Periodico di Matematiche - Serie VII - Volume 6 - Numero 1-2 - gennaio-giugno 2000

Per costruzione o da teorema?

di Luciano Corso [1]

Tra i quesiti proposti nelle gare di matematica dell'Università degli Studi "Bocconi" di Milano, in collaborazione con la Mathesis, è apparso il seguente quesito." Durante le ultime partite prima della finale della coppa di basket, abbiamo visto in tribuna una spia della squadra, nostra futura avversaria. Essa prendeva appunti circa la nostra tattica abituale. A questo punto dobbiamo scombussolare i punti di riferimento dei nostri avversari. Abbiamo così deciso di ridistribuire le nostre cinque maglie nu-merate in modo che nessuno di noi cinque indossi la maglia abituale. In quanti modi possiamo effettuare questa ridistribuzione?" Il problema può essere risolto in diversi modi. Ne propongo due, a confronto.

1° Modo (per costruzione). La risposta viene data senza necessità di avere una cultura matematica, in senso stretto. Il ragionamento muove dai seguenti passi elementari. A) Le cinque maglie possono essere considerate delle scatole numerate (perciò distinguibili), mentre i giocatori possono essere delle palline numerate. B) Se si prendono in considerazione due scatole qualsiasi, per esempio 1 e 2, ci sono due modi di collocare le palline in esse: o si scambiano le palline 1 e 2 nelle scatole 1 e 2, o non si pongono le palline 1 e 2 nelle due scatole a numeri corrispondenti. Nel primo caso si ha:

[1] Docente di calcolo delle probabilità, datistica e R.O. presso l'ITIS G. Marconi di Verona. E-mail: lcorso@iol.it

Scatole	1	2	3	4	5
Palline	2	1	4	5	3
Palline	2	1	5	3	4

Quindi vi sono due modi possibili in questo caso di scombinare. Nel secondo caso si ha

Scatole	1	2	3	4	5
Palline	2	3	1	5	4
Palline	2	3	5	1	4
Palline	2	3	4	5	1
Palline	2	4	1	5	3
Palline	2	4	5	3	1
Palline	2	4	5	1	3
Palline	2	5	1	3	4
Palline	2	5	4	1	3
Palline	2	5	4	3	1

Quindi vi sono 9 modi possibili di scombinare. Nel primo caso i modi vanno moltiplicati per 4, poiché vi sono 4 possibili modi di abbinare palline a scatole invertendo i numeri a due a due: in totale si hanno 2·4=8 modi. Ci sono quindi 4 modi di porre nella prima scatola le altre 4 palline. In totale i modo sono 9·4 = 36. Quindi complessivamente vi sono 8 + 36 = 44 modi di scombinare i numeri delle palline con quelli delle scatole.

Segnalo una elegante relazione generale che consente di calcolare il numero di scombinamenti a_n:
$a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $a_3 = 2$; ... ; $a_n = (n - 1) \cdot (a_{n-1} + a_{n-2})\ \forall\, n \in N$
(ometto la dimostrazione). Nel nostro caso si ha :
$a_4 = 9$; $a_5 = 4 \cdot (9+2) = 44$.

2° Modo (attraverso l'applicazione di un teorema):

Si ottiene lo stesso risultato applicando il teorema di inclusione-esclusione di Poincaré-Da Silva sulla cardinalità di un insieme risultante da una unione di *n* insiemi con intersezione non vuota [B.1]. Lavoriamo sulle probabilità. Il teorema afferma che

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right) = \sum_{k_1=1}^{n} P\left(A_{k_1}\right) - \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=k_1+1}^{n} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2}\right) + \ldots +$$

$$-(-1)^n \sum_{k_1=1}^{n-(n-1)} \sum_{k_2=k_1+1}^{n-(n-2)} \cdots \sum_{k_n=k_{n-1}+1}^{n} P\left(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_n}\right)$$

ove A_k = "C'è corrispondenza tra k-esimo ruolo giocato e k-esimo numero sulla maglia del giocatore". Cioè A_k è l'abbinamento della palla numero k con la scatola numero k;

Nel nostro caso si ha:

$$\binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \binom{n}{3} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} - \ldots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} \frac{1}{n!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \;.$$

Ma noi cerchiamo il complementare di $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$:

$$P[ÿ(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)] = 1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots - (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}\right)$$

che nel nostro caso diventa:

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} = \frac{44}{120}$$

da cui si può notare che i casi favorevoli agli scombinamenti sono 44.

Il primo metodo non ha bisogno di alcuna particolare conoscenza teorica per essere applicato; richiede solo attenzione nello sviluppo di un ragionamento. Il secondo metodo invece richiede la conoscenza di un famoso teorema dovuto a Poincaré-

Da Silva. Quale dei due metodi dovremmo apprezzare di più? Oggi i giochi di matematica prediligono i metodi costruttivi e le relative abilità connesse. Perciò noi dovremmo apprezzare di più un ragazzo che riesce a rispondere al quesito proposto applicando il primo metodo, rispetto al secondo. Ma allora, a che giova far apprendere ai nostri giovani tutta quella teoria matematica prevista dai programmi ministeriali? Perché bisogna caricare di teorie la mente dei giovani, se poi esse risultano quasi un freno che inibisce la libertà di pensiero? Si dice che nelle gare internazionali di matematica gli italiani non vadano bene; molti giovani di altri paesi li superano nella capacità di dare risposte ai problemi proposti.

Bibliografia

[B.1] Cerasoli, Eugeni, Protasi; "Matematica discreta", Zanichelli, Bologna, 1992.
Gare di Matematica della Università degli Studi Bocconi di Milano, anno 2000.