Bruno de Finetti

# "STIMOLARE", non "SCODELLARE"

*Gemma Harasim, la mamma di Lucio (50 anni fa, nell'articolo che precede) lamentava che la matematica venisse insegnata scodellandola (e, purtroppo, dovrebbe lamentarlo anche oggi, nonostante lodevoli eccezioni). Occorrerebbe invece farla nascere da sé stimolandone e incoraggiandone la scoperta e sfruttando ogni conquista per provocare successive reazioni a catena.*

## 1. - Conta piú il modo che il contenuto

In molte discussioni sull'insegnamento della matematica (come, in genere, per tutte le materie) il discorso verte principalmente sui programmi. Se n'è parlato spesso anche sul PdM, ed anche nel presente fascicolo si troveranno indicazioni (perfino mie) su possibili programmi o tracce di programmi (pp. 11-46), sottolineando però sempre, piú o meno esplicitamente, che importa non tanto il programma con i suoi *contenuti* quanto il *modo* in cui l'insegnamento stimola e sviluppa nei discenti l'interesse per i concetti e metodi appresi e la capacità di sfruttarli, consciamente o inconsciamente, in ogni riflessione, situazione, problema, gioco, scherzo, nella scuola e fuori.

La formazione del pensiero, del patrimonio mentale di conoscenze utilizzabili, è un processo di sviluppo *organico* (come quelli della biologia), e non un mero lavoro *meccanico* (sia pur di precisione) come il montaggio di una macchina. Invece, secondo la mentalità della scuola tradizionale, parlando di « programmi » (« scolastici » in senso deteriore) sembra proprio si abbia a modello il montaggio di una macchina: ogni pezzo dopo i pezzi precedenti per incastrarvelo, e sempre passivamente secondo ricette-istruzioni, senza chiedere il perché e vedere l'utilità finché il congegno non sia pronto a funzionare. (E se, dalla scuola tradizionale, si passa a quella odierna, non si può non rilevare che — sotto questo aspetto — l'impostazione assiomatica, usata come introduzione anziché come coronamento, anziché correggere tale stortura la perfeziona, la istituzionalizza, la erige a dogma. Sempre piú « scodellare », non « stimolare », anziché viceversa!).

Con altra immagine simile, criticai una volta tale modo di procedere, con sistematicità in senso (a mio avviso) ottuso, dicendo che consisteva nel far fare un coso (che dovrebbe poi riuscire un edificio) insegnando solo a mettere un mattone dopo l'altro, un mattone sopra l'altro. Un amico, stupito della mia opposizione a tale consuetudine, mi chiese se, allora, pensavo che la matematica « *si dovesse apprendere come la lingua materna* », sentendola parlare e cominciando a parlarla. Ebbene: anche se tale formulazione mi lasciò, lí per lí, un po' perplesso, e se, come ogni formulazione semplicistica, risulta alquanto esagerata e caricaturale, sostanzialmente ritengo tranquillamente che la mia risposta si debba esprimere con un *sí*.

## 2. - Varietà di modelli cui ispirarsi

Esistono molti esempi di didattiche che piú o meno sistematicamente indicano o suggeriscono metodi intesi a sfruttare questo tipo di metodologie. E sarebbe bene che ogni insegnante cercasse di informarsi direttamente al riguardo, riflettendo poi e replicando secondo le proprie tendenze o attitudini o esperienze quale seguire o a quali ispirarsi per tentare una via propria. Il che non sarebbe temerarietà o superbia: non si tratterebbe di atteggiarsi a « caposcuola », ad « autorità »; basterebbe (ed è la cosa migliore) considerarsi uno dei moltissimi insegnanti che, con modestia e coraggio, provando e perfezionandosi e ascoltando il giudizio degli allievi, si sforzano con successo di sfruttare le doti della loro propria personalità per rendere interessante lo studio, e in particolare lo studio della matematica. E' la popria personalità l'elemento vivo e vivificatore, tramite il quale l'insegnante può rendere vivo e fecondo il metodo che gli è congeniale e in cui crede, metodo che (per quanto ben congegnato) è di per sé cosa astratta e arida.

Fra i metodi piú noti vi sono notevoli differenze. Quelli piú ambiziosi (talvolta, forse, temerari) si prefiggono di introdurre alla conoscenza di nozioni e strutture complesse mediante esempi o anche giochi alquanto complessi. Come esempio — certamente lodevole — si può citare Dienes. All'altro estremo, vi sono le immagini semplici e piú o meno carine che ciascuno può escogitare e presentare senza pretese, ma spesso con scarsa utilità perché usate solo come esemplificazione isolata, in un fugace cenno iniziale, senza successive riutilizzazioni o significativi approfondimenti.

Ognuno farà bene a comportarsi come ritiene piú adatto per sé e per i propri allievi, evitando sia di strafare per faciloneria che di esitare per pigrizia o timidezza. Se posso dire la mia preferenza (che vale ben poco, dato che non ho esperienza di insegnamento fuorché universitario), prediligo le cose piú semplici e chiare, ma rese istruttive sfruttandole a fondo (benché senza fretta, gradualmente) con tutti i collegamenti appropriati e fecondi di riflessioni. Sono però convinto (e ciò mi farebbe quasi cancellare la precedente riserva dovuta alla mia mancanza di esperienza di insegnamento non universitario) che le caratteristiche di un buon insegnamento siano le stesse indipendentemente dall'età dei discenti, salvo l'adeguamento al livello di conoscenze già acquisito. Ma ritengo sia terribilmente sbagliata (e dannosa) l'idea di dover adattare l'insegnamento all'età secondo la prassi vigente, che consiste nell'impoverire l'insegnamento dato ai bambini riducendo tutto al livello di « puerile » in senso spregiativo, e nell'impoverire l'insegnamento dato ai piú adulti depurandolo di tutte le linfe vitali « puerili » nel senso della freschezza e incisività, come se unico precetto dovesse essere quello di rendere tutto barboso: o barbosamente pseudopuerile o barbosamente antipuerile. Occorrerebbe invece che tutti, adulti e bambini, in modo di apparenza differente ma sostanzialmente identico, fossero « intelligentemente puerili » e trattati come tali. (Per chiarire cosa intendo per « puerile » gioverà aggiungere che come negazione di « puerile », intendo « rimbambito »: cioè: incapace di vedere cose nuove senza pregiudizi o prevenzioni o paraocchi).

### 3. - Suggerimenti ed esempi per illustrarli

Il seguito del presente articolo non è che un piccolo campionario di esempi inteso a chiarire e illustrare praticamente i concetti or ora espressi, che, espressi con frasi, inevitabilmente generiche, lasciano il tempo che trovano. Non è tanto la scelta degli esempi in sé che conta, quanto le indicazioni sul modo di sfruttare ogni occasione per osservazioni atte a far sorgere discussioni, a far intravvedere collegamenti con vari argomenti e problemi, sia già incontrati sia invece preannunciati piú o meno vagamente coll'occasione.

Occorre, e cosí si può agevolare, un superamento della semplicistica dicotomia scolastica tra ciò che uno *sa* o *non sa*, tra ciò che deve sapere (magari... a memoria!...) perché *l'ha studiata*. Può darsi che risulti opportuno, magari, stabilire un certo istante in cui, dopo che un certo concetto o termine — per esempio *funzione* (o, come frase, *in funzione di*) — è stato introdotto e usato e praticamente chiarito richiamandone l'uso in precedenti occasioni, si dirà: « beh, ormai avete capito, possiamo ritenere acquisita tale nozione che, volendo darne una definizione, si potrebbe precisare cosí e cosí; comunque, come per qualunque nozione, la sua conoscenza si continuerà a perfezionare incontrandola in sempre nuovi problemi e contesti, cosí come finora, prima di considerarla, in certo senso " ufficialmente ", *acquisita* ».

L'importante è evitare quell'errore (da molti considerato purtroppo un vanto di rigore o un'esigenza teorica) di « mettere il carro innanzi ai buoi » (come si dice nell'articolo di Gemma Harasim), ossia di dare una definizione (astratta, formale, ostica, tipo « deus ex machina ») di cose sconosciute di cui non si è imparato a sentire il bisogno. Bisogno che non si può far nascere istantaneamente con banali affrettate considerazioni, ma solo attraverso ripetute e persuasive esperienze di esemplificazioni. Altrimenti si acquisiscono non già gli indispensabili concetti (capacità di *vedere*, di *capire*, di *applicare* in ogni campo nuovo), ma solo vuote parole di un gergo *scolastico* che si cancellano o rimangono come relitti: (che sarà mai — si chiederà un adulto se dalla memoria gli nascono degli incubi — l'ipotenusa, la sineddoche, il noumeno, il flogisto,...?).

Il presente articolo si può anche considerare (e in parte è proprio nato cosí) come un'integrazione delle indicazioni per un insegnamento secondo la « Traccia » dell'articolo precedente (pp. 11-42); non tanto perché gli esempi vi si riferiscano ma quanto al *modo* di presentare argomenti che richiederebbero uso di intelligenza da parte degli insegnanti e appello all'intelligenza da parte degli studenti. (E cioè non autoritarismo, « è cosí e dovete ripetere cosí », né conseguente acquiescenza, « è cosí, perché il testo, o il prof., dice cosí »).

Gli esempi sono pochi e slegati, per toccare campi diversi senza occupare troppe pagine e pur dedicando abbastanza spazio per indicare parecchie delle molte osservazioni che da ciascun esempio raccomandiamo di trarre e sviluppare e suggerire.

**4. - (Es. n. 1) Come dividere in modo equo?**

Questo esempio non è inventato. E' stata una bambina (di 5 anni) che, dovendo dividere dei biscotti, in modo equo, fra delle compagne, escogitò questo procedimento. Continuò a distribuirne uno per volta a tutte le bambine finché possibile. Quando ne rimasero troppo pochi per continuare, li dimezzò e distribuí mezzi biscotti; poi dimezzò i residui mezzi biscotti e distribuí quarti-biscotti; e cosí via. Questo fatto mi è stato raccontato da David Hawkins (l'A. dell'articolo « Cosa significa essere insegnante », PdM, 1974, n. 3, pp. 35-40).

Consideriamo un caso tra i piú semplici, ma già istruttivo: dividere 4 biscotti fra tre bambine. Dandone uno a ciascuna ne avanza uno; facendone due metà non si può distribuire niente; dimezzando le metà si ottengono 4 quarti, uno per ciascuna e ne avanza uno; e qui ricomincia...

Ogni bambina avrà in tal modo un biscotto, piú un quarto, piú un sedicesimo (un quarto di un quarto), piú un sessantaquattresimo (un quarto di un sedicesimo) ecc. (all'infinito).

*Quante osservazioni da provocare o suggerire!*

Vediamone alcune, un po' a caso, utili per vari collegamenti di idee, fermo restando comunque che la maggiore utilità si ottiene quando le osservazioni, queste o altre, simili o lontane) vengono fuori spontaneamente da riflessioni e fantasie di bambini e (perché no?) anche di insegnanti.

(1) Possiamo scrivere sinteticamente la precedente conclusione come segue:

| interi | mezzi | quarti | ottavi | 16-esimi | 32-esimi | 64-esimi | 128-esimi | 256-esimi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

e si vede cosí che il metodo corrisponde alla scrittura binaria:
$4/3 = 1{,}010101010101...$ (indefinitamente).

N.B.: Ciò va benissimo sia quando il sistema binario è già noto e sia anche come prima occasione per introdurlo (o darne un cenno preliminare o un preannuncio prepreliminare). Anche il fatto di introdurre subito i sistemi di numerazione (come prima cosa, o almeno senza ritardo) per « cifre dopo la virgola » (« decimali » o analoghe) gioverebbe a evitare traumi nel liberarsi tardivamente dall'abitudine a pensare solo ai numeri interi (o ai razionali scritti artificiosamente come « frazioni »). V. anche « Traccia », nn. 4 e 6.

2) Il risultato è reso visibile nella figura, dove sono indicati risp. con tratteggio, o asterisco, o cerchietto, i pezzi (biscotti, quarti, sedicesimi, ecc.) spettanti alla 1ª, 2ª, 3ª bambina. Le tre aree sono uguali perché formate con pezzi (rettangolini) tre a tre uguali (come del resto si sapeva).

(3) Se, anziché dimezzarli, i pezzi non distribuiti venissero sempre divisi in 10 parti uguali, si avrebbe analogamente
$4/3 = 1{,}333333333... = 1 + 3\,(1/10 + 1/100 + 1/000 + ...)$.

Ciò corrisponde alla scrittura decimale (usuale).

Come distribuzione, significa che ogni volta, di 10 parti se ne distribuiscono 3 ad ogni bambina e ne resta una da dividere ancora in 10 parti.

Risulta (come sopra per $k = 4$) che per $k = 10$ la serie geometrica $1/k + 1/k^2 + 1/k^3 + ...$ vale $1/(k-1)$ ($1/3$ per $k = 4$, $1/9$ per $k = 10$); piú semplice ancora per $k = 2$. Forse ciò si può far intuire (credo) anche a bambini, pur di non insistere e appesantire.

(4) I sistemi di numerazione piú usati sono quelli di base 10 (usuale) e di base 2 (sistema binario, spec. usato nel calcolo elettronico). Ma si potrebbe usare, in principio, qualunque base $k$, e comunque gli esempi sulla divisione di biscotti si potrebbero ripetere prendendo un $k$ qualunque.

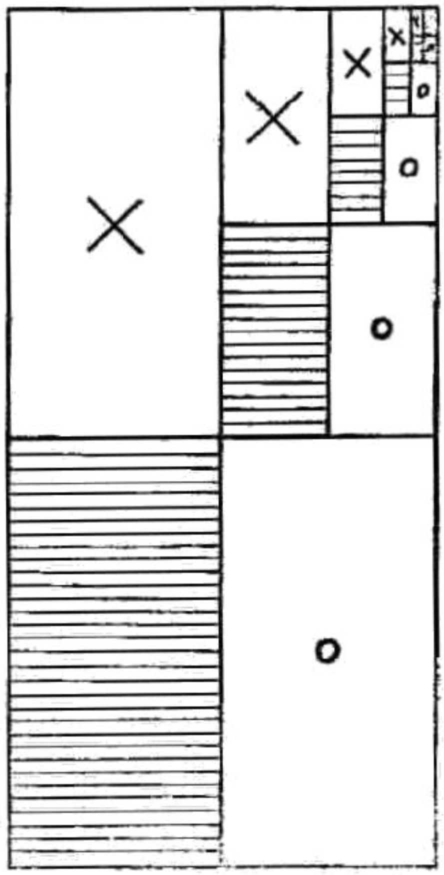
(5) Ma, allora, perché non fare subito tante parti dei biscotti residui quante sono le bambine? Nel nostro esempio, un biscotto a ciascuna, ed un terzo del biscotto rimasto?

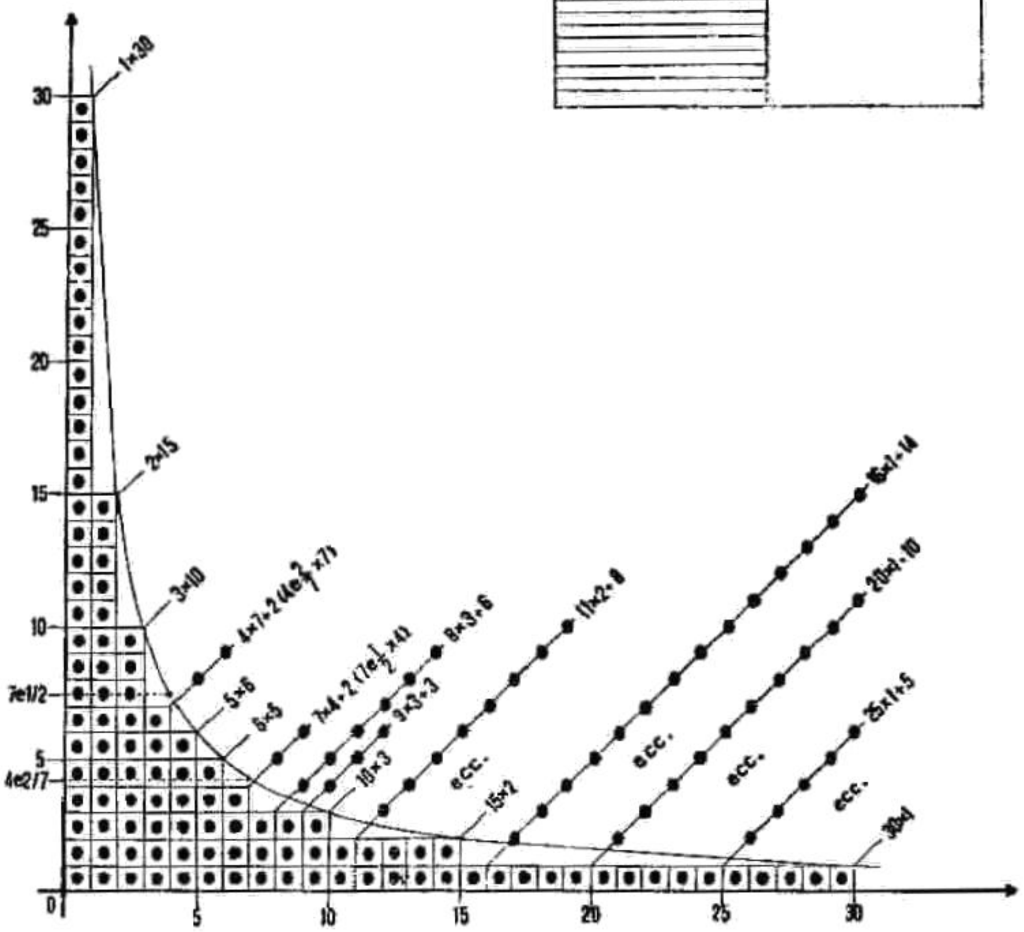
Qui si pongono altri problemi, di natura teorica e pratica.

Nulla si può dire senza fare opportune ipotesi, ad es. sulla forma dei biscotti (ad es. rettangolari, o rotondi, ecc.; per figure irregolari nulla si saprebbe dire, in generale!). Accennare a esistenza o no di costruzioni teoricamente « esatte », sempre imprecise nell'escuzione, ecc.

La divisione in metà (uguali) è sempre possibile se i pezzi si conservano simmetrici, ad es.: rettangolari (o, partendo da forma circolare, a settore circolare, come nel tagliare una torta; ma non in terzi, dopo il primo taglio, di $360° = 3 \times 120°$). E cosí via.

La divisione in un numero qualunque di parti uguali è sempre pos-





1×30
2×15
3×10
4×7+2 (4e2/7×7)
5×6
6×5
7×4+2 (7e1/2×4)
8×3+6
9×3+3
10×3
11×2+8
15×2
16×1+14
20×1+10
25×1+5
30×1
ecc.
ecc.
ecc.
ecc.
7e1/2
4e2/7
0
5
10
15
20
25
30

sibile, ad es., per i rettangoli, bastando dividere un lato per fare tagli equidistanti paralleli all'altro lato. E la divisione del lato si può fare per proiezione (vedi figura: per dividere $OA$ in, p. es., 7 parti uguali, si segnano su una retta per O sette tratti uguali$OB_1$, $B_1$ $B_2$ ..., $B_6$ $B_7$ e si collegano con parallele $B_7$ con $A$ e $B_1$ ... $B_6$ con punti $A_1$, $A_2$, ..., $A_6$ che, come è chiaro, dividono $OA$ i 7 parti uguali).

(6) Considerazioni sulla « precisione » in senso pratico. Sia che si impieghino procedimenti teoricamente « esatti », oppure processi pratici (ad es. misurare lunghezze o angoli con riga o rapportatore con suddivisioni, ad es., in millimetri o in gradi), ogni costruzione o determinazione di grandezze è in pratica solo approssimata. Occorre sempre preoccuparsi, quindi, di migliorare le condizioni che causano imprecisione. Ad es., nella costruzione precedente, fare in modo che il segmento $OB_7$ abbia lunghezza non troppo maggiore o minore di $OA$, né formi con esso un angolo troppo piccolo o troppo grande. Anche senza disquisizioni teoriche, è facile vedere in pratica che con scelte « mal condizionate » (« ill-conditioned », per dire il termine inglese abituale tra i pratici) è facile alterare di molto l'individuazione dei punti $A_1$, ..., $A_6$ con piccole imprecisioni nel posizionare lo squadretto sui punti $B_1$, ..., $B_6$ e nel conservarne il parallelismo con $AB_7$.

Occorre, senza insistere in dettagli e in spiegazioni teoriche, coltivare l'attenzione su circostanze del genere.

In particolare: conviene dividere secondo il lato piú lungo (nel caso dei rettangoli), perché l'imprecisione nei punti divisori influisce meno sull'eguaglianza (approssimata) dei tratti.

## 5. - (Es. n. 2) In fila indiana; per 2; per 3; ecc.

Questo esempio costituiva un saggio di lezione secondo la « Traccia » dell'articolo già citato (n. 6, Proporzionalità ecc., pp. 33-34), svolto in un corso di aggiornamento per la scuola media (Roma, 1970 ). Scopo: provare che le noiose nozioni astratte e isolate di quozienti e resti divengono interessanti e istruttive se interpretate su esempi concreti realizzabili giocondamente, e se opportunamente sfruttate per introdurre appropriate considerazioni aritmetiche, rappresentazioni grafiche, e (se del caso) ulteriori considerazioni.

Qui suggerirei di seguire l'esempio di Dienes (già menzionato in varie occasioni (1) usando i bambini stessi come

(1) Conformemente a quanto ivi detto, gli esperimenti che qui suggerisco sono più semplici e direttamente attinenti all'introduzione di nozioni abituali.

materiale per esperimenti. Supponiamo che essi siano 30, per fissare le idee (ma le stesse considerazioni si possono fare quale sia il numero, sia pure incontrando maggiori o minori varietà di casi interessanti); per maggiore comodità pensiamo di poterli portare in palestra o in un cortile o altro spazio adatto.

Diciamo loro di disporsi in fila indiana, o « per uno »; ciò sarà senz'altro possibile (qualunque sia il loro numero, $n$) e avremo $n$ righe (qui, 30). Facendolo disporre « per due », avremo 15 righe; « per tre » avremo 10 righe; « per quattro » avremo 7 righe ma, per la prima volta, una riga incompleta (resto) di 2; « per cinque » avremo 6 righe; « per sei » ne avremo 5. « per sette » ne avremo 4 con una incompleta (resto) di 2; « per otto » avremo 3 righe con una incompleta (resto) di 6; « per nove » ne avremo 3 con resto 3; « per 10 » ne avremo 3; per 11, 12, 13, 14, 15 ne avremo 2 con (rispettivamente) resto 8, 6, 4, 2, 0; per 16, 17,..., 29 ne avremo una con resto (risp.) 14, 13, 12,..., 3, 2, 1, 0.

Se disegnamo su carta quadrettata le diverse configurazioni, avremo dei rettangoli con « base » il « divisore » (numero di bambini per riga) e altezza il « quoziente » (numero delle righe complete); i bambini della riga incompleta (resto) conviene pensarli collocati in una « coda » al vertice del rettangolo, nella direzione della diagonale (come mostra la figura).

Tralasciamo le ovvie considerazioni aritmetiche che si possono illustrare in questo modo, perché piú essenziale (direi) è il nesso che conduce a superarle, dicendo ad es. che dividendo 30 per 7 si ha $4 + 2/7 = 4{,}2857...$ ossia dicendo che « quoziente » e « resto » sono la parte intera di $m/n$ e la sua mantissa moltiplicata per $n$. Se in luogo di bambini (non suddivisibili) avessi dei cubetti di una sostanza da potersi tagliare, potrei tagliarne 2 in sette parti uguali e formare una quinta riga con cinque pezzi costituiti di 2/7 di cubetto anziché da un cubetto. In tal modo sparirebbe il « resto » (la « coda » per traverso) e il rettangolo si alzerebbe dal livello « 4 righe » al livello « 4 e 2/7 righe ».

Con questa correzione tutti i rettangoli avrebbero i vertici sull'iperbole $y = n/x$ (qui: $n = 30$); su tale iperbole si trovano i vertici dei rettangoli non « corretti » solo nel caso dei divisori, ossia questi punti, se sull'iperbole, indicano le diverse scomposizioni del numero dato in prodotto di due interi.

Ma si può notare che, anche se i bambini non sono materialmente divisibili, una frazione o comunque un numero non intero può sempre aver senso, ad esempio, come media: se ad es. in una settimana ogni bambino è andato una volta al cinematografo, è chiaro che $30/7 = 4{,}2857$ è il numero *medio* di bambini per giornata (ed anche se ciò riguardasse i 6 giorni lavorativi il numero $30/6 = 5$ indicherebbe solo il numero *medio*, essendo solo *possibile* che — a differenza del caso precedente — esattamente 5 bambini siano andati al cinematografo in ciascuno dei sei giorni).

Sul diagramma, considerando le varie iperboli $y = n/x$ per i diversi valori di $n$, è facile vedere (come implicitamente già detto) quali numeri siano primi, o quadrati, o quanti divisori abbiano. Naturalmente (ma basti accennarlo) altrettanto si può osservare considerando le rette $y/x =$ costante.

## 6. - Funzioni; curve

Per far capire qualcosa delle funzioni e dei problemi che le riguardano bisogna evitare di cominciare con funzioni « matematiche ». Confrontare ad es. i diagrammi sull'andamento della popolazione di due o piú paesi in un medesimo periodo, calcolandone l'accrescimento (o diminuzione), assoluto o relativo (ad es. 2,3 milioni, pari a 3,7% d.pop.iniziale) ecc. ecc., oppure di una stessa popolazione in due anni (o decenni, ecc.) successivi; capire che costanza dell'incremento annuo significa andamento lineare, e costanza di quello relativo andamento esponenziale (cioè, anche senza termini di analisi, « in progressione geometrica ») e pertanto: utilità di carta in scala logaritmica per confronti non falsati dalla scala (paesi grandi e piccoli), ecc. Significato (a tali scopi) della *sottotangente;* significato (geometrico-intuitivo!) della tangente (in generale, per curve non « patologiche », unica retta che le tocca in un punto senza attraversarle (escusi i flessi), e quindi della sottotangente (2).

Notare che il diagramma di una funzione (abbastanza regolare) è una curva (in senso intuitivo), ma di per sé una curva non è vincolata a un sistema di riferimento, e in tal caso conviene non obbligarvela, e studiarla di per sé, intrinsecamente. Spesso una curva è la traiettoria di un qualchecosa, p.es. un veicolo; in tal caso è piú facile ed espressivo definire la tangente e la normale della traiettoria come le rette solidali col veicolo, rispettivamente nelle direzioni « in avanti » e « di traverso » (ossia: risp. del piano e dell'asse della ruota). Ed è anche piú naturale descrivere la curva mediante la sua equazione intrinseca (raggio di curvatura in funzione dell'arco percorso: $r = f(s)$; p.es. $r =$ cost., circonferenza; $r = ks$, spirale logaritmica; ecc.). In modo intrinseco (e, matematicamente, coi metodi accennati) si possono vedere chiaramente il significato di evoluta, evolvente, ecc. Pensando a un veicolo (p.es. automobile, bicicletta,...) il centro di curvatura della sua traiettoria, in un dato istante, è il punto in cui si intersecano i prolungamenti degli assi delle ruote. (Se la posizione del volante, risp. del manubrio, si mantenesse fissa, il veicolo percorrerebbe sempre una circonferenza intorno a quel punto).

Considerazioni del genere, in forma semplice, sarebbero oltremodo istruttive e facili e gradevoli, atte a sfatare l'impressione che nella matematica tutto sia pesantemente architettato per apparire « sublime ». Di piú, si potrebbe analizzare e chiarire come e perché, ad esempio, per parcheggiare la macchina in certe o certe altre situazioni, occorre fare certi tipi di manovra, in avanti o in retromarcia: si tratta sempre di realizzare appropriate traiettorie modificando il raggio di curvatura.

---

(2) Sembra sia invalso uno strano atteggiamento di disdegno nei riguardi dei logaritmi. Ma ciò che di essi è venuto a mancare, e cioè il loro uso nel calcolo numerico reso superfluo dai grandi e piccoli calcolatori automatici, non era che l'aspetto piú banale. Invece la funzione esponenziale e la sua inversa, quella logaritmica appunto, hanno sempre il medesimo ruolo essenziale e un'immensa importanza sia teorica che pratica nonché didattica.

## 7. - Un problemino di probabilità

Non si tratta, veramente, di un problema, se non nel senso che si presenta in forma capziosa; pensandoci un po' la risposta dovrebbe risultare ovvia. Comunque, si tratta di ciò (3): un premio viene sorteggiato tra alcune persone (per fissare le idee, poniamo 5; ma è indifferente pensare ad un numero $n$ qualunque) con questo procedimento: si mettono in un'urna tante palline quante sono le persone in questione, cioè 5 (in generale, $n$) tra cui una bianca e le altre nere. Ciascuna delle 5 (o $n$) persone estrae una pallina (senza reimbussolarla); chi estrae la pallina bianca vince il premio. La domanda è: chi ha maggiore probabilità di vincere il premio: chi estrae la pallina per primo, o per secondo, ..., o per ultimo?

Sembra che l'opinione prevalente consista nel ritenere favorito chi effettua l'estrazione per primo (probabilmente per il fatto che al primo turno la pallina bianca è certamente nell'urna, mentre in seguito potrebbe già esser stata estratta). Ma, facendo un piccolo calcolo, risulta che al primo colpo abbiamo nell'urna 5 palline di cui certamente una è bianca, cosicché la probabilità di estrarla è 1/5; alla seconda estrazione c'è probabilità 4/5 che fra le 4 palline rimaste ci sia quella bianca, nel qual caso la probabilità di estrarla è 1/4 (e probabilità 1/5 che non ci sia piú e quindi la probabilità di estrarla sia zero), in definitiva il risultato è uguale a prima perché 1/4 di 4/5 è di nuovo 1/5; e cosí al 3°, 4°, 5° colpo è sempre $1/3$ di $3/5 = 1/5$ ed $1/2$ di $2/5 = 1/5$.

Ma si può concludere anche in modo piú diretto, senza alcun calcolo (ed è questo il modo migliore di ragionare: diceva Oscar Chisini, degno allievo di Federigo Enriques, che *la matematica è l'arte che insegna a fare a meno dei calcoli).* Abbiamo 5 palle, chiamiamole A, B, C, D, E, o distinguendone i 5 colori; una di esse dà diritto al premio. Poiché il fatto che il premio sia associato all'uno o all'altro dei colori o delle

(3) E' uno dei problemi proposti nella 3ª media di Emma Castelnuovo dalla laureanda A. Della Seta (e discussi nella sua tesi di laurea).

lettere A, B, C, D, E è irrilevante rispetto alla procedura di estrazione, l'opinione sopra criticata porterebbe a concludere che *ciascuna* delle 5 palline ha proabilità maggiore di 1/5 di uscire al primo colpo, il che è assurdo.

Questo metodo, di riduzione all'assurdo, è molto illuminante ed efficace. Spesso, come qui, porta dritto alla conclusione quasi senza riferimento a tecnicismi di calcolo o complicazioni di ragionamento. E tanto piú, per tal motivo, va impiegato e fatto apprezzare, mostrando che la matematica, se a volte, di necessità, richiede calcoli anche complicati, non lo fa per scocciare ma perché non c'è via piú bella. Ma se si può farne a meno è la prima a indicarne il modo.