Dalla geometria greca alle T.I.C.

Margherita Barile[1] - Ivan De Winne[2]
Dimitris Kastaniotis[3] - Palmira Ronchi[4]

Sunto: Si dimostra come il pacchetto applicativo *Cabri Géomètre II Plus* possa favorire l'insegnamento/apprendimento della matematica in una prospettiva storica. A tal fine presentiamo materiale didattico per fogli di lavoro interattivi, ispirati a costruzioni geometriche dell'antica Grecia. Il carattere internazionale del lavoro può essere la base di futuri sviluppi nell'ambito di un progetto europeo.

Abstract: We show how the software package *Cabri Géomètre II Plus* can enhance the teaching/learning of mathematics in a historical perspective. To this end we present didactical material for interactive worksheets inspired by geometrical constructions from the ancient Greece. The international character of this joint work can be the basis of future developments in the framework of a European project.

Parole chiave: *Cabri*, costruzioni geometriche, storia della matematica.

1 Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Bari; barile@dm.uniba.it
2 Sint-Donatusinstituut, Merchtem, Belgio; ivan.dewinne@pandora.be
3 Gymnasium Intercultural School of Thessalonica, Grecia; dkastani@sch.gr
4 I.T.C.S. "Cesare Vivante", Bari e S.S.I.S. Puglia, Università degli Studi di Bari; palmira.ronchi@istruzione.it

1. PERCHÉ *CABRI* PUÒ RIDARE VITA ALLA GEOMETRIA GRECA ANTICA?

L'idea di utilizzare le T.I.C. (*Tecnologie dell'Informazione e della Comunicazione*) per fornire una prospettiva storica all'insegnamento/apprendimento della matematica è di estrema attualità, ma non è del tutto nuova. Il *National Council of Teachers of Mathematics*, l'associazione che riunisce i docenti di matematica degli USA, nel 2001, aveva dedicato all'argomento un convegno dal significativo titolo "History Comes Alive with Technology" (vedi il sito [6]). La matematica delle civiltà antiche si presta ad implementazioni col software didattico, soprattutto a quelle animate ed interattive, perché essa era basata più su *processi* che su *enunciati*, ed il carattere *prescrittivo* prevaleva su quello *predicativo*. Basti pensare alle regole manualistiche per il calcolo di aree e volumi fissate dagli Egizi nel papiro di Rhind, o ai procedimenti aritmetici ed algebrici che i Cinesi tramandavano sotto forma di versi mnemonici.

L'esempio della quadratura del cerchio, uno dei tre problemi classici dell'antica Grecia, ci permette di illustrare, in dettaglio, gli aspetti che il software di geometria dinamica *Cabri Géomètre II Plus* può valorizzare in modo particolarmente efficace.

1.1 ASPETTO ALGORITMICO

L'area di un cerchio può essere approssimata, bene quanto si voglia, con l'area di un poligono regolare inscritto (o circoscritto); secondo il *metodo di esaustione* attribuito a Eudosso, e utilizzato da Archimede ne *La Misura del cerchio* per dare una stima di π, basta scegliere un numero di lati sufficientemente grande. Questo obiettivo può essere raggiunto, ad esempio, per raddoppiamenti successivi, partendo da un triangolo equilatero o da un quadrato. Dato un poligono regolare con n lati inscritto in un cerchio di raggio unitario, un poligono analogo con $2n$ lati può essere costruito utilizzando la funzione di menu *Bisettrice.* Con questa si può realizzare anche una *macro* che fornisca, immediatamente, le nuove coppie di lati. Gli oggetti iniziali sono la circonferenza, il suo centro e gli estremi A, B di un lato del poligono di partenza, gli oggetti finali sono i due lati del nuovo poligono costruiti sul lato AB. Ripetendo il procedimento su ogni lato del poligono di partenza, si ottiene il nuovo poligono. Questo diventa un oggetto se si ripercorrono i nuovi vertici con la funzione *Poligono*.

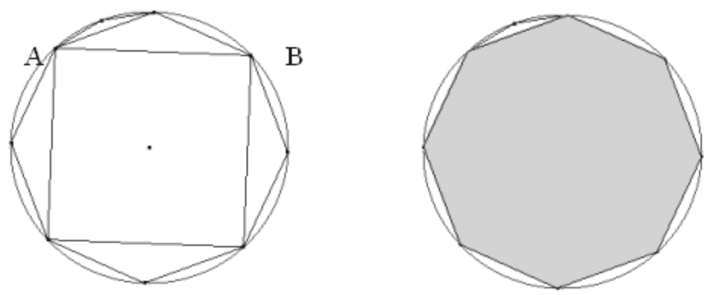

Fig.1

Dopo di ciò si può determinare l'*Area* della figura. I valori calcolati via via possono essere tabulati. In questo modo si segue, passo dopo passo, il processo di approssimazione a π.

1.2 ASPETTO DINAMICO

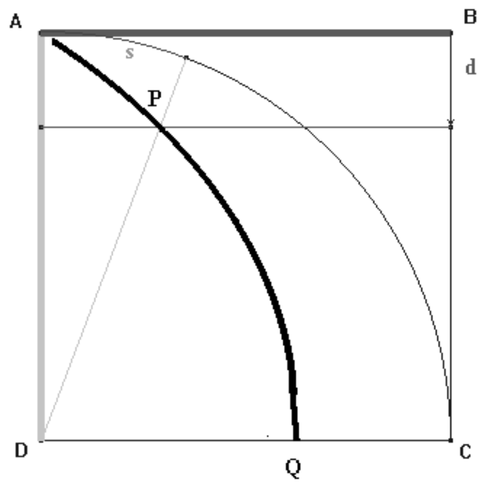

Fig. 2

Molti problemi che, come la quadratura del cerchio, non possono essere risolti con riga e compasso, possono essere affrontati impiegando curve e articolati strumenti da disegno. Il matematico greco Ippia di Elide (nato intorno al 460 a.C.) inventò una curva che da lui ha preso il nome: la cosiddetta *trisettrice di Ippia*, che consente di trisecare gli angoli, ma che, successivamente, Dinostrato (vissuto intorno al 350 a.C.) utilizzò anche per quadrare il cerchio. Essa fu definita, secondo la terminologia greca, come una *curva meccanica,* ossia venne introdotta come luogo descritto da una composizione di moti rigidi uniformi: una traslazione ed una rotazione. Si immagina che, nel quadrato *ABCD* (vedi la figura 2), il lato *AD* ruoti con velocità angolare costante in senso orario intorno a *D*, ed il lato *AB* trasli con velocità costante lungo *BC*. *AD* e *AB*, dalle loro posizioni iniziali, impiegano lo stesso tempo per sovrapporsi al lato *CD*. La trisettrice è il luogo dei punti *P* di intersezione dei lati che si muovono. La curva può essere realizzata con la funzione *Luogo*, oppure come animazione manuale o automatica, dopo aver reso tracciante il punto *P*. Il compito principale (e il più difficile) è rendere "solidali" nel giusto modo il lato che ruota ed il lato che trasla. A questo punto entra il gioco un nuovo elemento.

1.3 ASPETTO ALGEBRICO-NUMERICO

Quando il lato che ruota ha percorso l'arco di circonferenza avente lunghezza s, il lato che trasla deve essersi spostato di un tratto di lunghezza $d = 2s/\pi$. A tale conclusione si giunge con facili considerazioni cinematiche: basta applicare correttamente le definizioni di moto circolare uniforme e moto rettilineo uniforme. In base ai dati, ad ogni istante sono uguali il rapporto tra l'arco percorso e l'arco intero (un quarto di circonferenza) ed il rapporto tra il segmento percorso e l'intero tratto (il lato del quadrato). Vale, cioè, la proporzione:

$$s : (\pi a/2) = d : a,$$

dove a è il raggio della circonferenza, ed anche il lato del quadrato. Dunque la lunghezza da assegnare al vettore di traslazione si deve determinare con la *Calcolatrice*, dopo aver misurato l'arco s.

1.4 ASPETTO EUCLIDEO-COSTRUTTIVO

Il punto precedente prevede il ricorso a π, che è un numero trascendente, estraneo alla geometria degli *Elementi* di Euclide (vedi, ad esempio, la versione di Frajese e Maccioni [2]). Eppure, il modo in cui esso compare, ossia la *proporzione*, è il carattere fondamentale del sistema euclideo. Infatti in esso le definizioni, gli assiomi, e, soprattutto, le dimostrazioni di teoremi e le risoluzioni di problemi sono basati sui criteri dell'*uguaglianza* e della *commensurabilità,* che vengono applicati nel trasporto di misura, attraverso i movimenti rigidi. Tali operazioni sono le principali funzioni di *Cabri*, insieme all'altra modalità fondante delle costruzioni euclidee, che è l'*intersezione* di rette e circonferenze.

D'altronde, la trisettrice di Ippia non fornisce la quadratura del cerchio da sola: essa interviene unicamente nel primo passo del procedimento, che deve essere poi completato con metodi euclidei. Lo scopo è costruire un quadrato avente la stessa area del cerchio di raggio a. Ciò che interessa è il punto Q in cui la curva incontra il lato CD. La distanza q tra D e Q è data dalla formula:

$$q = \frac{2a}{\pi} \tag{1}$$

Per una dimostrazione, che utilizza il calcolo infinitesimale, rimandiamo al testo di Boyer [1], pagg. 114-115.

Una volta acquisita la lunghezza q, anche solo graficamente, si costruisce un segmento di lunghezza b verificante la proporzione

$$q : a = a : b \tag{2}$$

A tal fine si può effettuare la costruzione del quarto proporzionale data nel Libro VI, Proposizione 12 degli *Elementi*.

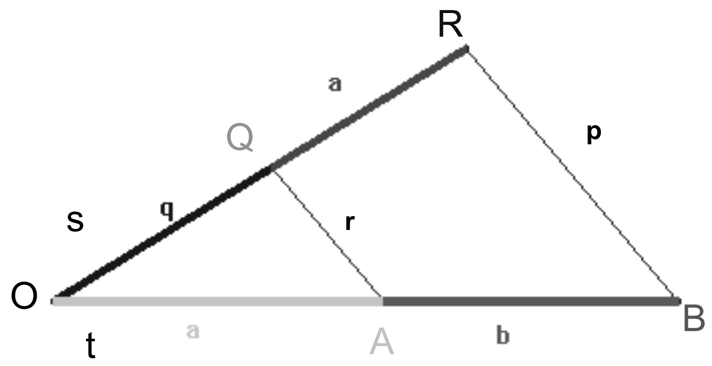

Fig. 3

I passi sono seguenti:

- si tracciano due semirette s e t di origine comune O e non allineate;
- sulla semiretta s si riportano, come nella figura 3, due segmenti consecutivi OQ, QR aventi, nell'ordine, lunghezze q ed a;

- sulla semiretta t si riporta, a partire dall'origine, un segmento OA di lunghezza a;
- si traccia la retta r congiungente Q ed A;
- si conduce dal punto R la parallela p alla retta r;
- si determina il punto B di intersezione tra la retta p e la semiretta t.

Il segmento AB ha la lunghezza b cercata (in base al teorema di Talete, vedi la Proposizione 2 del Libro VI degli *Elementi*).

A questo punto si cerca un quadrato di lato c avente la stessa area del rettangolo di lati $2b$ e a, ossia tale che

$$c^2 = a \cdot 2b. \tag{3}$$

Il lato c può essere determinato secondo la Proposizione 13 del Libro VI, che riguarda la costruzione del medio proporzionale. Infatti la (3) equivale alla proporzione

$$a : c = c : 2b. \tag{4}$$

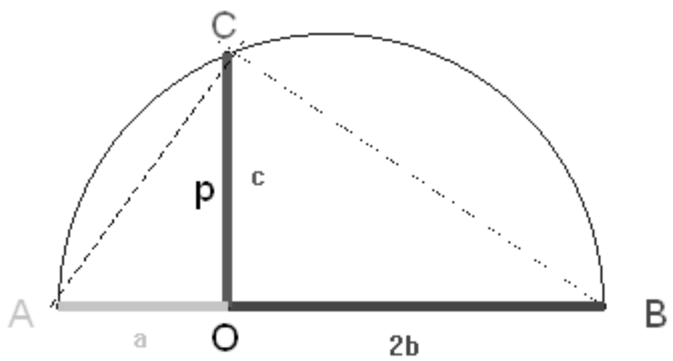

Fig. 4

I passi sono i seguenti:

- si tracciano, su una retta, i segmenti adiacenti AO e OB, di lunghezza a e $2b$ rispettivamente, come nella figura 4;
- si traccia una semicirconferenza avente AB come diametro;
- si conduce da O la perpendicolare p ad AB;
- si determina il punto d'intersezione C tra p e la semicirconferenza.

Il segmento OC ha la lunghezza *c* cercata: infatti, applicando il secondo teorema di Euclide (vedi la Proposizione 8 del Libro VI degli *Elementi*) al triangolo rettangolo ABC, si deduce la (4).

Dalla (1), dalla (2) e dalla (3) segue che *c* è il lato del quadrato di area uguale a quella del cerchio di raggio *a*. Infatti

$$q = \frac{2a}{\pi} \Rightarrow \frac{\pi a}{2} = \frac{a^2}{q} = b \Rightarrow \pi a^2 = 2ab = c^2 .$$

Per completare il procedimento costruttivo, si può disegnare, infine, il quadrato di lato *c*, con un'opportuna *macro* di *Cabri*.

2. UN'ESPERIENZA INTERATTIVA DI GEOMETRIA CONDIVISA TRA CLASSI EUROPEE

L'esperienza che riportiamo è costituita da attività di geometria svolte in laboratorio di informatica e condivise tra alunni e docenti di scuole superiori italiane, belghe e greche nell'ambito di un progetto collaborativo europeo, con l'uso degli strumenti della rete Internet e di *CabriJava*. L'argomento scelto ha riguardato lo studio dei tre problemi classici della geometria non risolvibili con l'uso di riga e compasso: la duplicazione del cubo, la trisezione di un angolo qualsiasi e il problema della quadratura del cerchio.

Oltre all'apporto didattico delle ben note funzioni strumentali e semiotiche di *Cabri* riportate da numerosi autori (vedi, ad esempio, l'articolo di Paola e Robutti [3]), la condivisione di esperienze tra classi europee ha tratto notevoli vantaggi dalla risorsa multilinguistica del software *Cabri Géomètre II Plus* e ha permesso di aggiungere al lavoro matematico di classe finalità più ampie e integrate con lo studio delle lingue. L'uso della lingua inglese e la creazione di un glossario bilingue dei termini e delle funzioni di *Cabri* hanno permesso lo studio della lingua come strumento operativo. Nella figura 5 è riportata un'attività di geometria con *Cabri* predisposta dall'insegnante italiana per introdurre in classe la quadratura del cerchio.

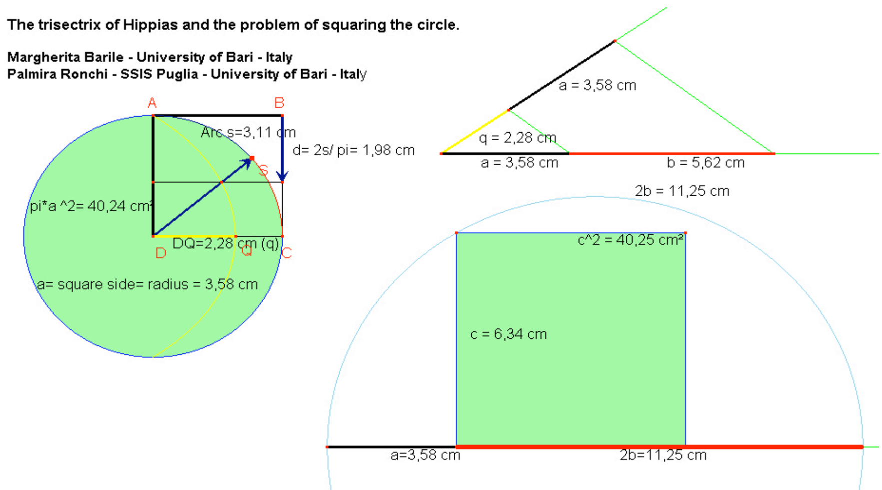

Fig. 5

Un'attenta osservazione delle tre costruzioni presenti nel foglio di lavoro mostra come alcuni degli aspetti presentati nella prima parte di questo articolo possano essere colti e sviluppati con le funzioni di *Cabri* in maniera semplice e intuitiva da parte degli allievi, dopo una premessa teorica da parte dell'insegnante.

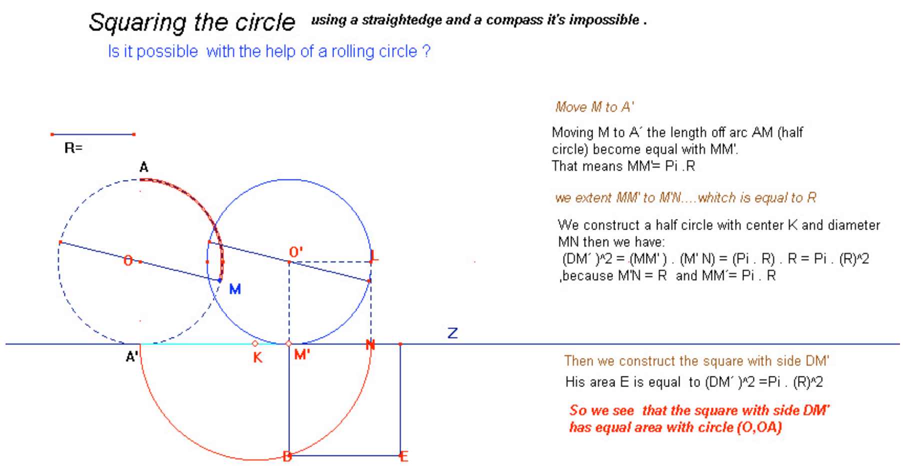

Fig. 6

Nella figura 6 è riportato un foglio di lavoro relativo anch'esso alla quadratura del cerchio e svolto dai partner greci mediante una circonferenza rotolante. Altre costruzioni interattive possono essere scaricate in rete dal sito [4].

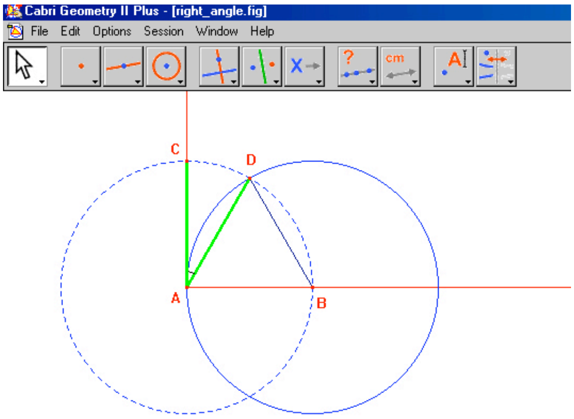

Fig. 7

Nelle figure 7 e 8 sono riportati fogli di lavoro dei partner belgi, reperibili in rete al sito [5], e riguardanti la trisezione di un angolo. In particolare, nella figura 7 è riportata la trisezione, possibile con riga e compasso, di un angolo retto, mentre la figura 8 mostra il risultato di un'interessante applicazione di *Cabri*, che si realizza col seguente procedimento iterativo.

- Dato un arbitrario angolo, lo si divide in quattro parti uguali, ripetendo per tre volte l'uso della funzione *Bisettrice*.
- Si ripete quindi la precedente costruzione su una delle quarte parti ottenute. A tal fine si può anche utilizzare un'opportuna *macro*, avente per oggetto iniziale l'angolo arbitrario.
- Con l'uso del comando *Misura dell'angolo* di *Cabri* si determinano infine le ampiezze degli angoli ottenuti; tabulando questi valori si può far osservare come la somma delle ampiezze degli angoli ottenuti si avvicini a un terzo dell'ampiezza dell'angolo iniziale. In effetti la somma della serie geometrica 1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + ... è 1/3.

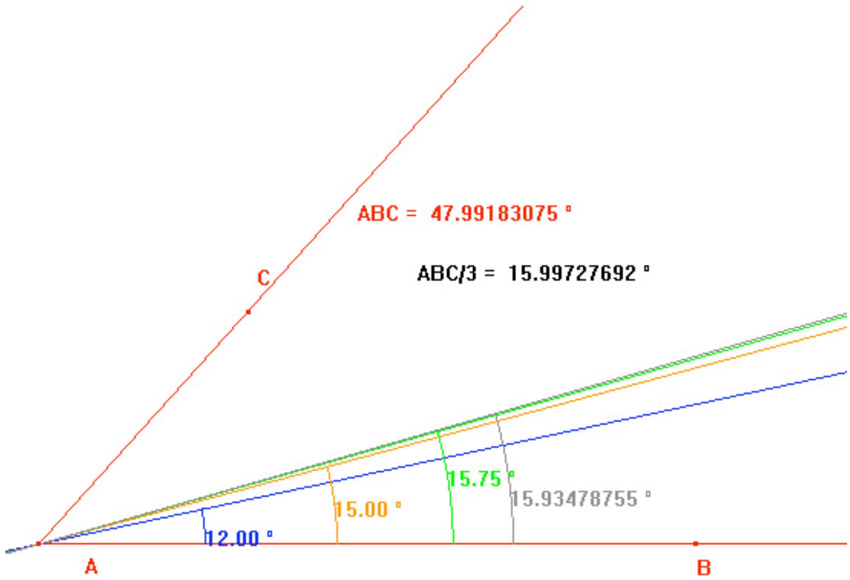

Fig. 8

3. PROSPETTIVE FUTURE

Ormai da anni le scuole europee, soprattutto le istituzioni scolastiche dell'Europa del Nord, hanno cominciato a esplorare la possibilità di insegnare materie curriculari in una lingua straniera.

Nello "Schema di decreto legislativo sul secondo ciclo", pubblicato sul sito del MIUR nel marzo 2005 [7], l'articolo 3, comma 3, parla di "insegnamento in lingua inglese di una disciplina non linguistica", e nei quadri orari allegati viene introdotto, nel quinto anno dei Licei, l'insegnamento di una disciplina in lingua inglese, nell'ambito del C.L.I.L, ossia del *Content and Language Integrated Learning*, apprendimento integrato di lingua e contenuti (vedi i siti di riferimento [8], [9], [10]). In questa direzione di innovazione metodologica, seppure a livello iniziale, si inserisce l'esperienza riportata, dove l'utilizzo di strumenti multilinguistici come *Cabri* e lo scambio virtuale di esperienze tra classi europee attraverso le nuove tecnologie di rete sono risultati molto motivanti per lo studio delle discipline coinvolte e, in particolare, hanno permesso di creare un "friendly language and mathematics enviroment" per un uso reale e naturale della lingua straniera.

NOTA: Il contenuto di questo lavoro è stato presentato al convegno *CabriWorld* 2004, Roma, 9-12 settembre 2004.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOYER CARL, *Storia della matematica*, trad. di A. Carugo, Milano, Mondadori, 1982.

[2] EUCLIDE, *Elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, Torino, UTET, 1970.

[3] PAOLA DOMINGO, ROBUTTI ORNELLA, "Dall'assiomatico al virtuale: Cabri Géomètre", *ITER cultura scuola e società*, Roma, anno II n.6 (1999).

SITOGRAFIA

[4] Dimitris Kastaniotis
http://users.att.sch.gr/dkastani/

[5] Four math problems of antiquity
http://users.pandora.be/wiskunde/cabricluster/greek/

[6] History Comes Alive with Technology
http://nsm1.nsm.iup.edu/gsstoudt/nctm/

[7] Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
http://www.istruzione.it/normativa/2005/dlgs_secondociclo.shtml

[8] ALI-CLIL Progetto Lingue Lombardia
http://www.progettolingue.net/aliclil/index.htm

[9] Laboratorio CLIL
http://venus.unive.it/labclil/

[10] TIECLIL - Translanguage in Europe - Content and Language Integrated Learning
http://www.tieclil.org/