Congresso Mathesis 2012

Andrea Centomo

Liceo “F. Corradini” di Thiene
Presidente della Mathesis di Vicenza

Email: andrea.centomo@istruzione.it

19 ottobe 2012

Nella prefazione del testo *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry* [1] uno degli autori, H. Fukagawa, sottolinea come la matematica giapponese dei secoli dal XVII al XIX offra all’insegnante della scuola secondaria di II grado materiali didattici molto interessanti, principalmente esercizi, di livello di difficoltà variabile.

Tra il 1639 e il 1854 il Giappone ha vissuto un lungo periodo di isolamento dalla cultura occidentale nelle sue diverse forme. Ciò non ha risparmiato neppure la cultura scientifica e la matematica. Durante questo periodo tuttavia si è verificato un fenomeno molto particolare. Matematici dilettanti, principalmente samurai, mercanti e agricoltori, si cimentarono nella soluzione di svariati tipi di problemi geometrici che, una volta incisi su tavolette di legno, venivano appesi sotto i tetti di monasteri buddhisti o di santuari shintoisti. Queste tavolette di legno prendono il nome di *sangaku*. Anche se la matematica giapponese tradizionale (wasan) non è limitata alla produzione di *sangaku* diversi problemi geometrici sono molto interessanti didatticamente. Nelle pagine che seguono ne illustreremo alcuni che sembrano particolarmente significativi.

1. Il problema del ventaglio

L’undicenne Kinjiro Takasaka, allievo del maestro Shoryu Yamazaki, trascrisse in un *sangaku* depositato nel santuario shintoista di Isaniwa il 6 maggio del 1873 il seguente difficile problema.

Figura 1. Problema del ventaglio

> **Problema del ventaglio.** *Trovare il rapporto tra il raggio di uno dei due cerchi sotto la corda orizzontale e il raggio di uno dei due cerchi piccoli in alto. Il ventaglio ha un’apertura a due terzi dell’estensione massima (angolo piatto).*

2. Formulazione del problema e soluzione

I dati del problema sono due: il raggio $\overline{AB} = r$ della circonferenza interna e l’apertura del ventaglio $\hat{A} = 120°$.

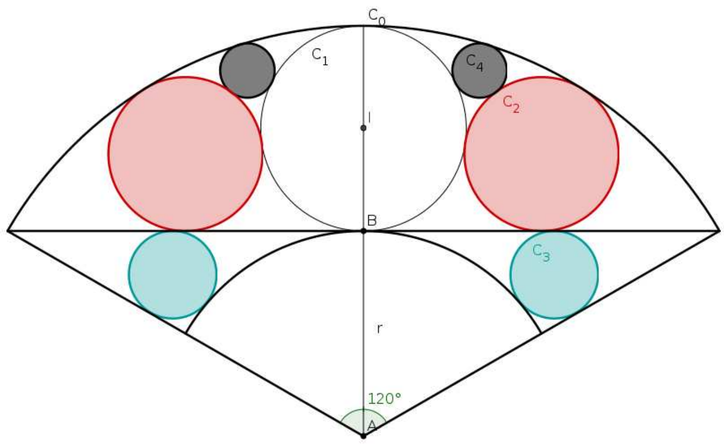

Figura 2.

A questo punto la soluzione può essere articolata in quattro passi di difficoltà graduale:

1. determinare il diametro $\overline{BI}$ del cerchio bianco (triangolo equilatero)
2. determinare il raggio r_1 dei cerchi rossi (teorema di Pitagora)
3. determinare il raggio r_2 dei cerchi azzurri (addittività dell'area, similitudine di triangoli)
4. determinare il raggio r_3 dei cerchi grigi (teorema di Descartes)

2.1. Problema 1

Il problema al punto 1. è banale in quanto il raggio esterno del ventaglio è chiaramente di lunghezza $2r$ da cui $\overline{BI} = (2r - r)/2 = r/2$.

2.2. Problema 2

Determinare il raggio r_1 del cerchio rosso.

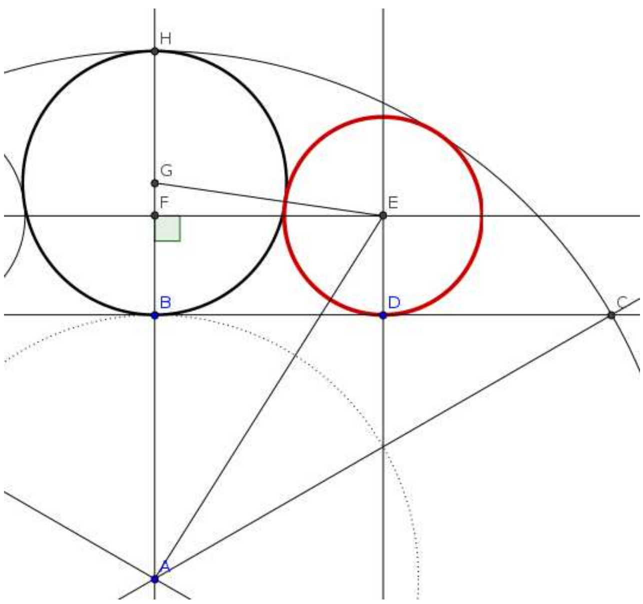

Figura 3. Problema 29 di [4]

Soluzione. Per il teorema di Pitagora, applicato al triangolo GEF, si ha

$$\overline{GF}^2 + \overline{FE}^2 = \overline{GE}^2 \qquad (r/2 - r_1)^2 + \overline{FE}^2 = (r/2 + r_1)^2$$

da cui $\overline{FE} = \sqrt{2rr_1}$. Inoltre, sempre per il teorema di Pitagora applicato al triangolo AFE, si ha

$$\overline{AE}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FE}^2 \qquad \overline{AE}^2 = (r + r_1)^2 + 2rr_1$$

Ma

$$\overline{AE} + r_1 = 2r \qquad \sqrt{2rr_1 + (r + r_1)^2} + r_1 = 2r$$

$$r^2 + 4rr_1 + r_1^2 = 4r^2 + r_1^2 - 4rr_1 \qquad 8r_1 = 3r \qquad r_1 = \frac{3}{8}r.$$

Il problema è il numero 29 di [4].

2.3. Problema 3

Determinare il raggio r_2 del cerchio azzurro.

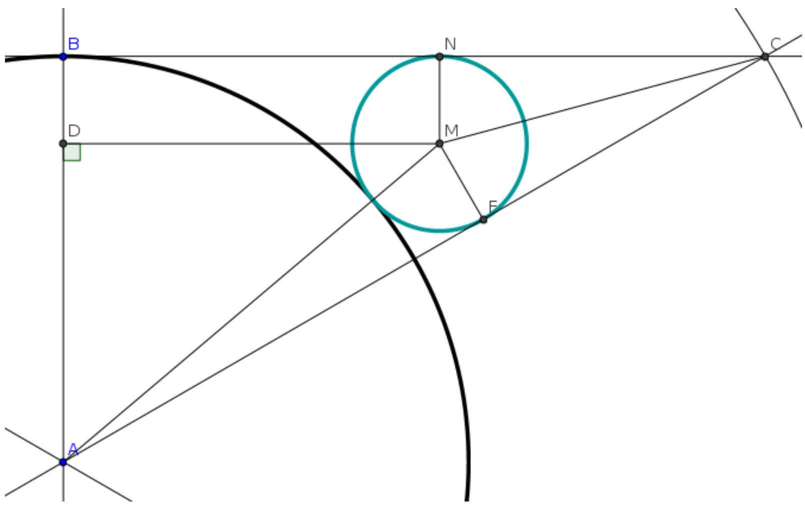

Figura 4.

Soluzione. Il triangolo ABC è la metà di un triangolo equilatero di lato $2r$ e la sua area è

$$\text{Area}\,(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{2}r^2.$$

Sia $r_2 = \overline{NM}$ la lunghezza del raggio incognito. Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ADM si ha

$$(r - r_2)^2 + \overline{DM}^2 = (r + r_2)^2 \qquad \overline{DM} = 2\sqrt{rr_2} = \overline{BN}. \tag{1}$$

A questo punto utilizziamo l'*addittività delle aree* e osserviamo che

$$\text{Area}\,(AMC) = r_2\, r \quad \text{Area}\,(NMC) = \frac{1}{2}\,(r\sqrt{3} - 2\sqrt{r r_2})\, r_2$$

$$\text{Area}\,(AMNB) = (r + r_2)\,\sqrt{r r_2}$$

e che

$$\text{Area}\,(ABC) = \text{Area}\,(AMC) + \text{Area}\,(NMC) + \text{Area}\,(AMNB)$$

da cui

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\, r^2 = r_2\, r + \frac{1}{2}\,(r\sqrt{3} - 2\sqrt{r r_2})\, r_2 + (r + r_2)\,\sqrt{r r_2}$$

$$\sqrt{3}\, r - 2r_2 - r_2\,\sqrt{3} = 2\,\sqrt{r r_2}$$

da cui, elevando al quadrato membro a membro, anche

$$r_2^2(7 + 4\sqrt{3}) - 2r r_2(2\sqrt{3} + 3) + 3r^2 = 4r r_2$$

$$r_2^2(7 + 4\sqrt{3}) - 2r r_2(2\sqrt{3} + 5) + 3r^2 = 0.$$

Una soluzione di questa equazione è $r_2 = r$ e quindi, per il teorema di Ruffini, si ha

$$(r_2 - r)[r_2(7 + 4\,\sqrt{3}) - 3r] = 0$$

da cui

$$r_2 = \frac{3}{7 + 4\sqrt{3}}\, r = 3(7 - 4\sqrt{3})\, r. \tag{2}$$

Nota 1. La relazione (1) risolve il problema 40 di [4].

2.4. Problema 4

Determinare il raggio r_3 del cerchio grigio.

Questa è una situazione classica in cui si utilizza il teorema di Descartes sulle circonferenze tangenti. Indicati con r_i, $i = 0, 1, 2, 3$, i valori dei raggi delle circonferenze mutuamente tangenti e con $k_i = 1/r_i$ le corrispondenti curvature, il teorema di Descartes afferma che

$$k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{1}{2}\,(k_0 + k_1 + k_2 + k_3)^2.$$

Nel nostro caso le curvature delle tre circonferenze a cui la quarta deve essere tangente sono date da

$$k_0 = -\frac{1}{2r} \quad k_1 = \frac{8}{3r} \qquad k_2 = \frac{2}{r}.$$

Quindi, sostituendo i valori nella relazione precedente, e esplicitando k_3 si ottiene

$$k_3 = k_0 + k_1 + k_2 + 2\sqrt{k_0 k_1 + k_1 k_2 + k_0 k_2}$$

e

$$k_3 = \frac{25}{6r} + \frac{2}{r}\,\sqrt{3} = \frac{25 + 12\sqrt{3}}{6r}.$$

Il problema è il numero 55 di [4].

2.5. Soluzione del problema 4 con l'inversione circolare

Il problema 4 si può risolvere in modo molto semplice e senza utilizzare la formula di Descartes ricorrendo ad una trasformazione di inversione circolare.

Definizione 2. *L'inversione circolare nella circonferenza γ di centro G e raggio r è l'applicazione σ_γ che ad ogni punto P del piano, $P \neq G$, associa il punto $P' = \sigma_\gamma(P)$ appartenente alla semiretta di origine G passante per P e tale che $d(G,P)\, d(G,P') = r^2$.*

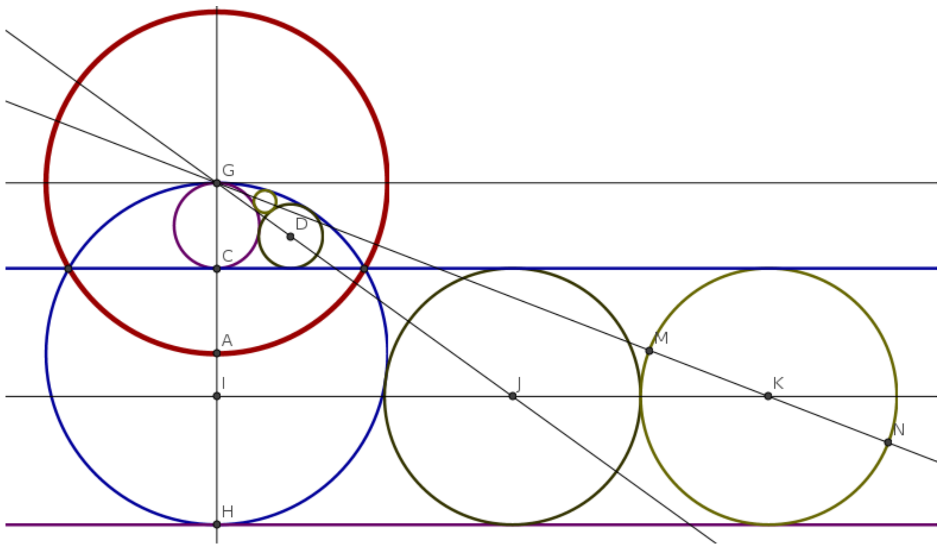

Figura 5. Inversione circolare

Con riferimento alla Figura 5 supponiamo che γ sia la circonferenza di centro G passante per A e quindi di raggio $2r$. L'inversione circolare σ_γ

i. trasforma la circonferenza di centro A, passante per G (blu) nella retta perpendicolare s in C alla retta GA

ii. la circonferenza di diametro GC (viola) nella retta perpendicolare p alla retta GA passante per H

iii. la circonferenza $\mathcal{T}$ (verde) nella circonferenza $\mathcal{T}'$ di centro J e raggio $3r/2$ tangente alle rette s e p.

Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo AIJ si ha

$$\overline{AJ}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{IJ}^2 \qquad \frac{49}{4}r^2 = \frac{1}{4}r^2 + \overline{IJ}^2 \qquad \overline{IJ} = 2\sqrt{3}\, r.$$

La circonferenza tangente di cui si richiede il raggio al problema 3 è l'inversione circolare tramite σ_γ della circonferenza tangente alle due rette s e p che ha per centro K. Ora per il teorema di Pitagora

$$\overline{GK}^2 = \overline{GI}^2 + \overline{IK}^2 \qquad \overline{GK}^2 = \frac{25}{4}r^2 + (3+2\sqrt{3})^2 r^2 \qquad \overline{GK} = \frac{1}{2}\sqrt{109+48\sqrt{3}}\, r$$

e quindi

$$\overline{GM} = \frac{1}{2}\sqrt{109+48\sqrt{3}}\, r - \frac{3}{2}r \qquad \overline{GN} = \frac{1}{2}\sqrt{109+48\sqrt{3}}\, r + \frac{3}{2}r.$$

Per definizione di inversione circolare

$$\overline{GM}\, d(G,M') = 4r^2 \qquad d(G,M') = \frac{8r}{\sqrt{109+48\sqrt{3}}-3}$$

$$\overline{GN}\, d(G,N') = 4r^2 \qquad d(G,N') = \frac{8r}{\sqrt{109+48\sqrt{3}}+3}$$

quindi

$$r_3 = \frac{1}{2}\,(d(G,M') - d(G,N')) = \frac{6r}{25+12\sqrt{3}}$$

che è il valore del raggio che risolve il problema 4.

La soluzione del problema del ventaglio è ora data da

$$\frac{r_2}{r_3} = r_2\, k_3 = 3(7-4\sqrt{3})r \cdot \frac{25+12\sqrt{3}}{6r} = \frac{31}{2} - 8\sqrt{3}.$$

2.6. Riflessioni didattiche

Appare interessante presentare il problema agli studenti (classe seconda del Liceo Scientifico) anticipandolo con una brevissima introduzione sulla matematica tradizionale giapponese.

La soluzione dei primi tre sotto-problemi rientra a pieno titolo nello didattica curriculare.

Per quanto riguarda l'ultima parte è sufficiente segnalare agli studenti la sua difficoltà e spiegare brevemente come esso si risolva facilmente a patto di conoscere il teorema di Descartes. Didatticamente ciò permette di accennare agli studenti l'idea di curvatura. Anche se questo concetto esula dagli scopi della didattica liceale è bene che essi ne sentano parlare.

Per gli studenti più motivati (olimpionici della matematica, ecc...) si può proporre come approfondimento lo studio della soluzione con inversione circolare.

In casi particolarmente fortunati i percorsi di valorizzazione dell'eccellenza possono raggiungere vertici inattesi. Nell'ambito della mostra Sangaku 2012[1] organizzata dalla Mathesis Vicenza in collaborazione con la Società Italiana della Matematica Svizzera e dedicata alla matematica giapponese nel periodo Edo, lo studente di quarta liceo Damiano Zeffiro (medaglia d'argento alle olimpiadi internazionali di Matematica del 2012) ha tenuto una conferenza sulla dimostrazione del teorema di Descartes.

3. Il problema di Takeda

Il problema che segue è tratto da un *sangaku*[2] del santuario di Tenman ed è stato scritto nel 1822 dal matematico Takeda Atsunoshin [1]. Nella prefazione Takeda scrisse: "I miei allievi studiano ogni giorno per risolvere i problemi che io assegno loro. Ho intenzione di pubblicare alcune delle loro soluzioni in una raccolta sui Problemi di Massimo e Minimo. Su questa tavoletta ho trascritto alcuni problemi di massimo e minimo interessanti dedicandoli a questo santuario in modo che i miei studenti migliorino nello studio della matematica."

Tra i quattordici problemi della tavola quello proposto da Hayashi Nobuyoshi è stato assegnato (punti b) e c)) come problema per una verifica scritta di matematica in preparazione all'Esame di Stato agli studenti di una classe quinta PNI.

1. `https://sites.google.com/site/sangaku2012/home`

2. I sangaku sono tavole votive offerte nei santuari shintoisti e nei templi buddisti in Giappone. I primi sangaku trovati risalgono agli inizi del XVII secolo, alcuni anni prima dell'inizio del periodo Edo giapponese. I problemi raffigurati sui sangaku sono tipici problemi di matematica giapponese e spesso coinvolgono insiemi di cerchi tangenti.

Problema. *Dato un settore circolare* AOB *di centro O e raggio unitario si considerino rispettivamente su AO e su BO i punti C e D che distano entrambi da O x, con $x \in (0, 1)$.*

Dal punto A si tracci quindi la retta t tangente all'arco di circonferenza di centro O e di estremi C e D nel punto P.

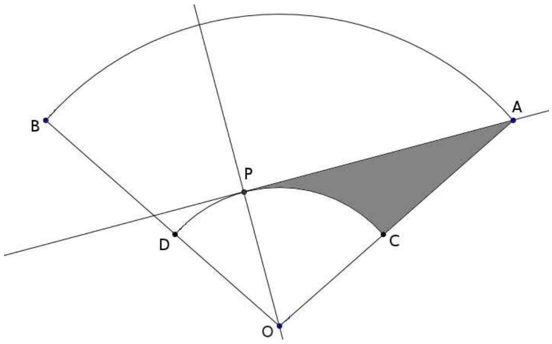

Figura 6.

Si chiede

a) *di calcolare l'area $T(x)$ del triangolo APO e di studiarne l'andamento completo (segno, continuità, derivabilità, monotonia, estremi relativi e assoluti, convessità, abbozzo del grafico) al variare di x;*

b) *determinare l'espressione $S(x)$ dell'area del triangoloide APC;*

c) *dopo aver dimostrato che la funzione $S(x)$ ha un unico punto di massimo ricorrendo a un metodo numerico calcolarne un valore approssimato.*

Soluzione. Il triangolo APO è un triangolo rettangolo. La sua ipotenusa ha lunghezza unitaria e un cateto ha lunghezza x. Quindi

$$T(x) = \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2}.$$

La funzione $T(x)$ è definita positiva e continua su tutto $(0, 1)$. La funzione $T(x)$ è derivabile in $(0, 1)$ e si ha

$$T'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - 2x^2}{2\sqrt{1 - x^2}}.$$

Lo studio del segno della derivata prima si riduce alla disequazione

$$1 - 2x^2 \leq 0 \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

da cui possiamo concludere che $T(x)$ è monotona strettamente crescente nell'intervallo $\left(0, \sqrt{2}/2\right)$ e monotona strettamente decrescente nell'intervallo $\left(\sqrt{2}/2, 1\right)$. Il punto $x_M = \sqrt{2}/2$ è punto di massimo relativo e assoluto. Il massimo vale

$$T\left(\sqrt{2}/2\right) = \frac{1}{4}.$$

La derivata seconda di $T(x)$ è

$$T''(x) = \frac{x(2x^2-3)}{2(1-x^2)^{3/2}} < 0$$

per ogni $x \in (0, 1)$. Possiamo concludere che nell'intervallo $(0, 1)$ la funzione è strettamente concava.

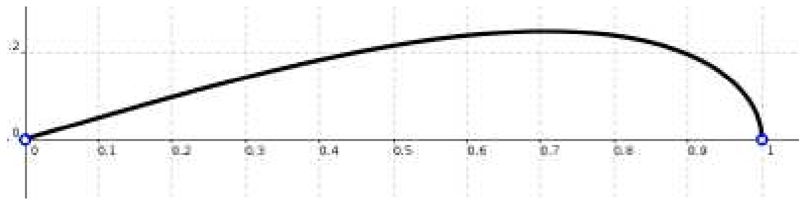

Figura 7. Grafico di $T(x)$

Il triangoloide APC ha area

$$S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}x^2\text{arcos}\,(x)$$

e la sua derivata prima è

$$S'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} - r\,\text{arcos}(x).$$

La funzione

$$h(x) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2}$$

è continua e monotona strettamente decrescente in $(0, 1/2)$ e $\text{im}_h = (1/2, \sqrt{3}/4)$. La funzione

$$p(x) = -x\,\text{arcos}(x)$$

è monotona strettamente crescente in $(0, 1/2)$ e $\text{im}_p = (0, \pi/6)$ e quindi esiste unico $\alpha \in (0, 1/2)$ tale che $S'(\alpha) = 0$. Per trovarlo usiamo il metodo dicotomico

a	b	m	$S(m)$	e
1/4	1/2	3/8	0.0186	0.125
3/8	1/2	7/16	−0.0395	0.0625
3/8	7/16	13/32	−0.113	0.03125

Tabella 1.

Quindi $\alpha \approx 13/32$.

3.1. Riflessioni didattiche

Il problema presenta nella prima parte un semplice studio di funzione irrazionale. La seconda parte richiede il ricorso a inverse di funzioni circolari e potrebbe apparire leggeremente complicata per gli studenti. Didatticamente è conveniente rivedere, la settimana precedente la somministrazione della prova, la questione dell'inversione delle funzioni trigonometriche.

L'ultimo punto invece è rappresentato da una tipica domanda d'esame per l'indirizzo PNI.

4. Sangaku e origami

Nella didattica della matematica curriculare qualche piccolo spazio dovrebbe essere dedicato all'origami. La matematica dell'origami è ormai molto vasta e ricca di risultati interessanti [3].

Un risultato famoso, molto conosciuto dagli origamisti per via della sua relazione con la divisione di un quadrato in parti uguali, è noto come teorema di Haga anche se, come evidenziato in [4], esso compare come problema in un *sangaku* cento anni prima che Haga lo riscoprisse.

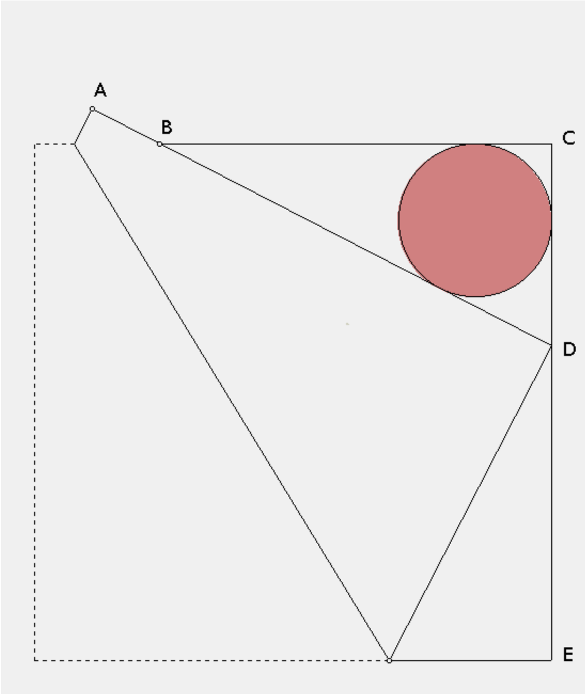

Figura 8. Problema sangaku

Il problema di Figura 8 chiede di dimostrare che il raggio del cerchio è pari alla lunghezza del segmento AB. Possiamo assumere, senza perdita di generalità, che il lato del quadrato sia $\overline{CE} = 1$. Ora, per risolvere il problema (la soluzione è lasciata al lettore) è richiesto il teorema di Haga il quale afferma che in questo caso

$$\overline{BC} = \frac{2\,\overline{DE}}{1+\overline{DE}}\,.$$

4.1. Riflessioni didattiche

Il teorema di Haga può essere dimostrato senza molte difficoltà ricorrendo ai criteri di similitudine dei triangoli. Risulta molto semplice riprodurre la situazione geometrica in classe in quanto è sufficiente piegare un foglio di carta quadrato oppure, alternativamente, si può riprodurre la figura con un software di geometria dinamica (ad esempio GeoGebra) esplorandone successivamente le proprietà relativamente ai triangoli simili che si formano.

Il teorema è stato utilizzato in modo più o meno esplicito negli esercizi proposti a diverse competizioni olimpiche di matematica (Slovenian MAthematical Olympiad 1993).

Bibliografia

[1] Fukagawa, H. & Rothman, T. (2008) *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press.

[2] Gazen, Y. (2010) *Handbook of traditional japanese mathematics*, (disponibile solo in manoscritto per cortesia di Hidetoshi Fukagawa)

[3] Hull, T. (2006) *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*, AK Peters Ltd., Wallesley, Massachusets, USA.

[4] Fukagawa, H. & Pedoe, D. (1989) Japanese Temple Geometry Problems, Charles Babbage Research Foundation, Winnipeg, Canada.