MATHESIS - SCUOLA ESTIVA- NAPOLI 2018
Laboratorio 3: Spunti didattici e risoluzione della seconda prova di matematica con l'ausilio della calcolatrice grafica.
Prof.ssa Antonietta Carbone

Problema 2- Esame di stato Liceo Scientifico 2018.

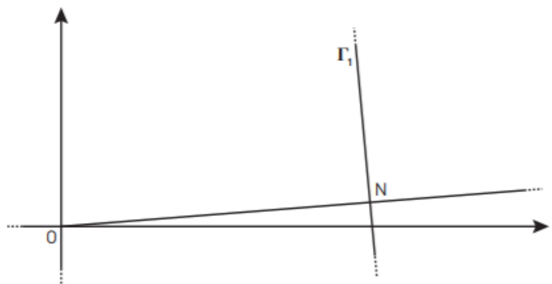
Consideriamo la funzione $f_k : R \to R$ così definita: $f_k(x) = -x^3 + kx + 9$ con $k \in Z$.

1. **Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.**

2. **Dopo aver verificato che k = 1 è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.**

3. **Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1, s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_P; y_P)$ all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_P > f_1(x)$ per tale punto P).**

4. **Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1. La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O. Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado n > 0 non può possedere più di 2n − 1 punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.**

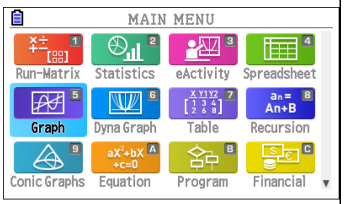
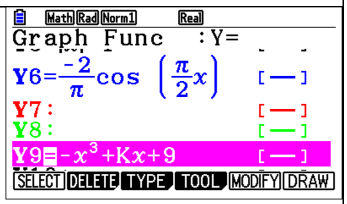


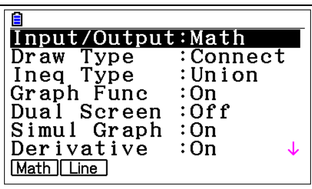
Per risolvere il problema n° 2 si è utilizzata la calcolatrice grafica fx CG50 della CASIO. La risoluzione del problema ha dato spunto ad approfondire alcune operazioni relative all'uso della calcolatrice grafica.

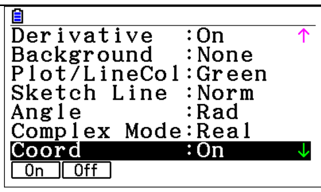
Risoluzione del punto 1.

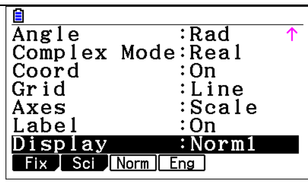
Consideriamo la funzione $f_k : R \rightarrow R$ così definita: $f_k(x) = -x^3 + k\,x + 9$ con $k \in Z$.

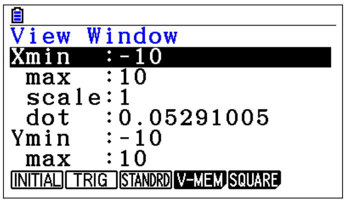
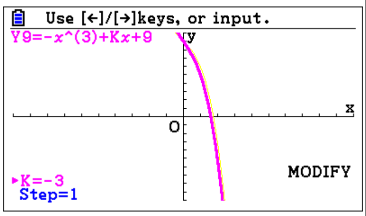
1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.

<table>
<tr><th>Dati e istruzioni da seguire</th><th>Cosa si ottiene</th></tr>
<tr><td>Passaggio# 1
Nel MAIN MENU selezionare l'icona GRAPH
(si può utilizzare anche con il Menu Dyna Graph…)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Passaggio# 2
Digitare la funzione y= -x³+Kx+9 (per digitare la variabile x premere il primo tasto della terza riga, per digitare il parametro K usare la tastiera ALFA numerica)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Passaggio# 3
Settare il display

Premere
(SHIFT MENU)
come nei display.
Premere EXIT per uscire dal Menu setup.</td><td>



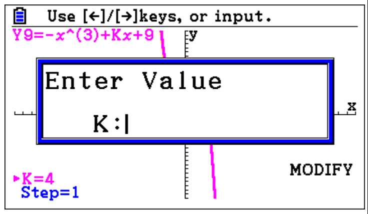

</td></tr>
<tr><td>Passaggio# 4
Settare gli assi cartesiani.

Ora digita SHIFT seguito da F3 e scegli la visualizzazione nel nostro caso premere F3 (Standrd).
Premere EXIT</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Passaggio# 5
Si ritorna alla schermata del passaggio #2, premere F5 (MODIFY).Con i tasti del cursore (Est e Ovest)si seleziona il valore del parametro.Con i tasti del cursore Nord e Sud si passa dal parametro allo Step.</td><td>
</td></tr>
</table>

Passaggio# 6

Per inserire il valore iniziale di K premere EXE .

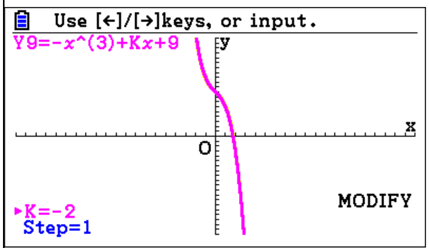
- premendo + si può inserire il valore massimo di K,
- premendo - si può inserire il valore minimo.

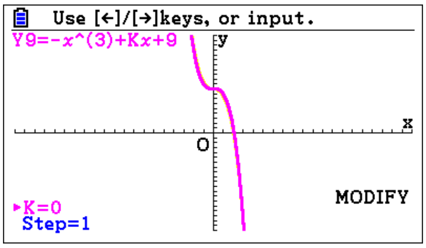


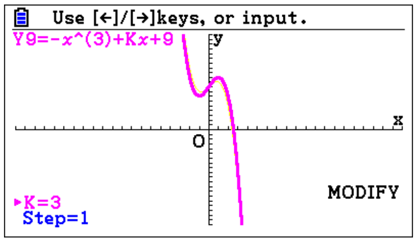
Passaggio# 6

Agire sui tasti Est ed Ovest del pulsante dei cursori si hanno le seguenti schermate.

K=-2 **K=0** **K=3**







Calcolare le equazioni delle rette r_k e s_k .La retta r_k passa per il punto (0;9) ed ha coefficiente angolare f'(0)=k , l'equazione di r_k è $y = kx + 9$. Analogamente si trova la retta s_k che passa per il punto (1; 8+k) ed ha coefficiente angolare f'(1)=-3+k, l'equazione di s_k è $y = (k-3)x + 11$

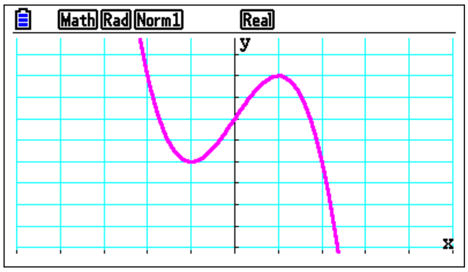
Il punto di intersezione M è soluzione del sistema:

$$\begin{cases} y = kx + 9 \\ y = (k-3)x + 11 \end{cases} \rightarrow M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}k + 9\right)$$

Passaggio# 7 Approfondimento: tracciare le tangenti e determinare il punto di intersezione

K=3

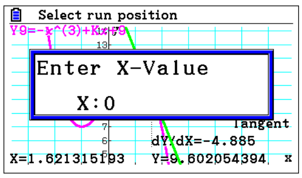
Per stracciare le tangenti dobbiamo uscire dall'ambiente MODIFY.
Premere due volte EXIT
Entriamo nell'ambiente DRAW (F6) .Abbiamo il grafico della funzione per K=3 e operiamo sulla funzione in questo menu.
Per ingrandire la funzione premere +,
per abbassare o alzare il grafico agire sui pulsanti SUD e NORD del cursore

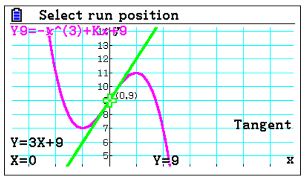


Passaggio# 8

- **Tracciare la tangente in x=0**

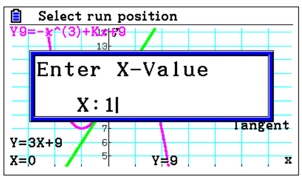
Premere il tasto F4(SKETC)
Poi F2 (Tangente) e digitare 0
e poi due volte EXE.

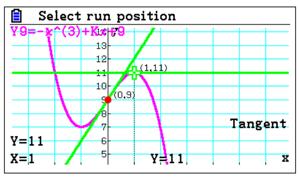




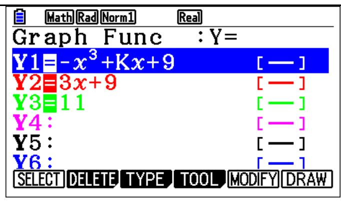
- **Tracciare la tangente in x=1**

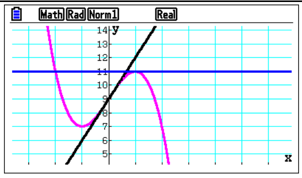
Premere il tasto F4(SKETC)
Poi F2 (Tangente) e digitare 1
E poi due volte EXE,



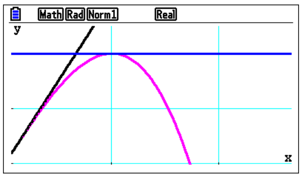


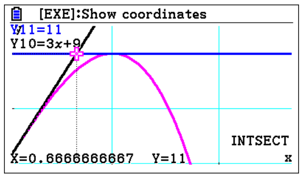
Passaggio# 9
Premere EXIT e digitare le equazione delle rette tangenti.
Premere F6 (DRAW)





Passaggio# 10
Premere il tasto +(ZOOM) per ingrandire, PremereF5(G-SOLVE), poi F5(INTSECT), con il pulsante dei cursori selezionare le rette.(le rette devono lampeggiare), premere EXE.



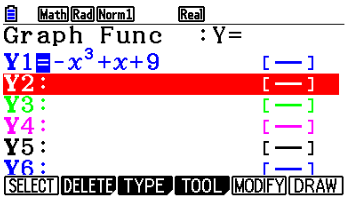


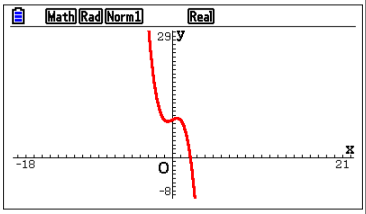
Risoluzione punto 2 .

2. Dopo aver verificato che k = 1 è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico

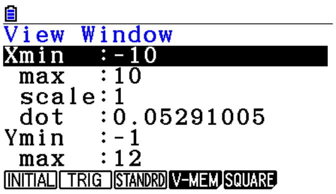
La soluzione della disequazione $y_M < 10$ è $k < \frac{3}{2}$. Il valore massimo intero positivo che soddisfa questa soluzione è proprio k=1.

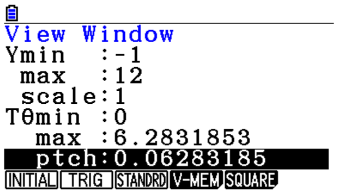
Passaggio# 11
Premere EXIT e digitare la funzione per K=1,
deselezionare(F1)
tutte le funzioni tranne l'ultima.
Premere DRAW .
Se il grafico non è visibile agire
con i tasti + o –
per ingrandire o rimpicciolire.



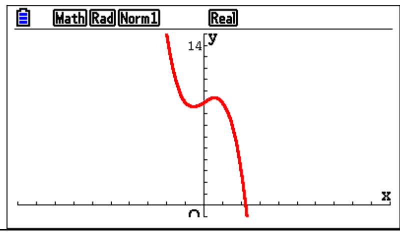


Passaggio# 12
Il grafico è poco indicativo nella finestra Standard. Puoi ottimizzare la visione tramite
il comando V-Window digitando (F3) e selezionando le opzioni indicate

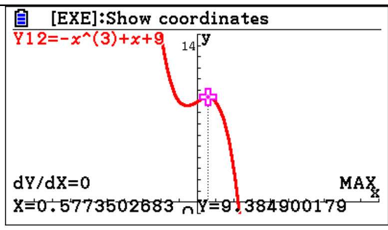


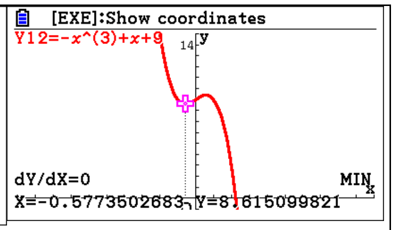


Passaggio# 13
Otterrai il seguente grafico

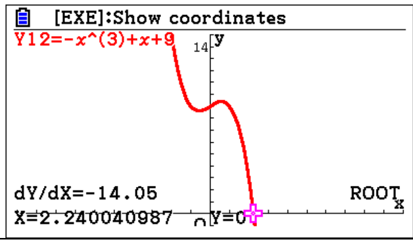


Tramite il comando G-Solve (F5) è possibile individuare i punti di massimo e (MAX)di minimo (MIN)della funzione:





Intersezione con asse x (ROOT)

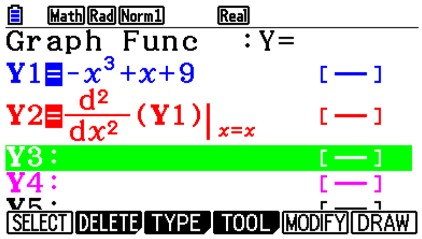


Passaggio# 14

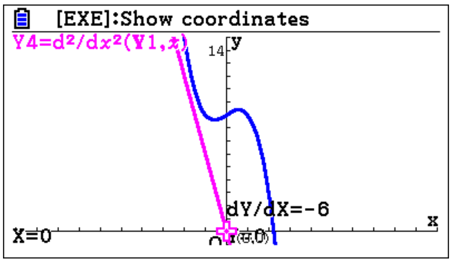
E' possibile inoltre determinare il punto di flesso della Funzione analizzando dove si annulla la sua derivata seconda.

A tale scopo puoi digitare la funzione $y = \frac{d^2y}{dx}$ tramite

la sequenza [OPTN] [F2] (CALC) [F2]$\left(\frac{d^2y}{dx}\right)$[F1](Y) [1]



Successivamente digita (DRAW)
Per vedere dove la derivata seconda si azzera è possibile utilizzare il comando [F5](G-SOLV) e, dopo aver selezionato la funzione Y2, digita [F1] (ROOT).
Si vede in tal modo che funzione presenta un punto di flesso dove la derivata seconda si azzera (nell'origine degli assi)



Risoluzione del punto 3

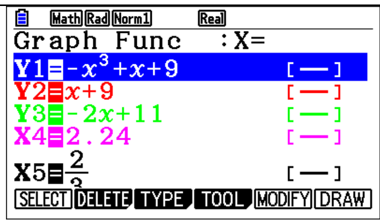
3.. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1, s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_P; y_P)$ all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_P > f_1(x)$ per tale punto P).

La probabilità richiesta P è il rapporto tra la somma delle aree A1 e A2 delimitate dalle due rette r1 e s1 individuate nel PUNTO#1 e dalla funzione, rapportata all'area AT del triangolo delimitato dalle due rette r1 e s1 e dall'asse delle ascisse.

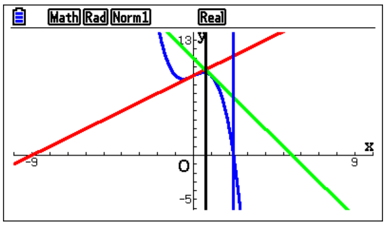
$$P = \frac{A_1 + A_2}{A_T}$$

Passaggio# 15

Nell’ambiente GRAPH digita le funzioni relative al parametro k=1 , la insieme alla retta $x=\frac{2}{3}$ (intersezione tra le due rette) e alla retta x=2.24 (intersezione della cubica con l’asse delle ascisse)

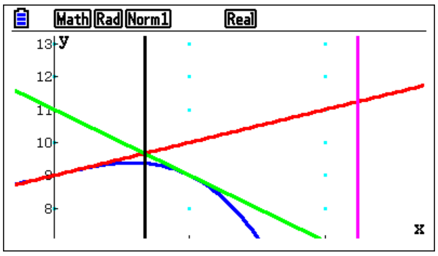


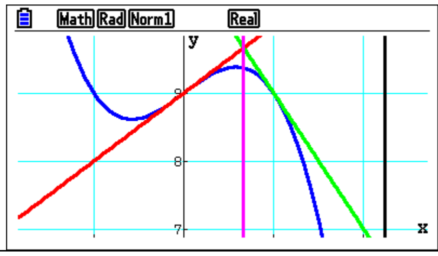
* per scrivere le rette $x=\frac{2}{3}$ e x=2.24 digitare la sequenza F3(TYPE) e F4 (X=)*



Passaggio# 16

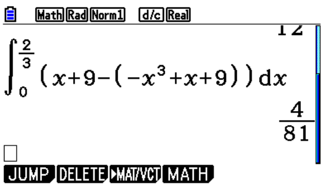
Per ottimizzare la visione si può zoommare una parte del grafico digitare SCHIFT F2 poi F1 (BOX) per selezionare l’area (posizionare il puntatore,premere EXE, con il cursore selezionare la zona interessata e poi EXE)

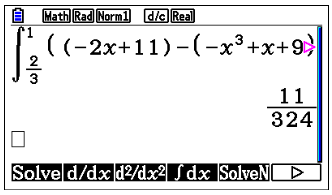




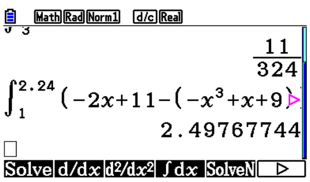
Passaggio# 17

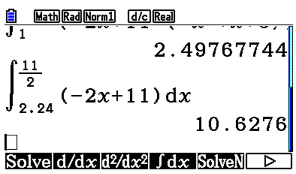
Selezionando l’ambiente RUN-MATRIX possiamo calcolare le aree necessarie al calcolo della probabilità richiesta Calcoliamo A_1 come somma di due integrali





Allo stesso modo, per trovare l’area A2 bisogna sommare i due integrali definiti: Per il calcolo di questi integrali è stato utilizzato il valore 2.24 della radice della funzione trovato precedentemente.





Sommando tutti termini si ottiene il numeratore A_1+A_2

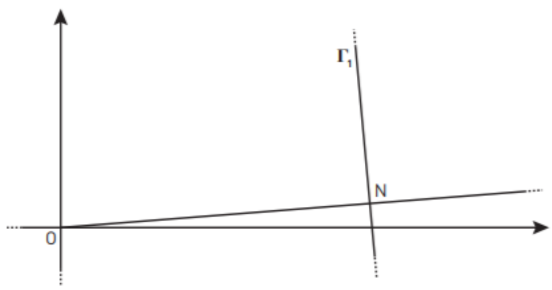
Calcolando l’area del triangolo

$$A_T=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{11}{2}-9\right)\cdot\frac{29}{3}=\frac{841}{12}$$

$$P = \frac{A_1 + A_2}{A_T}$$

Sostituendo si ottiene il valore cercato. La probabilità richiesta è circa del 19%

5. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1. La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O. Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n - 1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



Consideriamo una funzione polinomiale di grado n.

La sua derivata prima sarà un polinomio di grado n − 1.

La retta perpendicolare alla funzione in un generico punto $(k; P(k))$ del grafico avrà coefficiente angolare $m = -\frac{1}{P'(k)}$

Quindi l'equazione di una retta normale in un punto della curva di ascissa x=k sarà:

$y - P(k) = -\frac{1}{P'(k)}(x - k)$.

Imponendo il passaggio per il punto $O(0,0)$ si ottiene l'equazione: $-P(k) = -\frac{1}{P'(k)}(-k)$ ovvero:

$-P(k)P'(k) = k$

che è una equazione di grado 2n-1 perché data dal prodotto di un polinomio di grado n per un polinomio di grado n-1, . Quindi le soluzioni, cioè i punti di intersezione, saranno al massimo 2n−1.