Bruno de Finetti

CONTRO LA « MATEMATICA PER DEFICIENTI »

Condanna delle tendenze a immiserire e svuotare la matematica, e, peggio, l'insegnamento della matematica (a tutti i livelli), di quanto essa contiene di significativo, di intuitivo, di istruttivo, di intelligente, di affascinante, di stimolante, riducendola a « Matematica per Deficienti ».

1. Rivelazioni raccapriccianti.

Pochi giorni fa (22.2.1974), alla consueta riunione settimanale del venerdì alla Mathesis di Roma, l'oratore era il collega Giulio Cortini, dell'Università di Napoli, fisico, noto anche per il suo particolare interessamento ai problemi didattici in uno spirito interdisciplinare. Il titolo della sua conversazione era: *Le funzioni dal punto di vista del fisico.*

Apparve chiaro che egli — pur conoscendoci abbastanza bene — era venuto a parlare in un ambiente di matematici con lo spirito (forse) dell'agente provocatore o (forse) del missionario *in partibus infidelium.* In queste due (presunte) vesti ha avuto una grossa delusione: quella di vedere che stava sfondando una porta aperta, anzi più che aperta spalancata; ma in compenso (e speriamo sia stata più che un compenso) con la sorpresa di trovarci alleati per la sua battaglia, felici di aver trovato un alleato per la battaglia che è anche nostra.

Anziché scandalizzarmi per la sua « matematica da fisico » e ascoltare con raccapriccio i modi che usava e consigliava per esporla, provavo raccapriccio nell'apprendere che i concetti e metodi usualmente seguiti sono assai diversi o addirittura opposti. E parlo in prima persona perché non sono autorizzato a stimare quanti fra gli intervenuti che gremivano l'aula potessero essere più o meno fortemente in accordo o in disaccordo sull'insieme degli argomenti o su questa o quella parte, ma per certo l'atmosfera era di attenzione e apprezzamento.

Ma cosa apprendevo di per me nuovo — mi si chiederà — e quali cose potevano costituire « rivelazioni », e addirittura « raccapricciant i », se ho da sempre, e forse anche troppo ripetendomi, deprecato e stigmatizzato molte manchevolezze e storture? Già: forse nulla... salvo che molti interessanti esempi di cose presentate intelligentemente, e che invece (pare) nelle scuole si insegnano appiattite o non si toccano affatto, mi ha fatto percepire le pur risapute manchevolezze come un unico immenso incubo, che lì per lì mi ha suggerito la denominazione del titolo:

« Matematica per Deficienti ».

E devo subito dare delle spiegazioni perché nessuno pensi che ciò costituisca un'offesa diretta a lui o ad altri: non si tratta di applicare la qualifica di « deficienti » ad insegnanti o a studenti che insegnano o che imparano in un certo modo: è questo *modo* che sembra imporre come norma di insegnare e imparare in forme « adatte per deficienti », ossia, per persone prive della capacità di « vedere » le cose (in grande, e nel loro senso compiuto), o impedite di manifestarla, per limitarsi ad accumulare piccole insipide sterili sconnesse formali nozioncine « scolastiche ».

E' dunque la scuola che è affetta da mentalità da « deficienti »? Confesso la mia ignoranza, nel senso di assai incompleta conoscenza delle situazioni nel loro insieme: ovunque si trovano, in proporzioni imprecisabili, esempi di intelligente vivacità e di squallido appiattimento, sia tra gli insegnanti che tra gli studenti, sia nei libri di testo che nei programmi, sia nell'insegnamento elementare che medio, superiore, universitario, e — soprattutto! — indifferentemente sia nelle superate tendenze tradizionaliste che nelle discutibili tendenze cosiddette moderne. Pur rifuggendo da giudizi precisi, ritengo tuttavia di dover convenire che, nella prassi scolastica, le tendenze al peggio sembrano destinate sistematicamente ad aver presa con maggior forza.

Osservazioni ed esemplificazioni concrete che rafforzano i giudizi pessimistici nel senso suggerito dal discorso di Cortini ne ho sentite da molte altre fonti più di me vicine all'ambiente scolastico o ivi inserite, e in particolare, recentemente, da una conversazione di Alberto Ramaglia al Club Matematico (di cui, d'accordo con l'Autore, inserirò qui alcuni dei brani più significativi anziché pubblicarne il testo integrale). Ho anche ascoltato voci meno pessimistiche, intese a dimostrare che le deficienze lamentate sono assai più circoscritte e in via di estinzione; in particolare ringrazio Bruno Rizzi per molte opportune informazioni al riguardo, per l'indicazione di diversi libri di testo immuni dai soliti difetti, per precisazioni sull'inesistenza nei programmi di argomenti asseritamente trattati in modo criticabile, per la testimonianza che dai difetti in questione moltissimi insegnanti sono immuni. Tuttavia, libri di testo come quello di Cipolla (che conobbi indirettamente per molti aspetti esemplari segnalatine nel corso di Matematiche Complementari di Ugo Cassina, Univ. Milano, 1926-27, e di cui Rizzi mi disse ora che contiene — fin da allora! — anche l'esposizione dei numeri complessi come similitudini nel piano), o quelli di Autori quali Enriques, Amaldi, Severi, od anche quello di Emma Castelnuovo, non sembra purtroppo, né come diffusione né come impostazione, che abbiano esercitato una grande influenza sulla mentalità scolastica.

Tutto sommato, ed anche per aver riscontrato nella maggior parte degli stessi studenti universitari di Matematica una scarsa fusione tra conoscenze acquisite in differenti corsi o scuole, mi sembra comunque di dover restare incline a ritenere che tutte le cose deprecate e stigmatizzate non costituiscono semplici sporadiche manchevolezze, bensì caposaldi consolidati di una mai debellata mentalità programmaticamente deformata e deformante.

Se così è, non c'è tempo da perdere per impegnarsi in una strenua battaglia. Se, al contrario, così non fosse, tanto meglio: si tratterà di una battaglia simile a quella di Don Chisciotte contro i mulini a vento, ed avrà ugualmente un valore, da una parte umoristico, e da una parte anche come spinta a rifuggire sempre ed ovunque dall'uso — fosse pure occasionale e saltuario — di metodi e spiegazioni insufficienti a dare un pieno significato e un effettivo valore a ciò che si insegna.

2. Alcuni riferimenti.

Non posso fare a meno (e ne chiedo scusa) di indicare preliminarmente alcuni miei scritti che dovrò citare (e che verranno richiamati con le sigle MLI, MAE, SVM, 3PM a fianco dei titoli qui di seguito), scritti nei quali ho esposto parti della matematica secondo i concetti che ritenevo da sempre, e ritengo tuttora, indispensabili per un suo insegnamento istruttivo e stimolante e utile. E, come concetto, ciò vale anche per l'insegnamento delle altre materie; a parte che vorrei molto attenuata la distinzione di materie perché solo un insegnamento su base interdisciplinare può dare ad ogni cosiddetta « materia » un suo ruolo e un suo posto nella struttura mentale sanamente integrata che s'intende far sviluppare (e a tale integrazione sono ispirati in particolare quegli scritti).

La prima volta (*) che ebbi a tenere un corso (allora ero attuario alle Assicurazioni Generali) fu quando, causa il suo richiamo alle armi, fui richiesto di sostituire, per l'anno 1941-42, il titolare di *Matematica Generale* (Univ. di Trieste, Fac. Econ. e Commercio); ebbi l'autorizzazione a ritardare di mezz'ora sull'orario d'ufficio tenendo le lezioni dalle 8 alle 9; tutto andò bene, uno degli uditori raccolse gli appunti, che, rivisti e un po' ampliati, divennero il volume:

MLI *Matematica logico-intuitiva* (pp. XXXIV+416), Editrice Scientifica Triestina, 1944 (2ª e 3ª ed., Cremonese, Roma, 1957 e 1960).

Un altro volume cui ritengo opportuno fare riferimento per aspetti didattici è quello scritto in collaborazione con Ferruccio Minisola in occasione di un rinnovamento dei programmi per gli Istituti Tecnici (in ispecie Commerciali):

(*) Tralasciando di menzionare corsi più specifici, di *Matematica attuariale* e di *Calcolo delle Probabilità* all'Univ. di Padova, e corsi liberi all'Univ. di Trieste come Libero docente in Analisi.

MAE B.de FINETTI e F. MINISOLA, *La Matematica per le applicazioni economiche* (pp. 418), ed. Cremonese, Roma 1961.

Per molti spunti e commenti può anche valere il riferimento ad un volumetto scritto per ragazzi (ma che è piaciuto molto a Polya e alla traduttrice dei suoi volumi, la Prof. Lulu Bechtolsheim, che sa anche l'italiano, che ne fece la traduzione in tedesco per l'ed. Birkhäuser, Basilea; dovrebbe uscire tra giorni):

SVM *Il « saper vedere » in Matematica,* (pp. 72) edizione Loescher, Torino 1967.

Infine, tra i molti scritti di carattere didattico (su *Archimede, Atti Congr. UMI 1962, Civiltà delle Macchine, Homo Faber, Istituto Tecnico, La Matematica negli Ist. Tecn. Comm.* (vol. ed. Min. P.I.), *La Rivista Trimestrale, Le Scienze, Mercurio, Metra, Periodico di Matematiche, Rend. di Matematica, Rend. Seminario Mat. Milano, Riforma della Scuola, Sapere, Scuola e Città, SIPS Atti Congr. Siena 1967*), dovremo far riferimento al seguente:

3PM « Tre personaggi della Matematica: i numeri e , i , π », in *Le Scienze* (ed. ital. di *Scientific American*), n. 39, Nov. 1971.

Il rinvio a tali scritti occorrerà soprattutto per chi volesse esaminare più da vicino questioni od esempi che nel presente articolo potranno soltanto venire brevemente accennati.

3. Numeri e grandezze.

L'argomento più immediato che si presenta è indubbiamente quello riguardante numeri e grandezze, e, naturalmente, Cortini lo ha affrontato e illustrato da par suo. Cominciamo dunque dai numeri, da questi disgraziati nostri amici, così servizievoli e per niente presuntuosi, che si adattano a farsi attaccare a qualunque termine per farci individuare una qualunque grandezza, con precisione o con l'approssimazione che ci basta; ad es.:

73,12 kg , 73,12 \$, 73,12 kw , 73,12 sec , ecc.

In questa accezione il numero (o, se si preferisce, il modo di utilizzarlo, il che è la stessa cosa detta meglio) viene perfettamente definito dai procedimenti di misura validi caso per caso, ed è doppiamente deprecabile *« la grande confusione di idee la cui radice si annida nell'insistenza del matematico nel sostenere che NON SI DEVE LAVORARE CON QUANTITA' »* (come disse ottimamente Hassler Whitney nel suo discorso al Congresso di Exeter; v.cit. in PdM, 1973 n. 6, p. 28).

Perché *doppiamente* deprecabile?

Perché lo è da un punto di vista pratico (di cui ci occupiamo nel presente paragrafo) e da un punto di vista teorico (che vedremo nel successivo).

Il primo motivo è che in genere i calcoli riguardano grandezze, sarebbero significativi e sicuri eseguendoli su grandezze, indicando cioè sempre le rispettive unità di misura e *operando anche su di esse,* mentre operando sui soli puri numeri il senso si perde.

Moltiplicare una *forza* per una *lunghezza,* dividere il *prezzo* (di un terreno) per l'*area,* o quello del suo affitto per il *prodotto di area per tempo,* fare il quadrato o cubo di una lunghezza, sono cose sensate, ma le stesse operazioni fatte sulla sola indicazione numerica (73,12 senza sapere se sono kg, \$, kw, sec, ecc.) rischiano poi di lasciare in dubbio cosa mai sia il numero ottenuto come risultato, senza averne ricavato con le stesse operazioni, automaticamente, anche l'« etichetta » ;per esempio:

chilogrammo × metro = chilogrammetro

(oppure newton × metro = joule (*)), Lira/metro^2 = « Lira al metro quadrato », Lira/ (metro^2 × anno) = « Lira al metro quadrato ed anno », ecc.

(*) C'è, nel momento attuale, l'inconveniente del passaggio dai sistemi abituali (CGS o MKS) ai nuovi (Giorgi, SI); ma ciò non tocca l'essenza della cosa.

Senza la necessaria familiarità con misure del genere e relativi concetti avviene ad es. che molti non avvertano la differenza tra grandezze come

tonnellate-chilometri e *tonnellate al chilometro*

(cioè tra *prodotto*: p. es. trasporto merci sulle Ferrovie dello Stato nello scorso anno; e *rapporto*: cioè densità lineare, p. es. peso di una rotaia per unità di lunghezza).

Sarebbe anzi ancor meglio abituarsi a pensare al prodotto di grandezze (e rapporto, ecc.) in modo intrinseco, indipendente da ogni misura e traduzione in numeri. E l'esempio più semplice e significativo che ho trovato è quello dato proprio da un matematico (non certo « applicativo » come tipo di attività), Federigo Enriques, nel brano riprodotto come « pezzullo » in questa pagina col titolo « *Incomprensioni: di chi la colpa?* ». Senza ripetere l'esempio, si vede che egli intende *definire* come *prodotto* di due *lunghezze l'area* del rettangolo di cui esse sono i lati. Poi si può *dimostrare* che conoscendo il numero di cm delle lunghezze di a e di b l'area ab si può calcolare facendo il prodotto (in senso aritmetico) dei due numeri e dei due simboli (ad es., se si ha $a = 3$ cm e $b = 4$ cm, $ab = (3 \text{ cm}) \times (4 \text{ cm}) = 3.4 \text{ cm.cm} = 12 \text{ cm}^2$). I commenti di Enriques sono espliciti (leggeteli!) nel privilegiare la definizione diretta anziché il procedimento algebrico che la traduce in giochetto formalistico (finché non si afferra il senso pensando alla figura o ad analoghe applicazioni significative).

Ebbene: il primo raccapriccio l'ho provato sentendo non

Incomprensioni: di chi la colpa?

L'ostentata incomprensione totale delle matematiche da parte di uomini intelligenti deve essere messa in dubbio. Nel maggior numero dei casi si tratta di un'antipatia che fa rifuggire da questo studio giovani di cui non si è saputo destare l'interesse: e la responsabilità tocca all'insegnante.

Della formula $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ *ciascuno acquisterà agevolmente l'intelligenza del significato geometrico, (mentre) se gli venga presentata come espressione astratta di un calcolo algebrico, comunicata da un semplice ripetitore come una regoletta meccanica, solleverà ribellioni non del tutto ingiustificate.*

FEDERIGO ENRIQUES (da *Le Matematiche nella scuola e nella cultura*, Lez. pubbl. a cura di A. Frajese, ed. Zanichelli, Bologna 1938, p. 171).

---

solo che nella scuola non si insiste sull'indicazione completa dei dati (con le rispettive unità di misura, non « vuotamente », come lunghezza 7 e tempo 4) — cosa che purtroppo avevo già constatata, deplorandola — ma che non viene in genere compreso, neppure dagli insegnanti, che si *dovrebbe* operare sempre sulle grandezze e non su puri numeri, e a volte non è neppure chiara l'idea che *si può* farlo.

Per finire (proprio perché è cosa alquanto umoristica), ancora un'osservazione. L'unico caso in cui in matematica sembra si senta impellente il bisogno di distinguere una grandezza da un numero è proprio l'unico caso in cui la distinzione è illusoria: il caso dell'*angolo*. La misura dell'angolo è adimensionale; definendola come rapporto dell'arco al raggio, l'angolo unitario, il radiante, ha per misura il numero 1, proprio 1 e non « un radiante » (sarebbe pleonastico, come dire « una unità »!). E' vero che anche i fisici preferiscono indicare (per certe grandezze) il riferimento a *radiante* (rad) o all'analogo sferico, lo *steradiante* (sr), ma lì si tratta semmai di una ridondanza giustificata a titolo di « promemoria » (*), non per ragioni di « omogeneità ».

In MLI (cfr. p. 145) sono sempre seguiti i criteri qui suggeriti, incluso quello di indicare, per gli angoli, che $360°$ significa 2π, per cui $1°$ è semplicemente il puro numero che vale $\pi/180=0{,}017453\ldots$; tutto qui.

Si sarà notato (dai pochi esempi indicati) come l'attenzione alle questioni dimensionali (o di specie di misura) interessa non soltanto la fisica (caso ben noto) ma anche l'economia ed ogni aspetto pratico della vita. Ciò è importante anche per introdurre l'interdisciplinarità fin dagli esempi più banali (ad es. un « prezzo di energia » va espresso in « Lire/kilowattora »; analizzare perché).

Un caso che merita speciale attenzione è quello delle « intensità » (di dimensione 1/tempo, o $(\text{tempo})^{-1}$), quali il tasso (istantaneo) d'interesse, o di accrescimento di una popolazione, o di una sostanza che si sta producendo in una reazione chimica o altro processo, ecc., oppure (se negativo) di disintegrazione (p. es. di sostanza radioattiva), di esau-

---

(*) Spieghiamo con un esempio in che senso si è detto « a titolo di promemoria »: supponiamo che come « unità di area » si preferisse, da qualcuno, prendere quella del disco di diametro un metro (anziché del quadrato circoscritto), e quindi per prodotto ab l'area dell'ellisse di assi principali a e b. Occorrerebbe un nome diverso (« metrodisco »? « metroquadrocirc »?) per distinguere le due convenzioni benché la differenza consista soltanto di un coefficiente, senza cambiare di « dimensioni ».

rimento di scorte, e simili). Tra l'altro, questo concetto basta per avviare il discorso, o comunque a prepararlo, sulla funzione esponenziale (di crescita o di diminuizione uniforme in intensità, cioè della stessa percentuale in tempi uguali): una delle funzioni che tutti dovrebbero conoscere e capire.

4. I numeri nella scatola cinese.

Le considerazioni fin qui svolte sono quelle per cui giudico deprecabile la tendenza a prescindere dal significato come « grandezze » nei casi in cui il numero serve effettivamente a indicare « grandezze », per calcoli che riguardano effettivamente « grandezze » (fisiche, economiche, o di qualunque altra natura). Ma avevo detto che tale tendenza è *doppiamente* deprecabile: lo è infatti anche pensando ai numeri e al modo di introdurli, indipendentemente dall'interesse o meno per le grandezze e i problemi ove intervengono.

Conoscendo il tipo di grandezze che ci interessa, ad es. (per riferirci al caso più comodo) le *lunghezze* (su di una retta) e un metodo qualsiasi per trasportare una lunghezza e per dimezzarla, è evidente che si ottiene la misura di una qualunque lunghezza, riferita a quella prescelta come « unità », in forma di numero binario illimitato (pensando di poter raggiungere un grado di esattezza comunque grande); con eleganza un po' minore, ma con vantaggi pratici (minor lunghezza di scrittura), lo stesso si può fare in forma decimale.

Tutti sanno che nel sistma binario si hanno le due sole cifre 0 e 1, mentre in quello decimale ce ne sono dieci: 0;1,2,...,9. Non tutti sanno però quanto più lunga è la scrittura di un numero (intero, o comunque a parità di precisione) nel sistema binario in confronto a quello decimale. Rispondere (quasi esattamente) è facile: basta osservare che $2^{10}=1024$, cioè quasi esattamente $2^{10}=1000=10^3$, e si vede subito che quindi per ogni 3 cifre in scrittura decimale ne occorrono 10 nella scrittura binaria. (Più esattamente, $2^{10}=1024=10^{3,0103}$, essendo 0,30103 il logaritmo di 2 in base 10; la differenza — a 1000 cifre binarie corrispondono 301 cifre decimali anziché 300 — è insignificante, tanto più che il rapporto del numero di cifre varia naturalmente a scatti).

Potrà essere una curiosità (od anche, talvolta, una cosa interessante) vedere se un numero risulta intero, o con un numero finito di cifre per la mantissa (residuo dopo la parte intera: praticamente, cifre dopo la virgola), o con cifre che da un certo punto in poi si ripetono periodicamente (prescindendo dalle circostanze pratiche che, nel caso di misure, rendono illusoria ogni ricerca di precisione oltre un certo limite). Si potrà comunque notare che la periodicità corrisponde a tutti e soli i numeri ottenibili dividendo tra loro due interi, e dire — se interessa, ma senza drammi! — che essi si chiamano «razionali (*) e gli altri «irrazionali» (e accennare, volendo, ad altre classificazioni, come numeri « algebrici » e « trascendenti », che intervengono in campi di ricerca più elevati).

La raccomandazione « senza drammi! » intende evitare gli artificiosi sforzi per nascondere il semplice e ovvio concetto di « numero reale » (che tale è senz'altro pensandolo nella forma naturale di numero decimale illimitato) per tirarne fuori con artificiosa fatica i razionali e svelare dopo (con esitazioni ed esorcismi per evitare la punizione degli dei) che... esistono anche delle cose riservate a grandi matematici o per lo meno allievi di scuole superiori, di numeri che (incredibile a dirsi!) non sono razionali. Nella forma ovvia, nessuno potrebbe neppure per un momento supporre che tutte le successioni di cifre debbano finire per essere periodiche; se uno ne dubitasse basterebbe un qualunque esempio, come gli « uni » intervallati da uno zero, due zeri, tre zeri, e così via ($a=0{,}1010010001000010000001\ldots$). Perché istillare ai ragazzi di oggi dei dubbi e delle « ignoranze » che erano spiegabilissime all'epoca dei pitagorici, ma sono assurde da subito dopo di essa (e inconcepibili in una civiltà dove la scrittura decimale è universalmente nota)?

Peggio ancora, questo procedere a singhiozzo è eretto a metodo (sedicentemente) *logico* per introdurre a rate i numeri un po' per volta facendo le più grandi e superflue capriole possibili. E' il sistema della « scatola cinese », per cui si finge dapprima che esistano solamente i numeri interi positivi (anzi, in un primo momento, chiamandoli « naturali »), poi i razionali positivi, i reali positivi, passando ai corrispondenti negativi volta per volta oppure solo alla fine,

(*) Cfr. p. es. l'articolo di F. Scarpini in PdM, 1973, n. 5, pp. 52-56.

con cura di confondere ancor più le idee dando ogni volta costruzioni lambiccate per cui ad ogni apertura (o rottura?!...) di scatola si ritrovano i numeri già precedentemente incontrati ma camuffati in modo da far dire che forse in fondo sono ma formalmente almeno non sono gli stessi ma sono loro copie rifatte o raffinate o contraffatte.

Se i panettieri fossero contagiati in modo deprecabile da questa specie di « cultura », a chi chiedesse due panini domanderebbero se ne vuole *due* come numero naturale o come intero positivo o come insieme delle coppie di interi (a, b) in cui a è doppio di b o non forse come coppia (A, B) ove A e B sono gli insiemi di coppie (a, b) con a e b interi in cui rispettivamente a sia minore (per A) o maggiore (per B) del doppio di b.

Non dubito che sottigliezze da Azzeccagarbugli di questo tipo avrebbero riempito di ammirazione un peripatetico come Simplicio, ma sono altrettanto certo che, dialogando per spasso con lui, Galileo lo avrebbe garbatamente (o forse non tanto) preso in giro ridicolizzandolo per tutti i secoli dei secoli. Purtroppo, in un certo tipo di « logica » odierna, mi sembra riaffiorino molti residui di quello spirito sofistico che sembrava dissipato coll'avvento dello spirito moderno, scientifico, pragmatico, operativo, *sostanzialmente* ma *non cavillosamente* critico.

5. I numeri, i bambini, i rimbambiti.

E passi, se si sostenesse che i deliziosi artifici d'inscatolamento dei numeri in scatole cinesi sono raffinatezze riservate ai prestigiatori od ai membri di un'Accademia di Sottilissimi Titani del Pensiero.

Ma, e i bambini? chi, sconsideratamente, confonde le loro chiare idee con siffatti balbettamenti, non meriterebbe (secondo il Vangelo) che « gli venisse stretta attorno al collo una corda con legatavi una pietra, e fosse fatto affogare in fondo al mare? ». Che facesse la fine di Ippaso di Metaponto anziché colui che ha svelato il mistero (allora reale) degli « irrazionali », chi vuole (ora) nasconderli in un altro mistero?

Perché imporre questa faticosa progressione verso *l'ardua* conquista dei numeri reali (*), ardua solamente perché resa artificiosamente tale, senza alcun costrutto, dall'obbligo autoimpostosi del passaggio attraverso le « frazioni » concepite come entità formali anziché come numeri, e dall'obbligo imposto agli allievi di stupirsi che $\sqrt{2}$ non sia una frazione.

Ma perché stupirsi? Che c'è di strano? E' vero, facendo una divisione le cifre finiscono per ripetersi periodicamente, ma c'è una ragione chiara: i resti sono in numero finito. Ma ciò vale per la divisione; perché dovrebbe valere anche per la radice? Per lo stesso motivo che, se il professore di scienze naturali avesse sempre parlato di uomini scimmie e galline facendo notare che le gambe sono i *due* arti per camminare, e che tutti gli animali hanno due gambe, solleverebbe stupore dicendo che esistono cavalli con quattro « arti per camminare » e millepiedi che ne hanno « mille », e discettasse per dire se, pur non godendo della proprietà definitoria di essere due, sono o non sono gambe. Non c'è da meravigliarsi se, dopo trattamenti scolastici di questo tipo, i bambini intelligenti si trasformano, senza loro colpa, in rimbambiti.

Questo tipo di « istruzione » basata sulla scatola cinese, sullo svelare i numeri a poco per volta soffermandosi (senza alcuna utilità) dopo ogni allargamento, come se si fosse giunti al termine, e poi procedendo ad un altro, e facendo con-

Lo sgabello onorifico

Sul piano accademico alligna in genere la civetteria di voler separare e collocare su uno sgabello più onorifico o certe speciali cose o certi linguaggi più pomposi per trattare di comuni cose, in modo da riservare a ciò che si colloca sullo sgabello, e negare a ciò che si lascia sul pavimento, la qualifica di « scienza ».

Molti dei criteri di separazione adottati a questo scopo e delle discussioni cui conducono hanno indubbiamente valore e interesse da qualche punto di vista, ... ma ogni erezione di una qualunque siffatta distinzione a criterio di discriminazione accademica costituisce una mutilazione suicida: si uccide la scienza che è vita cui nulla è precluso, collocando al suo posto un feticcio imbalsamato e gonfio di cattedratica boria.

BRUNO de FINETTI (da « Benvenuto al disgelo », in *Un Matematico e l'Economia,* Franco Angeli ed., Milano 1969, p. 94).

(*) Forse, secondo la spiritosa ipotesi di un esimio collega, per dar modo all'insegnante di entrare in classe impettito con cravatta nera il giorno in cui rivela agli studenti l'esistenza e la definizione dei numeri reali!

statare con sorpresa che i nuovi numeri non godono di tutte le proprietà che caratterizzavano i precedenti, cosa inconcepibilmente diseducativa e intesa (si direbbe) soltanto a creare (con innegabile successo) una confusione inestricabile in testa. (I triestini direbbero che è fatta « per insempiar la gente »).

E qui si colloca il discorso di Ciampa (al Convegno UNITESA, cfr. sunto in PdM, 973, n. 3, pp.8-9) con la serie di bugie-sbugiardamenti (*non si può...*, poi sì, si può, ma però *non si può* quest'altro...). E talvolta questa assurdità viene proprio esposta come metodologia sistematica: i nuovi numeri o enti vengono *inventati per dare delle soluzioni a problemi che non ne ammettono* (!); ad es. i numeri negativi per poter scrivere non solo 5—3 ma anche 3—5. Definiti in tal modo assurdo, tali « enti » (o presunti tali) appaiono (dice giustamente Ramaglia) come « frutto di una mente contorta e probabilmente paranoica, la cui fissazione è di risolvere ad ogni costo tutte le possibili equazioni (di dato tipo) », ed egli stesso ha trovato e menzionato queste belle considerazioni di Bertrand Russel al riguardo:

> ... Se le dette equazioni hanno radici, allora le radici hanno tali e tali proprietà: questo è tutto ciò che il metodo algebrico ci permette di inferire. Non esiste, tuttavia, alcuna legge di natura, in base a cui ogni equazione *debba* avere una radice. Al contrario è assolutamente essenziale che ci si trovi in grado di *indicare entità effettive*, le quali abbiano le proprietà richieste dalla generalizzazione algebrica. (Da *I principi della matematica*, trad. di L. Geymonat, ed. Longanesi, Milano 1950).

Probabilmente, in fatto di numeri, i fisici se la caverebbero ancor meglio, e con maggiore ragionevolezza, dicendo che nessun numero deve mai esser scritto con più di forse 8 (o 10?) cifre significative (in base 10; quindi circa 27 (o 33?) in base 2), perché neppure le unità fondamentali (anche ricorrendo a lunghezze d'onda di una riga dello spettro, e simili raffinatezze) non ammettono una maggiore precisione. Parlare in termini di *approssimazione* è sempre saggio.

Tuttavia, in matematica tali limitazioni non esistono; anche se in pratica occorre tenersi alla matematica di approssimazione, in astratto esiste anche la matematica di precisione. Chi volesse scrivere il fattoriale di 100 o di 100.000 potrebbe riuscirci (se il fato gliene desse tempo e energia e mezzi); di π sono state calcolate 100.000 cifre decimali (e fatte congetture su quando si potrà giungere ad avere dei calcolatori idonei per spingersi a un milione di cifre), ma è certo che nessun professore, per quanto pignolo, chiederà mai ai suoi allievi di usarle tutte (e nemmeno le prime 100) per un compito a casa.

Ed è anche utile sapere che π è un numero trascendente, non foss'altro che per poter far a meno di leggere gli scritti di scopritori della quadratura del circolo con riga e compasso (ce n'è ancora: un tale scritto è pervenuto poco tempo fa alla Direzione del Periodico di Matematiche). Già da secoli, prima ancora che la dimostrazione della impossibilità fosse acquisita, l'Académie de France cestinava i manoscritti del genere, perché — come scrisse Henri Poincaré — gli accademici ragionavano in senso probabilistico, e valutavano (soggettivamente, come è naturale) la probabilità che esista un illuso in più e quella che un problema di collaudata difficoltà e presumibilissimamente insolubile fosse stato risolto da un illustre sconosciuto. Ecco: ormai anche questo piccolo rimorso per aver corso un piccolo rischio di cestinare una scoperta prodigiosa non può più sussistere.

Forse un'altra utilità del ricorso a scatole cinesi potrebbe ravvisarsi nello sviluppo di teorie di algebra, ove interessano i numeri algebrici e molti altri concetti. Ma non è affatto necessario (e nemmeno, immagino, utile), al fine di tali studi, che le distinzioni che s'incontrano in tali teorie, anziché venir introdotte e prospettate proprio come premessa e frutto di tali teorie e legate ai loro problemi, siano state anticipate quando non se ne poteva intravvedere alcuno scopo, ed anzi rendevano inutilmente complicato capire quello che serviva al momento, e addirittura rendevano impossibile capirlo *bene,* cioè col suo vero significato intuitivo.

6. Trinomite ed anfibi « inter ens et non ens ».

La « Trinomite », cioè l'insistenza (specie nel Liceo Scientifico) su problemi comportanti la soluzione e « discussione » di equazioni di secondo grado, è stata per molto tempo una delle cose peggiori della nostra scuola (come anche in Francia), specialmente in quanto spesso degenerata in schemi meccanici tipo Tartinville. Vivaci campagne per soppiantarla vennero condotte in Francia (in particolare da André Lichnerowicz, che coniò, per ridicolizzarla, il nome di « *morbo della trinomite* », da « equazione *trinomia* », $ax^2+bx+c=0$), e in Italia (*).

Non che problemi del genere, in sé, non possano essere belli e interessanti; il motivo della battaglia era un altro. E' perfettamente inutile, ed anzi è sommamente dannoso e diseducativo, insistere fino alla noia su un tipo particolare e stereotipato di problemi, facendoli svolgere, per di più, con metodi meccanici e standardizzati. Ogni esercizio dovrebbe, più o meno, stimolare riflessioni, offrire aperture su

---

Inghiottire non è capire.

Alcuni innovatori pensano che lo scopo principale dell'insegnamento universitario sia quello di mettere gli allievi in condizioni di capire i lavori di ricerca avanzata. E questo potrebbe andare benissimo se il « capire » fosse inteso in senso sufficientemente pieno ed umano. Invece si chiede ai giovani di "inghiottire montagne di definizioni" dicendo loro « andate avanti! vedrete poi a cosa tutto questo servirà ».

« Tutto questo, a parte ogni altra considerazione, mi sembra frutto di un "ATTEGGIAMENTO DOGMATICO": se non si tratta di fare accettare tesi indimostrate, si tratta pur sempre di fare accettare valori non discussi.

« Forse i giovani — che, malgrado la fama di ribelli, sono in fondo assai duttili — si adattano di buon animo a queste imposizioni, ma c'è da dubitare che, in questo modo, si possano formare persone capaci di autonomia di ricerca e di sensibilità scientifica ».

GIOVANNI PRODI (da *Per. di Mat.*, 1965, n. 5, pp. 413-414)

Completa il medesimo discorso una frase della lettera di un « profano », il sig. G. TIMOSCI, che scoperse il valore della matematica imbattendosi casualmente in una biblioteca in un libro di storia della matematica.

Non far comprendere agli scolari il PERCHE' di un procedimento mi sembra una lacuna molto grave, "se è vero che ciò che nutre non è quello che si mangia ma solo quello che si digerisce" ».

(*) Cfr. p. es., B. de FINETTI, « Come liberare l'Italia dal morbo della trinomite? », *Periodico di Matematiche*, 1965.

qualche visuale nuova, abituare all'eclettismo, all'iniziativa, allenare la mente in senso almeno un po' « creativo » (per usare un termine di moda, che, a non renderlo ridicolo con eccessiva enfasi, va preso sul serio).

Invece il piccolo argomento della « Trinomite » serve proprio come controesempio, come fulcro di tutto un sistema di restringimenti e di deficientizzazioni di nozioni e teorie matematiche, che è ciò che m'induce a scrivere il presente articolo per lottarvi « *Contro* ».

Come ha osservato acutamente Giovanni Prodi, la trinomite liceale non è che la trasposizione in formato ridotto per scuole secondarie dell'analogo morbo della « tacnodite » (come potrebbe designarsi, dal caso divenuto emblematico, la matematica da « abilitazioni e concorsi »). Ecco le parole di Prodi (in B.de FINETTI, « Opinioni », *Per. di Mat.*, 1965, n. 5, p. 404-414, riportate da una lettera, da cui è tratto anche il pezzullo « Inghiottire non è capire » inserito nella pagina precedente).

> Qualche decennio fa era prevalente in Italia lo studio della Geometria algebrica (« matrice prima di ogni problema matematico », come ho sentito dire, una volta, da SEVERI). La geometria algebrica generava però, a livello universitario, un sottoprodotto decisamente brutto: lo studio delle curve algebriche (parlo di quelle *stereotipate curve « da concorso » che tuttora imperversano*). E peggio ancora, a livello liceale, ne scendeva un sotto-sotto-prodotto costituito da quelle *noiose e formali discussioni dei problemi di secondo grado* (in cui il parametro adombrava la seconda variabile dell'equazione). A mio parere, questo è un esempio di come l'insegnamento possa diventare una caricatura della ricerca.

Comunque, ritornando alla trinomite liceale, essa assomma tutti i difetti possibili, corrispondenti alla rigorosa esclusione di tutto ciò che potrebbe riuscire istruttivo. La formula risolutiva (da ricordare a memoria!) si ricava con pedestri passaggetti, nascondendone accuratamente il senso, che esiste invece, e balza irresistibilmente chiaro agli occhi, sia nell'interessante originaria presentazione geometrica di Al-Khuwarizmi (che io appresi dalla lettera del « profano » citato nel pezzullo sopra menzionato), e sia nell'ovvia interpretazione di geometria analitica (spostamento dell'origine nel vertice della parabola $y=ax^2+bx+c$). Lo studente viene accuratamente munito di paraocchi, o meglio ermeticamente bendato, per costringerlo ad aggrapparsi al formalismo dei passaggetti onde evitare il rischio che capisca le cose cui passa accanto, e che avrebbe a portata di mano, e che gli darebbero un'idea di cos'è e perché è utile e bella la matematica. Forse sarà questione di « pudore », di quello « strano pudore » che Enriques stigmatizza nel pezzullo qui sotto.

Ancor più inconcepibile (ma vero: almeno di un caso ho conoscenza diretta!) che quando finalmente s'introducono le funzioni goniometriche si possa non dir nulla degli aspetti che ne giustificano l'introduzione, ma vengano usate per... nientepopodimeno che per continuare a trinomitizzare e tartinvilleggiare chiamando l'incognita non più x bensì $\sin\alpha$ (e usando formule tipo prostaferesi per relativi passaggetti)!

Questo è un colmo al di là dei limiti dell'assurdo e del pazzesco, che già sono ampiamente raggiunti, se, anche evitando siffatte enormità, non si studiano (o non si fanno almeno vedere mediante diagrammi) le funzioni goniometriche come funzioni (con le loro interpretazioni di fenomeni oscillatori ecc.), le applicazioni della trigonometria in senso pratico (problemi anche solo elementari tipo topografia e geodesia o astronomia, e via dicendo).

Infine, il peggiore aspetto della trinomite si ha quando essa si fa servire di strumento per introdurre i numeri complessi dicendo che se un'equazione di 2° grado non ha soluzioni (la parabola non taglia l'asse x) la formula risolutiva dà due radici della forma (per es.) $x_{1,2}=5\pm\sqrt{-3}=5\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}$, che non ha senso, ma basta «*definire*» (!) $i=\sqrt{-1}$ e scrivere

---

Questo strano pudore

Il significato scientifico generale delle teorie matematiche ci riporta alla considerazione delle forme immanenti nella natura o delle intuizioni dello spirito che esprimono una realtà universale umana.

Respingere le idee che hanno rapporto con l'occhio, o con l'orecchio, o col tatto, vedendo nelle sensazioni non le porte della conoscenza, ma soltanto l'occasione di errori peccaminosi, questo strano pudore dei logici matematici ci richiama alla memoria Plotino e quegli asceti cristiani del Medio Evo che si vergognavano di avere un corpo.

FEDERIGO ENRIQUES (da *Le Matematiche nella storia e nella cultura*, Lez. pubbl. a cura di A. Frajese, ed. Zanichelli, Bologna, 1938, p. 145).

$5 \pm i\sqrt{3}$, e siamo a posto. Certamente; si evita di esprimersi nella presente forma volutamente umoristica, ma l'insensatezza non si può nascondere, né sarebbe onesto nasconderla. Questo è il caso ove la citata obiezione di Russel è più che mai appropriata.

Mi è stato detto al riguardo che l'argomento dei numeri complessi (sia pure come cenno) è stato eliminato dai programmi delle scuole secondarie, e quindi può riguardare al più cenni facoltativamente dati a titolo informativo da qualche autore di libri di testo o da qualche insegnante. L'argomento andrà ripreso espressamente (nn. 9 e 10), ma dico fin d'ora che l'idea dell'immaginario mi sembra sia ancora generalmente annebbiata da residui di pseudospiegazioni del genere, rivestita di perplessità come quelle adombrate da frasi come quelle di Bombelli e di Leibniz: « quantità silvestri », « mostri di un mondo intellettuale, quasi anfibi tra l'essere e il non-essere ».

7. Fusionismo (anche spicciolo)!

Ho sempre indicato nel *fusionismo* il principale concetto di base per il miglioramento dell'insegnamento e della comprensione della matematica. Nel senso più specifico, in cui fu introdotto da Felix Klein, il fusionismo consiste nella fusione dello studio di geometria da una parte e di aritmetica analisi ecc. dall'altra; più in generale, si tratta di fondere in modo unitario tutto ciò che si studia (anche interdisciplinarmente, tra matematica e altre scienze; ma da ciò per ora prescindiamo), mentre le tendenze antiquate predicavano il « purismo » di ogni ramo da coltivare isolato senza contaminazioni. Geometria senza formule se non quando la si sostituisce con « Geometria analitica » che è tutt'altra cosa! aritmetica e analisi senza figure, che se di una funzione si studia il diagramma si entra nella « Geometria differenziale », e se c'entra il tempo si tratta di « Cinematica » o « Meccanica », e via dicendo.

Nelle scuole elementari e nella scuola media c'è fortunatamente una tendenza meno ottusa, intesa a rendere spontaneo l'uso appropriato di tutti gli strumenti conosciuti per esaminare qualunque tipo di questioni: numeri e calcoli sui numeri, diagrammi di « funzioni » (in senso qualunque, non « analitico »: p. es. sviluppo di una popolazione, indice dei prezzi, crescita di una pianta, moto del pendolo, temperatura durante il giorno, febbre di un malato,...), rappresentazioni geometriche, traduzione in diagrammi di flusso (cfr. in questo numero l'articolo di Margherita Fasano), schematizzazione con « patate » insiemistiche, e via dicendo. Tutto va bene purché tutto venga usato ogni volta che può servire, senza forzature preconcette o compartimenti stagni; meglio, per chiarirsi le idee su un problema qualunque, occorrerebbe cercar di vedere quante più interpretazioni alternative di problemi in altri campi rientrino nel medesimo schema.

Sarà dalla molteplicità di interpretazioni significative e praticamente importanti che certe *funzioni* (nel senso più convenzionalmente matematico) si considereranno meritevoli di particolare studio, scoprendone proprietà analitiche interpretabili significativamente anche per riguardo alle applicazioni già viste da prima e ad altre che da tali analisi si sarà portati a individuare.

Anzitutto, le funzioni $y = x$ ed $y = 1/x$ vanno considerate e rappresentate fin da quando si comincia a parlare di problemi di *proporzionalità diretta* e di *proporzionalità inversa* (purché non si istilli — come Cortini lamentò, dicendo che certi libri sono pericolosi in tal senso — l'impressione che il modo di dipendere di una grandezza y da un'altra x debba essere sempre e soltanto l'una o l'altra di queste due « proporzionalità »!).

Il quadrato e il cubo (intendo le funzioni $y=x^2$ ed $y=x^3$) appariranno come indicazione del modo in cui variano aree e volumi di figure qualsiasi variandone la « scala » (ed es. modelli di una nave); il quadrato anche come energia cinetica in funzione della velocità; e via dicendo.

La funzione esponenziale (e il logaritmo, come sua inversa) si presentano naturalmente come « legge della crescenza *naturale* » (beninteso, anche qui, senza mitizzazione: « naturale » inteso come « in misura proporzionalmente costante », non come « legge di Natura »); esempi ovvi, dalla capitalizzazione allo sviluppo di popolazioni con tassi di natalità e mortalità costanti, alla diminuzione del dislivello di temperatura, o della massa di una sostanza radioattiva che si disintegra, al trascorrere del tempo, e via dicendo.

Naturalmente, le proprietà di tali funzioni (specie sotto forma di *equazioni funzionali;* cfr. p. es. l'articolo di B. RIZZI in PdM, 1973, n. 4) vanno studiate, soprattutto interpretandole sul significato delle diverse applicazioni pratiche. Anche le funzioni goniometriche andrebbero incluse nella elencazione data delle funzioni indispensabili subito (possibilmente dalla scuola materna); ne rinviamo l'introduzione al n. 10 solo perché, nell'ambito della presente discussione, è più istruttivo inserirle nel discorso sul campo complesso.

Una « legge di degradazione »

Spesso... la generalizzazione non reca un vero arricchimento della scienza; reca invece, molte volte, un'espressione più astratta delle nozioni già acquisite, dove è dato men facilmente d'intendere quel che ne costituisce il valore.

Pei valori dello spirito, come per quelli materiali dell'economia, sussiste una « legge di degradazione »: non si può goderne pacificamente il possesso ereditario, se non si rinnovano ricreandoli nel proprio sforzo d'intenderli e di superarli.

FEDERIGO ENRIQUES (da *Le Matematiche nella scuola e nella cultura,* Lez. pubbl. a cura di A. Frajese, ed. Zanichelli, Bologna 1938, p. 153).

Generalità..., ma non troppa!

La principale conquista della matematica non è semplicemente aggiungere « sottigliezza a sottigliezza nel campo della generalizzazione ». Un certo grado di generalità deve essere presente in ogni teorema di alta classe, ma troppa *generalità tende inevitabilmente all'insulsaggine.*

G. H. HARDY (da *Apologia di un matematico,* trad. it., ed. De Donato, Bari 1969, p. 74).

---

8. Funzioni; « analisi » intuitiva.

Tutte le nozioni di analisi utili per rendersi conto dell'andamento di una funzione, e descriverlo, e ragionarvi sopra, si possono introdurre in modo geometrico intuitivo (riferendosi al diagramma) assai più istruttivamente che coi metodi « rigorosi » (che, tra l'altro, apparendo inidonei per ragazzi, ritardano l'acquisizione di fatti ovvi a troppo tardi e limitandola a troppo pochi: quelli che vanno all'Università e scelgono Matematica o Ingegneria o altre facoltà ove, almeno in parte, la matematica « serve »). E del resto non sono il solo a giudicare nefasto anche in tale sede l'insegnamento « rigo-

---

La colomba ed il vuoto

Abbandonando il campo dell'intuizione per indagare problemi più generali ed astratti, la mente del matematico va incontro a dubbi e difficoltà d'ordine nuovo...

Qui si affaccia alla mente una nota immagine di Kant: la colomba leggera, portata dalle ali sull'aria, crede di poter volare senza resistenza nel vuoto!

FEDERIGO ENRIQUES (da *Le Matematiche nella storia e nella cultura*, Lez. pubbl. a cura di A. Frajese, ed. Zanichelli, Bologna 1938, pp. 147-48).

Difetti della Perfezione

In generale gli insegnanti italiani — forse per l'educazione logica che ricevono nelle facoltà universitarie — trovano difficoltà ad accogliere questo spirito (introduzione di metodi più intuitivi ed empirici, secondo Felix Klein) cui è insita una certa incompiutezza e un modo di ragionare significativo ma volutamente imperfetto. (Ma) *il rigore logico nasconde in parte la genesi delle idee; anche l'esatta formulazione delle restrizioni che si richiedono nell'enunciato dei teoremi può togliere la veduta della genesi delle idee e perfino l'intelligenza del loro valore;... può accadere che l'allievo, prima di aver colto il senso del teorema nel caso che costituisce la regola, si fermi proprio sulla eccezione (che forse vedrebbe implicita in un enunciato meno preciso).*

FEDERIGO ENRIQUES (da *Le Matematiche nella scuola e nella cultura*, Lez. pubbl. a cura di A. Frajese, ed. Zanichelli, Bologna, 1938, pp. 188-89).

---

roso » (*): riporto a conforto di quel che dico il seguente brano di Polya (da *Patterns of Plausible Inference* (Vol. II di *Mathematics and Plausible Reasoning*), Princeton University Press, 1954; p. 159):

> Consideriamo l'insegnamento del « Calcolo » agli studenti di Ingegneria. (Io ho una lunga e variata esperienza di questo tipo di insegnamento). Gli ingegneri hanno bisogno di matematica, ma ben pochi hanno un vigoroso specifico interesse per la matematica; essi non sono allenati a capire « epsilon-dimostrazioni » (dimostrazioni basate sull'« ε comunque piccolo »), non hanno né tempo né interesse per dimostrazioni siffatte. Insegnar loro le regole del calcolo come dogmi imposti dal di fuori sarebbe antieducativo. Far credere che la dimostrazione loro data sia completa, mentre in realtà non lo è, sarebbe disonesto. Confessate tranquillamente che le vostre dimostrazioni sono incomplete, ma date rispettabili motivi plausibili a favore delle conclusioni incompletamente dimostrate, mediante esempi e analogie. Così non potrete essere biasimati per « dimostrazioni non valide », ed alcuni dei vostri studenti potranno conservare il ricordo dei vostri insegnamenti anche dopo l'esame. In base a una lunga esperienza, vorrei dire che gli studenti capaci d'ingegneria sono in genere più accessibili e più soddisfatti per motivazioni plausibili ben presentate che per dimostrazioni rigorose.

Al livello di cui discorriamo (scuola secondaria, ma anche, penso, facoltà universitarie escluso il corso di laurea in Matematica, dove pure introduttivamente converrebbe a mio avviso spiegare l'essenza delle cose prima di sottilizzare sugli epsilon), è agevole introdurre sostanzialmente tutte le nozioni *correttamente* in forma vivamente geometrica come tentato in MAE (Cap. II: « Studio di funzioni - Problemi di massimo », pp. 34-104). Per dare qualche esempio, la *tangente* alla curva-diagramma, in un suo punto, è (se esiste) quella di separazione fra le rette *troppo poco* e *troppo* inclinate (nel senso che, in quel punto, traversano la curva da sopra a sotto o

---

(*) A rigore, non dico si debba bandire il rigore, ma che non gli si deve dare la precendenza (né, peggio, l'esclusività) in confronto dell'intuizione, della visione diretta. Come esempio, al riguardo, mi sembra si potrebbe menzionare Courant. Per spiegare (sommariamente, quindi male) il tipo di formulazioni che suggerirei, si potrebbe dire: « Sotto condizioni poco restrittive sussiste questo teorema ecc. ecc. » e quindi « queste condizioni sono sufficienti (darle in ordine di semplicità e utilità decrescente con dimostrazione se ne vale la pena); queste sono necessarie (idem); la condizione necessaria e sufficiente è complicata e si può vedere in..., oppure consiste grosso modo di questo e questo in più o in meno ».

da sotto a sopra). La *pendenza della tangente* dà la *velocità* di accrescimento; la *sottotangente* (col suo reciproco) l'*intensità* di accrescimento (*); non è il luogo di dilungarci, ma assai più riesce spiegabile in forma analoga.

9. Vettori nel piano affine e nel piano metrico.

Parlare di vettori sembrerà, a tal punto, una digressione ingiustificabile; non dobbiamo occuparci di altre funzioni per completare l'argomento già avviato? e non dobbiamo riprendere le questioni connesse con la « trinomite »?

Certo. Ma è proprio per collocare queste questioni nell'appropriata prospettiva che conviene inserire a tal punto queste forse inattese considerazioni. Del resto, se le considerazioni che ispirano l'insieme delle proposte implicite nel punto di vista qui esposto venissero attuate, la parte di argomenti qui inserita dovrebbe in realtà esser già nota agli studenti fin dalla scuola media. (Almeno in quanto trasformazione geometrica; ma forse, e a mio avviso senz'altro, anche come operazioni sui vettori).

Non c'è bisogno di spiegare cosa s'intenda per prodotto $x\mathbf{a}$ di un vettore $\mathbf{a}$ per un numero x, per somma di due vettori, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, e per combinazione lineare, $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$, e di notare che queste (al variare di x e y) danno tutti i vettori del piano, e quindi, sommate a un punto O qualunque, dànno tutti i punti del piano, $\mathrm{P} = \mathrm{O} + x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$.

Tutte le trasformazioni affini del piano sono definite scegliendo comunque O', $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ (O' corrispondente di O, $\mathbf{a}'$ di $\mathbf{a}$, o, se si preferisce riferirsi ai punti, $\mathrm{O}' + \mathbf{a}'$ corrispondente di $\mathrm{O} + \mathbf{a}$, e idem per $\mathbf{b}$).

Nel piano affine (nel quale, cioè, non fissiamo una *metrica*, ossia non diamo significato a « ortogonalità » e a

(*) Oltre che in MAE, si potrà vedere in un prossimo fascicolo una proposta di esperimento come avvio a un insegnamento in tal senso (del dott. Fausto Perri).

« uguale lunghezza » per segmenti non paralleli) (*), esistono infinite trasformazioni affini che, ripetute due volte, cambiano ogni vettore nel suo opposto. Basta infatti, dopo aver scelto arbitrariamente un vettore $\mathbf{b} = \mathbf{a}'$ come corrispondente di $\mathbf{a}$ (beninteso, non parallelo, altrimenti la corrispondenza sarebbe degenere), scegliere $-\mathbf{a}$ come corrispondente di $\mathbf{b}$. In tal modo anche per $\mathbf{a}$ il corrispondente risulta $-\mathbf{b}$, e quindi *la corrispondenza così definita, ripetuta due volte, non è che la moltiplicazione (di ogni vettore) per* -1.

Se consideriamo il piano metrico, e scegliamo come vettore $\mathbf{b}$ corrispondente ad $\mathbf{a}$ un vettore di uguale modulo e ortogonale ad $\mathbf{a}$ (adesso queste nozioni hanno senso), la trasformazione è una *rotazione ad angolo retto* nel piano (e ce n'è solo due; se si sceglie una faccia del piano, si possono distinguere come rotazioni in senso *antiorario* o in senso *orario*; si sceglie di norma la prima). Indicando tale rotazione con i, abbiamo $ii\mathbf{a} = -\mathbf{a}$, e così per ogni altro vettore, per cui è $ii = i^2 = -1$ (come pure $(-i)(-i) = (-i)^2 = -1$): le rotazioni ad angolo retto (nel piano metrico) sono due « radici quadrate » di « meno uno ».

Come detto, le trasformazioni affini, le nozioni metriche, ecc., sono argomenti intuitivi di ricerca e sperimentazione nelle scuole medie, e alle conclusioni sopra indicate (difficili ad apprenderle tutto d'un tratto), si giunge senza fatica e senza accorgersene attraverso un apprendimento sul concreto.

Incidentalmente: nello stesso ordine di idee si inserisce lo studio del calcolo baricentrico (di cui la straordinaria efficacia didattica è dimostrata, tra l'altro, dalle esperienze di Emma Castelnuovo coi suoi allievi della Scuola Media Tasso; cfr. *Le Scienze*, n. 18, febbraio 1970).

(*) Pensando alla geometria dello spazio fisico, dove esiste una metrica (perché esistono corpi « rigidi » che permettono di confrontare la lunghezza di segmenti anche non paralleli), può apparire artificioso pensare ad un piano *privato* di tale ovvia qualità. Ma, a parte che in matematica si deve spesso studiare le cose *prescindendo volutamente* da qualche cosa, considerata per il momento estranea (addirittura, nella geometria proiettiva, si prescinde dalla distinzione di punti propri e « impropri », o « all'infinito »), il piano può rappresentare *situazioni* per le quali la nozione metrica non ha senso. Se il vettore $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$ indica che ho consumato x grammi di pane ed y minuti di telefonate, che senso ha chiedere se i due vettori sono ortogonali, e le quantità uguali?

10. Funzioni circolari; coordinate polari; oscillazioni.

Con le premesse nel frattempo illustrate siamo ora in grado di introdurre d'un colpo tutte le cose che, a introdurle separatamente e distaccate secondo gli usi tradizionali, danno luogo a tante lamentate manchevolezze concettuali e didattiche.

Le combinazioni lineari degli operatori vettoriali « 1 » (identità) ed « i » (rotazione ad angolo retto antioraria), cioè gli operatori $a + ib$, costituiscono (come è ormai chiaro) le *similitudini* (cioè le *rotazioni* con eventuale alterazione di scala, o *omotetia*) per i vettori del piano (o, se si vuole, per i punti P del piano tenendo fisso il punto O preso come origine). In particolare, $a+ib$ è un'*omotetia* se $b = 0$, ed è una *rotazione* se lascia invariato il modulo, e cioè se $a^2+b^2=1$; se l'angolo di rotazione è θ, è $a=\cos\theta$ e $b=\sin\theta$; in generale, la similitudine composta da una rotazione di angolo θ e di un'omotetia consistente nella moltiplicazione per ρ è data da $\rho \cos\theta+i\rho\sin\theta$, o $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Benché si presenti come una convenzione miracolistica (che risulta giustificabile solo più tardi), non esiterei anzi a introdurre anzitutto come notazione « comoda » quella consistente nell'indicare con la scrittura (*) $e^{i\theta}$ la rotazione di un angolo θ, e quindi anche (come $e^{i\theta}\cdot 1$) il vettore unitario facente angolo θ col semiasse orizzontale positivo, e quindi anche il suo punto estremo (facendolo partire da O). Volendo pensare la stessa cosa in modo *dinamico* (interpretando l'angolo come *tempo*, t), si può pensare e^{it} come il vettore unitario che gira con velocità uniforme (e unitaria: un radiante per unità di tempo, un giro nel tempo 2π) intorno all'origine O (od anche come il punto — estremo del vettore — che percorre il cerchio unitario). Allora si possono addirittura *definire* il coseno ed il seno come componenti (ossia proiezioni) orizzontale e verticale del vettore rotante e^{it}:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

(*) Basterebbe, per evitare un po' di capogiro, scrivere inizialmente R^θ (con R = rotazione di angolo uno, ossia un radiante), e soggiungere che, per motivi che appaiono subito dopo, R si può esprimere come e^i, dove e è il numero che si presenta appropriato come base dei logaritmi (logaritmi *naturali*).

Poiché due rotazioni, di angoli rispettivamente α e β, danno ovviamente una rotazione di angolo $(\alpha + \beta)$, si ha

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}\, e^{i\beta},$$

e ciò porta immediatamente e significativamente (oltre che automaticamente) alle formule per coseno e seno di $\alpha+\beta$ (o di $(\alpha+\beta)t$, oppure $\alpha+t$, ecc.), e tutte le altre simili espressioni.

L'insistenza nell'osservare che una lettera si può indicare con t anziché α ecc. sarebbe del tutto sciocca se non significasse intenzione di considerare tutte le formule nella interpretazione dinamica, che spesso le rende molto più espressive e istruttive.

Una delle cose che mi hanno provocato raccapriccio, nelle rivelazioni di Cortini, fu appunto che le funzioni goniometriche non venissero neppure presentate come funzioni, disegnandone il diagramma, mostrando il significato della sinusoide come diagramma delle oscillazioni armoniche, e richiamando mille esempi come quello (che accenneremo) dei « battimenti ». (Per altri cfr. MLI, Cap. IV).

Chi non ricorda l'incubo di dover ricordare a memoria formule più o meno strane dai nomi stranissimi (nel caso cui ci riferiamo, « di prostafèresi »? Ebbene: l'immagine geometrica (nel piano complesso) fa « vedere » come *evidente* la terribile formula, che poi (inserendovi la variabile t=tempo, per darvi un significato « dinamico ») rende altrettanto *evidente* che dia luogo, e lo spieghi, al fenomeno acustico dei « battimenti » (cioè, le periodiche variazioni nell'intensità del suono che si avvertono producendo due note di altezza quasi uguale).

Tutto sta nel considerare, anziché l'espressione $\cos\alpha + \cos\beta$ (che si tratta di trasformare in altra equivalente) quella di $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$, di cui la precedente è la parte reale (ossia, la proiezione orizzontale).

Nella figura 1 si vedono i due vettori unitari uscenti dall'origine, e facenti risp. angoli α e β rispetto al semiasse reale positivo; la loro somma è, naturalmente, la diagonale del parallelogrammo (qui: rombo), che forma (sempre col detto semiasse) angolo $(\alpha+\beta)/2$ (per la simmetria) ed ha modulo (lunghezza) $2\cos((\alpha-\beta)/2)$ (perché proiezione dei due vettori unitari su detta diagonale, che divide a metà l'angolo

$\beta-\alpha$ fra di essi). La proiezione orizzontale, oltre che mediante $\cos\alpha + \cos\beta$, si può quindi anche esprimere nella forma $2 \cos \frac{1}{2} (\alpha-\beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha+\beta)$. E questa è la famosa formula: a parole la spiegazione riesce lunga anche così, ma se si guarda la figura ogni parola è superflua.

Se poi gli angoli si fanno variare col tempo, e si considera la funzione $f(t) = \cos \alpha t + \cos \beta t$ (proiezione di $e^{i\alpha t} + e^{i\beta t}$) il risultato è (ovviamente, scrivendo αt e βt al posto di α e β)

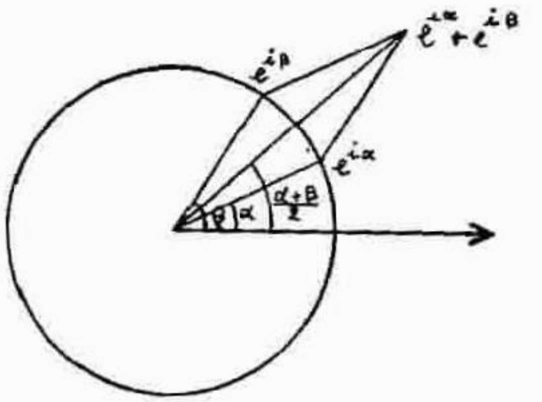

Fig. 1

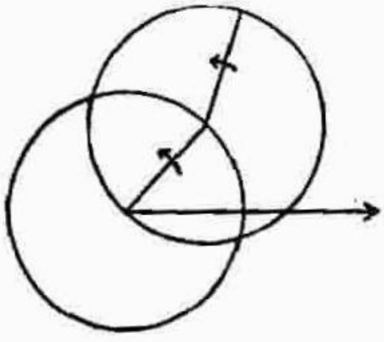

Fig. 3

$$f(t) = 2 \cos \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta)\, t . \cos \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) t ,$$

e il diagramma risulta come nella fig. 2 (vibrazioni con frequenza $(\alpha-\beta)/2$ con ampiezza che si allarga e si annulla ad ogni periodo $(\alpha+\beta)/2$). Anche ciò risulta chiaro dallo schema precedente (fig. 3): se i due vettori ruotano con velocità diverse, la loro risultante (diagonale) varierà periodicamente tra 0 e 2 (conviene pensare a uno dei vettori che gira intorno ad O, mentre l'altro, attaccato al suo estremo, ruota intorno ad esso).

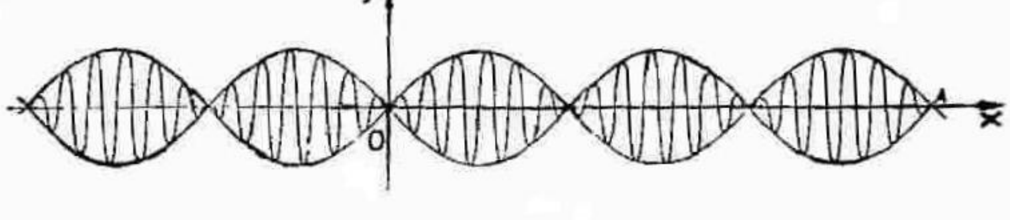

Fig. 2

11. Un itinerario più compatto e istruttivo.

Non so se alcuni cenni esemplificativi sparsi (anche se scelti con la preoccupazione di sembrare comprensibili anche staccandoli dal contesto) risultino chiari e convincenti. Chi ha interesse ad approfondire i vantaggi e svantaggi che (a suo giudizio) presenta il tipo di approccio suggerito, dovrebbe consultare le opere citate che contengono una trattazione più completa (MLI), o più alleggerita (per Istituti Tecnici Commerciali) ma per certi argomenti ripensata a livello più intuitivo (MAE), o ridotta a cenni più semplificati ed esemplificativi (SVM) quasi quanto quelli dati qui (ma ivi per « bambini » o ragazzi, e qui per insegnanti).

Ma l'ultimo scritto elencato (3PM), che è solo un breve articolo, può costituire forse la via più rapida per formarsi un'idea del concatenamento logico e intuitivo tra interpretazioni pratiche e creazione di concetti teorici che si può raggiungere collocandosi dal punto di vista propugnato.

In esso viene tracciato un itinerario che conduce a incontrare, successivamente, la necessità di introdurre (in contesti innegabilmente pratici e significativi), dapprima il famoso numero e (base dei logaritmi naturali), poi l'unità immaginaria i, e finalmente il più ancor famoso numero π, legati tra loro dalla famosa relazione $e^{i\pi} = -1$.

Che cosa è il numero e ? Sinteticamente, senza formule, il succo è questo: se, in un certo periodo (ad es., in 20 anni al 5%, in 25 al 4%) un capitale si *raddoppia* (in capitalizzazione *semplice*, cioè se gli interessi via via maturati e corrisposti rimangono infruttiferi), nello stesso periodo, se anche gli interessi sono fruttiferi alle medesime condizioni (capitalizzazione *continua*), anziché 2 diventa $e=2,71828...$ (cfr. MLI, pp. 307-309 e fig. ivi, o 3PM).

Che cosa è i ? Sostanzialmente, basta quanto già detto qui (rotazione ad angolo retto nel piano metrico).

Che cosa è π ? Lo sappiamo tutti (semicirconferenza, preso il raggio come unità); ma — osservato che, come naturale estensione di concetto (di e^x in e^z con $z=x+iy$ complesso), $e^{i\theta}$ è la rotazione di angolo θ — la definizione di π è proprio quel numero per cui $e^{i\pi} = -1$ (più esattamente, anziché sottintenderlo, occorre dire *il primo numero positivo per cui* (ecc.), dato che altrimenti si potrebbero prendere indifferentemente $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, ecc.).

Ecco: l'articolo riferito come « 3 PM » « Tre personaggi della matematica » (che sviluppa tre conferenze che tenni al « Club matematico », per ragazzi di scuole secondarie, Roma 1970) sviluppa proprio l'itinerario ideale che, sempre attraverso esemplificazioni interpretazioni e applicazioni *pratiche,* fa *vedere* le ragioni *teoriche* (altrimenti retaggio segreto degli specialisti) che danno ragione del ruolo essenziale nella matematica di questi tre « personaggi ». Perciò mi permetto di raccomandare caldamente di leggerlo e pensarci sopra.

Mi è stato chiesto, in un recente dibattito, da Mario Pantaleo, se nel titolo e nell'ispirazione di questo lavoro non riecheggiasse qualcosa dei famosi « Sei personaggi in cerca di autore », di Luigi Pirandello. E certamente — ammisi — c'è una reminiscenza della magia pirandelliana di « evocare » i suoi personaggi, essenziali, veri, reali, ma troppo veri per non esser considerati da spettatori grossolani come fantocci, simboli, fantasmi. Ed è forse per lo stesso motivo che molti non comprendono e non apprezzano la matematica, e che molti non riescono a farla comprendere e farla apprezzare. Forse non per inettitudine o cattiva volontà, ma per la preoccupazione di farla apparire come una cosa più che seria, *seriosa,* arcigna, superba (il che non è un gradino più alto della serietà, ma la sua contraffazione involontariamente umoristica, scostante, repellente).

« Parlar scientifico », nuovo « latinorum »

Se i profani parlano a sproposito di scienza, c'è anche da dire però che l'uomo di scienza non fa certo molto perché il suo linguaggio venga facilmente capito. Il « parlar scientifico » ha un po' preso il posto del « latinorum » dell'azzeccagarbugli manzioniano. Molti scienziati hanno fatto una sorta di autocritica: ... « bisogna liberarsi — hanno detto — dall'enfasi ottocentesca della ricerca ».

Come cambiare le cose? Divulgazione scientifica, e, soprattutto, guerra per cambiare tipo e contenuto di insegnamento nella scuola, aprendo gli allievi (e gli insegnanti) al gusto delle osservazioni ed elaborazioni scientifiche.

TULLIO FAZZOLARI (*L'Espresso*, 24 marzo 1974, p. 79).