FEDERIGO ENRIQUES E LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

di Franco Ghione

Ho avuto la fortuna di assistere a qualche lezione di aritmetica o di geometria pratica, in cui il discente si metteva a conversare coi ragazzi facendosi - anche lui- un poco ignorante, ricercando insieme con loro, suggerendo, a tentoni, la via che essi stessi dovevano percorrere per guadagnare la verità. E, mentre ammiravo l'intelligente attività della guida, trascinato anch' io nell'esercizio della scolaresca animata, mi chiedevo perché lo stesso metodo non si dovesse adoperare anche con alunni di età più matura…. perché no?, anche coi giovanotti che vengono a studiare alle nostre università. Forse che non era questo il metodo di SOCRATE, ritratto al vivo nei Dialoghi di PLATONE? …
… Non vi è iato o scissura fra matematiche elementari e matematiche superiori, perché queste si sviluppano da quelle, al pari dell'albero dalla tenera pianticina[1].

Non c'è iato, sostiene Enriques, tra l'insegnamento universitario e quello scolastico: le proposte, le possibili scelte, le critiche che si rivolgono all'uno si possono riferire ugualmente all'altro. Così Enriques pone un problema modernissimo che ancora le nostre università stentano a individuare: quello della didattica universitaria. E' in questa ottica e pensando alla mia esperienza e alle mie difficoltà, che identifico a quelle degli insegnanti della scuola, che vanno lette queste righe. Il mio stesso avvicinamento a Enriques, quando ero agli inizi del mio cammino nell'Università, avviene non solo sui temi di ricerca ma anche su alcune indicazioni metodologiche che per me furono fulminanti e che ritengo valido ogni volta ci si ponga il problema di come insegnare la matematica.

Diventa importante di esporre accanto alla verità le vie - spesso diverse - che vi conducono, senza escludere dal confronto con i metodi i procedimenti parziali o imperfetti, ed anzi col preciso intendimento di correggerli e di chiarirli l'uno coll'altro, facendo risultare quanto vi sia di manchevole in ogni concezione parziale delle teorie[2].

Leggiamo qui una indicazione molto importante che da poco comincia a imporsi nel dibattito attuale: l'uso di una didattica dialogata, la ricerca di una partecipazione attiva del discente nella costruzione del pensiero scientifico che in questo modo risulta vivificata e più interessante. La didattica dialogata non sarà completamente sostitutiva della didattica frontale, ma uno strumento di grande utilità nel presentare i primi passi di una teoria così come è stato ampiamente sperimentato nei laboratori di matematica che in tutta Italia si sono tenuti nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche.
Più avanti Enriques sostiene

… al culto del rigore formale che - affettando di bandire ogni manchevolezza - talora riesce soltanto a nascondere le vere difficoltà o le cause d'errore, vuolsi sostituire il culto sincero del rigore concepito come abito e correzione e di critica[3].

Il rigore appare qua in tutta la sua valenza formativa, non come una inutile pignoleria, spesso giustamente rimproverata alla matematica, ma come un abito mentale che abitua alla critica, alla coerenza, alla disciplina come metodo di analisi valido in qualunque contesto e non fine a se stessa. Ho visto ad esempio introdurre nelle prime classi della scuola secondaria di primo grado, in alcuni libri di testo, i numeri negativi come coppie: un segno seguito da un numero naturale. Questa impostazione, che non pecca certo di rigore e che è quella che si sceglie all'Università nel momento in cui l'aritmetica viene definitivamente formalizzata nei corsi di Algebra, mi sembra assolutamente ingiustificata e fuorviante in un contesto nel quale si deve iniziare a muovere i primi passi nell'uso dei numeri negativi. Lo zero è un numero relativo? e se si che segno ha lo zero? E' una domanda

---

[1] F. Enriques, *L'insegnamento dinamico*, Periodico di Matematiche, s. IV, vol. 1, pp 6-16, 1921. Questo importante articolo si può trovare sul sito http://www.mat.uniroma2.it/mep/Articoli/Enri/Enri.html

[2] F. Enriques, O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Vol 1 pg. X, 1924.

[3] F. Enriques, O. Chisini, *Lezioni sulla…* già citato

ingenua ma non insensata la cui non risposta può creare fin dall'inizio dubbi di ogni sorta. Insistere sul rigore della definizione nasconde di fatto la vera difficoltà in questo calcolo che consiste nella regola dei segni, regola che dovrebbe essere enfatizzata su molti esempi numerici per portare piano piano l'allievo a una sua completa comprensione, giustificazione e facilità di calcolo. Distribuendo il prodotto su questi esempi (10+1)(10-1), (10-1)(10-1), (100-1)(100-2) e su altri ancora sempre più difficile dove a un certo punto compare una lettera, si arriva facilmente a conquistare la regola e dominarla cognitivamente ed è proprio in questo modo che, nelle antiche scuole d'abaco delle città stato italiane, dal medio Evo in poi, la regola veniva insegnata.

Questo approccio alla didattica dell'Algebra che consiste nel passaggio dal pensiero vivo al pensiero morto viene genialmente teorizzata in generale da Enriques anticipando alcune recenti acquisizioni delle neuroscienze cognitive:

Volete che il giovane studente di matematiche acquisti di buon' ora il maneggio del calcolo algebrico, acciocché questo istrumento non gli manchi poi nella risoluzione dei problemi che gli saranno proposti? Consento che ciò sia utile insegnare il più presto possibile, in un' età in cui ancora non si saprebbe comprendere i più vari usi a cui la stessa algebra è chiamata: ma per raggiungere lo scopo dovete ancora far lavorare il ragazzo ; bisogna spiegargli prima (con esemplificazioni che egli stesso dovrà variare a volontà) quale sia il significato delle " lettere " messe al posto di numeri, e poi fargli osservare le regole di combinazione, quasi come un giuoco, che -con una certa abilità - si riesce a rendergli discretamente interessante, e quindi accettabile. Solo quando il discepolo avrà appreso a ripetere queste combinazioni, in modo da riuscirvi senza più pensare, potremo dire che egli ha acquistato il maneggio del calcolo, fissandolo nella memoria: allora egli avrà costruito, per così dire, una macchina calcolatrice, che successivamente il suo pensiero potrà adoperare a diversi fini i senza essere costretto ogni volta a ritornare sui motivi delle associazioni già fissate. Qui il pensiero vivo si svolge sul pensiero morto, da cui trae - per così dire - una regola economica di condotta. Ma il pensiero morto non fu travasato dalla testa del maestro a quella del suo ascoltatore; bensì dovette vivere a sua volta nella fatica dell'esercitazione![4]

La necessità didattica di presentare la matematica come *pensiero vivo* è sicuramente uno dei temi sul quale Enriques insite maggiormente dando anche alcune indicazioni più precise sul modo con cui si possa realizzare questo obiettivo. Vi è intanto la partecipazione emotiva dell'insegnante

...se il nostro pensiero e la nostra parola debbono muovere l'attività del discepolo, bisogna che qualcosa di vivo che è in noi passi nello spirito di lui, come scintilla di fuoco ad accendere altro fuoco[5].

Ma oltre a questo, Enriques individua in un opportuno uso della storia della matematica una chiave fondamentale per operare nel senso detto.

La rigida distinzione che si fa di consueto fra scienza e storia della scienza, è fondata sul concetto di questa come pura erudizione letteraria; così intesa la storia reca alla teoria un estrinseco complemento d'informazione cronologica e bibliografica. Ma assai diverso significato ha la comprensione storica del sapere che mira a scoprire nel possesso l'acquisto, e si vale di quello per chiarire il cammino dell'idea, e concepisce questo come prolungantesi oltre ogni termine provvisoriamente raggiunto. Una tale storia diviene parte integrante della scienza, ed ha posto nell'esposizione delle dottrine, per quanto giovi spogliarla -nella misura del possibile- da troppo ingombrante ricchezza di citazioni, che tolga la visione sintetica del progresso nelle sue grandi linee. Il richiamo al passato non si disgiunge qui dall'interesse del presente, che vi attinge solo la visione di una più larga realtà, e la vivifica ricreando la scoperta[6].

L'approccio storico restituisce alle idee il loro carattere originario di scoperta e di novità contribuendo in modo essenziale a costruire intorno ai concetti significati, applicazioni e aperture che spesso sono nascoste nella successiva sistemazione formale. Per restare sul terreno dell'algebra il solo riferimento al significato etimologico delle parole originarie evoca pensieri e metafore: *al-giabr*

---

[4] F. Enriques, *L'insegnamento dinamico* ... già citato.

[5] F. Enriques, *L'insegnamento dinamico* ... già citato.

[6] F. Enriques, O. Chisini, *Lezioni sulla* ... già citato.

significa “conciaossa”, cioè l'arte di risistemare, dopo una rottura, le ossa nella loro giusta posizione; algebrista è l'uomo che Don Chiosciotte incontra per aggiustare le ossa scomposte. L’equazione dettata da un problema si presenta in generale decomposta in una varietà di termini che, per arrivare alla soluzione, vanno ricomposti fino ad arrivare alla forma canonica. Solo per quelle poche forme abbiamo un *algoritmo* risolutivo. *Algoritmo*, dal nome di Al-Khwarizmi il matematico arabo del IX secolo che fondò la nuova disciplina: l'algebra. Ma anche le applicazioni a cui l'algebra di al-Khwarizmi si dedica, tutt’altro che banali, contribuiscono a dare significato e interesse alla disciplina. Nel suo libro , *Libro di al-giabr e di al-muqābala di Muhammad ibn Mūsā al-Kwārizmī* di prossima uscita in italiano nella collana della Fondazione Rubbettino, vengono risolti difficili problemi aritmetici, geometrici o giuridici. L'algebra nel mondo arabo tra il IX e il XII secolo diventa strumento di giustizia, metodo di calcolo al di sopra delle parti che permette di risolvere controversie difficili, si afferma l'idea che "la matematica non è un'opinione" e questo la rende indispensabile in ambito giuridico. Nasce insieme all'algebra un nuovo capitolo della giurisdizione araba: il calcolo delle obbligazioni. Sono spesso problemi difficili che la lingua naturale ha difficoltà a sciogliere dove invece l'uso del linguaggio algebrico permette di dominare completamente la questione e di risolverla. Facciamo un esempio. Nel diritto arabo quando una persona muore e lascia una parte del suo bene a un amico o ha dei debiti, prima di procedere alla divisione dell'eredità si devono togliere tutte le obbligazioni: il resto sarà poi diviso secondo la legge islamica che, ad esempio, prevede che ai figli maschi vada il doppio di quello che va alle figlie femmine. La cosa è chiaramente espressa dal linguaggio naturale, le regole sono chiare e ben definite. Tuttavia possono presentarsi dei problemi di divisione per i quali il linguaggio naturale porta confusione. Facciamo un esempio tra i tanti che si trovano nel libro di al-Khwarizimi[7]. Un uomo muore e lascia due figli (un maschio e una femmina), ha poi destinato a un amico un lascito uguale a quello che avrebbe avuto se fosse stato un suo figlio maschio. Il problema è reso complicato dal fatto che il lascito va tolto subito per poi procedere alla divisione di quello che resta mentre se il lascito non ci fosse e il beneficiario fosse un figlio vero si procederebbe facilmente alla divisione del bene dividendolo in 5 parti: due per il figlio maschio, una per la figlia femmina e due per il beneficiario. Ma le regola dice che si deve *prima* togliere il lascito e poi dividere quello che resta secondo il diritto. Come procedere? Chiamiamo x il lascito e C il capitale. Se il beneficiario fosse un figlio vero e il lascito fosse destinato a un estraneo, si dovrebbe dividere C-x in 5 parti, due per il figlio maschio, una per la figlia femmina e due per il beneficiario. Quindi le tre parti sarebbero rispettivamente (2/5)(C-x), (1/5)(C-x), (2/5)(C-x). Poiché x è la parte che spetta al beneficiario, questo ci permette di scrivere l'equazione

$$\frac{2}{5}(C - x) = x$$

da cui si ricava x=(2/7)C. A questo punto, abbiamo trovato la parte che spetta al beneficiario come se fosse un figlio, e non ci rimane che da dividere la parte rimasta, cioè i (5/7)C fra i due figli veri: si trova in conclusione 10/21 per il figlio maschio, 5/21 per la figlia femmina. Dividendo il capitale C in 21 parti 10 vanno al maschio, 5 alla femmina e 6 al beneficiario. Si vede come il problema sia tutt'altro che banale e quanto sia importante il passo che porta alla equazione, passo che richiede ragionamento e capacità di interpretare le parole con i simboli, le grandezze con lettere, le condizioni con uguaglianze. L'aspetto tecnico che porta alla soluzione è secondario mentre è importante la traduzione di una situazione problematica nel linguaggio matematico che può permettere di chiarire la controversia e convincere il beneficiario che a lui, in quanto estraneo, spettano i due settimi di C e non i due quinti come se fosse un figlio vero. Con questi esempi molto concreti, legati a difficili problemi, con questa capacità di dominare aspetti nuovi della realtà, l'algebra muove i suoi primi passi.

[7] R. Rashed, *Al-Khwarizmi le commencement de l'algèbre*, Blancherd, Paris, 2007

Col passare del tempo, nel tentativo di semplificare, molte cose si sono perdute: sono rimasti gli aspetti tecnici del calcolo e l'algebra si è staccata progressivamente dalla realtà. L'interesse originario della disciplina, che sta proprio nel riuscire a tradurre, in questa lingua universale, problemi di natura diversissima, si perde a vantaggio di un formalismo astratto, più facile da educare ma privo di pensiero. Una possibile inversione di tendenza, da molti auspicata, sarebbe quella di recuperare, non tanto i problemi antichi, quanto l'originaria metodologia che motiva lo studio di una disciplina con una grande varietà di applicazioni a situazioni difficili e molto concrete. Spesso sui libri di testo delle suole secondarie di primo grado, per "far comprendere ai ragazzi che, nel quotidiano, si usano frequentemente concetti matematici", vengono inseriti degli esercizi "concreti" in un apposito capitolo che si chiama "risoluzione di problemi". Tra questi esercizi è molto frequente una tipologia di problema, con alcune varianti, che chiede di trovare quanti conigli e quante galline vi siano in una fattoria sapendo il numero totale di animali e il numero totale di gambe. Il carattere pretestuoso del problema è evidente come è anche evidente il fatto che parlare di conigli e galline invece che di x e y non rende affatto il problema più concreto. Anzi. Se analizziamo in concreto la questione restiamo sconcertati dal fatto che il presunto contadino per sapere il numero di galline e conigli che ci sono nella fattoria, si metta a contare il numero di gambe (operazione tutt'altro che semplice dal momento che gli animali si muovono) per poi scrivere una equazione e calcolarne la soluzione. Solo un idiota potrebbe procedere in quel modo e non ho dubbi nel ritenere che un ragazzo intelligente, capace di ragionare, posto di fronte a un simile problema "concreto" non possa non maturare dentro di se l'idea che la matematica non serva a nulla. La giusta preoccupazione, da più parti avanzata, di rendere meno astratto l'insegnamento della matematica, trova qua una soluzione che ha del ridicolo. Il rapporto astratto-concreto infatti non si può ridurre a una banale contrapposizione tra teoria e pratica, tra esperienza diretta e concetti teorici ma deve diventare, soprattutto nella didattica, materia di riflessione e di approfondimento. A questo proposito vorrei citare il recente articolo[8] di Laura Catastini *Concretamente astratto anzi...simulabile.* In questo lavoro, sulla base di recenti acquisizioni nel campo delle scienze neurocognitive, si lega il diverso livello di concretezza di un concetto alle possibilità simulative che esso è in grado di suscitare nel nostro pensiero. Poiché tali possibilità sono strettamente legate alle proprie personali esperienze nel mondo e alla cultura dei singoli individui, l'essere una idea più o meno astratta diventa un fatto relativo. Per fissare il linguaggio, Catastini introduce le seguenti tre definizioni:

*- Un ente mentale, o un insieme di enti mentali, è **simulabile** se permette inferenze con carattere predittivo.*

*- Chiamasi **alone inferenziale**, l'insieme delle inferenze, consce o inconsce, rese possibile dal grado di simulabilità di un ente mentale o di un insieme di enti mentali.*
*- Un ente mentale è **"tanto più concreto"** quanto **più è simulabile**.*

Così ad esempio l'idea d Ellisse diventa più concreta per un individuo che abbia visto molti giardini o piazze a forma ellittica, che abbia immaginato, studiando i moti planetari, la forma delle loro orbite, che abbia pensato a come un cilindro può essere tagliato da un piano o che abbia trovato il modo per tracciarla per propri scopi decorativi o di altra natura. Ognuna di queste operazioni interferisce con l'astratto concetto iniziale di ellisse e insieme permettono di predire, attraverso un movimento di pensiero, l'esito di questa simulazione. La forma della intersezione di un piano con un cilindro o l'orbita del pianeta vengono simulate dal pensiero a partire dal concetto di ellisse. Ognuna di queste possibili inferenze contribuisce a creare un *alone inferenziale* tanto più ampio quanto più concreto si

---

[8] L. Catastini, *Concretamente astratto anzi...simulabile*, La matematica nella Società e nella Cultura, Rivista dell'UMI, II, Aprile 2009, pp. 31-69

fa il concetto in esame. Da questo si capisce bene quanto sia importante l'azione didattica soprattutto per quel che riguarda la matematica, scienza di pensiero per sua natura. Solo l'azione didattica può, nella nostra disciplina, favorire o negare lo sviluppo di aloni inferenziali capaci di stimolare l'attività simulativa del pensiero.
L'analisi di Catastini si conclude con una esaustiva esemplificazione dell'applicazione di questi concetti nel lavoro scolastico concepito come laboratorio matematico. Viene riportata una esperienza concreta che si è realizzata nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche. Si tratta di un laboratorio matematico pensato per il Liceo Classico dove viene introdotta la geometria della visione e la prospettiva attraverso l'uso di alcuni strumenti, appositamente ideati, capaci di sviluppare negli allievi inferenze e simulazioni per introdurre i punti all'infinito e le basi della geometria proiettiva.
Vorrei concludere con una riflessione sull'idea che ci siamo fatti di *laboratorio matematico*. Non si tratta solo di scegliere una metodologia didattica di tipo non frontale, di servirsi del computer o di altri artefatti, si tratta anche, e soprattutto, di rivedere il rapporto astratto-concreto, senza confinare, come tradizionalmente viene fatto, i concetti matematici in un ambito puramente teorico, ma senza neanche svilire la natura di questa disciplina che ha nell'astrazione e nel metodo dimostrativo, la sua essenza. Le esperienze che abbiamo fatte nelle scuole, di cui diamo ampiamente conto nel sito[9] curato dal *Centro di ricerca e formazione permanente per l'insegnamento delle discipline scientifiche*, se pure in contesti diversissimi, dai licei classici ai professionali offrono uno stesso modo per sciogliere questo nodo: legare la matematica alle sue applicazioni. Tra le "applicazioni" non pensiamo solo quelle più banalmente legate alla vita del cittadino, o alla tecnologia correte, ma a tutto ciò che di significativo la matematica, in tutto il suo lungo cammino, può dire ed è riuscita a dire, su questioni non matematiche. Scindere la matematica dal suo ambito applicativo è una operazione arbitraria che inaridisce la materia levandole molto del suo interesse e delle sue motivazioni. La geometria euclidea nasce come linguaggio iniziale col quale poter affrontare problemi esterni alla geometria stessa, problemi di geografia, di meccanica, di astronomia, di ottica, di scenografia che all'epoca di Euclide convivevano in un unico humus culturale. Aver staccato la geometria da questi ambiti, chiudendola su se stessa, ha certamente contribuito ad un diffuso disamore per questa disciplina fino a farla quasi sparire dai nostri programmi di insegnamento. Un esempio più vicino a noi, l'analisi infinitesimale, ha le stesse caratteristiche: da un lato viene elaborato un nuovo linguaggio, un *calcolo sublime*, e dall'altro tale calcolo diventa strumento essenziale per lo studio di problemi geometrici e fisici.

[9] http://crf.uniroma2.it