Probabilità all’Esame di Stato del Liceo Scientifico, Nuovo Ordinamento

2015 Seconda Simulazione

5. Per progettare un sito web è necessario generare dei codici unici di accesso. Si vogliono utilizzare, a tale scopo, due lettere maiuscole dell'alfabeto inglese seguite da una serie di numeri compresi tra 0 e 9. Tutti i codici di accesso dovranno avere lo stesso numero di cifre ed è ammessa la ripetizione di lettere e numeri. Qual è il numero minimo di cifre da impostare in modo da riuscire a generare almeno 5 milioni di codici di accesso diversi? Giustificare la risposta. (CALCOLO COMBINATORIO)

10. In una stazione ferroviaria, fra le 8 e le 10 del mattino, arrivano in media ogni 20 minuti due treni. Determinare la probabilità che in 20 minuti: a) non arrivi alcun treno; b) ne arrivi uno solo; c) ne arrivino al massimo quattro. (DISTRIBUZIONE DI POISSON)

2015 Sessione Ordinaria

3. Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa “al più” due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa “almeno” due volte? (DISTRIBUZIONE BINOMIALE, PROBABILITA’ COMPLEMENTARE)

8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 5cm, 5cm e 6cm. Preso a caso un punto P all’interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo? (PARADOSSO DI BENFORD: CHE SIGNIFICA PUNTO PRESO A CASO? FORMULA DI LEIBNIZ GENERALIZZATA AL CONTINUO)

2015 Sessione Europea

2. Da un’analisi di mercato è risultato che il 32% della popolazione usa il prodotto A. Scelto a caso un gruppo di 12 persone, determinare il valore medio, la varianza e la deviazione standard della variabile casuale X = «numero di persone che usa il prodotto A». Calcolare inoltre la probabilità che, all’interno del gruppo scelto, il numero di persone che usano detto prodotto sia compreso tra 2 e 5, estremi inclusi. (DISTRIBUZIONE BINOMIALE)

2015 Sessione Suppletiva

3. Vengono lanciati due dadi. Dei due punteggi, viene considerato il maggiore; se sono uguali, viene considerato il punteggio comune dei due dati. Detto X il punteggio registrato, riportare in una tabella la distribuzione di probabilità di X e mostrare che $p(X = 3) = \frac{5}{36}$. Calcolare inoltre la media e la varianza di X. (DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA’ VARIABILI DISCRETE)

7. Una fabbrica produce mediamente il 3% di prodotti difettosi. Determinare la probabilità che in un campione di 100 prodotti ve ne siano 2 difettosi, usando: a) la distribuzione binomiale; b) la distribuzione di Poisson. (DISTRIBUZIONE BINOMIALE E DI POISSON ANCHE IN RELAZIONE TRA LORO)

2015 Sessione Straordinaria

6. Determinare la funzione di probabilità di una variabile casuale continua che assume valori nell'intervallo [2,5] con una distribuzione uniforme. Determinare inoltre il valore medio, la varianza, la deviazione standard di tale variabile e la probabilità che sia $\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{17}{4}$. (DISTRIBUZIONE DI VARIABILE CONTINUA)

2016 Prima Simulazione

1. Lanciando una coppia di dadi cinque volte qual è la probabilità che si ottenga un punteggio totale maggiore di sette almeno due volte? (PROBBAILITA' CONGIUNTA, DISTRIBUZIONE BINOMIALE)

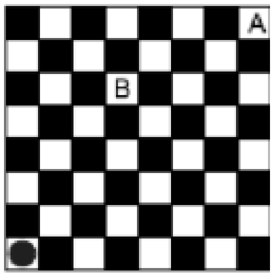
2016 Seconda Simulazione

3. Durante il picco massimo di un'epidemia di influenza il 15% della popolazione è a casa ammalato: a) qual è la probabilità che in una classe di 20 alunni ce ne siano più di due assenti per l'influenza? b) descrivere le operazioni da compiere per verificare che, se l'intera scuola ha 500 alunni, la probabilità che ce ne siano più di 50 influenzati è maggiore del 99%. (DISTRIBUZIONE BINOMIALE, IL PUNTO b E' CONTROVERSO)

2016 Sessione Ordinaria

4. Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande? (DISTRIBUZIONE BINOMIALE)

7. Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposto A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B? (CALCOLO COMBINATORIO, FORMULA DI LEIBNIZ)



2016 Sessione Americana

8. Un giocatore di basket si esercita ai tiri liberi. Normalmente ha una quota di canestri dell'80%. Con quale probabilità va a canestro esattamente due volte su tre tiri? Individua un evento E per il quale valga: $P(E) = \binom{50}{40} \cdot 0{,}8^{40} \cdot 0{,}2^{10}$. (DISTRIBUZIONE BINOMIALE)

2016 Sessione Straordinaria

2. In media, il 4% dei passeggeri dei tram di una città non paga il biglietto. Qual è la probabilità che ci sia almeno un passeggero senza biglietto in un tram con 40 persone? Se il numero di persone raddoppia, la probabilità raddoppia? (DISTRIBUZIONE BINOMIALE)

5. Un'azienda produce, in due capannoni vicini, scatole da imballaggio. Nel primo capannone si producono 600 scatole al giorno delle quali il 3% difettose, mentre nel secondo capannone se ne producono 400 con il 2% di pezzi difettosi. La produzione viene immagazzinata in un unico

capannone dove, nel corso di un controllo casuale sulla produzione di una giornata, si trova una scatola difettosa. Qual è la probabilità che la scatola provenga dal secondo capannone? (TEOREMA DI BAYES)

2017 Sessione Ordinaria

4. Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo [0,2] viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$. Quale sarà il valore medio dei numeri generati? Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia $\frac{4}{3}$? Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1? (DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA', PROBABILITA' DEI VALORI ESATTI PER VARIABILI ALEATORIE CONTINUE, EVENTI INDIPENDENTI)

8. Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte. (DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA', DISTRIBUZIONE BINOMIALE, PROBABILITA' COMPLEMENTARE)

2017 Sessione Suppletiva (primo caso di probabilità in un problema)

PROBLEMA 1

Un gioco si svolge su un tabellone, che è suddiviso in tre settori A, B, C, come in figura 1. Nei vari settori possono essere collocate alcune pedine. I settori confinano a due a due attraverso tre varchi (rappresentati nella figura con tratti ondulati). Prima di ogni partita, per ciascun varco si effettua un sorteggio che stabilisce se esso sarà aperto oppure chiuso. La probabilità che un varco sia aperto è pari ad un certo valore x (lo stesso valore per tutti e tre) ed i tre sorteggi sono tra loro indipendenti.

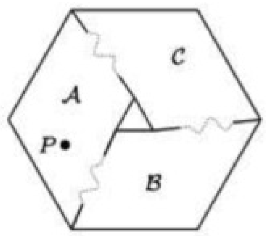


Figura 1

Durante il gioco, una pedina potrà spostarsi attraversando i varchi aperti. In questo modo, a seconda di quali varchi sono aperti, la pedina P, inizialmente collocata in A, potrebbe raggiungere o tutti e 3 i settori, oppure solo 2 (A e un altro), oppure 1 solo (non può uscire da A).

Indichiamo con $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ le probabilità che i settori raggiungibili dalla pedina P partendo da A siano solo 1, oppure 2, oppure 3.

1) Dimostrare che $p_1(x) = (1-x)^2$, $p_2(x) = 2x(1-x)^2$, $p_3(x) = x^3 + 3x^2(1-x)$ e tracciare, in uno stesso diagramma, i grafici delle funzioni $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ per $x \in [0,1]$.
2) È vero che, qualunque sia $x \in [0,1]$, almeno una delle probabilità $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ deve essere maggiore di 0.3 e almeno una deve essere minore di 0.4?
3) Provare che esiste un unico $x_0 \in [0,1]$ tale che $p_1(x_0) = p_3(x_0)$ e stabilire se vale la disuguaglianza $x_0 > \frac{1}{2}$. Discutere inoltre, al variare di $x \in [0,1]$, quali delle tre possibilità indicate (che i settori raggiungibili da P siano 1, 2 o 3) sono più probabili e quali meno.

4) Stabilire quali sono i tre valori medi delle funzioni che esprimono le probabilità $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$. Nel caso $x = \frac{1}{2}$ quali sono il valore medio e la varianza della variabile casuale che fornisce il numero di settori raggiungibili da P?

(PROBABILITA' CONGIUNTA, DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA', PROBABILITA' COMPLEMENTARE, ANALISI GRAFICA, "TRABOCCHETTI", DIVERSE DISTRIBUZIONI COLLEGATE ALLO STESSO FENOMENO)

QUESITI

3. Una variabile aleatoria, i cui valori appartengono all'intervallo [0,2], è distribuita secondo la densità di probabilità $p(x) = kx^2(2-x)$, dove k è una costante opportuna. Si stabilisca il valore medio della variabile aleatoria considerata. (DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA', QUESITO IDENTICO AL 4 DEL 2017)

7. Alberto e Barbara giocano lanciando un dado. Quando esce 1, 2, 3 o 4 Alberto fa 1 punto, quando esce 5 0 6 Barbara fa 2 punti. Vince chi arriva per primo a 6 punti. Qual è la probabilità che entrambi realizzino almeno 1 punto nel corso della partita? Qual è la probabilità che, in un certo momento della partita, il punteggio sia di 4 a 4? (PROBABILITA' CONGIUNTE, DISTRIBUZIONE BINOMIALE, DEFINIZIONE DELLE SEQUENZE DI EVENTI)

2017 Sessione Straordinaria

4. Giovanni tira ripetutamente con l'arco a un bersaglio: la probabilità di colpirlo è del 28% per ciascun tiro. Se Giovanni esegue 10 tiri calcolare la probabilità che il bersaglio venga colpito: a) 4 volte; b) le prime 4 volte. (DISTRIBUZIONE BINOMIALE, DIFFERENZA TRA EVENTI COMPOSTI APPARENTEMENTE SIMILI)

9. Sapendo che una moneta è truccata e che la probabilità che esca "testa" in un lancio e pari a p, determina i possibili valori che può assumere p, sapendo che la probabilità che esca testa esattamente 2 volte lanciando 4 volte la moneta è $\frac{8}{27}$. (PROBABILITA' CONGIUNTA)

2018 Sessione Ordinaria (probabilità in entrambi i problemi)

PROBLEMA 1

[…] Vengono proposti a un cliente due tipi diversi di disegno, derivanti rispettivamente dalle funzioni $a_n(x) = 1 - x^n$ e $b_n(x) = (1-x)^n$, considerate per $x \in [0,1]$, con n intero positivo. […] Il cliente decide di ordinare 5000 mattonelle con il disegno derivato da $a_2(x)$ e 5000 con quello $b_2(x)$. La verniciatura viene effettuata da un braccio meccanico che, dopo aver depositato il colore, torna alla posizione iniziale sorvolando la mattonella lungo la diagonale. A causa di un malfunzionamento, durante la produzione delle 10.000 mattonelle si verifica con una probabilità del 20% che il braccio meccanico lasci cadere una goccia di colore in un punto a caso lungo la diagonale, macchiando così la mattonella appena prodotta.

4. Fornisci una stima motivata del numero di mattonelle che, avendo una macchia nella parte non colorata, risulteranno danneggiate al termine del ciclo di produzione.

(FORMULA DI LEIBNIZ GENERALIZZATA AL CONTINUO APPLICATA AD UNA LUNGHEZZA, PROBABILITA' CONDIZIONATE, USO DELLE SIMMETRIE DEL GRAFICO PER SEMPLIFICARE I CALCOLI)

PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f(x) = -x^3 + x + 9$. La tangente al grafico Γ di f nel punto di ascissa 0 è $r: y = x + 9$, la tangente nel punto di ascissa 1 è $s: y = -2x + 11$. Le due tangenti si incontrano nel punto $M\left(\frac{2}{3}, \frac{29}{3}\right)$.

Detto T il triangolo delimitato dalle rette r e s e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto P all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ (cioè che si abbia $y_P > f(x)$ per tale punto P).

(PARADOSSO DI BENFORD: CHE SIGNIFICA PUNTO PRESO A CASO?, FORMULA DI LEIBNIZ GENERALIZZATA AL CONTINUO)

QUESITI

2. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro? (DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA' DISCRETE, PROBABILITA' CONGIUNTA)

8. In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale di 12? (DISTRIBUZIONE BINOMIALE, DEFINIZIONE DELLE SEQUENZE DI EVENTI)

Attenzione al fatto che l'evento finale della sequenza è fissato

2018 Sessione Suppletiva

5. Si lancia n volte un dado regolare a sei facce. Qual è il più piccolo valore di n tale che la probabilità che non esca mai il numero 3 sia minore dello 0,01%? (PROBABILITA' CONGIUNTA)

8. Una variabile casuale, a valori nell'intervallo $[0,10]$, è distribuita secondo la densità di probabilità data dalla funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{12}, & 1 < x \leq 10 \end{cases}$, stabilire il valore medio e il valore mediano di questa variabile casuale. (DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA' CONTINUE)

La mediana MED di una VA X è il valore di X tale che P(X<=MED)=1/2

La mod a MOD di una VA X è il valore di X che massimizza la distribuzione

La media M di una VA X è la somma di tutti i possibili valori di X ciascuno pesato con la propria P