Il contributo di Keplero alla teoria delle coniche

La partecipazione, nella primavera 1945, ai lavori dell'*Associazione Circoli di Studio fra gli Amici della Didattica* e a quelli dell'*Istituto Romano di Cultura Matematica*, m'ha dato occasione ad intraprendere alcune ricerche sulla storia della geometria elementare nei tempi moderni [1]. Questo articolo è un primo saggio delle mie ricerche: un altro sulla teoria della prospettiva, pubblicherò fra breve.

1. I predecessori dopo Apollonio.

L'opera monumentale d'APOLLONIO (III sec. a. C.), completata dagli importanti risultati raccolti da PAPPO (fine del III sec. d. C.), superando il M. Evo, giunge all'età moderna e domina il pensiero dei geometri fino a tutto il sec. XVII. Soprattutto le idee profonde e geniali del suo III libro devono considerarsi la sorgente cui hanno ampiamente attinto i precursori della geometria proiettiva e cioè, in primo luogo, G. DESARGUES (1593-1662) e B. PASCAL (1623-1662). Infatti da quel libro si rileva che APOLLONIO conosceva, in sostanza, la generazione proiettiva sia delle coniche - luogo che delle coniche - inviluppo [2], come pure le proposizioni fondamentali della

---

[1] Mentre l'incoraggiamento, anzi l'ispirazione ad esse mi furono un dono del prof. F. ENRIQUES, nell'ultimo anno della Sua straordinaria e indimenticabile esistenza! Quando io Gli lessi il manoscritto di questo lavoro, Egli volle che ne togliessi il ringraziamento che sentivo di doverGli esprimere: c'era, nel Suo semplice sorriso, tutta quella modestia e quella generosità, che quanti ebbero la fortuna d'avvicinarLo, unanimemente Gli riconoscono!

[2] Ciò che principalmente H. G. ZEUTHEN ha messo in luce. Si vedano, di quest'A., le opere fondamentali: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum.* (Kopenhagen 1886, pagg. 343-365); *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter.* (Kopenhagen 1896, pagg. 199-212).

teoria della polarità e di quella dei fuochi delle coniche a centro.

PAPPO, nel VII libro della sua *Collezione matematica*, enuncia e dimostra: il teorema dell'esagono iscritto in una coppia di rette; le proprietà polari rispetto ad un cerchio; la costruzione delle coniche a centro, fondata sulla conoscenza d'un fuoco e della corrispondente direttrice; inoltre le proprietà fondamentali del birapporto, precisamente: l'invariabilità del birapporto di quattro punti allineati o di quattro rette d'un fascio per proiezioni e sezioni, e il teorema sulle proprietà armoniche del quadrilatero completo come pure quello (duale del precedente) sulle proprietà armoniche del quadrangolo completo.

Durante il M. Evo e fino a KEPLERO (1571–1630), essenzialmente non s'introducono concetti nuovi. A cominciare da WITELO (sec. XIII), lo studio delle coniche viene ripreso con fervore, per l'interesse che le coniche presentano in altre ricerche, per lo più di fisica e in particolare di ottica. Nell'*Ottica di Witelo* (opera composta intorno al 1270 in Italia) viene ripreso lo studio delle proprietà focali delle coniche, in quanto tali proprietà trovano applicazione negli specchi ustori: l'A. ne trae occasione per dimostrare la proprietà di uno specchio avente forma di paraboloide di rivoluzione, di concentrare nel fuoco i raggi provenienti da una sorgente luminosa situata all'infinito nella direzione dell'asse (Proposizione XLIII del IX libro), proprietà di cui è dubbio che gli antichi avessero conoscenza. Così vediamo FRANCESCO MAUROLICO (1494–1575), nella sua *Ottica* (pubblicata nel 1654?), studiare le coniche come curve generate dall'ombra dello *gnomone* della meridiana (« per umbras »).

Queste ricerche, in connessione con questioni di prospettiva e come preludio alle idee nuove di DESARGUES e di PASCAL, dànno luogo ad una profonda rielaborazione delle teorie antiche. In questo senso lo stesso MAUROLICO, ben noto anche come traduttore e commentatore d'APOLLONIO (1547), porta un contributo degno di rilievo, riuscendo a semplificare e ad arricchire le teorie del grande geometra dell'antichità: egli segue particolarmente il metodo di dimostrare le proprietà delle coniche, con considerazioni spaziali, cioè direttamente sul cono che le genera. Nello stesso senso è da ricordare anche FEDErico Commandino (1509–1575), cui è dovuta una traduzione d'Apollonio (Bologna, 1566) divenuta presto famosa in tutta l'Europa.

2. Le « Analogie » nell'opera di Keplero.

S'osservano, nella natura, fenomeni apparentemente senza alcuna relazione fra loro, ma che, studiati profondamente e negli ultimi dettagli, presentano sorprendenti analogie. Guidati da queste, i fisici riescono talvolta a creare una sintesi tra le varie teorie, che di quella si possono considerare come casi particolari, in certe determinate ipotesi restrittive e in certe specificate condizioni. Ma una tale creazione richiede, da parte dello scienziato, oltre a uno studio accurato e profondo dei dettagli, anche un rigido controllo delle proprie facoltà intuitive, una capacità di critica, che forse soltanto una forma di civiltà più matura, più evoluta di quella in cui visse Keplero, poteva produrre. È interessante confrontare, da questo punto di vista, Galileo (1564–1642) e Keplero, contemporanei, incarnazioni del genio scientifico di due popoli profondamente diversi, in due stadi profondamente diversi di civiltà. Galileo chiude il Rinascimento italiano, quasi riassumendone in sè le virtù classiche, con « quella franchezza e libertà di pensare, placida, tranquilla, sicura e non forzata », come il Leopardi l'ha definita. Keplero sorge in una Germania in parte ancora barbara e sembra come trascinato da un'ardente, quasi poetica fantasia, alle intuizioni più geniali e profonde, ma talvolta anche alle più strane, assurde, infantili ipotesi.

V'è in Keplero il senso acuto delle analogie, rivelatrici dell'unità del creato. « Amo moltissimo le analogie, quali maestre mie fedelissime e compagne nello svelare tutti i misteri della natura » (« Plurimum amo analogias, fidelissimos meos magistros, omnium naturae arcanorum conscios »). esclama Keplero a un certo punto d'un passo che ci proponiamo di esaminare. Ma una specie di misticismo pitagorico, aspetto deteriore di quel senso, lo pervade e spesso l'induce in errore. Per es., nel *Misterium cosmographicum* (1596), una delle sue opere giovanili, Keplero ritiene di poter render ragione del numero dei pianeti e della misura delle loro orbite: teoria singolare, destinata ad esser smentita dalla scoperta di nuovi pianeti e dalla determinazione più approssimata delle distanze planetarie. Tale teoria considera i cinque poliedri regolari, cioè: cubo, tetraedro, dodecaedro, icosaedro ed ottaedro, concentrici e di dimensioni tali che la sfera iscritta nel primo risulti circoscritta al secondo, quella iscritta nel secondo risulti circoscritta al terzo, ecc. Orbene, secondo i dati numerici tramandati da COPERNICO, i raggi della sfera circoscritta al cubo, delle quattro sfere nominate (nel loro ordine) e infine della sfera iscritta nell'ottaedro, risultano ordinatamente proporzionali alle distanze dei pianeti Saturno, Giove, Marte, Terra, Venere, Mercurio dal Sole. E nell'*Harmonices mundi* (1619), l'opera d'età matura in cui KEPLERO dà la sua famosa III legge sul movimento dei pianeti, egli ritiene di poter stabilire un'analogia fra le distanze dei pianeti e gl'intervalli della scala musicale.

3. Nuove idee sulle coniche.

Il contributo di KEPLERO alla teoria delle coniche è essenzialmente contenuto nel § 4 del cap. IV dell'opera *Astronomiae pars optica (Paralipomena ad Vitellionem)*, pubblicata a Francoforte nel 1604, sotto il titolo « De coni sectionibus » (pp. 92-96), e consiste in alcune considerazioni, esposte (dice l'A.), in forma « popolare », da un punto di vista del tutto nuovo e destinato a successo nelle matematiche moderne.

Nel passo, divenuto celebre, KEPLERO pone essenzialmente il *principio di continuità*, che esprime sotto forma d'una *legge d'analogia*; in quanto egli presenta le tre specie di coniche come dedotte, l'una dall'altra, per deformazione continua in uno stesso piano. Infatti l'A. vi enuncia le proprietà di una famiglia, semplicemente infinita, di coniche (famiglia che, con termine moderno, si chiama una « schiera »), aventi in comune: un asse *s* (fig. 1), un

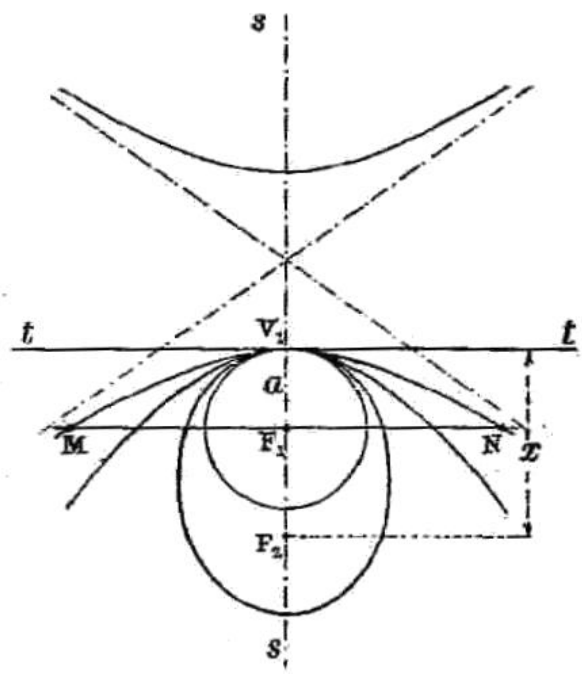

Fig. 1

fuoco F_1 ed il vertice V_1 (entrambi su s). Tali coniche hanno perciò in comune anche la tangente t in V_1. Indichiamo con a la distanza F_1V_1 ed assumiamo, come parametro atto ad individuare la conica nella famiglia, la distanza x dell'altro fuoco F_2 dalla detta tangente t, valutata positivamente o negativamente a seconda che F_2 si trovi, rispetto alla t, dalla stessa banda di F_1, oppure dalla banda opposta. Facciamo crescere x, con continuità, da a ad ∞, poi da $-\infty$ a $-a$. Si riconosce subito che, per $x=a$, la conica si riduce alla circonferenza di centro F_1 e di raggio a, per $a<x<\infty$ la conica è un'ellisse, per $x=\pm\infty$ è una parabola, per $-\infty<x$, $x<-a$ è un'iperbole, infine per $x=-a$ essa si riduce alla retta t contata due volte.

Nella famiglia, dunque, la circonferenza di centro F_1 e di raggio a e la retta t, contata due volte, si presentano come *curve limiti estreme*, mentre la parabola di fuoco F_1 e di vertice V_1 si presenta come *curva limite intermedia*, che separa le ellissi dalle iperboli. Le proprietà di queste due specie di coniche vengono messe a confronto le une con le altre: le « *analogie* » ch'esse presentano, permettono all'A. di dedurre, per passaggio a limite e cioè « *per continuità* », le proprietà della parabola. Alle analogie geometriche KEPLERO attribuisce grande importanza, esprimendosi nei seguenti termini: « Particolarmente nella Geometria occorre aver riguardo delle analogie, che permettono d'associare, sia pure con insolita terminologia, infiniti casi compresi tra i casi limiti estremi ed il caso intermedio, e forniscono una suggestiva, chiara visione di tutta l'essenza d'un concetto o d'una proprietà » (« In geometria praecipue suspiciendos, dum infinitos casus interiectos intra sua extrema mediumque, quantumvis absurdis locutionibus concludunt, totamque rei alicuius essentiam luculenter ponunt ob oculos »). Ma, prima d'esaminare dettagliatamente queste analogie, è bene inquadrare il passo nell'intero contesto e spiegare i motivi che, con tutta naturalezza, conducono KEPLERO a soffermarsi sulle coniche e ad esporre su di esse le sue nuove idee.

4. Ricerche sul fenomeno di rifrazione.

Nel cap. IV dell'*Astronomiae pars optica*, intitolato « *De refractionum mensura* », KEPLERO, partendo dall'ipotesi dell'esistenza d'una certa analogia fra il fenomeno della rifrazione e quello della riflessione, e cercando quindi di scoprire la legge del primo fenomeno per analogia con quella del secondo (ben nota già dall'antichità classica), si propone di sostituire al mezzo rifrangente un mezzo riflettente, così da ottenere, in certo modo, identici effetti. Questa ricerca, per quanto profonda, minuziosa, anche geniale, non lo conduce al risultato desiderato (com'è noto, la legge di rifrazione fu scoperta, poco più tardi, da SNELLIO e DESCARTES, 1626-1637); pur tuttavia merita d'esser qui riassunta, limitatamente a quanto interessa per il nostro studio.

Supponiamo che, da un punto F_1 situato in un certo mezzo A (fig. 2), venga osservato un oggetto situato in un mezzo B avente « maggiore densità ». KEPLERO non dice che cosa egli intenda con questo termine comparativo, ma è chiaro, da tutto il contesto, ch'esso è equivalente al termine: « maggior indice di rifrazione ». Per semplicità d'esposizione, possiamo addirittura supporre che A sia il vuoto. In fig. 2 è indicata con t l'intersezione del piano del disegno (in cui cade il punto F_1) col piano separatore dei due mezzi A, B (i due piani essendo supposti fra loro ortogonali).

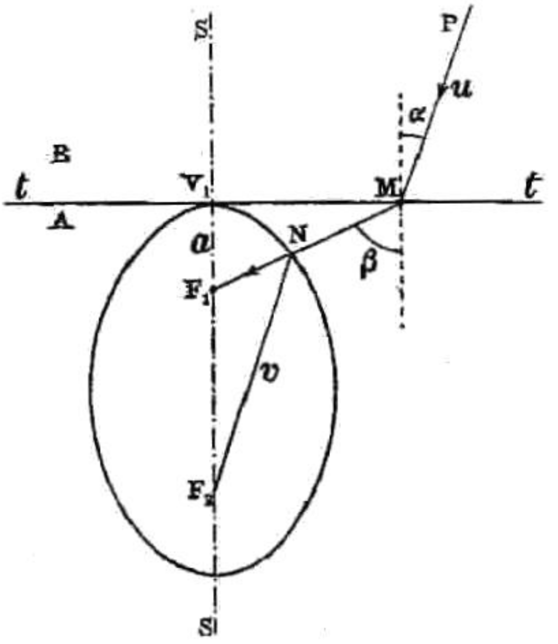

Fig. 2

Un generico raggio u, proveniente da un punto luminoso P e arrivante in F_1, subisce una deviazione nel punto M in cui esso attraversa la t, precisamente: passando dal mezzo B al mezzo A, u s'allontana dalla normale alla t, cioè $\beta > \alpha$. KEPLERO osserva che il rapporto $\frac{\beta}{\alpha}$ è necessariamente compreso fra 1 ed ∞, cioè fra due valori limiti che corrispondono: il primo all'ipotesi che B sia il vuoto (cioè abbia « densità nulla »), il secondo all'ipotesi che B abbia « densità infinita ». Orbene, KEPLERO si propone di costruire un ellissoide di rotazione avente per asse la retta s (perpendicolare alla t condotta per F_1)

ed un vertice nel punto V_1 (intersezione st), in modo da ottenere il seguente risultato: supponendo che la superficie interna dell'ellissoide sia speculare e che in F_1 sia collocata una sorgente luminosa, il raggio uscente da F_1 in direzione F_1M subisca, per riflessione, la stessa deviazione sopra indicata, e ciò *qualunque sia il punto* M *del piano rifrangente* (o, il che è lo stesso, della retta t). In altre parole, KEPLERO richiede

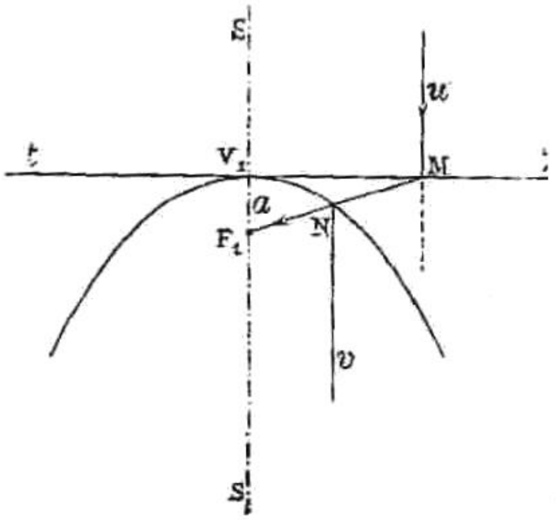

Fig. 3

che il raggio riflesso NF_2 (che va all'altro fuoco) risulti parallelo al raggio PM. Questo problema si presenta spontaneo alla mente di KEPLERO, come generalizzazione dei due problemi limite particolari: quello in cui è $\frac{\beta}{\alpha} = 1$, risolto (com'è evidente) dalla sfera di centro F_1 e di raggio a, e quello in cui è $\frac{\beta}{\alpha} = \infty$, risolto dal paraboloide di rotazione (fig. 3).

Non riuscendo a risolvere questo problema particolare, KEPLERO passa a proporsene un altro, analogo [3]. Egli si propone di costruire un iperboloide di rotazione (a due falde)

---

[3] Veramente nel testo (ivi n. 5) viene affrontato prima il secondo di questi due problemi e poi il primo, ma noi ne abbiamo senz'altro invertito l'ordine, sembrandoci d'ottenere maggiore semplicità e chiarezza. KEPLERO dimostra precisamente che un ellissoide soddisfacente alla condizione da lui richiesta, *non esiste*. La via ch'egli segue è molto semplice e si basa sui risultati numerici forniti da WITELO, risultati d'esperienze eseguite relativamente a due posizioni distinte M', M'' del punto M. Egli determina quale dovrebbe essere la posizione F_2' del secondo fuoco F_2

avente per asse la retta s, un fuoco in F_1 ed un vertice nel punto V_1, in modo da ottenere il seguente risultato: supponendo che la superficie interna della falda dell'iperboloide, contenente il fuoco F_1, sia speculare e che in F_1 sia collocata una sorgente luminosa, il raggio uscente da F_1 in direzione F_1M (fig. 4) venga riflesso in una direzione v formante l'angolo α

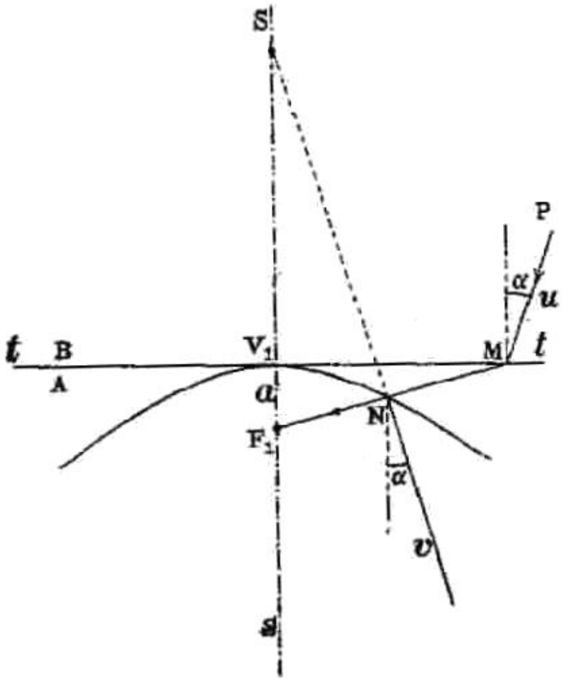

Fig. 4

con la direzione normale alla t (precisamente: la direzione del raggio riflesso sia simmetrica, rispetto alla retta t, della direzione del raggio PM) e ciò *qualunque sia il punto* M *del piano rifrangente.* Anche questo problema si presenta spontaneo alla mente di KEPLERO, come generalizzazione di due problemi-limite particolari: quello in cui è $\frac{\beta}{\alpha} = 1$, risolto dallo stesso piano rifrangente, e quello in cui è $\frac{\beta}{\alpha} = \infty$, risolto dal paraloide di rotazione (fig. 3). Neppure questo problema particolare KEPLERO riesce a risolvere [1], ed egli allora modifica un'altra

dell'ellissoide, per ottenere il risultato voluto relativamente al punto M'. Analogamente determina quale dovrebbe essere la posizione F_2'' di F_2, per ottenere il risultato voluto relativamente al punto M''. La semplice constatazione che $F_2' \neq F_2''$ basta a dimostrare quanto s'è affermato.

[1] Cioè KEPLERO dimostra che anche questo problema, come il primo (v. la nota [2]), non ammette soluzione.

volta il proprio punto di vista, per costruire una superficie di rotazione (intorno all'asse s) tale da ottenere, per riflessione sulla superficie stessa (supposta speculare), deviazioni dalla normale al piano rifrangente (in corrispondenza d'ogni punto M di questo), uguali a quelle subite dal raggio u (e ciò in base ai risultati sperimentali riportati da WITELO [5]). Ma a noi non interessa approfondire ulteriormente l'analisi di questa ricerca di KEPLERO, bastandoci poterne trarre, al nostro scopo, le seguenti importanti conclusioni:

1ª) KEPLERO è mosso a interessarsi delle coniche da un problema fisico, che egli cerca di risolvere supponendo una certa analogia fra il fenomeno di rifrazione e quello di riflessione.

2ª) L'idea di deformare per continuità le coniche (o, ciò ch'è lo stesso, le quadriche rotonde generate dalla rotazione di tali coniche intorno all'asse s), proviene dall'immaginare che la densità del mezzo rifrangente (mezzo B) vari con continuità: a ciò egli può esser stato spontaneamente condotto per es. dalla considerazione d'una tabella numerica riportante i risultati d'esperienze, eseguite con tutta una serie di mezzi rifrangenti diversi (di densità poco variabile l'uno dall'altro). Che il principio di continuità, in generale, possa esser stato suggerito a KEPLERO, dallo studio di tabelle numeriche e dalla necessità d'applicarle praticamente, ci sembra probabile: fra le tabelle riportate nello stesso capitolo IV che stiamo studiando, ci sembra di dover segnalare quelle alle pagg. 121-123, che dànno le deviazioni (dovute alla rifrazione atmosferica) dei raggi luminosi di vari astri, corrispondentemente ad inclinazioni (sull'orizzonte) variabili di grado in grado.

3ª) Le analogie geometriche delle varie specie di coniche, fra loro e con le coniche limite (cerchio, retta, parabola), sono studiate in quanto rappresentatrici di analogie fisiche.

---

(5) È veramente singolare la fiducia che KEPLERO ha in questa propria ricerca. Tanto che egli chiude il n. 5 del cap. IV, rivolgendo al lettore la frase: « se tu riuscirai, in qualche modo, a conoscere perfettamente questa superficie, sappi che avrai raggiunto qualcosa di grande nella Meccanica »!

5. Elementi di cui Keplero cerca la variazione continua nella famiglia di coniche.

1°) La *curvatura*, nel vertice V_1 (fig. 1), crescente dalla retta (« pura rectitudo »), per continuità nelle iperboli, nella parabola e nelle ellissi, fino alla circonferenza (« pura curvitas »).

2°) L'*orientamento della tangente*, che nell'iperbole tende (nel mentre che il punto di contatto, percorrendone il ramo di vertice V_1, s'allontana da questo vertice) all'orientamento dell'asintoto, nell'ellisse « ritorna in sè stesso » (la tangente « coit iterum secum ipsa »), infine nella parabola partecipa sia del comportamento dell'iperbole, sia di quello dell'ellisse, perchè « anche la parabola è una curva illimitata, ma tende a mantenersi limitata da una parte ». (« Infinita enim et ipsa est, sed finitionem ex altera parte affectat »). E KEPLERO precisa: « quanto più si prolunga la parabola, tanto più essa diventa parallela a sè stessa » (« quo magis enim producitur, hoc magis fit sibiipsi parallelos »).... « ed allarga le braccia distogliendole dall' abbracciar l' infinito, cioè abbracciando sempre di più ma cercando d'abbracciar sempre di meno » (« brachia contrahit ab infiniti complexu, semper plus quidem complectens, et semper minus appetens »).

3°) Il *comportamento della conica rispetto ai fuochi* F_1, F_2. KEPLERO avverte giustamente la mancanza, ai suoi tempi, d'un termine per indicare tali punti, in quanto gli antichi ponevano « in luogo del nome, una definizione ». Infatti APOLLONIO (libro III, prop. 45) chiama i fuochi « i punti determinati dal l'applicazione » (τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γενηθέντα (opp. γενόμενα, secondo altre fonti) σημεῖα »), cioè dall'applicazione di un certo rettangolo, per ricordare l'una o l'altra delle seguenti costruzioni (indicate, rispettivamente per l'ellisse e per l'iperbole, nelle figg. 5, 6). Si costruisca il rettangolo $V_2 F_1 HK$ soddisfacente alle condizioni: *a*) un lato V_2F_1 giaccia sull'asse maggiore dell'ellisse, rispettivamente sull'asse trasverso dell'iperbole, a partire da uno dei vertici V_2 della conica stessa; *b*) sia equivalente al quadrato (tratteggiato) avente per lato l'altro semiasse della conica; *c*) la lunghezza $V_1 V_2$ dell'asse su cui giace il lato V_2F_1, superi tale lato nel caso dell'ellisse, sia superato da tale lato nel caso dell'iperbole, d'un segmento $F_1 V_1$ uguale all'altezza del rettangolo stesso. Come debba essere eseguita una tale costruzione, rispettivamente nei due casi, risulta (in particolare) dalle proposizioni 28, 29 del libro VI

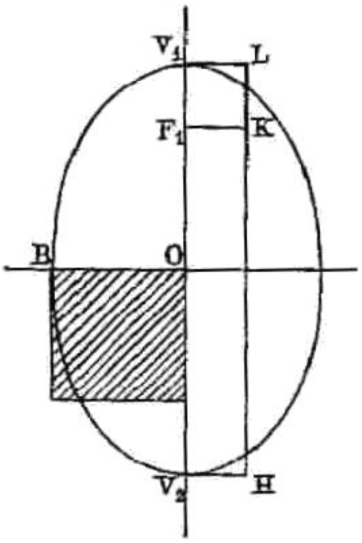

Fig. 5

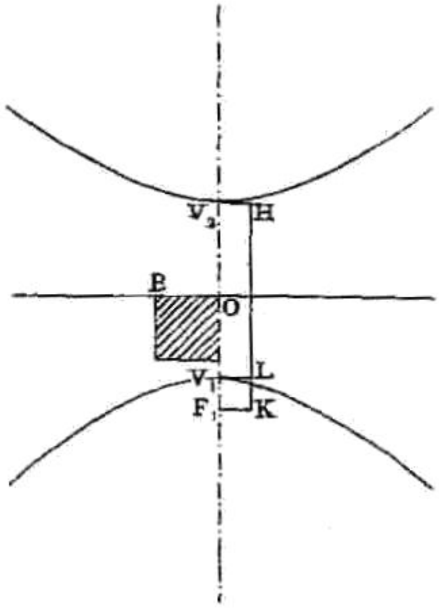

Fig. 6

degli *Elementi d'Euclide*. Il vertice F_1 del rettangolo così costruito, è fuoco della conica.

Invece da KEPLERO i fuochi sono definiti (sia per le ellissi che per le iperboli) come i punti soddisfacenti alla proprietà (ben nota dall'antichità: v. APOLLONIO, libro III, prop. 48): « le rette condotte da uno dei fuochi ai punti di contatto delle tangenti alla conica, formano, con tali tangenti, angoli uguali a quelli che con esse formano le rette condotte dall'altro fuoco agli stessi punti di contatto ». KEPLERO chiama questi punti « fuochi », precisamente per quelle elementari proprietà ottiche su cui si basa la sua ricerca (cfr. n. 4). Quanto al fuoco della parabola, sebbene APOLLONIO non ne faccia parola, è ormai certo che la conoscenza d'esso era posseduta dagli antichi; anzi, con tutta probabilità, lo stesso EUCLIDE doveva conoscere la proprietà fondamentale della parabola, che i suoi punti si mantengono equidistanti dal fuoco e da una retta fissa (la direttrice) (6). Ma KEPLERO definisce il fuoco della parabola, per

(6) H. G. ZEUTHEN: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* (2) pagg. 367-69.

analogia coll'ellisse e l'iperbole, basandosi sulla proprietà che, al tempo suo, era attribuita a WITELO (n. 1): il fuoco è il punto tale che le rette condotte da esso ai punti di contatto delle tangenti alla parabola, formano, con tali tangenti, angoli uguali a quelli che con esse formano le rette parallele all'asse. Da questa proprietà, sempre in virtù dell'analogia e cioè considerando la parabola come il caso limite, da una parte delle iperboli, dall'altra parte delle ellissi, KEPLERO è indotto ad esprimersi dicendo che anche la parabola possiede due fuochi, ma che uno di essi, che chiama « *fuoco cieco* », « è da pensare situato sull'asse, o dentro o fuori della parabola, a infinita distanza dall'altro » (« alter vel extra vel intra sectionem in axe fingendus est infinito intervallo a priore remotus »). È anche verosimile che KEPLERO abbia concepito il fuoco cieco della parabola in senso fisico, come sede d'una sorgente di luce infinitamente lontana. Egli si affianca dunque ai prospettivisti del rinascimento (DEL MONTE, STEVINO ecc.), nell'anticipare uno dei concetti fondamentali della geometria moderna, quello del *punto all'infinito* od *improprio* [7].

Sembra però che KEPLERO non abbia pienamente afferrato l'importanza e l'efficacia della sua definizione di *fuoco*, poichè in nessun'altra parte delle sue opere (neppure nella stessa *Astronomiae pars optica!*) fa più uso di questo termine.

4°) Il *valore del rapporto* $\frac{MN}{F_1V_1}$ (fig. 1), indicando con MN il segmento intercetto dalla generica conica della famiglia, sulla perpendicolare all'asse s, condotta per il fuoco F_1. Tale valore è 2 nel caso della circonferenza e cresce con continuità, passando per 4 nel caso della parabola e tendendo all'infinito nel caso della retta.

6. Le regole pratiche per il tracciamento meccanico delle coniche.

KEPLERO indica anzitutto quelle per l'iperbole e per l'ellisse « facilissime e che possono realizzarsi anche con un filo », in applicazione delle prop. 51, 52 del III libro d'APOLLONIO (proposizioni che affermano la costanza della somma o della

[7] Cfr. U. CASSINA: *La prospettiva e lo sviluppo dell'idea dei punti all'infinito.* (« Periodico di Matematiche », 1921, pag. 326).

differenza dei raggi focali, per il punto P corrente lungo l'ellisse o rispettivamente lungo l'iperbole). È nuova la regola relativa all'iperbole [8]: fissare nei fuochi F_1, F_2 i capi di due fili indefiniti; riunire con due dita i fili, ben tesi, in un punto V_1 arbitrariamente assegnato sul segmento F_1F_2 (V_1 vertice dell'iperbole) [9]; far scorrere i due fili fra le dita, mantenendoli sempre tesi e lasciando che s'allunghino entrambi simultaneamente della stessa quantità; accompagnare il movimento delle dita con la punta della matita. KEPLERO dichiara d'essersi a lungo rammaricato di non saper tracciare anche la parabola con un procedimento meccanico altrettanto facile. Ma « finalmente l'analogia gli mostrò (e la geometria gli confermò) la possibilità di tracciare anche la parabola, con un procedimento non molto più complicato » (« Tandem analogia monstravit — et geometria comprobat — non multo operosius et hanc designare »). Prefissati il vertice V_1 e il fuoco F_1 della parabola, si tracci una qualunque retta u perpendicolare all'asse s (retta V_1F_1), dalla parte di F_1. Si fissi in F_1 il capo d'un filo, la cui lunghezza sia uguale a $\overline{F_1V_1} + \overline{V_1Q_0}$ (indicando con Q_0 il punto su). L'altro capo Q del filo si faccia scorrere sulla u, a partire dal punto Q_0, e simultaneamente si tenda il filo con la punta P della matita, in modo che il filo venga a disporsi (nel generico istante e a partire dalla posizione V_1 di P) lungo due segmenti F_1P, PQ, il secondo dei quali sia sempre parallelo all'asse s. La punta P della matita descriverà precisamente la parabola di vertice V_1 e di fuoco F_1.

7. Le coniche e la scoperta delle leggi sul movimento dei pianeti.

Benchè non si possa considerare questa celebre scoperta di KEPLERO come un contributo alla teoria delle coniche, non è tuttavia fuori luogo parlarne brevemente alla fine di quest'articolo, in quanto essa costituisce una delle più belle applicazioni di quella teoria nelle scienze esatte. Vogliamo propriamente indicare come e in virtù di quali proprietà geometriche

---

(8) Lo è pure quella relativa alla parabola. È probabile che KEPLERO abbia ritrovato da solo anche la regola relativa all'ellisse.

(9) Se V_1 è il punto medio di $\overline{F_1F_2}$, l'iperbole degenera evidentemente in una retta, cioè nell'asse del segmento $\overline{F_1F_2}$.

dell'ellisse, KEPLERO sia riuscito a dimostrare la cosiddetta *legge delle aree* o II legge (« Le aree descritte dal raggio vettore che va dal Sole a un pianeta, sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle ») insieme con la I (« Le orbite dei pianeti sono ellissi e il Sole ne occupa uno dei fuochi »), leggi ch'egli pubblicò (pochi anni più tardi dell'*Astronomiae pars optica*) nell'opera *Astronomia nova seu Physica coelestis* (1609) [10].

In un primo tempo KEPLERO, in base alle osservazioni astronomiche, perviene alla legge delle aree *relativamente al solo movimento della terra* che, in prima approssimazione (data la piccola eccentricità), può supporre circolare (cap. XL). Egli passa poi allo studio del movimento di Marte, determinandone anzitutto e con la maggior precisione possibile, la forma dell'orbita. Osserva che questa *non può essere un cerchio* (cap. XLIV), anzi una certa *ovale*, che soltanto più avanti, guidato da finissimo, geniale intuito, riesce ad identificare con un'ellisse (capitoli LVIII–LX). Quest'ultima parte della sua ricerca è del più grande interesse, anche perchè in essa è sostanzialmente effettuata un'operazione d'integrazione, forse la prima che effettivamente si discosti dai metodi archimedei (allora conosciuti) [11].

Cerchiamo di cogliere il filo del ragionamento di KEPLERO, ragionamento evidentemente ispirato dall'ipotesi pregiudiziale che le leggi del movimento debbano esser le stesse per tutti i pianeti. Sia CMD l'orbita ovale di Marte intorno al Sole (fig. 7), supposto situato eccentricamente in F. Consideriamo la circonferenza CND, concentrica all'ovale ed avente per diametro CD il semiasse maggiore dell'ovale. Sia N un punto generico della circonferenza, M la proiezione di N sull'ovale, fatta in direzione perpendicolare al diametro CD. Suddividiamo l'arco $\widehat{CN}$ (anomalia eccentrica di M) in un certo numero k di archi uguali (nella fig. 7 si è scelto $k=4$): siano $N_0 = C$, N_1, N_2, ..., $N_k = N$ i punti di suddivisione, $M_0 = C$, M_1, M_2, ..., $M_k = M$ le loro proiezioni sull'ovale. Le osservazioni astronomiche permettevano

[10] Per le questioni d'Astronomia, connesse con quanto stiamo per dire, si veda l'articolo del prof. GIUSEPPE ARMELLINI: *Come si determinano le orbite planetarie*, nel « Periodico di Matematiche », 1922, pag. 464.

[11] Infatti KEPLERO pubblicò la sua *Stereometria doliorum* nel 1615. (Cfr. H. G ZEUTHEN: *Geschichte der Mathematik im XVI u. XVII Jahrhundert*, pag. 253).

di calcolare sia la somma $S_k = \sum_1^k \overline{FM}_i$ che il tempo T impiegato da Marte a descrivere l'arco $\widehat{CM}$. Esse permettevano anche di rilevare che il rapporto $\frac{S_k \cdot \widehat{CN}}{kT}$ tende, al crescere di k, ad una costante che non dipende dalla posizione del punto M sull'orbita.

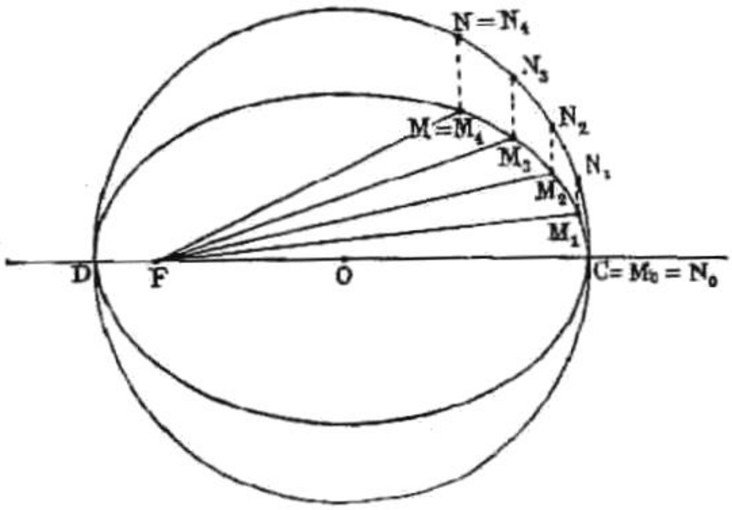

Fig. 7

KEPLERO fa ora l'*ipotesi che l'orbita di Marte sia un'ellisse con un fuoco in* F e, da alcune proposizioni d'APOLLONIO, deduce (cap. LIX) il seguente teor.: la distanza $\overline{FM}$ del fuoco dal generico punto M dell'ellisse è uguale alla distanza $\overline{FP} = \overline{NR}$ di F dalla tangente in N alla circonferenza (fig. 8). Se dunque s'indica con δ la comune lunghezza dei k archetti $\widehat{N_{i-1}N_i}$, si ha che $S_k\delta = \Sigma_i \overline{FM}_i\delta$ è un valore approssimato dell'area del triangolo mistilineo CFN (noi diciamo che $S_k\delta$ è una certa « somma integrale »), ed anzi tanto più approssimato a quell'area, quanto più piccolo è δ. Da ciò si deduce che, indicando con A_0 l'area del detto triangolo, il rapporto $\frac{A_0}{T}$ non dipende dalla posizione del punto M sull'ellisse. Ma il rapporto $\frac{A_0}{A}$ dell'area A_0 a quella A del triangolo mistilineo CFM, è anch'esso indipendente dalla posizione di M (essendo precisamente uguale al rapporto della lunghezza dell'asse maggiore dell'ellisse a quella dell'asse minore, ciò che è conseguenza immediata dell'affinità che intercede fra ellisse e circonferenza, affinità nota da un'opera d'ARCHIMEDE, che KEPLERO conobbe in una traduzione del COMMANDINO (n. 1)). Dunque anche il rapporto $\frac{A}{T}$ è indipendente dalla posizione di M e con ciò è dimostrata la legge delle aree per il pianeta Marte, ma sempre *subordinatamente all'ipotesi che l'orbita di Marte sia un'ellisse.*

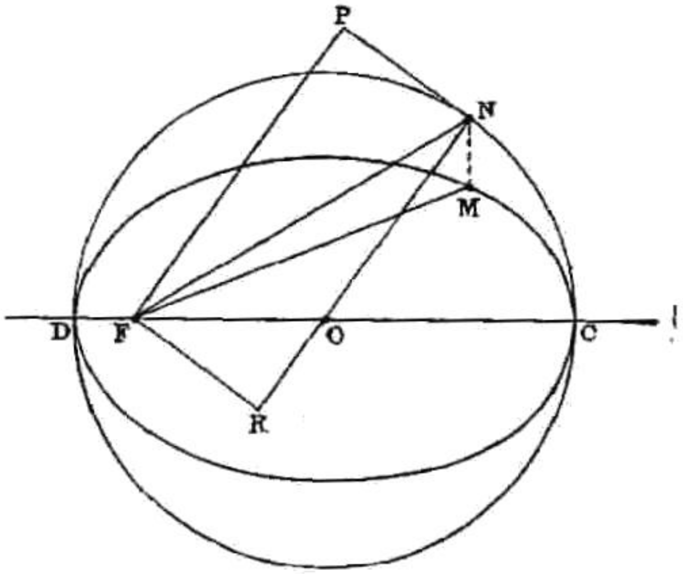

Fig. 8

Sembra che l'accettazione di tale ipotesi sia costata a KEPLERO un grande sforzo, poichè dal suo epistolario s'apprende che per un intero anno (e cioè proprio in quel 1604 in cui pubblicò l'*Astronomiae pars optica*) egli fu travagliato dall'ipotesi dell'orbita ovale. L'ipotesi dell'ellisse gli fu evidentemente suggerita dalla presunzione che la legge delle aree dovesse valere per il movimento di Marte non meno che per quello della Terra. Essa doveva poi venir suffragata dal fatto che, precisando meglio i dati relativi all'orbita della Terra col supporre che anche quest'orbita fosse ellittica come quella di Marte, si era poi in grado di determinare con maggior approssimazione la stessa orbita di Marte, e cioè d'avvicinarsi con maggior approssimazione alla vera forma ellittica di questa. Concludendo, KEPLERO scoprì in sostanza prima la legge delle aree, poi quella della forma ellittica dell'orbita dei pianeti, e ciò non deve meravigliare, quando si rifletta che gli errori d'osservazione (nella determinazione della posizione della Terra o di Marte, nei singoli istanti) erano necessariamente destinati a non avere una sensibile influenza perturbatrice sulla verifica sperimentale della legge delle aree.

TULLIO VIOLA