Editoriale

Marvin Minsky, una delle più belle menti creative della seconda metà del XX secolo, propose, tempo fa, una graduazione delle operazioni elementari compiute dall'uomo secondo il loro grado di complessità intellettuale. Ai primi gradini della scala gerarchica collocò le operazioni matematiche, le prime ad essere affidate a delle macchine, mentre pose abbastanza in alto, contrariamente a quanto comunemente creduto, operazioni usuali come riconoscere un volto noto in mezzo alla gente, per strada, o anche rifare il letto o infilare un cuscino in una federa. Alla sommità della scala, Minsky pose il sorriso umano, operazione talmente complessa che mai, asserì, avremo robot che sappiano sorridere. La proposta di Minsky è una lista ordinata di operazioni ma pur sempre una lista. Si fanno liste un po' dappertutto oggi e la lista si pone – in verità, sempre lo è stata – come efficace strumento di gestione anche della complessità. Umberto Eco ha recentemente dedicato al tema il bel volume "*Vertigini della lista*". La matematica, che ha certo a che fare con la gestione dei processi mentali, è piena di liste famose. Lo sono ad esempio gli Elementi di *Euclide* – un elenco ordinato di 465 teoremi – e la lista dei 23 problemi che *David Hilbert* presentò la mattina dell'8 agosto 1900 al Congresso Internazionale di Parigi. Un elenco, quello di Hilbert, ove l'ordine non conta affatto, ma che contiene tutti i problemi che a quella data aspettavano di essere risolti. La lista di Hilbert riscontrò un consenso unanime; nessuno lo accusò di avervi inserito un problema ormai risolto o di averne mancato qualcuno. La lista era completa ed enorme fu la sua incidenza: quei problemi giocarono il ruolo di "grandi" problemi, di veri e propri punti di riferimento o mete alle quali il lavoro dei matematici doveva tendere e mirare. Un'operazione di grande valore intellettuale, possibile solo per una mente capace di dominare tutta la matematica del momento, e di una utilità eccezionale. Quei problemi aprirono tracciati di ricerca, ne illuminarono i percorsi e servirono ad indirizzare i giovani matematici, ma anche a rinnovare i corsi universitari e ad accendere il dibattito sull'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie. Di lì a poco molti dei problemi di Hilbert cominciarono ad avere una risposta e dai percorsi di ricerca prima illuminati ne conseguirono itinerari didattici, universitari e secondari, accettati ed universalmente seguiti. Dal punto di vista espositivo e didattico, si trattò di un avvenimento eccezionale che comportò una precisa organizzazione e sistemazione della matematica tanto che spesso ci si è interrogati sulla ripetibilità di una siffatta operazione. A *John von Neumann* fu esplicitamente chiesto di fornire una lista aggiornata al 1954. Von Neumann, però, declinò l'invito dichiarandosi "*incapace di spaziare in un così vasto campo*". Vent'anni dopo, nel maggio del 1974, l'*American Mathematical Society* organizzò uno speciale simposio con lo scopo di valutare gli sviluppi e le conseguenze di ognuno dei 23 problemi posti da Hilbert e allo stesso tempo anche con l'obiettivo di stilare un elenco dei problemi irrisolti; la consapevolezza della difficoltà dell'operazione indusse però a restringere il campo alle questioni che avessero un legame con i problemi di Hilbert, una sorta di filiazione diretta o anche riflessa. Il lavoro preparatorio del lavoro dell'AMS fu iniziato da *J. Dieudonnè* e portato a compimento da *F.E. Browder* attraverso una fittissima corrispondenza con matematici impegnati nei diversi campi di ricerca ed in ogni parte del mondo. Un lavoro impegnativo e, per quanto condensato in solo due volumi, enorme. Il gran numero di matematici impegnati, la loro competenza specifica, le modalità stesse di listare i problemi per settori testimoniano di quanto varia e ricca fosse – già un trentennio fa – la matematica. Il prodotto di questo lavoro è una lista di circa 130 problemi suddivisi in 27 branche o aree della matematica e frutto delle risposte di una trentina di specialisti. Frutto del lavoro dunque di più intelletti e non la sintesi elaborata da una mente sola come fu il lavoro di Hilbert.

Al lavoro di Hilbert si ispira l'*Antologia* pubblicata dal servizio in rete *Matmedia* (`www.matmedia.it`) per proporre un florilegio matematico fatto di liste. Accanto ai "grandi problemi" di Hilbert trovano posto "i grandi teoremi" di *W. Dunham*, "i grandi momenti" di *J. Eves*, "i grandi matematici" di *E.T. Bell*, "i grandi problemi dell'educazione" di *H. Freundenthal* e, ancora, "i risultati più belli" secondo la lista definita, attraverso un referendum, dalla rivista *The Mathematical Intelligencer* e quella delle "tendenze attuali" nella didattica della matematica.

Come si vede, alcune delle liste dell'Antologia di Matmedia riguardano il settore della storia della matematica. Un campo palesemente sconfinato ed indominabile di racconti e di risultati tanto da indurre *G.C. Rota* a definirlo un campo "disastrato" e asserire: ho conosciuto matematici che si sono votati allo studio della storia della loro disciplina cominciando abbastanza giovani e volendo partire dalle origini. La conclusione è stata che sono morti ultranovantenni senza andare al di là della matematica greca. Oggi è particolarmente enfatizzata la tendenza ad organizzare la storia segnando qualcosa, quasi a discretizzare ciò che è ontologicamente continuo: la freccia del tempo. Si sono realizzati così tentativi significativi di riorganizzazioni concettuali che pongono, tra l'altro, un legame profondo e produttivo tra scienza e comunicazione. Abbiamo storie organizzate per "**grandi momenti**" (H. Eves), "**grandi capitoli**" (M. Kline), "**grandi matematici**" (E.T. Bell), "**grandi teoremi**" (W. Dunham). In particolare, quest'ultimo, quello di Dunham, è un viaggio storico che nasce dalla instaurazione di una analogia inesplorata: "*discipline diverse come la letteratura, la musica e l'arte hanno tutte una loro tradizione critica di esame dei capolavori – i* ***grandi romanzi****, le* ***grandi sinfonie****, i* ***grandi quadri*** *– che sono considerati gli oggetti* *di studio più rappresentativi e illuminati. Con questo taglio si scrivono libri e si tengono corsi, al fine di consentire una maggiore familiarità con le pietre miliari della disciplina e con le donne e gli uomini che l'hanno creata*". Quale l'analogo, in matematica, del capolavoro artistico, quali le pietre miliari della disciplina? Qui il taglio con cui sono stati scritti e si scrivono i libri è profondamente diverso e così il modo di studiarla e di presentarla: un unico grande romanzo, una sola grande sinfonia cui molti e progressivamente pongono mano, facendone poi perdere le tracce. Per Dunham è il **teorema**, il **grande teorema**, la vera *unità creativa* della matematica come il romanzo o la sinfonia lo sono rispettivamente per la narrativa e la musica. Così come i letterati selezionano autori e capolavori nella descrizione di una storia della letteratura, Dunham ha selezionato i suoi capolavori, i grandi teoremi atti a delineare un itinerario, uno dei possibili **viaggi attraverso il genio**. I teoremi o pietre miliari che si incontrano in questo **storico** viaggio sono i seguenti:

1. **La quadratura della lunula**
2. **La dimostrazione euclidea del teorema di Pitagora**
3. **L'infinità dei numeri primi**
4. **L'area del cerchio**
5. **La formula di Erone per l'area di un triangolo**
6. **La soluzione della cubica ad opera di Cardano**
7. **Il calcolo di π col metodo di Newton**
8. **La divergenza della serie armonica**
9. **La valutazione di** $1+1/4+1/9+\cdots+1/k^2$
10. **La confutazione di Eulero della congettura di Fermat**
11. **La non numerabilità del continuo**
12. **Il teorema di Cantor**

Quello di Dunham è un viaggio storico che tiene conto:

a. degli uomini: i geni che hanno intravisto ed aperto nuove strade;
b. dell'importanza del risultato; ad esempio per le lunule di Ippocrate l'aver sconfessato l'opinione che aree racchiuse da curve dovessero tutte coinvolgere π;
c. della dimostrazione: è il ragionamento deduttivo la vera chiave dell'interpretazione storica, del sigillo di capolavoro, ed è anche caratteristica fondamentale dell'insegnamento (fa parte, peraltro, dell'esperienza di ogni insegnante la consapevolezza che l'alunno che ha capito la sua prima dimostrazione, ha stabilito un rapporto fecondo con la matematica).

Così posto il lavoro di Dunham mostra la sua rilevanza pedagogica e il suo viaggio realizza un effettivo itinerario didattico dove l'ordine e la continuità del discorso e dello sviluppo matematico sono ricostruiti e riassemblati a partire da tappe ritenute significative: il globale dal locale. Un esempio di quello che poteva essere la modalità di scrittura delle *Indicazioni Nazionali* per i piani di studi della scuola dell'*autonomia*. Se i nostri giovani al termine del loro corso di studi superiori sapessero parlare di ciascuno degli argomenti della lista di Dunham o degli argomenti, concetti e procedure appartenenti ad una qualsiasi altra lista stilata con un occhio rivolto al raggiungimento di traguardi matematicamente importanti certamente potremmo essere più soddisfatti, la società avrebbe più conoscenze matematiche e meno da lamentarsi della loro carenza. C'è chi vede nel fare una lista una sorta di tendenza al cannibalismo, un voler fare a "pezzi" la matematica. Un modo per produrre lacerazioni nel corpo della matematica e cedere alla moda di stilare classifiche o hit-parade di risultati. Ma nessuno nega che può essere stimolante fissare l'attenzione su alcuni caratteri, – storici, estetici, applicativi, spaziali, dialettici – e essere condotti a staccare, estrapolare un particolare risultato o formula o teorema dal suo contesto della comunicazione o derivazione standard o meglio dire dalla sua postazione nella sequenza dell'apprendimento canonico; a considerarlo, esaminarlo, ammirarlo anche, come un quadro, un'opera d'arte cogliendone la portata e la ricchezza di significato; a vederlo e chiarirlo nella sua interezza; ad individuarlo, infine, quale punto nodale di una robusta rete didattica e non quale semplice anello di una fragile catena di inferenza logica. Una modalità che dovrebbe far parte delle opportunità a disposizione del docente per stimolarlo ad indicare ai propri allievi, anche prima di srotolare la sua "rete" didattica, i punti di *singolarità* del suo progetto didattico, portandolo così, ad esempio, a fissare, per una classe del primo biennio:

- *la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma* perché la pone al centro dell'attività algebrica, il cuore stesso dell'algebra (a proposito ha descritto esperienze interessantissime *Z. Krygowska*)

- *il teorema di Ruffini* perché lo ritiene il più bel teorema che gli alunni possono riformulare e dominare: $P(x)$ *è divisibile per* $x-a$ *se e solo se* $P(a)=0$ e ancora perché rappresenta il passaggio dalla x considerata come lettera, mero simbolo, propria dell'algebra, alla x trattata come variabile, propria del linguaggio delle funzioni e avvio all'*Analisi Matematica*

- *il teorema di Talete* perché punto nodale di sviluppo dei più bei capitoli della geometria piana, un "*teorema fugace e dolce quanto un raggio di sole munito delle sue ombre...*" secondo quanto ne dice *M. Serres*.

Ma ancora e/o in alternativa, il simbolo a^n, le proprietà angolari del cerchio, la misura del cerchio, l'infinità dei numeri primi, l'irrazionalità e il calcolo di $\sqrt{2}$, la sezione aurea di un segmento, ecc. La rivoluzione compiuta sarebbe che in matematica ove tutto sembra indistinto, perché intimamente connesso, ove non si può parlare di questo se non si è parlato prima di quello, ecc. finalmente si potrebbe parlare di qualcosa: gli alunni potrebbero anche saper dire che cosa sanno di matematica e prima ancora quale è il bersaglio del loro impegno di apprendimento e parlare e leggere e documentarsi su questo, eventualmente anche navigando in Internet.

In quanto detto ricorre l'idea della "lista" come strumento di amministrazione (del sapere e della didattica) quasi in analogia al perché di una "lista per la spesa" – quella della massaia, una lista di saggezza –, che contiene ciò che è essenziale, ineliminabile e che si può comprare. Una "lista" nella didattica dovrebbe rispondere allo stesso obiettivo: ciò che è fondamentale e ciò che si può dare e apprendere realmente.

Al riguardo è Renè Thom, medaglia *Fields* e autore della *teoria delle catastrofi* (che riconduce ad una lista di sette catastrofi elementari), ad offrire un ulteriore significativo esempio con l'asserire che tutta l'Analisi Matematica può ridursi ad un elenco di cinque o sei teoremi fondamentali. E non è necessario argomentare quanto una lista siffatta potrebbe risultare utile per riorganizzare un settore che sostanzialmente conserva – come è stato autorevolmente notato – la sua sistemazione standard dal 1821, ovvero dall'Analyse di *Cauchy*. Nella sua lista Thom include il teorema di *Taylor* e il teorema delle *funzioni implicite*, due teoremi che hanno a che fare con la coppia antitetica *locale/globale*. Una di quelle opposizioni dialettiche che Thom individua tra le aporie fondatrici della matematica, che permea ogni ambito del sapere e che si presenta particolarmente interessante nella pedagogia e nella didattica della matematica caratterizzata, per certi versi, da un predominio del globale: il globalismo delle impostazioni assiomatiche, e quello di Klein in geometria, ma anche il globalismo delle sistemazioni dei vari capitoli compresa l'Analisi Matematica di cui si è detto. Ad illustrare meglio il concetto riesce molto calzante ricordare la soluzione data all'insegnamento della geometria. In particolare alla questione di una gradualità pedagogica per evitare il salto brusco da insegnamento *intuitivo* alle medie a insegnamento *razionale* alle superiori. Una questione rappresentata da *Attilio Frajese* al Congresso della Mathesis di Pavia del 1951 e, su sua richiesta, sottoposta da *Oscar Chisini* al vaglio delle sezioni Mathesis e ampiamente dibattuta per vari decenni fino a portare alla conclusione adottata con i programmi del PNI (1985 -1989) e "Brocca" (1988-1990). In questi si riconosce, infatti, che la finalità principale dell'insegnamento della geometria, in tale ciclo di studi, è proprio quella di "*condurre progressivamente lo studente dalla intuizione e scoperta di proprietà geometriche alla loro descrizione razionale*". La geometria razionale non è più un insegnamento da avviare e seguire fin dall'inizio del secondo ciclo bensì proprio l'obiettivo formativo, il punto di arrivo dell'azione didattica. "*A ciò* – è scritto nei programmi PNI – *il docente può pervenire adottando un metodo che, facendo leva sulle conoscenze intuitive apprese dallo studente nella scuola media, proceda allo sviluppo razionale di* ***limitate catene di deduzioni***". Analogamente, nei piani di studi Brocca: "*Lo studio della geometria nel biennio ha come finalità preminente quella di condurre progressivamente l'allievo dalla intuizione e scoperta di proprietà geometriche alla loro descrizione razionale, e rappresenta, come tale, una guida privilegiata alla* *consapevolezza argomentativa. [...] Il docente potrà cioè condurre l'allievo a familiarizzarsi con il metodo ipotetico-deduttivo su parti* ***circoscritte*** *della geometria, senza la preoccupazione di pervenire alla costruzione di un* ***sistema globale*** *di assiomi*. È alla fine del percorso di studi secondari che si raccomanda uno sguardo a ritroso, una riflessione e una sistemazione delle cose apprese: "*a conclusione degli studi secondari scaturirà così naturalmente nell'alunno l'esigenza della sistemazione assiomatica dei temi affrontati, della geometria come di altri contesti, sistemazione che lo porterà a recepire un procedimento che è diventato paradigmatico in qualsiasi ricerca ed in ogni ambito disciplinare*".

Nei testi delle nuove *Indicazioni Nazionali* per i licei la questione appare trascurata e in quelle per i tecnici e i professionali le ***limitate catene di deduzioni*** diventano ***semplici catene di deduzioni***. Un cambiamento terminologico che è un ulteriore cedere all'abuso di aggettivi i quali rendono difficile l'operazione di capire e di specificare o elencare ciò che si capisce. Per certi versi l'impressione è che queste *Indicazioni Nazionali* abbiano voluto voltare pagina, ignorando il passato e procedendo come se non ci fosse storia. Ma sembrano altresì anche voler trasmettere l'esistenza di un particolare quadro disciplinare globale articolato però ancora in capitoli o temi di *aritmetica e algebra, geometria, relazioni e funzioni, dati e previsioni* nonché l'esistenza di un metodo e un ordine privilegiati. Per il resto tutto vi è concatenato e gerarchizzato, quasi un riecheggiare dell'antica *ratio ordinis studio rum* gesuitica con una variante alla *J.J. Rousseau*: lo studente, soggetto ricorrente: *Emilio conoscerà, saprà, approfondirà e poi acquisirà e svilupperà le capacità di ... e il suo studio comincerà così e poi proseguirà con ... e questo sarà occasione per ...* e così via nel solco tracciato quale nuova via regia dell'apprendimento. La stessa per tutti, ovviamente!

Delle *Indicazioni* il PdM non può non occuparsi. Tutta la seconda metà del XX secolo ha visto l'attività della Mathesis e le pagine dei suoi "Bollettini" dedicate al problema della riforma della secondaria di 2° grado e più in particolare al rinnovamento dei programmi d'insegnamento della matematica. Uomini di genio ne hanno discusso con competenza e passione, per decenni, senza poter assistere alla realizzazione del cambiamento sperato.

Dalle consultazioni delle sezioni Mathesis di Frajese e Chisini ai programmi di Frascati del 1966/67, alle tante proposte di tracce di curricolo. Una di queste è di *Giovanni Prodi*, tra i matematici che più hanno prestato attenzione alle questioni didattiche (è riportata nelle pagine seguenti di questo fascicolo). Si tratta di lavori importanti, meditati; documenti il cui valore pedagogico è elevato e che a rileggerli offrono ancora freschezza e saggezza. Tali sono i programmi delle elementari del 1955 (quelli dello scolaro che impara a *misurare e commisurarsi*), i programmi del 1979 della scuola media (i primi redatti per "temi" e giudicati tra i migliori d'Europa), i programmi del 1985 della commissione Laeng (la cui relazione di medio termine è una mirabile sintesi di pedagogia e scienza) e, infine, i piani di studi Brocca per una scuola secondaria di secondo grado che rimaneva da riordinare.

Oggi finalmente abbiamo una nuova scuola superiore e abbiamo le *Indicazioni Nazionali* che, per norma, avrebbero dovuto specificare le mete e i risultati dei processi d'insegnamento e apprendimento nei nuovi licei e istituti tecnici e professionali. Può darsi che non ci riescano pienamente e che ai limiti di cui già si è detto altri se ne aggiungano, di impostazione, di coerenza logica, di chiarezza. Ma, finalmente, ci sono! L'impegno della Mathesis e di quanti vivono la matematica e la scuola, al di fuori delle dominanti *lobbies* di potere, non può che essere di valorizzarne il positivo per quanto minimo possa essere e concorrere a far sì che il nuovo quadro normativo serva a ridare stimoli e prestigio agli insegnanti e le *Indicazioni* essere lo strumento per instaurare un rinnovato interesse a fare meglio in un clima di partecipazione collettiva alla riflessione e al confronto su contenuti, metodi e finalità dell'insegnamento della matematica. A queste *Indicazioni* sono dedicati alcuni degli interventi presenti in questo fascicolo ed altri ne saranno pubblicati nei prossimi.

Emilio Ambrisi