AMEDEO AGOSTINI

De Viribus Quantitatis
di Luca Pacioli

Periodico di Matematiche
Vol. IV, 1924, pp. 165-192

Il « De viribus quantitatis » di Luca Pacioli

Tra le opere di LUCA PACIOLI da Borgo San Sepolcro, gli storici citano (1) — senza dare la minima notizia sul contenuto — il trattato *De viribus quantitatis.* Di tale opera esiste — che si sappia — un'unica copia manoscritta contenuta nel codice n. 250 della R. Biblioteca Universitaria di Bologna: ci proponiamo qui — nell'impossibilità di dare per ora alle stampe il manoscritto completo — di fare una succinta analisi di questo trattato, cercando di porne in evidenza la importanza che esso ha nella storia delle matematiche.

1. Il manoscritto del *De viribus quantitatis* di dimensioni cm. 24 × 16,5, consta di 309 carte delle quali le 4-16 sono occupate dall'indice, le 2 seguenti dalla dedica e le rimanenti dal testo. Nel codice — proveniente dalla biblioteca dell'appassionato bibliofilo GIOVANNI GIACOMO AMADEI († 1768), canonico di S. Maria Maggiore in Bologna — l'amanuense lasciò spesso spazi vuoti per le lettere da alluminarsi, ed è per questa ragione che non ci sono pervenuti nè il nome del personaggio cui l'opera fu dedicata nè l'anno della sua composizione.

(1) B. BONCOMPAGNI. *Intorno alle vite inedite di tre matematici.* Bull. Boncompagni, XII, pag. 404. Il Boncompagni accenna solo al fatto che l'opera del Pacioli contiene problemi aritmetici e geometrici.

H. STAIGMÜLLER, *Zeitschr. Math. Phys.*, XXXIV, *histor. lit. Abhtlg*, pag. 91-102, 121-128.

M. CANTOR, *Vorlesungen*, II, 1913; pag. 308.

La lettera dedicatoria — già pubblicata dal BONCOMPAGNI (1) — permette di stabilire che il *De viribus* fu compilato tra il 1496 e il 1508, poichè in essi si accenna alla edizione manoscritta della *Divina proportione* (1496) e non già alla stampata.

Tale lettera è poi di non lieve importanza per le notizie che l'A. ci fornisce intorno alle sue opere. La data di composizione della *Divina proportione* vi è indicata coll'anno 1496, così che — se non vi fosse da supporre un'errore di copiatura dell'amanuense — la compilazione di tale opera sarebbe avvenuta un anno prima di quello comunemente riportato e desunto dall'edizione stampata del 1508.

Il PACIOLI mette poi in rilievo — come fa in altri punti del manoscritto — l'opera di LEONARDO DA VINCI nel disegnare la prospettiva dei poliedri regolari e ci fornisce una nuova testimonianza del fatto che Leonardo lavorava abitualmente colla mano sinistra. Ma ciò che interessa maggiormente è che la lettera ci dà notizia di un'altra opera — andata dispersa — che il Pacioli aveva condotto a termine all'epoca della compilazione del *De viribus*: la traduzione in italiano degli *Elementi* di EUCLIDE. Benchè a tale traduzione accenni il Pacioli stesso anche in *Divina proportione* (fol. 2, lin. 18-20) e il BALDI, nella vita di Pacioli pubblicata dal Boncompagni (2), lo STEIGMÜLLER nel tratteggiare la biografia del nostro matematico (3) — pur attingendo all'articolo del Boncompagni — tralascia di citare, tra le opere del Pacioli, la traduzione italiana dell'Euclide e, naturalmente, non ne fanno cenno — nelle loro storie della matematica — nè il CANTOR, nè il GÜNTHER.

Ancora dalla lettera dedicatoria apprendiamo che il trattato sul giuoco degli scacchi che viene attribuito al Pacioli, fu scritto effettivamente e faceva parte di un trattato più ampio — purtroppo anche questo disperso — che egli aveva intitolato *de ludis* ovvero *schifanoia* e dedicato a FRANCESCO GONZAGA e a ISABELLA D'ESTE.

(1) *Bullettino* BONCOMPAGNI, vol. XII, 1879, pag. 430-431.
(2) *Bullettino etc.*, vol. XII, 1879, pag. 352, 420, 428.
(3) *Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, XXXIV, *Histh. liter. Abhteilung*, pag. 99.

2. Il *De Viribus quantitatis* è diviso in tre parti:

1) *delle forze numerali cioe de Arithmetica,*

2) *della virtu et forza lineale et geometria,*

3) *de documenti morali utilissimi.*

La prima parte è certamente quella che ha più importanza per la storia della matematica, perchè costituisce la prima vasta collezione di giuochi matematici e problemi dilettevoli.

Qualche esempio isolato di problemi dilettevoli si ha nella letteratura matematica orientale e araba, e solo nel X secolo troviamo una prima breve raccolta di problemi di tal genere nelle *propositiones ad acuendos iuvenes* (1) di ALCUINO — il precettore di Carlo Magno — raccolta che andò certamente per le scuole fondate da Carlo Magno e formò la base di quelle *questioni erratiche* che trovarono posto oltre che nel *Liber Abbaci* di LEONARDO FIBONACCI e in altre opere manoscritte, anche nei migliori libri di aritmetica e algebra del rinascimento.

È solo al principio del secolo XVII che si incontra la prima raccolta a stampa di problemi dilettevoli: quella dovuta a G. G. BACHET DE MÉZIRIAC (2), subito seguita da quelle del VAN ETTEN, LEURECHON, OZANAM, ALBERTI etc.

3. Gli storici — ignari del contenuto del *De viribus quantitatis* di Pacioli — sono concordi nel riconoscere al BACHET il merito di aver per primo fatta una raccolta ordinata di giuochi matematici, mentre tale merito — pur non togliendo al Bachet la priorità della stampa — va completamente attribuito al Pacioli. Questi raccolse infatti, in questa 1ª parte del *De viribus*, una grande quantità di problemi dilettevoli varii, in numero maggiore di quelli che si trovano nelle collezioni anche posteriori a quella del Bachet. Inoltre la maggior parte dei problemi delle prime raccolte stampate sono la riproduzione — alle volte con lievi variazioni nell'enunciato o nel metodo di soluzione — di giuochi già noti a Pacioli tanto che possiamo affermare che gli autori delle raccolte stampate non

(1) *Patrologiae cursus completus.* T. CI, Parigi 1851, col. 1143.

(2) *Problèmes plaisant et délectables*, 1612. Tale opera ebbe anche una edizione recente (1884) curata dal LABOSNE, che è quella cui noi ci riferiremo in seguito.

fecero — in gran parte — che opera di collezionisti, raccogliendo giuochi e problemi — giunti in parte dal buio del medioevo alle fiorenti scuole del rinascimento — o attraverso la tradizione orale di scuola in scuola, o attraverso i manoscritti e i primi trattati stampati.

E che i maestri d'abaco proponessero nelle loro scuole tale genere di problemi per esercitare l'ingegno degli scolari ed attrarne l'attenzione alle discipline matematiche, il nostro autore lo afferma in più punti, come pure ci dice che alcuni dei problemi che riporta sono originali e proposti da suoi scolari in liete brigate.

4. Il testo della 1ª parte contiene 81 esercizi aritmetici, manca — forse per lo smarrimento di alcuni fogli, smarrimento avvenuto certamente prima che il manoscritto venisse rilegato — lo svolgimento di parecchi dei problemi enunciati nell'indice, tra cui uno di grande importanza storica, così enunciato: *con prestezza 10 huomini in quanti modi se possino porre a sedere a taula, ch' mai non seghino una volta commo l'altra et cosi regola a sapere in quanti modi qualunch' altra, multitudine de persone ch' fossero, caso subtilissimo e bello,* che ci avrebbe mostrato come Pacioli conoscesse la formula delle permutazioni circolari.

Come vedremo nell'esaminare il testo, problema per problema, quasi tutti i problemi di Bachet trovano riscontro nel manoscritto di Pacioli, anzi vi troveremo (probl. 24, 25) gli stessi problemi di analisi indeterminata che costituivano finora il pregio maggiore dell'opera di Bachet.

La presenza poi di quadrati magici (probl. 72) fa assumere al *De viribus quantitatis* sommo interesse, perchè colla sua testimonianza e con quella dei manoscritti anteriori esistenti in Bologna serve, come già abbiamo messo in evidenza (1), a mostrare falsa l'asserzione di tutti gli storici, che il primo quadrato magico di cui si abbia traccia in Occidente sia quello che ALBERTO DÜRER incise nel 1514 nella sua *Melencolia* e toglie ogni valore a tutte le numerose pubblicazioni riguardanti tale quadrato magico.

(1) A. AGOSTINI. *Notizie storiche sui quadrati magici,* « Bollettino dell'Unione Mat. Italiana », II, pag. 77.

Quasi tutti i problemi hanno un fondamento nella teoria dei numeri: così mentre i problemi dal 1° al 23° ricorrono esclusivamente ad identità numeriche, i problemi dal 26° al 52° e dal 62° al 66° riguardano o nuove identità, o proprietà dei numeri interi e delle loro operazioni.

Sulle combinazioni, di alcuni numeri od oggetti, sono fondati i giuochi dal 53° al 61° ed esercizi sulle progressioni sono invece quelli dal 76° all'80° e il 73°: il problema 68° ricorre invece ad una proprietà dell'ottagono stellato.

5. La seconda parte consta di 80 questioni (*documenti*) geometriche, seguite da 54 giuochi di carattere fisico-meccanico.

Le questioni geometriche riportano in gran parte note proprietà e costruzioni euclidee o tolemaiche e ben poco vi è di interessante da meritare un esame documento per documento. Non possiamo però passare sotto silenzio il fatto che nei documenti 23, 25, 26, 28 il Pacioli ci dà delle costruzioni approssimate dei lati dei poligoni regolari di 9, 11, 13, 17 lati. Per l'9-gono dà la formola

$$l_9 = \frac{l_3 + l_6}{4},$$

per l'11-gono il lato è dato dalla maggior parte della sezione aurea di $\frac{l_3 + l_6}{3}$, mentre l_{13} è dato dalla minor parte della sezione aurea di $\frac{5r}{2}$. Mentre per tali poligoni ci è possibile riportare le formole di Pacioli — approssimate, come è facile verificare, a meno di centesimi — il testo relativo alla costruzione del 17-gono è talmente corrotto da renderne impossibile la ricostruzione.

6. La terza parte del manoscritto non ha nessun carattere scientifico: dopo numerosi proverbi in latino od in volgare, è riportato: il *lamento de uno inamorato verso una donzella*, cui fanno seguito i *documenti et proverbi mercanteschi;* i *documenti della forza et virtu naturale* comprendente 83 ricette varie e giuochi, tra i quali ci piace ricordare quello che oggigiorno passa sotto il nome di *uovo di Colombo*, perchè il Pacioli (capitolo LII) ne attribuisce la paternità all'architetto *Pippo de ser brunelleschi*; seguono poscia *de problematibus et enigmatibus* contenente anche alcune questioni sulle parentele; e infine i *problemata vulgari a solicitar ingegno et a solazzo* comprendenti 222 indovinelli, ai quali è intercalato l'*Epitaphium Romae in ede divi Bartholomei inter duos pontes.*

Secondo l'indice dovrebbero chiudere la raccolta i problemi:

De far 4 pesi ch' pesi fin 40;

De 5 tazze diversi/pesi ogni di paga loste, ma questi non sono risolti nel testo perchè — come è notato alla fine dell'indice — *iste due ultime habes in libro nostro* (la *Summa*).

Sembrerebbe che questa terza ed ultima parte, pel contenuto — contrastante con quello scientifico delle prime due — fosse apocrifa, tanto più che nella lettera dedicatoria si accenna solo a *forze* aritmetiche e geometriche, ma, se non bastasse la nota finale dell'indice ora richiamata, a testimoniare dell'autenticità, oltre al seguente passo della seconda parte (Capitolo CXII):

Sonni altri modi a scrivere lettere ch' non si possa leger se non a certo modo, commo desotto intenderai, quali per non essere d' ingegni mathematici qui fra le forze lineali non li metto, ma li porremo fra li miraculi naturali con molte altre gentilezze tutte per virtu naturali, commo intenderai, acio insiemi con queste ch' de li numeri et linee son ditte e ch' se diranno, de tutte legiadrie signorili, la presente opera sia compita (fol. 234), sta anche la seguente introduzione al primo « Capitulo » dei *Documenti morali:*

Havendo ditto di sopra in questo, asai, secondo lo intento, de la virtu et forza de luna e laltra quantita, cioe continua et discreta, cioe arimethica et geometria con lor proportione, commo difusamente hai veduto, mi pare non indecente qui sequente metter alcune forze et virtu naturali, quali procedeno da se a se da la loro maestra fondamentale detta natura, ut maxima in omnibus sonat, videlicet natura magistra.

DE VIRIBUS QUANTITATIS

EPISTOLA DELL' AUTORE A....

.... et excellente la quantita.... asai difusamente nella grande nostra opera detta summa de Arismethica, Geometrica, proportioni portionalita (sic), *et alla exc.*[a] *del mio magnanimo peculiare patrone Guido Ubaldo Duca de urbino dicata, et in la amplissima cita de vinegia con tutta diligentia impressa, li anni correndo de nostva salute 1494, et gia per tutto luniverso divulgata, ne fo detto. Et non mancho anchora in la sublime nostra opera detta della divina proportione, nelli anni similmente salutiferi 1496 alo Ex.mo et potent.mo Duca de Milano Ludovico Maria Sforza dicata et con dignissima gratitudine presentata, ne fo discorso con le supreme et legiadrissime figure de tutti li platonici et Mathematici regulari et dependenti, ch' in prospectivo disegno non e possibile al mondo farli meglio, quando bene Apelle, Mirone, Policreto et gli altri fra noi tornassero, facte et formate per quella ineffabile senistra mano a tutte discipline Mathematici acomodatissima del prencipe oggi fra mortali, pro prima fiorentino, Lionardo nostro da venci, in quel felici tempo ch' insiemi a medesimi stipendii nella mirabilissima citta di Milano ci trovammo. Et pero in questo nostro novissimo Compendio detto de viribus quantitatis, cioe dele quantita, non curamo altramente a sua meritoria comendatione dilatatarci. Ma solo in epso atendaremo a ponere et demonstrare li admirandi e stupendi effecti ch' de ditta quantita procedano, si della discreta como dela continua, quali veramente, nel conspecto de ciascuno, non humani, ma divini, sonno da essere existimati E fin ora di loro in scripto non mi sono curato exstenderme. acio gli Idioti splebei medianti quelli non si habbino ali de vestra ex.*[a] *pari etquipparare, per quel comune et sapiente ditto:*

Non omnibus omnia aequaliter distribuenda sunt, cioe che non a ognuno tutte le cose aequalmente non sonno da distribuire. Lo exemplo efficacissimo habbiamo dal summo opifice nostro creatore, el quale, quantunque che l'sole, aqua, aere, terra et altri fructi a buoni et tristi facia comuni, non dimeno a quelli, oltra le comune, anchora in infinite gratie concede, pel qual acto ci demostra ch' asai piu che gli altri gli sonno grati, conciosia anchora che tanto sienno da esser stimate le cose, quanto piu fra gli homini rare se ritroveno. Ma ormai aproximandosi de mia vita lultimi giorni, acio le durate fatighe et assidue vigilie non dovesino al tutto anichilarsi, como e ditto, ali non mediocri affani, posta gia la extrema mano con la egregia, per noi similmente, traductione de latino in vulgare de verbo ad verbum del maximo. Monarcha dele Mathematici discipline megarense Euclide, insiemi col iocondo et alegro tractato de ludis in genere, cum illicitorum reprobatione, spetialmente di quello de schachi, in tuti modi detto schifanoia et alle excellentie del segnior Marquese et Marchegiana di Mantova Francesco Gonzaga e Isabella extense a questi dedicato; Deliberai al presente compendio in segno de efficacissimo servile amore a v. ex.ª dicare, del quale non dubito ch' grandissimo a piacere et consolatione, insiemi con tutta sua ligiadrissima corte, non ne prenda per le divine forze de ditta quantita, ch' in epso si manifestano, et perche piu chiaro suceda sua immensa et delectevole dolcezza, per evitare la scabrosita deli termini suoi latini, non altutti a nostri tempi forse facilmente noti per la carita di lor buoni praeceptori, pero in vernacula et materna nostra vulgar lingua lo dispose, non ch' pero a v.ª ex.ª un piu alto chel ciceronicio stile non saspectasse, ma strecto da compasione a suoi inferiori. Et certamente v. ex.ª fra ognaltro se porra gloriare appresso se havere non minor gioia fra le Mathematici discipline che fra le altre preciose materiali gemme si sia el degno Diamante. Et con quella sua consueta et in nata humanita, prego se degni acceptarlo et del suo umil servo, non che de gli altri, alle volte si ricorde, alla quale de continuo in tutti i modi se recomanda quae foelix ad vota semper valeat.

EFFECTI DELE FORZE NUMERALI

I. De un numero in doi parti.

I primi sei problemi consistono nel ritrovare le parti in cui — dai partecipanti al giuoco — è stato diviso un numero proposto, ossia nel ritrovare più numeri, nota che ne sia la somma. Per giungere allo scopo, il proponente fa eseguire sul numero e sulle parti in cui è stato diviso, una successione di operazioni aritmetiche il cui risultato permette al proponente di ritrovare le parti incognite. Così, nel presente problema, diviso il numero noto a in due parti x ed y $(x > y)$, incognite al proponente, si fanno eseguire mentalmente le operazioni seguenti: si aggiunga l'unità ad a e si moltiplichi il numero ottenuto per a, da tale prodotto si tolgano successivamente i prodotti $2x$ e ay. Il proponente si faccia quindi dire il risultato di tali operazioni: se dividerà mentalmente tale risultato per $a-1$, il quoziente sarà x e il resto y.

Tale complesso di operazioni le compendieremo — come faremo in seguito — in una identità, e precisamente nella

$$\frac{a(a+1)-(2x+ay)}{a-1}=x+\frac{a-1}{y}, \quad (y+x=a).$$

Tale procedimento si trova usato anche in FIBONACCI [1] e in GHALIGAI [2]. Anzi Fibonacci risolve la questione anche ricorrendo alla relazione

$$\frac{a(b+1)-(ax+by)}{b-a+1}=x+\frac{y}{b-a+1}, \quad (x+y=a),$$

ove b è un intero maggiore di a.

II. De un numero diviso in 3 parti.

La ricerca delle tre parti x, y, z in cui è stato diviso il numero noto a è fondata sulle relazioni

$$\frac{a(a+1)-[2x+ay+(a+1)z]}{a-1}=x+\frac{y}{a-1}; \quad z=a-x-y,$$

---

(1) *Liber abbaci* - Roma, 1857 - pag. 306.
(2) *Practica d'arithmetica* - Firenze, 1548, fol. 67, n. 38.

cui ricorre anche il GHALIGAI (*op. cit.*, fol. 67, n. 39-40), per risolvere lo stesso problema.

III. Pur de un numero in 3 parti diviso aliter.

Ricorre alla relazione

$$\frac{a^2 - [2x + (a-1)y + az]}{a-2} = x + \frac{y}{a-2}; \quad z = a - x - y,$$

che di poco differisce dalla relazione

$$\frac{(a^2 + b) - [2x + (a-1)y + az] - b}{a-2} = x + \frac{y}{a-2}$$

che usa il FIBONACCI (*op. cit.*, pag. 307).

IV. De un numero in 3 diviso.

È risolto mediante la identità

$$\frac{a(b+1) - [2x + by + (b+1)z]}{b-1} = x + \frac{y}{b-1}, \quad (z = a - x - y)$$

cui ricorre anche il FIBONACCI (*op. cit.*, pag. 307).

PACIOLO però generalizza mostrando come la identità usata rientri, come caso particolare, nella

$$\frac{a(b+1) - [nx + by + (b+1)z]}{b-n+1} = x + \frac{y}{b-n+1},$$

e nota come tale metodo possa servire anche per indovinare i punti segnati da due o tre dadi qualora se ne conosca la somma (vedi n. XLI). Così pure — assegnando a ciascuna carta da giuoco un numero corrispondente al proprio valore — si potrà indovinare il valore di 2 o 3 carte, qualora si conosca la somma dei numeri corrispondenti ai singoli valori.

V. De un numero diviso fra 4 o vero in 4 parti.

Le parti x, y, z, t in cui è stato diviso il numero a si ritrovano mediante le relazioni seguenti

$$[3a - (3x + 2y + 2z + 2t)] = a - x$$
$$[3a - (2x + 3y + 2z + 2t)] = a - y$$
$$[3a - (2x + 2y + 3z + 2t)] = a - z$$
$$[3a - (2x + 2y + 2z + 3t)] = a - t.$$

Il giuoco può essere fatto anche con carte, dadi od oggetti qualunque.

VI. De un numero diviso in 5 parti.

Posto $a = x + y + z + t + u$, le varie parti in cui è stato diviso a vengono date dalle identità

$$\begin{aligned} \{ 4a - (4x + 3y + 3z + 3t + 3u) \} &= a - x \\ \{ 4a - (3x + 4y + 3z + 3t + 3u) \} &= a - y \\ \{ 4a - (3x + 3y + 4z + 3t + 3u) \} &= a - z \\ \{ 4a - (3x + 3y + 3z + 4t + 3u) \} &= a - t \\ \{ 4a - (3x + 3y + 3z + 3t + 4u) \} &= a - u. \end{aligned}$$

Estende poi tali identità al caso in cui il numero sia diviso in più di 5 parti.

È da notarsi che il Paciolo per costruire le suddette identità come quelle del numero precedente ricorre alle permutazioni circolari, perchè, per esempio, la 4ª è costruita così: *summa insieme p.ª 2.ª 3.ª 4.ª et poi 2.ª 3.ª 4. 5. et poi 3.ª 4. 5. p.ª et poi 4.ª 5.ª p.ª 2.ª et queste 4 summe reca in una, la qual cavarai sempre del quadruplo del numero diviso, el remanente, poi cava del ditto numero diviso, et questo ultimo resto sempre sira la 4ª parte.* Per questo primo gruppo di problemi confronta il probl. VII di Bachet nel quale vengono usati metodi, in parte analoghi a quelli usati dal nostro autore, per ricercare più numeri, nota che ne sia la somma.

VII. Trovare un numero pensato intero.

Nel numeroso gruppo di problemi che seguono il Pacioli ci insegna vari modi per ritrovare un numero pensato da un'altra persona. Anche qui condenseremo in una identità tutte le operazioni da eseguirsi. Indicando con x il numero incognito, esso si ritrova eseguendo le operazioni

$$\frac{x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{2}\right)}{9} = \frac{x}{4}.$$

Le stesse operazioni sono indicate dal Fibonacci (*op. cit.*, pag. 303), dal Tartaglia [1].

VIII. Quando el numero fosse con ℞ (= rotto = frazione).

Fa eseguire nel numero pensato le operazioni indicate dalla identità

$$10[5(2x + 5) + 10] - 350 = 100x,$$

[1] *La prima parte del General trattato di numeri et misure.* Venezia, 1556; fol. 264, n. 197.

operazioni che sono ripetute nello stesso ordine dal BACHET (*op. cit.*, probl. IV) e che già si ritrovano in FIBONACCI (*op. cit.*, pag. 304), e in GHALIGAI (*op. cit.*, fol. 66, n. 36).

Notevole è l'uso che l'amanuense fa del simbolo ℞ per indicare un numero rotto (frazionario) che, in quei tempi, incominciavasi ad usare per indicare la radice quadrata.

IX. A trovare un numero senza rotto.

Sul numero x sono fatte eseguire le operazioni

$$\frac{\frac{3\frac{3x}{2}}{2}}{9}=\frac{x}{4},$$

identicamente a come insegna FIBONACCI (*op. cit.*, pag. 303-304) prima e poi GHALIGAI (*op. cit.*, fol. 66, n. 34 e 36) e TARTAGLIA (*op. cit.*, fol. 264, n. 198) e quindi BACHET (probl. II).

X. De trovare un numero senza rotto.

È una semplice variante del metodo usato nel n.° precedente e che si trova usata anche dallo CHUQUET [1]. La identità usata è

$$\frac{3\frac{3x}{2}}{9}=\frac{x}{2};$$

la quale serve al BACHET per formulare il suo I problema.

XI. A trovare un numero in tutti modi.

Si scinda il numero pensato z in due parti incognite x ed y sulle quali si fanno eseguire le operazioni indicate dall'identità

$$x^2+2xy+y^2=z^2.$$

XII. Un numero in tutti modi.

Con metodo analogo al precedente, si ricorre all'identità

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=z^3.$$

XIII. A trovare un numero in tutti modi.

Posto $z=x+y+t+....+u$, ricorre alla relazione

$$xz+yz+tz+....+uz=z^2.$$

---

(1) *Triparty en la science des nombres* (problemi). « Bull. Boncompagni », T. XIV, pag. 456, probl. 155.

XIV. A trovare un numero in tutti i modi.

Si usi la identità

$$\frac{\left(\frac{z}{2}+a\right)^2+\left(\frac{z}{2}+a\right)\frac{z}{2}}{z+a}=\frac{z}{2}+a,$$

ove z indica il numero da indovinare ed a un numero qualunque noto. In CHUQUET (*op. cit.*, pag. 459, probl. 162) il problema è risolto in modo consimile usando invece dell'identità più semplice

$$\frac{2z+a}{2}-\frac{z+a}{2}=\frac{z}{2},$$

mentre TARTAGLIA (*op. cit.*, fol. 264, n. 200) ricorre all'identità ancora più semplice

$$\frac{2z+a}{2}-\frac{a}{2}=z.$$

XV. A trovare un numero in tutti modi.

Indicando con z il numero da indovinare e con x un numero arbitrario incognito, fa uso della relazione

$$\left(\frac{z}{2}+x\right)^2-(z+x)x=\left(\frac{z}{2}\right)^2.$$

XVI. A trovare un numero in tutti modi.

Scomposto il numero z da indovinare in due parti incognite x ed y, si fanno eseguire le operazioni seguenti

$$2zx+y^2-x^2=z^2.$$

XVII. A trovare un numero in tutti modi.

Scisso il numero z in una parte nota a ed in una incognita x si ricorre alla identità

$$\frac{(z+x)^2-a^2}{z}=4x.$$

XVIII. A trovare un numero pensato in tutti modi.

Posto $z=x+y$ si ha il numero z da trovarsi mediante l'identità

$$\frac{x^2+y^2}{2}-\left(\frac{z}{2}-x\right)^2=\left(\frac{z}{2}\right)^2.$$

XIX. A trovare un numero pensato in tutti modi.

Introducendo un numero x, ad arbitrio dell'interlocutore, si fa uso dell'uguaglianza

$$\frac{(z+x)^2+x^2}{2}-\left(\frac{z}{2}+x\right)^2=\left(\frac{z}{2}\right)^2.$$

XX. A trovare un numero pensato sano (intero).

È risolto con metodo analogo all'*effecto* VII.

XXI. A trovare un numero pensato in tutti modi.

Ricorre ad una regola *quasi in tutte le scole.... divulgata* che si ritroverà applicata nell'*effecto* XXIIX: essa si fonda sulla proprietà $\frac{ab}{a}=b$ e quindi $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d \dots z}{a \cdot b \cdot c \cdot d \dots}=z$ ove z indica il numero da indovinare.

XXII. A trovare un numero pensato non più de 105.

Eseguite le divisioni

$$z=3q_1+r_1, \quad z=5q_2+r_2, \quad z=7q_3+r_3,$$

si moltiplichino ordinatamente i resti r_1, r_2, r_3 per 70, 21, 15, indi si divida la somma di tali prodotti per 105 ed il resto che si otterrà sarà il numero z. Infatti, nell'ipotesi $z<105$, è

$$\frac{70z+21z+15z}{105}=z+\frac{z}{105}.$$

Tale problema — con una lieve variante nel procedimento della risoluzione — si ritrova anche in Tartaglia (*op. cit.*, fol. 264, n. 199) e identico in Fibonacci (*op. cit.*, pag. 304). In Bachet (probl. VI) si trova applicato lo stesso metodo ma per un numero minore di 60: egli fa dividere il numero pensato per 3, 4 e 5 e fa moltiplicare i resti corrispondenti per 40, 45 e 36.

XXIII. A trovare un numero pensato non più de 315.

Diviso il numero z successivamente per 5, 7, 9 e chiamati con r_1, r_2, r_3 i corrispondenti resti, si ha

$$\frac{126r_1+225r_2+280r_3}{315}=q+\frac{z}{315},$$

algoritmo seguito anche da Fibonacci (*op. cit.*, pag. 304) per la risoluzione della stessa questione.

XXIIII. Un numero ch'partito per 2, 3, 4, 5, 6 sempre avanzi 1 et partito per 7 avanzi nulla.

Il problema porta alla equazione diofantea

$$z = \frac{60x + 1}{7},$$

che viene risolta col solito metodo facendo variare x da 1 a 7. Il PACIOLI estende poi il problema fino a 11 e a 23 *et queste,* dice, *sono quelle domande ch' se sogliano dare alle volte per le scole dali preceptori ali scolari quando dicano: una dona vendeva ova in piaza, un giocando a palla a caso li le ruppe tutte et domandata dal rectore per farlile pagare quanti eli fossero, li disse non sapere ma che, quando se parti da cassa, facendo suo conto per 2 al soldo li navanza 1 et a 3 restava pur 1 et (a) 4 pur 1 et a 5, 1 et a 6, 1 et a 7 niuno. Si domanda quanto erano in tutti li ovi.* Tale problema — che insieme col seguente formano casi particolari del problema più generale (¹): determinare un intero x che diviso per altri interi $a_1, a_2 .... a_n$ dia rispettivamente per resti $r_1, r_2 .... r_n$ — è di origine indiana e si ritrova in FIBONACCI (*op. cit.*, pag. 281, 282), CHUQUET (*op. cit.*, pag. 452, probl. 143) e in quasi tutte le opere matematiche del rinascimento.

Il TARTAGLIA (*op. cit.*, fol. 257, n. 146) a proposito di questo problema dice: *Questa tal ragione è proposta da molti (ma sotto altre materie) et tutti per alquanto ho visto la concludeno in questa forma dicendo, che si debba multiplicar 6 fia 7 fa 42 et a questo 42 vogliono che vi si aggiunga 1, fa 43 et questo vogliono poi che si moltiplichi per 7 che fara 301 et tanto concluderiano che sariano le dette pecore, il qual numero in effecto ha le adimandate condizioni, nondimeno tal sua regola, over modo non val un bezzo et è cosa ridiculosa, perchè tal regola non serve salvo che in questo solo caso trovato a tastoni come costumano molti, pur tai solutioni, anchorche non siano di alcun valore fanno a questo bene, che provocano qualche altro a ricercarvi regola generale, over particolare, come hanno fatto a me.* Espone quindi la sua regola *trovata alli 14 di giugno 1554* che coincide con quella del PACIOLI e del BACHET (*op. cit.*, II parte, probl. I). TARTAGLIA applica poi la regola anche parlando di ova, alla ricerca di un numero multiplo di 5 o di 11 ma che diviso per qualunque numero inferiore a 5 o a 11 dia per resto 1 (*op. cit.*, fol. 258, n. 147, 148).

(¹) U. SCARPIS, *Numeri primi e analisi indeterminata* (Cap. II, § 7; Cap. III, § 9) in « Questioni riguardanti le matematiche elementari » di F. ENRIQUES.

XXV. A trovare un numero ch' partito in 2 avanza 1, in 3, 2, in 4, 3, in 5, 4, in 6, 5, in 7 nulla.

Cerca il M. C. M. dei numeri 2, 3, 4, 5, 6 e stabilisce la equazione

$$\frac{60x-1}{7}=z$$

e nota che il problema si può enunciare come il precedente parlando di una paniera di ova, ma *bisognarebbe fose una panera magior del sacco del gonella*.(?).

Tale problema si ritrova tanto in Fibonacci (*op. cit.*, pag. 282) che dà anche il caso di 11, quanto in Ghaligai (*op. cit.*, fol. 66, n. 26) e nel Mss. 1228 della Universitaria di Bologna [1] e in Tartaglia il quale osserva che *molti pratici.... concludono che erano ovi 119 ma non dicono con che regola hanno ritrovato il detto 119, et questo procede, che tal numero l' hanno ritrovato a tastone, come fanno li ciechi di ragioni, ma poichè tai ragioni non sono da poterne cavar nessun costrutto di istimazione, et pero non voglio star a perder tempo in cercar di trovar regola alla solutione di queste* (*op. cit.*, fol. 258, n. 150). Tartaglia non aveva tutti i torti di notare ciò, poichè il problema non sempre è possibile. Benchè sia probabile che il problema sia stato risolto *a tastone* tuttavia è notevole il fatto che Pacioli estende il problema ai casi di 11 e 23 e nulla ha vietato che Bachet (probl. II della 2ª parte) lo riportasse senza alcuna osservazione.

XXVI. A trovare un numero pensato quando sia perfecto.

Si fa dire dei limiti entro cui cade il numero pensato e calcola i numeri perfetti che sono entro tali limiti.

XXVII. A trovare un numero per virtu de unità.

Fa eseguire sul numero tutte le operazioni possibili mentre egli le eseguisce sulla *sancta unita madre regina et fondamento di tutti*: il quoziente dei due risultati è il numero pensato.

Tale metodo si trova usato anche in Fibonacci (*op. cit.*, pag. 308, 309) per la risoluzione dello stesso problema e di poco differisce quello usato da Bachet (probl. V): questi invece di fare operare il proponente sull'unità, lo fa operare su un numero qualunque.

Il Pacioli mostra come in tali problemi si possano applicare anche i Capitoli della *cosa* ma rimanda alla sua *magna opera....*

---

[1] Il Ms. contiene una raccolta di problemi vari; al fol. 11_2 porta la data 1481. Il problema in parola è riportato al fol. 18_2 e 43_1.

perche in questo intendemo solo a ponere cose ben digeste extracte de le speculationi acio dieno dilecto et insiemi grande admiratione de le lor miraculose forze numerali (fol. 51, r.).

XXVIII. A far trovare a ponto el numero pensato in tutti modi.

Fa eseguire sul numero moltiplicazioni e divisioni che portano alla identità

$$\frac{z \cdot a \cdot b \cdot c \dots}{a \cdot b \cdot c \dots} = z,$$

però ch' ogni unita travagliata in questo modo sempre torna dove era.

XXIX. Per un numero pensato a far venire ogni numero.

Questa regola procede da la forza del repiego (scomposizione in fattori), infatti per fare avere 100 fa eseguire sul numero z pensato le operazioni

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot z}{z} \cdot 5 = 100.$$

XXX. De numero pensato moltiplicato più volte gli suoi producti per diversi o medessimi numeri trovare l'avenimento partito.

Fa moltiplicare il numero z pensato per più numeri e intercala tra le operazioni la divisione per z: chi fa il giuoco saprà così indovinare il risultato delle operazioni eseguite. Anche FIBONACCI insegna tale metodo a pag. 308, 309 (*op. cit.*).

PACIOLI osserva che a tale giuoco si può fare partecipare un bimbo, *havendo tu amaestrato il fanciullo che a cenni ovver parole ovvero con lo numero dele mani voltandoli tu le spalle con tua man didietro.... commo io t' insegnai nella nostra magna opera impressa de ponere a le mani* (digitazione). Parla infatti di *uno ferrarese chiamato Giovane de Jasone el qual havea un suo fanciullo che lavia a cunabulis instructo in simili gentilezze.... in vinegia.... faciva in casa de qualche gentilhuomo et gentildonna simili effecti in modo che loro predicavano ch' quel fanciullo aveva uno spirito famigliare ch' gli revelava tutte queste cose,* però *quando faciva simil cose guardava molto bene ch' non vi fosse persona ch' gli paresse ch' lo comprendesse.*

XXXI. Per un numero pensato faccia lamico di quello ch'operatione si voglia se mille anni durasse sempre sapere quanto lui habbi a le mani.

Fra le operazioni fatte liberamente dall'amico si fa intercalare una moltiplicazione per 10 e l'aggiunta di un numero noto così, che conosceremo il resto di una successiva divisione per 10. Su tale resto si fa poscia operare l'amico a suo piacere, mentre tacitamente si eseguiscono sul resto le operazioni indicate da questo.

XXXII. De doi numeri ch'multiplicato luno in laltro sempre fara la summa del producto le figure ch'voli.

È un riassunto, con passi *de verbo ad verbum* dell'art. 12 della distinctio 2ª, tractatus V della *Summa*.

Pone fine a tal genere di problemi per dare *legiadri et dilectevoli giuochi matematici como intenderai quali medesimamente tutti la forza del numero tutti absolve.... Et se piu de ditte forze* (su cui ha basato gli *effecti* precedenti) *di numeri fortemente speculative avere desii alla nostra grande opera recorirai* fondandosi sulle proprietà enunciate specie nell'art. 1° del 6° trattato della 6ª distinzione e nell'art. 5° del 2° trattato della 7ª distinzione.

XXXIII. Prendasi numero di ch'denari si voglia et spendinse inch'si voglia senza alcuna interrogatione saper dire ch'numero di cose habbia comprato.

È risolto con una semplice proporzionalità come in TARTAGLIA (*op. cit.*, fol. 264, n. 202).

XXXIIII. A finire qualunch'numero nanze al compagno a non prendere più de un terminato numero.

Il giuoco trattato è il seguente: due alternativamente prendono uno ad arbitrio dei punti segnati da un dado, vince chi raggiunge prima un certo numero senza oltrepassarlo.

PACIOLI esamina la probabilità di vincita di chi è primo e assicura la vincita purchè si seguano certe *scale* di numeri: così per giungere prima a 30 si devono raggiungere successivamente, non prendendo più di 6 per volta, i numeri 2, 9, 16, 23.

Et per trovare ditte scale, in questo et in ognaltro, tien questo modo: sempre partirai el numero ch'si vuol fare per uno piu ch'non si prende e lavanzo de ditto partimento, sempre sia prima scala. Tale regola è riportata anche dal BACHET (probl. XXII).

XXXV. De saper trovare 3 varie cose divise fra 3 persone et 4 divise fra 4 et de quante vorrai.

Distribuiti i numeri 12, 24, 36 fra le tre persone, sia x il numero toccato a chi ha la prima cosa, y il numero di chi ha la seconda e z il numero toccato a chi ha la terza: su tali numeri si fanno eseguire le operazioni

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}$$

la qual somma, secondo le varie combinazioni, può essere uguale a uno dei numeri 23, 24, 25, 27, 28, 29 e quindi in corrispondenza al risultato si indovina la cosa posseduta da ciascuno dei tre.

PACIOLI finisce dicendo: ***credo a più tua memoria asettarla*** (la regola) ***in versi***, ma nel manoscritto mancano i versi, come non è fatto cenno del come trovare 4 o più cose distribuite fra 4 o più persone, come promette l'enunciato.

XXXVI. Quando a cada uno se dia numero ch'non passi una sola figura cioe un digito.

Assegnata a ciascuna cosa uno dei tre numeri a, b, c minori di dieci si fanno eseguire sui numeri le operazioni

$$10 \{ 5(2a + 6) + 10 + b \} + c - 350 = 100a + 10b + c$$

il risultato ci dirà le cose possedute da ciascuna persona.

Tale giuoco si trova anche in FIBONACCI (*op. cit*, pag. 307, 308) che la riconduce, come il GHALIGAI (*op. cit.*, fol. 67, n. 41), a trovare le tre parti in cui è stato diviso un numero (vedi II, III, IV); mentre il CHAPELANI [1] ed il TARTAGLIA (*op. cit.*, fol. 262, n. 191) fanno eseguire le stesse operazioni che usa il PACIOLI. Il BACHET usa lo stesso metodo (probl. XII) ma con una leggera estensione.

XXXVII. Commo el modo precedente se po far con fave et quartaroli.

Per li idioti et quelle ch'non sano aboco distribuisce, invece che i numeri del XXXV, una corrispondente quantità di *fave o vero quartaroli o altra moneta* su cui fa eseguire le operazioni richieste.

XXXVIII. De trovar ponti de doi Dadi.

Sui punti x ed y dei due dadi si eseguiscono le operazioni

$$5(2x + 5) + y - 25 = 10x + y,$$

come insegna anche il TARTAGLIA (*op. cit.*, fol. 263, n. 124).

XXXIX. De uno ch'divide 10 denari fra doi, sapere quanti nara per uno o vero li divide in mani.

Si eseguiscono le stesse operazioni del numero precedente.

---

(1) *Libro di aritmetica di Piero Jachomo di Maestro Antonio di Michele Chapelani da Bologna strazarolo*, fol. 132. Opera scritta nel 1464 e contenuta nei Mss. 1612 della Bibl. Univ. di Bologna.

XL. De doi cose una per mano divise o ver doi numeri in equali, pero et inpero senza alcuna interrogatione sapere.

Assegnati a ciascuna cosa un numero, uno pari e uno dispari, si fa moltiplicare il numero che compete ad una persona per un numero dispari e il numero che compete alla seconda persona per un numero pari e ci si fa dire la somma dei prodotti: se questo è pari la prima persona ha l'oggetto cui è stato assegnato il numero dispari, se è pari essa ha l'altro oggetto, e *mai non falla questa regola in infinitum, la qual regola sia fondata sopra la 22ª, 29ª, 30ª del 9º de Euclide.*

E tale regola ce la dà anche CHUQUET nel problema n. 158 (*op. cit.*, pag. 457) e il BACHET (probl. IX).

XLI. A trovare 3 numeri o vero el ponto di 3 Dadi overo 3 cosse varie fra 3 distribuite.

Ad un modo di risolvere tale questione il PACIOLI ha già accennato al n. IV, qui ricorre alle operazioni

$$10\,|\,5(2x+5)+y\,|\,z-250=100x+10y+z$$

o anche

$$10\,|\,5(2x+5)+10+y\,|+z-350=100x+10y+z$$

ove x, y, z indicano i tre numeri, naturalmente minore di 10.

Tale giuoco è condotto collo stesso metodo sia da FIBONACCI (*op. cit.*, pag. 304), che da CHAPELANI (*ms. cit.*, fol. 180, n. 320) come anche da CHUQUET (*op. cit.*, pag. 458, n. 160), da GHALIGAI (*op. cit.*, fol. 66, n. 36 tris), da TARTAGLIA (*op. cit.*, fol. 263, n. 192), da BACHET (pr. XII).

XLII. A trovare uno anello fra piu persone et altra cosa per la regula de 3 Dadi.

Assegnato un numero x a ciascuna persona, un numero y a ciascun dito e un numero z ad ogni nodo di un dito, l'indovinare chi ha l'anello e in quale dito e nodo questo è stato posto, è riportato al metodo usato nel numero precedente. Tale metodo è pure usato dagli autori ivi citati.

XLIII. Al medesimo caso aliter pervenire.

Colle stesse convenzioni usate nel numero precedente, ricorre alle uguaglianze

$$10\,[10\,|\,5(2x+5)+10+1\,|+y]+z-3500=1000x+100+10y+z$$

$$10\,[10\,|\,5(2x+5)+10+2\,|+y]+z-3500=1000x+200+10y+z,$$

avendo assegnato il numero 1 alla mano destra e il numero 2 alla mano sinistra.

XLIIII. A sapere senza interrogatione alcuna quanti denari o altro, lhuomo habbia in mano.

Ne fa passare da una mano all'altra tanti fino a che non resti in una mano il doppio di un numero noto: un procedimento analogo, ma più generale, usa il BACHET (probl. XIII, XIV). Il problema non è che una applicazione della divisione di un numero in parti proporzionali ad un numero dato. Confronta anche CHAPELANI (*ms. cit.*, fol. 175).

XLV. A sapere senzaltra interrogatione un numero ch'ale mani de lamico.

Come il precedente, ma *in infiniti modi porrai regere nelli quali non curo molto dilatarne perch' non parano ala brigata forze troppo nascoste ne lontane dalo intellecto Avenga ch' a presso al vulgo et plebei sianno asai existimati et presertim apud mulieres.*

XLVI. De uno ch'a un cassieri fa 3 domande in numero et una vuol si satisfaccia.

In una sol volta rispondere alle domande:

1) dammi tante monete quante ne ho in mano,
2) dammene tante fino ad averne 40,
3) regalamene 20.

Dando 60 monete si assolve il problema che è dovuto a GIROLAMO SAVELLI da Siena, cassiere al banco delli Spanochi a Roma, scolaro di Pacioli.

XLVII. De un cassieri ch'pone in taula alquante poste de denari a un bel partito.

Disposti 100 ducati in 20 monticelli, 4 da 1 ducato, 4 da 3, 4 da 5, 4 da 7 e 4 da 9: vincerà i ducati chi riuscirà a prenderne 30 prendendo 5 monticelli. Il problema fu posto così da CARLO DE SANSONE, scolaro del Pacioli, ed è *impossibile per la 24 del nono libro del nostro philosopho Euclide, pero ch' numeri dispari per numero impari insieme gionti fanno sempre disparo.* Il giuoco può essere fatto anche usando carte.

XLVIII. Ch'pur un altro pone alquante altre poste pare.

La somma è divisa in monticelli contenente ciascuno un numero pari di ducati; prendere tanti monticelli da avere 31 ducati: *per 22 del 9°* (di Euclide) *sia impossibile, peroch' numeri pari sempre faranno pari.* Tale questione fu posta da *un mio conterano.... discipulo nel 1486, siando in Napoli, chiamato* CATANO *de* ANIBALLE CATANI.

XLIX. De doi a portar pome ch'più n'avanza.

Si tratta di portare 90 pomi lontano 30 miglia mangiandone uno per miglio e non potendone portare che 30 alla volta: trovare il mezzo perchè rimangano dei pomi.

Tale questione corrisponde alla *propositio LII* di ALCUINO, soltanto che Alcuino parla dei moggi di frumento da trasportarsi con un cammello.

L. De 3 navi per 30 gabelle 90 mesure.

Simile al precedente, come le due questioni seguenti.

LI. De portar 100 perle 10 miglia lontano 10 per volta et ogni miglio lascia una.

Como si fa francarne più si possa.

LII. El medesimo con più avanzo, per altro modo.

LIII. A partire una botte de vino fra doi.

Dividere a metà una botte da 8 *some* avendo a disposizione solo una botte da 3 *some* e una da 5 *some*. Tale problema si trova anche in autori anteriori come in CHAPELANI e nello CHUQUET (*op. cit.*, pag. 460, n. 165) e poscia nel GHALIGAI (*op. cit.*, fol. 63, n. 20) e nel TARTAGLIA (*op. cit.*, fol. 255, n. 132, 133) il quale espone anche il caso di dividere 24 oncie di balsamo, avendo solo tre misure rispettivamente da oncie 5, 11 e 13.

Non mancavano quindi gli esempi al BACHET per formulare il suo III problema della II parte.

LIV. A partire un altra botte tra doi.

Dividere una botte da 12 *some* con una da 5 e una da 7 *some*.

LV. De doi altri sotili divisioni de botti como se dira.

Divisione in due parti uguali di una botte da 10 some avendo due botti una da 4 e l'altra da 6 *some*. L'altro caso considerato è quello di una botte da 12 avendo a disposizione due botti, una da 4 e l'altra da 8 *some*.

LVI-LX. De giudei christiani in diversi modi et regole a farne quanti se vole.

Posse anchora mostrare quanto sia utile haver la notitia della forza de numeri in pratica et a mente, quando commo intervene ale volte ch'in mare naviga ch' per fortuna bisogna aleviare el legno o de robbe o de persone acio tutti non perischino... alora siando el pericolo, ne quali asai volte me so senza questo habito retrovato, quando ali servizi delo egregio huomo Ant.° rompiaci da la giuderia *di venegia me retrovai, non si guarda alle robbe se non a quel chel patrone dela barcha over nave, dici, cioe quando dici brigata recomandimici a Dio. La barcha non po piu, tutti siamo per annegare se qualcum di noi non aliba, cioe non scemi o ver scarchi. Io non sforzo niuno ond'e men male sia ch' di noi qualcuno perisca ch' tutti, et perch' in mare ognuno teme Idio et non si fa ad alcuno violentia. Juxta illud daviticum: qui navigant mare navibus ipsi viderunt opera Dei et mirabilia eius in profundum. Et pero fanno per sorta, chi prima debia esser in aqua gittato, al conto a bruschette.*

Così ha inzio l'*effecto* LVI: in tale passo il Pacioli ci dà una notizia importante sulla sua vita giovanile. Egli fu, da giovane, come accenna anche nella *Summa*, a Venezia al servizio del commerciante Antonio Rompiasi e per conto di tale commerciante viaggiava sulle navi trasportanti merci ed è forse negli intervalli tra un viaggio e l'altro che egli istruiva i figli del Rompiasi nelle matematiche.

Negli *effecti* dal 56° al 60° è contenuto un gruppo di problemi dilettevoli che fanno capo ad un unico enunciato: La ciurma di un veliero è composta da un certo numero di cristiani e da un certo numero di ebrei; sopravvenuta una forte tempesta, e venuta a mancare la zavorra, il capitano raduna tutti i marinai e li convince della necessità di gittare a mare parte della ciurma lasciando alla sorte di destinare i condannati. Saranno destinati ad andare in acqua quelli fra i marinai — disposti tutti in circolo — ai quali, contando per un certo numero, toccherà l'ultimo numero. Il capitano, cristiano, dispone i marinai in modo che nessun cristiano è gettato a mare.

Il Pacioli dà la soluzione pei seguenti casi:

2	cristiani	e 30	ebrei	contando	per 9,
2	»	e 18	»	»	per 7,
2	»	e 30	»	»	per 7,
15	»	e 15	»	»	per 9,

ed è appunto quest'ultimo caso che è anche in altri autori come in CHAPELANI (*ms. cit.*, fol. 121_2, 122_1) il quale parla, invece che di cristiani ed ebrei, di gettoni (*taule*) bianchi e neri; in CHUQUET (*op. cit.*, pag. 453, n. 146) dove è accennata anche alla possibilità del problema qualora si abbiano 18 cristiani e 24 ebrei contando per 10 o per un numero qualunque; in CARDANO (*Opere*, vol. IV, pag. 113), il quale dà al giuoco il nome di *Ludus Joseph*, perchè Egesippo nel III libro della sua *Guerra di Gerusalemme*, narra che con un simile stratagemma si salvasse Giuseppe governatore della città di Jotapata.

Per ricordare meglio il modo di disporre i gettoni o le persone venivano costruite delle frasi mnemoniche in cui ogni vocale indicava — col posto occupato nell'ordine *a*, *e*, *i*, *o*, *u* — il numero di gettoni bianchi e neri o di cristiani e ebrei che si dovevano disporre alternativamente: così il Pacioli per l'ultimo caso dà la frase mnemonica *Populeam virgam mater regina reservat.* E tale giuoco dovette attrarre molto i nostri vecchi del secolo XVI, se il TARTAGLIA, che tratta solo il caso di 15 gettoni bianchi e neri o 15 cristiani e 15 turchi, (*op. cit.*, fol. 264, n. 203), enuncia ben 29 *versi numerali* che forniscono le varie regole contando per 3, fino contando per 12. BACHET (probl. XXIII) riporta solo il caso di 15 turchi e 15 cristiani contando per 9.

LXI. De 3 mariti et 3 mogli gelosi.

L'origine di tale questione risale ad ALCUINO (*propositio*, 17 e 18) e nel caso più semplice si sente ancora oggi proporre nel seguente modo: Un uomo ha con sè un lupo, una capra e un fascio di cavoli, giunge a un fiume, e sulla barca che serve al traghetto può trasportare solo una cosa alla volta, come farà a salvare capra e cavoli?

Sia il problema così enunciato, che il problema dei 3 mariti e delle 3 mogli gelosi si trovano anche in CHUQUET (*op. cit.*, pag. 459, n. 163, 164) e in TARTAGLIA (*op. cit.*, fol. 257, n. 141, 142, 143) che considera anche il caso di 4 mogli e 4 mariti gelosi facendo passare le persone a due a due: ma egli si è sbagliato come lo mostra BACHET (probl. III della 2ª parte). Che il problema delle 4 mogli e dei 4 mariti, così come lo pone Tartaglia, sia impossibile era, però, già noto a PACIOLI che accenna a tale caso colle seguenti parole: *Porrai anchora da te, per tuo ingegno negotiando, disponere di 4 mariti et 4 mogli et cosi di 5 mariti et 5 mogli et sic de quotlibet. Ma per li 4 bisogna la barca possi portar 3 et per 5 ne possi portar 4 o 3 aliter ad impossibile laboratur. et pero fu bello a propore de 4 con la barca de 2 quod non potest ed ancho de 5.*

LXII. Indivinare una cosa pensata over toca.

Disposte tutte le cose (carte, denari, persone ecc.) in cerchio, si fa contare in un senso qualunque a incominciare dalla cosa pensata o toccata: la cosa toccata o pensata sarà sempre la $n+2$, se n sono le cose disposte in cerchio.

LXIIII [1]. De un numero pensato per via de un cerchio.

Analogo al precedente. Cfr. il problema XX di BACHET.

---

[1] Per errore, certo di trascrizione, la numerazione è aumentata di 1.

LXV. Dun mercante ch' a 3 factori et a tutti manda a uno mercato con perle.

Il mercante consegna ai tre fattori rispettivamente 10, 20, 30 perle ordinando loro di venderle a pari prezzo e di riportarne un ugual numero di ducati. I fattori vendono le perle a 6 al ducato e le frazioni a 1 ducato per perla: così essi portano al mercante 6 ducati ciascuno.

LXVI. De uno ch' compra 60 perle et revendele a ponto per quelli ch' gli stanno et guadagna.

Un mercante compra 60 perle per 24 ducati, ossia in ragione di due perle e mezzo per ducato, le rivende nella stessa ragione guadagnando un ducato. Ne vende 30 per 15 ducati e 30 per 10 ducati.

LXVII. Un signore ch' manda un servo a coglier pome over rose in un giardino.

Il giardino ha un certo numero di porte, ciascuna guardata da un portinaio che richiede all' uscita la metà più uno dei pomi o aranci o rose che si hanno: quanti frutti o fiori deve raccogliere il servitore per poterne portare una al padrone? Questo è il problema che si trova in molti autori del sec. XVI con leggere varianti relative al numero delle porte e che in Italia trae origine dal *Liber abbaci* di LEONARDO FIBONACCI (pag. 278), in cui si considera il caso di 7 porte, e si ritrova poi nel Manoscritto di CHAPELANI (fol. 60_1, fol. 125_2), nel manoscritto N. 2433 (fol. 25_1) della Bibl. Univers. di Bologna [1] e nel già citato Ms. N. 1228 (fol. 26_1).

Il Pacioli considera i casi in cui il giardino ha 3 e 5 porte, però *questi simili casi per regola et via ordinaria detta el cataym et anchora algebra et almucabala detta della cosa, difusamente nella magna opera nostra, piu volte sopra aducta, la vemo dimostri solvere, ma perch' in questo delectevole tractato non intendo afatigare gli ingegni al propter quidem ancho loro subtili investigationi, Et pero qui sequente a tutti simili daremo regola generale con facilita et prestezza actuale senza travaglio alcuno mentale.*

LXVIII. Cita ch' a 8 porti ch' cosa convine areperarli.

Un signore ordina a 7 contestabili di occupare una città che ha 8 porte, da ciascuna delle quali partono due strade per due porte. Per ogni porta deve entrare un sol contestabile il quale deve andare a occupare una porta opposta a quella da cui entrò senza incontrarsi con quello che occuperà la sua porta d' ingresso.

(1) Manoscritto di origine senese della fine del XIV secolo contenente problemi vari. In fine sono riportate *le regoluzze del M. Pagolo astrolago.*

La soluzione è data da un intreccio di strade costituenti un ottagono stellato *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*. Le strade da seguirsi da ciascun contestabile sono date da $a \to d$, $d \to g$, $g \to b$, $b \to e$, $e \to h$, $h \to c$, $c \to f$, $f \to a$.

LXIX. A trovare una moneta fra 16 pensata.

Indichiamo con

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ k,\ l,\ m,\ n,\ o,\ p,\ q,\ r$$

le sedici monete: disponiamole in due file di 8 monete

$$\begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ k & l & m & n & o & p & q & r \end{matrix}$$

e facciamoci dire la fila cui appartiene la moneta pensata, sia nella prima fila (p. es. *d*). Formiamo due nuove file prendendo successivamente una moneta dalla fila cui non appartiene la moneta pensata e una dall' altra fila

$$\begin{matrix} k & a & l & b & m & c & n & d \\ o & e & p & f & q & g & r & h, \end{matrix}$$

fattaci dire a che fila appartiene ora la moneta pensata disponiamole nello stesso modo prendendo prima una moneta dalla fila cui appartiene la *d*

$$\begin{matrix} k & o & a & e & l & p & b & f \\ m & q & c & g & n & r & d & h, \end{matrix}$$

prendiamo ora per prima, una moneta dalla fila cui non appartiene *d*

$$\begin{matrix} k & m & o & q & a & c & e & g \\ l & n & p & r & b & d & f & h. \end{matrix}$$

Così facendo la moneta pensata sarà sempre la terzultima della fila cui appartiene. Tale regola è data anche da Bachet (probl. 18, pag. 78-79).

LXX. Un prete ch' inpegno la borscia del corporale con la croci de perle al Giudeo.

Un pievano trovandosi in ristrettezze impegnò ad un ebreo una borsa per corporale con una croce di perle: come contrassegno fu scritto che contando le perle da capo a piedi erano 9 e altrettanto se ne avevano contando dai piedi alle braccia. L' ebreo asportò due perle e il contrassegno valeva ancora: egli aveva asportato una perla per ogni braccio e innalzato i bracci in modo da includervi una perla del tronco.

Naturalmente, come nota Pacioli, tale giuoco si può estendere ad un numero maggiore di perle.

LXXI. Un quadro quale 3 per ogni verso, Diametro e lati et giontovi 3 doventa 4 per ogni verso.

Posti 9 oggetti in quadrato, si sovrapponga a ciascun oggetto di una diagonale un altro oggetto: contando tanto lungo i lati che lungo le diagonali, si hanno sempre 4 oggetti.

LXXII. Numeri in quadrato disposti secondo astronomi ch' per ogni verso fanno tanto cioe per lati et per Diametro: figure de pianeti et a molti giuochi acomodabili et pero gli metto.

A l' astronomia summamente hanno mostrato gli supremi di quella commo Ptolomeo, Albumasar, Ali, Alfragano, Geber et gli altri tutti, la forza et virtu de numeri eserli necessaria et principalmente doverlise acomodare immo senza loro per alcun modo poter fare. Onde ali pianeti tutti separatamente a cadauno hanno trovato numeri per via de figure quadrate esserli apropriati secondo diverse spetie de numeri quali per ogni verso pressi fanno sempre la medesima somma. Ogni figura è poi composta *de tutte le figure numerali excepto la cifra over nulla.*

Il Pacioli dà i quadrati magici di 9 (Saturno), 16 (Giove), 25 (Marte), 36 (Sole), 49 (Venere), 64 (Mercurio), 81 (Luna) e nota che, scrivendo le linee di un quadrato magico alla rovescia, si ha ancora un quadrato magico.

LXXIII. Levare 100 saxa a filo.

Benedecto dal Borgo per cognomento dicto baiardo.... nel 1466, siando alla guardia della cita de Padua, sempre esercitando la sua degna compagn(i)a a cose laudabili commo a saltare, a lanciar dardi et pali de ferro et correre et balestrare etc. una volta fra laltre, chiamati suoi caporali la sera destate per lo fresco dopo cena, gli propose un caso di questa natura con pegno de buon pregio: cioe qual di loro volesse piu presto a levare 100 saxa picolini, o vogliam dire pome o noci, distanti in recta linea una da laltra un paso comune et ponerli tutti da luno deli capi de ditto filo in uno medesimo monte senza gittarli, o vero caminare un miglio qual se presupone passa 2000 comuni deli medesimi della distanzia deli pomi.

L'A. ci mostra come il cammino da percorrere per portare i sassi, uno ad uno, ad uno dei capi sia più lungo di un miglio.

LXXIIII. A trovare una moneta o altra cosa toca per via de quadro situata.

Basterà farsi dire la linea e la colonna cui appartiene la cosa pensata o toccata *et quanto maggiore farai il quadro tanto sia piu bello allo Idiota et rozzo.*

LXXV. A trovare una moneta o altra cosa pensata in quadrilatero piu sotilmente et con piu brevita ch'e possibile.

Se la cosa pensata è nella n^a linea, basterà scambiare le linee colle colonne e farsi dire la colonna cui viene ad appartenere: essa sarà l'n^o elemento di tale colonna.

LXXVI. Uno ch'dopiase una quantita de monete o altre cose: subito dirle.

Siando io ali stipendi della exc^a del Segnior Duca de Milano Ludovico Moro neli agni de.... (1), *venne un certo hebraeo, come susa nel conspecto de gran maestri, et fece alcune belle gentilezze molto exstimate dali astanti, fra le quali fece portare in taula un sachetto de quatrini de parechi migliara per numero et quivi chiamo uno di quelli camarieri et disseli: fa un monte di questi danari in su la taula contandoli in questo modo, cioe prima ne metterai 1 poi 2 poi 4 poi 8 poi 16 et così andarai continuando redopiando sempre la posta antecedente fin quanto ti pare et commo tu non vi ne voli metter piu, dimme lultima ch'vi ponesti et io a una ochiata, senza contarli, te sapero dire a ponto quanti sonno; et qui al si e al no, commo si fa, la brigata inpegna.*

E Pacioli spiega come l'ebreo potesse così sollecitamente rispondere.

LXXVII. Uno ch'quadruplasse.

Somma la progressione geometrica di ragione 4.

LXXIIX. Uno ch'quincuplasse.

Somma la progressione geometrica di ragione 5.

LXXIX. Per una sola regola a sapere la somma della continua et scontinua, para o vero dispara, ch'la termini generalissima.

Dà la regola generale per la somma delle progressioni.

LXXX. De le gentilezze ch'a le volte si fanno per vie naturali senz'altro calcolo.

LXXXI. De fare indivinare alla morra per forza et getti a suo modo el compagno.

Bologna, R. Università.

AMEDEO AGOSTINI

(1) La data non è riportata nel manoscritto.

Gerente responsabile - ARMANDO PASQUALI

Bologna 1924 - Cooperativa Tipografica Azzoguidi