# Editoriale

Un anniversario importante! Ottant'anni fa, nel 1931, K. Gödel pubblicava, su un periodico scientifico tedesco, l'articolo «*Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei "Principia Mathematica" e di sistemi affini*» la cui proposizione VI "***tutte le assiomatizzazioni coerenti dell'aritmetica contengono proposizioni indecidibili***" è passata alla storia come il **teorema di Gödel**. Un risultato che ha avuto così tante conseguenze e interpretazioni da renderlo punto di riferimento di studiosi e intellettuali in ogni settore del sapere e segnato così, inequivocabilmente, la storia del pensiero.

L'articolo di Gödel, allora giovane matematico venticinquenne dell'Università di Vienna, come sempre accade in questi casi, non destò particolari attenzioni anche perché il suo contenuto era largamente incomprensibile alla gran parte dei matematici. Poi, gradualmente, ne hanno parlato e scritto un numero sempre più ampio di studiosi e notissimo è divenuto negli anni sessanta del secolo scorso in ragione dei risultati di P. Cohen — tra i quali l'indecidibilità dell'ipotesi del continuo — e dell'interesse crescente per la meccanizzazione e la *computer science*.

Tra i libri più noti sull'argomento va certamente menzionato "*La prova di Gödel*" di Nagel e Newman, più volte ristampato, ma la cui prima edizione è solo del 1958. Un ventennio più tardi, nel 1979 — la prima edizione italiana è del 1984 — , in modo avvincente e nuovo, ne ha parlato Douglas R. Hofstaedter che paragona il teorema ad una *perla* e il metodo di dimostrazione a un'*ostrica*. L'«*ostrica* — egli scrive — *è un complicato essere vivente che nelle sue viscere dà origine a questo gioiello dalla misteriosa semplicità*». Nel libro dal titolo suggestivo: "*Gödel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*", Hofstaedter parte dalla convinzione che Gödel, Escher e Bach siano solo *"ombre" proiettate in diverse direzioni da una qualche solida essenza centrale*. Il suo è il tentativo di ricostruire questo oggetto centrale intrecciando in un'Eterna Ghirlanda Brillante i tre fili del discorso che Gödel, Esher e Bach hanno sviluppato. Pagine chiarificatrici sulla portata del lavoro di Gödel e in particolare sulle implicazioni filosofiche, sulla meccanizzazione delle procedure algoritmiche e il rapporto mente-macchina si trovano in Hao Wang: *Dalla Matematica alla Filosofia* (1974, edizione italiana 1984). Ma le citazioni da articoli e libri potrebbero essere tante. S. Ulam ad esempio, narra del rapporto di Gödel con J. von Neumann avanzando anche il sospetto di un disappunto di von Neumann per non essere stato lui il primo a dare quella dimostrazione di incompletezza. A Gödel e ai suoi risultati dedicano gran parte della loro affascinante conversazione A. Connes, A. Lichnerowicz e M.P. Schutzenberger in *Triangolo di Pensieri* (2001).

Il risultato di Gödel segna la fine di un sogno, quello che fu di Leibniz e, ancor prima e ancora dopo, di tanti altri autori, compreso il grande Hilbert, di dominio assoluto della conoscenza; in questo senso il teorema comporta un non so che di negativo perché pone un limite alle possibilità dell'uomo anche se ne prova l'inesauribilità del compito. Infatti, uno dei significati più eccitanti del teorema di Gödel è che la matematica non finirà mai. Mai potremo dire di aver trovato un ultimo risultato della matematica e porre così la parola fine alla ricerca, scoperta o invenzione che sia, matematica. Che la matematica sia la scoperta dei caratteri nei quali il Signore ha scritto le leggi che regolano l'universo o sia pura e semplice invenzione della mente umana, il risultato di Gödel afferma che si tratta di attività che non avranno fine. Se da una parte, da Gödel in poi, sappiamo che mai potremo penetrare la mente di Dio, dall'altra sappiamo altrettanto bene che l'uomo, in questo mondo fatto da Dio, avrà sempre da fare, le sue creazioni saranno sempre imperfette e, in matematica, ogni sistema coerente soffrirà di una ben definita limitazione. La coerenza si paga con una perdita di qualcosa, con la rinuncia ad ogni aspirazione di completezza del discorso e di assiomatizzazione globale. La rinuncia a poter dimostrare tutto! Ci sarà sempre spazio per un atto di fede! Si adatta bene a ciò, quella che fu l'espressione di A. Weil: «*Dio esiste dato che la matematica è coerente, e il diavolo esiste dato che non possiamo dimostrarne la coerenza*». Se il teorema di incompletezza di Gödel fu un duro colpo inferto anche al programma hilbertiano di completa formalizzazione della matematica ove i simboli sono svuotati di ogni significato e i ragionamenti espressi per mezzo di ragionamenti formali, allo stesso tempo lo spirito matematico rimane inalterato, perché avremo sempre problemi da risolvere. Il motto hilbertiano che in matematica non esiste ***ignorabimus*** continuerà ad essere valido, porremo problemi e ne troveremo la soluzione, non ci sarà un ultimo risultato e anche la meccanizzazione avrà i suoi limiti.

Da Gödel in poi la matematica si pone nella dimensione nella quale già Platone l'aveva colta: *ciò che sempre è e che non nasce e non perisce*. Una dimensione di eternità, un fluire perenne, senza origine nè fine. Infatti, dov'è l'origine della matematica? C'è una radice? Michel Serres che sulla question ha forse indagato più di tutti è portato a concludere che la matematica «*non può dirsi greca, egizia, babilonese, cinese o indù,... non certo perché non sia nata qui o là, in questo o in quel mese, ma perché la sua lingua e i pensieri che suscita non si riferiscono, nè per il senso nè per il tempo, ad alcuna terra nota, d'Oriente o d'Occidente, del Nord o del Sud*». Ed ecco la perturbante stranezza: la geometria, ad esempio, risalirebbe a un'origine, fonte o inizio, a un cominciamento, *senza essere attaccata ad alcuna radice, senza fiorire su alcuno stelo!* L'inizio dell'interminabile discorso del grande racconto di geometria non può che essere un mito: "*C'era una volta, intorno al 600 a.C., un uomo di nome Talete...*". È R. Trudeau [*La rivoluzione non euclidea*, 1991] ad iniziare così la sua narrazione, per poi avvertire: "*il racconto che sto facendo riguardo alla* *geometria... è una specie di mito: attribuisce infatti ad alcuni personaggi leggendari i più significativi progressi intellettuali, che in realtà devono aver richiesto l'intervento di molte persone lungo un arco di tempo abbastanza esteso. In mancanza di dati sicuri, questa storia si è sviluppata partendo da alcune leggende, dal desiderio dei matematici di conoscere le origini della loro disciplina e dalla considerazione di quelle che, da un punto di vista matematico, furono probabilmente le tappe fondamentali di questo sviluppo*."

Per il resto le verità matematiche, a qualsiasi livello, sono spesso apparse in un ampio orizzonte dapprima in forma appena percepibile e, gradatamente, in modo sempre più chiaro e distinto. Ad esprimerlo con bella metafora è il matematico Bolyai al proprio e più famoso figlio Janos: "*molte cose hanno un'epoca nella quale esse sono trovate nello stesso tempo da molte parti, proprio come le violette nascono dappertutto in primavera*".

In definitiva un racconto, quello della geometria e della matematica in generale, che possiamo cominciare dove vogliamo ma anche continuare finchè vogliamo perché, grazie a Gödel, il discorso non potrà dirsi mai chiuso. Un dato di fatto che si vorrebbe valido per altri ambiti del sapere, altre discipline. Il fisico Freeman Dyson, in *Infinito in ogni direzione* (1989) lo esprime in modo molto efficace: «*Indipendentemente da quanto lontana fosse andata la matematica e da quanti problemi avrebbe potuto risolvere, ci sarebbero sempre state, grazie a Gödel, nuove domande da porre e idee da scoprire. Spero che si riesca a dimostrare che il mondo della fisica è inesauribile quanto quello della matematica. ... In realtà negli ultimi dieci anni sono stati compiuti meravigliosi progressi; ma spero che la nozione di una sistemazione definitiva delle leggi della fisica si dimostrerà altrettanto illusoria del concetto di un processo di esatta determinazione per tutta la matematica. Se dovesse saltar fuori che tutta la realtà fisica può essere descritta con un sistema finito di equazioni, rimarrei deluso. Avrei la sensazione che il Creatore avesse dimostrato un'insolita mancanza di fantasia. Dovrei dire, come ha detto Einstein una volta in un contesto simile: Allora mi spiacerebbe per il buon Dio*». Il riferimento di Dyson è ai fisici teorici impegnati nella GTU — la grande teoria unificata dell'Universo — nella ricerca cioè delle equazioni che, in analogia alle equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico, possono descrivere ogni sorta di fenomeni. Bella al riguardo la conclusione che *S. Hawking* — già peraltro autore di un saggio dal suggestivo titolo "*La fine della fisica*" — dà al suo *Dal big bang ai buchi neri* uno dei maggiori successi editoriali degli ultimi decenni. La conclusione di Hawking è educativa e formativa; egli, infatti, scrive: «*Se però perverremo a scoprire una teoria completa, essa dovrebbe essere col tempo comprensibile a tutti nei suoi principi generali, e non solo a pochi scienziati. Noi tutti — filosofi, scienziati e gente comune — dovremmo allora essere in grado di partecipare alla discussione del perché noi e l'universo esistiamo. Se riusciremo a trovare la risposta a questa domanda, decreteremo il trionfo definitivo della ragione umana: giacchè allora conosceremmo la mente di Dio*».

Si ritrova cioè il tema di fondo dell'*amor Dei intellectualis* che N. Cusano individuava nella conoscenza matematica e in definitiva il convincimento che — come si espresse H. Weyl — la matematica approssima la mente umana a quella divina più di qualunque altro strumento. Sono considerazioni che vanno ben al di là dei limiti imposti da un editoriale. Il fatto è che Gödel porta la matematica ad indagare su se stessa, ad essere introspettiva, a dare nuovo slancio ai problemi educativi e formativi che sono comunque nell'essenza della matematica, nel significato etimologico del termine: ciò che può essere insegnato e ciò che può essere appreso. I matematici non amano tanto indugiare su un tale lavoro di introspezione; si dividono ed oscillano perennemente tra Platone e Aristotele, in modo "indecidibile", tant'è che si dice che sono aristotelici nel corso della settimana lavorativa e platonici nel week end quando, rilassati, possono godere di quanto esprime la natura e il mondo che ci circonda. Eppure come si fa ad insegnare ed apprendere la matematica se non si ha un'idea o una fede in ciò che essa è e rappresenta? Forse non ha torto chi asserisce che se le cose non vanno proprio bene nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica questo dipende da un travisamento della natura della matematica. *Che cos'è la matematica?* È certo il titolo di un libro. Uno dei più noti e diffusi al mondo. Un libro che conserva la sua freschezza malgrado i 70 anni dalla sua prima edizione (1941) e che, in accordo a quanto già osservò il nostro F. Severi, dovrebbe stare sulla scrivania di ogni studioso e di ogni insegnante di matematica.

R. Courant e H. Robbins ne sono gli autori; ma è un libro di matematica, non sulla matematica. E non è la "matematica", ma solo un modo, ancorché brillante, di fare e di comunicare la matematica. A tentare di colmare la lacuna ha pensato più recentemente R. Hersh con il suo: *Che cos'è davvero la matematica* (1997, 2001) e con l'intento di porre all'attenzione dei matematici la necessità di saperne di più sulla filosofia della matematica essenziale a sua volta per discorrere di pedagogia della matematica. Hersh si schiera nettamente a favore di Aristotele, di Locke e Hume, di J.S.Mill, di J. Pjaget e ancora di G. Polya e di C.S. Peirce, contro il platonismo; asserisce che la matematica è una "*entità socio-storico-culturale*", che non è immutabile e che come tale va considerata e insegnata. «*Quello che c'era nella testa di Archimede è diverso da quello che c'era nella testa di Newton e questo a sua volta differisce da quel che c'era nella testa di Gauss. Non è una questione di "quantità", cioè del fatto che Gauss conoscesse più matematica di Newton il quale, a sua volta, ne conosceva più di Archimede. È anche una questione di "diversità". Lo stato attuale del sapere è inestricabilmente connesso ad una rete di motivazioni e aspirazioni diverse, di interpretazioni e potenzialità diverse*». Quanto riportato, Hersh l'aveva già asserito in *l'Esperienza matematica* scritto in collaborazione con P. Davis (1981, 1985). Una scelta di campo, quella di Hersh che evidenzia i suoi limiti perché tiene conto di alcune cose e ne trascura altre. A essere d'aiuto allora è di nuovo il testo di Courant e Robbins, nella rilettura di quella succinta ma luminosa Introduzione ove si trova la più avvincente e realistica definizione possibile di matematica. Ed è con essa che inizia il libro: «*Come espressione della mente umana,* *la matematica riflette la volontà attiva, la ragione contemplativa e il desiderio di perfezione estetica. I suoi elementi fondamentali sono la logica e l'intuizione, l'analisi e la costruzione, la generalità e l'individualità. Tradizioni diverse potranno mettere in evidenza aspetti diversi, ma è soltanto la reazione di queste forze antitetiche e la lotta per la loro sintesi che costituiscono la vita, l'utilità e il valore supremo della scienza matematica*». Per un momento la mente va a Dante quando nel canto alla Vergine armonizza e integra gli opposti: ***Vergine Madre, figlia del tuo figlio, umile e alta...*** La matematica è l'unica disciplina a rendere compossibili al suo interno le grandi opposizioni dialettiche; come una calamita con i suoi poli, presenta, indissolubili, le coppie antitetiche che ne sostanziano la natura: *Algoritmico/Dialettico, Astratto/Concreto, Discreto/Continuo, Finito/Infinito, Individuale/Collettivo, Locale/Globale, Esoterico/Essoterico, Razionale/Irrazionale, Ordine/Caos, Uno/Molti, Utile/Inutile ...* (della coppia *Pura/Applicata* parla G. Lolli sulle pagine di questo stesso fascicolo del Periodico). Su ognuna si potrebbe discutere ed imbastire un racconto. Il mito del labirinto, ad esempio: la coppia *algoritmico/dialettico* vi trova la sua più incisiva interpretazione. Per uscire dal labirinto bisogna, o munirsi del filo di Arianna, caratteristico del calcolo e del pensiero algoritmico, oppure tentare il volo verso l'alto alla conquista della terza dimensione, di cui modello insuperabile è la misura della piramide effettuata da Talete: non una misura diretta ma un atto di furbizia della mente: il ricorso ad un invariante. Un vero atto di magia: un umile strumento e la sua ombra sfidano ciò che non è accessibile e percorribile, l'altezza della tomba del Faraone e ne hanno ragione! S'innestano qui le questioni dell'infinitamente grande e dell'infinitamente piccolo, la divisione di un segmento in $n$ parti uguali e il paradosso di Achille e la tartaruga. Ma il discorso si amplia alle coppie filosofiche *locale/globale* e *discreto/continuo* che R.Thom, l'autore della *teoria delle catastrofi*, considera così centrali da costituire le vere aporie fondatrici della matematica. E un altro francese, ancora M. Serres, scrive (1993): «*La matematica è: tanto oggettiva che è l'unica a essere veramente collettiva; tanto collettiva che è l'unica a essere veramente oggettiva; tanto inutile che è l'unica a essere veramente utile; tanto esteriore che è l'unica a essere veramente interiore; tanto interiore che è l'unica a essere veramente esteriore; tanto nell'essere che eccelle nella conoscenza; tanto nella conoscenza che eccelle nell'essere; tanto astratta che è l'unica a essere veramente concreta, tanto concreta che si è creduto, a volte, che il suo spazio fosse la forma del senso esterno... tanto concreta, infine, che è l'unica a essere veramente astratta: la nascita della sua astrazione... deriva dalla somma integrale del reale più concreto che essa attraversa. Eminentemente oggetto, essa assorbe tutti gli oggetti; soggetto collettivo, eminentemente, essa pensa da sola, al punto che siamo divenuti i suoi levìti e i suoi accoliti. Dalla nascita, volenti o nolenti, noi viviamo e pensiamo in essa e per essa.*». Si innesta qui il mito di Metis, mito d'origine della matematica e della conquista della razionalità. Zeus re dell'Olimpo s'innamora di Metis, dea della furbizia e dell'astuzia umana; la sposa e la mette incinta. L'evento terrorizza Zeus! Un figlio potrà fare a lui ciò che lui ha fatto al padre Crono e questi al padre Urano: detronizzarlo! Mentre Metis dorme al suo fianco, nel talamo nuziale, Zeus la mangia, la incorpora. La gestazione continua, e quando è tempo, con un colpo di scure inferto da Efesto, nasce Atena, dea della razionalità; nasce dalla testa di Zeus. L'impresa di Talete è talmente magica da ispirare Zeus che incorporando Metis origina la razionalità, fa della sua testa il grembo del pensiero razionale. Ecco che dalla nascita, volenti o nolenti, *noi viviamo e pensiamo in essa e per essa*. La matematica è prodotta dalla mente ma non se ne separa se non come proiezione, come l'ombra con la piramide, e allo stesso tempo è perenne testimonianza del suo funzionamento, quasi come esistesse un organo esterno di stimolo e di controllo. Di nuovo platonismo e aristotelismo. Matematica e Mente: chi la perla e chi l'ostrica? Una matematica che non può fare a meno della coesistenza al suo interno delle grandi opposizioni dialettiche non può fare neppure a meno di riflettere su se stessa e sul suo valore pedagogico e se è ininfluente che tutto sia importato da *ambienti matetici*, secondo l'espressione di S. Papert, ambienti cioè ricchi di germi portatori di apprendimento matematico o sia frutto di innatismo. Secondo il logico Hao Wang ad esempio «*Non è difficile convenire che il concetto di numero è un'idea innata, latente nella mente del bambino. Ecco perché non è possibile insegnare la teoria dei numeri agli animali, per quanto si potrebbe allenarli all'uso della parola "numero"*» allo stesso tempo le macchine sanno oggi trattare i numeri tanto bene da essere divenute insostituibili. Sono queste le questioni che attengono all'insegnamento e apprendimento della matematica, questioni che sempre Wang include, seguendo l'esempio di Hilbert, in una lista dei problemi generali che la matematica si trova di fronte a dover affrontare. Il suo, in definitiva, è un invito ai matematici a curare di più la comunicazione della matematica, cosa sempre sottovalutata rispetto all'atto creativo ritenuto di gran lunga più importante. G.H. Hardy ad esempio scriveva, nella sua *Apologia* (1940, 1989) «*Esposizione critica insegnamento sono attività per cervelli mediocri*». Oggi, è il parere non solo di Wang, impegnarsi nella comunicazione di quanto è noto è forse più importante dell'impegnarsi nell'ottenimento di nuovi frammenti di matematica; tutto ciò potrebbe anche aprire il campo alla possibilità della costituzione di una critica matematica come analogo della critica letteraria. Il problema della comunicazione della matematica è, comunque, aspetto preponderante del problema pedagogico e Wang, che lo ha posto, è uno che Gödel lo ha capito bene. Infatti se, contrariamente a Gödel, esistesse una sistemazione globale e coerente della matematica, il problema pedagogico non sarebbe neppure da porsi. Quella sistemazione costituirebbe certamente il riferimento sicuro per una filosofia e una pedagogia altrettanto sicure, una linea di sviluppo del discorso comunicativo e didattico così come lo è stata per secoli l'organizzazione che Euclide diede agli *Elementi* della Geometria. La mancanza di una tale sistemazione, ovvero di una struttura globale canonica, ha condotto per un certo periodo a sopravvalutare in campo pedagogico la riduzione categorica e/o logico-sintattica al locale e cioè le tendenze assiomatiche e logiciste formali. Oggi non è più così, tale riduzione è stata abbandonata e proprio il tema della organizzazione del discorso matematico è divenuto centrale per la pedagogia. Un'organizzazione immaginata dotata di ampi gradi di libertà, non più vincolata a canoni standardizzati di inferenza logica o lacerata in parti o capitoli di comodo ma possibile incollamento di carte locali costruite intorno a risultati matematici significativi. Risultati cioè che puntano automaticamente a altri risultati e che con A. Adler potremmo dire dotati di una maggiore "quantità di moto" rispetto ad altri. Un'organizzazione che ricostruisce il suo **ordine** logico, il suo "prima e dopo" didattico in una visione di "matematica totale", rispettando i soggetti interessati (docenti e studenti) in ciò che è loro più congeniale per *contenuti* e per *metodi*, coltivando il **gusto** e il piacere di fare matematica, potenziando il **significato** (anche storico e applicativo) di quello che si fa e arricchendolo dei modi di dire. *Spesso la vera novità* — diceva un grande della letteratura — *sta nell'efficacia delle espressioni*. Abbiamo l'esigenza di un arricchimento dei modi di dire, visto che il vocabolario l'abbiamo sempre di più impoverito, essiccato. In genere le definizioni, gli enunciati dei teoremi sono tutti uguali da libro a libro, da autore ad autore; si ha anche paura di cambiare, di passare a formulazioni diverse, dire con altre parole. Eppure che cos'è la cultura se non la miniera, lo scrigno dove depositiamo i nostri tesori o gemme concettuali esposte nelle espressioni più belle?

Tutti gli insegnanti sanno che molto spesso si comprende qualcosa per la prima volta solo quando si cerca di spiegarlo a un altro. Nello sforzo di comunicare agli altri, agli alunni, si impara meglio ciò che già si sa o se ne comprendono aspetti che non erano chiari o che forse non si possedevano affatto. In effetti quando siamo obbligati, come nell'attività di insegnamento spesso avviene, a separare le cose essenziali da quelle accessorie al fine di spiegare, di chiarire la portata di un concetto, di una idea e il suo significato allora abbiamo modo di compiere delle riformulazioni, cioè di trovare espressioni diverse di dire riorganizzando le nostre conoscenze. Sono queste riformulazioni che spesso hanno un'efficacia tale da sorprendere noi stessi che ci consentono "*decolli semantici*" nuovi e non posseduti.

Sono questi i principi pedagogici che in tutti i Paesi industrializzati sono stati accolti nelle norme che regolano i diversi sistemi dell'istruzione e della formazione e che da noi hanno dato luogo alle moderne Indicazioni e Linee Guida per i nuovi licei, istituti tecnici e professionali.

A queste ultime abbiamo dedicato l'attenzione del Periodico nell'arco di quest'ultimo triennio sollecitando a un dibattito collettivo. L'occasione dell'anniversario del risultato di Gödel può darsi che porti nuova luce invitando a nuove riflessioni e confronti.. Un ulteriore contributo al tema è offerto dalla pubblicazione su questo fascicolo delle conferenze di Gabriele Lolli, M. G. Ottaviani e Luigi Verolino tenute al Congresso Mathesis 2011 di Caserta.

*Emilio Ambrisi*