Quel che noi insegnanti dobbiamo necessariamente sapere

Carlo Sbordone

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Educazione e Cultura Matematica in Italia.

Serve ciò che si studia a scuola?

CONGRESSO NAZIONALE MATHESIS

- Spoleto, 10 Aprile 2014

Chiostro di San Nicolò

Possiamo avere punti di vista diversi sul cosa e come insegnare in Matematica, ma dobbiamo mettere da parte le differenze e mandare avanti l'urgente impegno:

- di comunicare alle Famiglie che gli Insegnanti e la Scuola meritano rispetto e risorse
- di ribadire agli insegnanti attuali e futuri il fatto che conoscere più Matematica è un'esigenza indifferibile per noi tutti
- di convincere gli studenti che è possibile ed importante capire la Matematica

L'Accademia Nazionale dei Lincei in collaborazione con il MiUR e con il supporto del Piano Nazionale Lauree Scientifiche, ha avviato il programma operativo “Con la Mente e con le Mani” (2011-14)

Città della Scienza (insieme con Museo Leonardo da Vinci (Mi) , Museo Galileo Galilei (Fi)) ha avviato il progetto “Logica mente” (S. Rao-C.Sbordone -2014-15)

Laboratorio di Matematica, non tanto come luogo fisico attrezzato, quanto come momento in cui lo studente, guidato sapientemente dal docente, progetta e conduce osservazioni sperimentali sugli oggetti e sui fenomeni matematici, interpreta i risultati, formula semplici previsioni e congetture, intuisce i concetti e si avvia all’argomentazione logica, discutendone con i compagni e con i docenti.

ANALOGO ATTEGGIAMENTO DURANTE IL PROCESSO DI FORMAZIONE: l’insegnante, trasformato in discente, deve monitorare i processi didattici diversi dalla solita lezione cattedratica per esser pronti ad esibirsi nuovamente come docenti a fianco dei propri studenti

Per la Matematica si sente l'esigenza di trattare alcuni argomenti ritenuti un pò ostici, perchè spesso trattati in maniera non adeguata, affrettata (frazioni, numeri decimali,...), alle volte non è chiaro ciò che rientra in una definizione e ciò che rientra in un Teorema.

PROPRIETA' DI LINGUAGGIO:

Definizione di un teorema : NO

Enunciato di un teorema : SI

Dimostrazione di un assioma : NO

Verifica di un assioma : SI

SUI MEDIA terminologia impropria"Teorema accusatorio"

Mettere in atto un processo che trasformi la Matematica astratta, così come viene insegnata all'Università, in prodotti concreti, cioè in lezioni spendibili in classe, ove l'insegnante aiuta lo studente a capire e a utilizzare efficacemente il prodotto.

Ad esempio, "le frazioni" rappresentano la prima occasione impegnativa di ricorso all'astrazione per gli allievi della Scuola secondaria di primo grado ed è qui che si verificano, su larga scala, fenomeni di incomprensione

Dal punto di vista della matematica di livello universitario, il concetto di frazione (o di numero razionale) è “semplice” e richiede poche ore di lezione:

frazione = classe di equivalenza di coppie ordinate di interi

Non si può pretendere di presentare a livello così astratto le frazioni in una classe di prima o seconda scuola secondaria di primo grado.

Infatti, i ragazzi concepiscono le frazioni come “parte di un tutto” e questa giusta concezione intuitiva è molto lontana dal mondo delle coppie ordinate e delle relazioni di equivalenza .

Quindi l’insegnante ha appreso all’Università le frazioni in un modo e deve insegnarle in altro modo, magari confidando sul materiale didattico in circolazione.

Due slogan in discussione:

“ NON SI PUO’ INSEGNARE QUELLO CHE NON SI SA”

“ PIU’ SI CONOSCE SU UN ARGOMENTO E MEGLIO LO SI INSEGNA”

E.G. Begle : la conoscenza dell’algebra moderna (teoria dei gruppi, anelli, campi) da parte degli insegnanti non è correlata con i successi dei loro allievi nel calcolo algebrico e nella conoscenza dell’algebra elementare

Viceversa: una buona comprensione dell'algebra del sistema dei numeri reali (a cominciare dalle frazioni fino agli irrazionali) ed un uso trasparente (a lezione) delle metodologie della matematica

(articolazione empirica in ASSIOMI, DEFINIZIONI, TEOREMI, REGOLE)

ha significative ricadute sulla comprensione dell'algebra elementare da parte degli allievi

La frazione è un punto della retta dei numeri e non dovrebbe avere una presentazione frammentaria e variegata, che , peraltro ricorre a figure bidimensionali ! PIZZE, TORTE,

DIAGRAMMI DI VENN CONTROPRODUCENTI

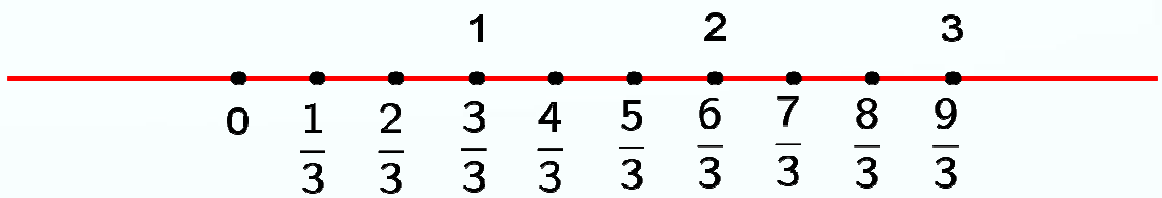
La definizione consigliata di frazione è

"un punto della retta dei numeri"

costruito in modo preciso ed inequivocabile

Per esempio, $\frac{1}{3}$ è il primo punto di suddivisione a destra di zero, quando il segmento da 0 a 1 è diviso in tre segmenti di uguale lunghezza.

Una volta posizionato 1/3 costruiamo la sequenza dei terzi dividendo in tre parti uguali anche i segmenti tra interi successivi: [1,2],[2,3],...



Allora, $\frac{5}{3}$ è il quinto elemento della sequenza dei terzi

Exploit di due ragazzi Usa (1997)

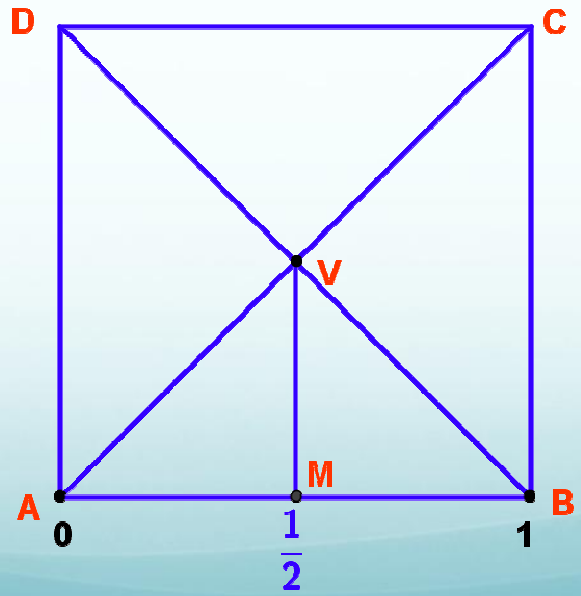
Esempi di uso “smart” del computer

Una soluzione imprevista a un problema ben noto da 2000 anni:

“Dividere un segmento in un dato numero di parti uguali”

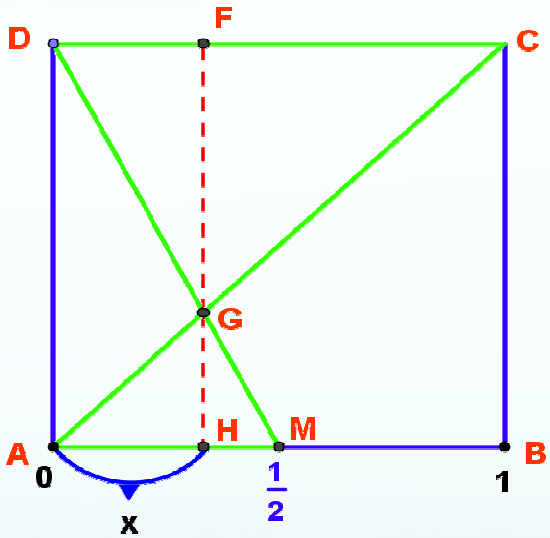
Dato l'intervallo [0;1] di estremi A e B per determinare la posizione di 1/3 :

- Costruiamo il quadrato ABCD di lato 1
- Tracciamo le diagonali DB e AC
- Dal punto di incontro V delle diagonali tracciamo un segmento VM perpendicolare ad AB
- Il punto M sarà il punto medio di AB e quindi M corrisponderà ad 1/2



Per determinare la posizione di 1/3

- Congiungiamo M con D
- Dal punto di incontro G di DM con AC tracciamo la perpendicolare GH ad AB e la perpendicolare GF ad CD



Per la similitudine dei triangoli AGM e CGD otteniamo

GH:GF = AM:CD

Posto AH=x abbiamo x:(1-x)=1/2:1 => x=1/3

Procedendo in modo analogo otteniamo 1/4, 1/5,…..

DIVISIONE SEGMENTO

Il metodo classico di suddivisione mediante la proiezione parallela, sul segmento da dividere, di segmenti consecutivi uguali prevede una notevole familiarità con il parallelismo, con le proiezioni parallele, con la similitudine e con il Teorema di Talete in particolare, è necessaria una sorta di interiorizzazione di queste nozioni

DIVISIONE SEGMENTO CON METODO TALETE

Esempio concreto

Per comprendere, nel caso della divisione di frazioni

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$$

il significato di “INVERTI E MOLTIPLICA”

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$$

Se un ragazzo spende ogni giorno esattamente la stessa quantità di soldi (dalla sua paghetta settimanale)

Se con 2/3 della paghetta arriva da lunedì a venerdì, cioè sostiene i 5/7 delle spese settimanali, che frazione della paghetta spende ogni settimana?

La quantità x che si cerca è data dalla proporzione

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = x : 1$$

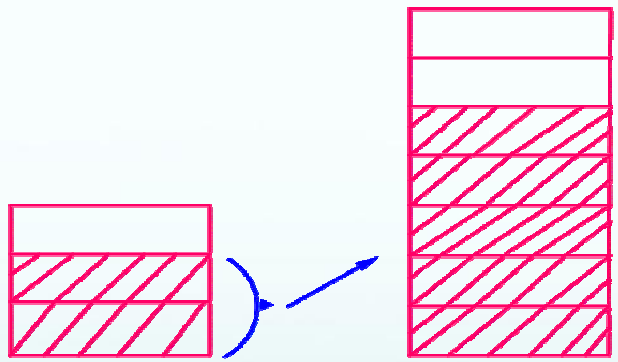
cioè

$$x = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$$

Le spese per 5 giorni si coprono con 2/3 della paghetta, quindi le spese per 1 giorno si coprono con

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}$$ della paghetta

cioè con 2/15 della paghetta. Moltiplico per 7 e ho $\frac{2}{15} \times 7 = \frac{14}{15}$



$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{14}{15}$$

"Dunque a fine settimana mette da parte un quindicesimo della paghetta settimanale"

Gli studenti hanno difficoltà nell'accettare l'uguaglianza:

$$0.999\ldots = 1$$

mentre non discutono l'uguaglianza

$$0.121212\ldots = \frac{12}{99}$$

e neanche le uguaglianze

$$0.333\ldots = \frac{1}{3}$$

$$0.111\ldots = \frac{1}{9}$$

Credete nell'uguaglianza 0.999… = 1 ? E perché ?

1. Non ci credo, perché, se un numero decimale comincia con 0. … non puo' essere uguale a 1, ma è più piccolo di 1

2. Teoricamente 0.999… è uguale a 1, ma vi è una leggerissima differenza tra i due. Cioè ogni numero minore di 1 è anche minore di 0.999…..

3. I numeri

0.9 0.99 0.999 ecc…

sono tutti minori di 1 e tale è anche 0.999…

4. Ci credo e basta, perché così è scritto sul libro e c’è pure una lunga spiegazione!

5. Non ci credo, ma per avere un voto sufficiente non ho scelta

L’uguaglianza

0.9999… = 1

è impropria ?

La verità è che è necessario introdurre il concetto di limite di una successione

$a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.99$, $a_3 = 0.999$, ecc

o di somma di infiniti numeri

$0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots$

Un metodo per convincere della veridicità dell’uguaglianza per studenti che non sono ancora in possesso del concetto di limite di una successione è il seguente:

Moltiplichiamo ambo i membri dell'uguaglianza

$$x = 0.999\ldots$$

per 10, ottenendo

$$10\,x = 9.999\ldots$$

E poi sottraiamo la prima dalla seconda, ottenendo

$$9\,x = 9$$

Cioè $x = 1$.

Questo argomento sembra convincente, ma le operazioni (moltiplicare membro a membro) eseguite su allineamenti decimali non sono giustificate a priori.

Ad esempio, procedendo con analoga disinvoltura, si troverebbe

$$0 = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots =$$

$$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots =$$

$$= 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \ldots = 1 + 0 = 1$$

Cioè un assurdo.

Proviamo ora a supporre che $0.999\ldots < 1$

Allora , la differenza tra secondo e primo membro deve essere un numero positivo, esattamente allo stesso modo di come accettiamo l'implicazione

$$0.9 < 1 \quad \rightarrow \quad 1 - 0.9 = 0.1 > 0$$

Allora a che cosa sarebbe uguale la differenza

$$1 - 0.999\ldots \ ?$$

Esso non può essere uguale ad un numero del tipo

$$d = 0.0000000000001$$

Qualunque sia il numero di zeri che aggiungiamo in d, dopo il punto decimale. Infatti la somma di un tale numero con 0.999… deve essere strettamente maggiore di

$$0.0000000000001 + 0.999999999999 = 1$$

Conversione di una frazione

in

numero decimale (limitato o non limitato)

Esempio

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

Ricordo che per definizione

$$0.375 = \frac{375}{1000}$$

Allora per il teorema sulla semplificazione delle frazioni

$$0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{3 \times 125}{8 \times 125} = \frac{3}{8}$$

Ovvero, partendo dal fatto che

$$\frac{3}{8} = 3 : 8$$

eseguiamo la divisione

$$3 \times 10^4 : 8$$

Oppure

$$3 \times 10^n : 8$$

con n sufficientemente grande e poi mettiamo il punto decimale al posto giusto

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{10^4} \times \frac{3 \times 10^4}{8}$$

$$= \frac{1}{10^4} \times 3750 =$$

Per definizione di numero decimale

$$= \frac{3750}{10^4} = 0.3750 \ = 0.375$$

Esempio 2

Meno semplice è dimostrare che

$$(*) \qquad \frac{3}{7} = 0.4285714285\ 71\ldots$$

COSA SERVE ?

1. Dare significato ad un allineamento decimale illimitato come punto della retta dei numeri
2. Mostrare che (*) si ottiene attraverso l'algoritmo della divisione
3. Provare che l'allineamento decimale è periodico, cioè coincide con una frazione che sta sulla retta dei numeri

Di solito si fa 3) ma si sottovaluta 1) e 2)

Algoritmo

$$\frac{3}{7}=\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{7}{10^5}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^6}(\ldots\ldots)+\ldots$$

a livello elementare

A livello più alto si usano le serie convergenti

Un allineamento decimale si dice proprio se è del tipo

$$m.\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$$

e le cifre a_i non sono definitivamente uguali a 9.

Dunque, ad esempio

$$0.999\ldots$$

ha una struttura impropria

Teorema (sull'espressione decimale delle frazioni) Un numero razionale può essere espresso univocamente come allineamento decimale proprio (periodico), ma non ha mai una struttura impropria.

L'algoritmo della divisione

a : b tra interi, consente di determinare un'unica coppia di interi q e r tali che (q = quoziente, r = resto)

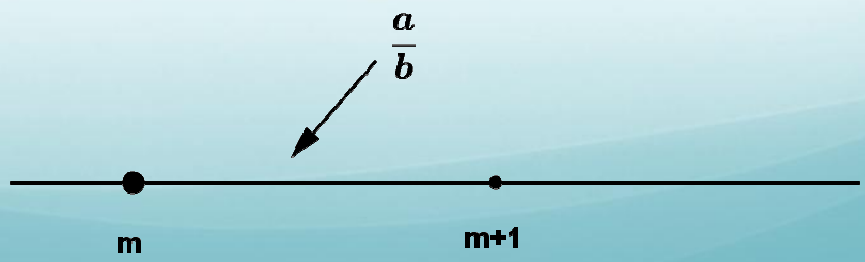
$$a = bq + r \qquad (0 \leq r < b)$$

e produce l'espressione decimale della frazione

$$\frac{a}{b} = m.a_1 a_2 a_3 \ldots$$

Ad esempio: Se $\frac{a}{b} \geq 0$, la parte intera $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si ottiene determinando m sulla retta dei numeri in modo che

$$\frac{a}{b} \in [m, m+1[$$



Esempio

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{7} \in [0,1[$$

quindi m = 0 (m = parte intera di $\frac{3}{7}$ è zero)

Per avere la prima cifra decimale a_1 , dividiamo [0,1[in dieci intervallini di lunghezza $\frac{1}{10}$ in modo che

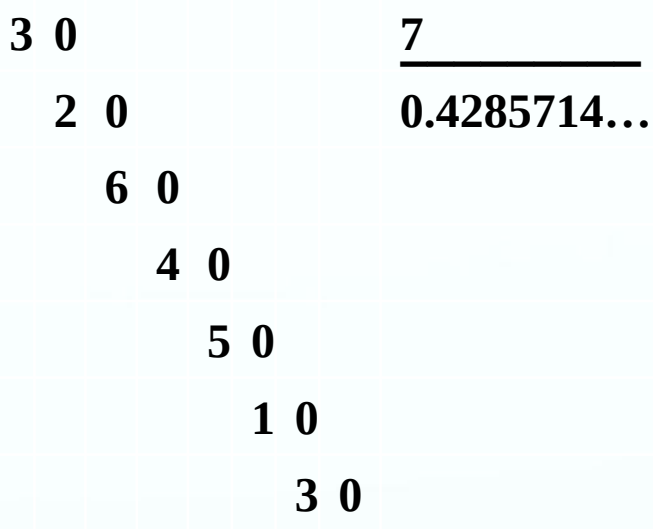
$$\frac{3}{7} \in \left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}\right[= \left[\frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right[= [0.4, 0.5[$$

perché

$$\frac{4}{10} \leq \frac{3}{7} < \frac{5}{10}$$

Per avere a_2 , divido [0.4,0.5[in dieci intervallini di lunghezza $\frac{1}{10}$ e così $\frac{3}{7} \in [0.42, 0.43[$

In realtà, seguendo il familiare procedimento di divisione si ha



in cui i resti possono essere 1, 2, 3, 4, 5, 6 (devono essere minori del divisore b=7) e mai 0, perché $\frac{3}{7}$ non è una frazione decimale

Si ottiene così l'espressione decimale (periodica)

$$\frac{3}{7} = 0.4285714\ldots$$

In generale, dato il numero razionale non negativo $\frac{a}{b}$,

l'unica espressione decimale $\frac{a}{b} = m\,.a_1 a_2 a_3 \ldots$

può essere ottenuta determinando la parte intera $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ di $\frac{a}{b}$, cioè il numero intero non negativo m tale che

$$(1) \qquad m \leq \frac{a}{b} < m + 1$$

suddividendo il segmento [m , m+1[in dieci segmenti di uguale lunghezza si determina $a_1 \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ che soddisfa la relazione

$$m + \frac{a_1}{10} \leq \frac{a}{b} < m + \frac{a_1 + 1}{10}$$

Successivamente si divide il segmento $\left[m + \frac{a_1}{10}, m + \frac{a_1 + 1}{10} \right[$

in dieci segmenti di uguale lunghezza per determinare la cifra $a_2 \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ che soddisfa

$$m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq \frac{a}{b} < m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2}$$

e così via per trovare l'i-sima cifra a_i

Notiamo che si è sempre determinata una suddivisione $\frac{a}{b}$ dell'intervallo [0, +∞[mediante una sequenza di (segmenti) intervalli superiormente semiaperti [α, β[

Se accade che $\frac{a}{b}$ sia tale che a e b siano primi tra loro, con denominatore b multiplo di 2 o di 5, allora $\frac{a}{b}$ coinciderà con uno degli estremi di tali intervalli e sarà proprio un numero decimale limitato.

Ad esempio $\frac{1}{5} = 0.2000 \ldots = 0.2$

Si osservi inoltre che poiché la parte intera m, che viene determinata al primo passo, in corrispondenza della frazione $\frac{a}{b} = 1$ è 1 e non zero, allora con tale procedimento il numero 1 non potrà essere espresso come 0.999…

Teorema Nessun allineamento decimale determinato dalla divisione di due numeri naturali $a : b$ può essere costitutito da un certo punto in poi da sole cifre uguali a 9.

Dimostrazione Se fosse

$$\frac{a}{b} = m\,.a_1 a_2 a_3 \ldots$$

con $a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots = 9$ allora sarebbe (grazie alla formula per la somma di progressioni geometriche)

$$m.a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_n = m.a_1 a_2 \ldots a_k + \frac{9}{10^{k+1}} + \frac{9}{10^{k+2}} + \ldots \frac{9}{10^n}$$

$$= m.a_1 a_2 \ldots a_k + \frac{9}{10^{k+1}} \left(\frac{1 - \frac{1}{10^{n-k}}}{1 - \frac{1}{10}} \right) =$$

$$= m.a_1 a_2 \ldots a_k + \frac{9}{10^k}\left(1 - \frac{1}{\frac{1}{10^{n-k}}}\right) =$$

$$= m.a_1 a_2 \ldots a_k + \frac{1}{10^k} - \frac{1}{10^n}$$

Essendo poi $\frac{a}{b} \geq m.a_1 \ldots a_k \ldots a_n$, si ha

$$\frac{a}{b} \geq m.a_1 a_2 \ldots a_k \ldots a_n =$$

$$= m.a_1 a_2 \ldots a_k + \frac{1}{10^k} - \frac{1}{10^n}$$

E tale relazione deve valere $\forall\ n \geq k$. Ne segue

$$m.a_1 a_2 \ldots a_k + \frac{1}{10^k} \leq \frac{a}{b}$$

E ciò contraddice il fatto che il numero decimale $m.a_1 \ldots a_k$ è la migliore approssimazione per difetto di $\frac{a}{b}$ con numero della forma $\frac{m}{10^k}$

Allineamenti decimali sulla retta dei numeri

Seguendo la definizione di serie un allineamento qualsiasi è definito come

$$0.a_1 a_2 a_3 \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

con $a_i \in \{0,1,\ldots,9\}$

Limitandoci al caso periodico, la successione (a_k) assume un numero finito di valori, è perciò limitata, e la serie è maggiorata da

$$M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}$$

Comincio dal caso semplice

1.111….

Dove lo posiziono sulla **retta dei numeri**?

Per definizione

$$1.111\ldots = 1 + 0.111\ldots =$$

$$= 1 + 0.1 + 0.01 + \ldots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^{k}}$$

Faccio uso della formula per la somma della serie geometrica

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots\ldots = \frac{1}{1 - r}$$

vera per -1< r < 1 e conseguenza del fatto che

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^{k-1} = \frac{1 - r^k}{1 - r}$$

insieme alla relazione

$$\lim_k \frac{1 - r^k}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}$$

Dunque, concetto di limite di successione. Ma vediamo se possiamo fare a meno.

Fortunatamente uno studente universitario U.S.A nel ‘98 propose al suo professore una dimostrazione “visiva” della formula

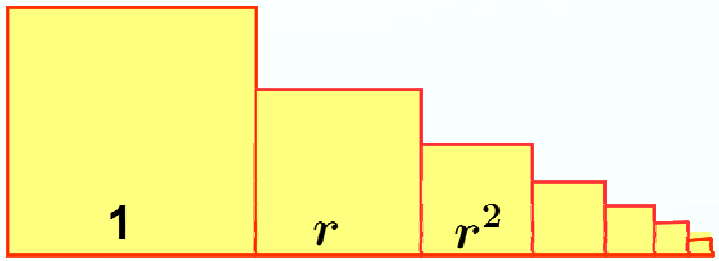
$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1 - r}$$

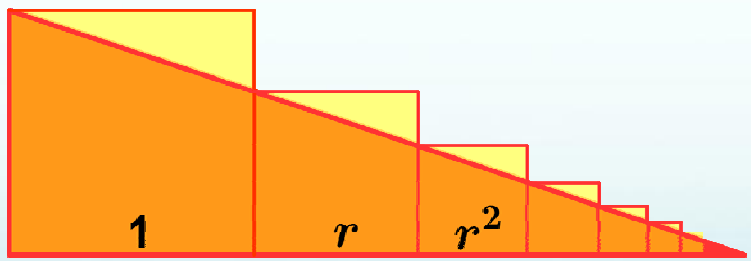
serie geometrica di ragione $|r|<1$

ottenuta come somma di lunghezze dei lati di quadrati di lati

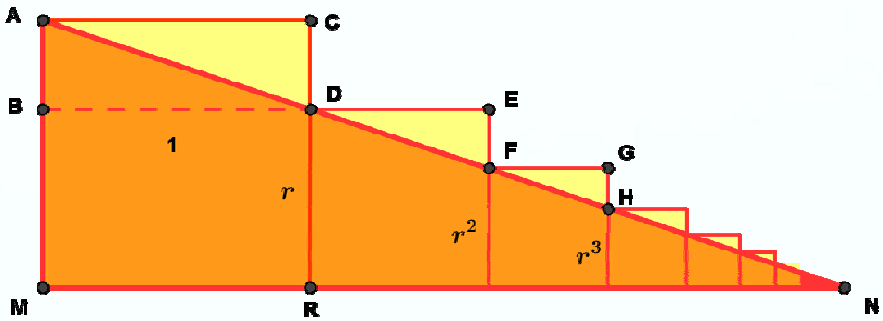
$$1 , r , r^2 , \ldots$$

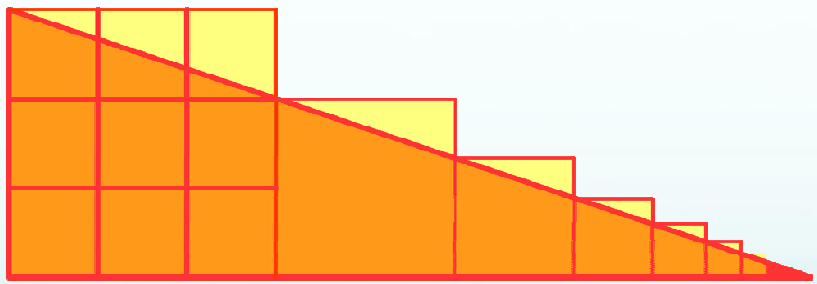
Costruiamo dei quadrati successivi (come in figura) partendo dal quadrato unitario, vedremo che con questa costruzione i lati successivi saranno rispettivamente r, r^2, r^3 …..





La somma $1+r+ r^2 +\ldots$ coincide con la lunghezza MN della base del triangolo AMN



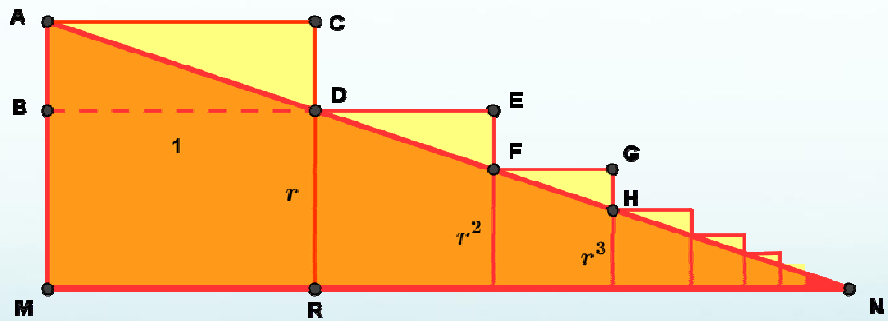


Quindi volendo trovare, CON LA MENTE E CON LE MANI, la somma

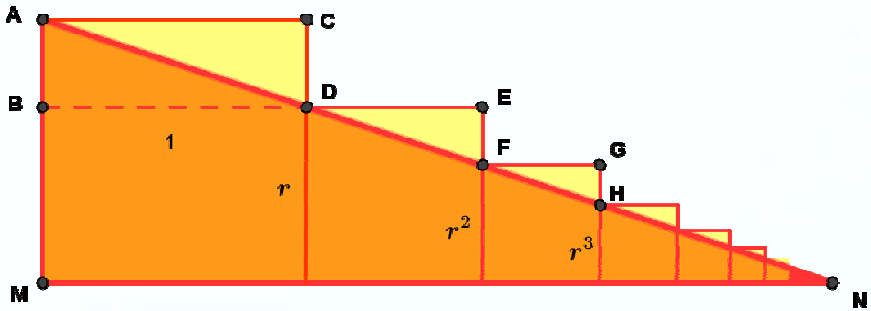
$$1+r+ r^2+ r^3 +...$$

basta:

Disegnare il triangolo la cui ipotenusa passa per A e D e la cui base MN giace sulla retta dei numeri



I triangoli colorati in giallo e il triangolo AMN sono simili:



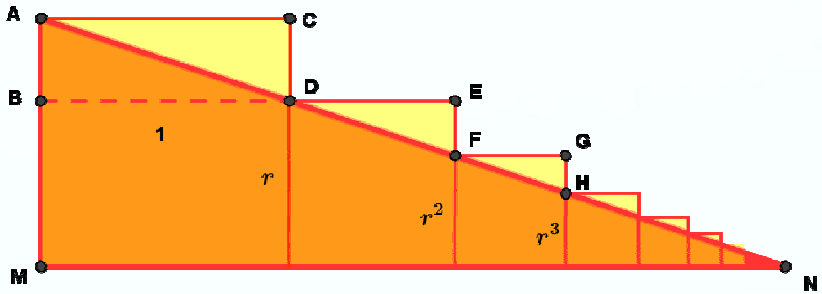
Infatti, se da D tracciamo la perpendicolare ad AM, otteniamo il triangolo rettangolo ABD congruente ad ACD, inoltre il triangolo DEF per costruzione sarà simile al triangolo DBA e quindi ad ACD, da cui avremo che:

$$DE : AC = EF : CD$$

$$r : 1 = EF : (1-r) \Rightarrow EF = r - r^2$$

E quindi costruiamo il quadrato successivo di lato r^2

Continuando allo stesso modo dalla similitudine dei triangoli colorati di giallo si costruiscono i quadrati successivi di lati rispettivamente r^3, r^4,……



Inoltre, dalla similitudine dei triangoli AMN ed ABD si ottiene che:

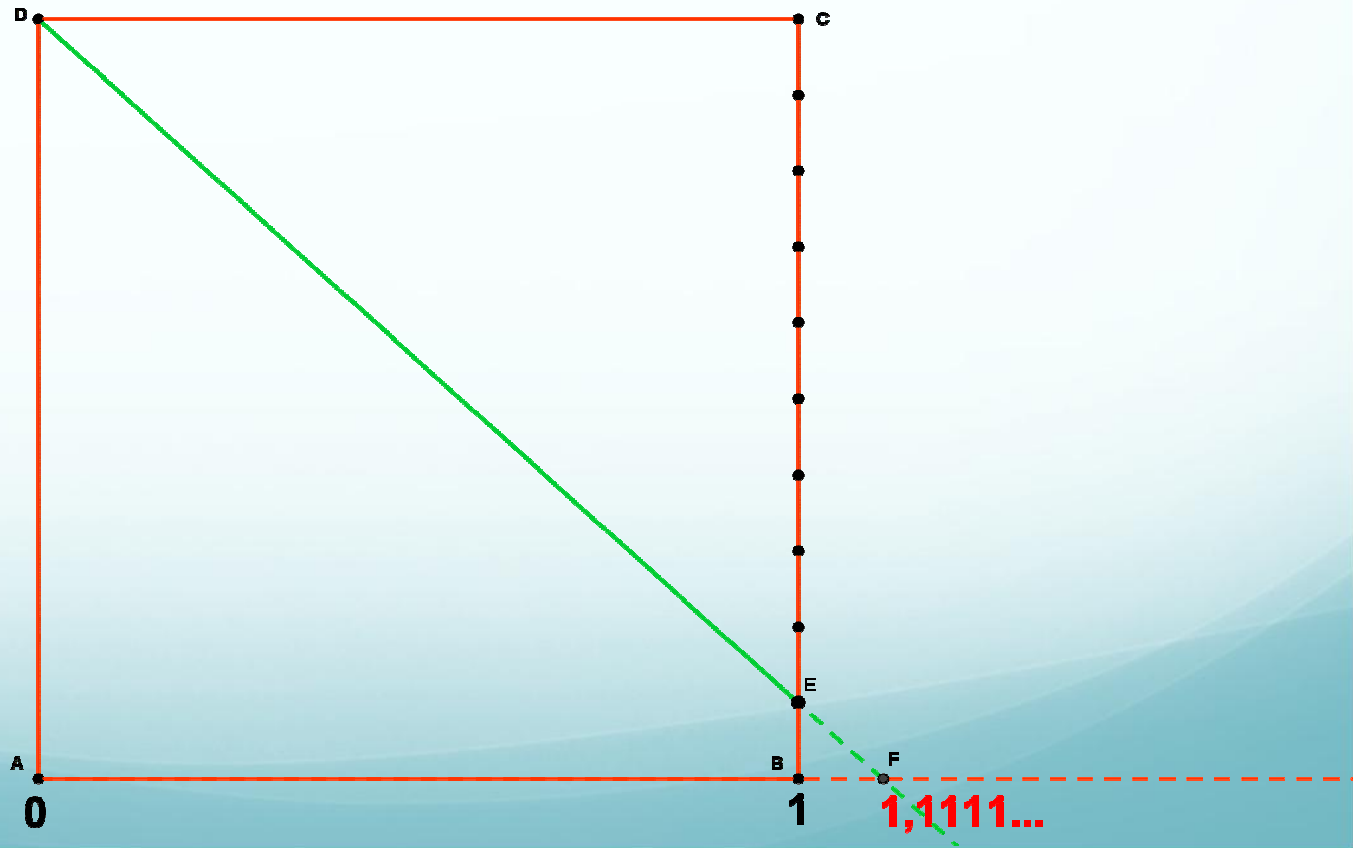
$$MN : BD = AM : AB$$

$$1+r+ r^2 +\ldots: \ 1 = 1 : 1-r$$

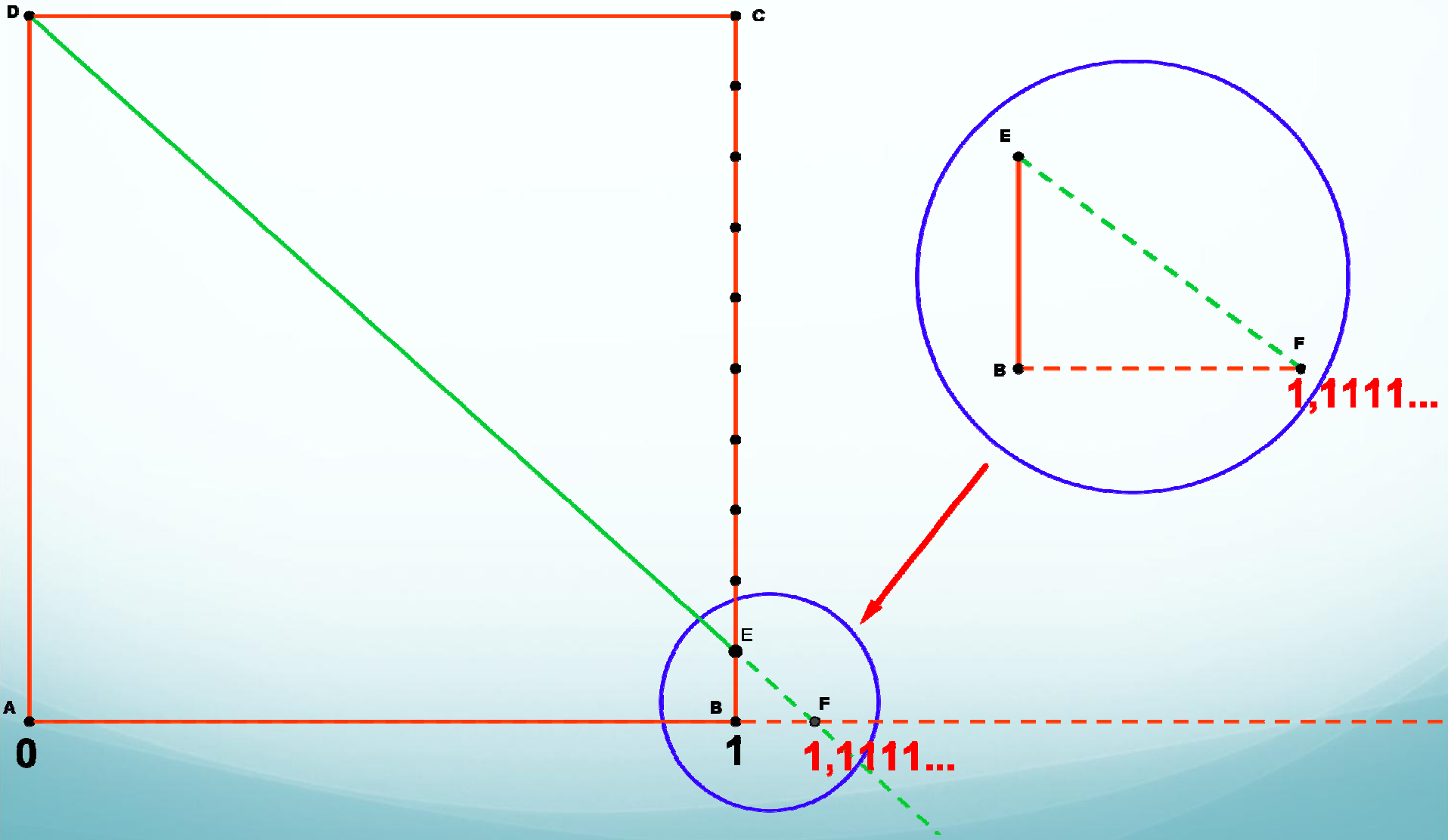
quindi $$1 + r + r^2 + r^3 + ... = \frac{1}{1 - r}$$

Esempio : Vediamo come rappresentare 1,1111…, sulla retta dei numeri

- Disegniamo il segmento unitario AB e costruiamo il quadrato ABCD
- Dividiamo (con il metodo ricorsivo) il segmento BC in 10 parti uguali e consideriamo BE la decina parte di BC
- Prolunghiamo DE e AB il punto di incontro F sarà 1,11111….



Analizziamo in dettaglio



I passi della rappresentazione di 1,111……

Rappresentazione di 1,111..

Quindi posso ottenere

$$0.111\ldots = 0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots$$

$$= \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{9}$$

COME SIAMO ABITUATI ….

$$0.222\ldots = \frac{2}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right)$$

$$= \frac{2}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{2}{9}$$

ma anche

$$0.999\ldots = \frac{9}{9} = 1$$

In tal modo, la frazione

$$1 = \frac{1}{1}$$

può essere espressa come allineamento proprio

$$1 = 1.0000\ldots$$

ma non come 0.9999….(improprio)

Infatti, se $\frac{a}{b} = 1$, la parte intera m, che si determina al primo passo dell'algoritmo, non è 0, ma è $m = 1$

Perché stiamo usando intervalli del tipo [α, β[superiormente semiaperti. Le cifre decimali sono $a_i = 0$ $\forall i \in \mathbf{N}$

Allora, se l'allineamento

0.9999….

non viene mai fuori dall'algoritmo della divisione, in quale contesto appare?

Esso può essere interpretato come somma di una serie

In generale, si ha

$$0.a_1a_2a_3\ldots = 0.a_1 + 0.0\,a_2 + 0.00\,a_3 + \ldots$$

$$= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots$$

cioè, nel caso $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 9$

0.999….=0.9+0.09+0.009+…

Ricordando la formula per la serie geometrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} cr^{k-1} = \frac{c}{1-r}$$

per -1< r < 1 si ha, con c = 0.9 = 9/10 e con r = 1/10

$$0.999\ldots = \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1$$

Cioè la successione delle somme parziali della serie

0.9 , 0.99 , 0.999 , ….

converge a 1 .

In questo contesto

0.999….

è una espressione della somma della serie

0.9 +0.99+ 0.999+ ….

e non è visto come allineamento decimale del tipo 0.25 o 0.333… ottenuto dall'algoritmo della divisione

In questo contesto l'uguaglianza

$$0.999\ldots \overset{def.}{=} 0.9+0.09+0.009+\ldots = 1$$

è vera.

$x = 0.999\ldots$

$10\,x = 9.999\ldots$

$\Downarrow$

$10x - x = 9$

$9x = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

L'esistenza di $0.999\ldots$ può essere accettata generalizzando le uguaglianze

$$\frac{1}{9} = 0.111\ldots \qquad \frac{2}{9} = 0.222\ldots$$

o attraverso calcoli

$0.232323\ldots + 0.767676\ldots = 0.999\ldots$

$0.333\ldots \times 3 = 0.999\ldots$

In alternativa al metodo classico suddividiamo la semiretta **]0, +∞[** in intervalli inferiormente semiaperti **]α,β]**

Esempio

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{3} \in \,]0,1]$$

algoritmo (alternativo) della divisione a : b = 3: 3 tra interi :

Determinare un'unica coppia di interi q e r tali che

$$a = bq + r \qquad (0 < r \leq b)$$

3: 3 è una divisione in cui il quoziente è 0 e il resto è 3

$$3 = 3 \times 0 + 3$$

invece con la scelta classica

$$a = bq + r \qquad (0 \leq r < b)$$

il quoziente di 3: 3 è 1 e il resto è 0

$$3 = 3 \times 1 + 0$$

Il concetto di numero irrazionale è obiettivamente difficile per due ragioni, una di natura individuale ed una di natura complessiva

1) La difficoltà di accettare che due segmenti possano essere incommensurabili (cioè che non si riesca a trovare una loro unità comune per quanto piccola la si cerchi)

2) La difficoltà di accettare che “complessivamente” l’insieme dei numeri razionali, sebbene ovunque denso, non riempia un segmento. Intuitivamente sembra impossibile che in un segmento possano coesistere un insieme infinito (di cardinalità numerabile, cioè l’insieme dei suoi punti razionali) ed un altro insieme infinito disgiunto dal primo, anzi infinito di un livello maggiore (ha cardinalità maggiore del numerabile, cioè l’insieme dei suoi punti irrazionali)

E’ inaccettabile che ci si fermi ai razionali fino alla fine delle superiori.

Eppure si presentano varie occasioni di avvicinamento a qualcuno dei noti metodi per introdurre i numeri irrazionali.

Ad esempio allorchè si parla di misura di un segmento (e poi più in generale di misura di una grandezza) si perviene ad un elemento di separazione tra due insiemi di numeri (razionali) costituiti da misure approssimate per difetto e per eccesso

talmente poco chiara l’identità e la natura degli irrazionali da non poter neanche arrivare a percepire le difficoltà menzionate.

PERCHE' GLI IRRAZIONALI SONO TRASCURATI A SCUOLA?

La quasi totale assenza dei numeri irrazionali dal percorso scolastico e' forse dovuta al fatto che la pratica matematica a Scuola è purtroppo ridotta ad apprendimento ed uso di tecniche di calcolo. E se invece provassimo finalmente a presentare la nostra disciplina come il risultato della costruzione di un grosso edificio logico? Un edificio, che si è realizzato fin qui (ed ancora si evolve) a seguito di riflessioni atte a rendere la matematica via via più adeguata a rispondere alle necessità umane. Probabilmente in tal modo meglio potremmo dare un 'idea degli insiemi numerici e della loro collocazione gerarchica come sistema organico di conoscenze.

I numeri irrazionali entrano in scena a seguito di sgradevoli sorprese: il lato del quadrato non è' frazione della diagonale; le altezze di un triangolo equilatero non sono frazioni del lato, ecc. Dunque le frazioni non bastano a risolvere problemi geometrici ed equazioni di secondo grado. Al pari di come i numeri naturali non bastano a studiare problemi con sottrazioni , per cui si è convenuto di ampliare il campo numerico fino a introdurre i numeri negativi e lo zero e quindi i numeri interi relativi. Al pari di come i numeri interi non bastano a risolvere equazioni di primo grado, per cui si è convenuto di ampliare il campo numerico fino alle frazioni.

Dunque, un edificio che cresce. Insieme di numeri, non solo numeri singoli con le loro identità specifiche.

N={1,2,3,4,5,6.....} Insieme dei numeri naturali o interi positivi

Z={0,-1,1,-2,2,.....} Insieme degli interi relativi

Q=Insieme delle frazioni positive o non positive.Ovvero Insieme dei numeri razionali

R=Insieme dei razionali unito a quello dei numeri irrazionali. Ovvero insieme dei numeri reali.

Questo ultimo insieme è in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta, anzi è del tutto isomorfo a tale retta, al punto che possiamo identificare R con tale retta. Qui invochiamo il supporto dell'algebra moderna con le sue nozioni di isomorfismo .

Dal punto di vista della quantità dei loro elementi, gli insiemi N, Z e Q sono alla pari, cioè, come si dice con linguaggio preciso, sono "equipotenti" ovvero sono tra loro in corrispondenza biunivoca. (Si mostri agli allievi di 12 anni il procedimento diagonale di Cantor)

Inoltre, tra di punti di una retta cade sempre un numero razionale (Q è denso in se)

Qui sembra opportuno segnalare il Teorema di McKay, apparso in un articolo di L. Sherzer (pubblicato sulla rivista americana MATHEMATICS THEACHER del 1973) che mostra come, date le due frazioni positive ridotte ai minimi termini $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$,la frazione ottenuta con somma dei numeratori al numeratore e somma dei denominatori al denominatore è compresa fra le due :

$$\frac{a}{b} < \frac{(a + c)}{(b + d)} < \frac{c}{d}$$

Questo metodo nella pratica è molto più agevole di quello tradizionale che ricorre alla media aritmetica:

$$\frac{a}{b} < \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)}{2} < \frac{c}{d}$$

La cosa interessante è che MaKay era studente di una scuola superiore e Sherzer il suo insegnante di matematica!

Poi si prova anche che Q è denso sulla retta , ma ciononostante non riempie la retta ed anzi quello che rimane sulla retta tolti tutti i razionali e'un insieme infinito di punti , gli irrazionali, che non sono in corrispondenza biunivoca con Q ma lo sono con R.
Si può mostrare che R ha potenza maggiore di quella di Q.

Cioè ci sono molti più numeri irrazionali che razionali.

Teorema di Pitagora

Wislawa Szymborska, Nobel 1996

"Non ho difficoltà ad immaginare un'antologia dei più bei frammenti della poesia mondiale in cui trovasse posto anche il Teorema di Pitagora. Perché no? Lì c'è quella folgorazione che è connaturata alla grande poesia e una forma sapientemente ridotta ai termini più indispensabili e una grazia che non a tutti i poeti è stata concessa"

In "Letture facoltative" (2006)

PITAGORA CON LIQUIDI ESATTO

Teorema di Pitagora

Pitagora was wrong

INTRODUZIONE AI FRATTALI

QUANTO È LUNGA LA COSTA ITALIANA?

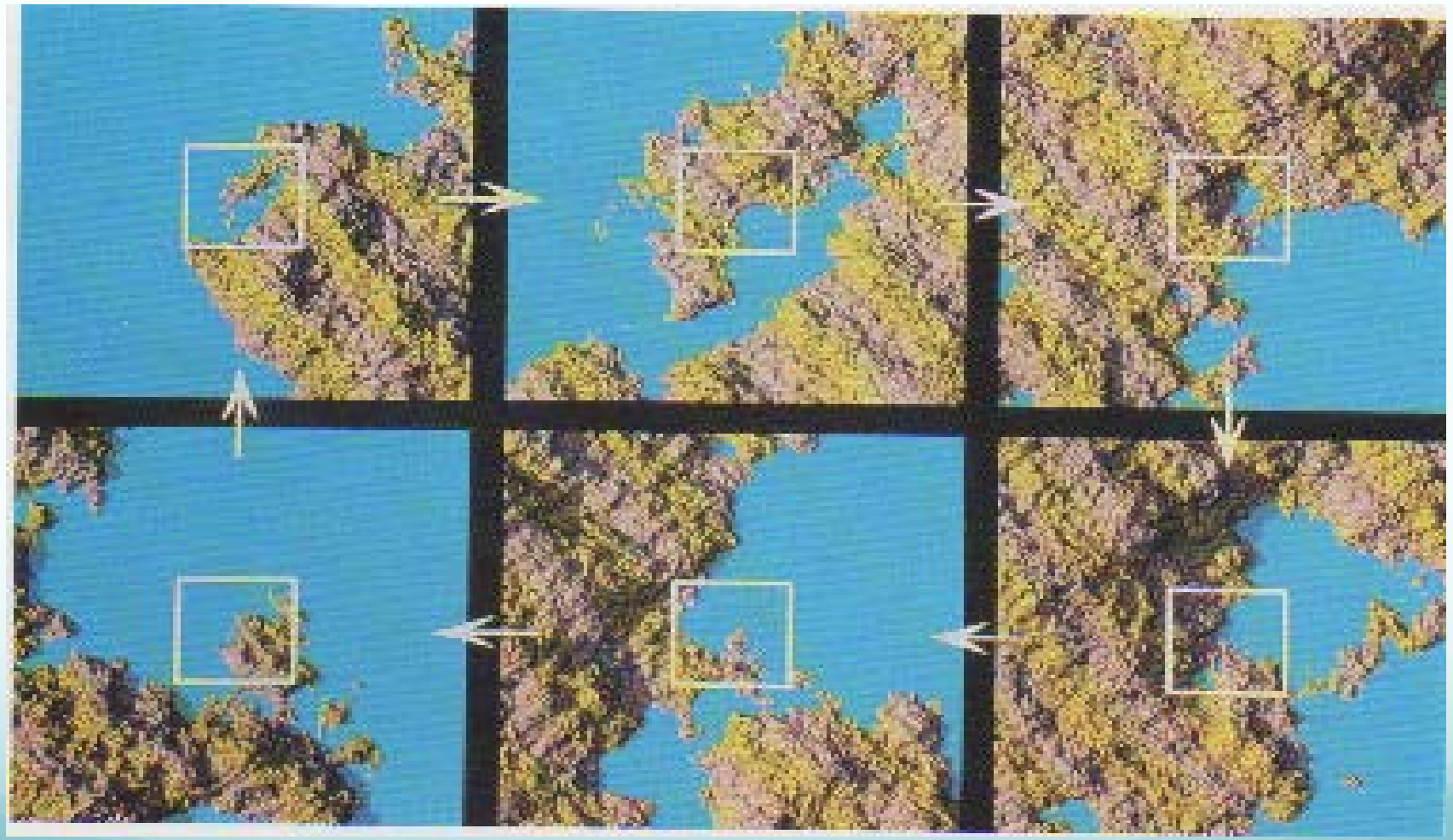
Ricerca su internet: fonti diverse indicano valori diversi

7350 km

8000 km

8640 km

Perché numeri così diversi?



Procuriamoci una carta geografica dell'Italia:

1. Riportiamo righelli di ***200 km*** lungo la costa (da Ventimiglia a Trieste) ; ne bastano ***13*** per un totale di ***2600 km***

2. Riportiamo righelli di lunghezza metà della precedente: ***100 km***, ne bastano ***38*** per un totale di ***3800 km***:

e così via come nella tabella:

200 km x 13 righelli = 2600 km

100 km x 38 righelli = 3800 km

54 km x 107 righelli = 5700 km

27 km x 320 righelli = 8640 km

"dimezzando i righelli il loro numero non raddoppia ma triplica" e la lunghezza aumenta sempre.

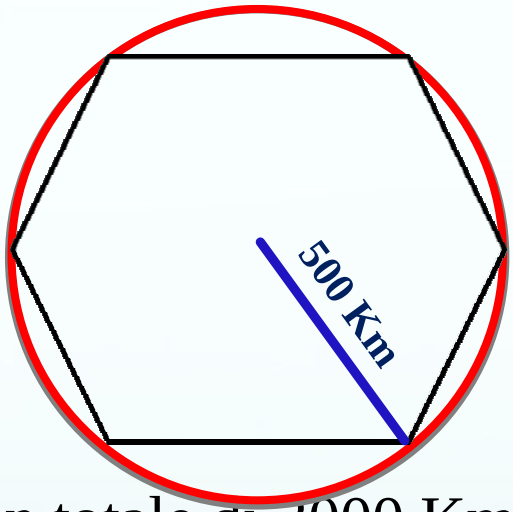
Il grado di frastagliamento è il parametro importante e rappresenta la:

DIMENSIONE della costa

$\log 3/\log 2 \cong 1{,}58$

Per misurare la lunghezza di una costa “regolare” di un’isola a forma di cerchio C di raggio 500 Km, (l (C)=2π x 500 ≅ 3141 Km)e si ritrova che dim C =1

✓Riportiamo righelli di 500 Km lungo la circonferenza C;



ne bastano 6 per un totale di 3000 Km (perimetro dell’esagono inscritto)

✓Riportiamo righelli di 260 Km, ne bastano 12 per un totale di 3120 Km

e così via

……..

32,7 km x 96 righelli = 3141 km

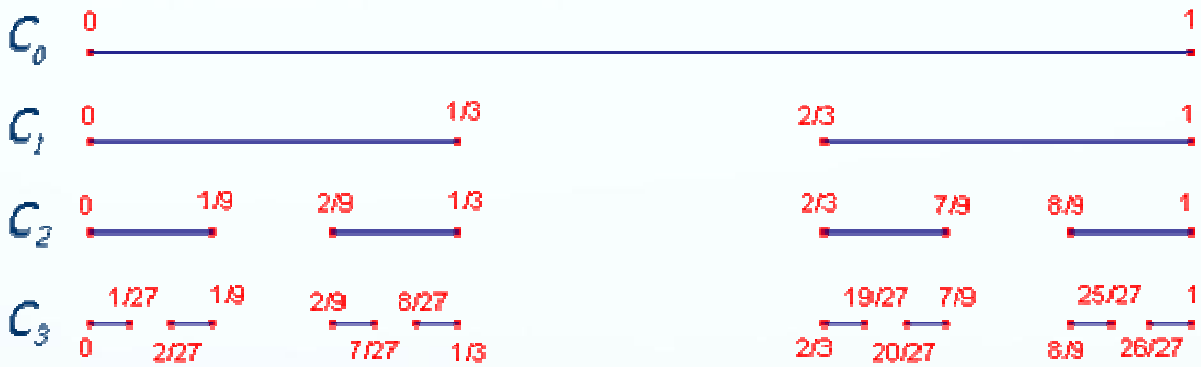
16,36 km x 192 righelli = 3141 km

dimezzando i righelli, il loro numero raddoppia e la lunghezza si stabilizza:

dim C = log 2 / log 2 = 1

Diamo un primo esempio di ***frattale***:
l'insieme di Cantor (1845-1918)

L'insieme di Cantor: consiste di una "polvere" di punti disseminati regolarmente nel segmento di estremo 0 e 1.



DOPO LA PRIMA RIMOZIONE, RESTANO DUE SEGMENTI DI LUNGHEZZA 1/3. DOPO LA SECONDA RIMOZIONE, 4 SEGMENTI DI LUNGHEZZA 1/9. TRISECANDO I RIGHELLI , IL LORO NUMERO RADDOPPIA

Abbiamo una sequenza di “plurisegmenti” ognuno contenuto nel precedente ma:

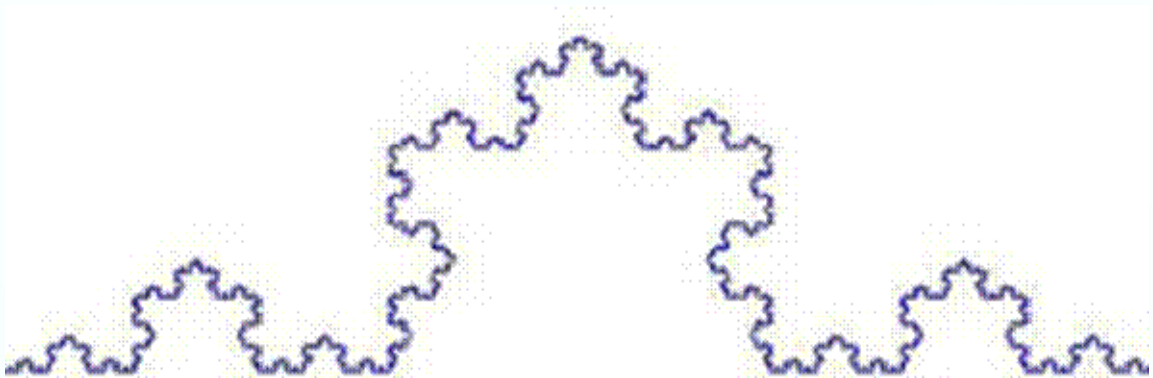
da che cosa è costituito l’insieme C di Cantor?

E’ l’intersezione di tutti questi plurisegmenti. Cioè è l’insieme **“finale”** che rimane dopo le infinite rimozioni.

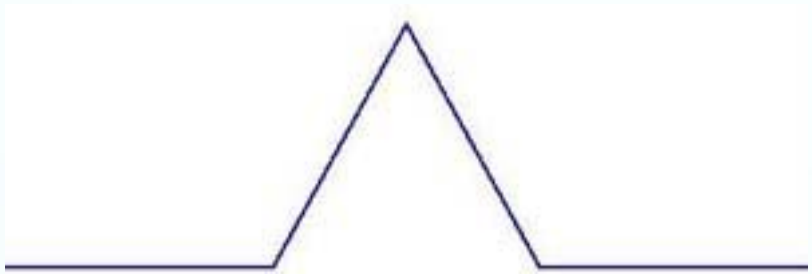
- Determiniamo la dimensione **D** dell'insieme di Cantor (trisecando i righelli il loro numero raddoppia)

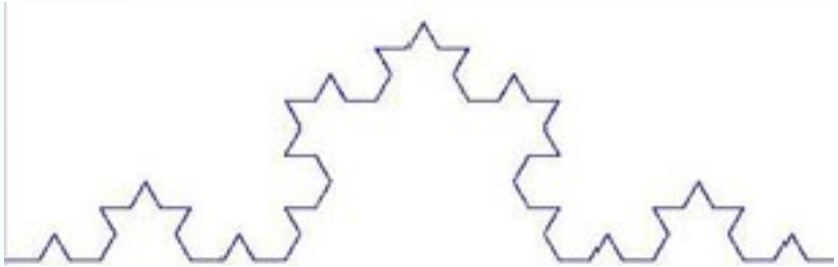
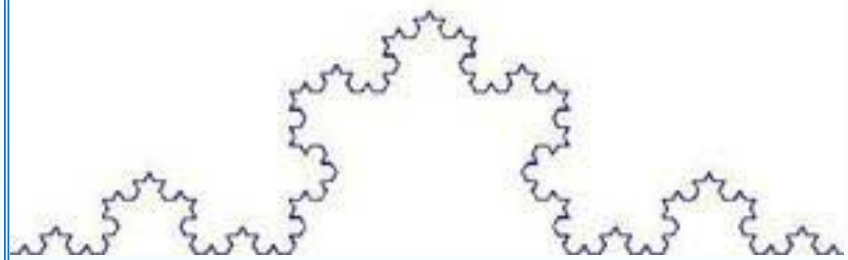
$$D = (\log 2)/(\log 3) = 0.6309\ldots$$

LA CURVA DI VON KOCH (1904)



COSTRUZIONE DELLA CURVA DI KOCH

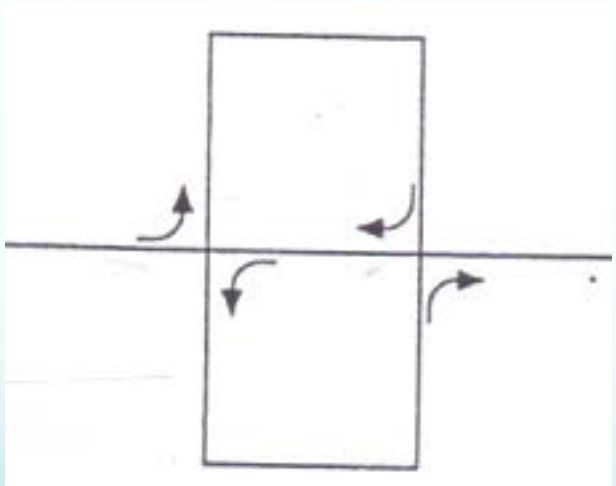
Passo 0 	Come figura di partenza, si considera l'intervallo **[0,1].**
Passo 1 	L'intervallo viene diviso in tre parti di uguale ampiezza. La parte centrale viene soppressa ed al suo posto vengono inseriti due lati di un triangolo equilatero. Si ottiene così la figura accanto. ***4 segmenti di lunghezza 1/3***
	La stessa costruzione si ripete per ognuno dei quattro segmenti che formano la figura precedente. ***4x4 segmenti di lunghezza $1/3^2$***

Passo 3 	Nello stesso modo si procede per ognuno dei 12 segmenti della figura del passo 2. ***4x4x4 segmenti di lunghezza $1/3^3$***
Passo 4 	Andando avanti nella costruzione, la figura risulta sempre più frastagliata ed il numero dei lati cresce in maniera esponenziale. La lunghezza della curva, al crescere del numero delle iterazioni tende a $+\infty$, mentre l'area racchiusa tende ad un valore finito.

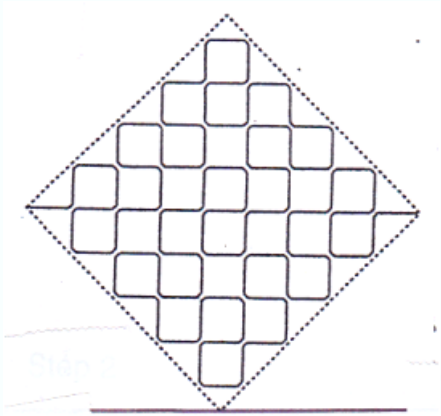
- Determiniamo ora la dimensione **D** della curva di Von Koch.(trisecando i righelli il loro numero quadruplica)

$$D = (\log 4) / (\log 3) = 1.261\ldots.$$

CURVA DI PEANO

Passo 0 	Come figura di partenza, si considera il segmento **[0,1].**
Passo 1 	Il segmento intermedio viene sostituito dall'unione di 9 segmenti uguali ad esso, in cui le frecce indicano i versi di percorrenza (due punti di autointersezione) ***9 segmenti di lunghezza 1/3***

Passo 2



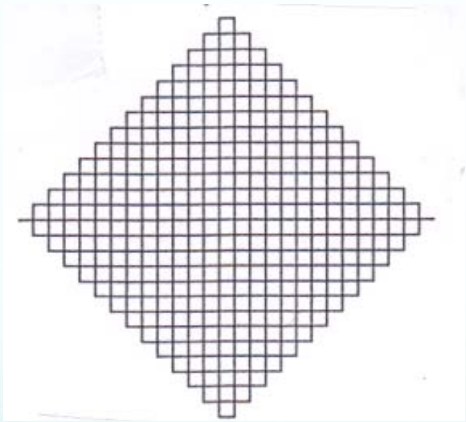
La stessa costruzione si ripete per ognuno dei 9

segmenti della figura precedente

(32 punti di autointersezione)

9x9 segmenti di lunghezza $1/3^2$

Passo 3

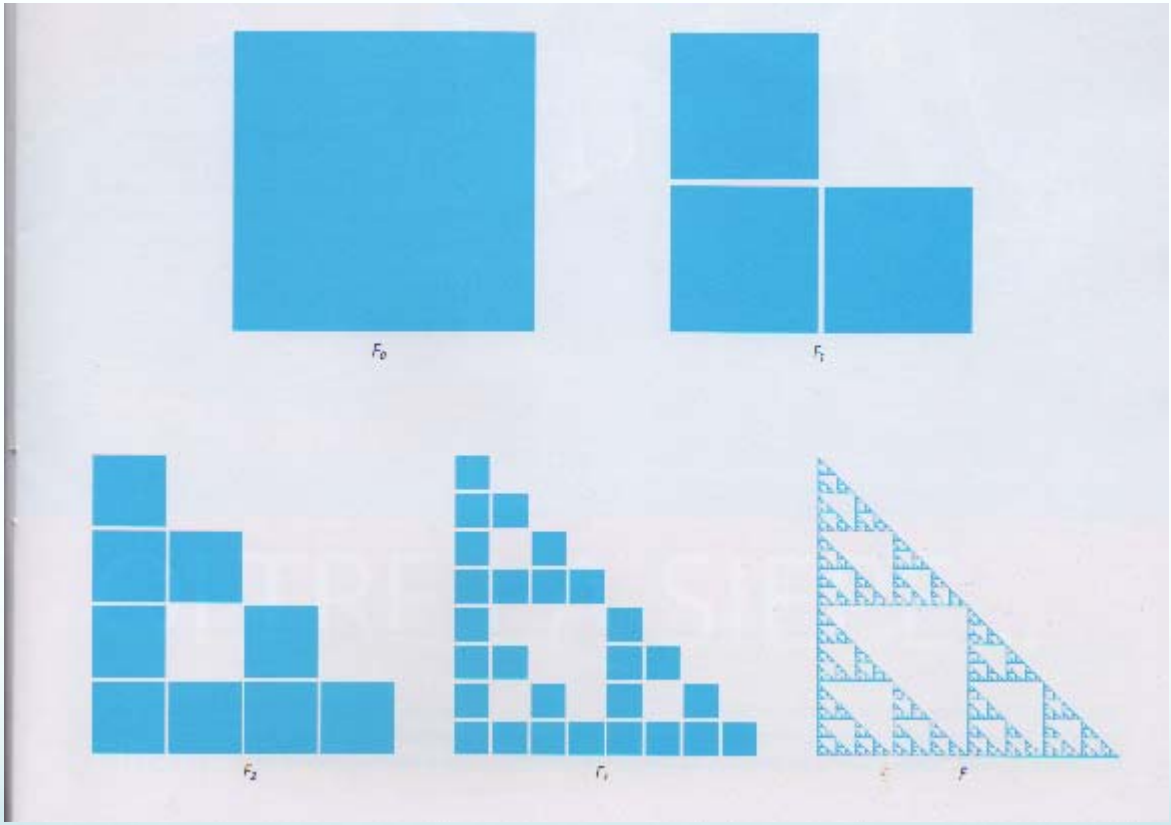


Nello stesso modo si procede su ognuno degli 81 segmenti

9x9 x9 segmenti di lunghezza $1/3^3$

Al k-esimo passo vi sono 9^k segmenti di lunghezza $1/3^k$ e la curva è lunga 3^k.

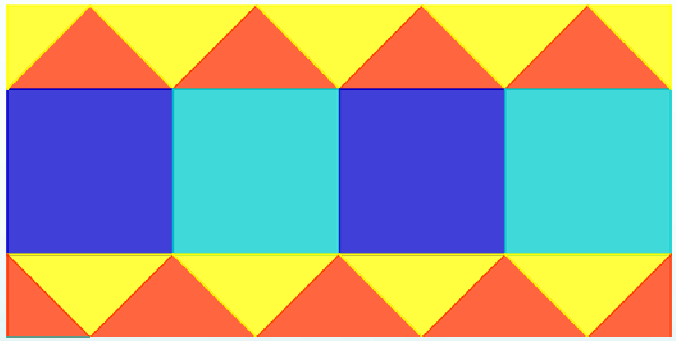
Insieme di Sierpinski

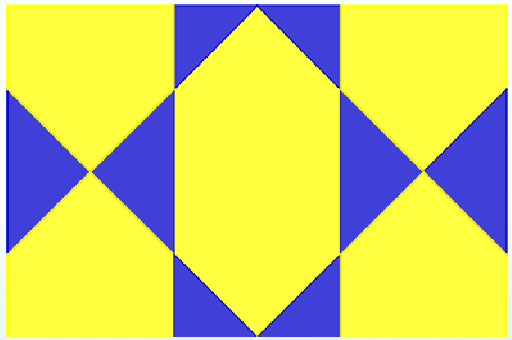


Negli anni si sono “affermate” nuove entità matematiche con applicazioni alla fisica, chimica, …., che è forse opportuno inserire nel bagaglio di conoscenze attuali: Tassellazioni Penrose, Quasi-Cristalli, Frattali, Origami

“Tassellazioni”

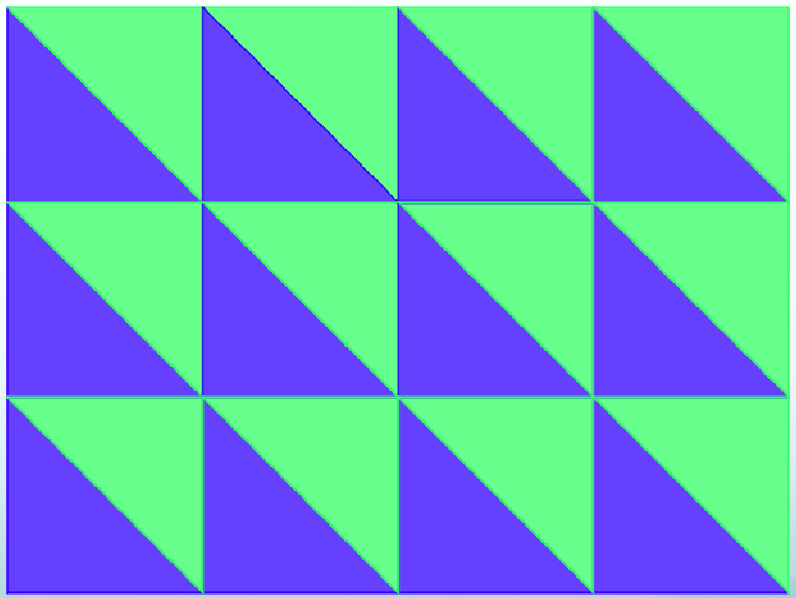
Si dicono “Tassellazioni” i modi di ricoprire il piano con una o più figure geometriche (poligoni regolari e non) ripetute indefinitamente senza sovrapposizioni.



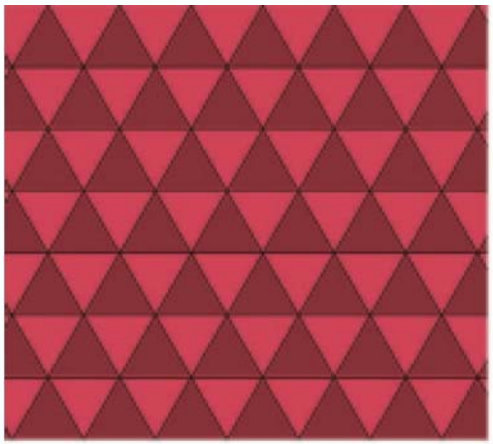
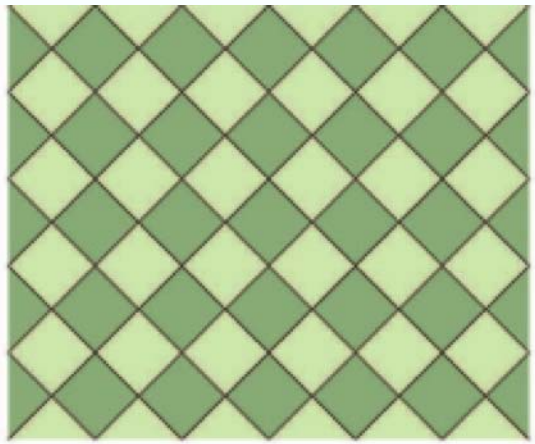
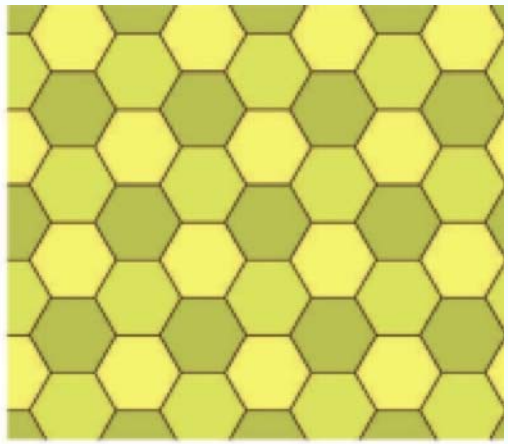
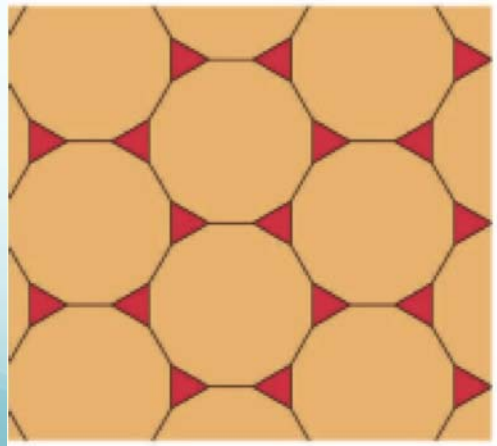
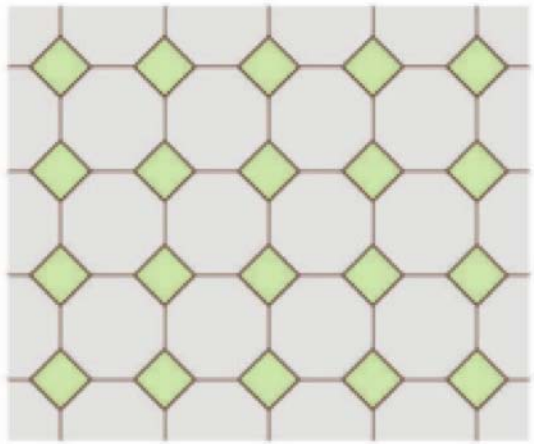
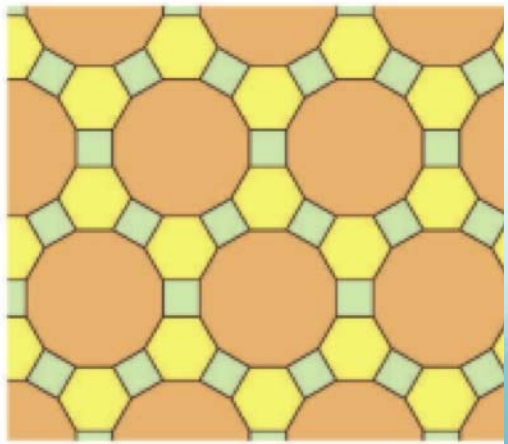


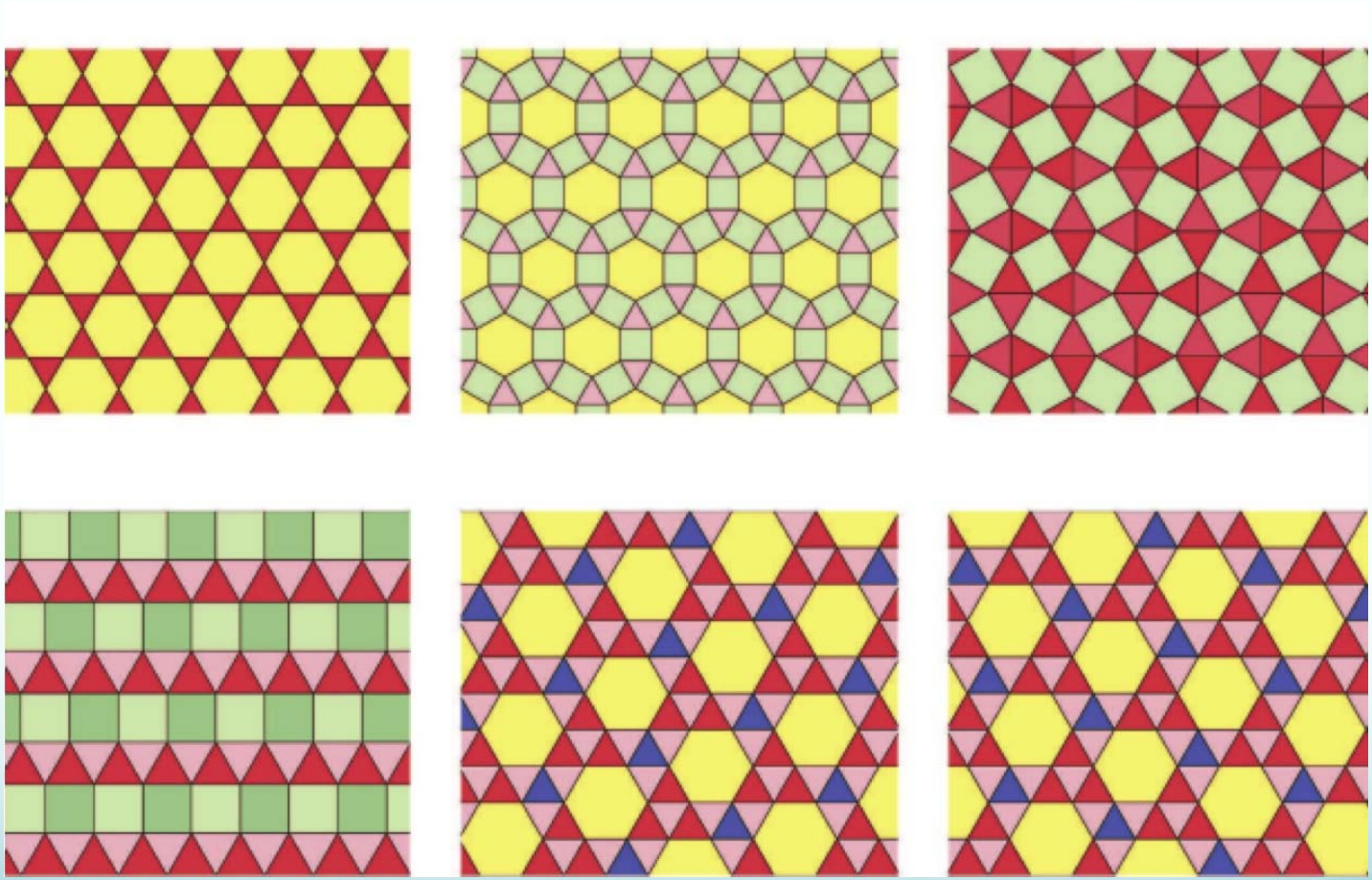
“Tassellazioni regolari”

Una Tassellazione del piano si dice “regolare” (o periodica) se esistono due direzioni non parallele, tali che la tassellazione risulti invariante per traslazione lungo le stesse.

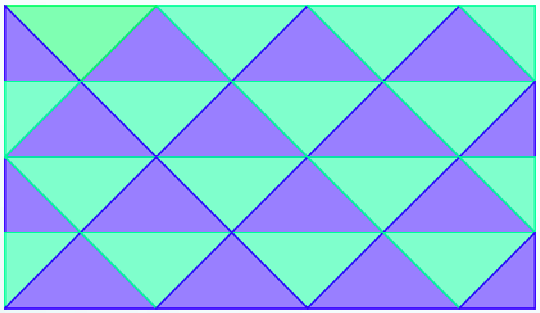


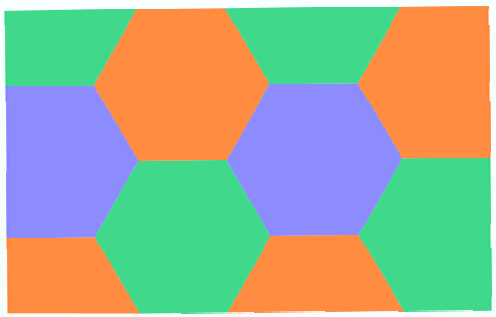
“Tassellazioni regolari con poligoni regolari”

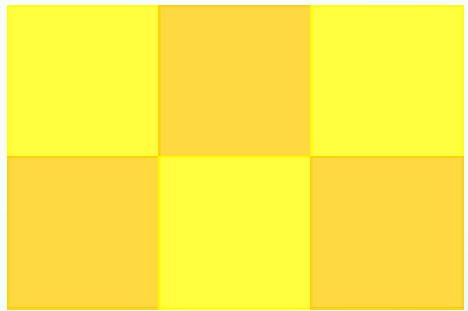









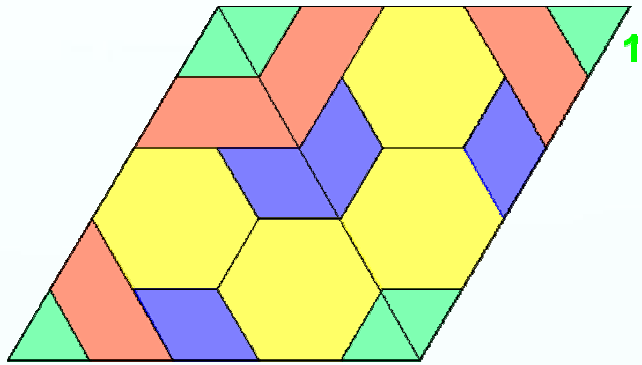
Se imponiamo l'uso di un solo poligono regolare per tutta la tassellatura abbiamo solo tre tipi di configurazioni possibili:







Chiamiamo “Rombo di α gradi” un rombo che non sia quadrato con un angolo acuto di α gradi. Il seguente Rombo di 60^0 non è tassellabile con Quadrati o Rombi di 30^0



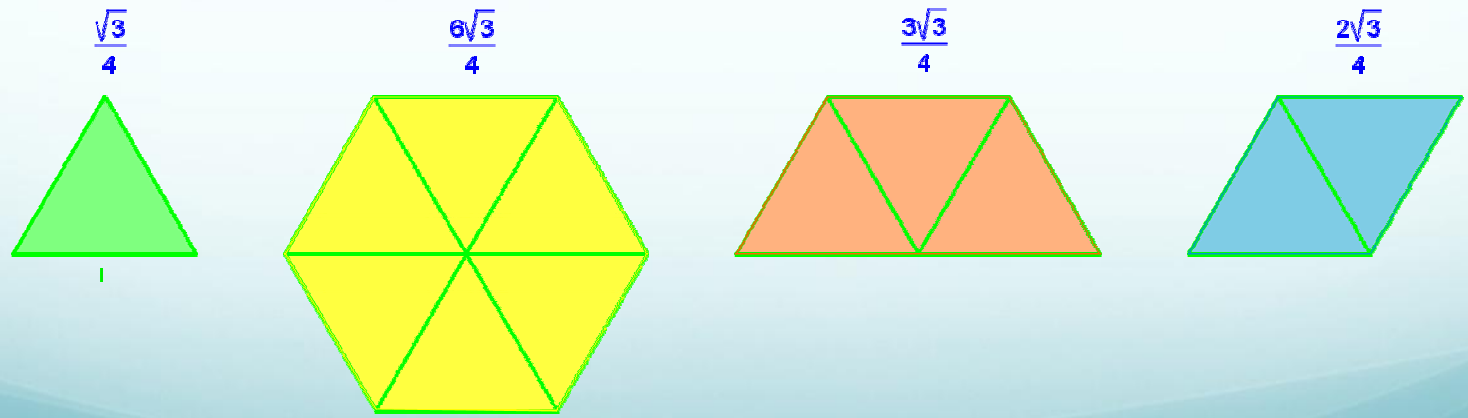
Se denotiamo con $R_{60}{}^0$ il Rombo di 60^0 con T il Triangolo equilatero in figura di lato 1cm, notando che:

$\text{Area}T=\frac{\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$ verifichiamo $\text{Area } R_{60}{}^0 = 50 \text{Area } T = 25\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$

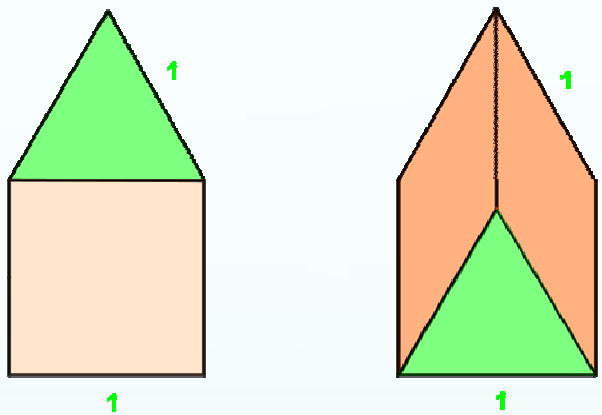
Perchè il Rombo di 60^0 non è tassellabile con Quadrati o Rombi di 30^0?

Perchè la radice quadrata di 3 è irrazionale!

Il Quadrato e il Rombo di 30^0 di lato 1cm hanno area razionale in termini di cm^2, mentre gli altri poligoni che compongono il Rombo di 60^0 hanno area multiplo razionale della radice quadrata di 3. Infatti, questi poligoni sono costituiti da triangoli equilateri di lato 1:



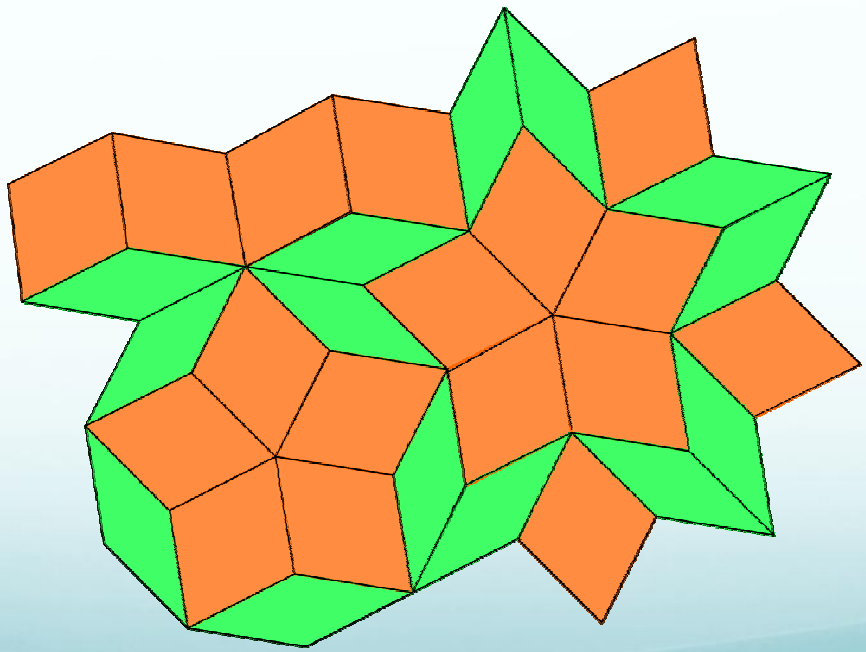
Se denotiamo con Q il quadrato, R_{30}^{0} il rombo di 30^{0} , entrambi di lato 1 cm abbiamo:



Area R_{30}^{0} =1/2 Area Q=1/2 cm^2

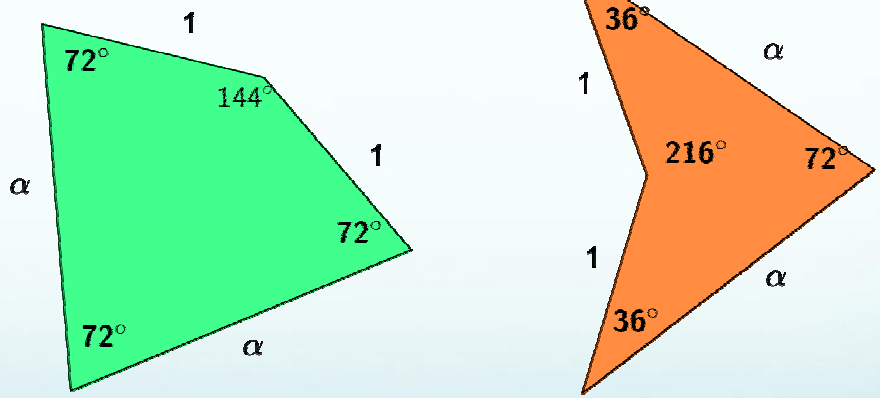
“Tassellazioni di Penrose”

Una Tassellazione di Penrose è uno schema di figure geometriche (che hanno una stretta connessione alla sezione aurea) che ci permettono di tassellare il piano in modo aperiodico



- Nel 1966 Robert Berger ha mostrato che esistono dei tasselli con cui è possibile costruire tassellazioni aperiodiche del piano. Il primo esempio richiedeva oltre 2000 tasselli .
- Nel 1968 Knuth ha ridotto il numero di tasselli a 92
- Nel 1971 Robinson ha ridotto il numero di tasselli a 6
- Nel 1974 Penrose ha ridotto il numero di tasselli a 2

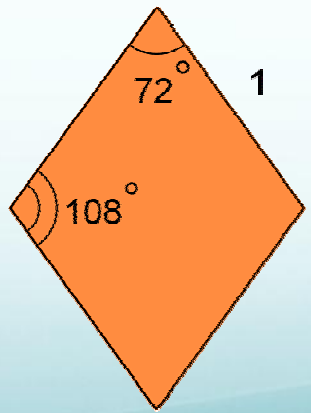
I primi due Tasselli usati da Penrose, sono detti “aquilone” “freccia”:



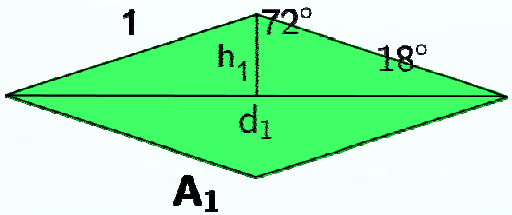
$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

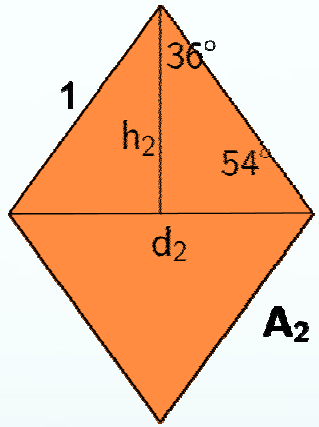
Successivamente, Penrose ha scoperto altri due Tasselli a forma di rombo (detti Tasselli di Penrose) che determinano tassellazioni piane non periodiche:

- Rombo di lato unitario con angoli di 72^0 e 108^0
- Rombo di lato unitario con angoli di 36^0 e 144^0



Il rapporto tra le aree dei “Tasselli di Penrose” è dato dalla sezione aurea





$$A_1 = d_1 \cdot h_1 = 2\sin(72^\circ)\cos(72^\circ),\ A_2 = d_2 \cdot h_2 = 2\sin(36^\circ)\cos(36^\circ),$$

$$\sin(72^\circ) = 2\sin(36^\circ)\cos(36^\circ),\ \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{2\cos(72^\circ)} = \alpha,\ \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

“I Quasicristalli e le Tassellazioni di Penrose”

- I Quasicristalli sono materiali introdotti e sintetizzati in laboratorio che hanno disposizione degli atomi quasiperiodica. Ciò significa che in essi due o più gruppi atomici si ripetono a intervalli diversi e che il rapporto fra tali periodi di traslazione è irrazionale cioè non esprimibile con una frazione.

- Poiché sono quasiperiodici, i Quasicristalli possono avere delle simmetrie di rotazione vietate nei cristalli ordinari, inclusa la simmetria pentagonale in un piano o una simmetria icosaedrica in tre dimensioni. Un classico esempio è la Tassellazione di Penrose che abbiamo visto che è composta da due tasselli che si ripetono con frequenze il cui rapporto è dato dal “rapporto aureo”

- Da quando sono stati scoperti i Quasicristalli, numerosi scienziati si sono posti la seguente domanda: E' possibile che i Quasicristalli si formino in natura attraverso processi geologici? Nel 2009 un nuovo tipo di minerale è stato scoperto in un campione delle collezioni mineralogiche del Museo di Storia Naturale dell'Università degli Studi di Firenze (Bindi e al., 2009-Science, 324:1306), tale minerale, il primo Quasicristallo naturale è stato chiamato "icosahedrite"

Luca Bindi, Conferenza di Classe , 13.01.12, Accademia dei Lincei