Pensiero matematico e pensiero fisico

Gabriele Lolli

In ricordo di Donatella Iannece

1 Le matematiche miste

Nell'età moderna, da Bacone fino all'Ottocento si parlava di *matematica mista*:

> La matematica è o pura o mista: alla matematica pura appartengono quelle scienze che trattano la quantità completamente separata dalla materia e dagli assiomi della filosofia naturale. Sono due queste scienze, la geometria e l'aritmetica; l'una tratta la quantità continua, l'altra la quantità separata [...] ([Bacon 1623, Book 3])
>
> La matematica mista ha come suo argomento alcuni assiomi e parti della filosofia naturale, e considera la quantità in quanto essa serve a spiegare, dimostrare e attivare quelle. ([Bacon 1605, Book 2])[1]

Ancora nell'Ottocento, con questa dizione si intendono le discipline caratterizzate per il fatto che in essa "le relazioni di spazio e numero [sono] combinate con principi ricavati da osservazioni speciali" ([Whewell 1858, Parte 1, Libro 2, cap. I, par. 4]).[2]

Il maestro maggiore delle matematiche miste, quasi il nume tutelare, il protettore, era considerato Archimede:

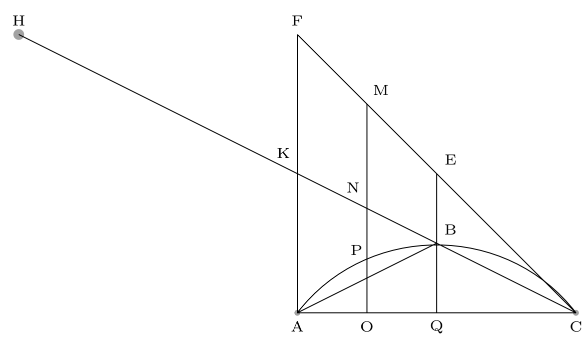
[1] "Mathematics is either Pure or Mixed: To Pure Mathematics belong those sciences which handle Quantity entirely severed from matter and from axioms of natural philosophy. These are two, Geometry and Arithmetic; the one handling quantity continued, the other dissevered [...] ([Bacon 1623, Book 3])

Mixed Mathematics has for its subject some axioms and parts of natural Philosophy, and considers quantity in so far as it assists to explain, demonstrate and actuate those". ([Bacon 1605, Book 2])

[2] Si veda anche [Cerruti 1908], dove ancora si parla delle matematiche miste nei congressi della Società i Italiana per il Progresso delle Scienze.

> [Archimede] volgendosi dalle pure matematiche alle miste discipline la via si mise a ricercare, per cui dagli oggetti geometrici potea la sua mente discendere a quei, che son fisici, e da questi a quelli colla stessa facilità risalire. [Scirà 1823, p. 57]

Ecco la famosa figura della quadratura del segmento di parabola con il metodo meccanico (non conosciuto da Scirà).



Nella Figura
- Q è il punto di mezzo di AC,
- QBE è parallela all'asse della parabola
- AF è parallela a QBE
- CF è tangente alla parabola in C
- $HK = KC$.

Archimede conosce le seguenti proprietà della parabola, che si dimostrano geometricamente,

$$EB = BQ, \quad FK = KA, \quad MN = NO$$

e

$$CA : AO = MO : OP$$
$$CA : AO = CK : KN$$

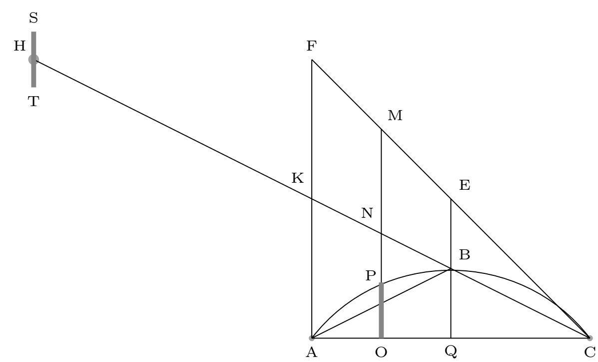
da cui

$$HK : KN = MO : OP.$$

Si consideri K come fulcro di una bilancia con braccia HK e KC.

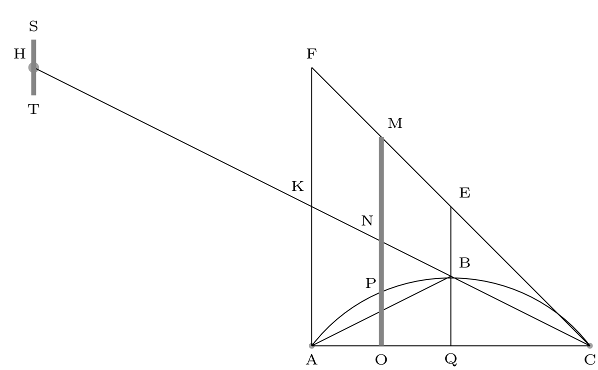
> Coll'aiuto di questa bilancia [un segmento, un punto come fulcro, e punti massa] fece Archimede ritorno dalle cose fisiche alle geometriche: cominciò a pesare figure matematiche, e dal modo, con cui queste si equilibrano, andò trovando il rapporto delle loro superficie. [Scirà 1823, p. 63]

Si prenda un segmento $ST = OP$ centrato in H.

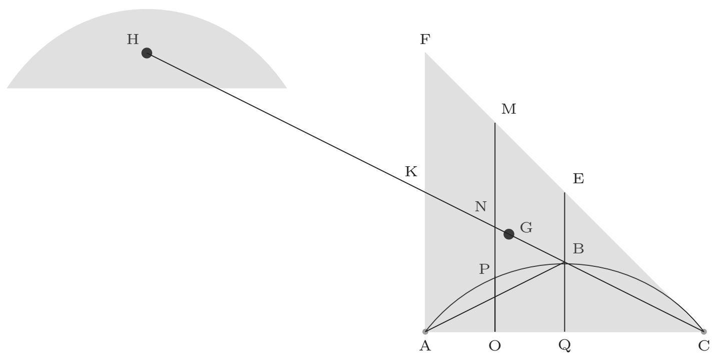


Esso fa equilibrio a MO nel senso che

$$HK : KN = MO : ST.$$



I segmenti OP al variare di O in AC riempiono il segmento parabolico ABC, mentre i segmenti MO riempiono il triangolo CFA.



Il punto G su CK tale che

$$CK = 3\,KG$$

è il baricentro di CFA per cui

$$CFA : segm.ABC = HK : KG$$

e inoltre

$$CFA = 4\,ABC$$

e in definitiva

$$segm.ABC = 4/3\,ABC.$$

> Per via adunque del centro di gravità comune agli oggetti fisici e matematici possono le pure discipline riuscir nelle miste. [Scirà 1823, p. 58]

Si sa che Archimede doveva dichiarare, per non urtare l'ortodossia alessandrina, che il suo metodo era solo euristico, permettendo di congetturare il risultato e quindi più facilmente trovare le dimostrazioni rigorose, con metodi puramente geometrici (di fatto per esaustione).

Questo significa che fin dall'inizio (o almeno, da Euclide) c'è stata una matematica pura, nel senso spiegato da Bacone, cioè una matematica che non fa uso di alcun assioma della filosofia naturale. La matematica mista è tuttavia una vera matematica, contro l'ortodossia alessandrina; in essa non si formulano solo euristiche e congetture; la statica di Archimede è potenzialmente la trasformazione di assiomi della filosofia della natura in teorie matematiche, o fisico-matematiche.

Non è questa l'occasione per ripercorrere le vicende che hanno portato alla modifica dell'aggettivo "mista" in "applicata", sicché ora la distinzione viene a implicare o presupporre che la matematica delle scienze sia prodotta in modo autonomo come pura. La dizione "ancella della scienza" esprime la separatezza, l'indipendenza, della matematica pura. Ci sono state valide ragioni perché la matematica verso la fine dell'Ottocento cercasse di eliminare la dipendenza da ogni forma di intuizione sensibile dei propri oggetti, e si volgesse dentro di sé a chiarire la sua natura e i suoi obiettivi. Ma quando quelle ragioni si sono esaurite, a metà del Novecento, con Bourbaki, non ci è voluto molto, una generazione, perché la frattura tra matematica e scienze venisse superata, sul piano della ricerca. Nella scuola invece l'evoluzione è stata letale. La ragione è che la matematica formale, pura, viene innestata nelle menti dei giovani in un momento nel quale la fisicità del corpo e dell'azione è una componente essenziale della conoscenza.

2 L'insegnamento della matematica

La matematica che viene insegnata a scuola, fatte le debite sparute eccezioni – non si offendano gli insegnanti che adottano un metodo non tradizionale – sembra voler confermare l'idea dei filosofi idealisti che nella matematica non c'è un pensiero. Essa consiste nell'apprendimento mnemonico di una serie di regole o procedure per svolgere operazioni, o risolvere problemi di tipo formale (riguardanti cioè numeri ed equazioni).

Se non si seguono correttamente quelle procedure, si sbaglia, ovviamente; ne deriva l'idea distorta che la matematica consista nella massima precisione; l'idea è distorta perché instillata e assimilata nel senso che non si possa deviare dalle regole apprese; il che comporta anche l'idea che ci sia sempre un solo modo di rispondere in modo adeguato ai quesiti posti.

La concezione della matematica indotta dall'insegnamento tradizionale è esattamene il negativo dell'immagine reale. Non è vero che per ogni problema esista soltanto una soluzione giusta; invece esistono sempre tanti modi diversi di risolvere un problema, ed è già matematica, meglio, la parte più interessante della matematica, scegliere quello o quelli più adatti, ognuno con i suoi particolari vantaggi, e le sue ragioni di preferenza. I più sorprendenti sono quelli che non fanno uso del formalismo stabilito e obbligato. La conferma viene dagli esperimenti di insegnamento libero e creativo.

Per esempio si consideri questo problema (ripreso da [Boaler 2008]): una signora che segue una rigida dieta compra tre fette di carne che pesano in totale 1/3 di kg. Si suppone come si vedrà che le tre fette di carne siano uguali.

La signora ha la prescrizione di mangiare solo 1/4 kg di carne al giorno; si chiede quante delle fette può mangiare, si chiede il numero – anche frazionario – delle fette, non la frazione in peso di quello che ha comprato, dal che si evince che le fette sono uguali.

Per risolvere il quesito numericamente si deve riuscire a concepire, e scrivere un'equazione, abitudine per inciso che a scuola non si impara; si impara a risolvere le equazioni proposte dall'insegnante, che tra l'altro solitamente sono puramente algebriche. Nell'esempio, le equazioni sono anche dimensionali:

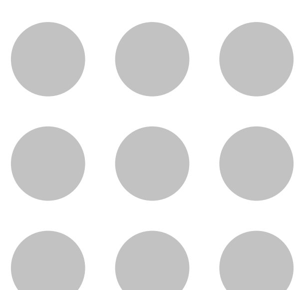
$$\begin{aligned} 3 \text{ fette} &= \frac{1}{3}\,\text{kg} \\ x \text{ fette} &= \frac{1}{4}\,\text{kg} \end{aligned}$$

e bisogna eliminare prima le dimensioni

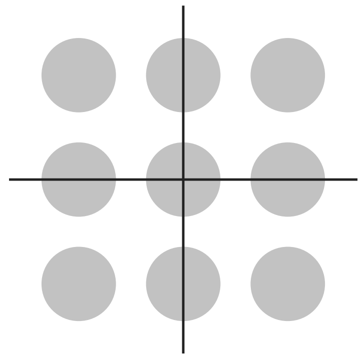
$$\begin{aligned} 1\,\text{fetta} &= \frac{1}{9}\,\text{kg} \\ x\,\frac{1}{9}\,\text{kg} &= \frac{1}{4}\text{kg} \\ x &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

per arrivare a un numero di fette che è una frazione.

Consideriamo invece una soluzione ingegnosa trovata da un allievo, o allieva, in una classe dove si favoriva la ricerca, individuale o di gruppo, di metodi di soluzione. L'allievo si è fatto il seguente disegno,



che gli rappresentava 1 kg di carne, e poi



La soluzione è geniale, è memorabile. L'invenzione del ragazzo, o ragazza, è degna di miglior causa che non le fette di carne, una causa che si presenta spesso nel compito di spiegare la natura, anche nei suoi misteri più profondi.

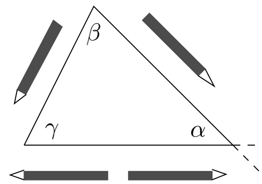
Nel parlare di Richard Feynman, Freeeman Dyson ha scritto:[3]

> [...] Feynman rappresentava il mondo con figure piuttosto che con equazioni. Altri fisici nel passato e nel presente descrivono le leggi di natura con equazioni e quindi risolvono le equazioni per scoprire che cosa accade. Feynman evitava le equazioni e scriveva direttamente le soluzioni, usando le sue figure come guida. Evitare le equazioni è stato il suo contributo più grande alla scienza. Evitando le equazioni, egli ha creato il linguaggio che parla la maggior parte dei fisici moderni.

Il ricorso alle figure da parte dei bambini non è la manifestazione di una preferenza per l'intuizione geometrica rispetto a quella numerica che nel matematico maturo caratterizza un tipo piuttosto che un altro di conoscenza; è una necessità di restare aggrappati al mondo fisico nel momento che viene loro proposto l'arduo salto alla modellizzazione formale.

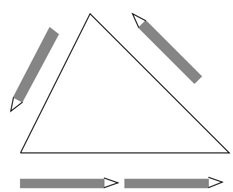
Quando i bambini iniziano ad affrontare problemi matematici, gli strumenti che hanno nel loro bagaglio conoscitivo sono di tipo fisico, e alle manipolazioni tendono ad appoggiarsi, anche in modo geniale, come prova ulteriormente il seguente esempio (riportato da [Beckmann 2011]). Come dimostrazione che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° viene eseguita da uno studente la seguente rotazione di una matita che percorre il perimetro del triangolo:

[3]F. Dyson, "The 'Dramatic picture' of Richard Feynman", *New York Review of Books*, 2011, n. 2, pp. 39-40.



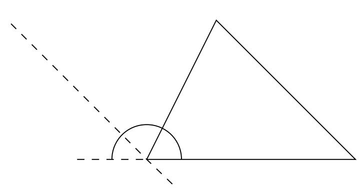
Si fa scorrere una matita lungo i lati di un triangolo, partendo dalla base, e ai vertici la si fa ruotare di un angolo uguale a quello interno corrispondente al vertice proseguendo sull'altro lato (quindi nel disegno procedendo all'indietro sul secondo lato, in avanti sul terzo e indietro sulla base), alla fine si torna alla base con la matita invertita, ruotata di 180°.

Non è escluso che chi ha inventato questa soluzione fosse figlio di un ferroviere macchinista. Se invece agli angoli la punta resta sempre avanti, quindi si ruota nel vertice destro di $180°-\alpha$, e così nei successivi,



dopo tre rotazioni si è spazzato un angolo di $540° \; -\alpha - \beta - \gamma = 180° \; -\alpha - \beta - \gamma$, e deve essere $180° = \alpha + \beta + \gamma$.

La dimostrazione tradizionale non è difficile, ma richiede di fare intervenire conoscenze importanti (sulle rette tagliate da una trasversale):



Potremmo chiamare pensiero fisico il naturale sviluppo dei gesti corporei e degli strumenti materiali. Non dobbiamo interpretare questa disposizione come un atteggiamento regressivo, ma al contrario costruire a partire da essa una nuova proposta didattica e cognitiva: "la costruzione di schemi 'fisici' di realtà molto spesso precede di gran lunga quella degli schemi 'formali' che dai primi saranno tratti semplicemente (all'inizio) per proiezione analogico-metaforica su parti di realtà diverse da quelle da cui sono stati tratti" ([Guidoni 1985]).

Secondo questa linea, [Iannece e Tortora 2007] sostengono lo sviluppo integrato di aspetti disciplinari fisici e matematici, come due modi complementari e "risonanti" di guardare il mondo, e invitano a riconoscere l'identità dei processi cognitivi sottesi all'apprendimento delle due discipline.

"Nel processo di apprendimento, enfatizzare la sua [della matematica] separatezza a priori dagli altri settori della scienza, confligge con i processi cognitivi naturali, figurando così all'origine di molte delle difficoltà manifestate dagli studenti".

Se, al contrario, la matematica è concepita come un'astrazione a posteriori di strutture comuni a diversi contesti, il suo sviluppo strutturale entra in risonanza con la naturale attitudine di ogni essere umano di costruirsi strutture mentali e strumenti culturali per interpretare e dare un carattere di previsionalità all'esperienza, assumendo il ruolo di un linguaggio atto ad esprimere e sostenere il pensiero.

"La matematica, come la lingua, è infilata un po' dappertutto. [...] Cioè non esistono attività propriamente di matematica per il semplice motivo che la matematica non è un campo della realtà, ma una modalità della mente umana di rapportarsi alla realtà" (insegnante attiva nel nel progetto europeo PDTR, citata da [Iannece e Tortora 2007]).

Iannece e Tortora citano Bottazzini (da [Boncinelli, Bottazzini 2000]), che, a proposito della costruzione del modello dell'ellisse per il moto dei pianeti, sottolinea come in essa si manifestino due livelli di utilizzo del modello matematico, uno descrittivo e organizzativo dei dati ed uno generativo, in termini di conoscenza, che richiede di cogliere la correlazione tra gli aspetti geometrici, cinematici e dinamici del fenomeno.

Non può sfuggire (dicono Iannece e Tortora) il ruolo di intermediazione cognitiva che gioca la fisica nel rapporto tra matematica e realtà.

Nell'esempio del moto dei pianeti la coerenza interna della ricerca si regge sul mutuo rinforzo di dimensioni cognitive diverse: la dimensione di percezione-azione dell'attrazione gravitazionale, i cui effetti sono esperiti a livello motorio nella vita quotidiana; la dimensione linguistica della descrizione fisica della stessa in termini di forza, costrutto concettuale astratto introdotto per descrivere gli effetti di una molteplicità di agenti; la dimensione previsionale presente nella formulazione dell'ipotesi di Newton in termini di rapporto causa-effetto, che si esprime come dipendenza funzionale della forza di attrazione dall'inverso del quadrato della distanza, e infine la dimensione della verifica, quando l'osservazione della posizione del sole conferma i dati geometrici individuati nella previsione. "Nella sistemazione disciplinare della legge di attrazione gravitazionale sono presenti due strumenti matematici, l'ellisse e la funzione di variabile reale [...] mentre dalla fisica non solo traggono il loro senso in termini di uso [...] ma si arricchiscono di una semantica e di una semiotica di natura percettiva".[4]

3 Il meccanico matematico

Le ricerche di Newton potrebbero sembrare troppo eccezionali, lontane dalla quotidianità didattica; abbiamo bisogno di esempi che siano alla portata di tutti. Ne troviamo una ricca raccolta in [Levi 2009], che si propone di rovesciare l'idea che la matematica sia l'ancella della fisica: "in questo libro la fisica è messa al lavoro per la matematica, dimostrandosi un'ancella molto efficiente" (p. 2).

Mark Levi ha studiato in Unione sovietica negli anni 70, e già nella scuola secondaria aveva incontrato questa impostazione in [Uspenski 1961]; per altri esempi rimanda a [Kogan 1974] e a [Balk e Boltyanskii 1987].

Una nuova tipologia di dimostrazione viene aggiunta a quelle note, la dimostrazione fisica. Per risolvere un problema matematico con un ragionamento fisico, il primo passo è la definizione di una "incarnazione fisica del problema", così rovesciando l'impostazione usuale che costruisce un modello matematico di un problema fisico. Il modello matematico consiste di solito in un insieme di equazioni differenziali; queste possono spesso essere sostituite da equazioni algebriche vettoriali tra i concetti fisici. Un meccanico ragiona per esempio in termini di forze, energia, potenziali, equilibrio e simili. Non sono concetti della fisica naïve, ma concetti della fisica matematica dove la parte matematica non potrebbe essere in nessun modo separata da una parte sperimentale: "Anche il pensiero su forze e movimenti coinvolge una assai complessa formalizzazione [...] Si sarebbe tentati, in polemica con Piaget, di definirla direttamente come uno degli esempi tipici di 'formalizzazione fisica': sorgente essa stessa dell'esplicitazione di molteplici 'formalizzazioni matematiche', che vi sono originariamente sovrapposte e intrecciate" ([Guidoni 1985]).

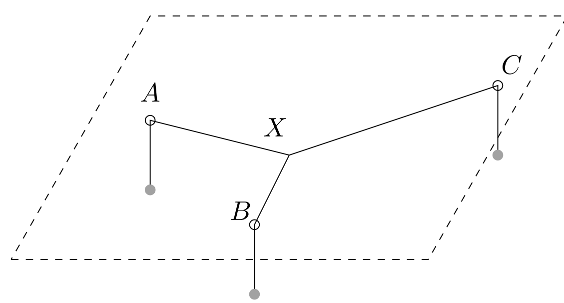
La matematica pura quando lavora con questi concetti tende a ricondurli alle loro definizioni, sciogliendo i potenti passi inferenziali che sono compattati entro risultati ben stabiliti, per esempio principi di conservazione. Allora si perde quella che si usa chiamare intuizione fisica, ma che non ha nulla di intuitivo, bensì è l'insieme delle conoscenze fisiche.

In una situazione tipica, la soluzione è data dall'equilibrio di un sistema, quindi dall'annullarsi dell'energia potenziale.

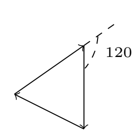
Il primo e più semplice esempio in [Levi 2009, p. 6] è il seguente: per dimostrare che dati tre punti A, B, C in un piano il punto X per cui la distanza

[4] Iannece e Tortora rimandano a [Vygotskij 1934].

$XA + XB + XC$ è minima è quello per cui i tre angoli $A\hat{X}B$, $A\hat{X}C$ e $B\hat{X}C$ sono tutti uguali a 120°, si leghino insieme tre cordini facendoli passare in tre buchi tagliati in A, B e C, con lo stesso peso (peso convenzionale 1) attaccato alle estremità:



Il punto del piano dove giace il nodo dei tre cordini, con il sistema in equilibrio, è il punto cercato. La somma $XA+XB+XC$ ha il significato fisico di energia potenziale del sistema: la distanza XA è l'energia potenziale del primo cordino, in quanto per portare A a X occorre sollevare il peso unitario di AX. In equilibrio, le tre forze di tensione nel punto X assommano a zero e quindi, rappresentate da vettori, formano un triangolo, se applicati consecutivamente:



Il triangolo è equilatero perché le tre forze sono uguali, quindi gli angoli tra i vettori sono di 120°.

La soluzione matematica richiede le derivate; indicando i punti X, A, B, C con $\langle x, y\rangle, \langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle, \langle c_1, c_2\rangle$ rispetto a un sistema di riferimento nel piano, la soluzione consiste nel minimizzare la somma

$$S(x,y) = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} + \sqrt{(x-b_1)^2 +)y-b_2)^2} + \sqrt{(x-c_1)^2 +)y-c_2)^2}$$

ponendo uguale a zero il gradiente $\nabla S = (\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y})$ di S. Le derivate parziali di $\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}$ sono

$$\frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}} \qquad e \qquad \frac{y-a_2}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}},$$

ed

$$\mathbf{e_a} = \left(\frac{x - a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}}, \frac{y - a_2}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}} \right)$$

è un vettore unitario.

Analogamente per gli altri due punti; il il gradiente risulta la somma dei vettori unitari $\mathbf{e_a} + \mathbf{e_b} + \mathbf{e_c}$ che formano un triangolo equilatero, come sopra.

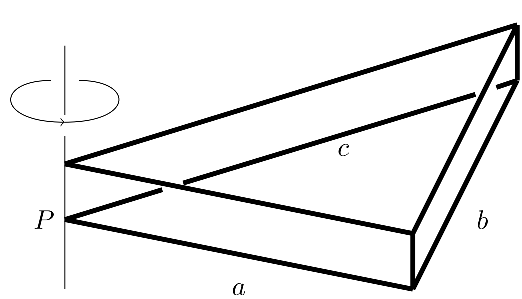
Benché Levi faccia una dichiarazione programmatica minimalista, secondo la quale l'argomento fisico può essere uno strumento di scoperta e di comprensione intuitiva, egli stesso ammette che la traduzione in linguaggio matematico e la soluzione con tecniche matematiche fanno perdere qualcosa. La meccanica, da cui soprattutto trae i suoi esempi, è "un attributo fondamentale del nostro intelletto"; è "geometria con enfasi sul movimento e sul contatto", che aggiunge una dimensione di percezione.

D'altra parte anche Federigo Enriques nella sua analisi sui fondamenti della geometria sosteneva che le rappresentazioni di base erano connesse alle sensazioni tattili muscolari, a quelle del contatto e quelle della visione ([Enriques 1901]).

Altri esempi:

1. Teorema di Pitagora. Una dimostrazione fisica del teorema di Pitagora basata sull'equilibrio delle forze.

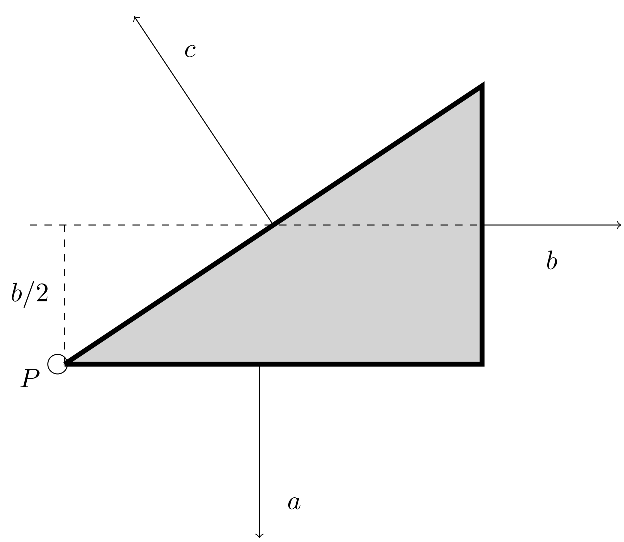
   Si immagini una vaschetta a forma di prisma triangolare equilatera montata in modo che possa ruotare intorno a un asse perpendicolare passante per un vertice dell'ipotenusa.



Se riempita d'acqua, questa esercita sulle pareti una forza in tre diverse direzioni che tendono a far ruotare la vaschetta intorno al perno P.

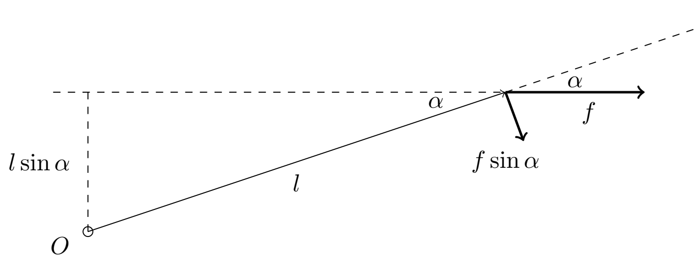
Naturalmente la vaschetta non ruota, altrimenti avremmo un motore senza carburante, contro il principio di conservazione dell'energia.

Possiamo supporre, in mancanza di ragioni al contrario, che la pressione contro le pareti sia uniforme, e giocando sulla quantità di acqua possiamo inoltre supporre che sia 1 per unità di lunghezza delle pareti; allora le tre forze sono a, b e c applicate nei baricentri delle pareti.



La torsione di una forza rispetto a un perno P è la grandezza della forza per la distanza della linea di forza dal punto di perno.

Ricordiamo che se una forza $\mathbf{F}$ è applicata in un punto A e O è il punto scelto come fulcro, o pivot, la torsione o momento di $\mathbf{F}$ rispetto a O è il prodotto $\mathbf{T} = \mathbf{L} \times \mathbf{F}$ dove $\mathbf{L} = \overline{OA}$.



Se indichiamo con f il modulo della forza $\mathbf{F}$, e con l quello di $\mathbf{L}$, allora il modulo della torsione, $l \cdot f \cdot \sin\alpha$, si può anche calcolare come il prodotto del modulo f della forza per la distanza $l \cdot \sin\alpha$ della retta della forza dal fulcro O.

Le corrispondenti leve sono allora $a/2, b/2$ e $c/2$ e la condizione che la torsione sia nulla è

$$a \cdot a/2 + b \cdot b/2 - c \cdot c/2 = 0,$$

ovvero

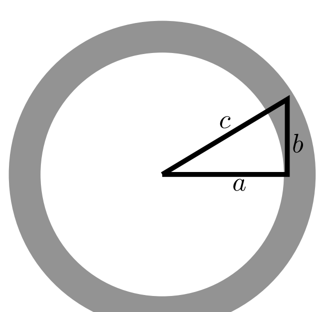
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Qualcuno potrebbe obiettare che se si usano concetti derivati dalla trigonometria si presuppone il teorema di Pitagora, e quindi l'argomento presentato sarebbe circolare. Tuttavia una simile obiezione non coglie il senso della proposta; non è una versione aggiornata della *Logische Aufbau der Welt* di Rudolph Carnap (1928); l'obiettivo non è quello di costruire la matematica su fondamenta che siano costituite da concetti fisici; abbiamo già detto che quelli a cui facciamo riferimento sono intrisi di matematica, non primitivi e ricavati solo dalle sensazioni o osservazioni. Si vogliono presentare esempi per convincere della possibilità di sviluppare matematica e fisica in modo integrato, al di là dei concetti più semplici; non si pretende che questi esempi, scelti per ora solo per la facilità della loro comunicazione, siano proprio quelli che potrebbero trovare spazio in un progetto didattico adeguato.

I prossimi esempi sono piuttosto generalizzazioni del modo di procedere dei ragazzi di cui abbiamo ricordato sopra le sorprendenti prestazioni.

2. Teorema di Pitagora, per rotazione.

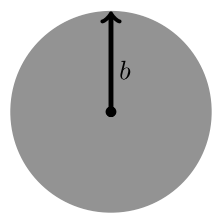
   Se si fa ruotare un triangolo rettangolo nel piano intorno a un estremo dell'ipotenusa, si vedono spazzati due cerchi, di area rispettivamente πc^2 e πa^2. L'altro cateto b spazza la corona circolare differenza dei due cerchi,



sicché

$$\pi c^2 = \pi a^2 + \text{area corona.}$$

Per calcolare l'area della corona circolare, si consideri che il cateto compie un movimento rotatorio mentre la sua base percorre la circonferenza di raggio a. Se si tiene ferma la sua base e si compie solo il movimento rotatorio, il segmento spazza un cerchio di raggio b,

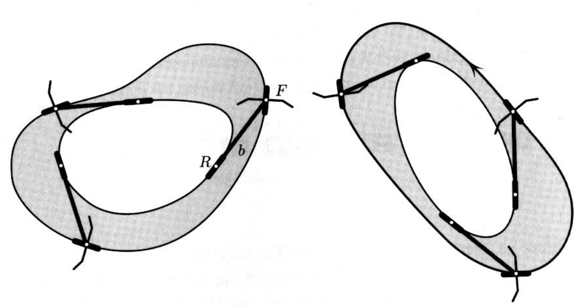


quindi

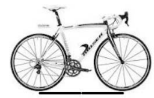
$$\pi c^2 = \pi a^2 + \pi b^2.$$

3. Il paradosso della bicicletta

   Il ragionamento fatto sulla corona circolare è un caso particolare del teorema sulla bicicletta, o del paradosso della bicicletta: qualunque sia il percorso chiuso compiuto da una bicicletta in modo che le traiettorie delle due ruote non si intersechino, l'area compresa tra le due traiettorie è indipendente dal percorso.



L'area è uguale a πb^2 dove b è la distanza tra i punti di contatto al suolo delle due ruote. I velocisti su pista di qualche generazione fa, come

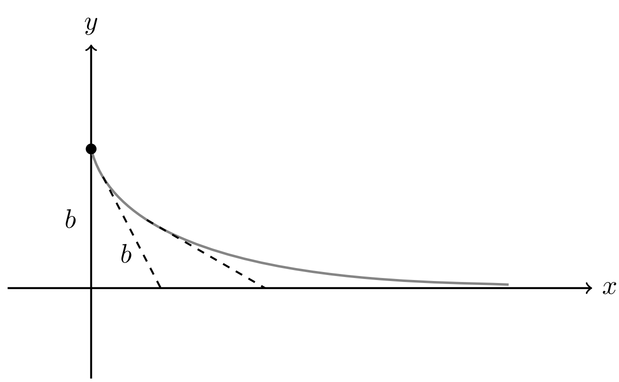


Antonio Maspes, erano veri artisti e giocolieri, non contavano solo sulla potenza; essi erano capaci di tenere fissa la ruota posteriore sullo stesso punto mentre le facevano compiere un giro completo su se stessa.

4. Area sottesa dalla trattrice.

   Con lo stesso metodo si calcola immediatamente l'area racchiusa dalla trattrice, generata da un segmento di lunghezza b; la definizione matematica è quella di una curva tale che in ogni punto la tangente incontra l'asse x in un punto a distanza costante b dal punto di tangenza.

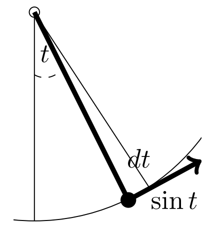
   La trattrice si può immaginare come la curva descritta dalla ruota posteriore di una bicicletta che, posta all'inizio con la ruota davanti nell'origine e quella posteriore in $\langle 0, b \rangle$, si muova nella direzione perpendicolare, con la ruota anteriore lungo l'asse x.



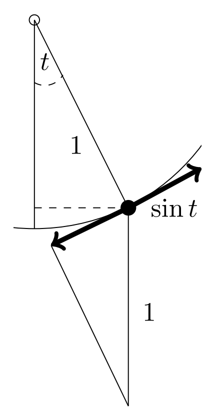
   L'area compresa tra la trattrice e l'asse x, benché la superficie non sia limitata, è $\frac{1}{4}\pi b^2$, dal momento che il segmento di lunghezza b nel suo movimento, ruota di $\frac{\pi}{4}$.

5. $\int_0^x \sin t \, dt = 1 - \cos x$ con un pendolo.

   Si consideri un pendolo costituito da un punto di peso 1 su un'asta priva di peso di lunghezza 1 che ruota sul perno O.

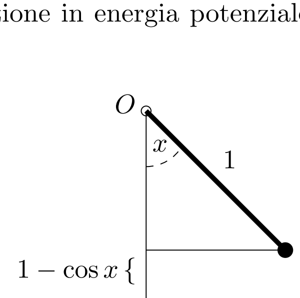


Se il peso è 1 come la lunghezza della corda, occorre una forza $\sin t$ per tenere il pendolo a un angolo t rispetto alla verticale; lo si vede considerando i due triangoli rettangoli:



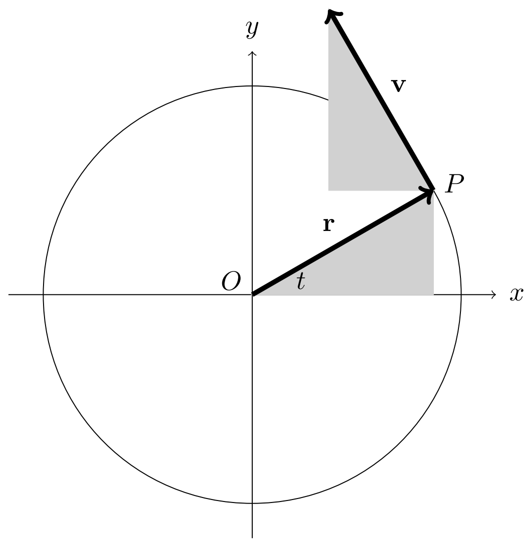
Il lavoro necessario per spostare il pendolo da t a $t + dt$ è $\sin t\, dt$, e da 0 a x è $\int_0^x \sin t\, dt$.

D'altra parte la variazione in energia potenziale è peso per altezza = $1 - \cos x$:



6. $\frac{d}{dt}\sin t$ e $\frac{d}{dt}\cos t$ per rotazione.

   Un punto P ruoti su una circonferenza unitaria con velocità unitaria, partendo da P_0 al tempo 0:



$$\mid \mathbf{r} \mid = \mid \mathbf{v} \mid = 1.$$

   Il vettore di posizione è

$$\overline{OP} = \langle \cos t, \sin t \rangle.$$

   La velocità è

$$\mathbf{v} = \left\langle \frac{d}{dt}\cos t, \frac{d}{dt}\sin t \right\rangle.$$

   Siccome $\mathbf{v}$ è perpendicolare a $\overline{OP}$, i lati corrispondenti dei due triangoli sono perpendicolari e gli angoli corrispondenti congruenti, ed è subito visto che

$$\mathbf{v} = \langle -\sin t, \cos y \rangle.$$

Si può facilmente immaginare che problemi di calcolo di baricentri, massimi e minimi, problemi isosperimetrici, ottica e altri si prestano a questa trattazione meccanica. Levi utilizza anche la teoria dell'elettricità e quella del moto dei fluidi.

4 La filosofia della matematica

Piaget e Bourbaki hanno da tempo esaurito la loro forza propulsiva; gli educatori ne hanno preso atto, non così la filosofia della matematica; sono state proposte sì filosofie umanistiche, e tra queste in particolare c'è stata una ripresa della filosofia empiristica, ma molto timida, e forse per questo fuori bersaglio.

La filosofia empiristica della matematica insiste soprattutto su un tema, quello della validazione dei risultati, e sostiene che le procedure della matematica non sono diverse da quelle delle scienze naturali: l'induzione per enumerazione avrebbe la prevalenza, nello stabilire la verità, sulla dimostrazione. Semplificando la realtà delle procedure della matematica, e delle scienze stesse, gli empiristi hanno finito per condurre una polemica sterile esclusivamente contro la logica e la dimostrazione.

Anche i matematici che si dedicano a quella che ormai viene chiamata matematica sperimentale hanno un atteggiamento ambiguo.

Borwein per esempio in diversi interventi, anche in contesti di didattica della matematica, continua meritoriamente a fare propaganda alla matematica sperimentale permessa dal calcolatore, con le ricerche e la formazione di congetture che permette. Afferma sempre che la dimostrazione è insostituibile, e tuttavia si barcamena con un colpo al cerchio e uno alla botte: afferma anche che in ultima analisi la matematica non riguarda la dimostrazione ma la conoscenza sicura ([Borwein 2002, p. 27]); confessa che "[m]olti matematici hanno incominciato a sentirsi costretti dai vincoli posti dalla nostra concezione generale di dimostrazione" ([Borwein, Bailey 2004, p. 245]), e anche che a lui della dimostrazione non importa nulla.

Il problema non è dire sì o no alla dimostrazione, ma arricchire il concetto di dimostrazione stessa. Non meraviglia che la visione di una dimostrazione fisica come si manifesta in Levi sia sopratutto sostenuta da matematici russi, con la loro grande tradizione didattica.[5]

[5] L'argomento è sviluppato maggiormente in [Lolli 2012].

Riferimenti bibliografici

[Bacon 1605] F. Bacon, *Proficience and Advancement of Learning*, 1625.

[Bacon 1623] F. Bacon, *De Augmentis Scientiarum*, 1623.

[Balk e Boltyanskii 1987] M. B. Balk e V. G. Boltyanskii, *Geometriya mass* (in russo), Bibliotechka Kvant, 61, Nauka, Mosca, 1987.

[Beckmann 2011] S. Beckmann, "The Community of Math Teachers", *Notices AMS*, 58 (2011), n. 3, pp. 368-71.

[Boaler 2008] J. Boaler, *What has Math to Do with It?*, Penguin Books, 2008.

[Boncinelli, Bottazzini 2000] E. Boncinelli, U. Bottazzini, *La serva padrona. Fascino e potere della matematica*, Raffaello Cortina, Milano, 2000.

[Borwein 2002] J. M. Borwein, "The Experimental Mathematician: the Pleasure of Discovery and the Role of Proof", in *CMESG/GCEDM Proceedings 2002*, Queen's University, Edmonton AB, 2003.

[Borwein, Bailey 2004] J. M. Borwein, D. Bailey, *Mathematics by Experiment. Plausible Reasoning in the 21th Century*, A K Peters, Natick, MA, 2004.

[Cerruti 1908] V. Cerruti, "Le matematiche pure e miste nei primi dodici Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze", *Ann. Mat. Pura e Applicata*, Ser. III, vol. 15, 1908, n. 1, pp. 1-20.

[Enriques 1901] F. Enriques, "Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria", *Rivista di Filosofia* 4 (1901), ristampato in [Enriques 1958, pp. 71-94].

[Enriques 1958] F. Enriques, *Natura, ragione e storia* (L. Lombardo-Radice ed.), Edizioni Scientifiche Einaudi, Torino, 1958.

[Guidoni 1985] P. Guidoni, "Ma esiste un pensiero fisico?", Presentazione di J. Piaget, *Il pensiero fisico*, Emme, Torino 1985, pp. V-XXXIII.

[Iannece e Tortora 2007] D. Iannece, R. Tortora, "La Risonanza nei processi di apprendimento", Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, Rimini, 2007, in rete in http://www.seminariodidama.unito.it/mat07.php

[Kogan 1974] B. Yu. Kogan, *The Applications of Mechanics to Geometry*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1974.

[Levi 2009] M. Levi, *The Mathematical Mechanic: using physical reasoning to solve problems*, Princeton Univ. Press., Princeton, 2009.

[Lolli 2012] G. Lolli, “Empiricism and Experimental Mathematics”, prossima pubblicazione in un volume in onore di C. Cellucci.

[Scirà 1823] Abate Domenico Scirà, *Discorso intorno ad Archimede*, Nella Reale Stamperia, Palermo, 1823.

[Uspenski 1961] V. A. Uspenski, *Some Applications of Mechanics to Mathematics*, Pergamon Press, New York, 1961.

[Vygotskij 1934] L. S. Vygotskij, *Myšlenie i rec’. Psichologiceskie issledovanija*, Mosca, 1934; trad. it. *Pensiero e Linguaggio. Ricerche psicologiche* (a cura di L. Mecacci), Laterza, Bari, 1990.

[Whewell 1858] W. Whewell, *The Philosophy of the Inductive Sciences*, London, 1858.

✉GABRIELE LOLLI
Scuola Normale Superiore, Pisa
gabriele.lolli@sns.it

Relazione tenuta al Congresso Mathesis di Caserta 2011.