La polemica eleatica per il concetto razionale della geometria

1. *Introduzione.* — L'idea che i punti, le linee e le superficie della matematica sieno qualcosa di diverso dai corpi fisici (granellini di sabbia, fili, veli sottilissimi) di cui ci offrono la rappresentazione, è così familiare al nostro spirito che non ci riesce facile comprendere come dovesse essere estranea alle menti che ebbero prime a speculare sulla geometria. Anzi codesta familiarità ci nasconde gli ardui problemi che la concezione astratta di quegli enti pone naturalmente al pensiero, in quanto essi figurano come limiti delle cose sensibili, venendo definiti mercè un procedimento infinito d'idealizzazione: se il punto geometrico è più piccolo di qualunque corpo, piccolo ad arbitrio, deve dirsi infinitamente piccolo o rigorosamente nullo? Come si vede, il concetto razionale del punto (e in maniera analoga della linea e della superficie) ci mette già in presenza colle questioni onde ha origine l'analisi infinitesimale.

Ora noi crediamo che il momento, interessantissimo per la storia del pensiero, in cui il concetto degli enti geometrici assume per la prima volta il significato razionale che conserva di poi nella scienza, si possa cogliere nel trapasso fra i più antichi pitagorici e i filosofi della scuola d'Elea (PARMENIDE e ZENONE). Quest'idea non è del tutto nuova. Già PAUL TANNERY [1] è stato condotto a supporre che, in un primo stadio, la geometria Pitagorica fosse basata sopra un concetto empirico del punto-esteso, raffigurato, sotto il nome

---

[1] « Pour l'histoire de la science hellène » (Parigi, 1887), Ch. X.

di *monade* o unità indivisibile, come elemento delle figure, che risulterebbero dunque « somme di punti »; la critica di siffatta concezione avrebbe costituito precisamente l'oggetto della polemica di ZENONE d'Elea, e in particolare anche dei suoi celebri argomenti sul moto, che sarebbero dunque da ritenere — non come sofismi — bensì come riduzione all'assurdo di una precedente tesi pitagorica. Ma poichè le dottrine di Zenone sono strettamente connesse a quelle del suo maestro PARMENIDE, sembra difficile ammettere che la critica zenonica non trovi principio in una precedente critica dello stesso Parmenide, nei cui frammenti siamo stati indotti appunto a cercare (1) l'origine del concetto razionale degli enti geometrici.

Frattanto però le stesse vedute del TANNERY hanno avuto accoglienza dubbiosa da taluno fra i più recenti storici delle matematiche greche: citiamo in ispecie sir THOMAS HEATH, autore della bella *History of Greek Mathematics* (2). Per questo motivo, e data la fondamentale importanza dell'argomento, crediamo opportuno discutere di nuovo la questione con qualche larghezza.

2. *La teoria pitagorica del punto-monade.* — Si ammette generalmente, sulla base della testimonianza di ERODOTO (3), a cui probabilmente si riattacca PROCLO (4), che la geometria greca derivi dall'Egitto, o forse anche da influenze orientali (della Caldea e dell'India), ma che soltanto in Grecia lo studio si sollevi, dall'interesse pratico, al puro scopo scientifico. PROCLO (pg. 65, 15) dice che « Pitagora trasformò lo studio della geometria in un insegnamento liberale, esaminando i principii generali da cui resulta la dimostrazione dei teoremi in una maniera immateriale e intellettuale », e che egli « ebbe a scoprire la teoria delle grandezze incommensurabili e la costruzione delle figure cosmiche (poliedri

---

(1) « Sul procedimento di riduzione all'assurdo » *Bollettino della Mathesis*. Bologna, 1919.

(2) Oxford, 1911.

(3) II, 109.

(4) In Eucl. ed. Friedlein, pg. 65.

regolari) ». E da altre indicazioni del suo Commento resulta che i Pitagorici giunsero ben presto alla conoscenza della maggior parte delle proposizioni che formano oggetto dei libri planimetrici dell'Euclide: di che porge anche indiretta testimonianza un frammento sulle lunule di IPPOCRATE di Chio (che deve risalire circa al 450 a. C.). In particolare certo i detti Pitagorici svolsero la teoria delle proporzioni o della misura, se pure non riuscirono a costituirla in quella forma perfetta (comprendente insieme la dottrina dei rapporti incommensurabili) che troviamo nel 5° libro d'Euclide, che un anonimo scoliasta dice risalire ad EUDOSSO di Cnido (4° secolo a. C.).

Ora se cerchiamo di rappresentarci i motivi per cui la pratica dei geometri catastali egiziani potè convertirsi nello studio teorico della scienza, è naturale ammettere che il genio greco — che PLATONE (Rep. 436) dice amante del sapere in confronto allo spirito egiziano amante della ricchezza — sia stato sollecitato da un interesse, non soltanto artistico, ma cosmologico: poichè appunto dal problema cosmologico hanno inizio, nelle colonie ioniche dell'Asia Minore, le speculazioni dei Greci.

Ricordiamo infatti che i filosofi ionici, a partire da TALETE di Mileto (circa 600 anni a. C.) si ponevano il problema della « natura delle cose », cercando una forma primitiva, o cosmica, della materia, che dovrebbe ritrovarsi in qualche modo invariabile attraverso le trasformazioni della materia sensibile. Questa forma fu l'« acqua » per TALETE, l'« aria » per ANASSIMENE di Mileto, il « fuoco » per ERACLITO d'Efeso, mentre ANASSIMANDRO, che — venendo subito dopo Talete — si profila come un gigante del pensiero in quell'epoca remotissima, pose soltanto il requisito che la materia cosmica dovesse essere una sostanza diffusibile o infinita (ἄπειρον), capace di riempire tutto lo spazio, e — a quanto pare — identificantesi con esso.

Non è priva di significato la circostanza che ARISTOTELE, nel libro I, della Metafisica [1], menzioni accanto a codeste speculazioni le vedute dei Pitagorici, dei quali egli dice che « avendo cominciato ad occuparsi di ricerche matematiche

---

[1] A. 5, 985ª 23.

ed essendo grandemente progrediti in esse, furono condotti da questi loro studi ad assumere come principii di tutte le cose esistenti quelli di cui fanno uso le scienze matematiche. E poichè i primi che qui s'incontrano sono, naturalmente, i numeri, sembrò loro di ravvisare in questi molte più analogie con ciò che esiste o avviene nel mondo, di quante se ne possano trovare nel fuoco, nella terra e nell'acqua.... Avendo poi riconosciuto che le proprietà e le relazioni delle armonie musicali corrispondevano a rapporti numerici, e che anche in altri fenomeni naturali si riscontravano analoghe corrispondenze coi numeri, furono tanto più indotti ad ammettere che i numeri fossero gli elementi di tutte le cose esistenti e che tutto il cielo sia proporzione e numero ».

Appunto il ravvicinamento della teoria pitagorica con quelle che porgono una spiegazione della natura delle cose, suggerisce che il concetto del numero presso l'antica scuola italica dovesse rispondere ad un senso affatto concreto, dandosi nome di « numero » ad ogni collezione di oggetti indivisibili (unità), presi anche in un certo ordine o in una certa disposizione geometrica: il qual supposto si accorda colla dottrina pitagorica dei numeri figurati (numeri triangolari, quadrati, ecc.). Diguisachè la formula che si presenta atta a tradurre il passo sopra citato, « le cose sono numeri », cessa di apparire scandalosa e paradossale.

I Pitagorici primitivi dovevano affermare codesta formula in un significato materiale, intendendo dunque che la materia sia costituita come somma di punti materiali o *monadi* (unità aventi posizione), e soltanto dei Pitagorici venuti più tardi erano condotti ad intenderla in un senso simbolico o formale, scorgendovi il semplice riconoscimento di un ordine delle cose che si traduce secondo certi rapporti numerici: che è una seconda interpretazione della dottrina pitagorica, di cui si trova pure traccia in Aristotele.

Ma l'esistenza effettiva di una prima accezione materiale di codesta dottrina viene confermata da molti altri passi, che valgono a recare qualche lume sul nostro argomento.

Anzitutto in Met. VI, 11 (3) [1] Aristotele espressamente dice che « alcuni definiscono il triangolo e il cerchio

---

[1] Z. 11, 1036^b 8.

non come divisioni della linea nella continuità della superficie, ma in concreto, tenendo conto del bronzo o della pietra di cui sono fatti ».

E in altri luoghi ci reca le seguenti informazioni:

Met. XI, 6 (7) (¹). « I Pitagorici pure dicono esservi lo stesso uno matematico, ma per verità non astratto (κεχωρισμένον), e di questo constare le sostanze sensibili. Infatti costruiscono tutto il cielo coi numeri, non composti di unità monadiche, bensì di unità aventi una certa grandezza (²). Però se l'unità primitiva abbia grandezza, sembrano essere in dubbio ».

Met. XIII, 3 (14) (³). « (I Pitagorici) manifestamente dicono che una volta costituito l'uno, sia per mezzo di superficie, sia per il colore, sia per il germe o per altra causa che non saprebbero chiaramente indicare, la parte dell'infinito più vicina veniva subito attratta e terminata dal limite (πέρας) ».

Questa notizia si può spiegare ove si riattacchi la teoria pitagorica a quella sulla natura delle cose di Anassimandro. Mentre Anassimene, cercando di determinare il pensiero del suo predecessore, assumeva che la sostanza primitiva infinita — che è, per lui, l'aria — divenisse acqua e terra (liquido e solido) e per contro fuoco o etere (stato della materia più sottile dell'aria) mercè condensazione e rarefazione, vi è luogo a supporre che Pitagora potesse derivare la struttura monadica della materia sensibile dalla primitiva sostanza infinita, supponendo una condensazione attorno a centri monadici, che — per costituirsi come nuclei solidi — dovevano venire limitati da un relativo vuoto, o meglio da un etere circostante. In appoggio di tale opinione possono addursi alcuni testi e raffronti attorno a cui non c'indugeremo, limitandoci a citare: Aristotele. Met. A. 5, 986^a 15, 987^a 9 e Phys. Δ 6, 213^b 22.

3. *La concezione geometrica pitagorica e Parmenide d'Elea.* — Ciò che sopra si è detto ci abilita a comprendere la visione pitagorica della geometria. Se soltanto uno spirito pratico ed

---

(¹) M. 6. 1080^b. Cfr. 8, 1083^b 8, A. 5, 986^a 15.

(²) N. 3. 1091^a 13.

(³) Per la composizione del cielo coi numeri cfr. anche De Coelo P. 1. 300^a 14. A questo proposito è suggestiva la supposizione di L. Brunswicg. (Les étapes de la philosophie mathématique) che appunto alla visione delle configurazioni stellari riattacca l'idea della dottrina delle monadi.

empirico può considerare letteralmente il cerchio e il triangolo, secondo le parole di ARISTOTELE, tenendo conto del bronzo o della pietra di cui sono fatti, si comprende invece che, sollevandosi per la prima volta il pensiero ad una veduta più razionale della scienza, possa ritenere le figure geometriche, non ancora come astratte da ogni materia, sibbene come forme di una materia universale, che si ritrova identica nelle materie sensibili qualitativamente diverse: poichè la dottrina pitagorica conduceva naturalmente a comprendere le differenze di qualità come differenze di numero e di posizione degli elementi costitutivi delle cose. Insomma, se il punto geometrico appariva come punto materiale, ad immagine del granellino di sabbia, già in qualche modo si sollevava sopra il concetto puramente empirico di questo.

D'altronde il ritenere le figure geometriche quali somme di punti, porta subito ad un certo numero di conseguenze atte a far progredire la geometria; giacchè ne deriva intanto la possibilità di misurare le grandezze geometriche definendo il loro rapporto, onde segue un rapido sviluppo della teoria della similitudine. Soltanto nel progresso ulteriore della dottrina si va incontro all'assurdo delle grandezze incommensurabili.

Noi non possediamo documenti precisi che possano stabilire la data di questa scoperta, discendente dal teorema di Pitagora, ma talune leggende che si riferiscono ad IPPASO di Metaponto — cacciato dalla scuola pitagorica per averne rivelato il segreto, e poi perito in un naufragio per punizione degli Dei — potrebbero indicare lo stato d'animo di chi, avendo costruito un grande edifizio scientifico, lo vede minacciato di rovina da un fatto nuovo ed imbarazzante.

Comunque, o per effetto della scoperta degli incommensurabili o per la progredita riflessione su semplici proprietà degli enti geometrici connesse ai principii, si deve ammettere che, nella stessa cerchia dei Pitagorici, l'ipotesi fondamentale del punto-monade non potesse essere accolta senza sollevare dubbi (1) e contraddizioni (2).

---

(1) Dubbi circa l'estensione del punto abbiamo visto ricordati in Met. XI, 6 (7).

(2) Così essi attribuivano al « punto » la proprietà di essere ad un tempo, pari e dispari, limitato ed illimitato, siccome appare dai passi aristotelici sopra indicati.

Ora è appunto da codesta cerchia che esce fuori (intorno al 500 a. C.) PARMENIDE d'Elea [1].

L'interpretazione corrente della storia della filosofia, costruita da filosofi hegeliani (ZELLER) considera la dottrina della scuola eleatica, nella luce dei dialoghi platonici, come affermazione metafisica dell'invariabilità dell'Essere in antitesi colla veduta del Divenire universale, di ERACLITO d'Efeso. BERNAYS era trascorso fino a ricercare una diretta allusione ad ERACLITO in un frammento del poema parmenideo, e — sebbene lo ZELLER non abbia creduto di accogliere questo riferimento, per motivi di sostanza e per motivi cronologici — la detta interpretazione è stata ripresa di recente, in una nuova forma, dal BURNET (« The Early Philosophy of Greece »). Per noi il pensiero metafisico della scuola d'Elea si spiega soltanto in rapporto ad una critica di concetti matematici e naturalistici che deve essere veduta come *prima* in quella filosofia: il cui aspetto formale, in antitesi all'eraclitismo, fu svolto più tardi dai Megarici e dallo stesso PLATONE. E il significato dell'anzidetta critica emerge da un confronto preciso delle polemiche eleatiche colle teorie che siamo stati portati ad attribuire ai filosofi loro vicini (Pitagorici), mentre ogni riferimento alla lontana scuola di ERACLITO d'Efeso ci appare, per diversi motivi, non verosimile.

Diciamo anzitutto che — come ha già rivelato il TANNERY meglio che lo ZELLER — il senso generale del poema di PARMENIDE « sulla natura » s'intende bene ove si traduca il soggetto del discorso, « ciò che esiste » o « l'ente » (τὸ ἐόν), come « pieno » e il « non ente » (τὸ μὴ ἐόν) come « vuoto ». PARMENIDE propugna dunque, contro una scuola precedente, che la materia è tutta piena e compatta senza vuoti; ed è chiaro che la dottrina criticata non può esser altro che quella appartenente, come si è visto, ai Pitagorici. La nuova dottrina è, d'altronde, una nuova risposta al problema ionico della natura delle cose, in quanto mira a definire — come sostrato della materia qualitativamente distinta — un'unica

---

[1] Annoverato fra i Pitagorici nel catalogo di GIAMBLICO (Diels, Vorsokratiker: Phyth. 45, A).

materia estesa, che in realtà s'identifica collo spazio, le cui proprietà si deducono dal puro requisito di *esistere*, quale oggetto (invariabile) del pensiero logico (¹).

Ma, come la teoria monadica dei Pitagorici implicava, più che una teoria della materia, una geometria edificata sopra i concetti empirici degli enti fondamentali (punto, linea e superficie), così la dottrina eleatica doveva porgere una critica di tali concetti: anzi la stessa distinzione fondamentale, posta da PARMENIDE, fra verità razionale (ἀλήθεια) e giudizio dei mortali fondato sull'apparenza sensibile (δόξα), non s'intende fuori di una veduta razionale del mondo geometrico, che doveva costituire — pel filosofo — il mondo della verità.

Effettivamente si trovano, nel poema dell'Eleate, passi che possono venire interpretati in questo senso, come accenno al concetto della superficie senza spessore « che non separa lo spazio dalla connessione dello spazio », e a quello del punto che, nelle dottrine di avversarii ciechi e sordi, stupidi e senza discernimento – costituendo un bastardo infinitesimo attuale — doveva apparire qualcosa di contradditorio, di cui si afferma e si nega ad un tempo l'esistenza (o l'estensione). Ma vogliamo indugiarci un momento sull'esame di codesti passi, di cui, almeno il primo, sembra a noi ricevere per la prima volta un senso, attraverso l'accennata interpretazione.

Il primo passo è (²):

Fr. 2 λεῦσσε δ' ὅμως ἀπεόντα νόωι παρεόντα βεβαίως.
οὐ γὰρ ἀποτμήξει τὸ ἐὸν τοῦ ἐόντος ἔχεσθαι
οὔτε σκιδνάμενον πάντηι πάντως κατὰ κόσμον
οὔτε συνιστάμενον.

Cioè: le cose (sensibilmente) assenti contemplale tuttavia fermamente presenti alla ragione. Tu non separerai l'esistente (lo spazio) dalla connessione coll'esistente; nè staccandolo da tutte le parti, del tutto regolarmente (come nel caso

---

(¹) Cfr. ENRIQUES « Le venerabili proprietà della materia » in Periodico di Matematiche, n. 2, 1921.

(²) H. Diels « Fragmente der Vorsokratiker ». Bd. I. Berlino, Weidemann, 1912.

di una superficie chiusa che racchiude un solido) nè congiungendolo (come fa una superficie separante due solidi contigui).

Tradurre « l'esistente » come « spazio » per intendere poi che le « cose assenti » sieno la « superficie », può apparire invero un modo di procedere artificioso ed arbitrario, a chi supponga in Parmenide un puro metafisico, usante tutt'al più un linguaggio suggerito dalla geometria, e niente affatto un critico dei concetti geometrici: onde si chiederà anzitutto la prova esplicita che il Nostro si è effettivamente occupato di una siffatta critica. Ebbene questa prova si desume da due citazioni di PROCLO nel Commento all'Euclide; la prima delle quali (a proposito della def. VIII) ci apprende che l'Eleate distingueva le figure geometriche in rettilinee, circolari e miste, mentre la prima — riferendosi alla def. I — reca un' informazione più significativa. Dice PROCLO che la definizione euclidea « il punto è ciò che non ha parti » è conforme al criterio di PARMENIDE che le definizioni negative convengono ai principii, chè infatti questi attribuisce la causa prima ed ultima delle cose alla sola negazione. Sebbene la citazione richiami, per la forma, il linguaggio propriamente aristotelico, da essa si rileva che Parmenide dovette veramente occuparsi di definire quei concetti che, al pari degli enti razionali della geometria, appariscono come limiti del sensibile, riuscendo dunque caratterizzati, per la mancanza di certe proprietà, come « cose assenti » (ἀπεόντα).

Il secondo passo del poema parmenideo in cui vediamo un accenno al concetto del punto pitagorico, è il seguente:

Fr. 6. *χρὴ τὸ λέγειν τε νοεῖν τ' ἐὸν ἔμμεναι· ἔστι γὰρ εἶναι*
μηδὲν δ' οὐκ ἔστιν· τά σ' ἐγὼ φράζεσθαι ἄνωγα.
πρώτης γάρ σ' ἀφ' ὁδοῦ ταύτης διζήσιος (εἴργω),
αὐτὰρ ἔπειτ' ἀπὸ τῆς, ἣν βροτοὶ εἰδότες οὐδὲν
πλάττονται, δίκρανοι· ἀμήχανιη γὰρ ἐν αὐτῶν
στήθεσιν ἰθύνει πλακτὸν νόον· οἱ δὲ φοροῦνται
κωφοὶ ὁμῶς τυφλοί τε, τεθηπότες ἄκριτα φῦλα,
οἷς τὸ πέλειν τε καὶ οὐκ εἶναι ταὐτὸν νενόμισται
κοὐ ταὐτόν, πάντων δὲ παλίντροπός ἐστι κέλευθος.

Cioè: Bisogna che ciò che può esser detto e pensato sia l'esistente: infatti è possibile essere, e il niente non è possibile: queste cose io ti ordino di pensare.

Io voglio tenerti lontano da questa prima via di ricerca (in cui si tiene come esistente il niente o il vuoto), ma poi anche da quest'altra in cui errano mortali ignoranti di tutto, uomini con due teste; la sconsideratezza nei loro petti guida la mente vacillante, ed essi sono portati sordi insieme e ciechi, istupiditi, senza discernimento: essi ritengono che essere e non essere sia la stessa cosa e non la stessa cosa. Di tutti (i primi e i secondi nominati) la via (egualmente) si ripiega sopra se stessa.

In questo passo appunto Bernays, e ora Burnet, vedono un accenno ad Eraclito, che sarebbe specialmente designato ove si parla della seconda via di ricerca per cui « l'essere e il non essere sono la stessa cosa e non la stessa cosa », ovvero come traduce Burnet, in maniera forse un po' sforzata, per cui « una cosa può essere e non essere lo stesso e non lo stesso ». E l'interpretazione prenderebbe valore da ciò che l'ultimo verso sarebbe tradotto « il sentiero di tutte le cose si ripiega sopra se stesso », valendo così a descrivere la teoria eraclitea delle trasformazioni della materia, quale si vede espressa nel noto frammento

Fr. 60: ὁδὸς ἄνω κάτω μία καὶ ὡυτή

« la via all'insù e la via all'ingiù sono una e la stessa ».

Ma, se anche si voglia risolvere la questione cronologica nel senso di ritenere Parmenide di poco posteriore ad Eraclito, bisognerebbe ammettere che le dottrine di questi fossero divenute rapidamente popolari in Italia perchè il Nostro si lasciasse andare a quella polemica, e mal si comprende come ei potesse inserire, per dir così, questa polemica di straforo, in un passo ove sarebbe presa di mira una teoria pitagorica. Dirò di più che, le stesse vedute sul divenire professate da Eraclito, non mi sembra certo che dovessero apparire a Parmenide in contraddizione colle proprie (in cui non si cerca invero di conciliare l'invariabilità di ciò che razionalmente esiste, col mutamento del mondo empirico), e quanto al passo sopra riferito — se anche potè ricevere più tardi un'interpretazione allegorica [1] — ritengo che il

[1] In accordo con Diogene, L. IX, 9, (in Diels, A, 1).

suo significato primitivo si riferisca soltanto alla relatività della direzione « alto » e « basso » già riconosciuta da ANASSIMANDRO (1), e affatto conforme alla veduta parmenidea sulla sfericità della terra (2).

Invece il frammento dell'Eleate s'intende assai chiaramente come polemica contro le varie soluzioni che, nei circoli Pitagorici, potevano essersi affacciate nei riguardi del concetto del punto; il quale — essendo preso come elemento delle cose — doveva apparire, come si è detto, un bastardo infinitesimo attuale, che a volta a volta si fa esistere o non esistere, secondo le esigenze del ragionamento. Insomma, se PARMENIDE ha qui enunciato, per la prima volta, il principio logico di contraddizione, soltanto la necessità di far giustizia di uno pseudo-ente logico può averlo condotto ad una tale enunciazione, che altrimenti — per essere troppo ovvia — sembrerebbe priva di significato.

In tal guisa la scoperta dei principii logici, e quindi l'origine della logica stessa (3), si ricollega alla critica di concetti onde è uscita l'analisi infinitesimale.

4. *La polemica di Zenone d'Elea.* — ZENONE d'Elea discepolo di PARMENIDE e di venticinque anni più giovane, prosegue colla sua sottile dialettica una vigorosa polemica contro i sostenitori della tesi che « le cose sono pluralità », (πολλὰ εἶναι) e — secondo PLATONE (Parmenide 127e-128c) — non fa che difendere la stessa tesi del maestro circa l'unità o continuità dell'esistente (ἓν εἶναι τὸ πᾶν), riducendo all'assurdo le tesi avversarie (4). Perciò l'esame degli argomenti di Zenone, in cui il senso della teoria che « le cose sono pluralità » appare assai chiaramente accennato (se pure con linguaggio simile a quello parmenideo) riesce a convalidare insieme, e l'interpretazione della dottrina pitagorica che

---

(1) Cfr. ARISTOTELE: De Coelo, B. 13, 295b 10.

(2) Aetius III, 15, 7 in Diels: Parmenide A, 44.

(3) Attribuita a Zenone da Aristotile: cfr. DIOG., L. VIII, 57.

(4) Anche Plutarco Strom. 5 (in Diels, B. 23) dice che « Zenone l'eleate non espose nulla di proprio, ma portò più avanti le difficoltà su questi argomenti ».

sopra abbiamo tratto dai riferimenti aristotelici, e il senso proprio della critica eleatica.

Invero gli argomenti di ZENONE contro la pluralità, si possono leggere in frammenti dello stesso autore, riportati da SIMPLICIO (¹) e in chiare testimonianze. Essi importano che nell'ipotesi della pluralità, cioè se le grandezze geometriche sono costituite di elementi indivisibili, eppure estesi, queste medesime grandezze appariscono insieme « piccole e grandi, piccole fino alla nullità e grandi fino all'infinito ».

La dialettica zenonica si compiace a svolgere in varii modi tale contraddizione. « Se vi è pluralità — dice il Nostro in Simplicio; Phys. 140, 27 — le cose sono tante quante sono, nè più nè meno. Ma se è così sono in numero finito. Viceversa se vi è pluralità gli enti sono infiniti; sempre infatti vi sono altri enti frà gli enti e di nuovo altri in mezzo a quelli, e così gli enti sono infiniti. « A questa maniera, aggiunge Simplicio, Zenone mostrò l'infinito secondo moltitudine colla dicotomia.

Che in questi argomenti si tratti effettivamente di negare l'estensione del « punto », ci conferma ARISTOTELE (Met., B. 4, 1001^b, 7): « se l'uno (τὸ ἕν) è indivisibile in sè, secondo l'assioma di Zenone sarebbe nulla. Infatti ciò che, nè aggiunto nè tolto può fare una cosa più grande o più piccola dice non appartenere agli enti, naturalmente intendendo che l'ente sia grandezza, e in quanto grandezza corporeo; questo invero (il corporeo) è in ogni parte ente. Quanto alle altre cose, come la superficie e la linea, aggiunte faranno in qualche modo più grande o no ciò a cui si aggiungono, ma il punto e la monade in nessuna maniera ».

E similmente SIMPLICIO (Phys. 97, 13) spiegando il significato della polemica di ZENONE contro la pluralità: « Come pare faceva difficoltà quanto al dire che ciascuna delle cose sensibili sia categoricamente una pluralità, e colla divisione, mentre il punto non è posto nemmeno come unità: infatti ciò che, nè aggiunto accresce, nè tolto diminuisce, riteneva non appartenere agli enti ».

Giustamente il TANNERY riattacca a questa stessa pole-

(¹) In Diels: Zenone B.

mica contro la pluralità gli argomenti di ZENONE sul movimento [1] cui si può dare forma matematica precisa:

1) Un punto non può passare da A in B, perchè dovrebbe passare prima per il punto medio C del segmento AB, e poi per il punto medio del segmento CB, e così via all'infinito;

2) Achille — piè veloce — non può raggiungere, nella corsa, la tartaruga, sol che le dia un certo vantaggio; poichè se si pone Achille in A e la tartaruga in T, e si ammette per esempio che Achille corra con velocità dieci volte più grande, dovrà prima egli andare da A in T, e frattanto la tartaruga andrà da T ad un punto T' (posto ad una distanza da T uguale al decimo di AT), e poi da T a T', mentre la tartaruga sarà passata già ad un altro punto T'', e così all'infinito.

Questi argomenti non appariscono più come sofismi ove si considerino come riduzione all'assurdo dell'ipotesi pitagorica: se ogni intervallo, per piccolo che sia, ha un minimo d'estensione (superiore alle dimensioni del punto o alla distanza di due punti contigui) veramente le somme di infiniti segmenti che occorre di considerare negli argomenti precedenti, debbono riuscire infinite. Anzi questa osservazione, presa come affermazione positiva, costituirà il postulato fondamentale assunto da EUDOSSO a base del metodo d'esaustione, che è conosciuto di solito sotto il nome di postulato d'ARCHIMEDE.

Gli altri due argomenti di ZENONE sul moto (quello della freccia e quello delle file di punti materiali) sono spiegati dal TANNERY in rapporto alla tesi che il tempo sia somma di istanti, ma nel secondo di essi (col conforto di ARISTOTELE) noi abbiamo ravvisato la tesi della relatività del movimento [2].

Aggiungeremo questo rilievo. Bene avverte lo ZEUTHEN [3] che gli argomenti di ZENONE pongono il problema della somma di una progressione geometrica infinita, chè anzi, nel primo, si vede già come sia possibile la decomposizione:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots;$$

---

(1) Cfr. ARISTOTELE, Phys Z. 9, 239^b 9.

(2) « La relatività del movimento nell'antica Grecia ». Periodico, 1921, n. 2.

(3) « Histoire des Mathématiques », trad. fr. 1902, 96, pg. 54.

e poichè la soluzione di tale problema importa soltanto il trattamento di equazioni di primo grado, che in quell'epoca certo si conosceva nella forma equivalente delle proporzioni, si deve ritenere che appunto in quell'occasione, o da qualche avversario di ZENONE o magari da lui stesso, si sia scoperta la somma della progressione geometrica. Una conferma di ciò può offrire la successiva scoperta del volume della piramide fatta da DEMOCRITO, ove si ammetta che il procedimento democriteo non differisca da quello che figura nella dimostrazione eudossiana dell'EUCLIDE, se non per essere nella forma (non rigorosa) di procedimento infinito: infatti si ottiene in tal guisa il volume cercato, moltiplicando il prisma di ugual base ed altezza per

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots\right)=\frac{1}{3}.$$

5. *Sull'accoglienza delle tesi eleatiche nel mondo greco.* — Ci resta a parlare dell'accoglienza che la polemica eleatica ebbe a ricevere nell'ambiente della scienza greca. Non è dubbio che il successo fu pieno, presso i geometri. Il pitagorico FILOLAO (vivente a Tebe circa il 400 a. C.) poteva ancora conservare le vecchie dottrine della scuola, ma in un significato formale o simbolico: così egli non poteva più affermare che tutte le cose sono numeri, ma soltanto che « tutte le cose conosciute posseggono un numero, e nulla noi possiamo comprendere o conoscere senza di questo » ([1]).

ARISTOTELE (Phys., A. 3, 187) dice « alcuni acconsentirono ad entrambi gli argomenti, a quello che tutte le cose sono uno... e all'altro che si ricava dalla dicotomia avendo immaginato grandezze indivisibili ».

E SIMPLICIO, commentando questo passo (Phys., 134, 2): « Dice che alcuni acconsentirono ad entrambi i ragionamenti, a quello detto di Parmenide e a quello di Zenone, il quale voleva difendere il ragionamento di Parmenide contro quelli che lo deridevano, cercando di mostrare come se vi è unità accade al ragionamento di dire molte cose ridicole e contraddittorie, mentre mostrava invece ZENONE che dalla loro ipotesi

([1]) Diels fr

della pluralità vengon fuori cose più ridicole che da quella dell'unità, se taluno rifletta sufficientemente ».

Vi sono più indizii per ritenere che al principio del 4° secolo a. C. il concetto razionale della geometria sia fermato ormai nella mente dei geometri. Può valere come testimonianza il seguente passo di PLATONE (Rep. 510 *d, e*): « Essi (i geometri) si valgono... di figure visibili, non ad esse pensando, ma a quelle di cui queste sono l'immagine, ragionando sul quadrato in se stesso e sulla sua diagonale, anzichè su quello o quella che disegnano; e così tutte le figure che formano o disegnano (quasi ombre o immagini specchiate dall'acqua) tutte le adoperano come rappresentazioni, cercando di vedere attraverso di esse i loro originali, che non sono visibili se non dall'intelligenza idealizzatrice (διάνοια) ».

Per contro, attraverso ARISTOTELE, si può scorgere qualche accenno ad una polemica antimatematica dei sofisti, sostenitori dell'empirismo in antitesi col razionalismo metafisico della scuola d'Elea: così PROTAGORA [1] avrebbe affermato, contro i geometri, che il cerchio e la retta tangente si toccano per un piccolo tratto anzichè in un punto solo, e ANTIFONTE [2] avrebbe fondato sopra un'analoga veduta empirica la sua quadratura del cerchio, ottenuta iscrivendo un poligono con un numero tanto grande di lati da confondersi col cerchio stesso, la quale — dice ARISTOTELE — non è fondata sui principii. Dove si ha un'altra prova indiretta che i principii, accolti dai geometri come base della scienza, supponevano appunto il concetto razionale degli enti, come limiti del sensibile.

Infine contemporanei di PLATONE — TEETETO e specialmente EUDOSSO — arrivano manifestamente ad una sistemazione critica raffinata delle teorie matematiche che toccano all'analisi infinitesimale, mostrando quale sviluppo rigoroso abbiano ricevuto le vedute affacciatesi per la prima volta nella scuola d'Elea. Quando EUCLIDE (verso il 300 a. C.) scrive i suoi *Elementi*, dove codeste teorie vengono raccolte ed ordinate, la polemica dei sottili dialettici italici è già

---

(1) ARISTOTELE. Met. II, 2 (20).

(2) Cfr. SIMPLICIO in Aristotele. Phys: Diels, B. 13.

entrata, da un secolo almeno, nella coscienza dei geometri, e tuttavia le definizioni euclidee del punto senza parti e della linea come lunghezza senza larghezza, ne serbano ancora il ricordo. Giacchè queste definizioni vanno intese appunto in tal guisa, nel loro significato storico, che solo può rendercele comprensibili.

Roma, Università.

FEDERIGO ENRIQUES

Una teoria « peripatetica » delle coniche

Mentre sono ampiamente noti i procedimenti della Geometria analitica e quelli della Geometria sintetica proiettiva, che costituiscono l'argomento di corsi obbligatori nelle nostre Università, non altrettanto conosciuti sono i metodi della così detta Geometria algebrica che — partendo dalla definizione analitica degli enti e poggiando sui teoremi qualitativi dell'Algebra — svolge il proprio studio per via essenzialmente sintetica. E, come si è soliti sviluppare la teoria delle coniche quale applicazione dei metodi analitici e proiettivi, ho voluto qui offrire ai nostri Lettori una teoria delle coniche svolta secondo la linea della Geometria algebrica, onde mostrare la rapidità e la fecondità dei procedimenti di questa. E mi sono permesso il titolo scherzoso di teoria « peripatetica » ad indicare una cosa seria: la possibilità cioè che questa teoria sia spiegata, da un maestro ad un discepolo, tranquillamente passeggiando lungo i viali di un giardino, senza ricorso a calcoli e a figure che non si possano tracciare e seguire mentalmente, possibilità che — in un periodo in cui la matematica va complicandosi per mole di sviluppi ed artifici — sta a rappresentare una fondamentale esigenza di semplicità e di chiarezza nei procedimenti, anche se questi abbiano ad usare un maggior numero di concetti, presi dalle varie branche della matematica, che deve apparire così come un tutto organico ed indissolubile.

Per comodità del Lettore — in particolare per chi desideri rapidamente rivedere la teoria delle coniche — ho dimo-