Prefazione agli Elementi di Euclide (¹)

Gli elementi di EUCLIDE constano, come si è detto, di 13 libri, cui se ne aggiungono due altri di fattura posteriore.

I primi sei libri, concernenti la geometria piana, sono detti *planimetrici*. Tutto l'ordine delle proposizioni è sostenuto dai *termini* o definizioni, dai *postulati*, aventi in generale un significato costruttivo esistenziale, e dalle *nozioni comuni* o *assiomi*: e la maggior parte di questi principi si trovano nella introduzione al libro I.

Il libro I contiene relazioni di eguaglianza e di disuguaglianza dei triangoli, i teoremi sulle parallele, la somma degli angoli interni di un triangolo, l'eguaglianza dei parallelogrammi e dei triangoli di egual base ed altezza, e — come conclusione — il teorema di PITAGORA sui quadrati costruiti sulla ipotenusa e sui cateti di un triangolo rettangolo. Il libro II insegna l'*algebra geometrica*, conducendo fino alla risoluzione — sotto forma geometrica costruttiva — delle più semplici equazioni di secondo grado; la teoria verrà completata nel libro VI (prop. 28 e 29). Il libro III svolge la teoria del cerchio: intersezioni e contatti, angoli iscritti in uno stesso arco. Nel IV si trova la costruzione dei poligoni regolari

---

(¹) È questa la seconda parte (in aggiunta alla prima del 1924) della Prefazione che ENRIQUES preparò per la seconda edizione degli Elementi di EUCLIDE.

Detta seconda edizione è in corso di stampa per il primo volume, le cui correzioni, modifiche e aggiunte furono preparate dall'ENRIQUES stesso, nell'ultimo anno di Sua vita, in collaborazione con ATTILIO FRAJESE.

Quest'aggiunta alla prima prefazione ha essenzialmente carattere divulgativo: tuttavia si scorge in essa la traccia di una rielaborazione critica delle idee dell'ENRIQUES sullo sviluppo della matematica greca.

iscritti e circoscritti al cerchio: triangolo, esagono, quadrato, pentagono e pentadecagono. Il libro V risponde nella mente dei Greci ad una teoria che ha carattere più generale in confronto della geometria propriamente detta, quasi come organo della scienza matematica, prendendo dunque il posto che i moderni conferiscono all'analisi. Si tratta delle teorie delle grandezze e delle proporzioni, cioè — sotto forma geometrica — dei *numeri reali,* siccome *rapporti:* la trattazione moderna degli irrazionali di R. DEDEKIND trae origine appunto da questa teoria euclidea.

Nel libro VI si trovano le applicazioni geometriche delle proporzioni, in ispecie le proprietà delle più semplici figure simili.

I seguenti libri VII, VIII e IX sono dedicati all'aritmetica: proporzioni tra numeri interi, massimo comune divisore e minimo comune multiplo, decomposizione dei numeri interi in fattori primi, ed anche numeri notevoli secondo i Pitagorici.

Il libro X contiene — sempre sotto forma geometrica — una teoria degli irrazionali risultanti dall'estrazione di radicali quadratici sovrapposti: esso s'inizia col procedimento del massimo comune divisore, cui fa seguito un altro criterio di riconoscimento della commensurabilità, e procede ad una classificazione estremamente elaborata, che prelude agli studi moderni sui corpi algebrici, ed ha esercitato una notevole influenza sugli algebristi italiani del secolo XVI, risolutori dell'equazione cubica.

Infine i libri XI, XII, XIII svolgono le teorie elementari della geometria solida che, nell'ultimo libro, conducono alla costruzione dei poliedri regolari. L'assetto di queste teorie è meno perfetto in confronto alla geometria piana, tantochè la stereometria ha dovuto subire nell'età moderna (e specie per opera della scuola francese alla fine del secolo XVIII ed agli inizi del XIX) rimaneggiamenti più profondi. Vi si trovano, tuttavia, cose bellissime: per esempio le determinazioni del volume della piramide, dei cilindri e dei coni, la proporzionalità dei cerchi ai quadrati dei diametri: manca la determinazione del rapporto fra la circonferenza e il diametro, calcolato da ARCHIMEDE, e manca pure la ricerca del volume e della superficie della sfera, che furono scoperti soltanto mezzo secolo dopo EUCLIDE, dallo stesso ARCHIMEDE. Con questi studi, ed altri relativi a figure più elevate e a questioni di statica, il grande Siracusano esprime il più alto punto toccato dall' analisi infinitesimale degli antichi.

La ricchezza delle figure e delle loro relazioni, contemplate negli Elementi, e meglio ancora la distribuzione dei teoremi in un ordine logico, e la finezza con cui sono trattati i punti più delicati, mostrano evidentemente che l' opera deve rappresentare il frutto di un lungo lavoro, maturato nei secoli precedenti. E in accordo con questa impressione la testimonianza di PROCLO (che si riattacca a storici anteriori) ci dà qualche notizia sulla scoperta di alcune proposizioni notevoli e sui più antichi tentativi di raccogliere la dottrina in una esposizione degli " Elementi ". Senza indugiarci in una discussione di questa testimonianza, e dei testi che concorrono a chiarirla e ad integrarla, ci limiteremo ad alcune osservazioni.

La scienza greca trae origine da una scienza preellenica dei popoli circostanti, che oggi storici contemporanei tentano di ricostruire ([1]).

Per quel che riguarda la geometria in particolare, essa sarebbe nata in Egitto da un' esigenza catastale in rapporto alle innondazioni del Nilo che cancellavano o alteravano periodicamente i confini delle proprietà. A tale riguardo vengono menzionate alcune conoscenze precise che i Greci avrebbero appreso dai loro predecessori, e che a lor volta avrebbero quindi intrapreso a dimostrare in un senso più generale.

Qui convien dire che l' ordine degli acquisti che costituiscono il progresso della scienza, non è affatto l' ordine logico delle proposizioni e delle dimostrazioni che si presentano in una sistemazione rigorosa della materia come quella dell' EUCLIDE.

Le proprietà più elementari (per esempio il criterio di eguaglianza dei triangoli aventi eguale un lato e gli angoli adiacenti) sono state certo adoperate a scopo pratico (in operazioni geodetiche di triangolazione, ecc.) prima di essere formulate come teoremi degni di nota: poichè esse dovevano

---

([1]) V p. es. O. NEUGEBAUR, *Vorgriechische Mathematik*. (I. vol. delle « Vorlesungen über Geschichte der antiken math. Wissenschaften », Berlin, 1934).

apparire ad un tempo futili ed evidenti quando ancora non si vedeva in esse, e nel loro concatenamento con altre proprietà, una via per giungere deduttivamente al possesso di proprietà più riposte e veramente significative.

Nel primo libro dell'EUCLIDE appaiono, in realtà, due sole proposizioni significative: il teorema sulla somma degli angoli di un triangolo eguale a due retti e il cosidetto teorema di PITAGORA. Appunto quest'ultimo teorema, che costituisce la conclusione del libro, avrebbe porto occasione al nominato PITAGORA per disporre le più elementari proprietà geometriche in un ordine deduttivo, suggerendo l'esigenza di ragionamenti dimostrativi per giungere al possesso di proprietà più nascoste e veramente importanti. Questa è almeno l'opinione dello storico delle matematiche H. G. ZEUTHEN [1].

Qualunque cosa si pensi intorno a ciò, l'elaborazione di un ordine dimostrativo delle proposizioni geometriche si fa risalire specialmente alla scuola pitagorica, fondata da PITAGORA di Samo a Crotone, e poi diffusa nelle città del mezzogiorno d'Italia e della Sicilia, nel V secolo a. C.

Ma si discute fra gli storici intorno all'opera che in tal senso avrebbe esplicato il fondatore medesimo della scuola, che, secondo alcuni sarebbe stato soltanto il capo di una setta o ordine religioso, senza interesse per la scienza. Per tali critici scettici il lavoro matematico e scientifico della scuola comincerebbe assai più tardi, coi Pitagorici delle generazioni successive.

Senza entrare intorno a ciò in una discussione, pesando i motivi filologici e scientifici che possono suffragare le diverse tesi, diremo che lo scetticismo accennato, sostenuto in ispecie dal FRANK, ci sembra almeno esagerato; ed altrove abbiamo esposto le ragioni per cui crediamo che non si possa rifiutare a PITAGORA, o almeno ai più antichi suoi discepoli, una elaborazione propria della geometria [2].

---

(1) H. G. ZEUTHEN: *Théorème de Pythagore, origine de la géométrie scientifique*, Comptes rendus du II.me Congrès intern. de Philosophie. Ginevra, settembre 1904.

(2) F. ENRIQUES e G. DE SANTILLANA, *Histoire de la pensée scientifique*, II, *Le problème de la matière, Pythagoriciens et Eléates*. Paris, Hermann, 1936, v. pag. 13 e segg. - Inoltre: F. ENRIQUES e M. MAZZIOTTI - *Le dottrine di Democrito d'Abdera*.

Qualunque cosa si pensi intorno a ciò, lo studio della geometria, verosimilmente in seguito alla scoperta del metodo deduttivo, deve aver fatto rapidi progressi dopo PITAGORA, come appare da qualche frammento come quello sulle lunule di IPPOCRATE di Chio (circa 450 a. C.) che ci è stato conservato nel commento ad ARISTOTELE DI SIMPLICIO. D' altronde il riferimento sopra citato di PROCLO testimonia pure in questo senso: che prima di PLATONE, i geometri dovevano avere acquistato la maggior parte delle conoscenze che formano oggetto dei libri planimetrici euclidei. E ciò sebbene l' ordine delle dimostrazioni, non ancora soddisfacente alle più fini esigenze del rigore logico, dovesse presentarsi a quei più antichi studiosi assai diverso da quello che matura nell' opera del matematico alessandrino.

Un punto merita di attrarre specialmente la nostra attenzione. La polemica filosofica avverso i geometri del sofista PROTAGORA di Abdera e le preoccupazioni razionalistiche che si esprimono nei dialoghi di PLATONE, toccano il significato degli enti geometrici: se essi siano da ritenere come oggetti sensibili ovvero come intellegibili, di là di ogni possibile sensazione. La posizione di questo problema filosofico mostra che i geometri dovevano avere acquistato consapevolezza delle esigenze di una comprensione razionale degli enti che formano oggetto del loro studio: giacchè le proprietà di essi che, in una prima formulazione, appaiono evidenti, non possono assumersi come rigorosamente vere, se non si sostituiscono agli oggetti del senso altri enti idealizzati, quali sono il punto senza estensione, la linea senza larghezza ecc.

Pertanto si affaccia naturale la domanda se, nella stessa storia della scienza greca che possiamo in qualche modo ricostruire, si scorga ancora la traccia di uno studio empirico di pensiero, dove il punto sia ritenuto senz' altro come un granellino di sabbia, la linea come una successione di punti, ecc. A tale domanda si è indotti a dare risposta affermativa da due considerazioni:

1. Si è tramandata un' antica formula pitagorica per cui " le cose sono numeri ", e proprio questa formula — secondo l' interpretazione del TANNERY — dovrebbe indicare la costituzione della materia (o di quella materia primitiva che è oggetto della geometria) come formata da un aggruppamento

ordinato di punti-monadi, di piccola ma non nulla estensione.

2. Avverso questa concezione semiempirica di uno spazio discontinuo assume significato la polemica degli Eleati contro la pluralità, già iniziata da PARMENIDE [1], e poi proseguita da ZENONE, coi suoi celebri argomenti sul moto, che lo stesso TANNERY intende come riduzione all' assurdo della tesi pitagorica.

Le vedute sopra esposte debbono collegarsi con la scoperta delle grandezze incommensurabili (incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato) che pure si attribuisce a PITAGORA o ai primi pitagorici. Giacchè sembra verosimile che il pensiero ingenuo dovesse ritenere l' esistenza di un segmento per quanto piccolo (diciamo piccolo come un " punto ") costituente la comune misura di due segmenti qualsiansi.

Questa supposizione lascia pensare che i primi geometri della scuola italica (e forse lo stesso fondatore PITAGORA) siano giunti alla dimostrazione generale del teorema sui quadrati dei lati del triangolo rettangolo mercè la considerazione dei triangoli simili in cui il dato triangolo è diviso dalla sua altezza (perpendicolare all' ipotenusa). Soltanto una critica posteriore poteva comprendere ciò che occorre ad una siffatta dimostrazione per poter essere accolta come rigorosa.

Ci è dato quindi di riconoscere induttivamente per quali modificazioni sia passato l' ordinamento primitivo della geometria greca, per giungere al sistema euclideo. In questi passaggi si è fatto valere l' esigenza logica di fondare una teoria generale dei rapporti, che contempli il caso della incommensurabilità. E sappiamo che siffatta esigenza, cui risponde la teoria euclidea del libro V, fu assolta, prima che da EUCLIDE, dal matematico contemporaneo di PLATONE, EUDOSSO di Cnido.

Ma date le complicazioni e difficoltà che presenta la detta teoria dei rapporti, quando si voglia soddisfare al rigore eudossiano, si comprendono ora i motivi per cui EUCLIDE ha dovuto

---

(1) v. F. ENRIQUES: *La polemica eleatica per il concetto razionale degli enti geometrici,* " Periodico di Matematiche " 1923, n. 2. Inoltre: F. ENRIQUES: *L' evoluzione delle idee geometriche nel pensiero greco: punto, linea e superficie,* in: " Questioni riguardanti le matematiche elementari ", ZANICHELLI, Bologna, III ediz., 1924, Parte I, vol. I.

ricercare e trovare una nuova dimostrazione del teorema di PITAGORA, basata sulla teoria dell'equivalenza delle aree, quale è appunto la dimostrazione recata nel libro I degli Elementi, che PROCLO attribuisce esplicitamente all'istitutore degli Elementi stessi. Meglio ancora ci rende ragione dei motivi per cui EUCLIDE stesso, e verosimilmente già i suoi predecessori, sono stati tratti ad elaborare una teoria delle aree indipendente dalle proporzioni.

Le spiegazioni che precedono ci offrono una prospettiva per guardare al sistema degli Elementi siccome al frutto di uno sviluppo e di una elaborazione della geometria che essi riassumono e concludono: onde riescirà chiarito il senso delle critiche che si riferiranno nel seguito ai principii e ai più importanti teoremi. Tuttavia conviene aggiungere che l'opera d'EUCLIDE, che qui esponiamo, non esaurisce i progressi anteriori della geometria greca, che già al tempo del nostro geometra alessandrino (ed anche col contributo di lui stesso) aveva condotto — diciamo — ad una geometria superiore, concernente problemi e figure d'ordine più elevato. Infatti la geometria elementare (quale è definita per noi dal trattato euclideo) non costituisce affatto un campo chiuso, in cui ogni problema elementarmente posto riceva sempre una soluzione elementare (mercè la consueta considerazione delle intersezioni di rette e circoli) e dove le figure costruite o definite mercè operazioni elementari rientrino sempre nel campo delle figure studiate dalla stessa geometria elementare.

Citiamo il problema della duplicazione del cubo, che già IPPOCRATE di Chio ricondusse al problema piano della inserzione di due medie proporzionali fra due segmenti dati: e diciamo che questo problema (conducente ad un'equazione cubica irriducibile perciò non risolubile con radicali quadratici) non si lascia risolvere con retta e circolo. La sua soluzione richiede l'uso di linee d'ordine più elevato, quali sono le sezioni *coniche* ottenute segando il cono circolare retto, e così ha origine lo studio di queste curve, che escono dall'ambito della geometria elementare.

La teoria delle coniche, che costituisce l'edificio superiore della geometria greca, è stata, dopo ARISTEO ed EUCLIDE, sistematicamente sviluppata ed esposta da APOLLONIO di Perga.

F. ENRIQUES