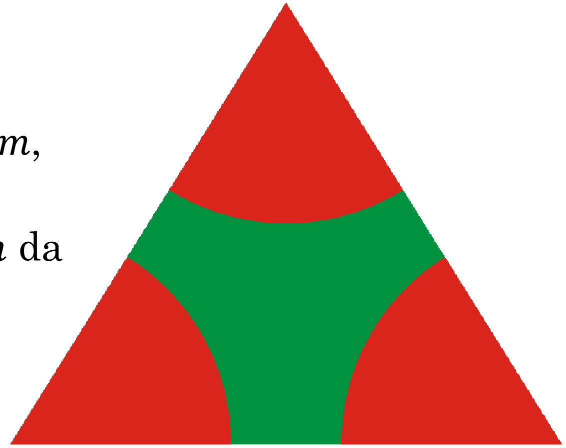
Nicola Fusco
Liceo Scientifico "A. Scacchi", Bari

Napoli, 17-20 Luglio 2018 Scuola Estiva di Matematica per i Docenti della scuola secondaria di secondo grado

Motivazioni

- Problemi di Probabilità stanno guadagnando sempre più spazio nell'ambito della seconda prova del Liceo Scientifico.
- Fin dall'esordio del nuovo ordinamento (2015), in tutte le tracce dell'indirizzo di ordinamento sono stati presenti almeno due quesiti di probabilità.
- Dopo un esordio nei problemi in sordina nella sessione suppletiva del 2017 (un intero problema dedicato alla probabilità), quest'anno entrambi i problemi contenevano punti dedicati espressamente a questa branca della Matematica.

Sessione Ordinaria 2015 Quesito 3-1

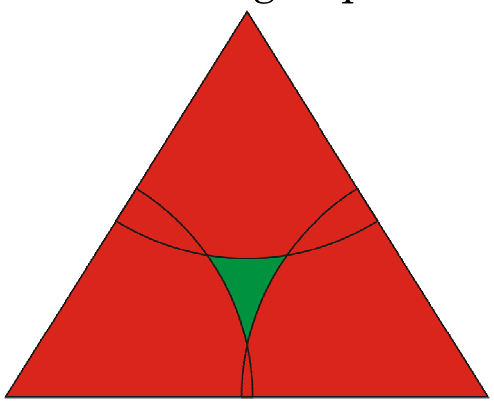


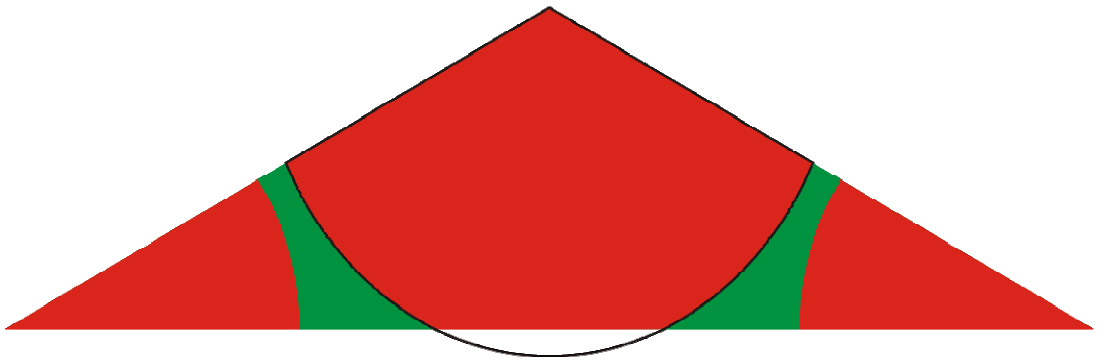
- «I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, $5cm$, $5cm$ e $6cm$. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di $2cm$ da tutti e tre i vertici del triangolo?»
- ARGOMENTI: paradosso di Benford, formula di Leibniz generalizzata al continuo.
- Da notare l'analogia di questo quesito con il punto 3 del problema 2 della sessione ordinaria del 2018.
- La probabilità richiesta è il rapporto tra l'area verde ($12cm^2 - 2\pi cm^2$) e l'area totale del triangolo ($12cm^2$), cioè $\approx 47.6\%$. La soluzione è abbastanza semplice grazie al fatto che i tre settori circolari che individuano le zone «proibite» ricostituiscono un semicerchio.
- Tuttavia questo problema pone una serie di questioni su cui è interessante riflettere.

SESSIONE ORDINARIA 2015 QUESITO 3-2

SEMPLIFICAZIONE GEOMETRICA

- Innanzitutto il problema si risolve facilmente grazie al fatto che i tre settori circolari ricompongono una semi circonferenza.
- Ma questo non è vero per qualunque scelta della distanza dai vertici.
- Se l'altezza del triangolo è minore di tale distanza o se la distanza è maggiore della metà di un lato, il calcolo dell'area esclusa si complica molto.
- È una caratteristica comune a molti problemi di probabilità: un solo dettaglio può cambiare concettualmente l'intero problema.

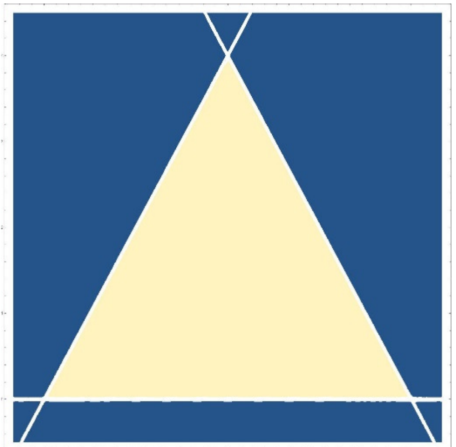




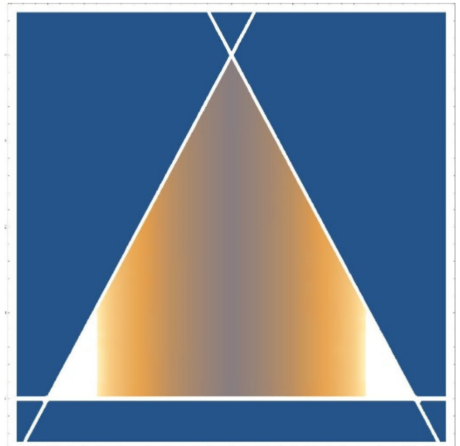
Sessione Ordinaria 2015
Quesito 3-2

Paradosso di Benford: che significa «scegliere a caso»?

Uniforme sul triangolo



Uniforme sulla base e poi in verticale



Uniforme sull'altezza e poi in orizzontale

Il colore è più chiaro in corrispondenza dei valori di probabilità più alti (blu=0)

L'espressione «a caso» non ha senso senza ulteriori specificazioni: è necessario definire la distribuzione esplicitamente o almeno come algoritmo di scelta.

Sessione Ordinaria 2015 Quesito 3-4

Formula di Leibniz

- La probabilità richiesta si calcola generalizzando la formula di Leibniz $\left[P_A = \frac{N_A}{N_{tot}}\right]$ ad insiemi continui di eventi.
- Tuttavia è opportuno non farsi sviare dal fatto che nella maggioranza di questi problemi la probabilità è un rapporto tra aree. La generalizzazione va presentata come rapporto tra «misure», omogenee tra loro $\left[P_A = \frac{\mu(A)}{\mu(U)}\right]$, che riguardano gli insiemi di eventi, per evitare che gli alunni possano trovarsi in difficoltà nell'applicarla in generale.
- Si veda questo proposito il problema 1 della sessione ordinaria 2018: la probabilità richiesta va calcolata come un rapporto tra lunghezze di segmenti.

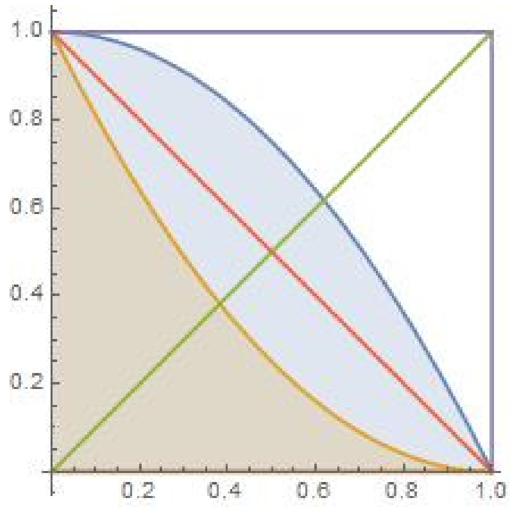
Sessione Ordinaria 2018 Problema 1 punto 4-1

- «Sono proposti due diversi disegni, derivanti dalle funzioni $a_n(x) = 1 - x^n$ e $b_n(x) = (1 - x)^n$, con $x \in [0,1]$, con n intero positivo. [...] Il cliente ordina 5000 mattonelle a_2 e 5000 b_2. La verniciatura è effettuata da un braccio meccanico che, dopo aver depositato il colore, sorvola la mattonella lungo la diagonale. Durante la produzione delle 10.000 mattonelle, con una probabilità del 20% il braccio meccanico lascia cadere una goccia di colore in un punto a caso lungo la diagonale, macchiando così la mattonella appena prodotta.

  Fornisci una stima motivata del numero di mattonelle che, avendo una macchia nella parte bianca, risultano danneggiate al termine del ciclo di produzione.»
- ARGOMENTI: formula di Leibniz generalizzata al continuo ***applicata ad una lunghezza***, probabilità condizionata, uso delle simmetrie del grafico per semplificare il calcoli.

Sessione Ordinaria 2018 Problema 1 punto 4-2

- Il problema è presentato come realistico, ma non ci si accorge che nessun dispositivo di colorazione sarebbe mai progettato in modo da sorvolare la parte bianca, proprio per azzerare le macchie.
- Il problema non specifica qual è la diagonale.
- La diagonale rossa è interna alla zona colorata per le a e esterna per le b. In tal caso quindi solo le b, nella misura di un quinto, sono macchiate, quindi abbiamo 1000 mattonelle macchiate.
- Stesso risultato si ha per la diagonale verde. Una mattonella viene macchiata se la goccia cade nella parte bianca, cioè se cade nel segmento che va da (x_{ab}, x_{ab}), intersezione tra curva e diagonale, a (1,1). La lunghezza del segmento è $\sqrt{2}(1 - x_{ab})$.



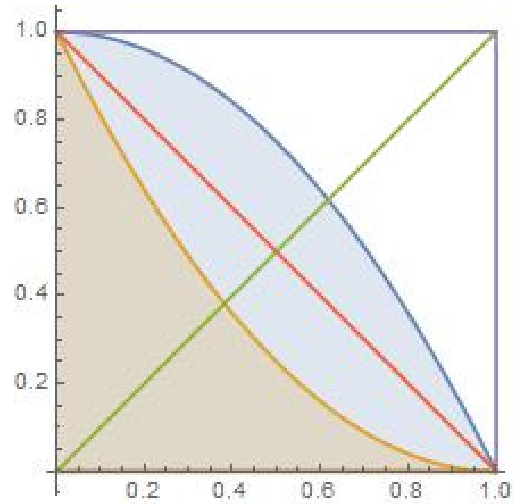
In blu $a_2(x)$, in arancio $b_2(x)$.

SESSIONE ORDINARIA 2018 PROBLEMA 1 PUNTO 4-3

- La probabilità condizionata $P(M|C)$ che, una volta caduta, la goccia macchi la mattonella è quindi $1 - x_{ab}$ (rapporto tra segmento di diagonale bianco e l'intera diagonale).
- La probabilità $P(C)$ che una goccia cada è 20%.
- La probabilità congiunta che la goccia cada e macchi la mattonella è

$$P(M \cap C) = P(M|C)P(C) = \frac{(1 - x_{ab})}{5}$$

- Si macchiano quindi $1000(1 - x_{ab})$ mattonelle per ogni tipo, in totale $1000(2 - x_a - x_b)$.



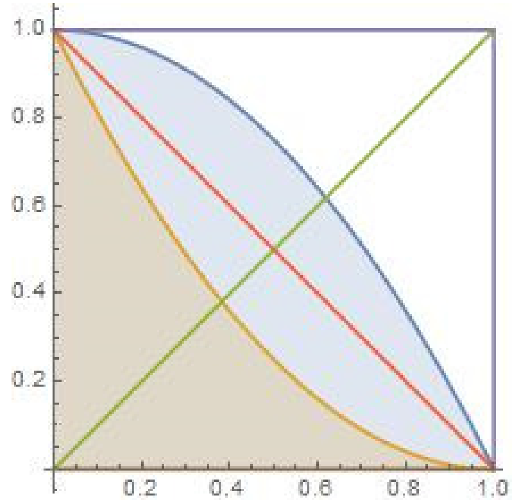
In blu $a_2(x)$, in arancio $b_2(x)$.

Sessione Ordinaria 2018 Problema 1 punto 4-4

- $b_n(x) = -a_n(1-x) + 1$ ($a_n(x)$ è pari).
- Formalmente le equazioni di intersezione

$$\begin{cases} x_a = a_n(x_a) \\ 1 - x_b = a_n(1 - x_b) \end{cases}$$ sono identiche.

- Nell'intervallo di interesse la soluzione è unica: i due membri destri devono essere uguali, per cui $x_a = 1 - x_b \to x_a + x_b = 1$.
- Quindi il numero di mattonelle macchiate è, mediamente, $1000(2-1) = 1000$.



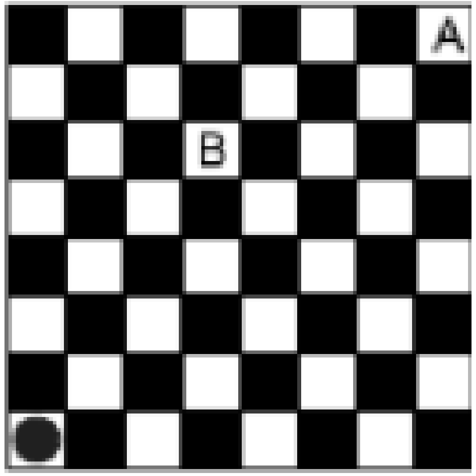
In blu $a_2(x)$, in arancio $b_2(x)$.

Calcolo Combinatorio

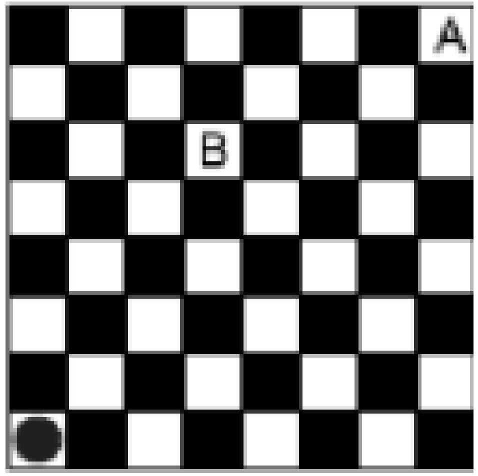
- Sequenze libere di n oggetti in k posti (ognuno dei k posti è occupato da uno di n oggetti senza limiti di ripetizione): n^k.
- Permutazioni di n oggetti: $n!$.
- Disposizioni di n oggetti in k posti (sequenze di k oggetti provenienti da un insieme di $n \geq k$): $\frac{n!}{(n-k)!}$.
- Combinazioni di n oggetti in k posti (gruppi di k oggetti provenienti da un insieme di $n \geq k$): $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- L'ultima formula dà anche il numero di sequenze vincolate dicotomiche (sequenze di n posti con esattamente k oggetti di un tipo e $n-k$ di un altro).

SESSIONE ORDINARIA 2016 QUESITO 7-1

- «Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposto A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?»
- ARGOMENTI: calcolo combinatorio, formula di Leibniz.



Sessione Ordinaria 2016
Quesito 7-2



- Calcoliamo il numero di percorsi che portano ad A e il numero di questi che passano per B.
- Ogni possibile percorso è composto da 7 passi verticali e 7 orizzontali: il numero di percorsi è il numero di modi in cui i 7 passi orizzontali si distribuiscono nella sequenza di 14 passi:

$$\binom{14}{7} = 3432.$$

- Un percorso che passi per B deve essere composto da una sequenza di 8 passi di cui 3 orizzontali e seguita da una sequenza di 6 passi di cui 4 orizzontali, quindi ci sono $\binom{8}{3}\binom{6}{4} = 840$ percorsi che passano per B.
- La probabilità richiesta è quindi $P = \frac{840}{3432} \approx 24.5\%$

Sessione Straordinaria 2016 Quesito 5-1

- «Un'azienda produce, in due capannoni vicini, scatole da imballaggio. Nel primo capannone si producono 600 scatole al giorno delle quali il 3% difettose, mentre nel secondo capannone se ne producono 400 con il 2% di pezzi difettosi. La produzione viene immagazzinata in un unico capannone dove, nel corso di un controllo casuale sulla produzione di una giornata, si trova una scatola difettosa. Qual è la probabilità che la scatola provenga dal secondo capannone?»
- ARGOMENTI: teorema di Bayes

Sessione Straordinaria 2016 Quesito 5-2

- Il teorema di Bayes permette di invertire le probabilità condizionate: calcolare $P(E_k|A)$ (probabilità che accada l'evento E_k dando per certo l'avverarsi di A) a partire dalle varie $P(A|E_i)$ (probabilità che accada l'evento A dando per certo l'avverarsi di E_i):

$$P(E_k|A) = \frac{P(A|E_k)P(E_k)}{\sum_i P(A|E_i)P(E_i)}$$

- In questo caso $P(D|I) = \frac{3}{100}$, $P(I) = \frac{3}{5}$, $P(D|II) = \frac{2}{100}$, $P(II) = \frac{2}{5}$. Quindi

$$P(II|D) = \frac{P(D|II)P(II)}{P(D|I)P(I) + P(D|II)P(II)} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3 + 2 \cdot 2} \approx 30.8\%$$

Variabili Casuali e Distribuzioni-1

- Una VC è una grandezza che può assumere diversi valori (discreti in S o continui in $[m, M]$) in modo casuale.
- Ad ogni VC X è associata una funzione di probabilità $F_X(x) = P(X \leq x)$ da cui si può ricavare la sua distribuzione:
- se X è discreta:

$$f_X(x) = P(X = x) = F_X(x) - F_X(y) \; [y = \max\{t \in S / t < x\}]$$

- se X è continua ($f_X(x)$ è anche detta densità di probabilità)

$$f_X(x) = F_X{}'(x) \Rightarrow \int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x = P(a \leq X \leq b)[f_X(x)\mathrm{d}x = P(x \leq X \leq x + \mathrm{d}x)]$$

- Viceversa

$$F_X(x) = \sum_{t \leq x} f_X(t) = \int_m^x f_X(t)\mathrm{d}t$$

- Le distribuzioni sono normalizzate

$$\sum_{t \in S} f_X(t) = \int_m^M f_X(t)\mathrm{d}t = 1$$

VARIABILI CASUALI E DISTRIBUZIONI-2

- Valor medio (o atteso) di $G(X)$:

$$\langle G\rangle = \sum_{t\in S} g(t) f_X(t) = \int_m^M g(t) f_X(t)\mathrm{d}t$$

- Varianza (quadrato della deviazione standard)

$$\sigma_X^2 = \langle (X - \langle X\rangle)^2\rangle = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$$

- Mediana di X (valore che equisuddivide le probabilità)

$$\sum_{t<Med_X} f_X(t) \le \frac{1}{2} \wedge \sum_{t>Med_X} f_X(t) \le \frac{1}{2}; \int_m^{Med_X} f_X(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

- Moda (valore più probabile): punto di massimo di $f_X(x)$

SESSIONE SUPPLETIVA 2017 PROBLEMA 1

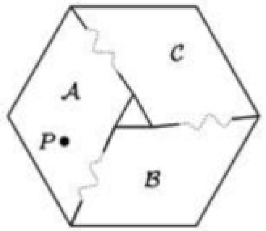


Figura 1

- «Un gioco si svolge nel tabellone in fig.1. I settori confinano attraverso tre varchi (i tratti ondulati). Ad ogni partita, per ogni varco si stabilisce se esso sarà aperto (con probabilità x) o chiuso. I tre sorteggi sono tra loro indipendenti. Una pedina può spostarsi attraverso i varchi aperti, quindi P, inizialmente in A, può raggiungere o tutti i settori, oppure solo 2 (A e un altro), oppure 1 solo (non esce da A). Indichiamo con $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ le probabilità che i settori raggiungibili siano 1, 2 o 3.
  1) Dimostra che $p_1(x) = (1-x)^2$, $p_2(x) = 2x(1-x)^2$, $p_3(x) = x^3 + 3x^2(1-x)$ e disegna i grafici per $x \in [0,1]$.
  2) È vero che, $\forall x \in [0,1]$, almeno una delle p_1, p_2, p_3 è maggiore di 0.3 e almeno una è minore di 0.4?
  3) Prova che esiste un unico $x_0 \in [0,1]$ per cui $p_1(x_0) = p_3(x_0)$ e stabilisci se $x_0 > \frac{1}{2}$. Discuti, al variare di $x \in [0,1]$, quali delle tre possibilità indicate sono più o meno probabili.
  4) Stabilisci i valori medi delle funzioni $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$. Nel caso $x = \frac{1}{2}$ quali sono il valore medio e la varianza della variabile casuale che fornisce il numero di settori raggiungibili da P?»
- ARGOMENTI: probabilità congiunta, distribuzioni, «finte» distribuzioni, probabilità complementare, analisi grafica, trabocchetti concettuali.

Sessione Suppletiva 2017 Problema 1, punto 1)

- $p_1(x)$ è congiunta (AB e AC entrambi chiusi, come è BC è ininfluente):

$$p_1(x) = (1-x)^2$$

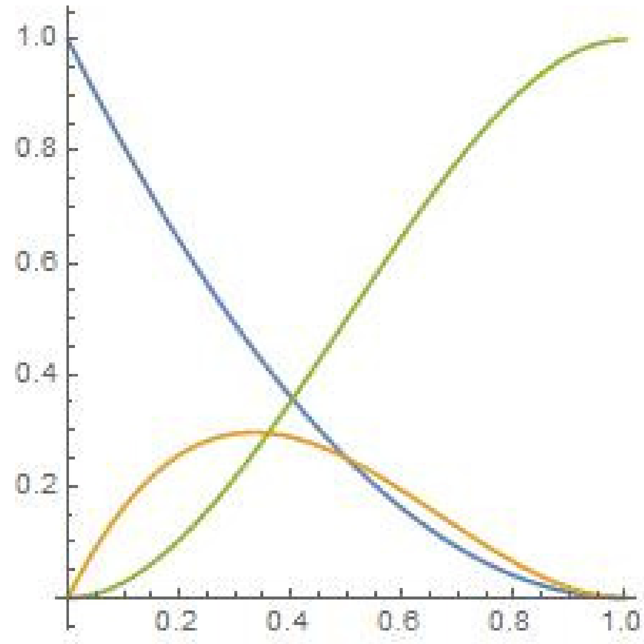
- $p_2(x)$ è disgiunta di 2 eventi esclusivi e equiprobabili, ciascuno congiunzione di 3 eventi (BC e un altro varco chiuso, il terzo aperto):

$$p_2(x) = 2x(1-x)^2$$

- $p_3(x)$ è disgiunta di 4 eventi esclusivi di cui 3 equiprobabili (3 varchi aperti *oppure* 2 varchi aperti e 1 chiuso):

$$p_3(x) = x^3 + 3x^2(1-x)$$

- Non sono distribuzioni! x non è una VC.



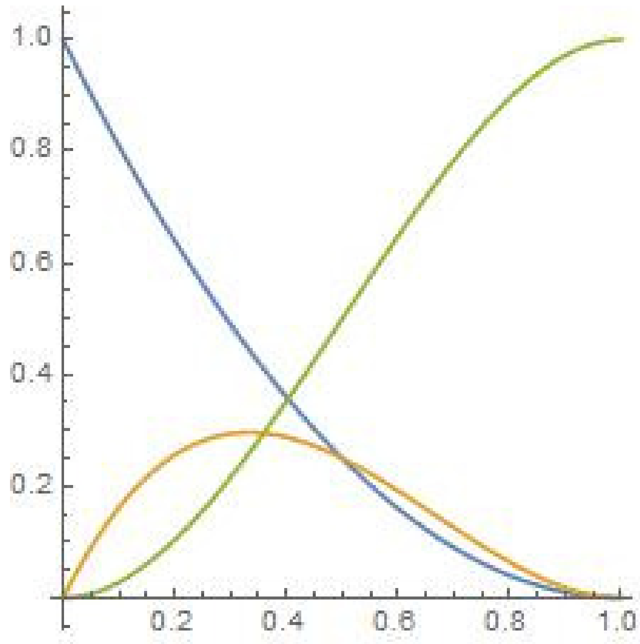
In blu $p_1(x)$, in arancio $p_2(x)$, in verde $p_3(x)$.

Sessione Suppletiva 2017 Problema 1, punto 2)

- Questo punto è in realtà un «trabocchetto»: conoscere le espressioni analitiche di $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ può indurre a risolvere le disequazioni $p_1(x) > 0.3$, $p_2(x) > 0.3$, $p_3(x) > 0.3$ e $p_1(x) < 0.4$, $p_2(x) < 0.4$, $p_3(x) < 0.4$ e analizzarne le soluzioni.
- In realtà quanto richiesto di dimostrare vale in generale ogni volta che abbiamo 3 eventi completi mutualmente esclusivi.
- $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, quindi non possono essere tutte < 0.3 (la somma sarebbe < 0.9) né possono essere tutte > 0.4 (la somma sarebbe > 1.2)

Sessione Suppletiva 2017 Problema 1, punto 3)

- La prima richiesta è evidente dal grafico e dal fatto che $p_1(x)$ e $p_3(x)$ sono continue e si scambiano i valori agli estremi del dominio comune (T. di Bolzano).
- Per stabilire la posizione di x_0 è sufficiente calcolare $p_1\left(\frac{1}{2}\right)$ e $p_3\left(\frac{1}{2}\right)$: $p_3\left(\frac{1}{2}\right) > p_1\left(\frac{1}{2}\right)$ quindi l'intersezione si trova a sinistra di $x = \frac{1}{2}$.
- Per la discussione sull'ordinamento delle varie probabilità si può fare affidamento al grafico dopo aver determinato i tre punti di intersezione ($x_{23} = \frac{7-\sqrt{17}}{8}$, $x_{13} \approx 0.4$, $x_{12} = \frac{1}{2}$).



In blu $p_1(x)$, in arancio $p_2(x)$, in verde $p_3(x)$.

Sessione Suppletiva 2017 Problema 1, punto 4)

- Come già detto, $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ non sono singolarmente delle distribuzioni di probabilità, pertanto le prime medie richieste vanno calcolate con la definizione di media di una funzione su un intervallo:

$$\langle p_1\rangle = \frac{1}{1}\int_0^1 p_1(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}, \langle p_2\rangle = \frac{1}{1}\int_0^1 p_2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}, \langle p_3\rangle = \frac{1}{1}\int_0^1 p_3(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

- Fissato il valore di x, i tre valori $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ rappresentano insieme la distribuzione di probabilità della VC S che quantifica il numero di settori raggiungibili.
- Per $x = \frac{1}{2}$, $P_S(s) = \begin{cases} p_1(1/2) = 1/4 & s = 1 \\ p_2(1/2) = 1/4 & s = 2 \\ p_3(1/2) = 1/2 & s = 3 \end{cases}$
- $\langle S\rangle = 1\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{2} = \frac{9}{4}$ e $\sigma_S^2 = \langle S^2\rangle - \langle S\rangle^2 = 1\frac{1}{4} + 4\frac{1}{4} + 9\frac{1}{2} - \frac{81}{16} = \frac{11}{16}$.

DISTRIBUZIONI NOTEVOLI

- Binomiale (probabilità che in n eventi ci siano k eventi di un tipo di probabilità singola p): $B_K(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- $\langle K \rangle = np$, $\sigma_K = \sqrt{np(1-p)}$ (per le frequenze k/n, la media è p e le fluttuazioni vanno come $1/\sqrt{n}$)
- Poissoniana (probabilità che in un intervallo denso di eventi ci siano k eventi di un tipo che mediamente accadono λ volte in quell'intervallo): $P_K(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
- $\langle K \rangle = \lambda$, $\sigma_K = \sqrt{\lambda}$
- Le due distribuzioni convergono per valori molto grandi di n e molto piccoli di p ($P_K(k;\lambda)$ è ottenuta come limite per $n \to \infty$ della $B_K(k;n,p)$ dopo aver posto $p = \lambda/n$).

Prima Simulazione 2015 Quesito 10

- «In una stazione ferroviaria, fra le 8 e le 10 del mattino, arrivano in media ogni 20 minuti due treni. Determinare la probabilità che in 20 minuti: a) non arrivi alcun treno; b) ne arrivi uno solo; c) ne arrivino al massimo quattro.»
- Si deve usare la poissoniana perché non c'è un limite al numero di treni che possono giungere in stazione in un qualunque intervallo di tempo.
- La richiesta è calcolare $P_K(k;2)$ con $k = 0$, $k = 1$ e la somma con k da 0 a 4.

Sessione Ordinaria 2018 Quesito 8

- «In un gioco ogni partita vale 1 punto e vince chi ottiene 10 punti. Se due giocatori hanno la stessa probabilità di vincere in ogni partita, qual è la probabilità che uno dei due vinca in non più di 12 partite?»
- Caso da binomiale con $p = 1/2$, ma la soluzione è non banale.
- Si chiede una probabilità disgiunta di eventi indipendenti:

$$P(A = 10 - 0) + P(B = 10 - 1) + P(C = 10 - 2).$$

- Non è specificato chi vinca: le probabilità per un dato g. vanno raddoppiate.
- Le sequenze hanno l'ultimo posto fissato, perché deve essere un p. del vincitore: $P(A) = 2B_K\left(10; 10, \frac{1}{2}\right)$, ma $P(B) = 2\frac{1}{2}B_K\left(9; 10, \frac{1}{2}\right)$ e $P(C) = 2\frac{1}{2}B_K\left(9; 11, \frac{1}{2}\right)$ (probabilità che un g. vinca 9 p. tra i primi 10 o 11 e l'ultimo).

PECULIARITÀ DEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

- Tranne per rare situazioni già completamente formalizzate, in generale i quesiti di probabilità richiedono sempre una traduzione da dati non formalizzati, il che significa che anche per i quesiti più semplici è necessario essere abituati a descrivere il ragionamento al di là di calcoli e disegni.
- I problemi di probabilità sono quelli che meno presentano schemi ricorrenti e per i quali meno esistono (o forse non esistono affatto) «problemi tipo», per cui l'esercitazione, pur necessaria, non deve essere mai vissuta dagli alunni come semplice memorizzazione di ricette.

RINGRAZIAMENTI

- La sezione Mathesis di Napoli e la Prof.ssa Del Bene per l'opportunità di confrontarmi con voi su questa tematica;
- Il Prof. Sicolo, Presidente della sezione Mathesis di Bari, per avermi coinvolto in questa iniziativa;
- La Prof.ssa Iacino del LS "Newton" di Roma per la proficua consulenza su questa presentazione;
- Voi tutti per la cortese attenzione.