Congresso Nazionale della Mathesis

Spoleto, 10-12 Aprile 2014

Le successioni di Tipo Fibonacci e di Tipo Tribonacci, e i triangoli e le piramidi di Pascal Generalizzati.

G. Vincenzi

La ricorsività in senso esteso è un argomento che ha sempre destato notevoli curiosità. Possiamo non ritenere un caso che le lezioni di matematica dedicate a questo argomento, riscuotono un forte interesse tra gli studenti.

In botanica, in chimica, in fisica (vedi ad esempio [9] [11] [12]) i fenomeni di tipo ricorsivo sono frequenti: si pensi ad esempio lo studio della nascita e la morte di cellule, oppure lo studio di delle reazioni a catena in chimica. Un recente lavoro di medicina rilevato perfino connessioni tra la mano e la ricorsività [10].

Da un punto di vista matematico una successione ricorsiva è definita da *condizioni iniziali* F_1, $F_2, \dots, F_k$, e da una legge ricorsiva i cui vengono assegnati i *coefficienti* dell'equazione $a_{k-1}, \cdots, a_0$:

F_1, $F_2, \dots, F_k$ e $F_n = a_{k-1}F_{n-1} + \cdots + a_0 F_{n-k}$ per ogni intero n maggiore di k.

Notevole rilievo teorico e applicativo ha il limite del rapporto di termini consecutivi della successione, detto anche limite di Keplero(vedi [7] [8]):

$$\text{Lim} \quad F_n / F_{n-1} \qquad \textit{limite di Keplero}$$

La bibliografia sullo studio delle successioni ricorsive è vastissima e i risultati ottenuti investono vari aspetti teorici della matematica.

Sicuramente la successione ricorsiva più famosa è la successione di Fibonacci, 1, 1, 2, 3. … Essa risulta essere una particolare successione ricorsiva lineare omogenea di ordine 2 in cui i coefficienti sono unitari.

Le proprietà di questa singola successione sono molteplici e hanno ispirato nei secoli centinaia di studiosi e artisti (uno contemporaneo è Mario Merz). Un libro recente Dunlup [4] è interamente dedicato allo studio e alle proprietà della successione di Fibonacci.

Una delle proprietà della successione di Fibonacci, individuata da Lucas, prova che ciascun termine F_n della successione di Fibonacci compare come somma degli elementi che giacciono sulla diagonale n-esima del triangolo di Pascal (in Italia noto come triangolo di Tartaglia, in Cina come triangolo di Yanghui's, in Germania come Stiefel,…). Vedi Figura 1:

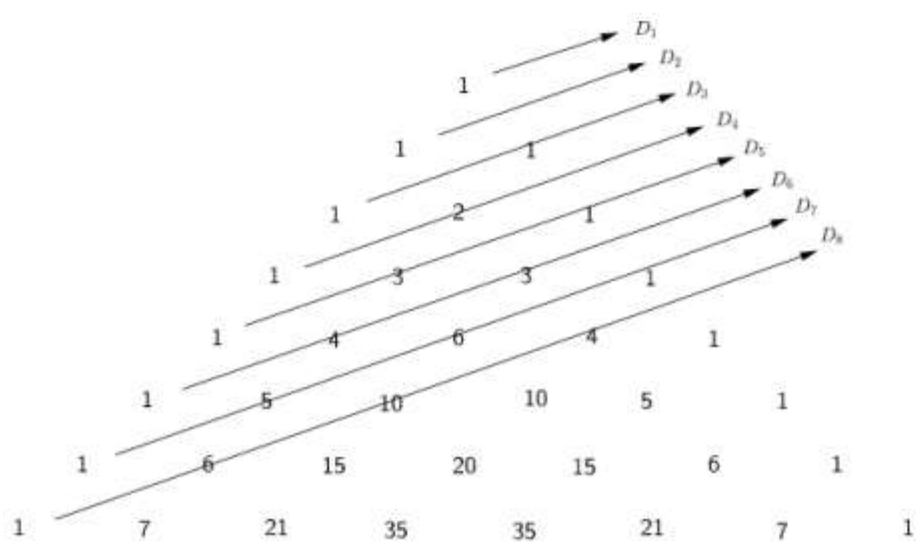

Figura 1

Anche lo studio di questo triangolo è stato approfondito notevolmente e tantissime sono le proprietà che si celano in esso.

Varie sono le generalizzazioni di tale triangolo. Nel libro di Bondarenko ([2] [3]) vengono studiate e approfondite molte proprietà.

Recentemente (vedi [14]), in collaborazione con S. Siani, ho considerato una nuova generalizzazione del triangolo di Pascal, ottenuta disponendo risp.sul lato sinistro e sul lato destro del triangolo due numeri arbitrari,e costruendo gli altri numeri all'interno, seguendo la stessa regola del triangolo di Pascal. Vedi Figura2

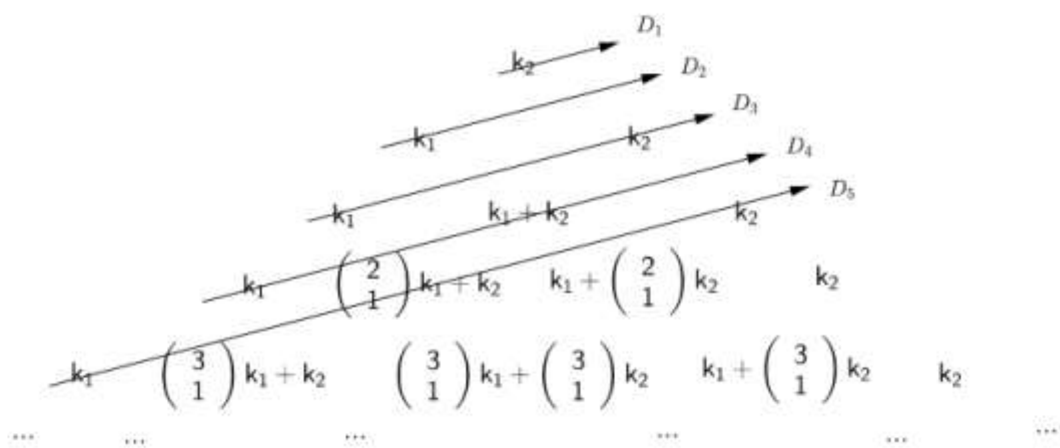

Figura 2: Triangolo di Pascal generalizzato T(k_1,k_2)

Emergono alcune questioni:

Osserviamo gli elementi D_n ottenuti come somma dei numeri che giacciono sulle diagonale. Che proprietà hanno? Costituiscono una successione ricorsiva?

Per comprendere meglio il problema facciamo un esempio:

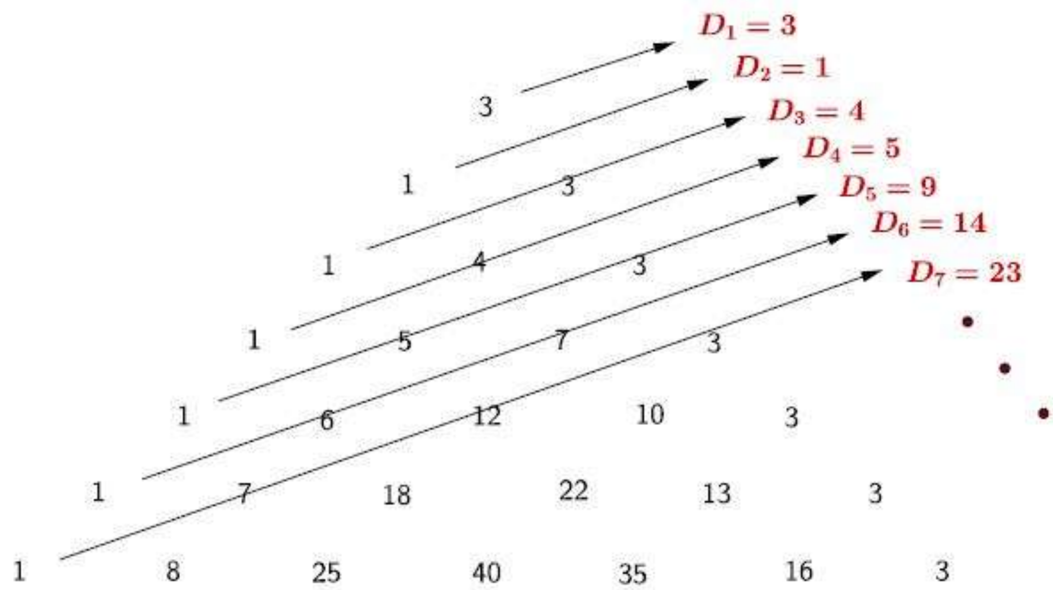

Figura 2bis: Triangolo di Pascal generalizzato T(1,3).

La successione D_n sembra una successione ricorsiva! Ebbene si può provare qualunque siano le condizioni iniziali k_1 e k_2, la (D_n) è una successione ricorsiva di Tipo-Fibonacci, ovvero lineare omogenea di grado due con coefficienti unitari.

Infatti, ponendo:

$H_1 = k_1$ $H_2 = k_2$ e $H_n = H_{n-1} + H_{n-2}$, per ogni intero maggiore di 2,

si può provare che vale il seguente:

Theorem (2.1, [14]) *Let k_1 and k_2 be complex numbers. Let (D_n) be the associate sequence to the generalized Pascal's triangle $T(k_1; k_2)$ and (H_n) be the Fibonacci-Like sequence of seeds k_1 and k_1. The following identity holds:*

H_n -- D_n = F_{n-3} (k_2-k_1) for every positive integer n

Moreover (D_n) is exactly the Fibonacci-Like sequence of seeds k_2 and k_1. In particular (D_n) is a recursive sequence.

Questo risultato induce ad approfondire lo studio della successione di Tribonacci, 1, ,1 3, 5, 9 … e della *piramide di Pascal*. Ricordiamo che quest'ultima è definita ponendo i triangoli di Pascal come facce, e come punti interni la somma dei termini della sezione al di sopra. Vedi Figura3

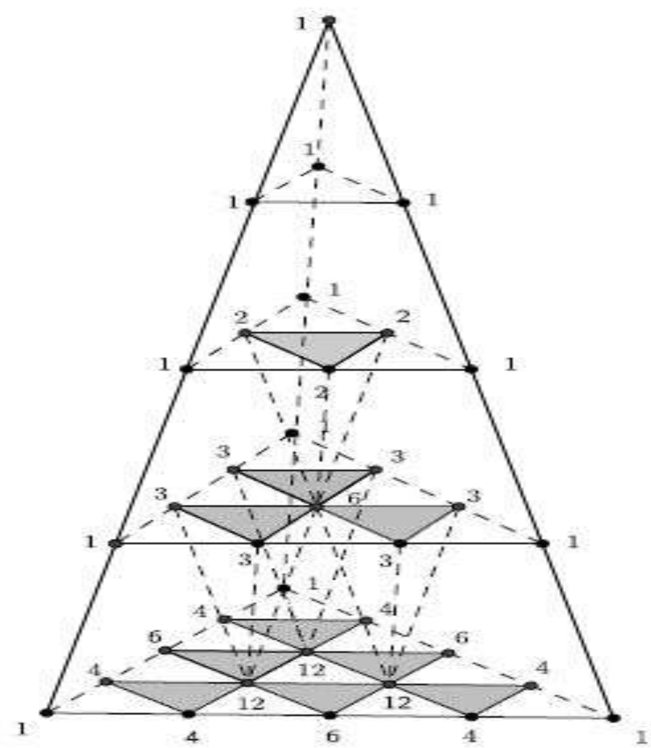

Figura 3: Piramide di Pascal.

I risultati, ottenuti in collaborazione con G. Anatriello, generalizzano un risultato di Feinberg- Shannon (vedi [5] [6] [13]): *la successione di Tribonacci può essere ricavata dalla piramide di Pascal, considerando le diagonali del triangolo di Feinberg associato alla piramide.* Vedi Figura 4

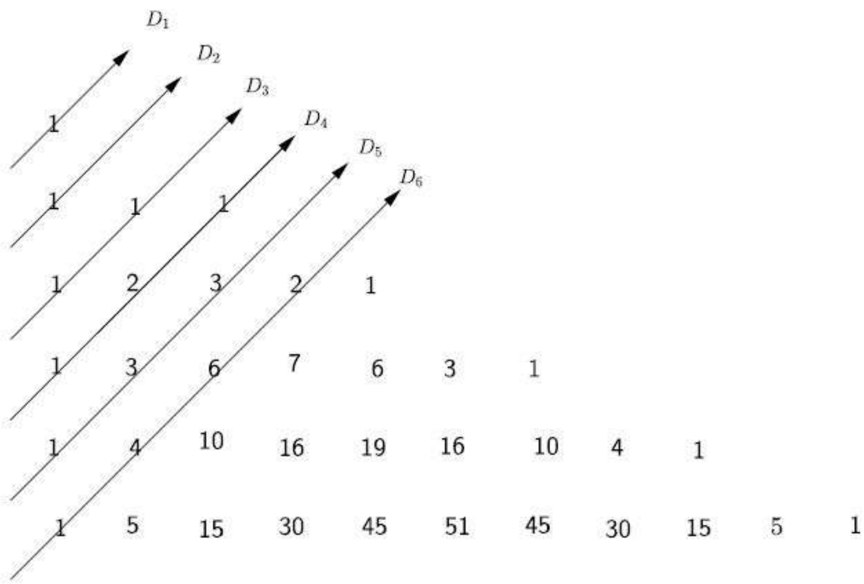

Figura 4 Triangolo di Feinberg associato alla piramide di Pascal

Nel caso studiato si sono cambiati i numeri sugli spigoli della piramide, costruendo una nuova piramide, e si sono cercate le relazioni tra i numeri in essa contenuti e le successioni Tipo-Tribonacci.

Costruzione della piramide generalizzata di Pascal

Siano h, k e l tre numeri complessi. Seguendo la costruzione fatta in [14] , possiamo considerare tre triangoli di Pascal generalizzati T (h, k), T(k, l), T(l, k), privati del vertice (Figura 5).

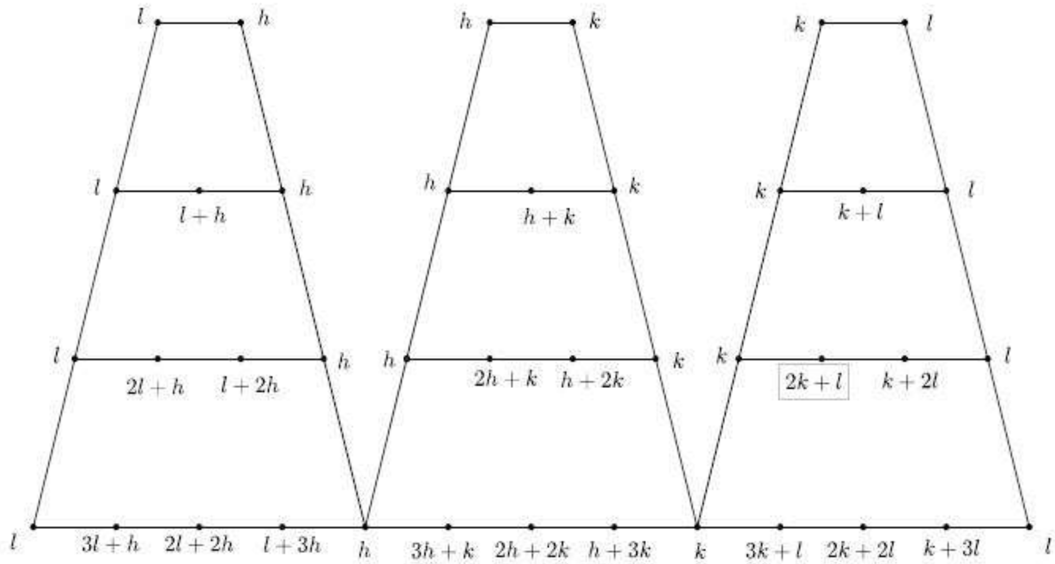

Figura 5: Facce della piramide generalizzata di Pascal, P(h,k,l)

Incollando gli spigoli con gli stessi valori otteniamo un tronco di piramide, al quale aggiungiamo come vertice il valore k. In tal modo resta individuata una piramide con dei valori già assegnati sulle facce. Per quanto riguarda i valori interni seguiamo la stessa regola usata per definire la piramide di Pascal: *ad ogni punto che giace internamente ad una sezione della piramide gli verrà assegnato come valore la somma dei valori dei vertici del triangolo della sezione precedente che giace al di sopra del punto* (Vedi figura 6).

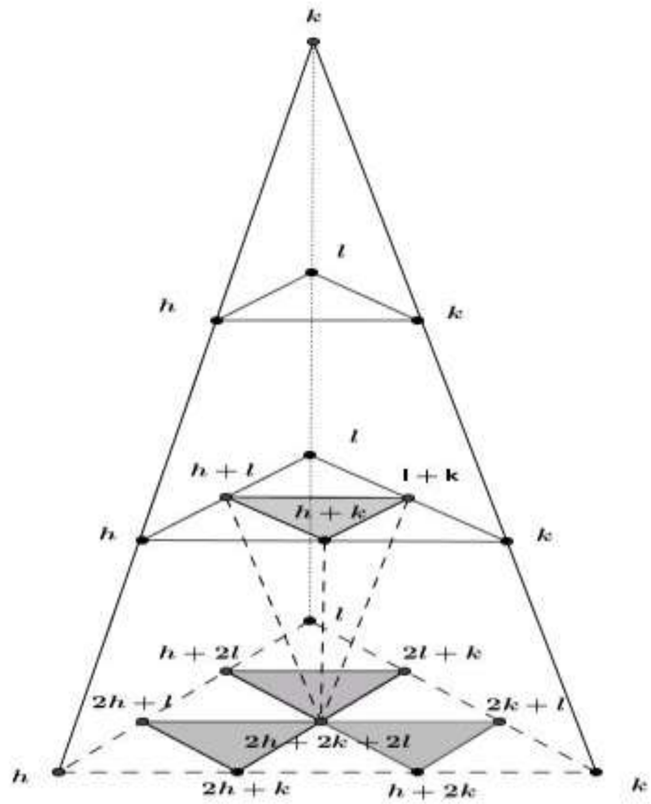

Figura 6: Piramide di Pascal generalizzata

Anche qui usando le sezioni di questa piramide, rimangono individuate delle righe

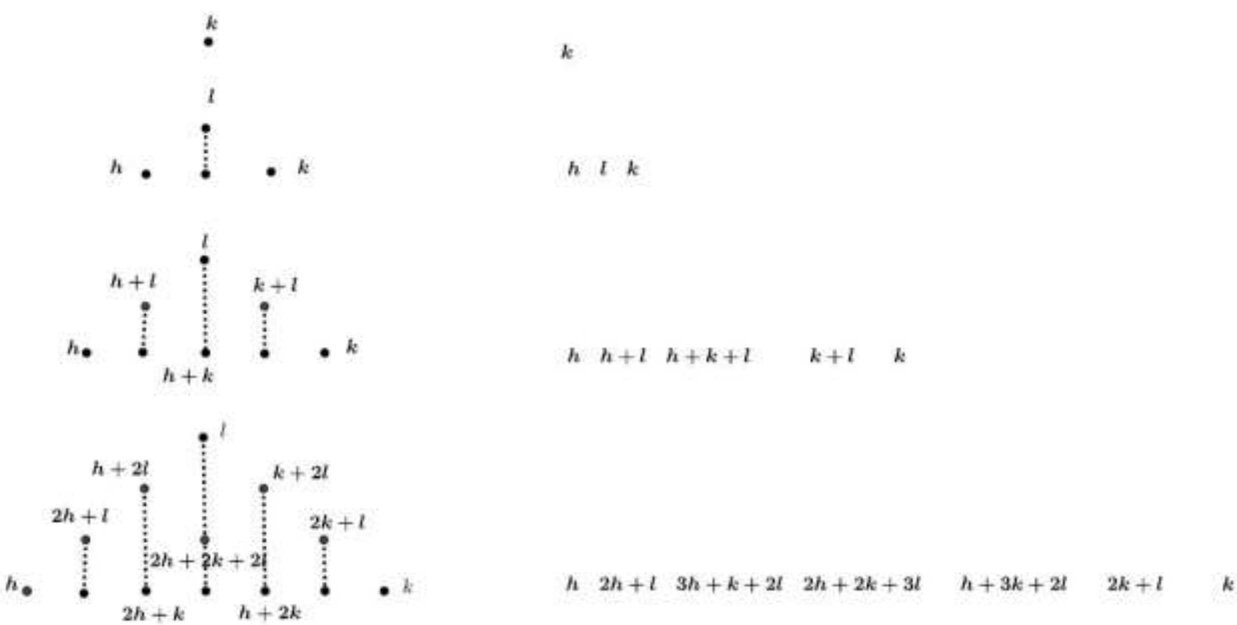

Figura 7

Disponendo tali righe in una tabella si genera il triangolo di Feinberg F(*h*,*k*,*l*) associato alla piramide P(*h*,*k*,*l*) .

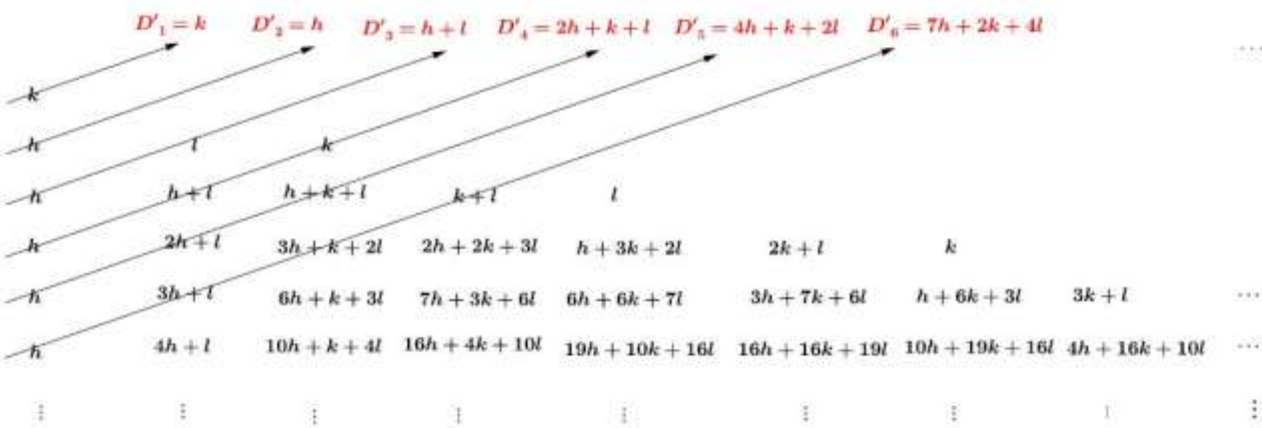

Figura 8: Triangolo di Feinberg F(*h*,*k*,*l*) associato alla piramide P(*h*,*k*,*l*) .

Anche in questo caso abbiamo un teorema che caratterizza le successioni ricorsive Tipo-Tribonacci (ovvero le successioni ricorsive omogenee lineari di grado 3 con coefficienti unitari), in termini di piramidi di Pascal generalizzate.

Theorem (4.1, [1]) *Let h; k and l be elements of a whichever ring, and let* (D_n) *the sequence of the diagonals, of the generalized Feinberg triangle F(h; k; l). Then* (D_n) *is a Tribonacci-like sequence whose seeds are k; h; h + l. Conversely every Tribonacci-like sequence* (H_n) *is exactly the sequence of the diagonals of the generalized Feinberg triangle* $F(H_2;H_1;H_3 - H_2)$.

Bibliografia

[1] G. Anatriello and G. Vincenzi: *Tribonacci-like sequences and generalized Pascal's pyramids,* International Journal of Mathematical Education, n Science and Technology (2014) accepted.

[2] B. A. Bondarenko: Generalized Pascal triangles and pyramids their fractals, graphs and applications Izdatel'stvo \FAN" RUz, Tashkent 1990. ISBN 5-648- 00738-8.

[3] B. A. Bondarenko: Generalized Pascal triangles and pyramids their fractals, graphs and applications http://www.fq.math.ca/Scanned/31-1/bondarenko.pdf

[4] R. A. Dunlap: The Golden Ratio and Fibonacci Numbers Copernicus, Springer Verlag New York 1995.

[5] M. Feinberg, *Fibonacci-Tribonacci,*The Fibonacci Quart., Vol. 1, No. 3 (October 1963), p. 71-74..

[6] M. Feinberg, *New Slants*, The Fibonacci Quart., Vol. 2, No. 2 (April 1964), pp. 223-227.

[7] A. Fiorenza, G. Vincenzi: *Limit of ratio of consecutive terms for general order- k linear homogeneous recurrences with constant coecients,* Chaos Solitons Fract, 2011; 44 p.147 --152.

[8] A. Fiorenza and G. Vincenzi: *From Fibonacci to the Golden Ratio,* Journal of Mathematics, Volume 2013 (2013), Article ID 204674,.

[9] A. J. Fleming: *Plant mathematics and Fibonaccis Towers*, Nature, 2002; 418 p.723.

[10] Park AE, Fernandez JJ, Schmedders K, Cohen MS. *The Fibonacci sequence: relationship to the human hand*, The J Hand Surgery 2003;28A(1):157–60.

[11] Randic´ M, Morales DA, Araujo O. *Higher-order Fibonacci numbers,* J , Math Chem 1996;20 (12):79–94.

[12] Ridley JN. *Packing efficiency in sunflower heads*, Math Biosci 1982;58(1):129–39.

[13] A. G. Shannon: *Tribonacci numbers and Pascal's Pyramid Fibonacci* ,Quart., 1977; 15 p.268 --275.

[14] S. Siani and G. Vincenzi: *Fibonacci-like sequences and generalized Pascal's triangles,* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (2013) DOI:10.1080/0020739X.2013.851806