

L'insegnamento della fisica legato a problematiche di matematica. *Stabilità del Tokamak*

Authors: Paolo ALLIEVI, Gianfranco GENCO, Alberto TROTTA

Abstract :

The paper shows the mathematical and physical motivations for which the processes, that are the basis for the energy production in the Sun, can with difficulty be realized experimentally in the laboratories. After a concise but clear exposition of what nuclear fission concerns, the Authors introduce the concept of nuclear fusion (showing its advantages over the nuclear fission) that is, as demonstrated essentially by mathematical considerations, the basis for the energy production in the Sun but that may with difficulty have, as explained by physical considerations, stable experimental application into research machines like Tokamak. In particular the paper analyzes, by the Maxwell - Boltzmann energy distribution of N molecules in an ideal gas (plasma), the thermonuclear fusion in the Sun (plasma gravitational confinement system) and into the Tokamak (plasma magnetic confinement toroidal machine) determining and comparing the stability of both processes and pointing out, as practicable, the inertial confinement nuclear fusion by concentrated laser beams.

Riassunto

L'articolo evidenzia le motivazioni, di natura sia matematica che fisica, per le quali i processi che sono alla base della produzione di energia nel Sole possono difficilmente essere realizzati per via sperimentale in laboratorio. Dopo una sintetica ma chiara esposizione di cosa è la Fissione nucleare, gli Autori introducono il concetto di Fusione nucleare (evidenziandone i vantaggi rispetto alla fissione nucleare) che viene dimostrato, con considerazioni essenzialmente matematiche, essere alla base della produzione di energia nel Sole ma che difficilmente potrà trovare, come esplicitato con considerazioni fisiche, applicazione sperimentale stabile in macchine di ricerca tipo Tokamak. In particolare l'articolo analizza, per mezzo della distribuzione energetica di Maxwell-Boltzmann di N molecole in un gas ideale (plasma), la fusione termonucleare nel Sole (sistema a confinamento gravitazionale del plasma) e nel Tokamak (macchina toroidale a confinamento magnetico del plasma) determinando e confrontando la stabilità dei due processi e indicando, come percorribile, la fusione nucleare a confinamento inerziale basata sull'uso di fasci laser concentrati.

0. Premessa

Motivazioni, di natura sia matematica che fisica, evidenziano che i processi nucleari che sono alla base della produzione di energia nel Sole possono difficilmente essere realizzati per via sperimentale in laboratorio.

Tali processi sperimentali fanno capo a macchine di tipo *Tokamak* (macchina toroidale a confinamento magnetico del plasma) quali il *JET* (Joint European Torus) a Culham in Inghilterra e l' *ITER* (International Thermonuclear Experimental Reactor) a Caradache in Francia.

1. Cos'è il Tokamak?

Il *Tokamak* è una macchina che attualmente cerca di ricreare la stessa fusione nucleare che avviene sul Sole.

Grazie a questo processo di fusione nucleare il Sole irradia energia luminosa che permette la vita sulla Terra.

2. Che cos'è la fusione nucleare?

La fusione nucleare (vedi schema di figura 1) avviene per unione di protoni.

L'azione repulsiva tra i protoni, al momento della fusione, è vinta dalla velocità (energia cinetica E_k) di avvicinamento relativo determinata dall'alta temperatura T ($E_k = kT$) dell'ordine di 10^9 °K.

L'Energia prodotta è pari a circa 7 MeV/nucleone dove per nucleone si intende un protone. Tale processo di produzione di energia è attualmente allo studio col *Tokamak* e rappresenta un'evoluzione della produzione di energia nucleare oggi prodotta con la fissione nucleare.

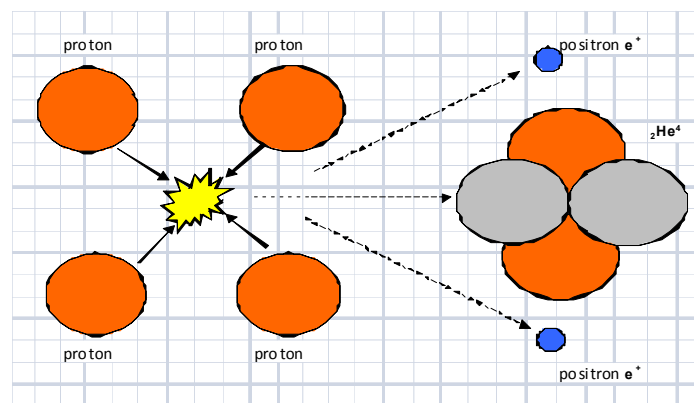


Figura 1 – Reazione di fusione con idrogeno

3. Che cos'è la fissione nucleare?

La fissione nucleare (vedi schema di figura 2) avviene per urto di un neutrone su un nucleo fissile (Uranio, plutonio, etc.).

Tale urto determina la rottura del nucleo stesso producendo due frammenti (scorie nucleari), circa due neutroni ed energia.

L'Energia prodotta è pari mediamente a circa 1 MeV/nucleone dove per nucleone si intende o un protone o un neutrone.

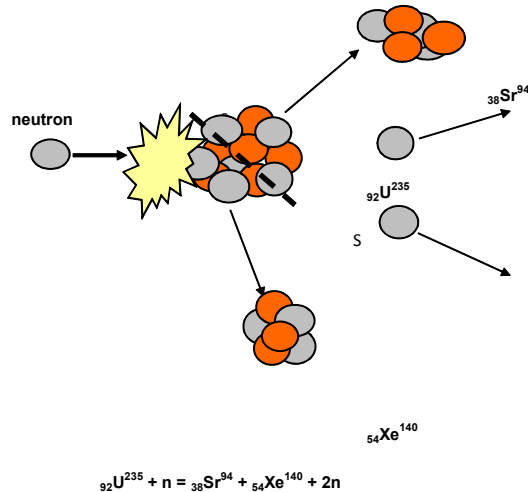


Figura 2 – Fissione Uranio

4. Confronto Fissione – Fusione

Il processo di fusione nucleare è in alternativa al processo di fissione: quest'ultimo è quello attualmente utilizzato nei Reattori nucleari di potenza per produrre energia elettrica.

Il processo di fusione mette in gioco una potenza specifica decisamente superiore a quella del processo di fissione e comunque ha risorse illimitate.

Il maggior valore dell'energia specifica in gioco con la fusione rispetto alla fissione dipende dal fatto che nella fissione soltanto una parte dei nucleoni del nucleo (15%) è coinvolto nella rottura e nella conseguente emissione di energia.

Per i motivi sopra esposti con il *Tokamak* si sta studiando un reattore, di futura generazione, a fusione nucleare.

5. Confronto Fusione sul Sole e nel Tokamak

Il processo di fusione nucleare su cui si basa il *Tokamak* è lo stesso di quello che avviene nel Sole ma con delle differenze.

Sole

La temperatura media del Sole è circa 15 milioni di gradi Kelvin.

Tale valore risulta circa 100 volte inferiore alla temperatura teorica necessaria per la fusione (1 miliardo di gradi Kelvin).

Tokamak

La temperatura media adottata nel Tokamak è circa 100 milioni di gradi Kelvin. Tale valore risulta circa 10 volte inferiore alla temperatura teorica necessaria per la fusione (1 miliardo di gradi Kelvin).

Sul Sole la fusione nucleare avviene e grazie ad essa abbiamo energia luminosa sulla Terra. *Come mai sul Sole si ha la fusione stabile, con una Temperatura circa 100 volte inferiore a quella necessaria per la fusione nucleare (1 miliardo di gradi Kelvin)?*

Essendo la temperatura del Sole di circa 15 milioni di gradi Kelvin come valore medio, esistono, secondo la legge di distribuzione dell'energia di Maxwell-Boltzmann in un gas, una piccolissima frazione di particelle (protoni), pari a circa 10^{-26} (vedi calcolazioni nel foglio excel di figura 5), con temperatura uguale o superiore a quella della fusione nucleare (1 miliardo di gradi Kelvin).

Tali particelle sono quelle che fondono nuclearmente.

6. Distribuzione energetica di N molecole in un gas a temperatura T₀.

La distribuzione energetica di N molecole in un gas a temperatura media T₀ è:

$$\frac{dn}{N} = \frac{2\pi}{(\pi k T_0)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT_0} dE \tag{6.1}$$

dove dn è il numero di molecole aventi Energia tra E ed E+dE e $k=1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K la costante di Boltzmann.

Ponendo nella (6.1) $E=kT$ ed $x = T/T_0$ la distribuzione diviene, per qualsiasi T₀, (vedi grafico in figura 3):

$$\frac{dn}{N} = \frac{2}{(\pi)^{1/2}} x^{1/2} e^{-x} dx \tag{6.2}$$

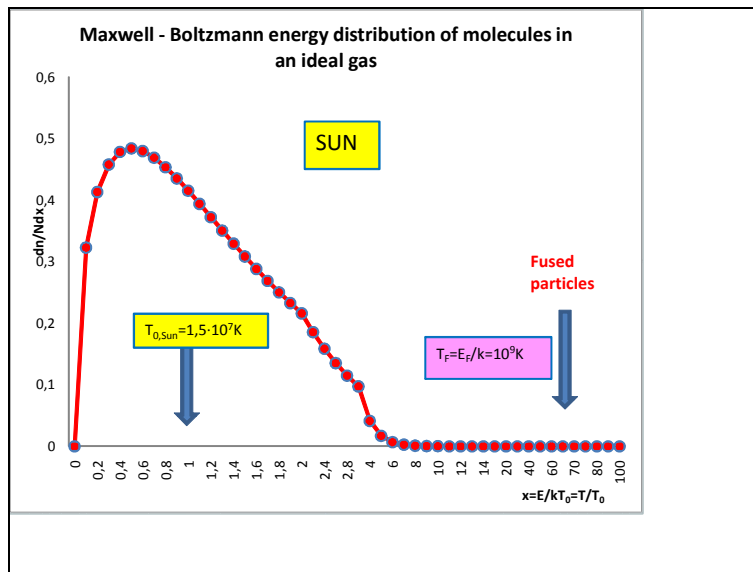


Figura 3 - Distribuzione energetica di N molecole in un gas a temperatura T₀ (Sole)

Nel *Tokamak*, nonostante si abbia una temperatura di circa 100 milioni di gradi Kelvin (circa 10 volte superiore a quella del Sole), non si è avuta una fusione nucleare **continua nel tempo**.

Ciò a dispetto, come evidenziato nel grafico successivo in figura 4, del fatto che il *Tokamak* ha una frazione di particelle (H, D e T), pari a 10^{-4} (vedi calcolazioni nel foglio excel di figura 5), con temperatura uguale o superiore a quella della fusione nucleare (1 miliardo di gradi Kelvin).

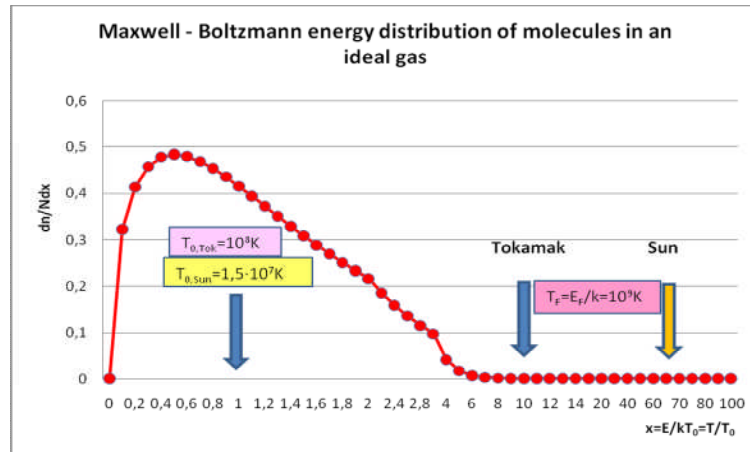


Figura 4 - Distribuzione energetica di N molecole in un gas a temperatura T_0 (confronto Sole – *Tokamak*)

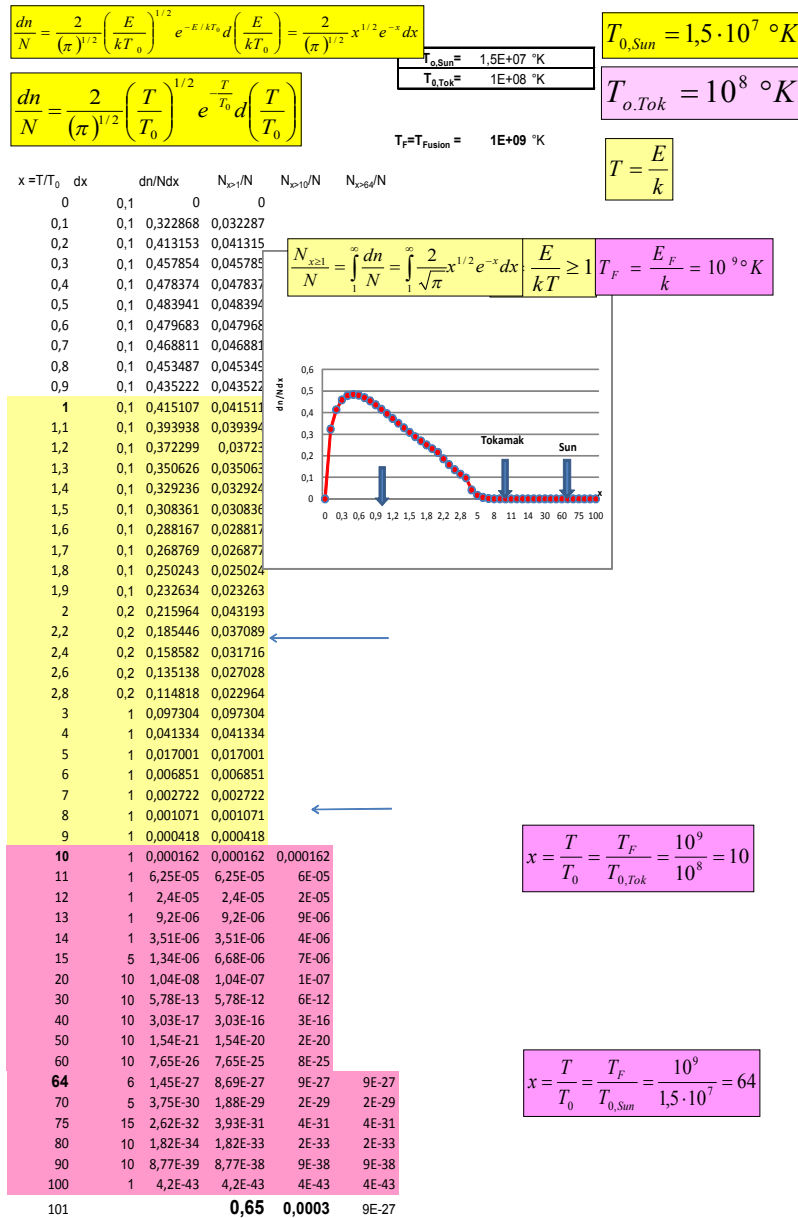


Figura 5 – Calcolo frazione di particelle aventi temperatura maggiore di 10⁹ K sia sul Sole che nel Tokamak.

L' anomalia di cui al precedente grafico di figura 4 emerge ulteriormente se si fa riferimento al numero di nuclei che fondono per unità di tempo e di volume:

Sole

$$N'_{Sun,fusion} = 10^{12} \text{ nuclei } H / \text{sm}^3 \tag{6.3}$$

Tokamak

$$N'_{Tokamak,fusion} = 10^{20} \text{ nuclei } H, D, T / \text{sm}^3 \tag{6.4}$$

Quanto sopra può essere spiegato allora ricorrendo al concetto di *Stabilità*.

7. Stabilità

Cosa si intende per *stabilità* del processo di fusione nucleare?

Nella fusione nucleare siamo in presenza di un plasma, cioè una massa gassosa le cui particelle (idrogeno, deuterio o trizio ionizzati) si muovono ad alta velocità (1000 km/s) urtandosi tra di loro dopo aver percorso, tra due urti successivi, una distanza media λ chiamata libero cammino medio.

E' intuitivo pensare che, lungo una direzione, quanto più λ è piccolo rispetto alla dimensione D del contenitore del plasma tanto più il processo di fusione sia stabile.

Quanto sopra trova esplicitazione nella formula sottostante:

$$(Stability)_{linear} = \frac{D}{2 \lambda} \quad (7.1)$$

Nel SOLE la formula della *stabilità* lineare assume il valore:

$$(Stability)_{Sun,linear} = \frac{D_{Sun}}{2 \lambda_{Sun}} \cong \frac{1,4 \cdot 10^9 m}{2 \cdot 10^{-2} m} \cong 10^{11} \quad (7.2)$$

Nel *Tokamak* (vedi figura 6) la formula della *stabilità* lineare assume il valore:

$$(Stability)_{Tok,linear} = \frac{D_{Tok}}{2 r_{Tok}} \cdot \frac{D_{Tok}}{2 \lambda_{Tok}} = \frac{3m}{2 \cdot 0.01m} \cdot \frac{3m}{2 \cdot 4 \cdot 10^4 m} \cong 10^{-2} \quad (7.3)$$

dove r è il raggio del percorso elicoidale delle particelle nel *Tokamak*.

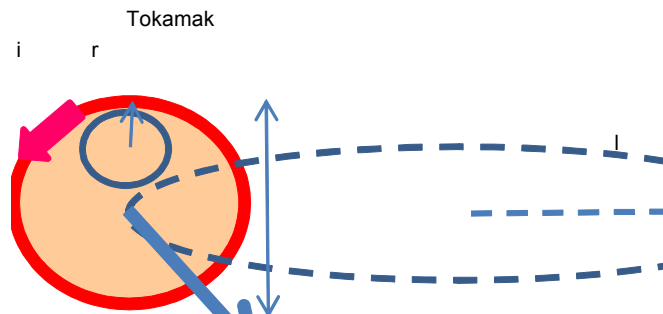


Figura 6 – Rappresentazione schematica del Tokamak

Da quanto sopra si deduce che la *stabilità* lineare del *Tokamak* è molto bassa, pari a circa 10^{13} volte inferiore a quella del SOLE , tanto da non permettere una fusione nucleare **continua**.

Peraltro per un confronto della stabilità tra SOLE e *Tokamak* si considera il Sole come un *Tokamak* di sezione semicircolare e pertanto si può considerare una stabilità globale riferendoci alle due dimensioni trasversali.

Pertanto il Rapporto tra la stabilità globale del SOLE e quella del *Tokamak* è pari a:

$$\frac{(Stability)_{Sun}}{(Stability)_{Tok}} = \left(\frac{Stability_{Sun,linear}}{Stability_{Tok,linear}} \right)^2 = \left(\frac{10^{11}}{10^{-2}} \right)^2 = 10^{26} \quad (7.4)$$

Il precedente risultato è confermato dalla formula successiva

$$\begin{aligned} \frac{Stability_{Sun}}{Stability_{Tok}} &= \left(\frac{\lambda_{Tok}}{\lambda_{Sun}} \right)^2 = \left(\frac{N_{Sun} \cdot \sigma_{Sun}}{N_{Tok} \cdot \sigma_{Tok}} \right)^2 = \left(\frac{p_{Sun} T_{Tok} \cdot \sigma_{Sun}}{p_{Tok} T_{Sun} \cdot \sigma_{Tok}} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{p_{Sun} T_{Tok} \cdot p_{Sun}}{p_{Tok} T_{Sun} \cdot p_{Tok}} \right)^2 = \frac{p_{Sun}^4 \cdot T_{Tok}^2}{p_{Tok}^4 \cdot T_{Sun}^2} = \left(\frac{10^9 \text{ bar}}{10^3 \text{ bar}} \right)^4 \cdot \left(\frac{10^8 \text{ K}}{10^7 \text{ K}} \right)^2 = 10^{26} \quad (7.5) \end{aligned}$$

dove, sia per il Sole che per il *Tokamak*, N , σ , p e T sono rispettivamente il numero di particelle per unità di volume, la sezione d'urto delle particelle, la pressione e la Temperatura media.

8. Conclusioni e prospettive

Da quanto sopra esposto, appare difficile una fusione nucleare stabile nel *Tokamak*.

Peraltro esistono alternative al processo di fusione nucleare a confinamento magnetico: gli USA stanno sperimentando una fusione nucleare a confinamento inerziale basato sull'uso di fasci *laser* concentrati tutti su un capsula metallica molto piccola contenente materiale nuclearmente fondibile (H,D,T).