PREMESSA

Il titolo di questa comunicazione nasce da considerazioni sull'ultimo esame di stato (2015) formulato (a parte il problema N.2 che si colloca con continuità rispetto agli ultimi problemi assegnati) all'insegna (problema 1) della CONTESTUALIZZAZIONE.

Personalmente rifiuto di accettare che *la contestualizzazione* in matematica abbia come unico scopo quello di proiettare gli apprendimenti in uno scenario di "real life" .

Preferisco invece pensare che *contestualizzare* significhi collocare gli argomenti in situazioni significative che possono essere anche rappresentate da situazioni di carattere storico ed epistemologico.
Questo è avvenuto negli esami di stato dei precedenti anni, soprattutto dopo 2011, nei quali sono presenti parti teoriche che richiedono considerazioni - deduzioni - argomentazioni sui concetti che gli studenti dovrebbero avere ampiamente acquisiti e "fatti propri" e parti di contestualizzazione non banale che fanno riferimento anche a situazioni culturalmente rilevanti nella storia della matematica e che costituiscono interessanti punti di riflessione e di approfondimento nell'attività didattica. Il tutto in linea con quanto richiesto dalle I.N.

.... riflessioni certamente più stimolati e significative dell'esame di un ipotetico e poco realistico piano tariffario!

Osservazioni sull' esame 2015 (Problema 1)

- **Matematicamente gratuito e impreciso**
- **Presentazione di una realtà artefatta**
- **Formulazione pesante più ricca di parole che di contenuti**
- **Culturalmente inconsistente**
- **Disorganico**

Se il Ministero è stato così ostinato nel portare avanti questo tipo di prova anticipata dalle due simulazioni, fortemente contestate da parte dei docenti, vuol dire che un motivo ci deve essere.

- **Quale?**
- **Chi ne sono gli autori?**
- **E su quale "credo" pedagogico si fonda?**
- **Sulla contestualizzazione ad ogni costo della matematica in una situazione reale?**
- **E' un volere dare valore alle I.N.? La prova proposta non sembra tanto coerente ed in linea con esse.**

L'idea è che questa prova sia dettata più da una finalità strumentale che da un vero obiettivo di corrispondere ad una esigenza pedagogica di miglioramento.

Da ogni situazione la persona saggia estrae il positivo.

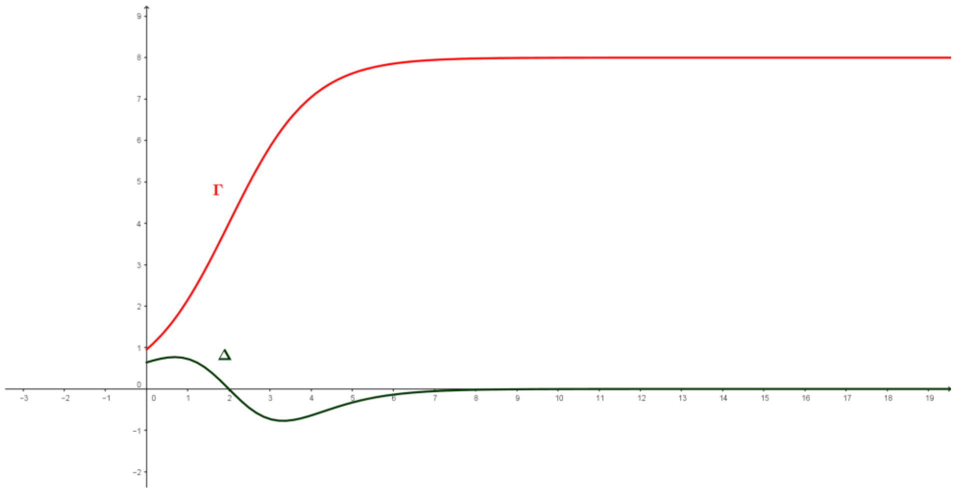
Non sempre le grandi idee hanno avuto incidenza e hanno prodotto grandi cambiamenti, a volte questi sono stati prodotti da idee abbastanza mediocri.

Da tutta questa vicenda prendiamo il positivo: quello che si sta riflettendo e discutendo e questo non può che portare bene.

CONTESTUALIZZAZIONE E NON SOLO!

PROBLEMA 1 (P.N.I. 2013)

Una funzione f (x) è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0,+\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici Γ e Λ di f (x) e della sua derivata seconda f "(x) . La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate (2 ;4) , passa per (0 ;0), mentre le rette y = 8 e y =0 sono asintoti orizzontali per Γ e Λ, rispettivamente.



1) Si dimostri che la funzione f '(x) , ovvero la derivata prima di f(x) , ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni x del dominio è:
f "(x) ≤ f'(x) ≤ f (x) , qual è un possibile andamento di f'(x) ?

2) Si supponga che f(x) costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che Γ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?

3) Se Γ è il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{a}{1+2^{b-x}}$, si provi che a = 8 e b =2

4) Nell'ipotesi del punto 3), si calcoli l'area della regione di piano delimitata da Λ e dall'asse x sull'intervallo [2 ,0].

Problema 2 (PNI_Brocca 2011)- analogo Problema 1 (Ordinamento)

Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \textbf{ e } g(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$$

1. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy. Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo [−10; 10] e se ne indichino le coordinate.

2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo [0; 4]. Si calcoli l'area di R.

3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y=-15$ **e** $y=-5$**, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di** 10^{-1} **).**

4. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da h(x) = 5 – x. Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

Problema 2 (Ordinamento 2011)

Sia f la funzione definita sull'insieme R dei numeri reali da

$$f(x)=(ax+b)e^{-\frac{x}{3}}+3$$

dove a e b sono due reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che f (0) = 2.

1. Si provi che a =1 e b = −1.

2. Si studi su R la funzione $f(x)=(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3$ **e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy.**

3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta y = 3.

4. Il profitto di una azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i **l'anno di osservazione e con** y_i **il corrispondente profitto.**

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione g definita su R^+ **se per ciascun** x_i**, oggetto dell'osservazione, si ha:** $|g(x_i)-y_i|\leq 10^{-1}$ **Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.**

Quesiti

Percentuali

In un libro si legge: "Due valigie della stessa forma sembrano "quasi uguali", quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (oppure del 20% o del 25%) corrispondono aumenti di capacità (volume) di circa 33% (oppure 75% o 100% : raddoppio)". È così? Si motivi esaurientemente la risposta. (2013)

Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" (fig. a lato) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%. Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale? (2008)

Si sa che il prezzo p di un abito ha subìto una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito? (2007)

Ottimizzazione

Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di 50 cm^2 , margini superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare? (2006)

Probabilità

Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A? (2012)

Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette? (2011)

Si consideri la funzione: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ **e se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di** μ, σ, σ^2 **e come tali parametri influenzino il grafico di f(x). (2007).**

... non solo "Probabilità"

La "zara" è un gioco d'azzardo di origine araba che conobbe particolare fortuna in Italia in epoca medievale – ne parla anche Dante nella Divina Commedia – e si giocava con tre dadi. Si confronti la probabilità di ottenere in un lancio la somma 9 con quella di ottenere la somma 10. (2014)

A Leonardo Eulero (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: «Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da

ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare». (2007).

Cultura

Solidi platonici

Si spieghi perché non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni (2014)

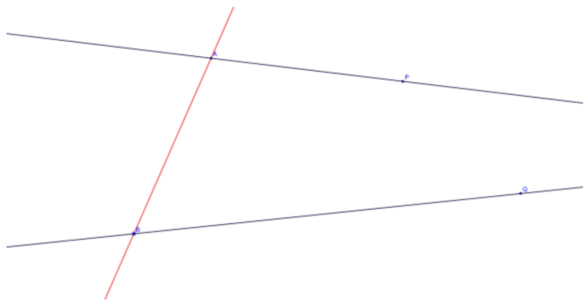
"Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni". Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta. (2009)

Il metodo assiomatico - Le geometrie non euclidee

In un contesto di geometria non euclidea si illustri un esempio di triangolo i cui angoli non hanno somma 180°. (2014)

Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo ad una sua amica che la geometria euclidea non è più vera perché per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di geometria non euclidea. Silvia ha ragione? Si motivi la risposta. (2011)

"Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta AB e gli angoli $P\hat{A}B$ e $Q\hat{B}A$ hanno somma minore di 180°, allora le semirette AP e BQ, prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q, si devono intersecare". Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati. (2009).



Perché è geometria "non" euclidea? Che cosa e come viene negato della geometria euclidea? Si illustri la questione con gli esempi che si ritengono più adeguati. (2008).

Si consideri il teorema: «la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto» e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria non-euclidea. Quali le formulazioni nella geometria iperbolica e in quella ellittica? Si accompagni la spiegazione con il disegno. (2007)

Il concetto di potenza di un insieme e gli insiemi infiniti (Cantor)

Le lettere N, Z, Q, R denotano, rispettivamente, gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali mentre il simbolo $\aleph_0$ (aleph-zero) indica la cardinalità di N. Gli insiemi Z, Q e R hanno anch'essi cardinalità $\aleph_0$? Si motivi la risposta. (2014)

L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta. (2012)

In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme N dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: «....se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni? (2011)

Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma

esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta. (2013)

Introduzione al calcolo infinitesimale

Problema (Ordinamento 2007)

Si consideri un cerchio C di raggio r.

1.Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.

2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C. Si dimostri che $Sn = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C.

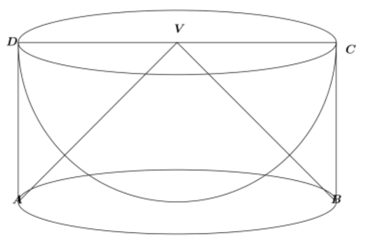
3. Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$. (*)

4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

(*) chiaro riferimento al metodo di esaustione "un procedimento infinitesimale" dell'antichità" (Archimede di Siracusa).

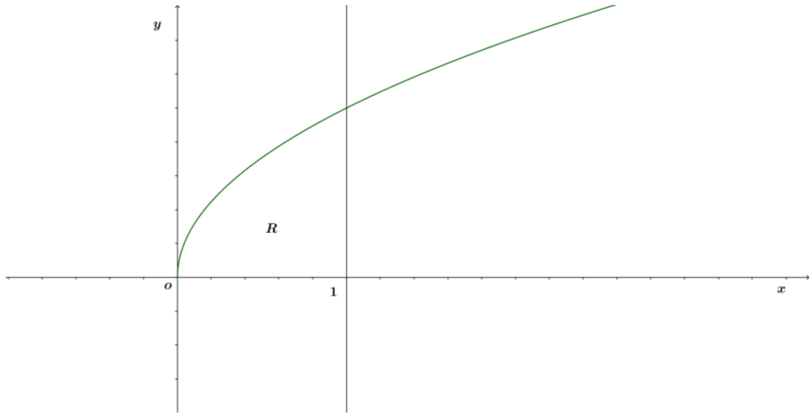
Cavalieri e il metodo degli indivisibili (un "timido" approccio alla nascita dell'analisi infinitesimale)

Nei "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*", Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama scodella considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice V in figura. (2009)



Si consideri la seguente proposizione: " Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta. (2008)

La regione R delimitata dal grafico di y = 2 x , dall'asse x e dalla retta x = 1 (in figura) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S. (2007).



Versiera di Agnesi

più volte proposta, in contestualizzazioni diverse.

Problema di Erone

Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad un retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce. (2012)

Quadratura del cerchio (problemi di costruzioni con riga e compasso).

In che cosa consiste il problema della quadratura del cerchio? Perché è così spesso citato? (2011 ....)

Altri quesiti

- **Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.**

- **Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare 7! = 5040 numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima posizione? (2013)**

Bruno de Finetti (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: "che cos'è la probabilità?" era solito rispondere: "la probabilità non esiste!". Quale significato puoi attribuire a tale risposta? E' possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte? (2006).