La conferenza di Polya a Roma: DEVINER ET DÉMONTRER

Né il presente riassunto, né il testo completo, a leggerlo, riuscirebbe a dare un'idea adeguata di come Polya ci fece rivivere le riflessioni di Eulero ed immaginare la via seguita da Cartesio. Verrebbe voglia di dire che si è trattato di una recita, se tale parola non desse l'idea di qualcosa di artefatto od istrionico anziché della più naturale e spontanea immedesimazione nell'argomento prescelto e nella tesi per cui era stato prescelto.

Perché e come insegnare matematica

Polya prese le mosse da idee antiche e sempre valide.

Una risposta parziale al « *perché* » — lo sviluppo dell'intelligenza — si trova in Platone; il quale (non dimentichiamolo!) all'ingresso della sua Accademia aveva fatto scrivere: « *non può entrare chi non conosce la matematica* ». Ma, ai nostri giorni, più persone vedranno, e vedranno più facilmente, un altro motivo circa il perché insegnare la matematica: perché le sue applicazioni sono importanti in quasi tutti gli aspetti della vita moderna, nella più parte delle scienze, nell'industria, nella finanza, e così via.

Per il « *come* », Socrate lo disse con la indovinata definizione del maestro come levatrice (riportata nei « Messaggi di Piaget e Polya », a pag. 13). Ma il passo decisivo perché lo si applicasse è stato fatto da altri molto più tardi, in modo particolare dalla Montessori.

La matematica non si può imparare, e tanto meno scoprire, procedendo deduttivamente come nelle esposizioni dei trattati. Il primo momento, quello creativo, della ricerca e della scoperta, è induttivo: si basa su osservazioni particolari, su ipotesi di generalizzazioni o estensioni suggerite dall'intuizione o basate su analogie, che solo in seguito potranno venire rese certe attraverso rigorose verifiche e dimostrazioni o assiomatizzazioni.

Ma, meglio che frasi generiche del genere, per illustrare queste tesi giova ricorrere ad esempi concreti, imitare Socrate (come cercò di fare) per mostrare che si possono insegnare molte cose ai ragazzi facendogli esplorare il mondo che li circonda, e che la stessa cosa si può fare con gli adulti.

La figura di Eulero

L'esempio prescelto da Polya per la conferenza a Roma riguarda la storia della scoperta della nota relazione tra numero di *facce* (F), di *spigoli* (S) e di *vertici* (V) nei poliedri, e comincia con le ricerche di Eulero.

Eulero ha una posizione del tutto particolare tra i matematici in quanto non si limita a comunicare le sue scoperte, così come risultano ben sistemate dopo che la ricerca è stata portata a termine (quasi cancellando le orme dei passi fatti per raggiungerle). Al contrario, egli si dilunga a descrivere come e perché il problema gli si era presentato, quali idee e congetture lo avevano poi guidato, quali osservazioni (di casi particolari, ecc.) le avevano convalidate o confutate, e come in definitiva è arrivato (o non è riuscito ad arrivare) a conclusioni ben stabilite. E non si limita a dare una descrizione fedele di questo cammino, ma lo fa in maniera artistica ed istruttiva, anzi — Polya ne è convinto — con una intenzione didattica: Eulero descrive questo cammino in modo che lo si possa imitare intelligentemente.

Nel caso dell'esempio prescelto, risulta proprio che, come spesso accade, Eulero, cercando di rispondere a un certo problema (della classificazione dei poliedri), è giunto invece a un'altra scoperta (la relazione tra F, S, V), pur senza riuscire a dimostrarla. Così come Colombo che, cercando la via delle Indie, scoperse l'America.

Analogie tra nozioni nel piano e nello spazio

Eulero parte dalla generica osservazione che esistono molte analogie tra nozioni geometriche relative al piano ed altre nello spazio. Sono analogie intuitivamente evidenti (a prescindere dalla possibilità di precisazioni) come ad esempio le seguenti:

NOZIONE NEL PIANO	*analoga*	NOZIONE NELLO SPAZIO
retta	—	*piano*
cerchio	—	*sfera*
poligono	—	*poliedro*
area	—	*volume*

e via dicendo. Soffermiamoci sul caso *poligono — poliedro*.

I poligoni si classificano agevolmente. E' ovvio infatti che basta il numero dei vertici (o dei lati: sono altrettanti), e si distinguono i triangoli ($V=3$), quadrilateri ($V=4$), pentagoni ($V=5$), e così via; diciamo in generale *n*-agoni ($V=n$, $n=3, 4, 5, \ldots$). Beninteso, la classificazione è solo qualitativa (*) nel senso che prescinde dalla grandezza dei lati e dagli angoli (non distinguendo, ad es., triangoli equilateri o rettangoli, ecc.; quadrati o rettangoli o rombi ecc.; *n*-angoli regolari o no; e così via).

La questione che Eulero si è posta è la seguente: basta un criterio del genere per ottenere una classificazione dei poliedri?

Basterà, pensando all'analogia più semplice, conoscere il numero delle facce (F)? oppure anche quello dei vertici (V)? o anche quello degli spigoli (S)?

La risposta a tale questione ci condurrà ad accorgerci che lo spazio è molto più complesso del piano (ben più di quanto non sia già ovvvio e di quanto non si prevedesse), ma anche molto più ricco.

Esame di casi semplici

Eulero, per orientarsi, ha scelto il metodo più semplice e naturale: cominciare coll'esame dei casi più semplici. La cosa può apparire banale a chi è abituato a teoremi e dimostrazioni piovute dal cielo col crisma della massima generalità,

(*) Vale la pena di riportare testualmente un'osservazione incidentale fatta a questo punto da Polya. Essa merita infatti seria riflessione e autocritica per estirpare o almeno attenuare uno dei peggiori difetti del modo usuale di presentare la matematica.

Polya disse così:

« So bene che esiste una parola moderna per esprimere ciò più chiaramente, ma preferisco seguire il principio di Socrate: è l'allievo che deve scoprire il risultato, ed ancora, l'allievo che deve scoprire la terminologia. Uno degli errori dell'insegnamento della matematica moderna consiste nell'introdurre troppo presto una terminologia raffinata. A mio avviso, *non si deve introdurre la terminologia specializzata prima che l'allievo ne avverta la necessità.* E' meglio lasciare che l'allievo inventi da solo una propria terminologia ».

Ascoltiamo questo ammonimento salutare, com'é indispensabile per non fare della scuola un allevamento di pappagalli di batteria.

Il Prof. Polya, cui il testo del presente riassunto è stato sottoposto (e approvato, previa qualche modifica) ha tenuto a sottolineare il suo pensiero su questo punto scrivendo: « *I am glad that you added that footnote: I would voice my opposition to the so-called "modern mathematics"* » (2-1-1973).

ma è proprio l'esame dei casi semplici quello che meglio avvia a comprendere e vedere il problema e intravvedere i risultati più generali.

Qui Polya ha seguito strettamente il cammino di Eulero disegnando uno dopo l'altro alcuni poliedri da questi considerati.

Per comprendere lo sviluppo delle considerazioni occorre che il lettore tenga sott'occhio la tavola a pag. 81 pensando di vedere Polya che la completa via via nel modo che sarà descritto (cioè: riga per riga dall'alto al basso, ma dapprima solo nel riquadro punteggiato, poi in quello tratteggiato, e infine interamente).

La descrizione effettiva chiarirà il tutto senza difficoltà.

Il primo caso è evidentemente il *tetraedro* (*a*) (è impossibile formare un poliedro con meno di quattro facce); eccolo, e vicino nella colonna F, indichiamo 4 (F=4). Questo dato basta a caratterizzare tale tipo di poliedri.

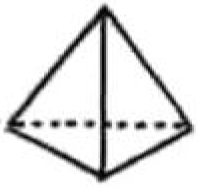
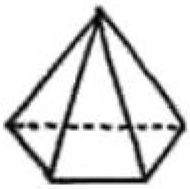
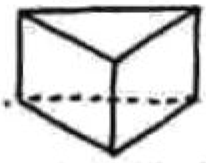
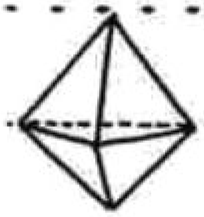
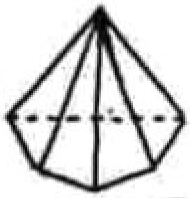
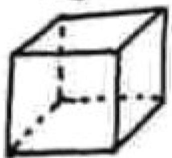
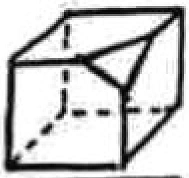
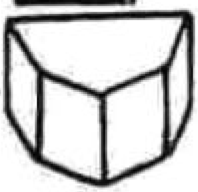
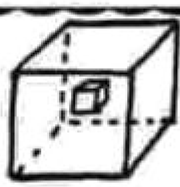
Passiamo a considerare poliedri a 5 facce: ne troviamo subito due, cioè la *piramide a base quadrilatera* (*b*) ed il *prisma a base triangolare* (*c*); nella colonna F abbiamo 5 e 5: in tal caso F=5 non basta a caratterizzare la forma del poliedro.

E allora? Un'idea: basterà aggiungere un secondo dato, per esempio il numero dei vertici? Infatti (per ora almeno) ci va bene: i vertici sono, nei due casi, rispettivamente 5 e 6 (e scriviamoli nella colonna V).

Passiamo ad esempi di poliedri con 6 facce: abbiamo la *bipiramide triangolare* (*d*), la *piramide a base pentagonale* (*e*), il *cubo* (*f*); i vertici sono rispettivamente 5, 6, 8; fin qui la regola funziona. Proseguiamo con esempi di poliedri di 7 facce, e precisamente: la *piramide a base esagonale* (*g*), il *cubo con un vertice smussato* (*h*), ed il *prisma a base pentagonale* (*i*); i vertici sono 7 nel caso (*g*) ma ... (ahi! ahi! ahi!) sono 10 nei due casi (*h*) ed (*i*).

L'ipotesi che bastino i numeri F e V (delle *facce* e dei *vertici*) per caratterizzare il tipo di poliedro è smentita. Ma ci si potrà forse salvare considerando anche il dato finora trascurato, cioè il numero degli spigoli, S?

Completiamo allora la nostra tabellina col valore di S per ciascuno dei nove esempi considerati. Fiasco! nei due ultimi

POLIEDRO		F	V	S
(a) *tetraedro*		4	4	6
(b) *piramide a base quadrata* . .		5	5	8
(c) *prisma a base triangolare* . .		5	6	9
(d) *bipiramide triangolare* . . .		6	5	9
(e) *piramide a base pentagonale* .		6	6	10
(f) *cubo*		6	8	12
(g) *piramide a base esagonale*		7	7	12
(h) *cubo con un vertice smussato*		7	10	15
(i) *prisma a base pentagonale*		7	10	15
(k) *cubo con cavità cubica* . . .		12	16	24

esempi (*h*) e (*i*) anche i valori di S coincidono: gli spigoli sono 15.

E anche aggiungendo altri esempi si presenta sempre la stessa situazione: se due poliedri, di tipo differente, non possono venire distinti in base ai valori di F e V, il valore di S non è di alcun aiuto: essi hanno lo stesso numero di spigoli. S sembra essere determinato da F e V.

Guardiamo dunque con attenzione la colonna dei valori S; non ci serve per lo scopo per cui (con Eulero) l'abbiamo introdotta, ma... balza abbastanza facilmente agli occhi una regolarità di tipo del tutto diverso, anzi opposto, allo scopo primitivo: $S = F + V - 2$. Sarà un caso?

Eulero constatò su molti altri casi che tale identità sussisteva, e, pur senza trovare una dimostrazione generale, espresse la congettura che dovesse essere valida per tutti i poliedri.

Alcune riflessioni

E' molto significativo che sia un matematico come Eulero a dire questo. Ed è naturale, perché è proprio questo l'iter della scoperta: si dice che la matematica è una scienza deduttiva, eppure quando si fa una scoperta sono i procedimenti induttivi che hanno maggiore importanza.

Se si vuole far fare questa ricerca matematica ad alunni di 15-16 anni occorrerà naturalmente prendere in esame un maggior numero di figure, ma si può essere certi che gli alunni arriveranno a scoprire da soli, attraverso l'osservazione, la proprietà indicata, o almeno il seguente caso particolare: « se due poliedri hanno lo stesso numero di facce e lo stesso numero di vertici, allora hanno anche lo stesso numero di spigoli ».

Per tale ricerca dovranno farsi una collezione (mentale o concreta) di poliedri; e dobbiamo mostrare, perché la matematica possa sviluppare l'intelligenza, che ciò che essa richiede di fare si fa anche in altri campi. I ragazzi amano fare collezioni di piante, di minerali, di francobolli, ecc. Cerchiamo di convincere i nostri allievi che fare una collezione di poledri è altrettanto interessante e certamente più intelligente che fare una collezione di francobolli.

Controesempi e arzigogoli

Qualcuno però, in seguito, trovò un contro esempio: il *cubo con cavità cubica* (k), per il quale $S=24$, $F+V-2 = 12+16-2 = 26$ (e analogamente succede pensando a un cubo o altro poliedro usuale attraversato da uno o più fori, come ad es. un mattone forato).

La congettura era dunque falsa? Secondo alcuni si; altri volevano salvarla dicendo che ... i poliedri esibiti come controesempio ... « non erano poliedri » (erano « mostri », frutto di fantasie aberranti). Riecheggiavano arzigogoli degni di peripatetici, del Simplicio dei *Dialoghi* galileiani, del Don Ferrante manzoniano che discettava sul contagio che non poteva esistere perché non era « né ente né accidente » (eppure ne morì); grave guaio quelo di ragionare sulle parole anziché sui fatti, con la « logica » grammaticale o lessicale anziché con l'analisi delle circostanze effettive.

Analizzando le circostanze effettive, quelle da cui dipende se la formula $S = F + V - 2$ sussiste, si vede che occorre esplicitare una condizione che Euclide sottointendeva: che i poliedri fossero *convessi*. (Basta anche meno: una condizione topologica sulla connessione; comunque ciò che importava notare, sia pur di sfuggita, era che le questioni si chiariscono esaminandone il significato mentre si imbrogliano discutendo sulle parole insufficientemente definite).

Ma Cartesio lo sapeva già

Il risultato precedente era già noto a Cartesio, stando ad alcune brevi frasi trovate fra i suoi manoscritti inediti e stampati circa un secolo dopo la morte di Eulero.

Le ricerche di Eulero sono quindi indipendenti. Ma non tanto interessa fare questioni di priorità quanto congetturare su come Cartesio abbia trovato il risultato.

Appare verosimile che sia partito da considerazioni sugli angoli, e nel caso dei poligoni ce ne sono diversi. Ci sono gli *angoli solidi* (relativi a ciascun *vertice*), gli *angoli diedri* (relativi a ciascuno spigolo: angoli tra le due facce che ivi si congiungono), e gli *angoli delle facce* (gli angoli dei poligoni che formano il contorno di ogni *faccia*). La somma degli angoli di una faccia, se essa è un poligono di n lati, vale $(n-2)\pi$

(ad es., come è noto, π per il triangolo, 2π per il quadrilatero, ecc.).

La somma, diciamola $\Sigma\alpha$, degli angoli delle facce vale (come il calcolo dimostra) $2\pi(S - F)$; e d'altra parte è certo $< 2\pi V$ e di fatto (negli esempi visti) vale $2\pi(V - 2)$; dalla congettura che ciò valga sempre scenderebbe la validità della congettura precedente ($S = F + V - 2$), e viceversa.

Tutto ciò è ampiamente spiegato in G. Polya, *La scoperta matematica*, vol. II, pag. 416 e seguenti (ed. Feltrinelli, Milano 1971); trattandosi di un'opera che molti lettori avranno (e gli altri farebbero bene a procurarsi) sembrerebbe fuori luogo una riproduzione più o meno pedissequa nel presente riassunto della conferenza.

Fin qui il procedimento seguito è sempre sostanzialmente quello tentato da Eulero e forse già prima completato da Cartesio.

Per giungere alla conclusione, si può seguire una felice idea dovuta a Steiner: osservare cioè che se il poliedro si deforma schiacciandolo su un piano, benché i singoli angoli si deformino la loro somma non cambia (perché per ogni n-gono rimane $(n - 2)\pi$); con qualche accorgimento (allargare la faccia presa come « base » di modo che tutte le altre le si sovrappongano come parti di essa), il risultante reticolo piano rende chiara la validità della precedente congettura.

Infatti, se è r il numero dei vertici della base, i vertici interni sono $V - r$ e gli r precedenti figurano nuovamente come vertici dei poligoni superiori; la somma degli angoli delle facce è pertanto
$\Sigma\alpha = (r - 2)\pi + (V - r)2\pi + (r - 2)\pi = 2\pi(V - 2)$, c.v.d. (perché gli angoli attorno ad un vertice interno formano un angolo giro, 2π).

Lo sviluppo di tale dimostrazione in dettaglio si trova nel libro citato di Polya a pp. 422 - 423. Un altro diverso approccio è presentato in un precedente libro di Polya, non ancora apparso purtroppo in versione italiana: G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, vol. I, pp. 35-43 (ed. Princeton University Press, Princeton N. J. 1954).

Considerazioni conclusive

La storia di tali ricerche si presta allo sviluppo di varie considerazioni di carattere filosofico generale, come si può vedere ad esempio in un arguto scritto di Imre Lakatos, « Proofs and Refutations », in *The British Journal for the Philosophy of Science*, vol. XIV, nn. 53 - 54 - 55 - 56, 1963-64.

Riguardo alla tesi didattica già contenuta nel titolo della conferenza, *Deviner et démontrer* (conferenza tenuta in francese, con frequenti traduzioni in italiano di frasi essenziali), l'esempio considerato interessa soprattutto per indicare la utilità di procedere nel modo seguente:

— ricondursi ai casi più semplici,
— cercar di intuire, fare congetture,
— infine dimostrare.

Parole introduttive del Presidente della Mathesis

Prima dell'inizio della conferenza il Prof. de Finetti ha presentato l'oratore con le parole sotto riprodotte, ed ha informato che, pochi giorni prima, Polya aveva « tenuto a battesimo » Giorgetto.
Si tratta del piccolo protagonista di una progettata serie di filmini matematici — della Corona Cinematografica — intesi a realizzare le vedute didattiche di Giorgio Polya: da ciò il nome di Giorgetto.
Nel film del « battesimo » Giorgetto era un pupazzo colla cui collaborazione Polya illustrò — sul solito ben scelto esempio del tronco di piramide — la sua indovinata rappresentazione schematica del procedimento di risoluzione di un problema (cfr. G. Polya, La scoperta matematica, *Feltrinelli, Milano 1970, vol. II, pp. 250-261). In altri film Giorgetto potrà essere ancora lo stesso pupazzo, oppure apparire come personaggio di cartoni animati.*

E' molto significativo per noi poter cominciare oggi, con la presenza e le parole del prof. George Polya, un periodo di attività della Mathesis che speriamo più organizzata ed efficace soprattutto grazie ai contatti di questi giorni coi rappresentanti delle Sezioni e per effetto della ripresa del *Periodico*.

Sarebbe già un avvenimento importante avere qui Polya per il fatto che egli è uno dei più grandi matematici, ma la sua presenza acquista per noi un particolare risalto in questo momento perché egli è il principale ispiratore di quel modo vivo e intelligente — e, in un certo senso, informale, pratico, intimo — di vedere e capire la matematica, che rappresenta la meta cui tendono tutti i tentativi di rinnovamento della pedagogia della matematica.

Se, infatti, questo rinnovamento può e deve anche riguardare i contenuti e il rigore, esso deve consistere anzitutto nel mirare — insieme a questo e qualche volta *nonostante* questo — a conservare e valorizzare quello che è il significato primo della matematica, intesa come forma di pensiero naturale e necessaria che va sviluppata — anche indipendentemente dalle esigenze formali e specialistiche — per dare modo a tutti di porsi dei problemi, di vederli, di approfondirli, di impostarli, e di arrivare possibilmente fino a risolverli con un'opera e una comprensione veramente spontanee.

Più o meno, a parte qualche sfumatura, è questo l'ideale che ci anima e accomuna e che ci fa ritenere importante diffondere la coscienza del ruolo della matematica. E' questo ideale che deve unirci nello sforzo di dare orizzonti nuovi all'insegnamento della matematica; e speriamo che molti di coloro che devono occuparsi di matematica per insegnarla raccolgano questo spirito per far sì che essa appaia agli studenti non come qualcosa di noioso, imposto dall'alto per obbligo scolastico, ma come un'attività che veramente li attrae e arricchisce.

Il merito storico di Galileo

Occorre rendersi conto della posizione di Galileo.

Egli aveva avuto pochi precursori, aveva pochi amici che ne condividevano le vedute, ma era duramente avversato dalla scuola filosofica dominante: quella degli aristotelici. Questi aristotelici chiedevano « Perché *i gravi cadono?* », *e si contentavano di futili risposte, pressocché puramente verbali. Galileo chiese* « Come *cadono i gravi?* » *e si sforzò di trovare una risposta mediante l'esperimento, e una risposta* precisa, *esprimibile in numeri e mediante concetti matematici.*

Questa sostituzione del « Come » *al* « Perché », *la ricerca di una risposta mediante l'esperimento, la ricerca di una legge matematica che riassume i fatti sperimentali, sono cose comuni e ovvie nella scienza moderna, ma erano innovazioni rivoluzionarie al tempo di Galileo.*

Galileo, sfidando i pregiudizi dei suoi contemporanei e l'autorità di Aristotele, ha dato un grande esempio di coraggio intellettuale.

GEORGE POLYA (da "Mathematics and Plausible Reasoning », Princeton Un. Press. 1954, vol. I, pp. 194-95 e p. 8).