PARTE SECONDA

I PROGRAMMI

10. La distribuzione della materia sui 5 anni.

Per avviare un discorso più specifico sui programmi cominciamo con uno sguardo panoramico al modo in cui la materia è stata distribuita nei cinque anni. Ciò allo scopo di fissare anzitutto l'attenzione sulle grandi linee e sulle questioni che maggiormente sono state dibattute e meritano pertanto chiarimenti, in ispecie con riferimento alle motivazioni dei diversi atteggiamenti di fondo.

La precisazione dei singoli argomenti (o sottoargomenti) e la loro collocazione entro un dato anno di corso (di cui, come detto, è espressamente consentito un riordinamento) potranno più opportunamente formare oggetto di esame dettagliato in una fase successiva. A conclusione di essa, e dei suggerimenti ispirati alle preferenze personali dello scrivente, sarà riportato il testo ufficiale dei programmi approvati negli incontri di Frascati, con a fianco l'indicazione degli eventuali suggerimenti, punto per punto.

Seguirà infine, per alcuni argomenti ove l'esposizione del concetto informatore di qualche « suggerimento » sembrava non sufficiente a delineare il tipo di impostazione didattica auspicata, una « traccia esemplificativa ». Per « traccia esemplificativa » intendo una indicazione sui concetti informatori ed in parte sui modi in cui un argomento potrebbe venir presentato in un libro di testo consono a detti suggerimenti o in lezioni che ne seguissero la linea. Non vanno tuttavia intesi come brani di « saggio » per un possibile libro di testo: senza escludere che qualche parte possa ritenersi utilizzabile anche a tal fine, ritengo in genere che molte cose andrebbero aggiunte o diluite o modificate o ridotte a cenni o soppresse. Infatti, le « tracce » sono fatte pensando a lettori esperti, che potrebbero (se consenzienti) tradurre loro i concetti nella forma adatta (in base a una specifica competenza che non ho) per un libro di testo, o per una lezione, o per una discussione in classe. (Raccomanderei però di guardarsi dall'idea che forse paralizza molti trattenendoli dall'aver coraggio: l'idea che un libro di testo, per essere « accettabile », debba adeguarsi al basso livello medio standard dei libri di testo e ripeterne ossequientemente le deficienze tradizionali).

La distribuzione della materia sui 5 anni dipende anzitutto dalla divisione fra 1° biennio e successivo triennio. In certo senso si può dire che il 1° biennio è inteso come riordinamento e completamento di nozioni in gran parte acquisite, e avviamento ad una visione più sistematica; il triennio inquadra le cose apprese e gli argomenti nuovi in modo più organico, lasciando agio in fine di affacciarsi al di fuori dell'orizzonte del « programma minimo » con un argomento facoltativo. Si ricordi che, come estensione e metodo se non come argomenti, la materia del triennio differirà a seconda dei tipi (o indirizzi) di licei.

La distribuzione del carico fra i diversi anni è risultato probabilmente equilibrato, in definitiva, dopo qualche spostamento correttivo. Per il quinto anno si sono dovute conciliare due esigenze contrastanti, benchè entrambe ispirate all'imminenza dell'esame di licenza. Infatti, gli argomenti conclusivi (come i cenni di calcolo differenziale) che costituiscono materia per tale esame, secondo le norme vigenti devono essere « materia dell'ultimo anno », mentre sarebbe più opportuno, nell'interesse sostanziale degli studenti, che essi fossero anticipati al penultimo anno per consentirne una migliore, non affrettata, assimilazione (riprendendo l'argomento anche nel quinto anno). La soluzione adottata sembra contemperare alla meglio queste due esigenze contrastanti.

In tutti gli anni figurano sia argomenti di carattere algebrico-analitico che argomenti di carattere geometrico; nei programmi del triennio essi sono frammisti nell'elencazione; in quelli del primo biennio sono separati (contrassegnati con A e B rispettivamente) ma (ripetendo ciò che è detto al riguardo nelle Avvertenze) « *il carattere unitario della materia potrà essere sottolineato alternando argomenti prevalentemente algebrici con argomenti geometrici affinchè gli sviluppi formali dei primi trovino applicazione ed illustrazione nei secondi, e viceversa i problemi geometrici facciano sorgere in modo naturale l'esigenza dei procedimenti algebrici atti a risolverli* ».

Le nozioni più generali sono tutte menzionate esplicitamente soltanto nel programma del 1° biennio. (Insiemi e corrispondenze nel I anno; gruppi anelli, corpi, ed eventualmente reticoli e spazi metrici nel II); beninteso, solo nozioni elementari e illustrazioni su esempi. Quanto al triennio vale il cenno delle Avvertenze: « *il linguaggio della teoria degli insiemi, il concetto di corrispondenza, le* *strutture già apprese anche se non esplicitamente menzionate, troveranno anche nel triennio naturali applicazioni* ».

L'introduzione dei diversi campi di numeri ha costituito il punto più controverso. Non però sulla questione fondamentale: di includere o meno nel programma la trattazione « rigorosa » dei numeri reali (cioè: nel modo di Dedekind e simili); al riguardo fu senz'altro convenuto che ci si doveva limitare a una *introduzione intuitiva* dei numeri reali, salvo riprendere il discorso in sede critica come « argomento complementare ». E infatti nell'elenco di tali argomenti figura « Varie forme di costruzione dei numeri reali » (peraltro, trattandosi di elencazione esemplificativa, la scelta sarebbe stata comunque possibile; l'inclusione nell'elenco significa solo che si è ritenuto meritasse, come molti altri, particolare menzione). Assai dibattuto fu invece se introdurre subito i numeri reali all'inizio del I anno, o se invece seguire (nonostante la decisione precedente) l'idea di introdurre in due tempi successivi, prima i soli numeri razionali (nel I anno) e poi gli altri (nel II anno). Questa opinione ha prevalso (e spiegherò perchè mi sembra pregiudizievole). Quanto ai numeri complessi, la loro introduzione nel III anno o nel IV era legata ad altre collocazioni: furono messi nel III (in quanto la geometria nello spazio andò al IV) e ciò consente di completare nei primi tre anni il campo dei numeri che servono. Più diverse sono invece le opinioni sul *modo* di introdurre e illustrare i numeri complessi (e ne riparleremo); ciò si ripercuote notevolmente sulla connessione fra i diversi argomenti (soprattutto del III anno).

Altri argomenti algebrico-analitici: calcolo letterale, classi di resti, ecc. (I anno); polinomi, funzioni razionali, equazioni di 1° grado ecc. (II anno); radicali, equazioni di 2° grado, funzioni goniometriche ecc. (III anno); funzioni reali (in partic. esponenziale e logaritmo), limiti e derivate (IV anno); integrale (V anno).

Il discorso sulla geometria è più difficile, perchè, a seconda del punto di vista e del metodo che uno pensi seguire, ci può essere una sola Geometria o due o parecchie. Infatti, nel programma del II anno, l'argomento « Coordinate cartesiane sulla retta e sul piano » figura nella sezione A (Algebra) mentre nella B (Geometria) c'è solo geometria da esprimersi col linguaggio tradizionale dei tempi di Euclide. Beninteso, non è l'attribuzione di un argomento alla lettera A o B ciò che conta, nè il fatto (senz'altro opportuno) che uno impari ad esprimere le stesse cose in più linguaggi diversi. Il punto che rende acuto l'impegno nel difendere l'unitarietà o la separazione tra la geometria presentata in questa o quella veste consiste nel ritenere appropriato e opportuno costruire due o più forme di geometrie (sia pure equivalenti) indipendentemente tra loro e su fondamenti diversi, oppure ricondursi a un'impostazione unitaria.

Quando a me personalmente, ho già espresso la mia piena adesione al *fusionismo*, non però come sarebbe inteso da chi volesse ridurre la geometria ad algebra matriciale o a qualcosa di altrettanto formalistico, bensì nel senso di ammettere indifferentemente la scelta di ogni strumento utile (considerandoli diversi solo come formulazione) nel campo della Geometria (considerato come unico, a parte le precisazioni). Riguardo alle precisazioni (e principalmente alla distinzione tra geometria *affine* e geometria *metrica*; avendo occasione di parlarne, anche proiettiva, ecc.) sarei invece assai più rigido di altri (forse di tutti gli altri) nel mantenere nettamente distinti questo e quell'ambito.

Come accenno introduttivo all'enumerazione dei singoli argomenti, il poco ora detto può bastare; l'intera questione verrà ripresa e illustrata ampiamente in seguito.

Ecco in sintesi gli argomenti in programma: piano, rette e altre figure come insiemi di punti, parallelismo ecc. (I anno); coordinate cartesiane (retta e piano), congruenza, perpendicolarità, traslazioni, simmetrie, rotazioni, circonferenza, Teoremi di Talete e di Pitagora (II anno); piano vettoriale, sistema di 2 rette, prodotto scalare, congruenze e similitudini, elementi di trigonometria (Teoremi di Carnot e dei seni) (III anno); eq. cart. delle coniche, geometria spaziale (anche vettoriale), area di figure piane (IV anno); solidi elementari, loro volumi (e talune aree), spazio vettoriale astratto (V anno).

Rimane infine da menzionare un argomento a sé (prevalentemente applicativo): quello su calcolo combinatorio, probabilità e statistica (tutto nel V anno).

Infine, riguardo agli « argomenti complementari a scelta », occorre dire che questa significativa innovazione incontrò il favore generale, cosicchè, nonostante qualche preoccupazione di carattere « burocratico », finì per essere approvata unanimemente. È stato formato un elenco di argomenti « indicati a titolo esemplificativo » (che sarà illustrato nel n. 16).

11. Sull'introduzione dei campi di numeri.

Lo sguardo panoramico del precedente n. 10 ha messo in evidenza la linea di sviluppo tracciata nei programmi per i diversi grandi capitoli da svolgere, e gioverà seguire la stessa suddivisione per le considerazioni e i suggerimenti riguardanti le principali questioni che meritano di essere discusse. Alcuni punti andranno menzionati più volte, presentando aspetti che rientrano in diverse questioni: ma ciò è ben necessario per chiarire le interrelazioni fra i vari argomenti, il che è la cosa che più conta agli effetti di una complessiva coerenza cui tendere.

Tra l'altro affiorerà sempre il motivo di una più intima fusione (e sarebbe forse esatto dire « immedesimazione », pur senza identificazione) tra nozioni astratte e loro interpretazioni o rappresentazioni, soprattutto geometriche. Lo vedremo anche subito, affrontando il primo argomento: quello dell'introduzione dei diversi campi di numeri.

Per i numeri reali, il programma ne prevede l'introduzione a rate: nel I anno soltanto quelli razionali, e appena nel II tutti; per i corrispondenti argomenti in versione geometrica, sono previsti nel I anno le rette (nel piano) con le proprietà di ordinamento e di incidenza e parallelismo, e nel II le coordinate cartesiane.

Io ero tra coloro che « *avrebbero voluto inserire i numeri reali già nel programma del I anno* », e non solo (come è detto nella relazione) « *per poterne subito disporre nello svolgimento della geometria* » (che pure è motivo importante), ma anche per motivi più fondamentali. Dei quali mi sembra tuttavia si possa tener conto anche senza contravvenire alla decisione di rinviare « *la trattazione dei numeri reali all'inizio del II anno* », seguendo il concetto che ora indico (e che sarà sviluppato come « traccia esemplificativa » nel n. 19).

Ciò che mi ripugna, e che ritengo non possa non creare confusione ai giovani, è l'idea artificiosa di presentare i numeri razionali come una specie privilegiata di oggetti concepibili come tali prima e indipendentemente dalla considerazione della totalità (naturale o intuitiva) dei numeri reali di cui fanno parte. Tale modo di procedere costituisce un'inversione nello sviluppo logico dei concetti, nonostante l'apparente gradualità del passaggio a successive estensioni, come lo sarebbe quello che analogamente volesse definire dapprima i numeri primi e poi la totalità degli interi. L'effetto psicologico è un salto indietro di 25 secoli provocato inoculando i germi di quello sgomento di fronte ai numeri irrazionali (quanto infelice anche il nome!) che era spiegabile al tempo dei pitagorici; una scarsa familiarità coll'idea del numero reale era forse spiegabile prima che (ed è appena poco più di un secolo [5]) si generalizzasse l'uso della scrittura coi decimali. Ora che ogni bambino sa che un numero è razionale o irrazionale a seconda che la successione delle sue cifre decimali è o non è definitivamente periodica (e può costruirsi in base a ciò quanti esempi vuole di irrazionali, e ha sentito dire che sono irrazionali le radici di interi non intere, e π, ecc.), come può sopportare e spiegarsi delle perplessità per lui superate?

Volendo trovare una spiegazione valida, potrei dire soltanto che i procedimenti « rigorosi » servono a ricondurre la questione della non-contraddittorietà degli assiomi dei numeri reali (e quindi delle regole usuali con cui eseguiamo i calcoli) alla questione analoga per gli interi (ma ... dubbi finitistico-intuizionistici sussistono anche in quel campo; e allora il gioco vale davvero la candela?). Comunque l'argomento è senz'altro adatto tutt'al più per un « ripensamento critico », e su ciò fortunatamente ci fu pieno accordo.

E allora, quale potrebb'essere il suggerimento per conciliare le vedute suesposte con le prescrizioni del programma? Mi sembra si potrebbe benissimo limitarsi, nel I anno, a riesaminare operazioni su numeri interi e razionali *considerandoli come i sottoinsiemi del campo reale, già intuitivamente noto, ma del quale appena l'anno dopo si farà una trattazione che include altri aspetti.* Partendo dalla forma più pratica di rappresentazione dei numeri reali — quella di allineamente decimali (rispondente a familiari procedimenti di misura) — riesce facile dimostrare che per essi (o per i razionali, loro

---

[5] Ho appreso questo fatto (e molte altre cose interessanti) leggendo il bellissimo libro di EMMA CASTELNUOVO, *I numeri* (testo per la Scuola media, ed. La Nuova Italia, Firenze, 1962). Vi si dice infatti (a pp. 12-13) che « è stato un matematico belga, Simone Stevinio, che nel 1585 pubblicò un libretto sulla scrittura dei numeri decimali; egli cercò di far comprendere quale fosse l'utilità di questa scrittura che evita di dover fare i calcoli con le frazioni, e spiegò come fosse facile eseguire coi numeri decimali le quattro operazioni fondamentali dell'aritmetica. Ma i popoli sono sempre contrari a cambiar metodo; così anche i numeri decimali rimasero inutilizzati per quasi due secoli, e solo nell'Ottocento, con la diffusione del sistema metrico decimale, entrarono a far parte della cultura di ogni persona ». Invano cercai traccia di tale fatto fondamentale nell'Enciclopedia italiana e altrove. Eppure vi si trova la spiegazione dell'atteggiamento mentale inesplicabilmente arretrato di cui ci stupiamo: per la scuola (la struttura più reazionaria quasi ovunque) un secolo o due sono pochi per mettersi al passo col mondo. Lo spirito di Galileo non vi ha ancora soppiantato quello di Simplicio, e il metodo di Stevinio non ha fugato l'idea che il nominare gli irrazionali sia qualcosa di sacrilego (Ippaso di Metaponto fu punito dagli dei col naufragio per aver divulgato tale scandalo!).

sottoinsieme, ecc.) valgono le proprietà che in impostazioni diverse fungerebbero da assiomi (e, volendo, si può dimostrare o almeno dire che esse bastano a caratterizzare tali campi, « sostanzialmente », ossia a meno di isomorfismi).

Parallelamente, e con identità di metodo e linguaggio se non addirittura congiuntamente, andrebbero svolte le stesse considerazioni nella versione « geometrica » (retta, punti di ascissa razionale, ecc.). Anche nella versione geometrica le questioni sulla « continuità » andrebbero soltanto menzionate nel I anno rinviandole al II; la costruzione di una scala di ascisse sulla retta (pensandola in un piano) si può però ottenere automaticamente (avendo introdotto il parallelismo; cfr. n. 21).

Benchè, da un punto di vista astrattamente formalistico, una nozione matematica si possa (o debba) considerare pienamente acquisita conoscendone le proprietà deducibili dalla definizione o dagli assiomi, ritengo non meno essenziale (e dal punto di vista psicologico e culturale e pratico ancor più), agli effetti di una *vera* conoscenza e comprensione, il saper associare alla nozione formale una visione quanto più ampia possibile delle sue interpretazioni e applicazioni (e del perchè della sua applicabilità) nei più disparati campi della scienza, della tecnica, della vita quotidiana. Perciò, riferendoci al nostro attuale caso dei numeri reali, va sottolineato che essi altro non sono (nella più parte delle applicazioni) che i « rapporti di grandezze omogenee » secondo Eudosso (e secondo l'esposizione di Euclide), anche se la mancanza di un sistema di scrittura adeguato (come quello della numerazione araba completato con le cifre decimali illimitate) ha impedito allora di trattarli naturalmente come numeri. Perciò i numeri reali, usati come moltiplicatori per le grandezze, permettono di esprimere una grandezza qualunque riferendola a una unità di misura (metro, chilogrammo, secondo, watt, km/ora, lire/kg, kg/m^3, ecc.). Appena possibile (III anno) giova notare come, introdotti i vettori, i numeri reali acquisiscono anche la funzione di moltiplicatori per i vettori (come per ogni ente appartenente a un sistema lineare) [6].

---

[6] Come chiarimento incidentale (per il lettore, non per il programma liceale), direi che in tal caso l'operazione identica e quella di moltiplicazione per a vanno indicate semplicemente con 1 ed a. Inutile scrivere I ed aI; si può osservare che, volendo usare per uniformità la scrittura matriciale, 1 ed a si possono scrivere per questo caso mettendo tutti 1, o tutti a, sulla diagonale principale, e fuori tutti zeri. Indubbiamente è un giudizio largamente soggettivo

La precedente osservazione non era peraltro fine a sé stessa, limitata cioè al significato sostanziale da far vedere nei numeri reali (con riferimento a grandezze geometriche o di qualsivoglia specie, e non soltanto scalari ma vettoriali ecc. ecc.); quelle considerazioni diventano, a mio avviso, ancor più importanti, anzi essenziali, nel discutere del passo successivo: l'introduzione dei numeri complessi.

Per i numeri complessi, il programma ne prevede l'introduzione nel III anno, menzionando semplicemente la denominazione (« Numeri complessi »). Più significativo è però il fatto che, nelle Avvertenze, ove si dice che « *l'insegnante, mediante opportune permutazioni, potrà mettersi in condizione di applicare quella metodologia che preferisce* », viene citato come esempio proprio « *il caso dell'insieme di argomenti: piano vettoriale, numeri complessi, prodotto scalare, elementi di trigonometria, gruppo delle congruenze e delle similitudini del piano, tutti riuniti nel III anno ed intimamente e variamente collegabili uno all'altro* ».

Ed è infatti questo l'argomento sul quale è apparsa maggiore la distanza fra i vari punti di vista, variabili tra i due estremi seguenti:

— introduzione puramente algebrico-formale di $i = \sqrt{-1}$ con riferimento alle equazioni di 2° grado e con un minimo di ulteriori sviluppi e chiarimenti;

— introduzione dei numeri complessi in forma significativa e con finalità molteplici, inserendoli costruttivamente come mezzo per chiarire e semplificare e sviluppare altri argomenti del programma.

È ben vero che, storicamente, gli immaginari si presentarono originariamente nel primo modo, ma il fatto che ne derivarono oscurità e perplessità (Bombelli che parla di « *quantità silvestri* », Leibniz che dice « *analysis miraculum, idealis mundi monstrum, poene inter ens et non ens amphibium* »), e che le cose più semplici e importanti furono trovate quasi accidentalmente e per vie tortuose (ad es. la formula di Eulero per e^{ix}), dovrebbe ben sconsigliare di seguire tale via come metodo didattico. Ed è un fatto che il superamento di quelle difficoltà psicologiche, nonchè la possibilità anche

---

quello tra distinzioni motivate sostanzialmente e « distinzioni senza differenza » dovute a scrupoli pedantescamente formalistici; a mio avviso sono però di gran lunga più frequenti e dannosi gli eccessi nel moltiplicare distinzioni fittizie o irrilevanti (con difficoltà superflue per chi studia, con complicazioni di notazione e linguaggio).

per i matematici di affrontare le questioni nel modo più naturale [7], sopravvennero soltanto dopo che il piano di Argand e Gauss, e più perfettamente il campo delle similitudini vettoriali su di esso, diedero del campo complesso un esempio (e certamente l'ottimo) di effettiva realizzazione, permettendo di « accettarlo » a chi diffida di simbolismi privi di interpretazioni intuitive. L'esistenza di tale interpretazione spiega inoltre l'importanza anche applicativa dei numeri complessi, ad es. per lo studio delle correnti alternate in elettrotecnica ed in genere nella trattazione di fenomeni oscillatori (analisi armonica, ecc.). Ed infine, come non rammentare quanto risultino suggestive le raffigurazioni « plastiche » di funzioni di variabile complessa (per la funzione $w=f(z)$, superficie di quota $|w|$ sul piano z; cfr. le tavole di Jahmke-Emde, o la monografia di F. Tricomi, *Funzioni analitiche*), con gli zeri al fondo di un imbuto e i poli che danno luogo a pinnacoli infinitamente alti? Anche senza sfruttarne a fondo la significatività, la loro visione basta ad agevolare il « fare amicizia » o « prendere confidenza » con l'idea del « piano complesso ».

A questo punto si può interrompere la discussione, perchè dall'aspetto algebrico di cui qui ci occupiamo trapassa a quello della geometria in cui si inserisce. Ne riparleremo pertanto nel n. 13, riprendendo poi l'argomento specifico nel n. 25 come « traccia esemplificativa » di esposiizone didattica. Aggiungiamo soltanto, per concludere questo cenno preliminare, che il suggerimento consiste nell'introdurre il numero complesso, $z=x+iy$, subito dopo il piano vettoriale (fino a sistema di due rette), come similitudine che porta « 1 » in z (inteso come punto o vettore), moltiplicandolo per $|z|$ e ruotandolo di $\arg z$; i è la rotazione ad angolo retto. Ne derivano agevolmente: congruenze e similitudini; funzioni goniometriche (prodotto scalare; elementi di trigonometria); radicali e potenze ad esponente razionale (anche nel campo complesso); equazioni di 2° grado (nel campo complesso, in particolare nel campo reale). C'è qualcosa in più, ma viene così spontanea che sarebbe maggior fatica ometterla o voler impedire che i ragazzi la vedano da sé.

Potrei aggiungere che quanto dico risponde anche alla mia esperienza personale, chè solo dopo aver trovato qua e là e messo insieme poco a poco giustificazioni esplicative del genere superai, dopo lungo tempo, il rifiuto che opponevo a siffatte nozioni e teorie fin-

---

(7) Non sempre: si vede ancora talvolta dimostrare la formula di Eulero per e^{iz} attraverso le serie di potenze, tanto per dirne una!

chè apparivano vuote convenzioni formalistiche. Questo è certamente un caso che conta poco, perchè sarà certo raro il caso di studenti così eccezionalmente stupidi da non capire ed insieme tanto eccezionalmente discoli da non adattarsi disciplinatamente a « imparare senza capire ». Tuttavia sono convinto che una spiegazione basata su interpretazioni significative e intuitive sarebbe stata doppiamente più utile per tutti, anche per gli intelligenti e i disciplinati, perchè da una parte assai più facile e dall'altra assai più feconda di implicazioni e connessioni e applicazioni istruttive.

12. Altri argomenti algebrico-analitici.

Sugli « altri argomenti » algebrico-analitici non ci sono analoghe questioni di fondo da discutere ampiamente e con valore pregiudiziale. Si tratta di diversi argomenti più tecnici e speciali, e le osservazioni da fare avranno carattere o piuttosto particolare o molto generico.

Osservazione molto generica: cercar sempre di far capire il senso e familiarizzare coi concetti piuttosto che presentarli come cose pesanti e aventi senso solo entro la matematica, seguendo sempre quanto più possibile il precetto detto nelle Avvertenze riguardo al linguaggio della teoria degli insiemi (farne uso con naturalezza, senza pregiudicare ciò oscurando e appesantendo la comprensione con una preliminare trattazione sistematica). Lo stesso si dica per nozioni come « funzione », « corrispondenza », « gruppo », ecc.; occorre che tali termini divengano consueti, che entrino a far parte del linguaggio comune (pur controllando spesso che ne venga ricordato il senso esatto per non rischiare che vengano ascoltati e ripetuti senza più, per l'assuefazione alla parola, porre attenzione al motivo per cui viene detta o va detta). Volendo che l'insegnamento riesca più istruttivo ed insieme meno pesante, occorre che tutto venga accortamente sfruttato, connettendo cose già apprese con quelle nuove, e avendo di mira non tanto l'apprendimento di queste nuove come tali ma lo sviluppo della capacità ad affrontare e risolvere anche da sé problemi sempre nuovi. Perciò, non molti problemi pressochè uguali per imparare a forza di abbrutimento a risolverne altri pressochè uguali senza sforzo nè merito, ma pochi atti ad illuminare e orientare sul modo di far tentativi in casi diversi. Ed anzi, prima e più ancora che a risolvere i problemi (nel senso di problemi già tradotti in formule), occorre insegnare ad impostare nel miglior modo i problemi, traducendo in formule ciò che si sa e ciò che si vuole ottenere.

Particolare cura si dovrebbe porre nel presentare (nel I anno) le « espressioni letterali », le « esercitazioni nelle quali i numeri siano rappresentati anche da lettere », affinchè possa venire còlto ed apprezzato lo spirito di questo accorgimento insieme ai molteplici motivi della sua utilità.

Si dovrebbe far toccare con mano quanto maggiore sia l'economicità e la significatività dei calcoli eseguiti su lettere, ogni qualvolta non interessi soltanto il risultato numerico per un caso singolo. La dimostrazione di certe proprietà risulta ottenuta, eseguendo il calcolo una sola volta su lettere, come se la si fosse ripetuta infinite volte sostituendo ad esse tutti i valori possibili. Dovendo ripetere molte volte un medesimo calcolo con valori differenti (in particolare ad es. per costruire una tabella) conviene cercare l'espressione più semplice e più adatta per il calcolo numerico prima di passare ad eseguirlo (e ciò vale, sia pure con particolarità diverse, sia per calcoli da eseguire a mano, o con piccole macchine da tavolo, o con calcolatori elettronici). Inoltre, quanto alla significatività, va notato come un'espressione letterale, considerata come *funzione* di una o più delle lettere che vi intervengono (o anche di tutte), di cui interessi vedere cosa accade facendole variare, permette più o meno agevolmente di vedere come varia il risultato. Si potrà vedere ad es. che variando x (oppure a, k, y, ...) il risultato varia in modo direttamente, o inversamente, proporzionale, oppure semplicemente che cresce o diminuisce, o che è sempre positivo, ecc. Oppure si può vedere quand'è (cioè: per quali valori dati alle lettere) che diviene nullo (e in questo e simili casi si parlerà di equazioni da risolvere). Pochi esempi semplicissimi ma interessanti potrebbero render accetta e interessante, facendone apprezzare le finalità e l'utilità, l'idea usualmente ostica ai principianti (se non spiegata) di « eseguire su lettere dell'alfabeto » operazioni che « hanno senso soltanto su numeri » ([8]).

A proposito di « operazioni su numeri razionali » (sempre I anno) sarebbe opportuno parlare anche di calcolo approssimato (con un dato numero di cifre decimali). Di ciò non è rimasto traccia nel programma (che, per brevità di formulazione, non menziona esplicitamente ogni aspetto discusso); solo nelle Avvertenze del triennio si

---

([8]) Qualche cenno inteso a spiegare ed esemplificare tali concetti ai ragazzi si trova nel § 9 di un volumetto. *Il « saper vedere » in matematica* (in corso di stampa, ed. Loescher, Torino). Anche per altri argomenti vi si potrebbero trovare spunti conformi ai presenti suggerimenti (sia pure svolti in modo più succinto e episodico di come occorrerebbe in un testo).

fa cenno (in senso più ampio) a « valutazione approssimata » per le soluzioni di un problema. Tuttavia ciò rientrerebbe naturalmente nel titolo dell'argomento, e gioverebbe a preparare il terreno per le operazioni sui numeri reali (determinate appunto dalle valutazioni per difetto e per eccesso, supposte eseguite con un numero sempre crescente di decimali).

Circa le « classi di resti (mod. n) » (ancora sempre I anno), da segnalare soltanto l'opportunità di illustrarle sul poligono regolare di n lati; ciò non solo rende più evidente l'argomento, ma chiarisce intuitivamente il comportamento di operazioni cicliche e predispone (qualora ciò venga esposto nel III anno, secondo il suggerimento del n. 11) alla ripresa del medesimo schema nell'interpretazione di « radici n-esime dell'unità ».

Nel II anno c'è un gruppo di argomenti sui polinomi (e funzioni razionali fratte) che, interpretando estensivamente le dizioni del programma, consentirebbe di andare molto oltre ai limiti che sono previsti nel triennio per gli ulteriori sviluppi delle stesse questioni. L'apparente contraddizione è in parte sanata dal cenno a « *strumenti ... non esplicitamente menzionati nel programma* » fatto in Avvertenze (triennio), e in parte va chiarita spiegando che un'ulteriore indicazione ai predetti argomenti nel III anno (o IV) è stata soppressa per il timore di troppo ampi sviluppi dettati da eccesso di zelo. In conclusione mi sembra corrisponda all'intenzione generale il suggerimento di limitarsi a poche cose fondamentali e chiare nel II anno, riprendendole per precisarle e completarle un po' (ma sempre limitandosi all'essenziale) nel III.

Come mia opinione personale, raccomanderei che le « *generalità sulle equazioni* » riguardino veramente le equazioni in generale, e non equazioni di tipo particolare (p. es. algebriche). La via più idonea in tal senso consisterebbe nel portare al 2° posto (nel II anno, cioè subito dopo l'introduzione dei reali) l'argomento « *Coordinate cartesiane*, ecc., *diagrammi di semplici funzioni* »; quindi « *Generalità sulle equazioni* » (ricerca degli zeri sul diagramma, o problemi riconducibili a questa formulazione) ed « *eq. di. 1° grado* ». Poi si passa naturalmente ai polinomi (con loro grafici, proprietà, ecc.).

Ho notato speso che la consuetudine di parlare quasi esclusivamente di equazioni algebriche induce molti studenti a ritenere, ad es., che per un'equazione abbia sempre senso parlare del « grado »; per evitare simili ingenuità conviene considerare come primi esempi quelli dati da diagrammi disegnati a caso o rappresentanti dati empirici

(p. es., istanti in cui la temperatura, registrata su diagramma, risulta $=0°$).

Altra osservazione opportuna (riguardo ai polinomi, e con riferimento alle precedenti osservazioni circa i vantaggi di « scrivere in modo semplice » delle espressioni): cosa sia « più semplice » va giudicato caso per caso e in relazione agli scopi. Ad es. la scrittura « più semplice », per un polinomio, è per lo più quella « canonica » come somma di potenze; però capita spesso di veder riportare a quella forma — *per cercarne le radici!* — un polinomio inizialmente dato già decomposto in fattori. Capire se tale operazione conviene o no è, a mio avviso, una prova assai più valida di preparazione matematica che saperla eseguire.

Nel III e IV anno la conoscenza dei diagrammi delle funzioni che via via si introducono dovrebb'essere particolarmente curata (e la capacità di vedere qualitativamente cosa accade costruendo funzioni in modo semplice con esse, p. es. $x \cos x$, $x+e^x$, $e^x \sin x, \ldots$).

Circa le « *Generalità sulle funzioni reali di variabile reale* » (e le derivate) (IV anno) potrebbero forse essere utilizzate in parte delle idee sintetiche (in ispecie per i problemi di massimo e minimo, non inclusi nel programma per timore di sviluppi eccessivi ma menzionati nelle Avvertenze). Può darne un'idea la trattazione nel Cap. II di un libro scritto per gli Istituti Tecnici Commerciali (9); da tener presente che ivi non è in programma nulla di calcolo differenziale, per cui un'eventuale presentazione di quelle spiegazioni in un Liceo andrebbe completata per lo meno indicando anche la traduzione in formule.

Riguardo ai cenni di calcolo differenziale e integrale (rispettivamente IV e V anno), ripetiamo anzitutto che, secondo le Avvertenze, essi « *dovranno essere svolti con discrezione avendo di mira più i concetti fondamentali che non l'apprendimento di certe tecniche di calcolo* ». Rimane tuttavia imprecisato cosa s'intenda per « concetti fondamentali », e si affacciano naturalmente due interpretazioni diverse (anche se conciliabili in una via di mezzo). Si deve intendere « fondamentali dal punto di vista matematico » oppure « fondamentali dal punto di vista dell'interesse generale »? In altre parole: importa che tutti apprendano i concetti su cui il calcolo differenziale si basa, oppure che siano in grado di rendersi conto dei

(9) B. de Finetti e F. Minisola, *La matematica per le applicazioni economiche*, ed. Cremonese, Roma, 1961. Cap. II: « Studio di funzioni; problemi di massimo ».

servigi che rende, del tipo di problemi che affronta, del modo in cui li imposta e risolve?

Sembra fuori dubbio che la risposta debba essere quest'ultima, o, quanto meno, assai più prossima a questa che alla prima. Ed anche gli interventi al riguardo, o esplicitamente, od implicitamente riconoscendo l'impossibilità di fare gran che nell'altro verso, mi pare propendessero in genere in questo senso.

Espongo comunque la questione così come la vedo personalmente (ma di propriamente personale non credo vi sia altro che una maggiore insistenza su alcuni punti, che formulerò come suggerimenti).

Per attribuire all'insegnamento di calcolo differenziale nei licei la finalità di farne apprendere i fondamenti e gli strumenti tecnici in misura sufficiente per risultare utile, sarebbe occorso un programma notevolmente più nutrito (mentre già così il programma proposto appariva a molti piuttosto pesante). D'altronde, in che senso poteva essere « utile »? Non a chi intendesse proseguire, all'Università, studi scientifici, chè il corso di Analisi avrebbe comunque ripreso il discorso dall'inizio (ed è forse meglio non si trovi a dover correggere idee instillate prematuramente e affrettatamente). Non agli altri, chè il tempo speso per impadronirsi alquanto di alcuni strumenti non ne avrebbe lasciato per imparare ad usarli e vedere a cosa servono. Se invece si cerca di far capire i problemi e gli scopi, chiarendo i concetti e i metodi quant'è necessario per esemplificazioni e indicazioni atte ad evitare che tutto resti nel vago, ciò può essere utile a tutti: per chi non prosegue in quanto avrà una visione — sommaria fin che si vuole ma compiuta — su un modo di ragionare che è alla base di quasi tutto il moderno pensiero scientifico e tecnico; per chi prosegue gli studi scientifici perchè sarà predisposto a recepire i concetti e procedimenti dell'Analisi per l'interesse derivante dal sapere a cosa servono e per l'assimilazione preventiva dei concetti informatori.

I punti su cui ho ritenuto e ritengo necessario insistere affinchè detto insegnamento risponda a queste esigenze potrebbero sintetizzarsi dicendo che in questa situazione più che non mai è necessario insegnare *per problemi*, anzi *per grandi problemi*. Cioè centrando l'attenzione sui maggiori problemi che il calcolo deve affrontare, e solo subordinatamente dedicandone quanto occorre ai mezzi.

I due maggiori problemi (e comunque i soli che menzionerò a titolo esemplificativo come « suggerimenti ») sono quelli che, in termini matematici, si possono dire « equazioni differenziali » e « massimi e minimi ». Ma, in termini di interesse generale, il primo consiste nel rendersi conto di come si possa ricostruire o prevedere il movimento di un punto, l'evolversi di un processo, il propagarsi di un certo effetto, conoscendo il modo di comportarsi, istante per istante, secondo la situazione via via raggiunta. O, in diversa forma, consiste nel vedere come dalla conoscenza dell'andamento « in piccolo » di qualche cosa si possa risalire alla determinazione dell'andamento « in grande », o viceversa. E il secondo consiste nel rendersi conto se una certa situazione è o non è (in un certo senso) ottima, e altrimenti esaminare se e in che modo la si può migliorare o render tale, e comunque apprendere come in genere una situazione di ottimo risponda a certe condizioni di equilibrio.

Se i problemi importanti sono questi, sarebbe perder tempo imparare derivate e integrali senza arrivare a farne uso per esaminare tali problemi: si dovrebbero invece semmai, se possibile, studiare massimi e minimi ed equazioni differenziali senza sapere cosa siano derivate e integrali. E in certo senso ciò sarebbe anche possibile, ad es. illustrando graficamente il problema di un'equazione differenziale (di 1° ordine) come quello di tracciare le traiettorie su un piano ove è assegnata la direzione punto per punto ([10]). E, per i massimi e minimi, adottando il linguaggio « marginalistico » col quale gli economisti adombrano le derivate senza farne esplicito uso. Non dico, naturalmente, di far così; sono convinto che, al livello in cui va inteso il programma dei Licei, il discorso deve discendere fino alla nozione di derivata e a quel minimo di tecnicismo che basti a rendersi conto su pochi esempi semplici ma significativi come il meccanismo analitico funzioni. Però, se il margine di tempo scolastico consente di far di più, ritengo più vantaggioso allargare il panorama delle applicazioni da citare e da illustrare sommariamente a titolo di notizia piuttosto che accrescere il bagaglio di definizioni teoremi regole procedimenti risultati.

([10]) Cfr. ad es. le illustrazioni e spiegazioni che usai nel libro scritto per il corso di Matematica generale alla Facoltà di Economia e Commercio: B. DE FINETTI, *Matematica logico-intuitiva*, ed. Cremonese, Roma, 3ª ed., 1959 (per l'argomento di cui sopra, v. nn. 102-103 a pp. 375-390).

Anche questo libro è scritto secondo i concetti sostenuti nel presente articolo, e parecchi argomenti vi sono trattati in modo più o meno conforme ai presenti suggerimenti. Va tuttavia tenuto conto che quel libro è stato scritto oltre vent'anni fa (1943) e destinato a un corso universitario.

Infine, riterrei opportuno introdurre subito, insieme a quella di *derivata,* anche la nozione di *integrale* (indefinito, o primitiva) come operazione inversa, oltre che per i motivi sostanziali ora detti, anche per la semplice comodità di indicare subito la tabellina delle derivate fondamentali come una tabella a doppio uso: data una funzione si trova a fianco la derivata, ma cercando una funzione nella colonna delle derivate si trova a fianco il suo integrale definito (a meno di $+C$).

13. La Geometria.

La Geometria ha sempre costituito il soggetto di più articolate discussioni, con diversità di atteggiamenti, ramificate secondo vari livelli ed aspetti. E rimane, inevitabilmente, anche qui come il campo che maggiormente ammette e richiede discussioni e suggerimenti riguardo al ricco intreccio di alternative tra cui è tuttora aperta la possibilità di scelta (nonostante la distribuzione della materia tra i cinque anni già stabilita nei programmi).

Sembra possibile ricondurre la discussione a due ordini di questioni di natura, al fondo, diversa, benchè poi in pratica finiscano per intrecciarsi.

Il primo ordine di questioni si riferisce all'atteggiamento di fronte alle diverse geometrie (nel senso di Klein). Nella fattispecie (cioè riguardo alle proposte di programma per i licei) le geometrie da prendere in considerazione sono soltanto due: l'*affine* e la *metrica*; ma è forse opportuno menzionare anche quella *proiettiva* per completare i raffronti di possibili punti di vista. In tal modo i punti di vista pensabili sono tre, e si possono rappresentare coi seguenti tre schemi (di cui diremo dopo il significato):

a) *Schema discendente*:

Geometria *metrica* $\searrow$ *affine* $\searrow$ *proiettiva*

b) *Schema ascendente*:

Geometria *proiettiva* $\nearrow$ *affine* $\nearrow$ *metrica*

c) *Schema intermedio*:

Geometria *affine* $\nearrow$ *metrica*, $\searrow$ *proiettiva*

Il primo schema, (a), è quello tradizionale, euclideo, nel quale gli assiomi conferiscono immediatamente allo spazio la struttura più rigida, di *spazio metrico*. Da essa si può passare, *discendendo* (cioè andando dal più al meno determinato), allo spazio *affine* ignorando qualche cosa e a quello *proiettivo* ignorando ancora qualcos'altro. È questo l'atteggiamento di coloro che tendono a conservare (almeno come intelaiatura per la presentazione iniziale) l'impostazione euclidea (p. es. Morin); per essi mi sembra poi che la distinzione fra spazio affine e spazio metrico appaia meno seria, nel senso che considerino (per così dire) lo spazio affine come « uno spazio metrico in cui si prescende momentaneamente dalle nozioni metriche » anzichè « uno spazio affine in cui nozioni metriche non ce n'è ».

Il secondo schema, (b), è quello costruttivo (che a rigore converrebbe iniziare ancora più in fondo: da spazio privo di struttura (solo « insieme »), a spazio topologico, e avanti), in cui si pensa di introdurre circostanze via via più restrittive una per volta. Non mi sembra che nessuno abbia proposto questo schema per il programma dei Licei; lo menziono per completezza (e perchè mi sembra risponda alle preferenze di B. Segre).

Il terzo schema, (c), non si distingue dal (b) se non si nomina lo spazio proiettivo (come di fatto non ne parla il programma); però non c'è un divieto di darne un cenno, chi volesse, ed è indicato nell'elenco degli « argomenti complementari » qualche tema che lo implica esplicitamente (« Ampliamento proiettivo ecc. ») o eventualmente (« Geometrie non euclidee ecc. », quello sulle coniche (?), ecc.). Comunque, la distinzione risiede nel fatto che il punto scelto come « punto di attacco » (la geometria affine) consente di prendere come intelaiatura, fin dalla presentazione iniziale, la struttura di *sistema lineare* (spazio vettoriale), senza esser mai più obbligati a cambiare cavallo. Per passare alla geometria metrica basta introdurre un « prodotto scalare », per la geometria analitica basta scegliere un riferimento fisso; volendo scendere alla geometria proiettiva basta pensare alla stella di rette che proietta lo spazio da un punto esterno.

Questo terzo schema si deve però (agli effetti della presente discussione) considerare sdoppiato in relazione a due tendenze riguardanti il secondo ordine di questioni. Per chiarezza anticipiamo fin d'ora la distinzione fra due sottocasi:

schema terzo nella prima forma, (c'), se sviluppato in forma algebrica (calcolo matriciale o simili), come, se non erro, penserebbe ad es. De Giorgi;

schema terzo nella seconda forma, (c″), se sviluppato in forma intrinseca (operando direttamente su punti, vettori, ... senza usare necessariamente un riferimento fisso). Questa è la tesi sostenuta dal sottoscritto, e pertanto quella cui si ispireranno le considerazioni e i suggerimenti che saranno sviluppati in seguito.

La contrapposizione tra la preferenza per le due forme, (c′) e (c″), era stata espressa, in una delle riunioni, sostenendo che la cosa più semplice e intuitiva era « sommare ennuple di numeri » (De Giorgi), o, viceversa « sommare freccie » (Prof.ssa Busolini); io osservai che, a mio avviso, l'idea di « sommare freccie » era più semplice e intuitiva non soltanto di quella di sommare « ennuple di numeri », ma anche di quella di sommare numeri (o di concepire i numeri).

Il secondo ordine di questioni (come in parte è apparso dall'ultimo cenno alla distinzione tra (c′) e (c″)) riguarda invece le preferenze per l'impiego di diversi strumenti formali. Li possiamo elencare come segue:

i) linguaggio tradizionale euclideo,

ii) metodo vettoriale intrinseco,

iii) riferimento cartesiano (geometria analitica),

iv) idem (nel piano) con numeri complessi,

v) metodo vettoriale in forma « matriciale ».

Si nota senz'altro che tutte queste forme di espressione, eccettuando la prima, si collegano bene l'una all'altra avendo in comune, come punto di partenza, la struttura lineare dello spazio affine. Le preferenze circa la scelta di questa o quella tra esse, o per la precedenza nell'introdurle e per la misura più o meno ampia in cui farne uso, benchè possano rivestire notevole importanza sotto vari punti di vista, non incidono sull'aspetto strettamente logico.

Si osservi ancora che le forme (ii), (iii) e (v) si prestano indifferentemente ad una trattazione affine o metrica [11], cosicchè potrebbero prendersi a base per uno qualunque dei due schemi (a) e (c).

---

[11] La (iv) è una variante di (iii) che perderebbe significatività se il riferimento non fosse ortogonale-isometrico. Comunque è una variante di portata limitata dato che riguarda soltanto il piano.

Invece la forma (i), cioè quella della tradizionale trattazione euclidea, è sostanzialmente difforme dalle altre e difficilmente raccordabile ad esse per due motivi: *primo*, perchè nella via che segue per la fondazione della geometria le nozioni metriche entrano subito, prima di quelle affini, rendendole malagevolmente isolabili e riconoscibili; *secondo*, perchè l'aggancio con i numeri reali, dopo averne eluso lungamente l'impiego, appare quasi un ripiego. Anche come modo di esprimersi e di indicare segmenti angoli ecc. la forma (i) abitua a consuetudini senza sbocco nelle impostazioni moderne. Perciò essa può soltanto essere utilizzata per seguire lo schema (a), e di fatto sembra sostenuta da tutti coloro che appoggiano tale schema.

Siamo ora in grado di confrontare tra loro, tenendo presenti congiuntamente i vari aspetti del problema, i motivi pro o contro ciascuna delle alternative indicate con (a), (c′), (c″). I fautori della (a) ne vantano il carattere prettamente geometrico ed il valore storico (anche in nesso all'evoluzione del pensiero matematico, in relazione alla scoperta delle geometrie non euclidee ecc.), e rimproverano alla (c) di sopprimere di fatto la Geometria come dottrina autonoma identificandola con l'algebra lineare astratta. I fautori della (c), osservando che una trattazione analitica dei problemi geometrici è comunque indispensabile nel mondo moderno, ritengono preferibile partire subito da essa anzichè educare a un modo di pensiero diversamente orientato, che non solo non è di aiuto ma crea incomprensioni e suscita l'idea quasi di una contrapposizione o di un dualismo tra i due metodi.

La mia opinione è che la variante (c′) riunisca e migliori tutti i pregi dei due schemi (a) e (c) evitandone gli inconvenienti che ciascuno con un certo fondamento rimprovera all'altro. Tale variante permette di partire da assiomi di significato puramente « geometrico » nel senso in cui lo sono quelli di Euclide (e seguendo proprio, alla lettera, le indicazioni dei nuovi programmi), conducendo con naturalezza agli algoritmi lineari in forma intrinseca. In tale forma tutti i ragionamenti conservano un significato diretto, pur consentendo la traduzione immediata in forma analitica non appena sembri utile o comunque lo si desideri. L'unico motivo che rimane valido in favore della conoscenza dell'impostazione di Euclide è, a mio avviso, quello storico; motivo ottimo per trattarne come « argomento complementare » (ad es. sotto « Fondamenti della geometria »), con analisi critiche e comparative, ma non per iniziare in modo innaturale lo studio che deve portare a padroneggiare la geometria con mezzi più moderni e adeguati.

Rinviando a delle « tracce esemplificative » per dei tentativi più dettagliati di presentazione didattica conformemente alle idee esposte (v. nn. 19-26), concludiamo questa disamina generale con qualche ulteriore analisi sui motivi di fondo delle divergenze e sulla struttura dei programmi.

Una più netta distinzione tra geometria affine e geometria metrica, oltre ad essere utile perchè significativa nel senso geometrico propriamente detto, lo è ancor più tenendo conto che la geometria serve spesso per dare uno schema rappresentativo di fatti e situazioni i più svariati. Si può introdurre un S_n rappresentando sulle n coordinate dei parametri qualsiasi (ad es. le quantità, oppure i prezzi, di n merci in un'applicazione economica, o posizioni e velocità delle particelle nello « spazio delle fasi », oppure le percentuali in peso dei diversi elementi chimici nei diversi composti, e via dicendo). In ogni rappresentazione geometrica vi sono delle particolarità geometriche che risultano significative riguardo ai fatti rappresentati, ed altre invece che non lo sono (ed è bene notarlo per evitare errori, purtroppo abbastanza frequenti, dovuti all'assumere come significative delle circostanze introdotte parassitariamente dalla rappresentazione geometrica). Avviene spesso, in particolare, che le nozioni affini siano significative e quelle metriche no: basti pensare alla rappresentazione mediante ascisse e ordinate sul piano cartesiano di due quantità non omogenee (misurate ad es: l'una in ettolitri e l'altra in kilowattora): distinguere una retta come « la bisettrice », dire che due rette sono « ortogonali », che due segmenti (non paralleli) hanno ugual lunghezza, significa profferire frasi prive di senso (ossia: aventi un senso fittizio, in dipendenza della scala in cui sono state arbitrariamente rappresentate le unità di misura sui due assi). Perciò, anche e specie per queste applicazioni, la distinzione tra *affine* e *metrico* è di fondamentale importanza. In siffatte applicazioni può inoltre avvenire o non avvenire che gli assi di riferimento abbiano un significato privilegiato, o quasi obbligato (entrambi i casi sia con che senza l'esistenza di una *metrica* significativa). È essenziale, ai fini di una corretta interpretazione, porre attenzione a tali distinzioni.

Ed è proprio sotto questo punto di vista che gli estremi si toccano. Il primo linguaggio e l'ultimo — il (i), euclideo, ed il (v), matriciale — tendono entrambi ad ottundere (seppure in modo differenziato) la capacità di discernere i vari aspetti che di volta in volta vanno o non vanno considerati significativi riguardo al problema specifico: tutto viene saldato in un unico blocco monolitico di dogmatiche verità geometriche o di farraginose espressioni formalistiche. Soltanto la soluzione (c') fornisce la flessibilità necessaria per limitarsi caso per caso all'introduzione di soltanto le nozioni che hanno senso (salvo ricorrere ad altre — p. es. ad assi fissi di riferimento — per mere esigenze contingenti, ad es. per comodità di calcolo, senza cadere nell'abbaglio di darvi un significato insussistente).

Nel programma del 1° biennio, la distinzione tra geometria affine e metrica è esattamente rispettata nella ripartizione degli argomenti fra I anno e II anno (salvo che « Traslazioni », secondo tale criterio, andrebbe nel I; tuttavia la collocazione nel II si può giustificare dato che solo allora si parla di trasformazioni: ed insieme si hanno le simmetrie e le rotazioni ([12])).

Nel programma del triennio si ha l'introduzione dei metodi vettoriali, sui tempi e modi della quale si erano avute lunghe discussioni. Cominciare dal caso generale ed astratto, e da esempi svariati, per considerare poi come caso particolare quello geometrico, o viceversa? Considerare insieme oppure separatamente il caso di 2 e 3 dimensioni? Per ragioni di gradualità e per esigenze di distribuzione degli argomenti fra i diversi anni, venne adottata la soluzione seguente: piano vettoriale geometrico nel III anno, spazio nel IV, caso astratto nel V. Senza alterare tale ripartizione, sembra opportuno e lecito un semplice accenno iniziale (al principio del III anno) per dire che quanto viene esposto (intanto) per 2 dimensioni si estende immediatamente al caso di 3 (IV anno) o più (V anno) dimensioni, con interpretazioni varie (e in particolare quelle stesse che i giovani incontrano simultaneamente nel parallelo corso di Fisica). Sembra opportuno evitare una serie di sorprese che ogni anno farebbero apparire come una difficoltà imprevista (anzichè come cosa attesa e preannunciata come ovvia o quasi ovvia) le successive estensioni. In particolare, mi sembra improprio parlare di « Estensione allo spazio del prodotto scalare » (dando appunto la falsa impres-

---

([12]) L'inclusione delle traslazioni negli argomenti del I anno avviene comunque automaticamente trattando i punti già ivi in programma nel modo indicato come suggerimento (nel n. 21).

sione che si tratti di una fatica da ripetere sempre da capo), dato che il prodotto scalare riguarda soltanto due vettori che necessariamente appartengono a una medesima giacitura piana.

Circa l'impiego dei numeri complessi per la geometria metrica piana, l'essenziale è stato detto (nel n. 11), e i suggerimenti dettagliati si vedranno nel n. 25.

Nulla sembra vi sia da rilevare circa gli altri argomenti geometrici, salvo forse accennare a discussioni circa il modo migliore (ossia insieme facile e rigoroso e abbastanza generale) per definire l'area delle figure piane. Si trattava di scambi di idee privi di effetto, dato che era contrario agli intendimenti generali il prescrivere particolari metodi di definizione e dimostrazione. Il metodo migliore (mi sembra, secondo il parere più diffuso, e comunque a mio avviso) dovrebb'essere quello (particolarmente sostenuto da De Giorgi) basato sulla quadrettatura: ogni quadrettatura (ad es. in cm^2, mm^2, ecc., e in orientazione qualunque) consente una valutazione per difetto e per eccesso contando solo i quadratini totalmente appartenenti alla figura oppure anche quelli che vi appartengono solo in parte. Si dimostra che (anche ruotando e spostando e modificando comunque la quadrettatura) i valori per difetto non superano quelli per eccesso; resta definita così un'area interna ed una esterna (estremo superiore delle aree per difetto, ecc.) e quindi l'area se queste coincidono.

14. Probabilità e statistica.

È questo l'argomento di mia più specifica competenza, ma, al contrario di quanto si potrebbe supporre a prima vista, è proprio quello su cui mi trovo maggiormente in difficoltà e in imbarazzo nell'esprimere pareri e suggerimenti sul modo di concretare le generiche indicazioni del programma.

Da una parte, il fatto stesso che si tratti di argomenti nuovi per i programmi liceali, e di cose che hanno avuto in tempi recenti un intenso sviluppo in molteplici direzioni sia concettuali che applicative, rende acuto quell'imbarazzo di cosa scegliere e cosa tralasciare che è attutito, negli altri campi, dal naturale intendimento di rinnovare « abbastanza ma non troppo » l'impianto tradizionale.

Ma poi c'è un'altra ragione, più specifica e più assillante, che crea difficoltà ed imbarazzo: ed è il fatto che nessuna spiegazione per quanto accurata sembra sufficiente a garantire dal rischio di fraintendimenti purtroppo assai frequenti. Si pensi, tanto per fare un esempio, alla credenza che i numeri « ritardatari » abbiano maggior probabilità degli altri di uscire (al lotto, alla roulette, ecc.): qualcuno, in base a confuse nozioni probabilistico-statistiche, pensa [13] che sia, sì, criticabile chi indulge a siffatta credenza immaginando virtù magiche dei numeri o accettando altre spiegazioni « superstiziose », ma che ... *il fatto è vero perchè è conseguenza della « legge dei grandi numeri »*! Questo, d'accordo, è un caso patologico, ma il peggio è che c'è tutta una catena di distorsioni analoghe, ma gradualmente via via meno appariscentemente patologiche, che inficiano spesso, dal punto di vista concettuale e spesso con erronee conseguenze anche sulle conclusioni pratiche, i ragionamenti probabilistico-statistici.

La consapevolezza di questo rischio e della difficoltà di scongiurarlo (oltre allo scrupolo di non cadere nel comune difetto di sopravvalutare, per naturale « deformazione professionale », l'importanza e « indispensabilità » della propria materia) mi avevano trattenuto dall'associarmi espressamente e pressantemente alla proposta di vari colleghi (soprattutto Prodi) di inserire nei programmi tale argomento, attribuendo anzi a tale innovazione un significato e un valore particolarmente caratterizzanti per lo spirito della riforma. Naturalmente, apprezzavo e condividevo pienamente tali idee, e penso, con delle informazioni obbiettive, di averle avvalorate, ma sempre preoccupandomi di non influenzare passionalmente il parere della maggioranza. (Come, invece, non avevo scrupolo di fare — ed anzi consideravo doveroso fare — negli altri casi, dove, come « estraneo » o « neutrale », ritenevo di poter meglio cercar di correggere le contrapposte unilateralità di algebristi analisti e geometri e la scarsa presenza di meccanici al fine di un'armonica unitarietà dei programmi).

Alla fine, l'inclusione di tali argomenti fu approvata con voto unanime; circa il modo di interpretare e sviluppare tale parte del programma dovrei esprimermi nel pezzo a me affidato della relazione collettiva (decisa, come detto nel n. 1, nella seduta tenuta subito dopo dalla C.I.I.M.). Non posso anticipare qui le indicazioni riser-

---

(13) Ricevetti osservazioni in tal senso anche recentemente, in risposta a un articoletto su « La Stampa » di Torino contro tale fallace credenza spesso avallata anche dai quotidiani (esplicitamente o implicitamente, col non render palese che è cosa da non prendere sul serio).

vate a quella pubblicazione, non solo per correttezza, ma anche perchè sono tuttora lontano dal prevedere le conclusioni che presuppongono un accurato esame di cosa si possa includere od escludere per riuscire a dare qualcosa di sufficientemente significativo e concluso in un tempo non eccessivo. Può darsi che riesca meno disagevole indicare due o tre tipi di tracce alternative anzichè una sola: è forse impossibile infatti trovare una soluzione soddisfacente riguardo a tutte le esigenze, e lo è certo meno dando la preminenza ad alcune sacrificandone altre.

Si possono comunque sviluppare qui delle considerazioni preliminari orientative; in gran parte esse non fanno del resto che ribadire cose che ho ripetuto più volte (e spesso si limiteranno a rinviare a tali altri scritti).

Una primissima esigenza, derivante dal rischio già prospettato di fraintendimenti e distorsioni, mi sembra debba essere quella di chiarir bene ogni affermazione e conclusione insistendo più su *ciò che essa non dice* che su *ciò che essa dice*. Badare insomma soprattutto che il rischio maggiore non è tanto quello di non arrivare in sella (ad afferrare un enunciato) ma, come quel proverbiale cavaliere, di cadere dalla parte opposta (cioè a interpretare un enunciato estensivamente). Più che mai in questo campo (ed in vista delle interpretazioni e applicazioni che ne derivano ovunque in pratica) è essenziale il precetto già affermato in generale (nelle Avvertenze ufficiali e nei commenti personali) di insegnare più *per problemi*, su esempi, anzichè per metodi; ed anzi si potrebbe maggiormente sottolineare l'esigenza segnalata dicendo che qui si dovrebbe *insegnare per controesempi*.

Sul modo di mettere in guardia contro i temuti fraintendimenti, si vedano considerazioni in forma semplice nel menzionato libro per ragazzi (op. cit. nota in calce ([8]), § 17): in forma più ampia ma discorsiva in un libro per economisti ([14]), ed infine con commenti ispirati al presente problema nella conferenza « Sulla suddivisione casuale di un intervallo: spunti per riflessioni » (tenuta nel febbraio 1967 al Seminario matematico e fisico di Milano; in c. di

---

([14]) « L'incertezza nell'economia », parte prima (di B. de Finetti) del volume (in collaborazione con F. Emanuelli) *Economia delle assicurazioni* (vol. XVI del *Trattato italiano di economia*, diretto da C. Arena e G. Del Vecchio, ed. UTET, Torino, 1967).

stampa nei Rend. id. id.). Bellissimi esempi di come si possa insegnare mostrando perchè conclusioni « spontanee » sono false e valgano invece altre a prima vista « surprising » si trovano nel magistrale trattato di Feller ([15]); sono a un livello più elevato, ma spesso adattabile a un'esposizione elementare (ad es. presentandoli su casi particolari semplici o esponendo il ragionamento limitandosi alle linee generali).

Quanto al contenuto dei programmi, occorre includere il massimo di argomenti e concetti significativi e importanti. Occorre quindi evitare, tra l'altro, che i tradizionali esempietti su giochi e estrazioni facciano sprecare tempo e — peggio — indurre a un'idea del tutto inadeguata della nozione di probabilità. (Sarebbe come ritenere di poter definire il « peso » col dire che è la stessa cosa del volume, supposto il corpo *omogeneo* e appropriate unità di misura; ma ciò renderebbe equivalenti tutte le nozioni additive, come prezzo, massa, potere nutritivo, ecc., a meno di non reintrodurre indirettamente il significato di ogni grandezza dicendo che « omogeneo » significa, caso per caso, « ugual peso per ugual volume », « ugual prezzo per ugual volume », e via dicendo, con evidente circolo vizioso).

Il modo più significativo per introdurre la nozione di probabilità e dare un'idea del suo significato nei più disparati campi di applicazione è, a mio avviso, quello che si ricollega alle moderne assiomatizzazioni riguardanti il « comportamento coerente in condizioni d'incertezza » (« Teoria delle decisioni », con continuazione — per sviluppi di cui sarebbe eccessivo pretendere di occuparsi — nella « Teoria dei giochi »). Ciò darebbe l'accesso più rapido (e più protetto dal rischio di fraintendimenti) alle applicazioni di natura economica, di statistica applicata, di ricerca operativa. Un tentativo di esposizione elementare secondo tali linee si trova nel già citato testo di de Finetti e Minisola (op. cit. nota in calce (9); Cap. IV, « Calcolo delle probabilità », e successivi su statistica ed applicazioni); per scuole diverse dall'Istituto Tecnico Commerciale (per cui era concepito; nè intendo sostenere che quel primo tentativo costituisca un « non plus ultra » neppure per tale particolare destinazione) l'orientamento non potrebbe, naturalmente, essere così prevalentemente o quasi esclusivamente

(15) W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, ed. J. Wiley, New York, vol. I, 1950 (2ª ed. 1958), vol. II, 1966; un'ampia recensione dello scrivente è apparsa in *Statistica*, 1966 (vol. 26, n. 2, pp. 526-8).

economico. A seconda degli intendimenti le questioni di tale natura potrebbero ridursi a poco od anche a un minimo (ma non, a mio avviso, venire ignorate del tutto).

Gli intendimenti di natura diversa che potrebbero aspirare ad un ruolo preponderante (sia in dipendenza dei tipi di scuola, classica o scientifica ecc., sia a seconda di preferenze di insegnanti o autori di libri di testo ecc.) sarebbero quello concettuale-filosofico (ragionamento induttivo, ecc.) e quello delle applicazioni tecnico-scientifiche. La maggiore difficoltà che si presenterebbe per tracciare un programma ispirato a queste pur legittime finalità consiste nel fatto che la scarsezza del tempo e il livello necessariamente elementare degli strumenti che si possono introdurre non consentirebbero probabilmente di basare su di un sufficiente corredo di nozioni ed esemplificazioni concrete delle discussioni che, se svolte in forma vaga e superficiale, non farebbero che aumentare il già immenso cumulo di rifiuti nel magazzino del tempo sprecato.

Eppure sarebbe certo essenziale far sapere come l'ingresso del calcolo delle probabilità nel campo fisico, dapprima limitato alle innocue applicazioni agli errori di misura, abbia poi messo in crisi le concezioni classiche deterministiche contrapponendovi una visione indeterministica (grosso modo, quella di « Democrito, che il mondo a caso pone »; le polemiche fra le due concezioni, riproposte sempre in rinnovate versioni, è tuttora aperta). Sarebbe bene far sapere come ciò abbia avuto inizio con la teoria cinetica dei gas (questione dell'irreversibilità, dell'entropia, ecc.), e raggiunto l'apice con la fisica quantistica (principio d'indeterminazione, interpretazione probabilistica secondo Bohr, ecc.). Come sarebbe essenziale far riflettere sui procedimenti (induttivi, su base spesso statistica) in base ai quali la scienza progredisce, « scoprendo » dei modi soddisfacenti (sia pure *pro tempore*) di descrivere e immaginare interpretabili i fenomeni, e via via adeguandoli o sostituendoli man mano che l'estendersi delle esperienze e l'approfondirsi delle analisi teoriche fa apparire sempre nuove esigenze.

Questo, in poche parole, è ciò che andrebbe considerato come la principale acquisizione culturale secondo entrambi i punti di vista accennati (con diverso accento su queste o quelle parti a seconda della prevalenza di interessi logico-filosofici o tecnici). Ed altri cenni sarebbero utili, se possibile, su questioni attinenti alla teoria dell'informazione (che del resto si ricollega all'entropia), su modelli stocastici per molti processi (fisici, biologici, economici, sociali, ecc.) e su molti altri argomenti di grande interesse. Senonchè, volendo accennare (come pur occorrerà, più o meno succintamente) almeno alle più fondamentali tra queste idee generali, e basarsi come è necessario su esempi concreti abbastanza semplici, sembra difficile sceglierli nell'ambito corrispondente.

A prescindere dall'insegnamento specifico di calcolo delle probabilità, ma non senza connessione con esso, sarebbe inoltre assai opportuna una precoce iniziazione dei giovani alla pratica del valutare delle probabilità (cioè: di esprimere in cifre il proprio stato d'incertezza su circostanze della vita comune) e di perfezionare l'attitudine istintiva di regolarsi in base ad esse; ma ciò esula (forse) dall'argomento dei programmi.

15. I PROGRAMMI: TESTO UFFICIALE E SUGGERIMENTI.

Non rimane che raccogliere le cose dette in forma schematica, riportando affiancati, *a sinistra* i programmi nel testo ufficiale delle proposte approvate nei due incontri di Frascati, e *a destra* la loro interpretazione e presentazione quale risulterebbe accogliendo (tra le varianti di ordinamento e di metodo consentite) quella rispondente alle considerazioni e ai suggerimenti qui presentati. Riferimenti ai nn. dove tali considerazioni e suggerimenti sono stati formulati, nonchè a quelli dove verranno sviluppate (più avanti) delle « tracce esemplificative », permetteranno di usare queste pagine simultaneamente come documento sui programmi e come indice per il reperimento delle osservazioni svolte nel presente articolo su ciascun argomento (spesso in punti diversi, se attinenti a diversi tra gli aspetti in discussione).

Per comodità di confronto gli argomenti del testo ufficiale sono stati numerati progressivamente (capoverso per capoverso), e tale numerazione è stata ripetuta nel testo riordinato (quando occorreva spezzare un capoverso, distinguendone le parti con le lettere *a*, *b*, ecc.); nei pochi casi ove va fatta allusione a un argomento di un anno diverso, al numero (ed eventuale lettera) viene premessa in cifre romane l'indicazione dell'anno (sempre con la numerazione da I a V per biennio e triennio di seguito, come attualmente nel liceo scientifico e come logicamente dovrebbe estendersi a tutti i tipi di licei e di scuole).

I ANNO

Attualmente: { I Liceo Scientifico
IV Ginnasio (Classico)

TESTO UFFICIALE

PROPOSTE PER I NUOVI PROGRAMMI LICEALI

A) 1 - Nozioni elementari sugli insiemi e sulle corrispondenze.

2 *a* - Richiami sui numeri naturali.
2 *b* - Quoziente, resto, divisibilità, algoritmo euclideo e numeri primi.

3 - Riesame comparativo delle operazioni con numeri interi relativi e razionali ed enunciazione delle relative proprietà formali.

4 - Espressioni letterali ed uguaglianze notevoli fra numeri rappresentati da esse, quali

$$3a+2a=5a \qquad a^2 \cdot a=a^3;$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2; \qquad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2; \text{ ecc.}$$

5 - Esercitazioni, non complicate, nelle quali i numeri siano rappresentati anche da lettere, per richiamare l'aritmetica già studiata ed abituare a semplificare le espressioni razionali.

6 *a* - Ordinamento dei numeri interi e razionali.
6 *b* - Valori assoluti.
6 *c* - Proprietà formali delle disuguaglianze.

7 *a* - Classi di resti (mod n).
7 *b* - Partizioni di un insieme e relazioni di equivalenza.

B) 8 - Il piano come insieme di punti e le rette come suoi sottoinsiemi: incidenza, parallelismo, direzione.

9 - Proprietà di ordinamento della retta e di partizione del piano.

10 - Segmenti, figure convesse, angoli, poligoni.

ORDINE DI SVOLGIMENTO SUGGERITO

GENERALITÀ.

1 - Nozioni elementari sugli insiemi e sulle corrispondenze.

NUMERI, RETTA, PIANO.

— - Richiamo sui numeri reali (TRACCIA n. 19; cfr. anche n. 11).

4 - Espressioni letterali ed uguaglianze notevoli fra numeri rappresentati da esse, quali ... (v. Testo ufficiale).

5 - Esercitazioni, non complicate, nelle quali i numeri siano rappresentati anche da lettere ... (v. Testo ufficiale) (cfr. n. 12, « espressioni letterali », e nota ([8])).

3 - Riesame comparativo delle operazioni con numeri interi relativi e razionali ed enunciazione delle relative proprietà formali (TRACCIA n. 20; cfr. anche n. 11).

8 - Il piano come insieme di punti e le rette come suoi sottoinsiemi; incidenza, parallelismo, direzione (TRACCIA n. 21; cfr. anche nn. 10 e 11).

II 10 *a* - Traslazioni (automaticamente inserito in TRACCIA n. 21).

6 *abc* - Ordinamento dei numeri interi e razionali; valori assoluti; proprietà formali delle disuguaglianze.

9 - Proprietà di ordinamento della retta e di partizione del piano.

FIGURE GEOMETRICHE.

10 - Segmenti, figure convesse, angoli, poligoni.

QUESTIONI ARITMETICHE.

2 *a* - Richiami sui numeri naturali.

2 *b* - Quoziente, resto, divisibilità, algoritmo euclideo e numeri primi.

7 *a* - Classi di resti (mod *n*).

7 *b* - Partizioni di un insieme e relazioni di equivalenza.

II ANNO

Attualmente: { II Liceo Scientifico
V Ginnasio (Classico)

TESTO UFFICIALE

PROPOSTE PER I NUOVI PROGRAMMI LICEALI

A) 1 - Introduzione intuitiva dei numeri reali. Enunciazione delle relative proprietà.

2 *a* - I polinomi (in una variabile introdotti come funzioni).
2 *b* - Enunciato del principio di identità dei polinomi.

3 *a* - Operazioni con polinomi.
3 *b* - Algoritmo euclideo della divisione fra polinomi.
3 *c* - Il caso del divisore di 1° grado.
3 *d* - Il teorema di Ruffini e le sue conseguenze.

4 *a* - Generalità sulle equazioni.
4 *b* - Equazioni di 1° grado a un'incognita e problemi relativi.

5 - Funzioni razionali fratte.

6 *a* - Coordinate cartesiane sulla retta e sul piano.
6 *b* - Applicazioni.
6 *c* - Diagrammi di semplici funzioni.

7 - Illustrazione su esempi tratti dalle teorie svolte di qualche struttura significativa come quelle di gruppo, anello, corpo ed eventualmente: reticolo, spazio metrico.

B) 8 - Congruenza oppure isometria - Confronto dei segmenti.

9 - Perpendicolarità.

10 *a* - Traslazioni.
10 *b* - Simmetrie.
10 *c* - Rotazioni.
10 *d* - Applicazioni ai segmenti, agli angoli, ai triangoli, ai poligoni.

11 *a* - Circonferenza e cerchio.
11 *b* - Poligoni regolari.

12 *a* - Teorema di Talete.
12 *b* - Teorema di Pitagora.

ORDINE DI SVOLGIMENTO SUGGERITO

INTRODUZIONE ALLA « CONTINUITÀ ».

1	- Introduzione intuitiva dei numeri reali. Enunciazione delle relative proprietà (TRACCIA n. 22, cfr. anche nn. 10 e 11).
—	- Interpretazione come « continuità della retta » (v. sopra).
6 *a'*	- Coordinate cartesiane sulla retta e sul piano (solo in senso affine, con rif. a I anno, v. TRACCIA n. 21).

INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA METRICA.

10 *c*	- Rotazioni (v. TRACCIA n. 23).
8	- Congruenza oppure isometria. Confronto dei segmenti.
9	- Perpendicolarità.
6 *a''*	- Coordinate cartesiane sul piano (metrico).
12 *a*	- Teorema di Talete.
12 *b*	- Teorema di Pitagora.
6 *b*	- Applicazioni (delle coordinate cartesiane).

FUNZIONI ED EQUAZIONI.

6 *c*	- Diagrammi di semplici funzioni.
4 *a*	- Generalità sulle equazioni (cfr. n. 12).
4 *b*	- Equazioni di 1° grado a un'incognita e problemi relativi.
2 *a*	- I polinomi (in una variabile, introdotti come funzioni).
2 *b*	- Enunciato del principio di identità dei polinomi.
3 *abcd*	- Operazioni con polinomi. Algoritmo euclideo della divisione fra polinomi. Il caso del divisore di 1° grado. Il teorema di Ruffini e le sue conseguenze.
5	- Funzioni razionali fratte.

FIGURE E LORO TRASFORMAZIONI.

10 *bd*	- (Traslazioni), simmetrie, (rotazioni). Applicazioni ai segmenti, agli angoli, ai triangoli, ai poligoni. (Traslazioni e rotazioni erano state anticipate risp. al I anno e qui, più sopra; ora riprese per osservare le proprietà da studiare nel punto 7).
11 *ab*	- Circonferenza e cerchio. Poligoni regolari.
7	- Illustrazione su esempi tratti dalle teorie svolte di qualche struttura significativa come quelle di gruppo, anello, corpo ed eventualmente: reticolo, spazio metrico. (vedi sopra: traslazioni, simmetrie, rotazioni, queste ultime anche come avvio a « numeri complessi », III anno; esempi aritmetici, ecc.).

III ANNO

Attualmente: { III Liceo Scientifico
I Liceo Classico

TESTO UFFICIALE

PROPOSTE PER I NUOVI PROGRAMMI LICEALI

1 - Il piano vettoriale geometrico: combinazioni lineari, coordinate, traslazioni.

2 *a* - Sistemi di equazioni lineari in due incognite.
2 *b* - Equazione cartesiana della retta.
2 *c* - Sistema di due rette.

3 - I radicali e le potenze con esponente razionale.

4 - Equazioni del secondo grado sopra il corpo reale.

5 *a* - Numeri complessi.
5 *b* - Prodotto scalare.

6 - Elementi di trigonometria (seno, coseno, tangente. Teorema di addizione; teorema di Carnot, teorema dei seni).

7 - Gruppo delle congruenze e delle similitudini del piano.

ORDINE DI SVOLGIMENTO SUGGERITO

INTRODUZIONE DEI VETTORI.

1 - Il piano vettoriale geometrico: combinazioni lineari, coordinate, traslazioni (già sostanzialmente preparato negli anni I e II; qui introduzione sistematica con cenni ad altri campi, secondo TRACCIA n. 24).

2 *a* - Sistemi di equazioni lineari in due incognite.

2 *bc* - Equazione cartesiana della retta, sistema di due rette (in geometria affine).

SIMILITUDINI, NUMERI COMPLESSI, PIANO METRICO.

7 - Gruppo delle congruenze e delle similitudini del piano (con particolare riguardo a quello con punto *O* fisso).

5 *a* - Numeri complessi (v. TRACCIA n. 25, cfr. anche nn. 10, 11, 13).

6 - Elementi di trigonometria (seno, coseno, ecc., come Testo ufficiale) (v. TRACCIA n. 25).

5 *b* - Prodotto scalare (v. TRACCIA n. 24).

2 *b* - Equazione cartesiana della retta (nel piano metrico).

APPLICAZIONI ALGEBRICHE

3 - I radicali e le potenze con esponente razionale.

4 - Equazioni del secondo grado sopra il corpo reale (entrambi questi argomenti si prestano meglio ad essere esposti con riferimento al campo complesso, anche se poi usualmente nelle applicazioni ci si limiterà al campo reale).

IV ANNO

Attualmente: { IV Liceo Scientifico
II Liceo Classico

TESTO UFFICIALE

PROPOSTE PER I NUOVI PROGRAMMI LICEALI

1 - Equazione cartesiana della circonferenza, dell'ellisse, dell'iperbole e della parabola.

2 *a* - Generalità sulle funzioni reali di variabile reale.
2 *b* - Funzioni monotone e loro inverse.
2 *c* - Funzione esponenziale e logaritmica.
2 *d* - Progressioni aritmetiche e geometriche.

3 *a* - Lo spazio come insieme di punti, le rette e i piani come suoi sottoinsiemi.
3 *b* - Incidenza e parallelismo.
3 *c* - Semispazi.

4 *a* - Spazio vettoriale geometrico.
4 *b* - Estensione allo spazio del prodotto scalare.
4 *c* - Perpendicolarità. Distanze. Angoli di rette e piani.

5 - Limiti, continuità, derivate.

6 *a* - Area delle figure piane: poligoni, cerchio.
6 *b* - Lunghezza della circonferenza.

ORDINE DI SVOLGIMENTO SUGGERITO

INTRODUZIONE ALL'ANALISI.

2 *d* - Progressioni aritmetiche e geometriche.

2 *c* - Funzione esponenziale e logaritmica.

2 *b* - Funzioni monotone e loro inverse.

2 *a* - Generalità sulle funzioni reali di variabile reale (Riordinamento suggerito per passare costruttivamente dal particolare al generale; sarebbe importante far notare e utilizzare il collegamento tra funzione esponenziale e potenze, a^c con variabile a oppure c, e tra funzione esponenziale nel campo reale e rotazione $e^{i\theta}$ nel campo complesso; cfr. programmi III anno).

5 - Limiti, continuità derivate (con opportunità di aggancio a grandi problemi d'interesse generale, e di parallele indicazioni informative su « integrale »; cfr. n. 12).

GEOMETRIA (PIANO E SPAZIO).

1 - Equazione cartesiana della circonferenza, dell'ellisse, dell'iperbole, della parabola.

6 *ab* - Area delle figure piane; poligoni, cerchio. Lunghezza della circonferenza (cfr. n. 13, in fine).

3 *abc* - Lo spazio come insieme di punti, ecc. (affine).

4 *a* - Spazio vettoriale geometrico (affine).

4 *b* - Estensione allo spazio del prodotto scalare (cfr. oss. nel n. 13).

4 *c* - Perpendicolarità. Distanze. Angoli di rette e piani.

V ANNO

Attualmente: { V Liceo Scientifico
III Liceo Classico

TESTO UFFICIALE

PROPOSTE PER I NUOVI PROGRAMMI LICEALI

1 - Solidi elementari e loro principali proprietà.

2 - Integrale definito. Primitiva di una funzione.

3 *a* - Volumi di solidi elementari.
3 *b* - Aree delle superficie di rotazione.

4 - Spazio vettoriale astratto. Suoi modelli e applicazioni.

5 *a* - Calcolo combinatorio.
5 *b* - Elementi di calcolo delle probabilità e semplici applicazioni alla statistica, alla teoria degli errori, ecc.

— - Un argomento complementare a scelta.

ORDINE DI SVOLGIMENTO SUGGERITO

Nessuna variazione.
Sul punto 2, cfr. n. 12.
Per il punto 4, TRACCIA n. 26; cfr. anche n. 13.
Per il punto 5 *b*, cfr. n. 14.
Per gli « argomenti complementari a scelta », v. nel n. 16 l'elenco di quelli « indicati a titolo esemplificativo » nel testo ufficiale.

16. Gli argomenti complementari a scelta.

Per completare la documentazione occorre riportare l'elenco degli argomenti complementari (a scelta), indicati nel programma a titolo esemplificativo, in un ordine che « non ha valore preferenziale » (infatti è l'ordine in cui sono state casualmente rilevate le richieste di parlare dei presentatori).

Potrà essere utile la presentazione in un ordine inteso a distinguere (e commentare) certi tipi di intendimenti e di soggetti. Si tratta di considerazioni molto approssimative, perchè i titoli si prestano tutti, quale più e quale meno, a una larga varietà di interpretazioni e di forme di trattazione. Dovrebb'essere superfluo, inoltre, avvertire che il mettere in luce delle differenze (di ampiezza, di importanza, di livello) fra diversi argomenti non ha nè potrebbe avere alcun carattere di indicazione preferenziale. È ovvio infatti che un criterio di preferenza non può esistere in assoluto, perchè la scelta « migliore » sarà, caso per caso, quella che ogni insegnante riterrà responsabilmente tale in relazione all'insieme di tutte le circostanze di cui dovrà tener conto: la sua propria idoneità a spiegare un dato argomento con competenza interesse e chiarezza, il livello complessivo di preparazione e versatilità degli studenti ed il tipo di mentalità e di gusti tra essi prevalente in base ai quali prevederne il gradimento e il profitto nello studio di un argomento fuori programma.

Elenchiamo in un primo gruppo gli argomenti che possono considerarsi come un'estensione di trattazioni già esistenti nel programma (sia svolgendole in modo più ampio, sia includendo parti nuove che le integrano).

1) Sistemi di equazioni lineari.

2) Proprietà elementari delle coniche.

3) Aspetti algebrici di problemi risolubili con riga e compasso.

4) Equazioni di 3° e 4° grado e cenni ai gradi superiori.

5) Elementi di geometria analitica dello spazio.

6) Le trasformazioni elementari e i loro gruppi.

7) Cenni di teoria dei numeri.

Altri due argomenti appaiono come « ripensamenti » su questioni trattate in modo intuitivo o incompleto, e che alla conclusione del ciclo di studi meriterebbero un riesame con mentalità più « matura ». Da notare che in certe fasi della discussione sui programmi gli argomenti a scelta si consideravano sempre « ripensamenti », ma poi tale dizione apparve troppo limitativa. Va detto però che anche molti altri argomenti (sia già detti che seguenti) costituiscono (o possono esser svolti in modo da costituire) dei « ripensamenti », in senso più o meno stretto.

8) Varie forme di costruzione dei numeri reali.

9) Fondamenti della geometria.

I rimanenti argomenti appaiono in misura maggiore come delle succinte trattazioni monografiche di questioni al di fuori del programma (seppure sempre in appropriata connessione con esso). Il loro ulteriore raggruppamento è fatto per analogia fra tipo di soggetti.

Cinque titoli si riferiscono a soggetti di natura generale, prevalentemente storica e logica.

10) Qualche tratto dell'evoluzione storica del pensiero matematico.

11) Introduzione alla logica matematica.

12) Algebra di Boole.

13) Elementi di teoria dei gruppi.

14) Elementi di topologia con applicazioni alle matematiche elementari.

Tre suggeriscono significativi approfondimenti concettuali specifici, con argomenti nuovi rispetto al programma. Da notare che gli argomenti 15 e 16 costituivano, nella proposta originaria, un unico titolo, poi spezzato nel timore che venisse suggerita una trattazione troppo pesante (senza escludere, naturalmente, che cenni dell'uno possano inserirsi se necessario per la trattazione dell'altro, pur di non superare il carico tollerabile per gli studenti).

15) Ampliamento proiettivo dello spazio affine (o euclideo) e proprietà grafiche fondamentali.

16) Geometrie non euclidee con riferimenti storico-critici sullo sviluppo del pensiero matematico.

17) Fondamenti di cinematica classica e relativistica.

Gli argomenti che indichiamo per ultimi (cinque) hanno in comune il carattere « applicativo » (in senso lato).

18) Elementi di calcolo numerico.

19) Esempi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti e applicazioni.

20) Ricerca operativa.

21) Programmazione lineare.

22) Elementi di teoria dei giochi.

Ogni lettore avrà certamente delle obiezioni a questo tentativo di classificazione. Sono certamente fondate; ma penso ve ne sarebbero altrettante comunque avessi risolto i molti dubbi, e ritengo che un tentativo (senza pretese) di dare un certo ordine era tuttavia meglio che niente. Spero che il lettore sarà obbligato a un numero un po' minore di salti per rintracciare argomenti analoghi: tutto qui.

17. Proposte per l'eventuale liceo magistrale.

È stato rilevato che il programma minimo comune proposto per i licei non potrebbe essere adottato (neppure con le differenze di orientamento ammesse in generale) nel caso del liceo magistrale « *nell'eventualità che il titolo di studio rilasciato alla fine del L.m. conservi (almeno transitoriamente) valore abilitante all'insegnamento nelle Scuole elementari* ». In tal caso occorre infatti trovare posto nel programma (inevitabilmente, sacrificando qualcos'altro) per la parte più specificamente riguardante la preparazione didattica all'insegnamento della matematica.

Di conseguenza, cercando di limitare quanto più possibile la differenziazione, sono state approvate le seguenti « *Proposte speciali per il liceo magistrale* », che sostanzialmente consistono nel sostituire degli insegnamenti speciali al programma dell'ultimo anno (con in più un ritocco tra IV e V anno). Eccone il testo.

PROPOSTE SPECIALI PER IL LICEO MAGISTRALE

Nell'eventualità che il titolo di studio rilasciato alla fine del liceo magistrale conservi (almeno transitoriamente) valore abilitante all'insegnamento nelle scuole elementari si propongono le seguenti varianti al precedente programma di base, limitatamente al 4° e 5° anno *e con la precisazione che durante tutto il triennio l'insegnante dovrà in-*

dirizzare il suo insegnamento, oltre che verso l'arricchimento culturale del futuro maestro, anche e specialmente verso la sua preparazione didattica.

IV ANNO. *Si elimini dal programma-base l'argomento « Limiti, continuità, derivate » sostituendolo con l'altro « Solidi elementari e loro principali proprietà. Volumi di solidi elementari. Aree delle superficie di rotazione » tratto dal programma-base del V anno.*

V ANNO. *Si sostituisca il programma base con il seguente programma differenziato (da svolgersi con espliciti riferimenti didattici):*

— *L'aritmetica dei naturali e insiemi finiti.*
— *Numerazione scritta e parlata; sistemi di numerazione e operazioni.*
— *Frazioni (come operatori su grandezze).*
— *Costruzione dei numeri reali a partire dai naturali.*
— *Cenni di analisi infinitesimale.*
— *Analisi combinatoria; probabilità; informazione.*
— *Cinematica di meccanismi particolarmente semplici e significativi.*
— *La genesi delle strutture matematiche nel fanciullo, con particolare riguardo al formarsi dell'inventiva matematica.*
— *Didattica dell'aritmetica e della geometria con introduzione all'uso di materiale appropriato.*

Altre questioni non sono state discusse, nè era il caso di farlo in riunioni dedicate ai programmi. Sembra però opportuno accennarne qui, almeno di sfuggita, per segnalarle.

Risulta che in tutta la scuola elementare la matematica non figura come materia d'esame per nessun concorso per maestri e neppure per direttori didattici ecc. Ciò è certamente inammissibile, mancando ogni garanzia di un minimo di competenza al riguardo, ed anche perchè, nella mentalità vigente, ciò che non è materia di esame sembra abbia valore secondario.

La questione della formazione dei maestri (richiedendo o meno una preparazione universitaria, sia pure di durata ridotta) merita di essere esaminata approfonditamente come parte della questione generale della formazione di insegnanti per tutti i tipi di scuole. Una preparazione più seria, più specifica, ed anche (se necessario e socialmente possibile e opportuno) più prolungata, è senza dubbio auspicabile, ma, esaminando settorialmente ogni singolo caso, si verificano sbandamenti e contraddizioni di atteggiamenti e di norme.

La tendenza a una miglior preparazione e selezione per l'insegnamento nella Scuola elementare non è conciliabile con quella a nessuna preparazione e selezione a rovescio nella Scuola media, e con lo scarso impegno a rendere veramente « didattico » l'indirizzo « didattico » nei corsi di laurea dove è stato istituito.

Il criterio menzionato della « selezione a rovescio » è poi quello mai abbastanza deprecato del basarsi sul « titolo di studio ». Passi per quello specifico (ad es. laurea in Matematica, benchè io ritenga assai più facile che un laureato in Matematica sappia far bene l'assistente universitario che l'insegnante di Scuola media, anche senza Osservazioni scientifiche); ma le altre lauree che garanzia danno, se non quella negativa di non esser riuscito a farne l'uso specifico? Comunque, io non mi scandalizzo del fatto che possa insegnare Matematica un laureato in Farmacia o in Veterinaria o insegnare lingue un laureato in Giurisprudenza, bensì del fatto che essi siano ammessi in base a tale titolo anzichè dimostrando di saper assolvere il compito in competizione senza privilegi con ogni altro aspirante, anche se sprovvisto di laurea o di qualunque titolo di studio.

Povero Einaudi, con le sue « prediche inutili » contro il tabù dei titoli di studio a « valore legale » e tanti altri disastrosi tabù che ci soffocano!