Bruno de Finetti

ALCUNI SPUNTI DA TRE RELAZIONI di T. Varga, S. Ciampa, H. Freudenthal

Si è tenuta a Roma (Palazzo dei Congressi, EUR, dal 25 al 30 gennaio 1973) la «II Settimana Internazionale della Scuola» promossa dal CESMO e dall'UNITESA.
Una seduta fu dedicata all'insegnamento della matematica; dalle tre relazioni (il cui testo si vedrà pubblicato negli atti) segnaliamo subito alcuni spunti tra i più significativi.

di cronaca

Nella seduta antimeridiana del 29, dedicata alla matematica e presieduta dal Presidente dell'Unione Matematica Italiana, Guido Stampacchia (della Scuola Normale Superiore di Pisa), i tre relatori furono Tamas Varga, ungherese ma già studente nella Scuola Normale Superiore di Pisa, che ancora parla bene l'italiano; Hans Freudenthal, di Utrecht (Olanda), che parlò in francese con traduzione italiana frase per frase; e Salvatore Ciampa, della Scuola Normale Superiore di Pisa, Presidente della Commissione Italiana per l'Insegnamento Matematico, in quest'ordine. Nel segnalarne alcuni tra gli spunti più interessanti seguiremo però l'ordine più adatto allo scopo. Aggiungiamo, per notizia, che era stato invitato anche George Polya, che, essendo già stato a Roma nello scorso dicembre per la Mathesis, declinò l'invito.

Nel pomeriggio dello stesso giorno, dedicato all'impiego di calcolatori e sussidi vari, si ebbero anche interventi attinenti alla matematica. Menzioniamo la prof. Maria Grazia Micci, che, in un Istituto Tecnico, insegna la matematica facendo simultaneamente programmare e risolvere i problemi sul calcolatore; l'Isp. Zàccara che ha parlato dell'abbinamento di nozioni su insiemi e algebra booleana coi problemi pratici di circuiti studiati negli Istituti Professionali; l'Isp. Trotta, Dir. del Centro Did. p. l'Istr. Tecnica e Professionale, che, tra l'altro, ha auspicato la costituzione in tutte le località di Sezioni Mathesis mostrando di apprezzarne la collaborazione.

No ai compartimenti stagni

Tema centrale della relazione Varga è stato quello della lotta contro i compartimenti stagni che soffocano e inaridiscono la scienza e il suo insegnamento. Eppure sembra spesso un vanto o un requisito irrinunciabile l'isolare ogni campicello in una sdegnosa solitudine, in ossequio a pedantesche vedute sul « purismo » (cui si ispira — da noi « ufficialmente »! — la deleteria aspirazione a « autonomia didattica e dignità scientifica »). Quale dignità (o semplice accettabilità) scientifica può avere un tale campicello, avulso dall'ambiente più ampio da cui prende vita e ragion d'essere, avulso dal contesto generale del pensiero scientifico che solo illumina di scientificità ogni frammento che entri a farne parte?

Il primo riprovevole esempio è tuttora quello della separazione tra Geometria e Aritmetica (o Algebra, Analisi, ecc.), dedicando addirittura ore diverse (o corsi diversi) a queste « due » discipline: la Geometria fatta ignorando i numeri, e l'Aritmetica dei numeri senza l'intuizione geometrica del loro significato.

Superare questa frattura era l'impegno del « fusionismo »; ma Varga ha mostrato come non debba mancare il collegamento neppure con altre nozioni, come quelle di tempo (movimenti), di massa (baricentri, ecc.), e così via, per cerchi di affinità sempre più larghe anche se sempre più sfumate, abbracciando un po' tutto.

Non esistono più, allora, compartimenti stagni, ma tutta una rete di connessioni che allacciano sia diverse interpretazioni o applicazioni di uno stesso argomento, sia i diversi argomenti che confluiscono nello studio di una stessa situazione o di uno stesso fenomeno.

Ciò è importante anche in relazione alla naturalezza e all'efficacia dell'apprendimento a seconda che venga favorito da una presentazione integrata o degradato in una somministrazione spezzettata.

No alla serie di bugie-sbugiardamenti

Nella relazione Ciampa c'è da segnalare soprattutto un punto: un punto che mette decisamente il dito su una piaga che mi sembra non sufficientemente avvertita e denunciata. Stranamente, proprio tale punto non appare nel testo scritto distribuito: motivo di più per insistervi qui.

Egli osservò che, ad ogni passo, il bambino o ragazzo si trova di fronte a divieti, a tabù, a Colonne d'Ercole che chi pensasse di superarle sarebbe pazzo e temerario od anzi semplicemente stupido. Quanto fa 5 meno 7? NON SI PUO'! Ogni bambino di media intelligenza (ne conosco molti e ricordo di esserlo stato io stesso) si ribella, dicendo « Ma fa 2 sotto zero » (*) oppure « fa 2 di debito », una bambina diceva « 2 dentro il muro » (perché contava i numeri come distanze dal muro), e basterebbe suggerire di usare il nome « meno 2 ». No! Sarebbe assurdo, sacrilego (°), NON SI PUO'! Però di lì a qualche mese od anno si pretende che uno si ricreda, e dica che 5—7 fa —2; dal momento che il Signor Maestro o la Signora Maestra lo ha rivelato, il giudizio si capovolge: è stupido se non dice quello che lo avrebbe fatto giudicare stupido se lo aveva capito un anno prima. Però, niente paura: l'idolatria del tabù non è scomparsa ma solo spostata: adesso è tabù la divisione di 5 per 7: si potrebbe fare solo se 5 fosse multiplo di 7, e così non è: dividere 5 per 7 NON SI PUO'! Per farla breve, colui che sarebbe stato stupido se avesse detto allora che, secondo lui, fa 5/7, poco dopo si vede obbligato a ripetere, per non farsi considerare stupido, che fa 5/7. Il tabù si è di nuovo spostato: quello che NON SI PUO' FARE c'è sempre, ma ora è l'estrazione della radice di un numero che non sia quadrato, per es. $\sqrt{2}$: potrebbe un ragazzino essere

(*) Così ricordo di avere risposto, all'età di quattro anni, scandalizzandomi di un adulto che voleva farmi dire « NON SI PUO'! ».

(°) Ho appreso poi un fatto veramente incredibile. In alcune classi sperimentali, in Italia, si è potuto, sì, introdurre il Minicomputer di Papy, che però « doveva subire un adattamento » per evitare che i bambini italiani (come i coetanei belgi) capissero subito che... 5−7=−2! (cfr. L. Chini Artusi, « Il minicomputer in Italia », in *Nuova didattica della matematica*, Ass. Piemonte-Italia, Torino 1971, p. 159).

più avanti dei Pitagorici? Non meritare come Ippaso di Metaponto di essere punito dagli dei se « vedesse » (come, implicitamente, lo « schiavo » interrogato da Socrate) che $\sqrt{2}$ è la lunghezza della diagonale del quadrato, prendendone il lato come unità di misura? Ma poi, sì, si può considerare $\sqrt{2}$; quello che NON SI PUO' è solo considerare la radice di un numero negativo, ad es. $\sqrt{-2}$ (ma poi si definirà anche quella...).

E ben sottolineava Ciampa la disastrosa lezione diseducativa che tale successione di bugie e sbugiardamenti costituisce per i ragazzi: sembra non esista nessuna conclusione logica, nessuna distinzione tra vero e falso o tra possibile e impossibile: tutto è possibile purché uno sappia essere abbastanza furbo (magari ricorrendo a una giaculatoria, a una bustarella, a un'adulazione).

Anche matematicamente, e soprattutto didatticamente, tale modo di procedere è assai pesante, confuso e confusionante creando artificiosi livelli a compartimenti stagni (°). Basterebbe completare man mano senza artificiosi traumi la naturale idea dei numeri reali come ascisse sulla retta (o misure di grandezze di qualsiasi specie: di tempo, di massa, di energia, di prezzo, ecc.), ...e tutto apparirebbe chiaro, semplice e logico così com'è (salvo l'ultimo passo sorvolato, che tuttavia condurrebbe, al momento opportuno, con naturalezza, a introdurre in modo geometricamente significativo i numeri complessi) (*).

Matematica per tutti

Freudenthal, non solo ha scelto « Matematica per tutti »

(°) Non vedo che un solo motivo plausibile in favore dei balbettamenti di successive miniestensioni (interi, razionali, reali, e ogni volta solo positivi o anche negativi), ma è di natura molto ipercritica (di quella ipercritica in cui nonostante ogni sforzo si finisce sempre per dubitare che nulla abbia senso). Tale motivo sarebbe la dimostrazione che la non-contraddittorietà della teoria dei numeri reali sarebbe logicamente garantita qualora fosse garantita quella della teoria dei numeri interi (o ciò venisse accolto in base all'asserzione aritmetico-teologica di Kronecker secondo cui gli interi sono « creati da Dio »).

(*) Ne ho dato un cenno in un articolo su *Le Scienze* (n. 39, Novembre 1971, pp. 86-99) dal titolo « Tre personaggi della matematica » (e, i, π); più diffusamente ne ho trattato in *Matematica logico-intuitiva* (3ª ed., Cremonese, Roma 1960), Cap. IV (I numeri complessi).

come titolo della sua relazione, ma ha fatto della sua relazione un'autentica lezione di Matematica per tutti. Ha portato esempi concreti, illustrati con nitide indovinate vignette alla lavagna luminosa, spiegandoli come disse di aver fatto (in molti casi) coi suoi nipotini. Mai forse un nonno è riuscito a sfruttare così bene i nipotini come cavie per esperimenti logici e matematici, né alcun nipotino può aver trovato un nonno così divertente nell'insegnare *vera* matematica senza parere (al contrario della tendenza più diffusa ad appesantire pomposamente cosucce insignificanti). Penso che tutti abbiamo gioito nel cercar di sentirci nei panni di quei nipotini, trepidanti di vedere se eravamo ancora (dopo anni o decenni di subìte distorsioni) in grado di gareggiare in immediatezza di comprensione con la loro intelligenza incontaminata.

Qualche esempio.

Ecco una figura con tre graziosi villaggi, con due strade da A a B, e tre da B a C; quante le strade da A a C (attraverso B)? Si tratta di contare, sì, ma non contare banalmente (quante ciliegie? quanti sassolini?); occorre « sbrogliare » questa matassa di strade... Occorre un lampo: esso venne ai nipotini dopo una mezz'ora di sforzi. Altra figura: un topo separato dal formaggio da due file di mura, con rispettivamente due e tre porticine... Qui la risposta è pronta, è la stessa di prima... e infatti sovrapponendo i due trasparenti si vedono le strade traversare le porte nelle mura! Ed altri casi del genere fanno dire che *è sempre lo stesso problema: è sempre due per tre.*

Qui ci sono (senza dirlo, ma appunto perciò istruttivamente, nel fondo del pensiero, non superficialmente, nel bagaglio formalistico mnemonico acquisito e appiccicaticcio), ci sono, dicevo, due insegnamenti che a parole si vorrebbero dare spesso come « regole » (parola infame!): il primo, riguarda il *contare sistematicamente* (qualcosa come calcolo combinatorio ante litteram); il secondo, riguarda (di getto, non per precetto) il vedere la *natura astratta* del problema, sempre identico a se stesso nei suoi vari travestimenti.

Altro esempio del « contare sistematicamente »: le stelle della bandiera U.S.A.: se uno nota « sono 5 linee di 6 stelle che si alternano con 4 linee di 5 stelle » trova subito $5\times6+$ $+4\times5=50$; ma alla lavagna luminosa l'idea era resa visibile perché le stelle delle due diverse specie di righe erano disegnate su fogli distinti sovrapposti che si potevano separare.

Altri problemi isomorfi: quante le rette congiungenti 4 punti? Quante le strette di mano quando 4 persone s'incontrano? Quanti i modi di scegliere due oggetti tra quattro?

Passando alla geometria, ecco molte illustrazioni di quanto meglio possa capirne chi impara a giocare col geopiano che chi inghiottisce nozioni scolastiche, ed ecco da esse questa osservazione da sottolineare:

Questa (alludendo a parentesi da sciogliere, quadrato del binomio, e simili) *è matematica spicciola per i grandi, ma la grande matematica è quella che insegna ad aprire gli occhi e ad usare il buon senso per strutturare il mondo che ci circonda: la grande matematica che si insegna meglio ai più giovani* ». Ma ciò non è quello che vien fatto; e allora? « *Si può riprendere ciò che si è lasciato sfuggire? — Sì, forse; si possono riprendere le materie, ma non le occasioni sfuggite...* »; ad es. « *si rimane stupiti dalle reazioni spontanee dei giovanetti nel campo della geometria, reazioni che non si trovano nei più grandi: pare che l'intuizione geometrica vada indebolendosi nel corso degli anni* ».

Col geopiano, vista una figura fatta dal nonno, riconobbero subito che il quadrato avente per lati le diagonali di quattro quadratini adiacenti aveva area doppia, e ricordarono quindi che era la soluzione del problema loro proposto la settimana prima e che non avevano saputo risolvere. Ecco perché è dannoso forzare o aiutare: aspettando il risultato si innesca un processo che vale e istruisce mille volte di più.

Ma ecco invece la voce sdegnosa di una signora conformista: « *Che fai con questi bambini? Ciò si risolve con Pitagora, che studieranno fra quattro anni!* ». Risposta (tragica ma vera!): « *Quattro anni dopo, con tanto di Pitagora e di "A+B tra parentesi al quadrato", essi non saranno più in grado di risolvere tali problemi; come gli adulti, SARANNO BLOCCATI DALL'ABBONDANZA DI MATEMATICA SUPERFLUA CHE AVRANNO IMPARATA* ».

Si parla ancora di problemi di probabilità, di « passeggiate a caso », di molte altre cose, ma non solo di cose apparentemente puerili. A tutti i cultori del rigore (che non lo confondano con la goffagine) dovrebbe risultare affascinante, sorprendente, indovinatissimo, il modo di trattare le traslazioni e riflessioni indicandole col simbolo (ovvio) $a+$ ed $a-$, che portano ogni x risp. in $a+x$ e $a-x$, caratterizzabili dicendo, rispettivamente, che *porta o in a*, e che *scambia o con a* (ove *o sia l'origine*). Tutta la teoria scende con somma eleganza e stringatezza, prescindendo dalla possibilità (naturalmente esistente, volendo) di interpretare come *numeri* le lettere su cui si opera.

Matematica antiquata, — moderna, — vera.

Concludendo Freudenthal nota la scarsa rassomiglianza tra la matematica di cui ha parlato — *matematica VERA* — da quella studiata a suo tempo dagli attuali adulti — *matematica ANTIQUATA, o tradizionale* — ma anche, e non meno, da « ciò che va oggi sotto il nome di *matematica MODERNA* ». In questa egli vede « *una nuova matematica scolastica, più sciocca e più pericolosa della vecchia matematica, separata dalla VERA matematica da membrane impermeabili* ». Come difendersi? « *Opponendole la roccia della matematica sana, spiegando alla gente ciò che è la matematica, facendone vedere la ricchezza scientifica e didattica* ».

E qui egli chiuse citando, come tipico esempio di tale spirito, la mostra dei ragazzi del Tasso (v. Per. Mat., n. 1-2 di quest'anno), di cui disse: « *Tutte le idee di cui vi ho parlato non sono una novità, ma ciò che vi hanno aggiunto gli alunni della Signorina Castelnuovo sono la prova che queste idee non sono vaghi ideali, ma corpose realtà* ».

In tal modo, con grande gioia dell'uditorio, da parte di Freudenthal come pure in precedenza da parte di Varga, Emma Castelnuovo e la sua opera meravigliosa sono state citate dandovi il posto che meritano, ampiamente compensando la dimenticanza degli organizzatori.