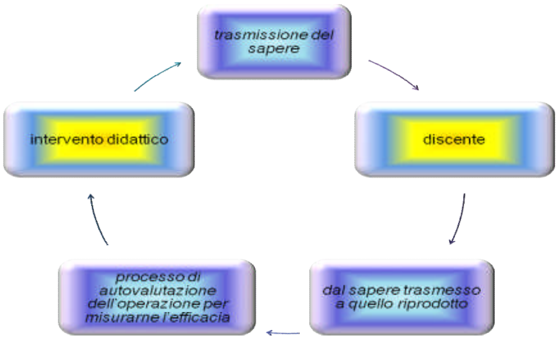
Una ipotesi di autovalutazione a conclusione di un percorso didattico

di Carmelo Campagna, Franca Rossetti

La nostra proposta riguarda l'organizzazione e la valutazione di un percorso didattico teso a recuperare conoscenze pregresse al fine di affrontare, come previsto dal piano di lavoro, l'argomento dello studio di funzione, in una classe quarta articolata di un Istituto superiore della nuova provincia di Monza e Brianza.
Il recupero è avvenuto in itinere, in una classe demotivata, con differenti libri di testo e obiettivi comuni solo in parte; debiti formativi saldati solo formalmente. Il lavoro è stato organizzato in base ai seguenti punti

- *La dimensione didattica*
- *La dimensione culturale (breve parentesi storica sul concetto di funzione)*
- *La dimensione operativa (dalle funzioni matematiche a quelle empiriche)*
- *Considerazioni finali*

Circa il primo punto è stato richiamato il processo circolare che conduce all'autovalutazione per mettere in evidenza come non tutto il sapere trasmesso venga riprodotto dai discenti e, quindi, come un processo di autovalutazione sia premessa indispensabile per ogni intervento didattico.



Il percorso è stato progettato su misura, nel senso che dapprima si è proceduto al riallineamento delle conoscenze delle rispettive preparazioni di base quindi l'intervento ha mirato alla acquisizione dei nuclei fondanti ritenuti prerequisiti rispetto all'obiettivo da raggiungere che, nella fattispecie, ha riguardato il confronto tra funzioni matematiche e funzioni empiriche:

a. *Sistemi di equazioni;*
b. *Sistemi di disequazioni;*
c. *Piano cartesiano;*
d. *Esponenziali e logaritmi;*
e. *Conoscenze di analisi;*
f. *Interpolazione matematica e statistica.*

La progettazione si è rivelata subito complicata per vari motivi, si è voluto,infatti, tenere conto:

1. dei differenti stili di apprendimento all'interno del gruppo classe:
   - *visivo verbale e non verbale;*
   - *uditivo;*
   - *cinestesico;*
   - *analitico;*
   - *globale;*
   - *Individuale;*
   - *di gruppo.*

2. delle difficoltà inerenti l'apprendimento della disciplina:
   - → *apprendimento comunicativo;*
   - → *apprendimento di concetti;*
   - → *apprendimento di algoritmi;*
   - → *apprendimento di "strategie".*

3. dei problemi legati alla complessità dell'azione didattica:
   - ✓ nel valutare conoscenze
     - *Dichiarative (sapere cosa)*
     - *Procedurali (sapere come)*
     - *Condizionali (sapere il perché)*
   - ✓ nell'individuare abilità
     - *nello scoprire regolarità matematiche;*
     - *nel particola rizzare;*
     - *nell'interpretare descrizioni di idee matematiche;*
     - *nel descrivere idee matematiche;*
     - *nel fare inferenze logiche;*
     - *nell'assiomatizzare.*
   - ✓ e competenze quali
     - *Argomentare;*
     - *Comunicare;*
     - *Modellizzare;*
     - *Rappresentare;*
     - *Usare pluralità di linguaggi;*
     - *Pensare e ragionare;*
     - *Usare sussidi e strumenti.*

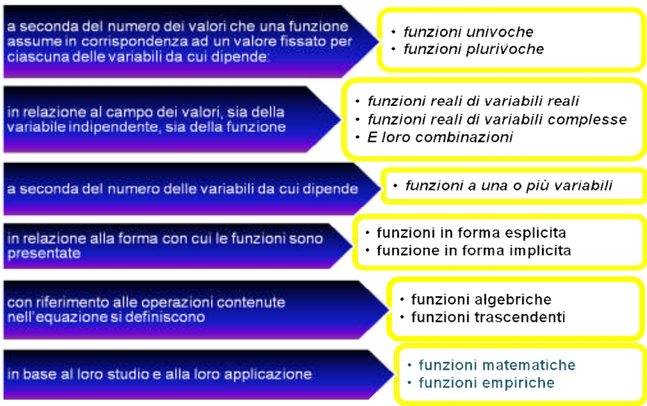
Il concetto di funzione è stato proposto nella sua evoluzione storica, quindi riprendendo la definizione data da Dirichlet nel 1829, si è fatta distinzione tra funzioni matematiche e funzioni empiriche con l'intento di **"modellizzare"** un problema reale con l' obiettivo:

- Da un lato mettere in risalto gli **aspetti teorici della disciplina** (matematica generale e applicata).

- Dall'altro cogliere l'occasione per sperimentare aspetti valutativi coinvolgenti la **rilevazione di competenze.**

Prima di presentare due esempi significativi tratti dalla realtà dell'istituto, sono stati richiamati alcuni personaggi che hanno contribuito alla storia del concetto.

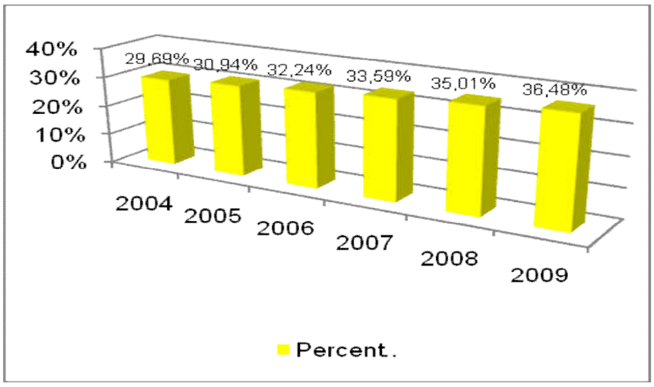
L'idea del concetto nasce nel 1636 con De Fermat e Descartes che risolvono con l' algebra problemi di geometria e pongono in relazione analitica le coordinate x e y di un punto generico della linea; ma non tutte le linee si ritenevano idonee a generare funzioni, per esempio, si scartavano quelle tracciate in modo arbitrario. Anche se la prima definizione si trova in uno scritto di Leibniz del 1694, è nel 1718 con J.Bernoulli che per la prima volta si ipotizza la dipendenza tra le variabili; nel 1748 Eulero precisa la definizione di Bernoulli e a lui si deve la scrittura $y = f(x)$.
Dopo il 1807 si fa pressante la necessità di generalizzare il concetto tanto che nel 1821 Fourier afferma che "ogni curva piana arbitrariamente tracciata e incontrata in un solo punto al più da ogni parallela all' asse delle y, è rappresentabile, in un intervallo finito, con una serie trigonometrica.." ; è del 1829 , con Dirichlet , finalmente, la definizione di funzione univoca , universalmente accettata , presente su quasi tutti i testi in adozione nelle nostre scuole superiori . L' ulteriore generalizzazione del concetto avviene più tardi, nel 1884 con Volterra, Pincherle e Fréchet per i quali il concetto di funzione risulta indipendente tanto da quello di espressione analitica tanto da quello di curva. Ma , a riprova della difficoltà nel definire il concetto di funzione nel 1927 Weyl affermava che "Nessuno ha mai saputo spiegare cosa sia una funzione …" ; ciò per affermare che la questione è complessa e ricondurre i vari approcci ad una unica definizione può essere scorretto. Infatti, nel 1939 con Bourbaki la funzione è vista nell' ambito della teoria degli insiemi e trova collocazione , anche attualmente , in molti testi in uso nel biennio.
Dopo questa parentesi è stato possibile tentare una classificazione :



Passando alla dimensione operativa del percorso per interpretare i dati empirici relativi all'andamento dei debiti formativi in matematica e alle attività extradidattiche dell'ultimo quinquennio rilevati nell' Istituto superiore in questione sono state utilizzate la funzione esponenziale e l' iperbole allo scopo di pervenire alle previsioni per l' anno in corso.

Osservando i dati

Anni	Percentuali
2004	26,69
2005	30,94
2006	32,24
2007	33,59
2008	35,01
2009	36,48



si può notare come l' andamento sia tendenzialmente esponenziale pertanto è stata usata la funzione $y = ab^x$ con $a \rangle 0, b \rangle 0, b \neq 1$.

Infatti, se x_i, y_i sono n osservazioni allora $f(a,b) = MIN$ di $\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ab^{x_i}\right)^2$. La funzione $y = ab^x$ è stata linearizzata trasformandola come $\log y = \log a + x \log b$ che applicata alle coppie di punti ha restituito: $\log y_i = \log a + x_i \log b$.

Quindi, posto $\log y_i = z_i$, $\log a = q$ e $\log b = m$ si è ottenuto $z_i = q + mx_i$.

Da cui

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i \log y_i)}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$m = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i \log y_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \log x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Quindi posto: $\log b = m$ e $\log a = q$ si è pervenuti a $b = 10^m$ e $a = 10^q$ che sono i parametri cercati.

Anni	x_i	$\%y_i$	$\log y_i$	x_i^2	$x_i \log y_i$	$\overline{y_i}$
2004	1	29,69	1,4726	1	1,47261	28,49
2005	2	30,94	1,4905	4	2,98104	30,93
2006	3	32,24	1,5084	9	4,52519	32,23
2007	4	33,59	1,5262	16	6,10484	33,59
2008	5	35,01	1,5442	25	7,72096	34,1
2009	6	36,48	1,5621	36	9.37233	36,47
totali	21		9,104	91	32,177	195,81

Con: $n = 6$ $\sum_{i=1}^{n} x_i = 21$ $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 441$ $\sum_{i=1}^{n} \log y_i = 9{,}103982$

$\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot \log y_i) = 32{,}176965$ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 91$

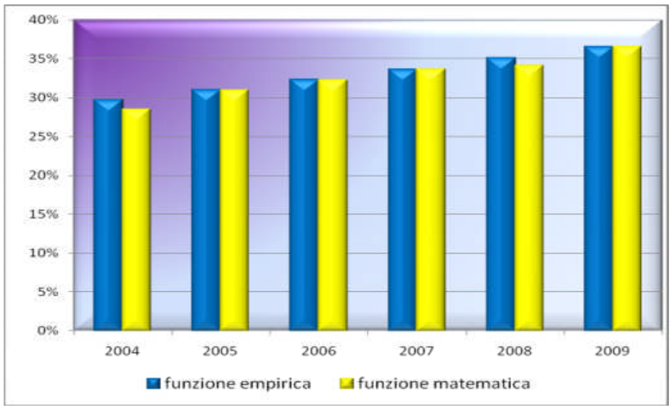
$q = 1{,}4547$ $m = 0{,}01788$ perciò: $y = 28{,}49 \cdot 1{,}042^x$

Proiezione per l' anno in corso? $y_7 = 28{,}49 \cdot 1{,}042^7$

$y_7 \cong 38\ \%$

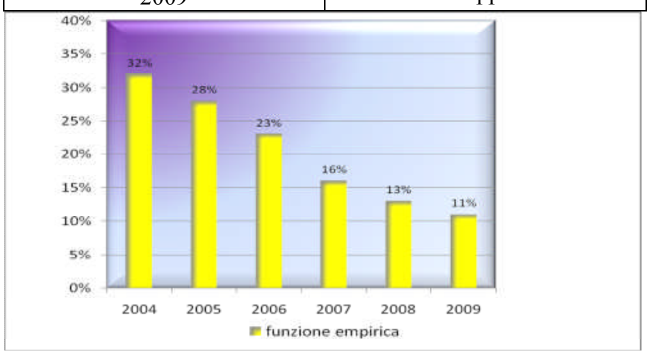
Confrontando la funzione empirica con quella matematica si è constatata la validità della funzione utilizzata:

Anni	Funzione empirica	Funzione matematica
2004	29,69	28,49
2005	30,94	30,93
2006	32,24	32,23
2007	33,59	33,59
2008	35,01	34,1
2009	36,48	36,47



Con riferimento, invece, all' andamento delle attività extradidattiche (partecipazione in percentuale)

Anni	$\%y_i$
2004	32
2005	28
2006	23
2007	16
2008	13
2009	11



La funzione interpolante utilizzata è stata del tipo

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{con } a \rangle 0, x \neq 0$$

quindi, per le condizioni imposte dal metodo dei minimi quadrati:

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \frac{a}{x_i} \right)^2 = MIN$$

da cui

$$\boxed{a = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}}}$$

Quindi, con i dati in ingresso:

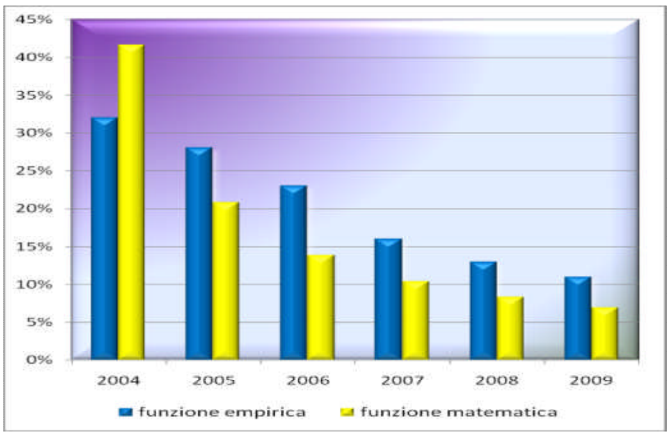
x_i	y_i/x_i	$1/x_i^2$
1	32	1
2	28/2	1/4
3	23/3	1/9
4	16/4	1/16
5	13/5	1/25
6	11/6	1/36

$$a = \frac{62{,}1}{1{,}491388} = 41{,}64 \text{ da cui}$$

$$y = \frac{41{,}64}{x} \quad \text{Funzione interpolante}$$

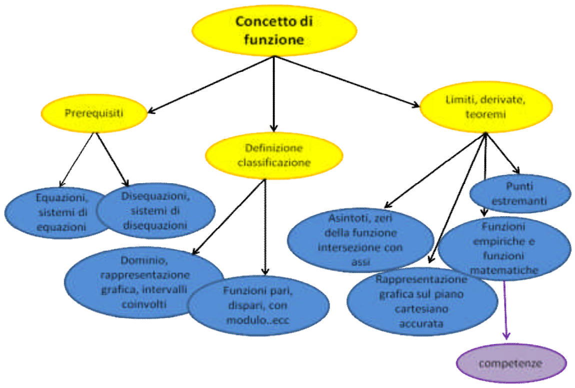
Anche in questo caso si è proceduto al confronto tra la funzione empirica e quella matematica per scoprire che l' adattamento non era proprio dei migliori!!!

Anni	Funzione empirica	Funzione matematica
2004	32	28,49
2005	28	20,82
2006	23	13,88
2007	16	10,41
2008	13	8,328
2009	11	6,94



Considerazioni metodologiche - didattiche

L' argomento trattato è stato visto in un' altra ottica: non più una data funzione da analizzare, ma la ricerca della miglior funzione adatta per l' interpretazione di un fenomeno. Il concetto di funzione è stato, inoltre, analizzato attraverso sottodimensioni per ciascuna delle quali sono state rilevate conoscenze e abilità.



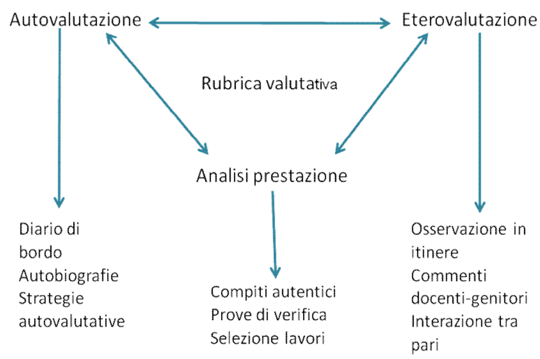
Il coinvolgimento della classe su problematiche reali ha catturato l' attenzione anche degli alunni più distratti. L' aspetto operativo, che ha richiesto l' utilizzo del laboratorio, si è rivelato un ottimo espediente per il consolidamento di conoscenze teoriche che, senza il riferimento ad aspetti concreti, sarebbe rimasto "lettera morta" ; pertanto, il successo e la gratificazione personale dei singoli alunni hanno confermato la validità della scelta strategica adottata che ha consentito il pieno recupero, in itinere, di conoscenze pregresse fondamentali.

L' aggiornamento, in termini positivi, della valutazione relativa al profitto e alla partecipazione dei singoli studenti, nonché dell' intera classe, è stato registrato in sede dei relativi consigli di classe e, sicuramente, si ripercuoterà sulla valutazione sommativa di fine quadrimestre.

Relativamente alla valutazione interna della scuola, questa attività è stata accolta con favore: oltre ad essere a costo zero, certamente sarà in grado di spostare l' indice di gradimento delle attività di recupero verso posizioni più favorevoli della scala Likert, in occasione della compilazione del questionario qualità. Circa la valutazione esterna va ricordato che le prove INVALSI e le rilevazioni OCSE possono riguardare anche le classi terminali.

Conclusione

La nostra proposta didattica fa riferimento all' acquisizione, tra le altre, di una specifica competenza: quella di utilizzare la matematica per il trattamento quantitativo della informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare la descrizione di un fenomeno con strumenti statistici o funzioni, costruire un modello···) in un contesto valutativo complesso che qui si schematizza



ai fini dell' utilizzo ottimale di tutti gli strumenti a disposizione!!!

Bibliografia

Bacciotti, A. & Beccari, G.T.: 1988, 'Problemi didattici nei corsi universitari. L'introduzione del concetto di funzione', *Archimede.*

C. B. Boyer, Storia della matematica, Mondadori 1991.

N.R.D. Modena: 1985, *Il concetto di funzione nella scuola superiore, Quaderno n. 3, Dipartimento di Matematica di Modena,* Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Morris Kline, Storia del pensiero matematico, Biblioteca Einaudi.

M. Trovato, *Probabilità Statistica Ricerca operativa*, Ghisetti e Corvi editori, 2002.

Enciclopedia Treccani, voce Funzione.

Si ringrazia la Dottoressa Carmela Petruzzo per la collaborazione.