LA GEOMETRIA PREASSOLUTA

UNA PROPOSTA DIDATTICA

Euclide Matematico di Alessandria – André Thevet

Franco Rupeni (franco.rupeni@gmail.com) - Alessandro Zampa (a.zampa@alice.it)

A cosa serve la geometria?

«La geometria è stata tradizionalmente uno strumento fondamentale nell'insegnamento del ragionamento logico, ma **negli ultimi anni è stata trascurata o addirittura abbandonata nei programmi scolastici di tutto il mondo**. Le ragioni di ciò non sono del tutto chiare, però ci pare che **i motivi per cui sia particolarmente adatta per il compito** – l'associazione della visualizzazione alla logica – parimenti **non siano del tutto chiari**.»

Bill Casselman – Graphic Editor – Notices of AMS, Jan. 2014

I S

Le Indicazioni Nazionali per i licei scientifici

«Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. **Verranno chiariti l'importanza e il significato** dei concetti di **postulato**, **assioma**, **definizione**, **teorema**, **dimostrazione**, con particolare riguardo al fatto che, **a partire dagli Elementi di Euclide**, essi **hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale.** In coerenza con il modo con cui si è presentato **storicamente**, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.»

I S

Quale approccio?

G. Harel, *Common Core State Standards for Geometry: An Alternative Approach*, Notices of the AMS, January 2014

- **CCSS** (45 stati USA) → **Obiettivi** + **Narrativa**
- **Critiche** sulla narrativa (poca considerazione per le necessità intellettuali studenti, introduzione prematura delle trasformazioni, mancanza di chiarezza sull'importanza della separazione tra studio analitico e sintetico)
- **Proposta** («Approccio non standard»)

  Agli studenti viene detto di immaginare che dei matematici debbano comunicare **telepaticamente**(!) aspetti della vita umana ad un **alieno** intelligente chiamato **Euclide**(!), che **non possiede alcun senso visivo, cinestetico, tattile** e che **non conosce alcuna delle immagini che noi possediamo del nostro mondo fisico**

I S

Quale approccio?

G. Ha

Altern

- **CO**
- **Cri** ... ità inte ... azioni, mancanza di chiarezza sull'importanza della separazione tra studio analitico e sintetico)
- **Proposta** («Approccio non standard»)

  Agli studenti viene detto di immaginare che dei matematici debbano comunicare **telepaticamente**(!) aspetti della vita umana ad un **alieno** intelligente chiamato **Euclide**(!), che **non possiede alcun senso visivo, cinestetico, tattile** e che **non conosce alcuna delle immagini che noi possediamo del nostro mondo fisico**

Un'impresa impossibile!

Così si *aliena* la geometria!

I S

Quale approccio?

G. Ha
Altern

- **CO**
- **Cri** ...ità
inte ...azioni,
mancanza di chiarezza sull'importanza della separazione tra studio
an...

- **Pro**

Ag ...bbano
co ...**alieno**
int ...**visivo,**
cir ...**e noi**
possediamo del nostro mondo fisico

Un'impresa impossibile!

Così si *aliena* la geometria!

Perché non introdurre l'assiomatizzazione attraverso l'analisi della geometria del mondo in cui viviamo e la storia delle teorie che abbiamo sviluppato per comprenderla?

I S

Quale app

G. Ha
Altern

- **CO**
- **Cri** sità inte azioni, mancanza parazione tra studio ana
- **Pro**

Ag bbano co **alieno** int **visivo,** **cir** **he noi** **possediamo del nostro**

Perc attraver in cui abbiam

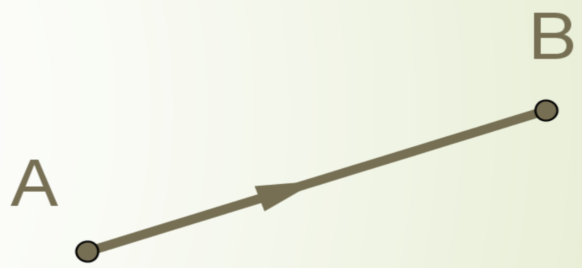
Cosa dice Euclide?

zione el mondo rie che enderla?

I S

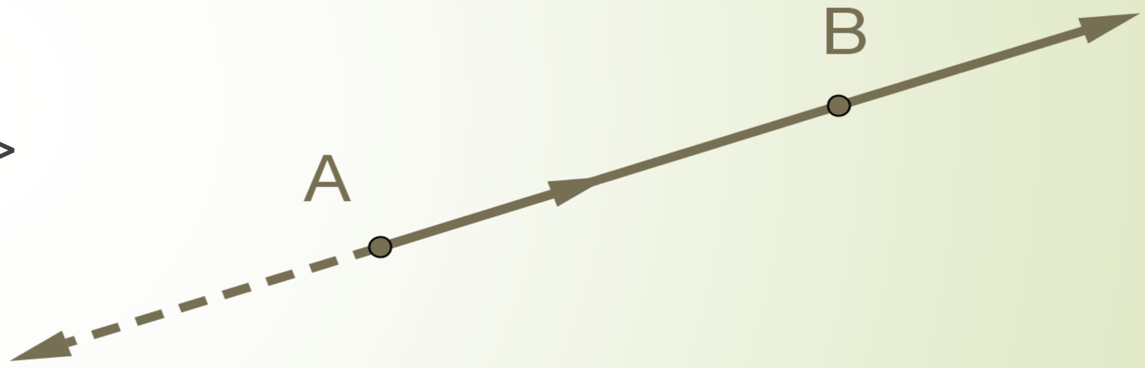
Postulato I

- «Sia stato richiesto di condurre una linea retta **da** ogni punto **a** ogni punto»
- Per due punti passa una e una sola retta



Postulato II

- «Sia stato richiesto di prolungare senza soluzione di continuità **[illimitatamente]** una retta limitata in <linea> retta»



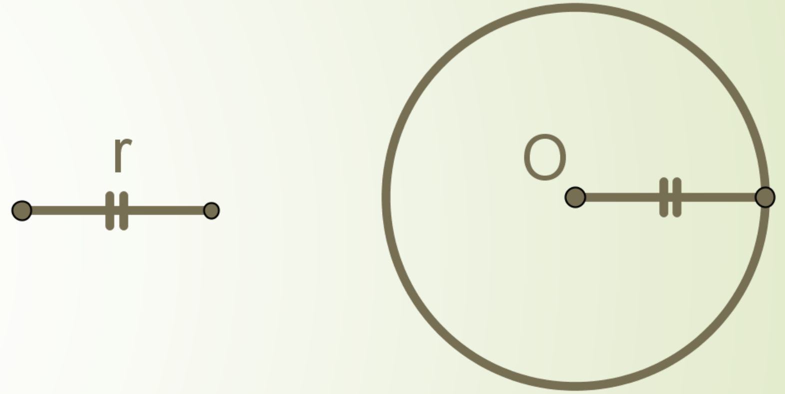
Assunzione implicita

- La retta è aperta (infinita)

Postulato III e Postulato IV

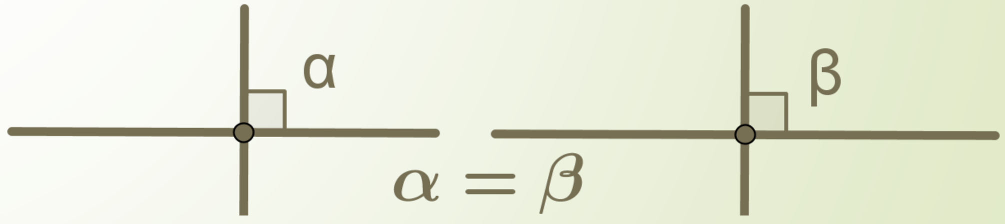
Il terzo postulato

- «Sia stato richiesto che con ogni centro e intervallo sia tracciato un cerchio»



Il quarto postulato

- «Sia stato richiesto che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro»



I S

Geometria Assoluta

Elementi – Libro I

- **Postulati I**, **II**, **III**, **IV** = Geometria **Assoluta** (o **Neutrale**)

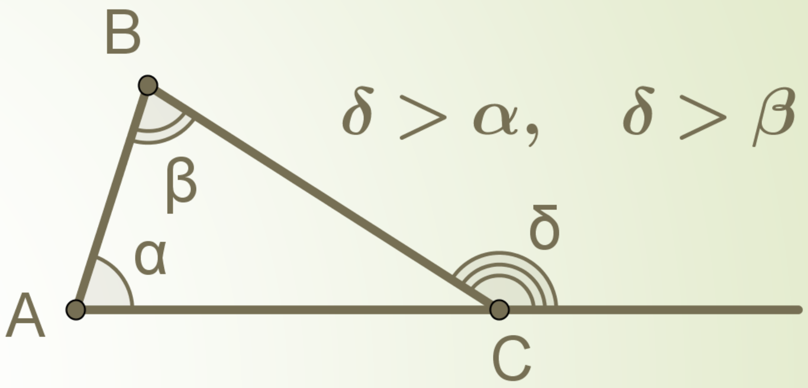
  (Proposizioni 1÷28, 31)

I S

Le proposizioni 16 e 17

Proposizione 16

In ogni triangolo ciascun angolo esterno è maggiore degli angoli interni non adiacenti ad esso

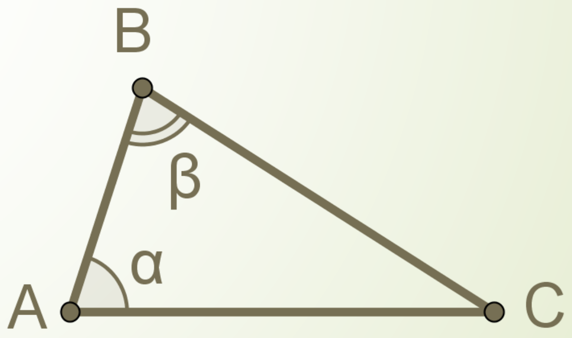


$$\delta > \alpha, \quad \delta > \beta$$

$$\Downarrow$$

Proposizione 17

In ogni triangolo la somma di due angoli interni qualsiasi è sempre minore di un angolo piatto



$$\exists \boldsymbol{\Delta} \quad \longrightarrow \quad \alpha + \beta < \mathbf{2}\boldsymbol{R}$$

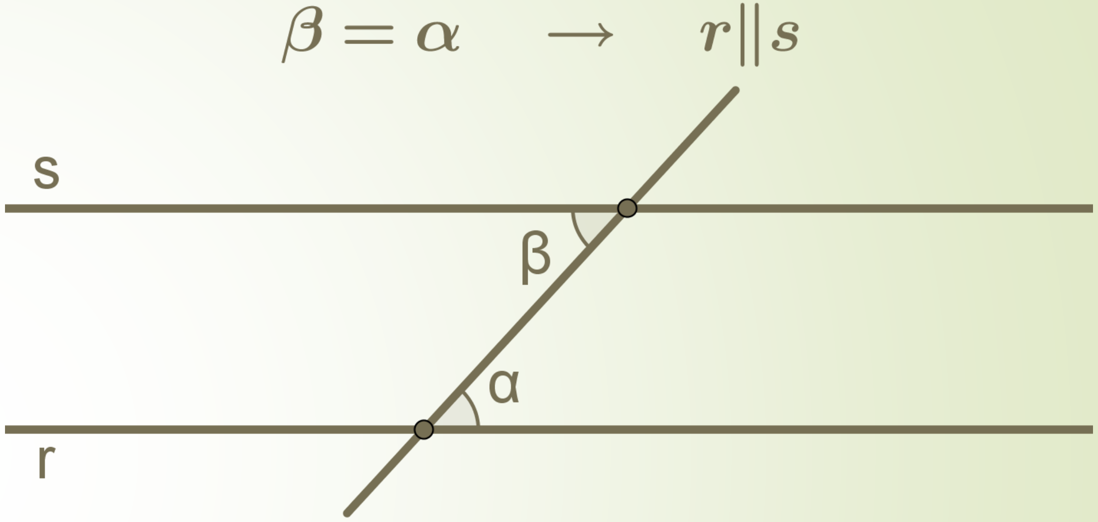
I S

Le proposizioni 27 e 31

Proposizione 27

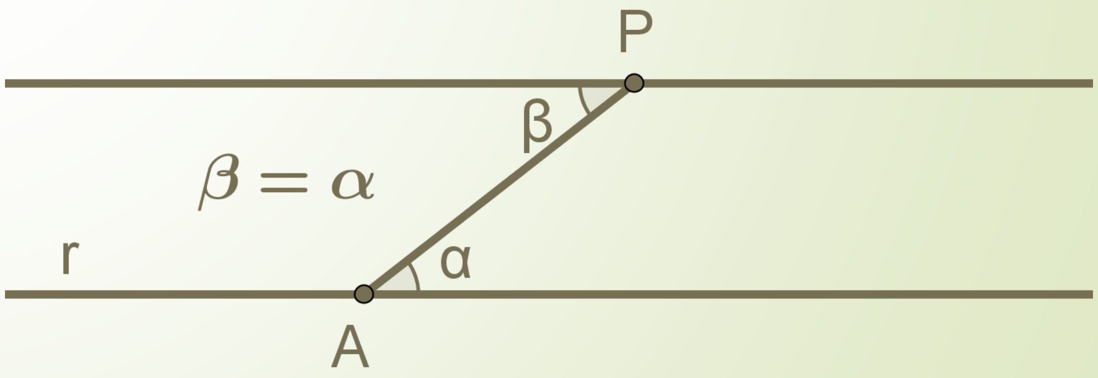
Se due rette formano con una trasversale angoli alterni congruenti **allora** le due rette sono parallele tra loro

$\Downarrow$



Proposizione 31 (N ≥ 1)

Per un punto esterno ad una qualsiasi retta passa una retta parallela a quella data



I S

Teorema di ESISTENZA di (almeno) una parallela ($N \geq 1$)

Una dimostrazione alternativa

I S

Teorema di ESISTENZA di (almeno) una parallela (N ≥ 1)

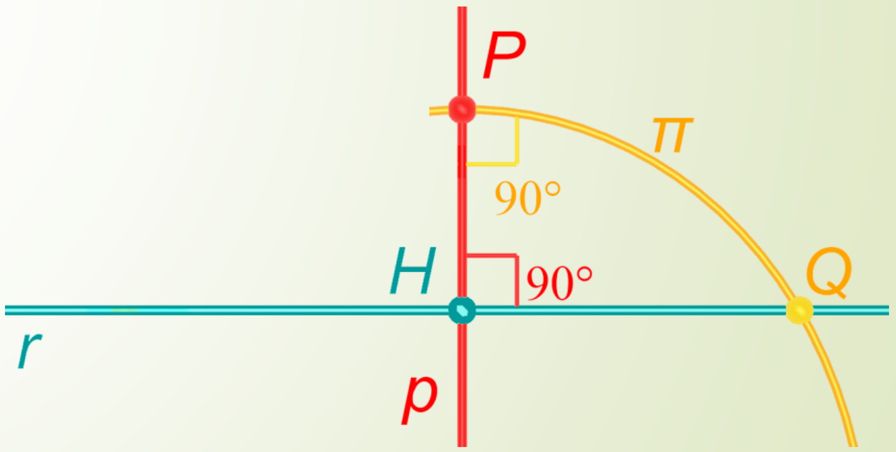
Una dimostrazione alternativa

- Per assurdo non esista alcuna parallela a r per $P \notin r$

Teorema di ESISTENZA di (almeno) una parallela (N ≥ 1)

Una dimostrazione alternativa

- Per assurdo non esista alcuna parallela a r per $P \notin r$
- $P \in p,\ p \perp r,\ P \in \pi,\ \pi \perp p \ \Rightarrow\ \exists Q\colon Q \in \pi \cap r$

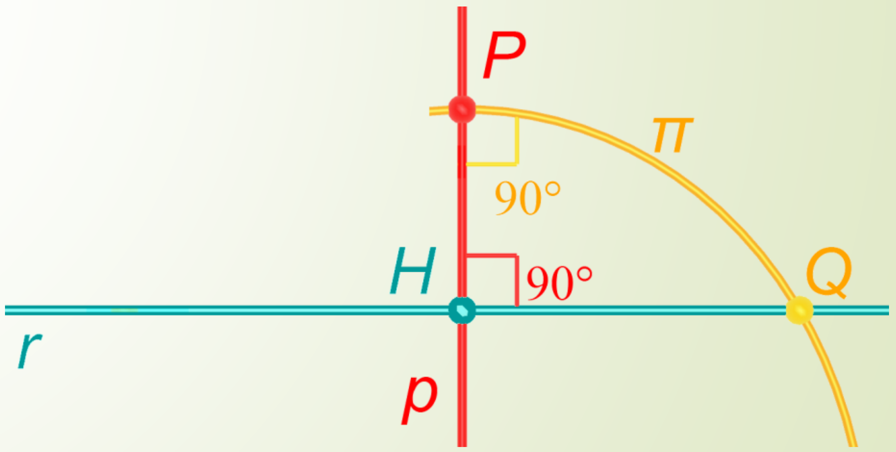


I S

Teorema di ESISTENZA di (almeno) una parallela ($N \geq 1$)

Una dimostrazione alternativa

- Per assurdo non esista alcuna parallela a r per $P \notin r$
- $P \in p,\ p \perp r,\ P \in \pi,\ \pi \perp p \ \Rightarrow \ \exists Q\colon Q \in \pi \cap r$
- $P \in \pi,\ P \notin r \ \Rightarrow \ \pi \neq r$

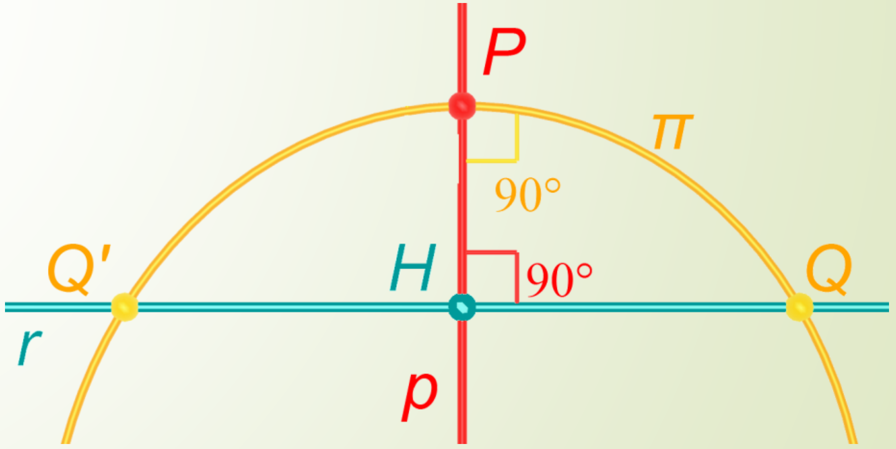


I S

Teorema di ESISTENZA di (almeno) una parallela (N ≥ 1)

Una dimostrazione alternativa

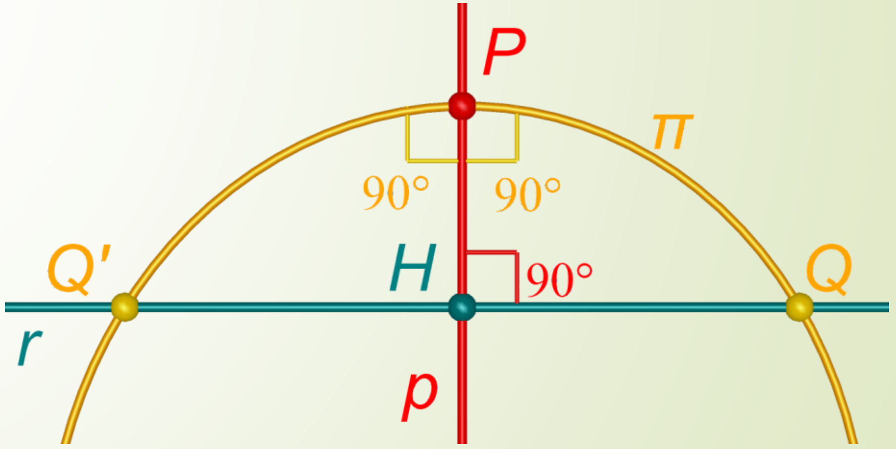
- Per assurdo non esista alcuna parallela a r per $P \notin r$
- $P \in p,\ p \perp r,\ P \in \pi,\ \pi \perp p \quad \Rightarrow \quad \exists Q \colon Q \in \pi \cap r$
- $P \in \pi,\ P \notin r \quad \Rightarrow \quad \pi \neq r$
- $\exists Q' \in r,\ Q'H = QH \quad \Rightarrow \quad HPQ = HPQ'$



Teorema di ESISTENZA di (almeno) una parallela (N ≥ 1)

Una dimostrazione alternativa

- Per assurdo non esista alcuna parallela a r per $P \notin r$
- $P \in p,\ p \perp r,\ P \in \pi,\ \pi \perp p \ \Rightarrow \ \exists Q\colon Q \in \pi \cap r$
- $P \in \pi,\ P \notin r \ \Rightarrow \ \pi \neq r$
- $\exists Q' \in r,\ Q'H = QH \ \Rightarrow \ HPQ = HPQ'$
- $H\hat{P}Q' = H\hat{P}Q \ \Rightarrow \ Q' \in \pi$



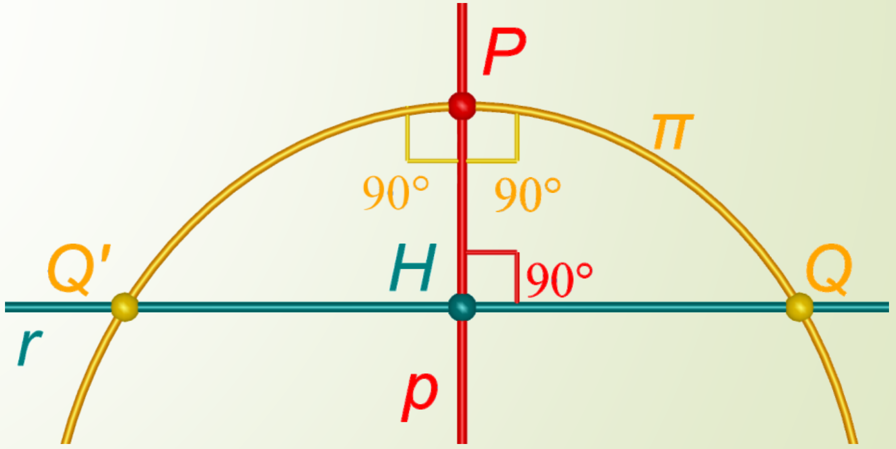
I S

Teorema di ESISTENZA di (almeno) una parallela (N ≥ 1)

Una dimostrazione alternativa

- Per assurdo non esista alcuna parallela a r per $P \notin r$
- $P \in p,\ p \perp r,\ P \in \pi,\ \pi \perp p \quad \Rightarrow \quad \exists Q\colon Q \in \pi \cap r$
- $P \in \pi,\ P \notin r \quad \Rightarrow \quad \pi \neq r$
- $\exists Q' \in r,\ Q'H = QH \quad \Rightarrow \quad HPQ = HPQ'$
- $H\hat{P}Q' = H\hat{P}Q \quad \Rightarrow \quad Q' \in \pi$

Come sono i punti Q' e Q?



I S

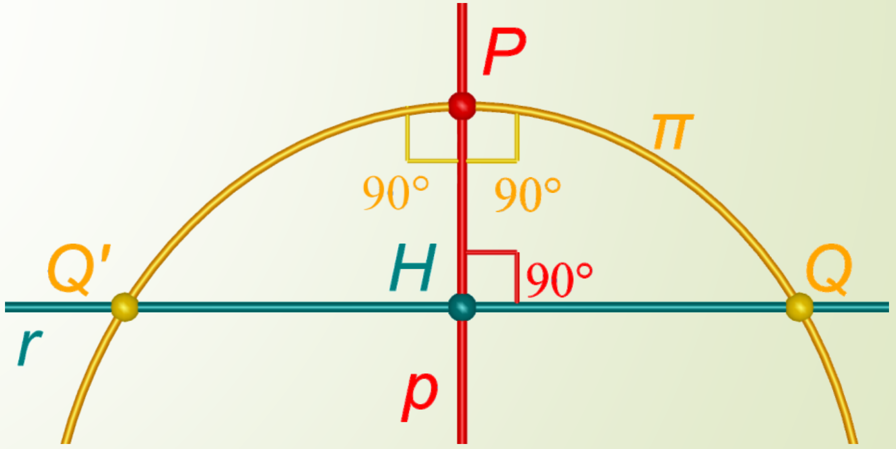
Teorema di ESISTENZA di (almeno) una parallela (N ≥ 1)

Una dimostrazione alternativa

- Per assurdo non esista alcuna parallela a r per $P \notin r$
- $P \in p,\ p \perp r,\ P \in \pi,\ \pi \perp p \quad \Rightarrow \quad \exists Q\colon Q \in \pi \cap r$
- $P \in \pi,\ P \notin r \quad \Rightarrow \quad \pi \neq r$
- $\exists Q' \in r,\ Q'H = QH \quad \Rightarrow \quad HPQ = HPQ'$
- $H\hat{P}Q' = H\hat{P}Q \quad \Rightarrow \quad Q' \in \pi$

Come sono i punti Q' e Q?

Se $Q' \neq Q$ si contraddice il Postulato I



I S

Teorema di ESISTENZA di (almeno) una parallela (N ≥ 1)

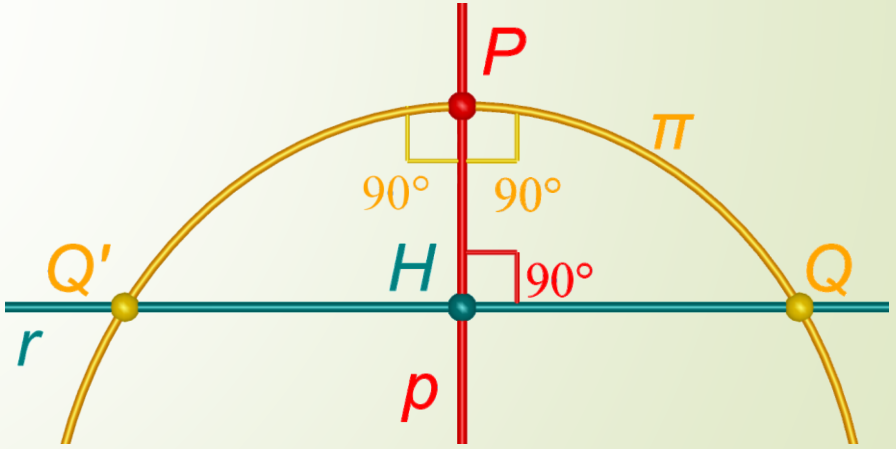
Una dimostrazione alternativa

- Per assurdo non esista alcuna parallela a r per $P \notin r$
- $P \in p,\ p \perp r,\ P \in \pi,\ \pi \perp p \ \Rightarrow \ \exists Q\colon Q \in \pi \cap r$
- $P \in \pi,\ P \notin r \ \Rightarrow \ \pi \neq r$
- $\exists Q' \in r,\ Q'H = QH \ \Rightarrow \ HPQ = HPQ'$
- $H\hat{P}Q' = H\hat{P}Q \ \Rightarrow \ Q' \in \pi$

Come sono i punti Q' e Q?

Se $Q' \neq Q$ si contraddice il Postulato I

Se $Q' = Q$ si contraddice il Postulato II



I S

Teorema di ESISTENZA di (almeno) una parallela (N ≥ 1)

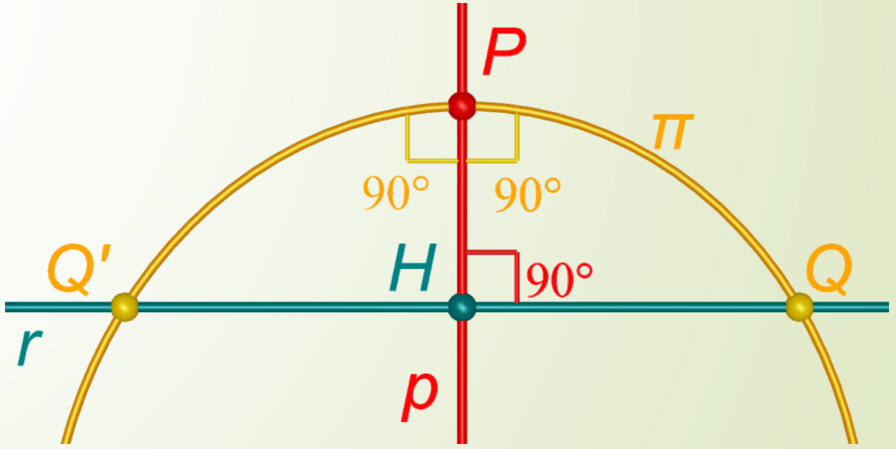
Una dimostrazione alternativa

- Per assurdo non esista alcuna parallela a r per $P \notin r$
- $P \in p,\ p \perp r,\ P \in \pi,\ \pi \perp p \quad \Rightarrow \quad \exists Q\colon Q \in \pi \cap r$
- $P \in \pi,\ P \notin r \quad \Rightarrow \quad \pi \neq r$
- $\exists Q' \in r,\ Q'H = QH \quad \Rightarrow \quad HPQ = HPQ'$
- $H\hat{P}Q' = H\hat{P}Q \quad \Rightarrow \quad Q' \in \pi$

Come sono i punti Q' e Q?

Se $Q' \neq Q$ si contraddice il Postulato I

Se $Q' = Q$ si contraddice il Postulato II

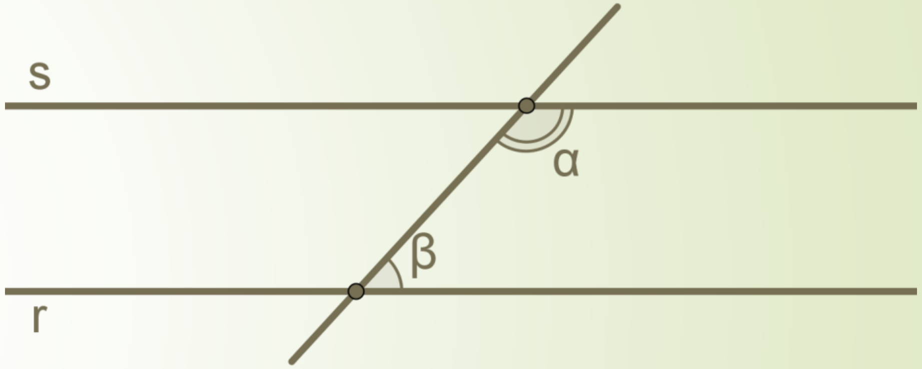


$\left.\begin{array}{l}\neg\textbf{Proposizione 31}\\ (N < 1,\ N = 0)\end{array}\right\} \Rightarrow$ retta non aperta

I S

Il ponte fra le proposizioni 28 e 29

Proposizione 28 $\alpha + \beta = 2R \ \rightarrow \ r \parallel s$



Proposizione 29 $r \parallel s \ \rightarrow \ \alpha + \beta = 2R$

Se due rette sono parallele **allora** gli angoli coniugati formati da una trasversale sono supplementari

Non riuscendo a dimostrare la 29 Euclide postula la contronominale

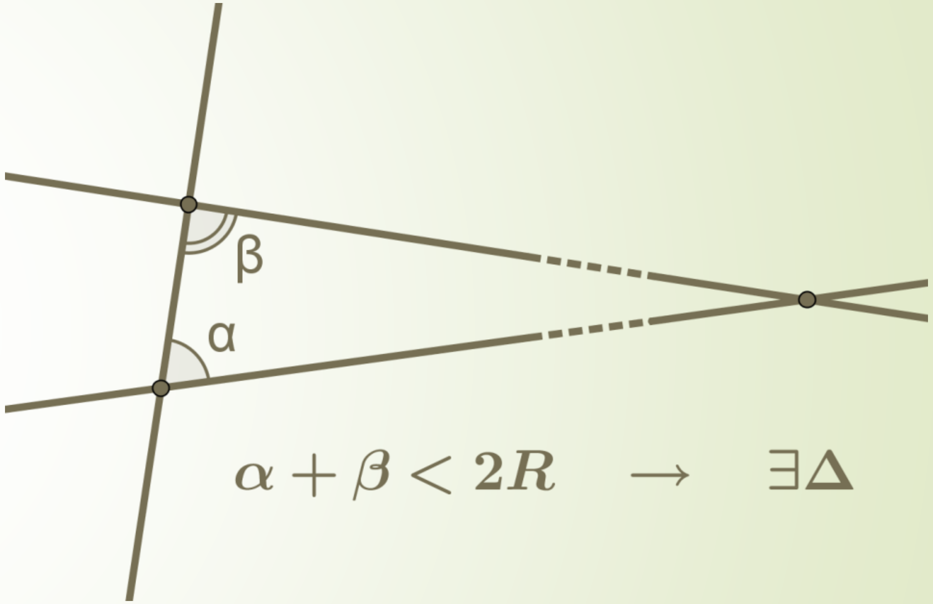
$$\alpha + \beta < 2R \ \rightarrow \ \neg(r \parallel s)$$

I S

Postulato V $\alpha + \beta < 2R \rightarrow \neg(r \parallel s)$

Se due rette sono convergenti **allora** sono incidenti

- «Sia stato richiesto che, qualora una retta che incide su due rette faccia minori di due retti gli angoli all'interno e dalla stessa parte, le due rette prolungate illimitatamente incidano **[**dalla parte in cui sono gli <angoli> minori dei due retti**]**»



Moderna parafrasi: **Assioma Parallele**

- **AP**: Per un punto esterno ad una retta passa una e una sola retta parallela ad essa
 (Hilbert 1899, 1903, 1909, **non Playfair**)

Proposizione 30

Proposizioni 28, 29

$\Downarrow$

Proposizione 30

Se due rette sono parallele a una terza **allora** sono parallele tra loro

I S

Proposizione 30 e UNICITÀ della parallela (N ≤ 1)

Proposizione 30

Se due rette sono parallele a una terza **allora** sono parallele tra loro

UNICITÀ (N ≤ 1)

Se due rette incidenti sono parallele a una stessa retta **allora** coincidono

I S

Proposizione 30 e UNICITÀ della parallela (N ≤ 1)

Proposizione 30

$$\forall x \forall y \forall z (xPz \land yPz \land x \neq y \rightarrow xPy)$$

Se due rette sono parallele a una terza **allora** sono parallele tra loro

UNICITÀ (N ≤ 1)

Se due rette incidenti sono parallele a una stessa retta **allora** coincidono

Proposizione 30 e UNICITÀ della parallela (N ≤ 1)

Proposizione 30 $\forall x \forall y \forall z (xPz \wedge yPz \wedge x \neq y \rightarrow xPy)$

Se due rette sono parallele a una terza **allora** sono parallele tra loro

UNICITÀ (N ≤ 1) $\forall x \forall y \forall z (xPz \wedge yPz \wedge \neg xPy \rightarrow x = y)$

Se due rette incidenti sono parallele a una stessa retta **allora** coincidono

I S

Proposizione 30 e UNICITÀ della parallela (N ≤ 1)

Proposizione 30

$$\boxed{\forall x \forall y \forall z (xPz \land yPz \land x \neq y \rightarrow xPy)}$$

Se due rette sono parallele a una terza **allora** sono parallele tra loro

UNICITÀ (N ≤ 1)

$$\boxed{\forall x \forall y \forall z (xPz \land yPz \land \neg xPy \rightarrow x = y)}$$

Se due rette incidenti sono parallele a una stessa retta **allora** coincidono

$$\boxed{\forall x \forall y \forall z (\neg xPz \lor \neg yPz \lor x = y \lor xPy)}$$

I S

Proposizione 30 e UNICITÀ della parallela (N ≤ 1)

Proposizione 30

$$\forall x \forall y \forall z (xPz \wedge yPz \wedge x \neq y \rightarrow xPy)$$

Se due rette sono parallele a una terza **allora** sono parallele tra loro

UNICITÀ (N ≤ 1)

$$\forall x \forall y \forall z (xPz \wedge yPz \wedge \neg xPy \rightarrow x = y)$$

Se due rette incidenti sono parallele a una stessa retta **allora** coincidono

$$\forall x \forall y \forall z (\neg xPz \vee \neg yPz \vee x = y \vee xPy)$$

Proposizione 30 e UNICITÀ sono equivalenti

I S

L’assioma delle parallele

- L’assioma delle parallele **AP** (N = 1) è un teorema euclideo:

  Proposizione 30 (N ≤ 1) + **Proposizione 31** (N ≥ 1)

- **Postulato V** e **AP** sono equivalenti nella geometria assoluta:

  Assoluta + **Postulato V** = **Assoluta** + **AP** = **Euclidea**

L’assiomatica quantitativa (N)

- Le geometrie **non-euclidee** sono definite mediante ¬**AP**

- N > 1: **AI** (assioma iperbolico)

  Assoluta + **AI** = **Iperbolica**

- N < 1: **AE** (assioma ellittico)

  Assiomi retta chiusa + **AE** = **Ellittica**

I S

Il moderno pregiudizio

- **AP** è falso in **Ellittica** $\Rightarrow$ **Postulato V** è falso in **Ellittica**

I S

Il moderno pregiudizio

- ~~**AP** è falso in **Ellittica** ⇒ **Postulato V** è falso in **Ellittica**~~

FALSO!

I S

Il moderno pregiudizio

- ~~**AP** è falso in **Ellittica** ⇒ **Postulato V** è falso in **Ellittica**~~

FALSO!

- **AP** è falso in **Ellittica**, **Postulato V** è vero in **Ellittica**

$\Downarrow$

- **AP** e **Postulato V** non sono equivalenti in **Ellittica**

I S

Enunciati euclidei veri nell’**Ellittica**

Le tre implicazioni euclidee

- **Postulato V**
- **Proposizione 29** (antecedente falso)
- **Proposizione 30** (antecedente falso)

sono enunciati veri nella **Geometria Ellittica**!

I S

Alle radici della geometria

Assoluta →

- **Euclidea**
- **Iperbolica**

Alle radici della geometria

Assoluta → { **Euclidea**, **Iperbolica** }

Ellittica

I S

Alle radici della geometria

- **Preassoluta** →
  - **Assoluta** →
    - **Euclidea**
    - **Iperbolica**
  - **Ellittica**

Concetti primitivi e assiomi nella didattica

- Cos'è una retta?

I S

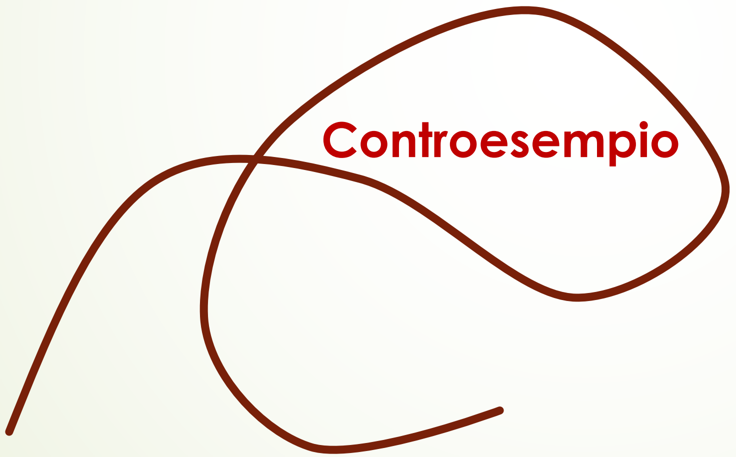
Concetti primitivi e assiomi nella didattica

- Cos'è una retta?
  - Un insieme infinito di punti

I S

Concetti primitivi e assiomi nella didattica

- Cos'è una retta?
  - Un insieme infinito di punti



I S

Concetti primitivi e assiomi nella didattica

- Cos'è una retta?
  - Un insieme infinito di punti
  - Un insieme di punti che hanno la stessa direzione

I S

Concetti primitivi e assiomi nella didattica

- Cos'è una retta?
  - Un insieme infinito di punti
  - Un insieme di punti che hanno la stessa direzione

  E cos'è la direzione?

I S

Concetti primitivi e assiomi nella didattica

- Cos’è una retta?
  - Un insieme infinito di punti
  - Un insieme di punti che hanno la stessa direzione

  E cos’è la direzione?
- Quante rette passano per due punti?

I S

Concetti primitivi e assiomi nella didattica

- Cos'è una retta?
  - Un insieme infinito di punti
  - Un insieme di punti che hanno la stessa direzione

  E cos'è la direzione?
- Quante rette passano per due punti?
  - Una

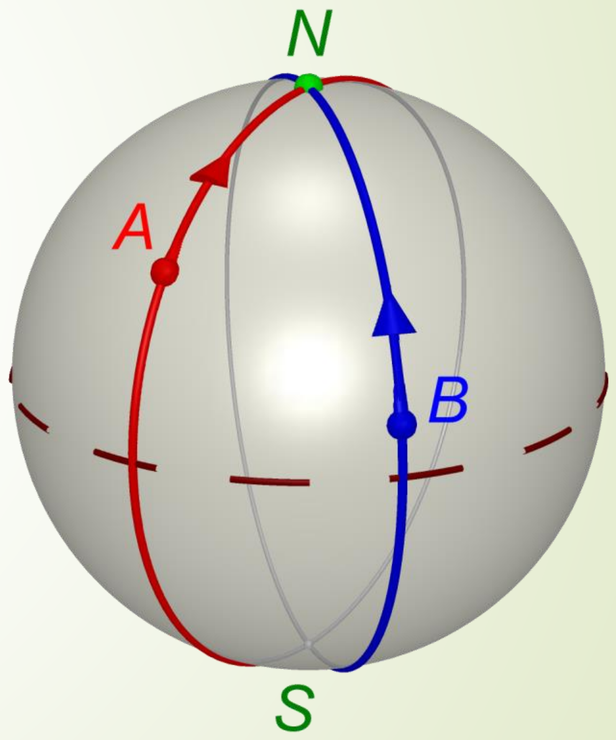
I S

Concetti primitivi e assiomi nella didattica

- Cos'è una retta?
  - Un insieme infinito di punti
  - Un insieme di punti che hanno la stessa direzione

  E cos'è la direzione?
- Quante rette passano per due punti?
  - Una

  Dipende! Sulla Terra…



I S

Concetti primitivi e assiomi nella didattica

Non si può definire tutto

$\Downarrow$

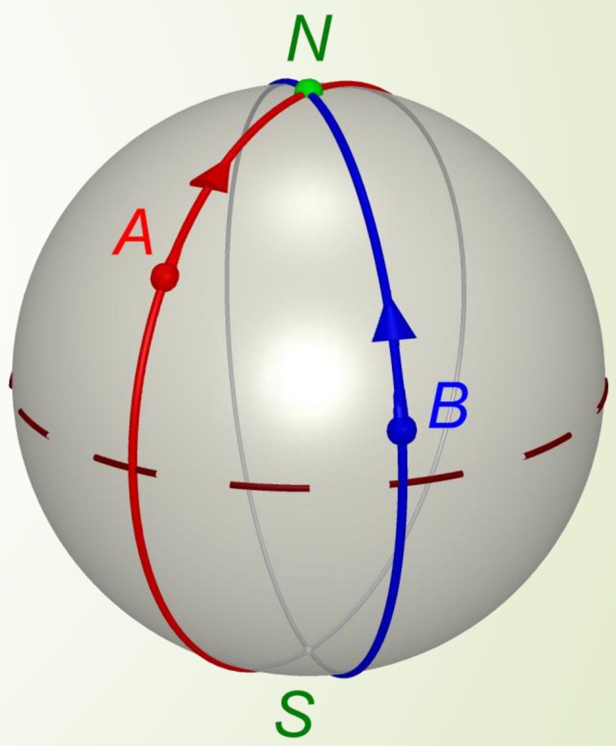
Concetti primitivi

stessa direzione

E cos'è la direzione?

- Quante rette passano per due punti?
  - Una

Dipende! Sulla Terra…



I S

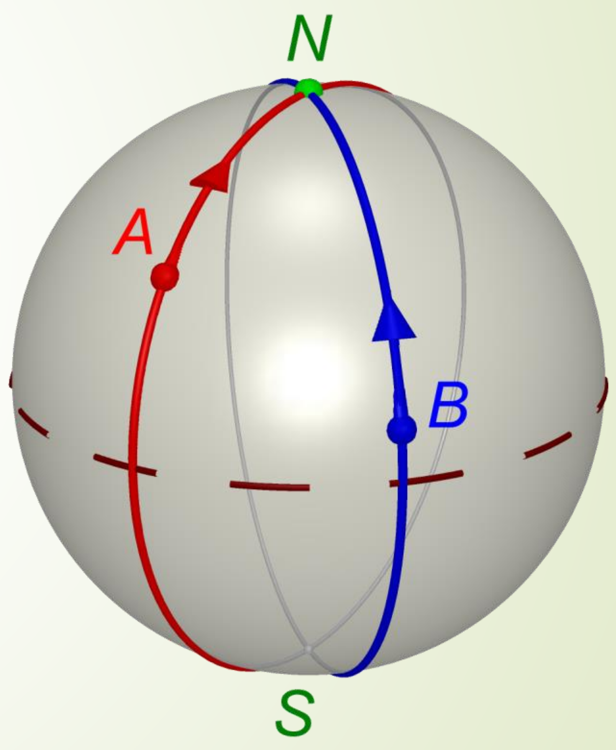
Concetti primitivi e assiomi nella didattica

- **Non si può definire tutto**
  ⇓
  Concetti primitivi

- **Gli assiomi**

  Stabiliscono le proprietà di base dei concetti primitivi (definizione implicita)

  Possono essere veri o falsi
  (a seconda della teoria)



I S

Concetti primitivi e assiomi nella didattica

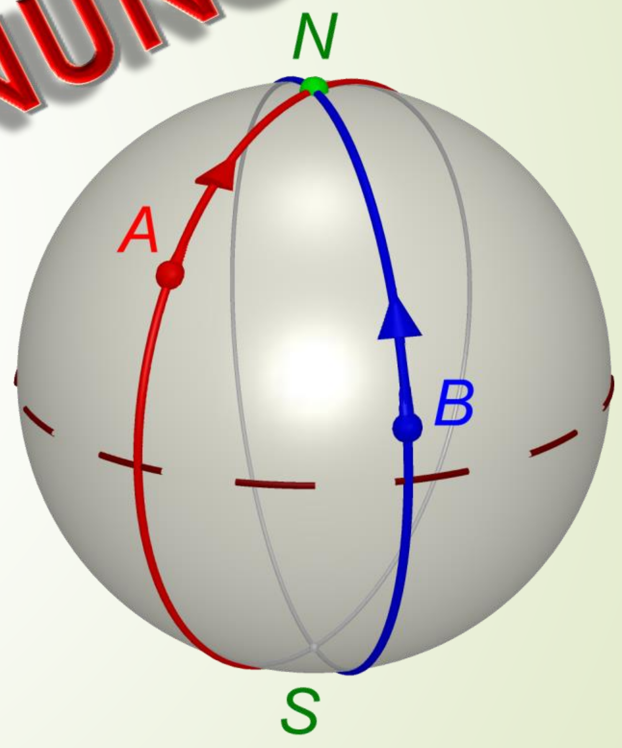
- **Non si può definire tutto**
  ⇓
  Concetti primitivi

  Gli assiomi

- **Stabiliscono le proprietà di base dei concetti primitivi** (definizione implicita)

  Possono essere veri o falsi
  (a seconda della teoria)

UNA DISCUSSIONE IRRINUNCIABILE!



Concetti primitivi e assiomi nella didattica

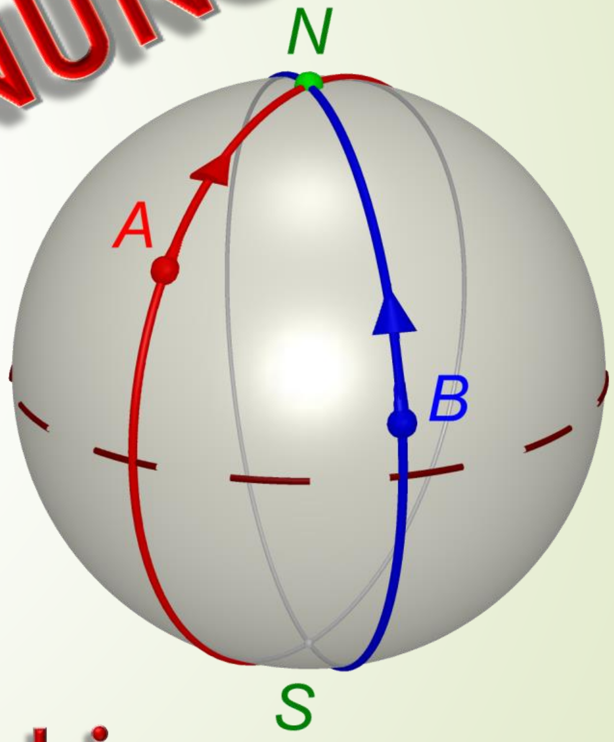
- **Non si può definire tutto**
  ⇓
  Concetti primitivi

Gli assiomi

- **Stabiliscono le proprietà di base dei concetti primitivi** (definizione implicita)

  Possono essere veri o falsi
  (a seconda della teoria)

UNA DISCUSSIONE IRRINUNCIABILE!



Che richiede le geometrie non-euclidee

I S

L’orientazione e la Geometria Preassoluta

I S

L'orientazione e la Geometria Preassoluta

- La geometria assoluta è caratterizzata dalla relazione di ordinamento «**stare fra**» di tre punti sulla **retta aperta**
  - *B* sta fra *A* e *C* se e solo se *B* sta fra *C* e *A*

I S

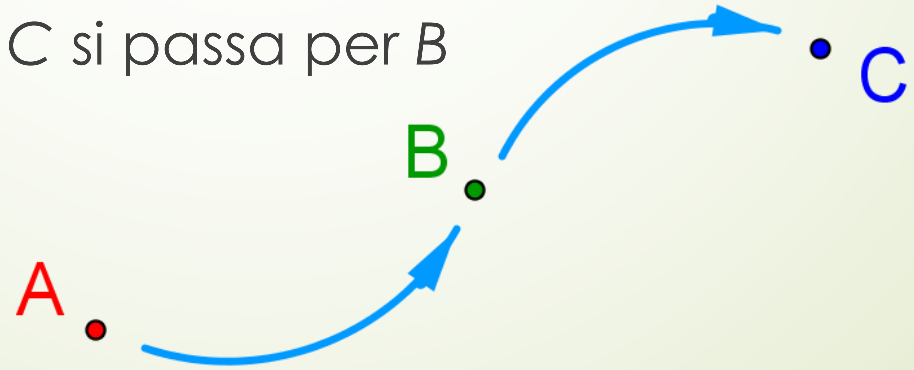
L’orientazione e la Geometria Preassoluta

- La geometria assoluta è caratterizzata dalla relazione di ordinamento «**stare fra**» di tre punti sulla **retta aperta**
  - *B* sta fra *A* e *C* se e solo se *B* sta fra *C* e *A*
- La geometria ellittica è caratterizzata dalla relazione di **separazione** di quattro punti sulla **retta chiusa**
  - *A* e *B* separano *C* e *D* se e solo se tra *A* e *B* sta uno solo dei punti *C* e *D*

L'orientazione e la Geometria Preassoluta

- La geometria assoluta è caratterizzata dalla relazione di ordinamento «**stare fra**» di tre punti sulla **retta aperta**
  - *B* sta fra *A* e *C* se e solo se *B* sta fra *C* e *A*
- La geometria ellittica è caratterizzata dalla relazione di **separazione** di quattro punti sulla **retta chiusa**
  - *A* e *B* separano *C* e *D* se e solo se tra *A* e *B* sta uno solo dei punti *C* e *D*
- Nella geometria preassoluta la relazione di **orientazione** caratterizza rette **né aperte né chiuse ma solo aperte o chiuse**
  - Per andare da *A* a *C* si passa per *B*

    $(A \succ B \succ C)$



I
S

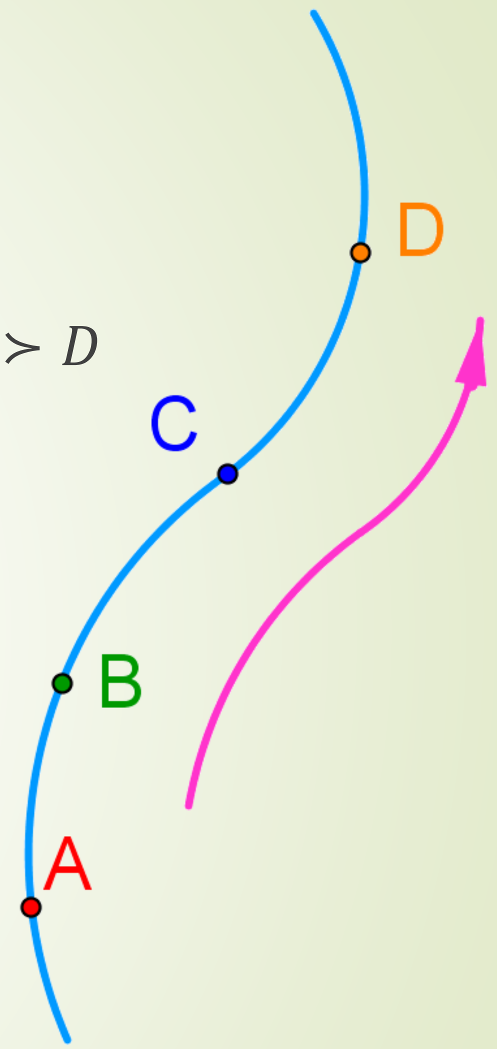
Gli assiomi di orientazione

- Ordinamento dei punti
- Prolungabilità illimitata della retta
- Assenza di auto-intersezioni
- Separazione del piano

I S

Gli assiomi di orientazione

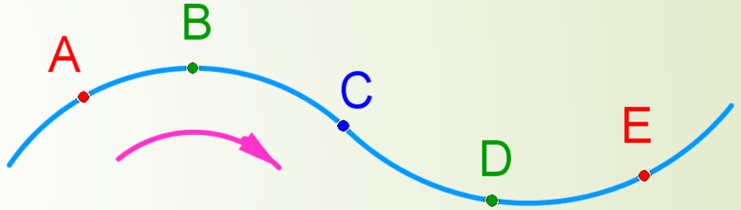
- Ordinamento dei punti
  - $A \succ B \succ C \wedge A \succ C \succ D \quad \leftrightarrow \quad A \succ B \succ D \wedge B \succ C \succ D$
- Prolungabilità illimitata della retta
- Assenza di auto-intersezioni
- Separazione del piano

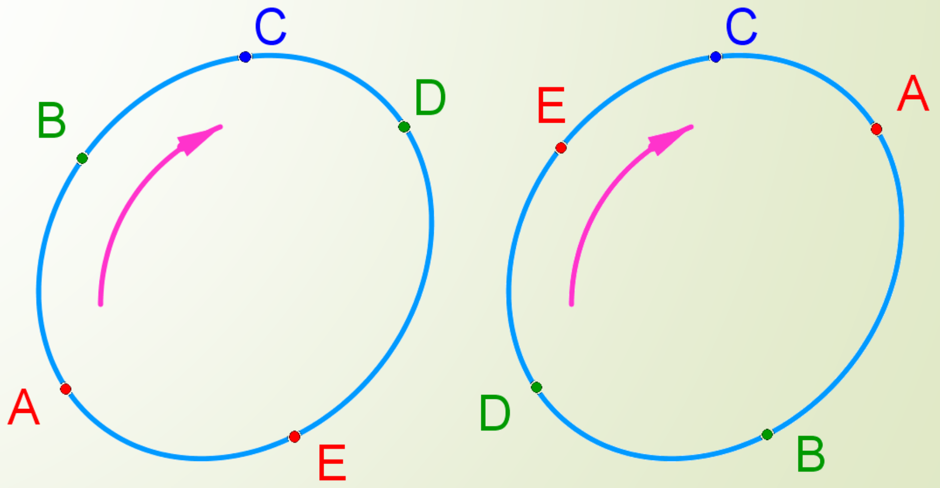


I S

Gli assiomi di orientazione

- Ordinamento dei punti
  - $A \succ B \succ C \wedge C \succ D \succ E \longrightarrow B \succ C \succ D \vee D \succ C \succ B$
- Prolungabilità illimitata della retta
- Assenza di auto-intersezioni
- Separazione del piano





I S

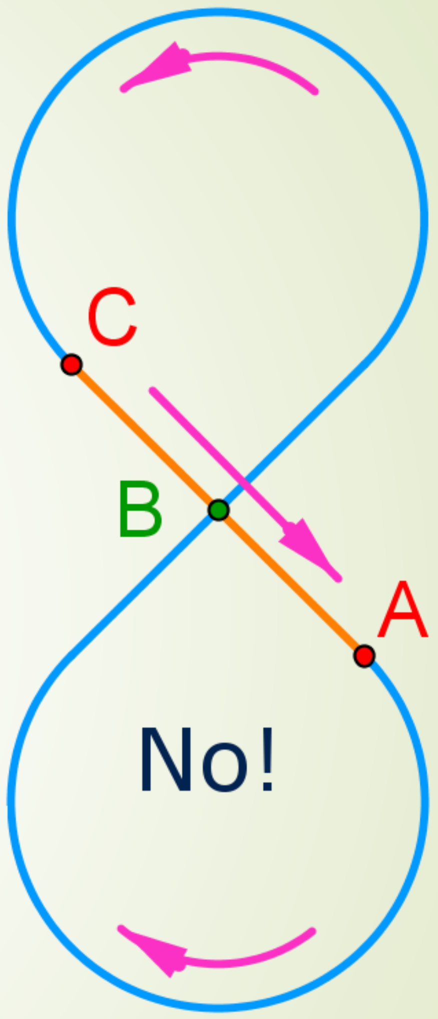
Gli assiomi di orientazione

- Ordinamento dei punti
- Prolungabilità illimitata della retta
  - Per ogni *B* esistono *A* e C tali che $A \succ B \succ C$
- Assenza di auto-intersezioni
- Separazione del piano

I S

Gli assiomi di orientazione

- Ordinamento dei punti
- Prolungabilità illimitata della retta
- Assenza di auto-intersezioni
  - $A \succ B \succ C \longrightarrow \neg B \succ A \succ C \wedge \neg C \succ B \succ A$
- Separazione del piano



I S

Gli assiomi di orientazione

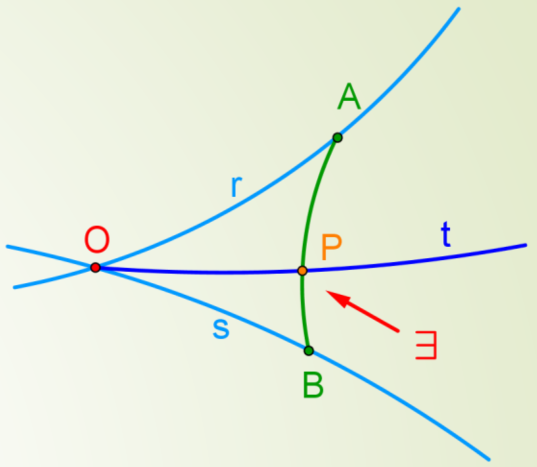
- Ordinamento dei punti
- Prolungabilità illimitata della retta
- Assenza di auto-intersezioni
- Separazione del piano
  - Ogni angolo suddivide il piano in due regioni; i segmenti che hanno per estremi punti non appartenenti alla stessa regione intersecano un solo lato dell'angolo o il suo vertice

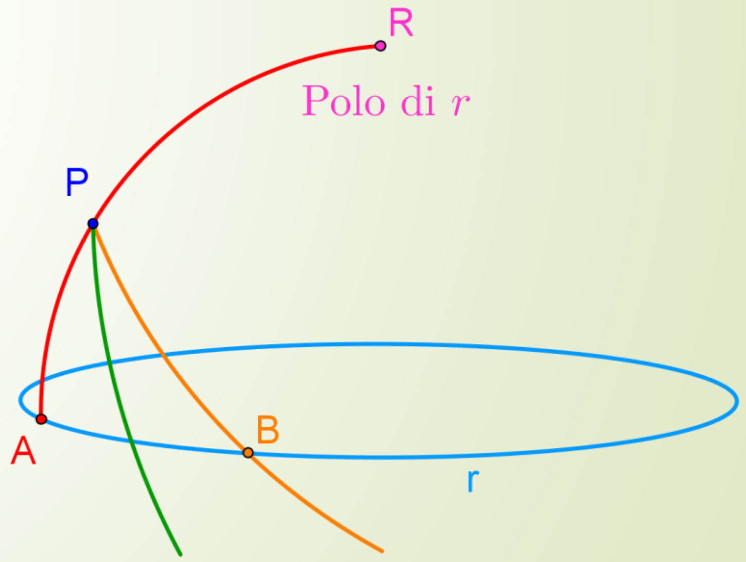
Il teorema di non esistenza

- Vale il teorema di attraversamento

Nella **Geometria Chiusa** si dimostra che

- Tutte le rette di un fascio proprio hanno una perpendicolare comune (la **retta polare** del centro del fascio)
- L'orientazione della polare induce un'orientazione nel fascio
- Ogni retta passante per un punto esterno ad un'altra retta la interseca



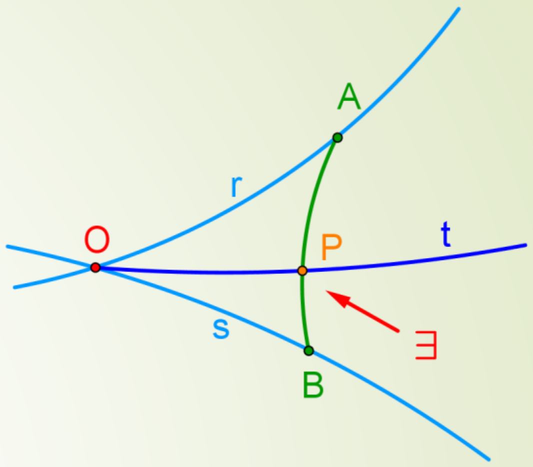


I

S

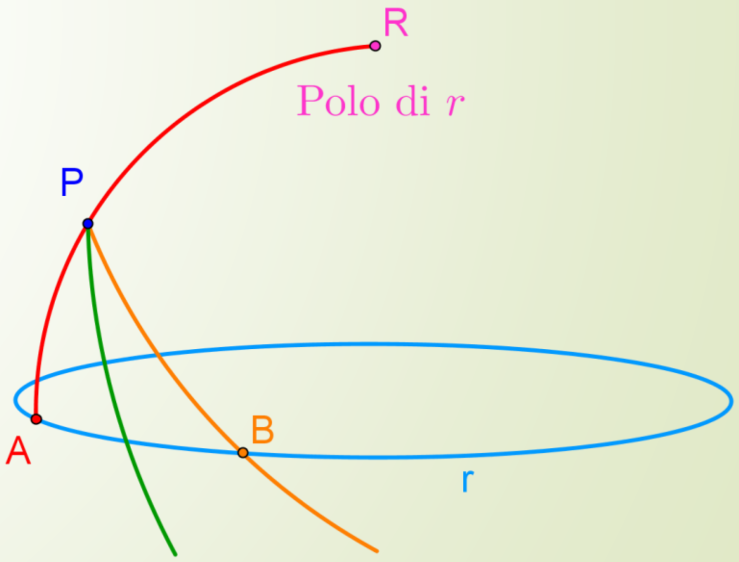
Il teorema di non esistenza

- Vale il teorema di attraversamento



Nella **Geometria Chiusa** si dimostra che

- Tutte le rette di un fascio proprio hanno una perpendicolare comune (la **retta polare** del centro del fascio)
- L'orientazione della polare induce un'orientazione nel fascio
- Ogni retta passante per un punto esterno ad un'altra retta la interseca



AE è un teorema!!!

I S

Il problema delle parallele

- Dati una retta *r* e un punto *P* esterno ad essa, quante sono le rette passanti per *P* e parallele a *r*?

I S

Il problema delle parallele

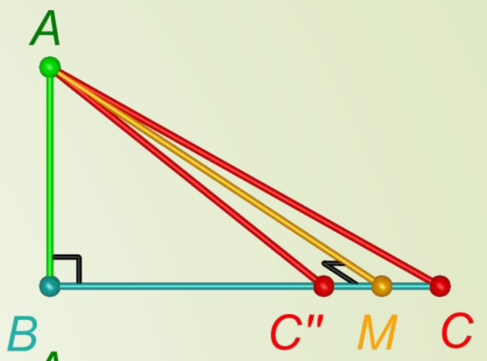
- Dati una retta *r* e un punto *P* esterno ad essa, quante sono le rette passanti per *P* e parallele a *r*?
- Questa risposta è nota
  - Una (N = 1) nella geometria euclidea
  - Infinite (N > 1) nella geometria iperbolica (due asintotiche)
  - Nessuna (N = 0) nella geometria ellittica (singola)
  - Nessuna (N = 0) nella geometria sferica (ellittica doppia)

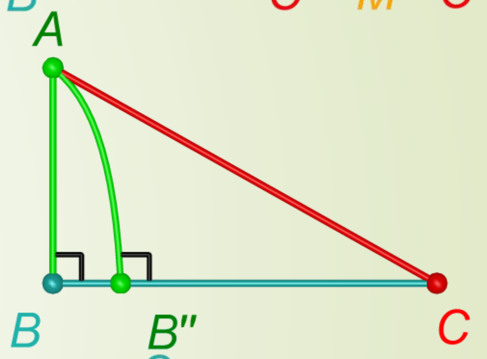
Il problema delle parallele

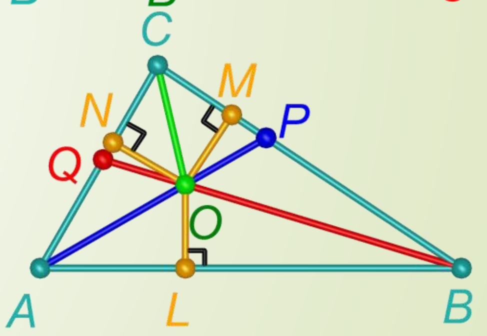
- Dati una retta *r* e un punto *P* esterno ad essa, quante sono le rette passanti per *P* e parallele a *r*?
- Questa risposta è nota
  - Una (N = 1) nella geometria euclidea
  - Infinite (N > 1) nella geometria iperbolica (due asintotiche)
  - Nessuna (N = 0) nella geometria ellittica (singola)
  - Nessuna (N = 0) nella geometria sferica (ellittica doppia)
- Non era stato dimostrato che non esistono altre geometrie elementari (con l'assioma di continuità di Dedekind)
- Non era stato dimostrato che le rette sono solo aperte o chiuse

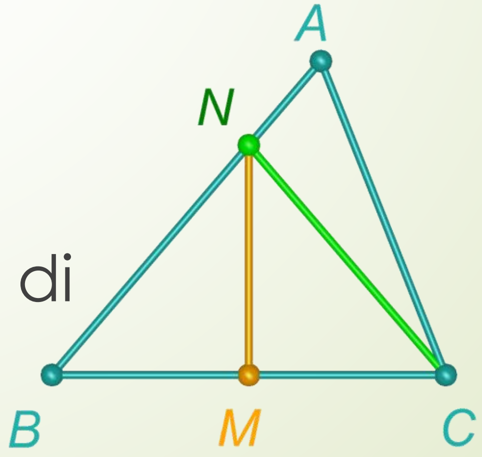
Le disuguaglianze nei triangoli

- Primo criterio di congruenza dei triangoli rettangoli
- Secondo criterio di congruenza dei triangoli rettangoli
- Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo si intersecano in un unico punto
- Disuguaglianza triangolare
- Relazione tra lati e angoli opposti di un triangolo









I

S

GRAZIE!

Franco Rupeni (franco.rupeni@gmail.com) - Alessandro Zampa (a.zampa@alice.it)

I S

INDICE

S

SCHEDE INTEGRATIVE

- LE RETTE PARALLELE
- LE NOZIONI COMUNI
- LE PROPOSIZIONI 4 e 26
- LE PROPOSIZIONI 7 e 8
- LE PROPOSIZIONI 16 e 17
- LA PROPOSIZIONE 23
- LE PROPOSIZIONI 27 e 28
- LA PROPOSIZIONE 29
- LA PROPOSIZIONE 30
- LA PROPOSIZIONE 31
- LA PROPOSIZIONE 32
- QUADRILATERO LOGICO
- ASSIOMA DELLE PARALLELE IN HILBERT
- ASSIOMA/POSTULATO DI PLAYFAIR
- LE GEOMETRIE NON-EUCLIDEE
- GLI ENTI FONDAMENTALI

I

Le rette parallele

Parallele sono rette che, essendo nello stesso piano e prolungate illimitatamente da una e dall'altra parte, né da una né dall'altra si incontrano tra loro

I S

Le nozioni comuni

- Gli uguali allo stesso sono anche uguali tra loro
- E qualora a uguali siano sommati uguali, i totali sono uguali
- E qualora da uguali siano sottratti uguali, i resti sono uguali
- E qualora a disuguali siano sommati uguali, i totali sono disuguali
- E i doppi dello stesso sono uguali tra loro
- E le metà dello stesso sono uguali tra loro
- Ed i sovrapponentisi tra loro sono uguali tra loro
- E il totale [è] maggiore della parte
- E due rette non comprendono un dominio

Le proposizioni 4 e 26

Proposizione 4

Qualora due triangoli abbiano i due lati rispettivamente uguali a[i] due lati, e abbiano anche l'angolo, quello compreso dalle rette uguali, uguale all'angolo, avranno anche la base uguale alla base, e il triangolo sarà uguale al triangolo, e i restanti angoli, sotto cui si tendono i lati uguali, saranno rispettivamente uguali ai restanti angoli

I criterio di congruenza

Proposizione 26

Qualora due triangoli abbiano due angoli rispettivamente uguali a due angoli e un solo lato, o quello agli angoli uguali oppure quello che si tende sotto uno solo degli angoli uguali, uguale a un solo lato, avranno anche i restanti lati [rispettiva-mente] uguali ai restanti lati, e il restante angolo al restante angolo

II criterio di congruenza

I S

Le proposizioni 7 e 8

Proposizione 7

Sulla stessa retta altre due rette rispettivamente uguali alle stesse due rette <e> che hanno gli stessi limiti delle rette in origine non saranno costruite verso punti differenti dalla stessa parte

Proposizione 8

Qualora due triangoli abbiano i due lati rispettivamente uguali a[i] due lati, e abbiano anche la base uguale alla base, avranno anche l'angolo compreso dalle rette uguali uguale all'angolo

Le proposizioni 16 e 17

Proposizione 16

Prolungato avanti uno solo dei lati di ogni triangolo, l'angolo all'esterno è maggiore di uno e dell'altro degli angoli all'interno e opposti

Proposizione 17

Due angoli sostituiti in ogni modo di ogni triangolo sono minori di due retti

La proposizione 23

Proposizione 23

Costruire, sulla retta data e su un punto di essa, un angolo rettilineo uguale all'angolo rettilineo dato

I S

Le proposizioni 27 e 28

Proposizione 27

Qualora una retta che incide su due rette faccia gli angoli alterni uguali tra loro, le rette saranno parallele tra loro

Proposizione 28

Qualora una retta che incide su due rette faccia un angolo all’esterno uguale a quello all’interno e opposto e dalla stessa parte o quelli all’interno e dalla stessa parte uguali a due retti, le rette saranno parallele tra loro

La proposizione 29

Proposizione 29

Una retta che incide su rette parallele fa sia gli angoli alterni uguali tra loro che quello all'esterno uguale all'interno e opposto che quelli all'interno e dalla stessa parte uguali a due retti

I S

La proposizione 30

Proposizione 30

Le parallele alla stessa retta sono anche parallele tra loro

I S

La proposizione 31

Proposizione 31

Condurre per il punto dato parallela alla retta data una linea

I S

La proposizione 32

Proposizione 32

Prolungato avanti uno solo dei lati di ogni triangolo, l'angolo all'esterno è uguale ai due all'interno e opposti, e i tre angoli all'interno del triangolo sono uguali a due retti

Quadrilatero logico

Proposizione 17	$\nLeftrightarrow$	**Postulato V**
$\neg(r \parallel s) \;\rightarrow\; \alpha+\beta<2R$		$\alpha+\beta<2R \;\rightarrow\; \neg(r \parallel s)$
diretta		inversa
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$
Proposizione 28	$\nLeftrightarrow$	**Proposizione 29**
$\alpha+\beta=2R \;\rightarrow\; r \parallel s$		$r \parallel s \;\rightarrow\; \alpha+\beta=2R$
contronominale		contraria

Assioma delle parallele in Hilbert

- In *Fondamenti della Geometria* (1899, 1903, 1909)

$$N = 1$$

- In *Fondamenti della Geometria* (1913 e successive)

$$N \leq 1$$

I S

Assioma / Postulato di Playfair

Two straight lines which intersect one another, cannot be both parallel to the same straight line (N ≤ 1 e non N = 1)

Due rette incidenti non possono essere parallele alla stessa retta

$$\forall x \forall y \forall z\big((x \neq y \land \neg xPy) \rightarrow \neg(xPz \land yPz)\big)$$

I S

Le geometrie non-euclidee

Geometria		Tipologia delle rette N° parallele
Assoluta	Euclidea	Rette infinite / aperte 1
Assoluta	Iperbolica	Rette infinite / aperte ∞ (2)
Ellittica	Semplice	Rette finite / chiuse 0
Ellittica	Doppia	Rette finite / chiuse 0

Gli enti fondamentali

Punto	Retta	Piano	Geometria
Singolo S	Aperta A	Imploso PV	Euclidea
Singolo S	Aperta A	Esploso $\neg PV$	Iperbolica
Singolo S	Chiusa $\neg A$	Imploso PV	Ellittica
Doppio $\neg S$	Chiusa $\neg A$	Imploso PV	Sferica