Proposte di "*percorsi*" di insegnamento tendenti al raggiungimento di traguardi di apprendimento riferiti a questioni ritenute particolarmente significative e necessarie da apprendere.

Proposta di Analisi Matematica

Proposals of teaching paths aiming to the achievement of learning goals referred to issues deemed particularly significant and needed to be learned.

Author: Stefano GERONIMO [1]

Riassunto

Fare proposte di "*percorsi*"…., mi riporta indietro negli anni quando insegnavo matematica al Liceo Scientifico.
Spesso mi trovavo in difficoltà perché non riuscivo a svolgere il programma ministeriale e molte volte mi recavo al Ministero per parlare con qualche ispettore.
Ricordo gli ispettori centrali *Caldo, Chiellini e Vita* ai quali ponevo domande e ricevevo consigli.
Alle mie domande, ricordo, quando esprimevo le mie difficoltà e incertezze, l'ispettore *Caldo* mi diceva: "Caro *Geronimo* riduci le dimostrazioni e passa alla matematica applicata in quanto i problemi concreti si ricordano, le dimostrazioni si dimenticano".
Dopo tanti anni, se tornassi ad insegnare in un liceo, continuerei a seguire la strada a suo tempo indicatami, privilegiando, fra i tanti, i seguenti percorsi:
1) Approssimazione delle funzioni (goniometriche, logaritmiche ed esponenziali per mezzo di polinomi mediante la formula di *Taylor* con il resto di *Lagrange* e quella di *Mac- Laurin*).
2) Risoluzione approssimata di equazioni polinomiali di qualunque grado mediante, ad esempio, il metodo delle secanti e delle tangenti
3) Risoluzione di semplici equazioni differenziali del primo e secondo ordine con il metodo delle differenze finite o con altri metodi.
Con questi "percorsi " abitueremmo i giovani alla ricerca e alla scoperta di semplici modelli matematici e di problemi concreti e reali cui si deve tendere oggi e a maggior ragione domani.
Questo, secondo me, è ciò che è importante e significativo che i giovani apprendano di matematica.

1 Già dirigente scolastico, Presidente della Sezione Mathesis di Roma

1. Premessa

Io penso che l'argomento principale da considerare come percorso di insegnamento-apprendimento è l'approssimazione in matematica.
Pertanto è consigliabile tralasciare qualche dimostrazione rimandandola ad un momento più opportuno senza con questo rinunciare a presentare la Matematica nel suo più ampio significato universale. Ricordo i consigli dell'ispettore Caldo:
"Caro Geronimo riduci le dimostrazioni perché le applicazioni si ricordano mentre le dimostrazioni facilmente si dimenticano."
Non conta il numero degli argomenti svolti, non servono formule e formulette, è la qualità che forma al contrario della quantità che informa.
Perché i giovani, uscenti dalla scuola secondaria superiore, possano percorrere senza troppi intoppi il cammino universitario o immettersi nel mondo del lavoro è necessario che posseggano specifiche competenze cioè capacità, conoscenze ed esperienze.
A tal fine desidero puntualizzare i seguenti tre punti.

2. Approssimazione delle funzioni (goniometriche, logaritmiche ed esponenziali per mezzo di polinomi mediante la formula di Taylor con il resto di Lagrange e quella di Mac- Laurin).

Nell'opera "*Methodus Incrementorum Directa et Inversa*" pubblicata a Londra nel 1715, Brook Taylor presenta una formula che porta il suo nome con la quale si prefiggeva di approssimare qualsiasi funzione algebrica o trascendente mediante polinomi.
La genialità di questa sua idea fu espressa dallo stesso Giuseppe Luigi Lagrange nel 1772, ben 41 anni dopo la morte di Taylor.
Lagrange riconobbe la grande importanza ed il grande valore di quella formula da indurlo a definirla come " il differential principale du fondament du calcul".
Il ragionamento che ci porta al teorema di Taylor, alla sua formula ed alla formula di di Mac Laurin è il seguente.
Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo I e sia $x_0 \in I$.
Essa può essere una funzione algebrica, goniometrica, logaritmica o esponenziale.
A volte può essere utile approssimare la $f(x)$ con una funzione $g(x)$ più semplice da calcolarsi di $f(x)$, che non differisca troppo da $f(x)$, almeno in un opportuno intorno di x_0, e che abbia come primo requisito:

$$g(x_0) = f(x_0) \tag{2-1}$$

e come secondo che $g(x)$ sia un opportuno polinomio di un certo grado n (n = 0, 1, 2,....) cioè:

$$g(x) = p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \tag{2-2}$$

Escluso il caso che la $f(x)$ sia un polinomio, occorrerà aggiungere un certo termine correttivo, cioè scrivere:

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) \tag{2-3}$$

E' importante osservare che questa formula, significando soltanto che indichiamo con $R_n(x)$ la differenza fra $f(x)$ ed il polinomio (2-2), non avrebbe alcuna importanza se non si riuscisse ad indicare una qualche proprietà o a dare una qualche espressione di $R_n(x)$.
Ora, come vedremo, ciò è effettivamente possibile, sotto opportune ipotesi per la funzione $f(x)$.

Teorema di *Taylor* con il resto di *Lagrange*.

Enunciato: Sia *f(x)* una funzione derivabile *n* volte in un intorno *I* del punto x_0 ed $(n+1)$ volte in tutti i punti di *I* escluso al più x_0. Allora per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$ esiste almeno un punto ξ, interno all'intervallo di estremi x_0 e x, tale che sia:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x) \tag{2-4}$$

con $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{2-5}$$

essendo $x_0 < \xi < x$.

La (2-4) rappresenta la *formula di Taylor* e l'espressione

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

che in essa compare viene detto *polinomio di Taylor* di grado *n* relativo alla funzione *f(x)* ed al punto iniziale x_0.

La (2-5) prende il nome di forma di *Lagrange* del termine complementare o del resto *ennesimo* della *formula di Taylor*.
Esso permette spesso di fare delle semplici valutazioni sull'ordine di grandezza dell'errore che si commette nell'approssimazione di $f(x) \cong p_n(x)$.
Se l'intervallo *I* contiene *0* e si prende $x_0=0$, la (2-4) con la (2-5) diventa:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{2-6}$$

con ξ compreso tra 0 ed x.
La (2-6) è detta *formula di Mac Laurin* ed è quella maggiormente usata nelle applicazioni.

Motivazioni che ci spingono a considerare la *formula di Taylor* come meta di un percorso di apprendimento.

Spesso chi studia *Matematica* sa che ogni tanto ci si imbatte in una *formula fondamentale*.
L'aggettivo *fondamentale* è sempre giustificato nel senso che risulta molto importante nello sviluppo matematico a guisa dei principali nodi ferroviari nei quali si incontrano i treni provenienti da ogni parte, ma da cui ne ripartono tanti altri per tutte le direzioni.
Si può affermare che fra le tante formule fondamentali che incontriamo nello studio della *Matematica* la *formula di Taylor* ha tutte le qualità per essere considerata *fondamentale*.
Precisiamo che *l'area disciplinare* d'interesse è l'*Analisi Matematica*.

E' indiscutibile l'utilità della *formula di Taylor* nelle applicazioni della *Matematica*, in particolare nel *calcolo approssimato*.
Tra le più semplici funzioni che intervengono in *Analisi Matematica* vi sono le funzioni polinomiali (o polinomi).
L'approssimazione di funzioni mediante polinomi è una delle idee più antiche dell'analisi numerica ed una delle più largamente usate.

Si usa un polinomio per approssimare una funzione *f(x)* per vari motivi. Forse il più importante è che i polinomi sono facili da calcolare, facili da derivare e da integrare.. Inoltre le radici di un polinomio si scoprono con fatica molto minore che per altre funzioni. Spesso si presentano integrali la cui funzione integranda è complicata e si riesce a risolverli trasformando la funzione integranda in polinomio.

La formula è poi, didatticamente, estremamente significativa in quanto in essa (2-4) si possono leggere:

a) L'equazione della retta tangente al grafico di una funzione *f(x)* nel punto $P_0 \equiv \left[x_0, f(x_0)\right]$, considerando solo i primi due termini a secondo membro cioè:
$y = f(x_0) + f^{'}(x_0)\left(x - x_0\right)$;
b) la nozione di derivata (fra l'altro, storicamente, Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813) definisce "*derivata di f(x) nel punto x_0 il secondo coefficiente dello sviluppo cioè $f'(x_0)$*");
c) il teorema classico di Lagrange o teorema del valore medio
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f^{'}(\xi)$$
e quindi quello di *Rolle*;
d) la *formula di Mac Laurin* per i polinomi con $x_0=0$;
e) il teorema del differenziale;
f) informazioni su *monotonia* e *convessità-concavità* di una funzione ($f^{''}(x_0) \lessgtr 0$)…fino ad arrivare alle varie generalizzazioni di Analisi II per le funzioni di più variabili.
Considerando il caso di una funzione in due variabili $z = f(x, y)$ il suo sviluppo in formula di Taylor/Mac Laurin è il seguente:

1. $z = c_{00} + \left(c_{10}x + c_{01}y\right) + \frac{1}{2}\left(c_{20}x^2 + 2c_{11}xy + c_{02}y^2\right) + ...$

(2-7)

avendo posto:
$c_{00} = f(0{,}0)$; $c_{10} = f_x(0{,}0)$; $c_{01} = f_y(0{,}0)$; $c_{20} = f_{xx}(0{,}0)$; $c_{11} = f_{xy}(0{,}0)$; $c_{02} = f_{yy}(0{,}0)$
e dove $z = c_{00} + \left(c_{10}x + c_{01}y\right)$ rappresenta il piano tangente in $x_0=0$ e $y_0=0$ alla superficie di equazione $z = f(x, y)$.

2. I due casi da distinguere fondamentalmente sono quelli corrispondenti al segno positivo o negativo del discriminante:
$$D = c_{11}^2 - c_{20}c_{02} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2_{\substack{x=0\\y=0}} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}$$
(2-8)

Se D è positivo il complesso dei termini di 2° grado della (2-7) si annulla su due rette $y = \lambda\, x$, con $\lambda = \lambda_1$ e $\lambda = \lambda_2$ radici dell'equazione:
$$c_{20} + 2\, c_{11}\, \lambda + c_{02}\, \lambda^2 = 0$$
(2-9)

ed ha segno alternativamente positivo e negativo nelle quattro regioni angolari in cui le 2 rette dividono il piano.

Se D è negativo il complesso dei termini di secondo grado conserva sempre il medesimo segno, o sempre positivo o sempre negativo.

In questi ultimi due casi la superficie è sempre un *paraboloide ellittico*, che si trova rispettivamente tutto al di sopra o tutto al di sotto del piano tangente, ossia è in tutte le direzioni concavo o in tutte convesso verso l'alto, nel primo caso è invece un *paraboloide iperbolico*, che taglia il piano tangente lungo le due rette indicate, e che, secondo le direzioni comprese nell'una o nell'altra delle regioni angolari tra quelle rette, presenta profilo concavo verso l'alto.

Il caso intermedio, $D = 0$, dà un *cilindro parabolico*, che tocca il piano tangente lungo tutta una retta generatrice per l'origine.

Come avevo prima detto da questa "stazione" così importante (*Formula di Taylor*) ripartono tanti altri "treni" in tutte le direzioni quali la formula di Taylor di funzioni di 2 o più variabili e tante altre versioni utilizzate anche in *Analisi Funzionale*.

3. Risoluzione approssimata di equazioni polinomiali di qualunque grado mediante, ad esempio, il metodo delle secanti e delle tangenti

Tale capitolo sarà sviluppato in dettaglio nel prossimo Convegno nazionale della Mathesis.

4. Risoluzione approssimata mediante il metodo delle differenze finite di semplici equazioni differenziali del primo e secondo ordine a coefficienti costanti.

L'insegnamento delle equazioni differenziali a livello elementare pur facendo parte dei programmi ministeriali, in alcuni Licei ed Istituti Tecnici non viene nemmeno accennato, in altri lo è appena ed in altri ancora viene svolto malissimo.
La teoria delle equazioni differenziali costituisce uno dei capitoli più importanti dell' *Analisi Matematica,* definita da *D. Hilbert* come una sinfonia coerente dell'infinito (∞).
Di essa fa parte la modellistica matematica, la quale è un campo sterminato della scienza che comprende buona parte delle applicazioni della matematica allo studio dei problemi reali.
L'economista matematico francese *Malinvaud* definì il modello matematico come *la rappresentazione formale, cioè espressa in linguaggio matematico, di idee e conoscenze relative ad un fenomeno.*
Per passare dal problema reale alla sua soluzione mediante il *calcolatore*, occorrono due fasi:

a) L'individuazione del modello matematico;
b) L'impostazione di metodi (algoritmi) sul calcolatore per trovare la soluzione numerica del problema matematico.

Noi ci occuperemo dello studio di alcune equazioni differenziali ordinarie tra le più semplici di primo e secondo ordine che sono poi quelle che si presentano più frequentemente nelle applicazioni.

4.1. *Risoluzione di un'equazione differenziale di 1° grado: Crescita della popolazione umana, crescita dei tumori, crescita di un capitale.*

L'economista inglese *Malthus* (1766-1834), supponendo trascurabile qualsiasi ostacolo alla crescita, in base all'analisi empirica di dati conosciuti, formulò l'ipotesi che la popolazione umana *N(t)* è in crescita e che la velocità istantanea di crescita della popolazione $\dot{N}(t)$ è proporzionale alla popolazione stessa *N(t)* secondo la formula:

$$\dot{N}(t) = k\, N(t) \qquad (4\text{-}1)$$

Con *k* tasso di crescita costante e positivo.

Studiando la crescita dei tumori si è arrivati a stabilire, in prima approssimazione, che detto *V(t)* il volume delle cellule che si stanno dividendo all'istante *t*, le velocità istantanea $\dot{V}(t)$ di accrescimento è data da:

$$\dot{V}(t) = \lambda\, V(t) \qquad (4\text{-}2)$$

con $\lambda > 0$, caratteristica del tipo di cellule esaminate.

Ugualmente interpretando *C(t)* come il montante all'istante *t* di un certo Capitale $C(t=0) = C_0$, la velocità istantanea di accrescimento $\dot{C}(t)$ di *C(t)* è data da:

$$\dot{C}(t) = \delta\, C(t) \qquad (4\text{-}3)$$

con $\delta > 0$, tasso istantaneo di interesse.

Esprimendo t in giorni, abbiamo $\delta = \frac{r\%}{36500}$ essendo $r\%$ il tasso d'interesse annuale.

Le tre equazioni (4-1), (4-2) e (4-3) sono tre esempi di equazioni differenziali del primo ordine omogenee ed a coefficienti costanti, e pur pervenendo da problemi reali diversi sono leggi isomorfe cioè hanno lo stesso modello matematico.

Il metodo delle differenze finite è un metodo per risolvere numericamente, con approssimazione, equazioni differenziali ordinarie ed è di gran lunga il metodo più semplice e fra tutti quello più intuitivo.

Questo metodo, sviluppato da *Brook Taylor* nella sua opera "*Methodus Incrementorum Directa et Inversa*" gli servì per determinare la forma del movimento della corda vibrante.

Per quanto ci riguarda non risolveremo queste equazioni esposte col metodo classico della separazione delle variabili ma ci serviremo del metodo ideato da *Taylor*.

Sappiamo che esiste una risoluzione semplice ed efficace che la moderna tecnologia ci mette a disposizione e riguarda l'uso di simulatori elettronici per lo studio delle dinamiche nei fenomeni transitori.

Questi strumenti un tempo di uso complicato e destinati agli addetti ai lavori oggi sono robusti ed affidabili.

Spiegare le soluzioni delle equazioni (4-1), (4-2), (4-3) ed infinite altre dello stesso tipo con il calcolatore vuol dire mostrare, in definitiva, come la derivata prima si approssimi con il rapporto incrementale e come un problema continuo si possa trasformare in una successione numerica anzi, come ora vedremo, in una *progressione geometrica crescente*.

Consideriamo, per esempio, l'equazione differenziale (4-3) cioè:

$$\dot{C}(t) = \delta\, C(t)$$

con $\delta > 0$, tasso istantaneo di interesse.

Applicando il metodo delle differenze finite si ha:

$$\dot{C}(t) \cong \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t} = \delta\, C(t) \tag{4-4}$$

Ponendo $\Delta t = 1$ (per esempio un anno) otteniamo:

$$C(t+1) - C(t) = \delta\, C(t)$$

cioè:

$$C(t+1) = C(t)\,(1+\delta) \tag{4-5}$$

Per $(t+1)=1$ la (4-5) diviene:

$$C(1) = C_1 = (1+\delta)\, C(0) = (1+\delta)\, C_0$$

Per $(t+1)=2$ la (4-5) diviene:

$$C_2 = (1+\delta)\, C_1 = (1+\delta)^2\, C_0$$

Per $(t+1)=3$ la (4-5) diviene:

$$C_3 = (1+\delta)\, C_2 = (1+\delta)^3\, C_0$$

………………………………………………………

………………………………………………………

Per *(t+1)=n* la (4-5) diviene:

$$C_n = (1+\delta)^n \ C_0$$

La successione numerica $C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ risulta una progressione geometrica di ragione $q = (1+\delta) > 1$ e quindi crescente.

Anche per le altre due equazioni differenziali (4-1) e (4-2), risolte col metodo delle differenze finite, si ottiene un problema continuo che si trasforma, per ciascuna, in una progressione geometrica crescente.

Il risultato $C_n = (1+\delta)^n \ C_0$ rappresenta il montante, a interesse composto, di C_0 che si realizza dopo n intervalli di tempo, che possono considerarsi come anni.

L'errore commesso ad ogni passo si può ridurre diminuendo il passo ed ottenendo così un'approssimazione maggiore.
Questo l'allievo può farlo usando l'elaboratore elettronico che utilizza forse meglio del docente.
Graficamente otteniamo la Figura 4.1-1.

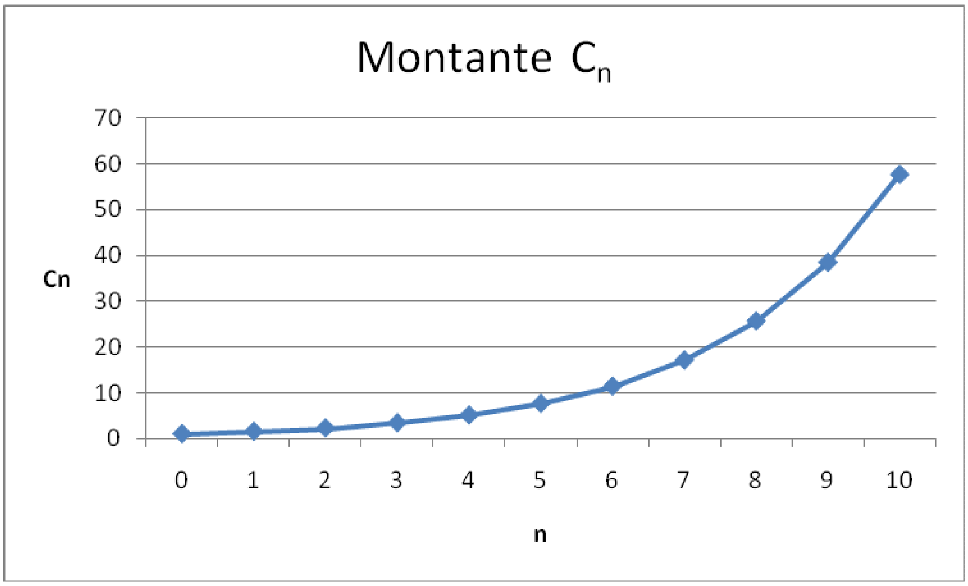


Figura 4.1-1.

4.2. *Risoluzione di un'equazione differenziale di 1° grado:* *Decadimento radioattivo Co^{60} , Scarica elettrica di un condensatore,*

Consideriamo un altro tipo di equazione differenziale del primo ordine, omogenea ed a coefficienti costanti, che regola il decadimento di una sostanza radioattiva (per esempio il Cobalto 60):

$$\dot{N}(t) = -\lambda\, N(t) \tag{4-6}$$

Abbiamo indicato con *N(t)* il numero di atomi non disintegrati al tempo *t*, con $\dot{N}(t)$ la velocità della loro disintegrazione e con λ la costante di decadimento caratteristica della sostanza considerata.
La soluzione *N(t)* è riportata nella seguente Tabella 4.2-1.

La soluzione è stata trovata ricorrendo sia ai metodi classici rigorosi, ricavando *N(t)*, sia al metodo delle differenze finite, ricavando N_i.

Numero di Atomi radioattivi di Cobalto (Co^{60}) iniziali N_0 = **1000**
Tempo di dimezzamento T = 5,28 anni
Vita media τ=T/ln2= 7,6 anni
$\underline{t} = t_i - t_{i-1}$ = **2** anni

i	ti anni	Ni	$N=N_0e^{-t/\tau}$
	0	1000	1000
1	2	792,044	769
2	4	627	[illegible]
3	6	497	[illegible]
4	8	394	[illegible]
5	10	312	[illegible]
6	12	247	[illegible]
7	14	196	[illegible]
8	16	155	[illegible]
9	18	123	[illegible]
10	20	97	[illegible]
11	22	77	[illegible]
12	24	61	[illegible]
13	26	48	[illegible]
14	28	38	[illegible]
15	30	30	[illegible]
16	32	24	[illegible]
17	34	19	12
18	36	15	9
19	38	12	7
20	40	9	5

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N = -\frac{N}{\tau}$$

$$N = N_0 e^{-t/\tau}$$

$$\frac{N_i - N_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = -\frac{N_i}{\tau}$$

$$N_i = \frac{N_{i-1}}{1 + \frac{\underline{t}}{\tau}}$$

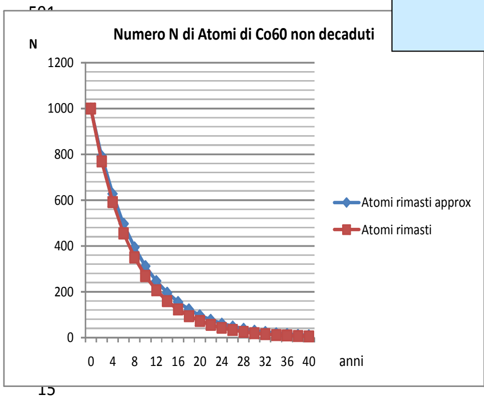


Tabella 4.2-1
Decadimento radioattivo Co^{60}

Prendiamo ora in considerazione il circuito elettrico (aperto tramite l'interruttore T) di Figura 4.2-1, composto da un condensatore carico di elettricità di capacità *C (*in *Farad*) e da una resistenza elettrica R (in *Ohm*) in serie.

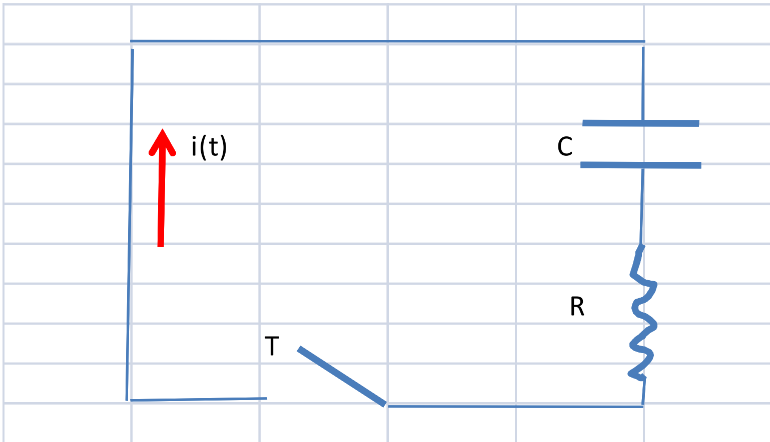


Figura 4.2-1

Al tempo *t=0*, siano Q_0 (in *Coulomb*) e V_0 (in *Volt*) rispettivamente la carica e la tensione sul condensatore. In formule:

$$V(t=0) = V_0$$
$$Q(t=0) = Q_0 = C\,V_0 \tag{4-7}$$

Chiudendo l'interruttore T si genera una corrente $i(t) = dQ/dt$ lungo il circuito ed il condensatore si scarica attraverso la resistenza elettrica.

L'equazione di Ohm generalizzata applicata al circuito in argomento dà:

$$0 = \int \frac{i\,dt}{C} + R\,i = \frac{Q}{C} + R\,\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{C} + R\,\dot{Q} \tag{4-8}$$

Pertanto l'equazione differenziale riguardante la scarica del condensatore è:

$$\dot{Q}(t) + \frac{1}{RC}Q(t) = \dot{Q}(t) + \frac{1}{\tau}Q(t) = 0 \tag{4-9}$$

essendo $\tau = RC$ la costante di tempo (in *secondi*) del circuito elettrico.

La (4-9) si trasforma in:

$$\dot{Q}(t) = -\frac{1}{\tau}Q(t) \tag{4-10}$$

E applicando il metodo delle differenze finite otteniamo:

$$\dot{Q}(t) \cong \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{\tau}Q(t) \tag{4-11}$$

Ponendo $\Delta t = 1$ (per esempio un *secondo*) otteniamo:

$$Q(t+1) - Q(t) = -\frac{1}{\tau}Q(t)$$

cioè:

$$Q(t+1) = (1-\frac{1}{\tau})\, Q(t) \qquad (4\text{-}12)$$

Per *(t+1)=1* la (4-12) diviene:

$$Q(1) = Q_1 = (1-\frac{1}{\tau})\, Q(0) = (1-\frac{1}{\tau})\, Q_0$$

Per *(t+1)=2* la (4-12) diviene:

$$Q_2 = (1-\frac{1}{\tau})\, Q_1 = \left(1-\frac{1}{\tau}\right)^2 Q_0$$

Per *(t+1)=3* la (4-12) diviene:

$$Q_3 = \left(1-\frac{1}{\tau}\right)^3 Q_0$$

…………………………………………………
…………………………………………………

Per *(t+1)=n* la (4-12) diviene:

$$Q_n = \left(1-\frac{1}{\tau}\right)^n Q_0$$

La successione numerica Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, …., Q_n risulta una progressione geometrica decrescente di ragione $q = (1-1/\tau) < 1$.
Il grafico di scarica del condensatore è il seguente che rappresenta la carica *Q(t),* del condensatore stesso, come una funzione decrescente nel tempo *t*.

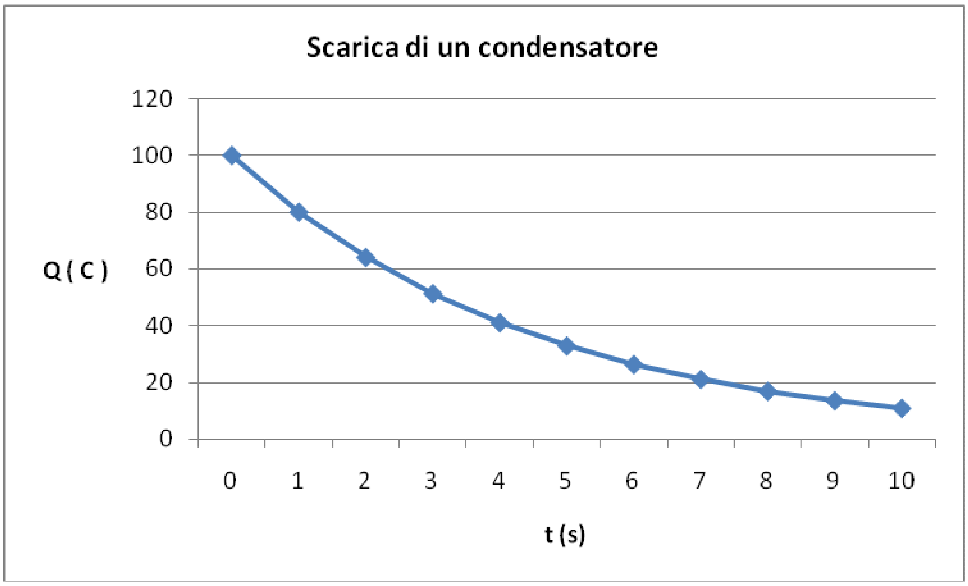


Figura 4.2-2

Anche l'equazione (4-6) del decadimento radioattivo ha un andamento simile.

Lo studio numerico delle equazioni differenziali potrà essere condotto in laboratorio misurando ad esempio le dinamiche di carica e scarica di un condensatore elettrico.
In tal modo l'allievo potrà contenere l'errore commesso ad ogni passo servendosi del calcolatore che sa ben adoperare.

Le equazioni differenziali (4-1), (4-2) e (4-3) sono del tipo **1** (*C(t)*) nel grafico di Figura 4.2-3 mentre le equazioni differenziali (4-6) e (4-10) sono del tipo **3** (*N(t)*) sempre nel grafico di Figura 4.2-3.

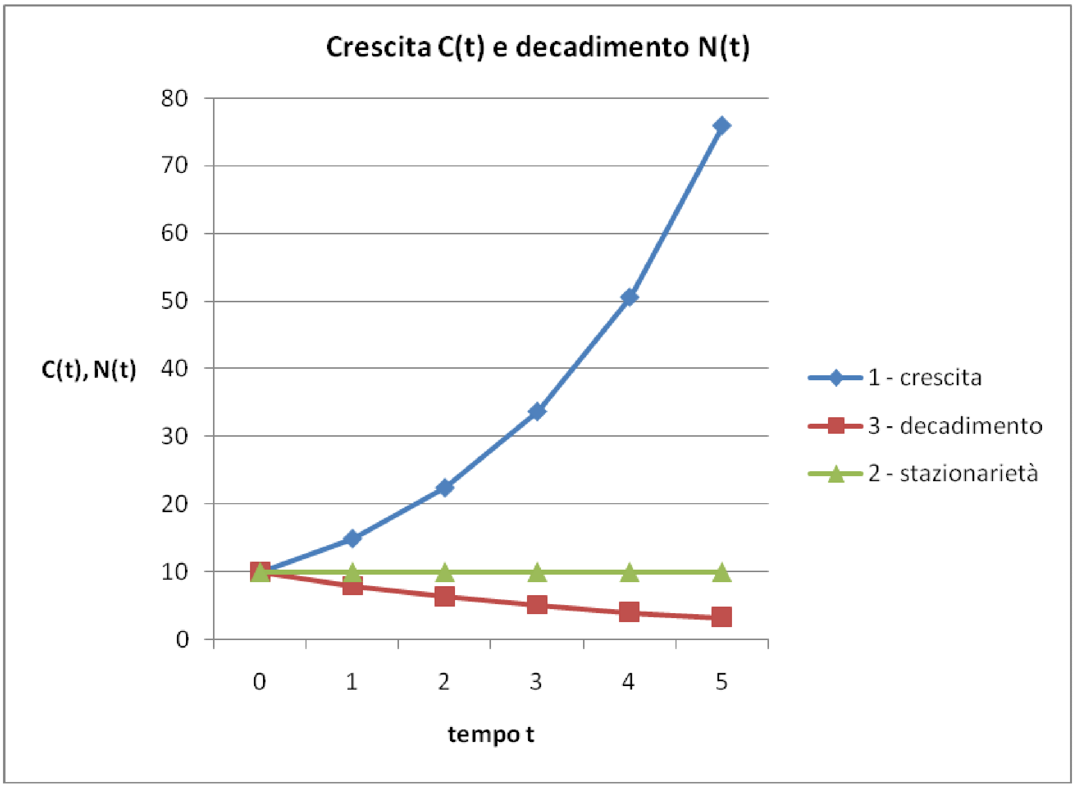


Figura 4.2-3

4.3. *Risoluzione di un'equazione differenziale di 2° grado: Moto armonico*

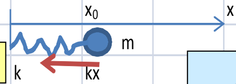
L'equazione differenziale del secondo ordine che regola il moto armonico di una particella di massa m e la cui soluzione $x(t)$ in termini di elongazione di tale massa al tempo t, sono riportati nella seguente Tabella 4.3-1.

La soluzione è stata trovata ricorrendo sia ai metodi classici rigorosi, ricavando $x(t)$, sia al metodo delle differenze finite, ricavando x_i.

Elongazione iniziale x_0 =	**10**	cm	
velocità iniziale v_0 =	0	m/s	
costante elastica della molla k =	0,1	N/m	
massa elemento mobile m =	0,01	kg	10 g
pulsazione $\omega = 2\pi/T = (k/m)^{0,5}$ =	3,2	rad/s	
$T = 2\pi/\omega$ =	2	s	
$\tau = t_i - t_{i-1}$ =	**0,1**	s	

$$F = ma$$

$$-kx = m\ddot{x}$$



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

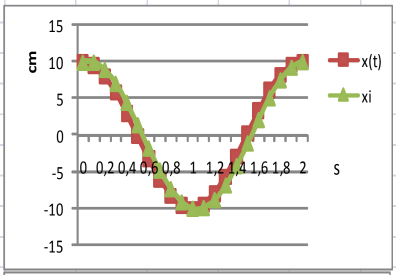
$$x = x_0 \cos \omega t$$

$$v = \dot{x} = \frac{x_i - x_{i-1}}{\tau}$$

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\tau^2} = -\omega^2 x_i$$

$$x_{i+1} = \left(2 - \omega^2\tau^2\right)x_i - x_{i-1}$$

i	ti	x_i	$v_i = dx_i/dt = (x_i - x_{i-1})/\tau$	$x = x_0 \cos\omega t$	$v = dx/dt = -\omega x_0 \operatorname{sen}\omega t$
	s	cm	cm/s	cm	cm/s
	0	10	0	10	0
1	0,1	10	0	9,5	-9,8
2	0,2	9	-10	8,1	-18,7
3	0,3	7	-19	5,8	-25,7
4	0,4	4	-26	3,0	-30,2
5	0,5	1	-31	-0,1	-31,6
6	0,6	-2	-32	-3,2	-30,0
7	0,7	-5	-30	-6,0	-25,3
8	0,8	-7	-25	-8,2	-18,2
9	0,9	-9	-18	-9,6	-9,2
10	1	-10	-9	-10,0	0,7
11	1,1	-10	1	-9,4	10,5
12	1,2	-9	11	-7,9	19,2
13	1,3	-7	20	-5,7	26,1
14	1,4	-4	27	-2,8	30,3
15	1,5	-1	31	0,3	31,6
16	1,6	2	32	3,4	29,7
17	1,7	5	30	6,2	24,9
18	1,8	8	25	8,3	17,6
19	1,9	9	17	9,6	8,6
20	2	10	8	10,0	-1,3



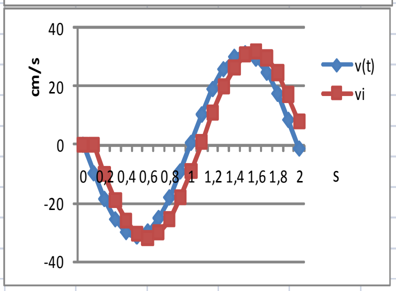


Tabella 4.3-1
Moto armonico

5. Conclusioni

Concludo il mio dire osservando:

Galileo Galilei diceva: "*Il libro della Natura è scritto in lingua matematica*" ed Einstein aggiungeva: **"***basta saperlo leggere***"!**

Compito dei Docenti è abituare i giovani alla ricerca ed alla scoperta di modelli matematici per la risoluzione di problemi concreti cui si deve tendere oggi e a maggior ragione domani.

Enriques partiva dalla consapevolezza che "*il sapere non è un dono che l'uno possa dare e l'altro ricevere passivamente bensì una scoperta che ciascuno deve fare o rifare per proprio conto*". Questo è il binomio insegnamento-apprendimento!