Periodico di Matematiche - Serie VII - Volume 6 - Numero 1-2 - gennaio-giugno 2000

Esami di Stato 1999
Indirizzo Scientifico Ordinario
Prova Suppletiva

di F. Casolaro [1] - A. Fontana [2]

Introduzione

Come negli anni passati, ai candidati era richiesto di risolvere due dei tre problemi assegnati, avendo a disposizione cinque ore e potendo utilizzare una calcolatrice tascabile non programmabile.

TESTO del primo problema. *Data una semicirconferenza di centro O e di diametro AB=2, si assuma su di essa un punto C in modo che l'angolo $A\hat{O}C$ sia acuto. Indicata con φ l'ampiezza di tale angolo, siano:*

$$x = tg\,\frac{\varphi}{2},$$

y = raggio della circonferenza tangente tanto al diametro quanto, nel punto C, alla semicirconferenza.

Dopo aver dimostrato che il centro di tale circonferenza appartiene al raggio OC, si studi e si rappresenti graficamente la funzione y=f(x) senza tenere conto delle limitazioni di natura geometrica poste ad x dal problema.

[1] Università del Sannio - [2] Mathesis Napoli

Risoluzione. Sia γ la circonferenza di raggio OC e γ' la circonferenza tangente a γ in C e tangente al diametro di γ in un punto che indicheremo con H. Se O' è il centro di γ', la tangente comune a γ e γ' per C deve essere perpendicolare ai segmenti OC ed O'C e, per l'unicità della perpendicolare ad una retta da un punto, i segmenti OC ed O'C devono appartenere alla stessa retta. Dunque O' appartiene al raggio OC.Per costruire la funzione $y = f(x)$, i cui valori rappresentano il raggio di γ' al variare di φ, consideriamo il triangolo rettangolo O'OH (fig. 1).

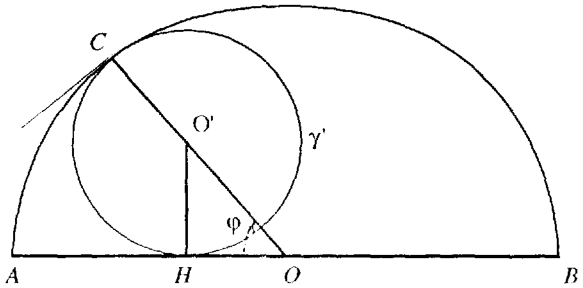

Fig. 1

Risulta.

$\overline{O'H} = y = \overline{O'O}$ sen φ ed essendo $\overline{O'O} = \overline{OC} - \overline{O'C} = 1 - y$, si ha:

$y = (1 - y)$ sen φ che dà, per y, il valore:

$$y = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi}.$$

Dalla nota relazione: $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{2tg\frac{\varphi}{2}}{1 + tg^2\frac{\varphi}{2}} = \dfrac{2x}{1 + x^2}$, si ha, in definitiva:

$$y = f(x) = \frac{\frac{2x}{1 + x^2}}{1 + \frac{2x}{1 + x^2}} = \frac{2x}{(1 + x)^2}.$$

Studio del grafico di $f(x) = \dfrac{2x}{(1+x)^2}$.

La $f(x)$ esiste $\forall\, x \in R - \{-1\}$, interseca gli assi cartesiani solo nell'origine, è negativa $\forall\, x \in\,]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$ ed è positiva $\forall\, x \in\,]0, +\infty[$. Poiché risulta:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty,$$

la retta di equazione $x = -1$, è asintoto verticale. Si ha poi:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

per cui l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra; pertanto non esistono asintoti obliqui.

Dallo studio della derivata prima:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4} = 2 \cdot \frac{1-x^2}{(1+x)^4},$$

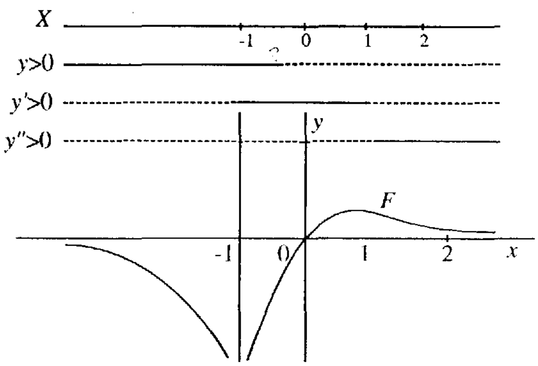

Fig. 2

si evince che $f(x)$ è:

- *strettamente crescente* $\forall\, x \in\,]-1, 1[$;
- *strettamente decrescente* $\forall\, x \in\,]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$;

e presenta un massimo relativo per $x = 1$.

Essendo $f(1) = 1/2$, il punto di massimo relativo è M $(1, 1/2)$, che risulta essere anche *massimo assoluto* in quanto $f(x) \leq 1/2$,

$\forall\, x \in X$. Per la concavità della curva si ha:

$$f''(x) = \frac{4\,(x-2)}{(x+1)^4}\,,$$

per cui $f(x)$ è concava $\forall\, x \in\ ]-\infty, -1[\cup]-1, 2[$, è convessa $\forall\, x \in\ ]2, +\infty[$, e presenta un flesso obliquo ascendente nel punto F (2, 4/9) (fig. 2).

TESTO del secondo problema. *Si deve costruire un recipiente a forma di cilindro circolare retto che abbia una capacità di 16π cm*^{3}*. Il candidato determini le dimensioni del recipiente che richiederanno la quantità minima di materiale. Verificato che il cilindro cercato è quello equilatero, si determinino la superficie ed il volume della sfera ad esso circoscritta. Considerate infine le formule* V = (4/3) πx^3 e $S = \pi x^2$ *che danno rispettivamente il volume di una sfera di raggio x e l'area di un cerchio sempre di raggio x, se ne illustrino i risultati della derivazione rispetto a x.*

Risoluzione. Indicato con V il volume, con S_t, S_l, S_b, rispettivamente l'area totale, l'area laterale, l'area di base del recipiente di altezza h e raggio di base r, si ha: $V = \pi\, r^2\, h = 16\,\pi$, da cui: $h = 16/r^2$,

$$S_t = S_l + 2\,S_b = 2\,\pi\, r\, h + 2\,\pi\, r^2$$

e quindi:

$$S_t = 2\pi\, r\left(\frac{16}{r^2} + r\right) = 2\pi\left(\frac{16 + r^3}{r}\right).$$

Posto $r = x$, si chiede di minimizzare la funzione $S(x) =$

$$= 2\pi\left(\frac{16 + x^3}{x}\right).$$

Risulta:

$$S'(x) = \frac{4\pi\,(x^3-8)}{x^2}\,,$$ per cui:

$S'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 8 = 0$, la cui unica soluzione reale $x = 2$ individua il punto di minimo per $S(x)$, in quanto:
$S'(x) > 0, \ \forall x \in]2, +\infty[$; $S(x)$ strettamente crescente.
$S'(x) < 0, \ \forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 2[$; $S(x)$ strettamente decrescente.

Per $x = 2$, si ha $h = 4$; pertanto il cilindro richiesto è quello equilatero (fig. 3).

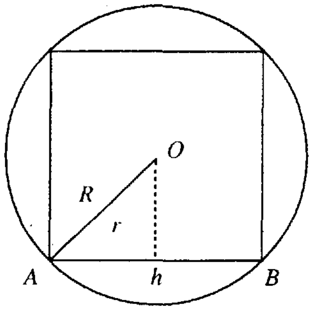

Fig. 3

Indicato con R_{sfera}, V_{sfera} ed S_{sfera} rispettivamente il raggio, il volume e l'area della superficie della sfera circoscritta al cilindro, si ha immediatamente:
$R_{sfera} = r_{cil}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$cm
$V_{sfera} = 4/3\ \pi r^3 = 4/3\ \pi\ (2\sqrt{2})^3 = (64/3\sqrt{2}\ \pi)$ cm^3
$S_{sfera} = 4\ \pi r^2 = (32\ \pi)$ cm^2.
In risposta all'ultimo punto del problema, risulta:
$V(x) = 4/3\ \pi x^3 \Rightarrow V'(x) = 4\ \pi x^2$,
che rappresenta *l'area della superficie sferica di raggio x.*
$S(x) = \pi x^2 \Rightarrow S'(x) = 2\ \pi x$,
che rappresenta *la lunghezza l della circonferenza di raggio x.*

È interessante notare che se nella espressione $S'(x) = 2\pi x = l$ eleviamo al quadrato ambo i membri, si ottiene la notevole relazione $4\pi^2 x^2 = l^2 \quad \Rightarrow \quad l^2/S(x) = 4\pi$, che stabilisce il rapporto tra il quadrato della lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio di raggio x, caso limite della relazione topologica più generale:[1] $l^2/S(x) \geq 4\pi$, cioè: "*Il rapporto tra il quadrato della lunghezza di* *una curva chiusa e l'area della superficie piana da essa limitata è sempre maggiore o uguale a 4π; vale l'uguaglianza nel caso che la curva sia una circonferenza".*

- **TESTO del terzo problema.** *L'informazione che si ha della parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ è tutta concentrata nel punto di ascissa $x = 5$ ed è: $f(5) = 0$, $f'(5) = -1$, $f''(5) = -1/2$;*
  - determinata la parabola e detti A e B i suoi punti di intersezione con l'asse x, calcolare l'area del triangolo ABC ove con C si è denotato il punto di incontro delle tangenti alla parabola in A e in B e stabilire il rapporto tra tale area e quella del segmento parabolico di base AB.
  - stabilire altresì il rapporto tra i volumi descritti dalle aree prima considerate per effetto della loro rotazione completa attorno all'asse x.

Risoluzione. Dalla formula di Taylor, riferita ad un polinomio di secondo grado di punto iniziale $x_0 = 5$, si ha immediatamente:
$f(x) = f(5) + [f'(5)/1!](x-5) + [f''(5)/2!](x-5)^2 =$
$= 0 + (-1)(x-5) + (-1/4)(x-5)^2$,
da cui: $y = (-1/4)x^2 + (3/2)x - 5/4$ è la parabola richiesta.

Ovviamente, si perviene all'equazione della parabola, anche operando per via analitica:
$f(x) = ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 2ax + b$; $f''(x) = 2a$.

Le condizioni nel punto di ascissa $x = 5$ sono:

$$\begin{cases} f(5) = 0 \\ f'(5) = -1 \\ f''(5) = -1/2 \end{cases} \quad \text{cioè:} \quad \begin{cases} 25a + 5b + c = 0 \\ 10a + b = -1 \\ 2a = -1/2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1/4 \\ b = 3/2 \\ c = -5/4 \end{cases}$$

che conferma il risultato ottenuto. La parabola:
$y = (-1/4)x^2 + (3/2)x - 5/4$,
ha vertice nel punto $V(3, 1)$, asse di equazione $x = 3$, fuoco $F(3,$

0), direttrice di equazione $y = 2$ e interseca gli assi cartesiani nei punti $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, $T(0, -5/4)$ (fig. 4).

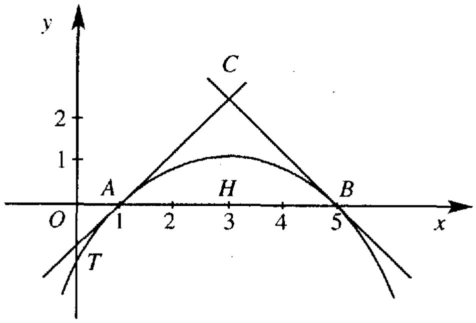

Fig. 4

L'equazione della tangente alla parabola nel punto di ascissa x_0 è:
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ in A $y - 0 = 1(x - 1)$
per cui, essendo $f'(1) = 1$, $f'(5) = -1$, le tangenti in A e B sono rispettivamente le rette di equazioni: $y = x - 1$; $y = -x + 5$,
che si intersecano nel punto $C(3, 2)$ e sono perpendicolari tra loro.
Pertanto, l'area del triangolo ABC, rettangolo in C ed isoscele sulla base AB, è data da:

$$S_{ABC} = (1/2)\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = (1/2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

del resto, indicato con H il piede della perpendicolare da C all'asse delle x, si ha immediatamente:
$S_{ABC} = (1/2)\,\overline{AB} \cdot \overline{CH} = 4$.

L'area del segmento parabolico di base AB è data da:

[1] *Per la dimostrazione vedi: E. Ambrisi – F. Casolaro: "Il tema di Matematica agli esami di Stato: questioni che emergono" – Atti del Congresso Nazionale Mathesis, Teramo 1999.*

$$\int_1^5 [(-1/4)\,x^2 + (3/2)\,x - (5/4)]\,dx = [(-1/12)\,x^3 + (3/4)\,x^2 - (5/4)\,x]_1^5 = 8/3,$$

che coincide col classico risultato di Archimede che dà l'area del segmento parabolico uguale ai 2/3 dell'area del rettangolo che lo circoscrive. Il solido V_1, ottenuto dalla rotazione completa del triangolo ABC attorno all'asse x, è l'unione dei coni aventi come base comune il cerchio di diametro CC' ed altezze (uguali tra loro) rispettivamente AH ed HB.

Tali coni sono simmetrici rispetto al piano perpendicolare all'asse delle x che contiene la retta CC' per cui risulta (fig. 5):
Vol $V_1 = 2\,[(1/3\,\pi)\,\overline{CH}^2 \cdot \overline{AH}] = (16/3)\,\pi$.

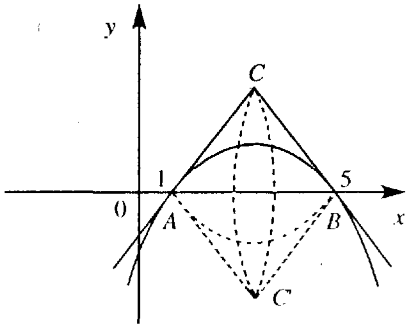

Fig. 5

Il solido V_2, ottenuto dalla rotazione completa del segmento parabolico attorno all'asse x, è dato da:

$$\text{Vol } V_2 = \pi \int_1^5 [-1/4\,x^2 + 3/2\,x - 5/4]^2\,dx =$$

$$= \pi \int_1^5 [(1/16)\,x^4 - (3/4)\,x^3 + (23/8)\,x^2 - (15/4)\,x + (25/16)]\,dx =$$

$$= \pi\,[(1/80)\,x^5 - (3/16)\,x^4 + (23/24)\,x^3 - (15/8)\,x^2 + (25/16)\,x\,]_1^5 = (32/15)\pi$$

e quindi: $V_2/V_1 = (16/3)\,\pi$ ◊ $15/32\pi = 5/2$.

Commento al tema.

Il primo problema richiede semplici considerazioni di geometria elementare e lo studio classico del grafico di una funzione algebrica razionale fratta.

Originali e di notevole interesse didattico sono il secondo ed il terzo problema.

Nel secondo problema, le relazioni che legano l'area di un cerchio ed il volume della sfera, rispettivamente alla lunghezza della circonferenza che delimita il cerchio ed all'area della superficie che delimita la sfera, sono suscettibili di ricche considerazioni da parte dei docenti:

- dal punto di vista storico, le tematiche legate al problema delle aree ed a quello delle tangenti (e quindi al significato geometrico di derivata) sono i due problemi classici che hanno condotto allo sviluppo dell'Analisi Matematica;
- dal punto di vista didattico, la relazione tra la lunghezza di una curva chiusa e l'area da essa limitata, con le successive considerazioni, toccano in modo semplice, moderne questioni di Topologia.

Relativamente al terzo problema, in cui sono assegnate le condizioni (cui deve soddisfare la curva) concentrate in un solo punto, l'utilizzo della formula di Taylor per i polinomi permette una soluzione più rapida e porta gli studenti a comprendere l'*importanza dello studio locale della funzione*. In particolare, nel caso dei polinomi, la variazione locale comporta anche il cambiamento delle condizioni globali; infatti, *se perturbiamo un polinomio in un punto (in termini analitici: se cambia il valore di una delle sue derivate in quel punto), il polinomio viene perturbato in ogni punto.*

Tali concetti sono alla base di semplici modelli matematici per le scienze applicate.