Considerazioni sulla didattica dei problemi formalizzabili.
Carlo Bernardini

Molti problemi che ci capita di affrontare nel corso della vita ci spingono verso una attività mentale "formalizzata" che consiste nella sostituzione degli elementi del problema particolare con simboli dei quali conosciamo l'uso operativo generale che consente di generare risposte "affidabili" dal punto di vista di un qualche "criterio di verità". I numeri sono un esempio primitivo di questi elementi simbolici convenzionali e l'operatività è attuata eseguendo con essi operazioni che li trasformano: gli esempi sono talmente ovvii che mi guardo bene dal citarli in una società moderna dotata di scuola obbligatoria. Tuttavia, già dal semplice problema dell'aritmetica degli interi positivi è nato un *corpus* di considerazioni che ha dato luogo a una scienza assai più complessa ancora ricca di problemi non risolti: la matematica dei matematici. Forse, è la scienza più astratta e antica che abbia visto la luce nella comunità umana, accanto a un grande numero di conoscenze empiriche sulla realtà naturale. Nonostante anche nella matematica si possano ravvisare ragioni di necessità di carattere empirico, la concezione delle operazioni aritmetiche porta già a considerare il problema dei "criteri di verità" che le inverino secondo strutture logiche evidenti. Ma già qui nascono novità spontanee che hanno avuto una gestazione decisamente più lenta, i numeri negativi, gli irrazionali, i numeri complessi, per tacere dei problemi non risolti come quello dei numeri primi.

Non è difficile capire che queste circostanze di "seconda istanza" abbiano spinto i cultori della matematica a spingere il pedale sul cosiddetto "rigore" che deve accompagnare l'essenza profonda delle "procedure dimostrative". E' senza dubbio un'esigenza irrinunciabile che però, spinta a livelli ossessivamente prescrittivi, può eliminare due stimoli naturali che la mente adopera per produrre risultati: l'**intuizione** e l'**immaginazione**. Il guaio è che, soprattutto per i non matematici, intuizione e immaginazione presiedono ad una forma di partecipazione che possiamo chiamare “**godibilità**”. L’insistenza eccessiva sul rigore è un momento di distacco dalla godibilità che può distruggere la didattica elementare: molti studenti finiscono con l’*imparare* la matematica senza capirla. Il fenomeno si manifesta con la recitazione delle definizioni così come sono snocciolate nella manualistica, senza che il senso generale di quelle definizioni raggiunga la stessa “mentalità” del recitante. Eppure, la storia delle matematiche dovrebbe insegnare che la godibilità ha accompagnato l'evoluzione di questa scienza fino a tempi molto recenti; diciamo, fino a che Godfrey Hardy, nella "Apologia di un matematico" (1940) non ha enunciato l'assioma della "inutilità" che dovrebbe presiedere alla costruzione di ciò che sarebbe propriamente matematica. Seguito di lì a poco da un salto di astrusità che, come sapete meglio di me, ha trovato strenui sostenitori nel celebre gruppo Bourbakista con forti radici in Francia. Nei primi anni '60 del secolo scorso diedi una mano ai colleghi fisici francesi che cercavano di bloccare la didattica della Nouvelle Mathematique. Ci riuscirono, tra le grida iraconde di un furibondo Jean Dieudonnè; e per fortuna non se ne fece più nulla. A quel punto, anche in Italia gli studenti di fisica furono liberati dai corsi di Matematiche Superiori dei colleghi matematici e immessi in corsi di Metodi Matematici della Fisica gestiti da Fisici Teorici: ebbi l'onore di avere il primo incarico romano e inventai un corso ex novo.

Perché c'è una Matematica della Fisica che è tenuta lì in un angolo sorcendo il naso: puzza di fenomenologia e di modellistica. Fin'allora, per questi motivi, persino Felix Klein, Sophus Lie, Henri Poincaré e David Hilbert avevano dovuto faticare a trovare una collocazione nell'Olimpo della logica formale.

2 - Per un fisico, il grosso delle proposizioni simboliche è del tipo A = B. Ma è importante che A e B rappresentino due cose diverse che nessuno si apettava che fossero uguali. Le“Quantità” A e B sono in genere grandezze misurabili a cui corrisponde un numero. Il numero è fissato dalle “unità di misura”, che sono.generalmente convenzionali. Convenzione vuol dire “scelta arbitraria”: guai se A è uguale a B solo per una particolare scelta delle unità di misura!

Dunque, A = B deve essere indipendente dallascelta delle unità: è la ”Invarianza di scala”. Cisono tanti tipi diversi di grandezze fisiche e relative unità di misura. Quando il rapporto A/B è invariante di scala si dice equivalentemente che:

1- A e B sono omogenee

2 - A e B hanno le stesse dimensioni fisiche

3 - A/B è un rapporto adimensionale

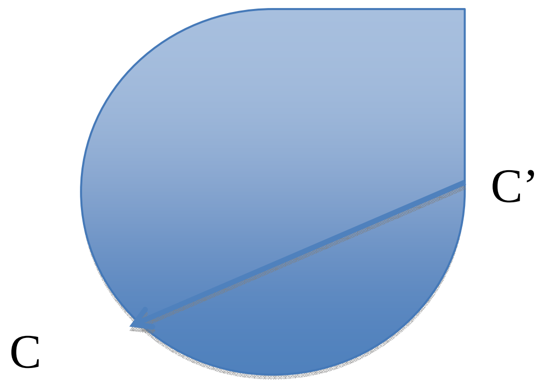
Entra nel discorso l’espressione “dimensioni fisiche”, chiave di volta del problema. Il miglior testo disponibile è quello di L.Sédov: Similitude et dimensions en mécanique Edizioni MIR (Mosca) 1972. Ci sono anche importanti lavori di Bridgman.

Capisaldi: Isaac Newton già usa le dimensioni, Jean Baptiste Fourier (fine ‘700) le introduce. James Clerk Maxwell inventa le notazioni che portano il suo nome (circa 1850), Il “Teorema **Π**” di Buckingham (1914).Con la nascita della fisica newtoniana si capisce ben presto che tutto è misurabile in termini di Masse (M), Lunghezze (L) e Tempi (T). Perché bastino questi tre “tipi” non lo sappiamo spiegare. Ma quando diciamo che unagrandezza A si comporta per cambiamenti diunità di misura come $M^{\mu}L^{\lambda}T^{\tau}$ intendiamo che A“scala” come i rispettivi fattori di conversione elevati alle potenze indicate. Le grandezze adimensionali hanno esponenti tutti nulli eperciò non scalano. A e B sono grandezze omogenee se hanno gli stessi esponenticaratterizzanti le loro dimensioni fisiche. Se si vuole operare solo sulle dimensioni della grandezze, si usano le seguenti notazioni di Maxwell che consentono di capire le leggi di scala:

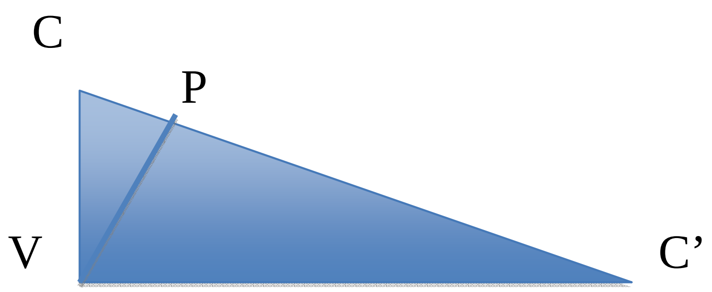
Dimensioni di A = [A] = $M^{\mu}L^{\lambda}T^{\tau}$

Per esempio, [area] = L^2

Questa formula dice che se le dimensioni lineari di una figura vengono dilatate (o contratte) di unfattore numerico k, l’area della figura cambia il suo valore numerico di k^2.
Facciamo una divertente applicazione: proviamo a dimostrare il teorema di Pitagora da fisici. Prendiamo una qualsiasi linea chiusa



L’area di questa strana linea si può sempre scrivere come: un numero f che dipende dalla sua forma (perciò, “fattore di forma”) e dalla scelta di CC’ moltiplicato per la lunghezza del segmento CC’ al quadrato:
Area = f $(CC')^2$
Questo dice solo che se dilatiamo (come si fa nelle fotocopie, per esempio) le lunghezze, in ogni direzione, di k, l’area cambia di k^2.
Questo è un triangolo rettangolo in V



L’ipotenusa è CC’; l’altezza VP divide il triangolo in due nuovi triangoli rettangoli simili tra loro e simili a quello intero perché hanno sempre un angolo in comune (in C e in C’). Se scriviamo le aree usando i quadrati delle ipotenuse è perciò evidente che:
Area (CC’V) = Area(CVP) + Area(C’VP)
$f(CC')^2 = f(CV)^2 + f\ (C'V)^2$E dividendo per f resta il Teorema di Pitagora!
Ci si può esercitare ad usare il gergo rispondendo a queste domande:
1 - Qual è il fattore di forma per l’area di un cerchio rispetto al suo diametro?
2 - Conoscendo l’area del cerchio, come si può trovare con puri argomenti di scala l’area di una ellisse?
3 - E se ragionassimo sui volumi, che cosa cambierebbe nelle leggi di scala?
4 - Perché non ha senso chiedersi se l’area e il perimetro di un quadrato possono essere uguali?

3 – Possiamo generalizzare questo modo di ragionare per similitudine al caso di più grandezze fisiche. L’inglese Godfrey Taylor lavorò alla bomba atomica. Era presente al test Trinity dl 16 luglio 1945 ad Alamogordo. Come misurare l’energia E liberata dalla bomba di prova? Lo strumento a disposizione era la fotografia ultrarapida (Edgerton) che aveva ripreso la “sfera di fuoco” che si espandeva con un velocissimo fronte d’onda d’urto nell’aria a partire dal punto di esplosione. I dati perciò erano: il raggio R(t) del fronte dell’onda al tempo t. [R] = L, [t] = T; la densità d dell’aria esterna al fronte : $[d] = ML^{-3}$, e la pressione p della stessa aria: $[p] = ML^{-1}T^{-2}$.La temperatura non è indipendente da p e d. Come può essere fatta la funzione R(t) per un certo valore di E? Note p e d, conosciamo l’energia termica, diciamo Q, contenuta nell’aria fredda spostata all’istante iniziale dall’esplosione e, senza dubbio, E>>Q. Dimensioni:[E] = [Q] =

$ML^2 T^{-2}$. Ma allora non puà essere
altro che:

$R^5 = (Et^2/d) F(Q/E)$

dove F(x) è una funzione adimensionale della variabile adimensionale x, Ma Q/E ≈ 0, anche per una bomba convenzionale che esploda in aria a temperatura ambiente.

Facendo esperimenti con una bomba di una tonnellata di tritolo, si scopre che F(0) = 1, così che:

(5/2)logR(t) = log t + (1/2) log(E/d) (*)

E se misuriamo le L in cm, i t in sec e le masse in grammi, sapendo che d = 0,00125 g/cm3, si trova che E ≈ 8,5. 1020 erg ≈ 20 kton. (Trinity test).

Questo è un risultato sperimentale: la retta (*) è ben visibile in carta logaritmica.

Le leggi di scala presiedono alla costruzionedi una classe di ragionamenti che vanno sotto il nome di "similitudine", molto al di là del semplice caso della geometria deitriangoli.

Esempio: Galilei scopre che in prossimitàdella superficie terrestre i corpi cadono nel vuoto con la stessa accelerazione g, $[g] = LT^{-2}$ indipendentemente dal loro peso (massa). Questo basta a dire che i tempi t di caduta da una altezza h (da fermo) di un corpo sono proporzionali alla radice di h: $t \sim h^{1/2}$. Ma allora, se si vogliono confrontare tempi di caduta da due altezze diverse h_1 e h_2 o, che è lo stesso,i periodi di due pendoli di lunghezze

diverse h_1 e h_2 basta istituire la similitudine: $t_1/t_2 = (h_1/h_2)^{1/2}$

Se una delle due lunghezze è presa come unità di misura standard, i tempi scalano con la radicequadrata delle lunghezze.

Curiosità: Tito Livio Burattini di Agordo (1617-1681)

propose nel 1675 di istituire il "metrocattolico" (= universale) partendo dalla lunghezza del pendolo che batteva il secondo.
Gli ingegneri usano leggi di scala, similitudine emodelli molto di più dei fisici. Molte grandezze adimensionali sono di impiego comune nella progettazione di macchine, aerei, strutture ecc. Il numero di Mach, il numero di Reynolds, il numero di Froude, il numero di Rayleigh, ecc.sono usati in aero- e idro-dinamica. Referenze:

1 - E.Buckingham, Phys.Rev., 4, ottobre 1914
2 - E. Pistolesi, Questioni di Matematica Applicata, Zanichelli, 1940

Qual è la velocità naturale a piedi per un adulto?

4 - LINEARITA'

I sistemi lineari, dissipativi e non, sono l'oggettopiù comune in fisica: perché la fisica è nata su un pianeta freddo, in cui tutto è vicino a condizioni di equilibrio meccanico. Ma che cosa è esattamente un sistema lineare? E' un dipolo con un ingresso a cui si può applicare un input dipendente dal tempo $I(t)$ e un'uscita a cui si preleva un output $O(t)$. La più generale relazione lineare deve rispettare il "principio di sovrapposizione": se $I_1(t)$ genera $O_1(t)$ e $I_2(t)$ genera $O_2(t)$, allora $I_1(t)+I_2(t)$ genera $O_1(t)+O_2(t)$.
La relazione più generale che rispetta anche la causalità è la seguente: L'output al tempo t, $O(t)$, si può scrivere, nel caso lineare, nella forma generale:

$$\int_0^{\infty} K(\tau) I(t-\tau)\, d\tau$$

Come si vede, τ>0 garantisce che l'output segua tutti gli input applicati. Da qui,le "relazioni di dispersione" di Kramers e Kroenig (1927) che legano ReK°(ω) e ImK°(ω) dove K°(ω) è la trasformata di Fourier di K(τ)θ(τ) con
θ(τ) = gradino unitarioL'oggetto più importante della fisica è l'oscillatore armonico, seguito dalle reti di oscillatori accoppiati e dalla nozione di "modo normale"-

1 - L'elettromagnetismo di Maxwell è una teoria dicampo lineare

2 - L'equazione di Schroedinger della meccanica ondulatoria è una teoria intrinsecamente lineare

3 - La nozione di risonanza è la chiave di volta della comprensione dei fenomeni lineari

4 - Le possibili sorprese sono certamente non lineari!