Sulla stabilità delle lavagne a cavalletto

Durante gli esami di Meccanica razionale (all'Università di Roma, in quest'ultima sessione estiva) una lavagna il cui cavalletto era molto divaricato minacciò di precipitare al suolo, scivolando per ulteriore divaricamento degli appoggi. Il fatto fermò naturalmente l'attenzione mia e dei colleghi di commissione, professori Armellini e Bisconcini, ponendoci un concreto problema di stabilità dell'equilibrio che non figura (o almeno non ci consta che figuri) nella pur tanto copiosa letteratura degli esercizi di statica elementare. In verità la questione rientra in tale ambito modesto; ma richiede una discussione un po' approfondita per cogliere l'andamento generale del fenomeno giungendo ad apprezzamenti quantitativi.

Mi permetto pertanto di segnalare insieme l'esercizio e la soluzione che ne ho elaborata.

1. - Specificazione del sistema materiale.

Una lavagna a cavalletto è schematicamente costituita (cfr. la Fig. 1) da un telaio piano (rigido) $CABDE$ e da un puntone posteriore CP_1 detto *gambo*, girevole a cerniera attorno a C. Il telaio si appoggia in A, B sopra un suolo orizzontale e sostiene una lastra rettangolare L (lavagna), schematicamente nello stesso piano del telaio, inserita nella scannellatura (orizzontale) DE. Il tutto è simmetrico rispetto al piano mediano, verticale in condizione di equilibrio, che passa per il gambo CP_1. Fissiamo la nostra attenzione su questo piano, rappresentandovi con CP_1 (cfr. la Fig. 2) il gambo, con CP la traccia del telaio, e quindi con P_1P la traccia (orizzontale) del terreno. Designeremo con O la proiezione (verticale) della cerniera C su P_1P; e ci riferiremo ad un sistema di assi cartesiani Oxy, di cui Ox coincida (in direzione e verso) coll'orizzontale OP, e Oy (pure in direzione e verso) colla verticale OC.

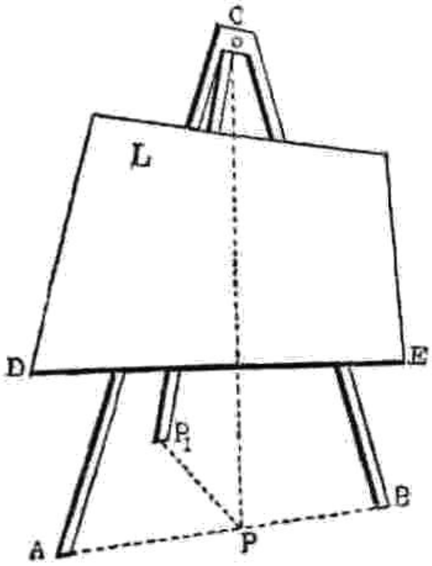

Fig. 1.

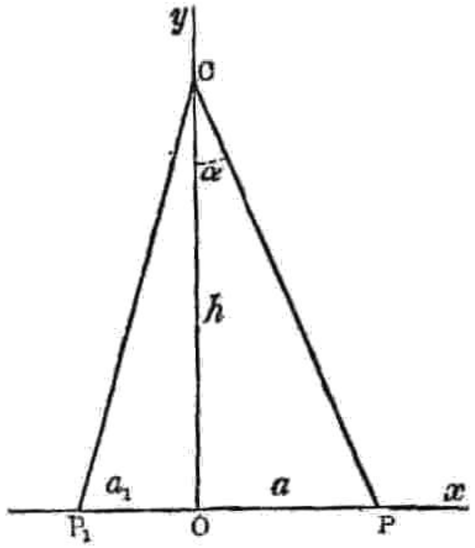

Fig. 2.

Dette a, a_1, h le lunghezze dei segmenti OP, OP_1, OC, le coordinate di P, P_1, C saranno rispettivamente (a, o), $(-a_1, o)$, (o, h).

Risguarderemo il telaio e la lavagna che vi è inserita come un unico sistema rigido (di traccia CP), cui è articolata, in C, l'asta, pure rigida, CP_1.

2. - Sollecitazione. Coefficiente d'attrito ridotto. Corrispondente margine di stabilità.

Abbiamo supposto ogni cosa, quindi anche la sollecitazione, simmetrica rispetto al piano mediano CPP_1. In conformità le forze applicate al telaio si compongono due a due in forze agenti nel piano mediano e applicate a punti della traccia CP (eventualmente prolungata). Le forze agenti sul gambo CP_1 sono poi (sempre per la simmetria) necessariamente contenute nel detto piano mediano Oxy. Si tratta quindi di un problema statico in questo piano, e tutto si riduce, per impostarlo, a tener conto delle tre equazioni cardinali relative alle due parti rigide CP (traccia del telaio) e CP_1 (gambo).

Specifichiamo anzi tutto le varie forze (esterne) agenti su ciascuna parte. Per il *telaio* avremo:

a) (*Peso*)

Il peso complessivo p del telaio e della lavagna di componenti $0, -p$ applicato nel baricentro G (del sistema telaio-lavagna). Di G si sa soltanto che è un punto interno al segmento CP.

b) (*Reazione del suolo*)

La reazione del suolo, applicata in P, che avrà una componente normale N (necessariamente rivolta verso l'alto, cioè nel senso positivo dell'asse Oy), e una componente tangenziale che designeremo con $-T$, perchè normalmente sarà diretta verso O, cioè negativa. Del resto non facciamo a priori ipotesi sul segno di T, tenendo invece presente la legge di attrito statico, la quale richiede $|T| \leq fN$, dove f designa il coefficiente d'attrito negli appoggi A e B (lo stesso nei due posti, per l'ipotesi della simmetria).

Volendo che sia assicurato non solo l'equilibrio degli appoggi (del punto P nella nostra rappresentazione piana), ma anche un certo margine di fronte a eventuali perturbazioni accidentali tendenti a farli scivolare, converrà sostituire ad f una frazione k alquanto più piccola, ritenendo la precedente disuguaglianza sotto la forma

$$(1) \qquad |T| \leq kN,$$

con k $(< f < 1)$ *costante ben determinata* che chiameremo *coefficiente ridotto* (¹).

(¹) Un tale criterio equivale a fissare a priori (per una eventuale sollecitazione orizzontale tendente a perturbare l'equilibrio) un margine *unitario* ben determinato, rappresentato dalla differenza $f-k$. E questo è un criterio astrattamente soddisfacente. Per altro può benissimo accadere che si sia invece in grado di antecipare un apprezzamento sull'entità assoluta τ della perturbazione contro cui conviene premunirsi. In tal caso si dovrebbe risguardarsi τ, cioè in sostanza $(f-k)N$ (e non il margine unitario $f-k$) come un dato della questione. La disuguaglianza caratteri-

c) (*Forza vincolare in C*)

Una forza di componenti X, Y applicata nella cerniera C, che rappresenta l'azione del gambo sul telaio [2].

d) (*Perturbazione accidentale*)

Altre forze addizionali (esercitate per es. da chi scrive sulla lavagna), di cui indicheremo le caratteristiche con $-u$, $-v$, M. Si intende che $-u$, $-v$ designano le componenti orizzontale e verticale del risultante: ho premesso il segno $-$ perchè normalmente (cioè quando si preme scrivendo sulla lavagna) u e v risultano positivi. M (pure positivo nell'esemplificazione che abbiamo in vista) rappresenta il momento (scalare) rispetto al punto P, ossia rispetto ad un asse Pz, ortogonale al piano della figura e tale che, rispetto a Pz, la coppia Oxy apparisca destrorsa.

Sul *gambo* CP_1 agiranno forze analoghe, salvo che non c'è luogo a considerare sollecitazioni addizionali. Avremo pertanto:

a_1) il *peso* p_1 applicato al baricentro G_1 di CP_1;

b_1) la *reazione* del suolo di componenti T_1, N_1, fra cui deve essere soddisfatta la disuguaglianza, analoga alla (1),

$$|T_1| \leq kN_1, \tag{2}$$

supponendo che anche all'appoggio P_1 si abbia lo stesso coefficiente d'attrito ridotto, che vale (per A, B, e quindi) per P;

---

stica sarebbe in conformità, non la (1), ma

$$|T| + \tau \leq fN,$$

con τ costante positiva prestabilita. Ne risulterebbe un po' più laboriosa la discussione dei nn. seguenti. Perciò noi ci atteniamo alla (1), non senza rilevare che, nel nostro problema, si potrà, volendo, ottemperare *a posteriori* anche alla condizione testè accennata, sfruttando le formule risolutive, che fissano in particolare la dipendenza di N da k, e scegliendo poi (in quanto possibile) il valore numerico di k abbastanza piccolo perchè $(f-k)N$ non risulta inferiore a τ.

[2] Considerando questa azione rappresentata da una sola forza applicata in C (senza coppia), veniamo in particolare a *trascurare l'attrito del perno*. Ciò è giustificato a doppio titolo: sia perchè, nel caso concreto, questa influenza non è rilevante rispetto alle altre forze in gioco; sia perchè, trascurandola, si agisce comunque in favore della stabilità. Cfr. Levi-Civita e Amaldi: *Lezioni di meccanica razionale*, vol. I, [Bologna: Zanichelli, 1923], pp. 530, 551.

e_1) la *forza vincolare*, proveniente dal collegamento col telaio in C, la quale, per il principio di reazione, ha le componenti $-X$, $-Y$.

3. - Equazioni cardinali.

Per il *telaio*, esprimendo che si annulla il risultante di tutte le forze esterne, abbiamo, in base ad a), b), c), d):

$$-T+X-u=0, \tag{I}$$

$$-p+N+Y-v=0. \tag{II}$$

L'equazione dei momenti, ove si assuma per polo il punto P, è (con evidente significato della notazione)

$$\Sigma[(x-a)Y-yX]+M=0.$$

Possiamo calcolare materialmente i vari termini del sommatorio (tre nel caso nostro), o anche, in modo più espressivo, formare rispetto a P i momenti intensivi (prodotto della forza per il braccio di leva) delle forze a) e c) (la reazione del suolo b) non portando alcun contributo), e prenderli col segno $+$ o col segno $-$, secondochè (per un osservatore che guarda dall'alto la figura 2) il senso di rotazione apparisce destrorso o sinistrorso. Si ha così, designando l'ascissa del baricentro G del telaio (che è necessariamente compresa fra 0 ed a) con $(1-\lambda)a$ (λ frazione propria):

$$\lambda ap - aY - hX + M = 0. \tag{III}$$

Per il *gambo*, ponendo eguali a zero le due componenti del risultante, si ha

$$T_1 - X = 0, \tag{I$_1$}$$

$$-p_1 + N_1 - Y = 0. \tag{II$_1$}$$

Se poi si indica con $(1-\lambda_1)a_1$ l'ascissa del baricentro G_1 del gambo (λ_1 frazione propria, eguale ad $\frac{1}{2}$ nel caso di un gambo omogeneo) e si eguaglia a zero il momento risultante rispetto al polo P_1, cioè il sommatorio

$$\Sigma[(x+a_1)Y-yX],$$

si ha

$$-\lambda_1 a_1 p_1 - a_1 Y + hX = 0. \tag{III$_1$}$$

4. - Risoluzione delle equazioni cardinali rispetto a X, Y; N, N_1; T, T_1.

Le reazioni d'attrito T, T_1 entrano soltanto nelle (I), (I$_1$) e rimangono da queste definite per la X sotto la forma

$$T = X - u, \quad T_1 = X. \tag{3}$$

Le (III), (III$_1$) si possono risolvere rispetto ad X, Y e danno

$$X = \frac{\lambda p + \lambda_1 p_1 + \frac{1}{a} M}{\frac{h}{a} + \frac{h_1}{a_1}}, \tag{4}$$

$$Y = \frac{\lambda a p - \lambda_1 a_1 p_1 + M}{a + a_1}. \tag{5}$$

Portando questo valore di Y in (II) e (II$_1$), se ne ricavano le seguenti espressioni delle reazioni normali N ed N_1:

$$N = \left(1 - \lambda \frac{a}{a+a_1}\right) p + \lambda_1 \frac{a_1}{a+a_1} p_1 - \frac{1}{a+a_1} M + v, \tag{6}$$

$$N_1 = \lambda \frac{a}{a+a_1} p + \left(1 - \lambda_1 \frac{a_1}{a+a_1}\right) p_1 + \frac{1}{a+a_1} M. \tag{7}$$

Le equazioni (3) [in cui si risguardi X definito dalla (4)], (5), (6), (7) equivalgono manifestamente alle originarie equazioni cardinali, e, insieme colle disuguaglianze (1), (2) esauriscono tutte le condizioni di equilibrio.

5. - Considerazioni sulle disuguaglianze caratteristiche (1), (2). Parametro lagrangiano α delle configurazioni del sistema.

Trasformiamo un po' le disuguaglianze (1), (2) in modo da metterne meglio in evidenza la portata. Dacchè, a norma della (4) (e dell'ipotesi fatta al n. 2 circa il senso del momento perturbatore M), la X risulta essenzialmente positiva, la disuguaglianza (2), badando alla seconda delle (3), si scrive più semplicemente

$$X \leq kN_1 . \tag{2'}$$

D'altra parte va tenuto presente che, a equilibrio raggiunto, la componente orizzontale u della sollecitazione addizionale (che abbiamo supposto ≥ 0) deve in particolare poter essere nulla. Con ciò la (1) implica intanto

$$X \leq kN, \tag{1'}$$

dopo di che la (1) stessa si riduce ad una limitazione dei valori (positivi) che può assumere u senza compromettere l'equilibrio, cioè a

$$u \leq X + kN. \tag{8}$$

Prima di chiudere l'impostazione generale va rilevato che, nelle formule finali, conviene far apparire, al posto di a, a_1, h, due costanti puramente strutturali del sistema quali l'*apotema l del telaio* (*lunghezza della sua traccia CP*) e la *lunghezza l_1 del gambo*, e inoltre un parametro lagrangiano atto a fissare la configurazione del sistema nelle supposte condizioni di appoggio: per esempio l'*inclinazione* $\alpha = \widehat{PCO}$ (cfr. Fig. 2) della traccia CP del telaio sulla verticale. Si ha allora, per definire l'analoga inclinazione α_1 del gambo CP_1 e la quota h della cerniera C,

$$l_1 \cos \alpha_1 = l \cos \alpha = h, \tag{9}$$

mentre risulta

$$a = l \sin \alpha, \quad a_1 = l_1 \sin \alpha_1 . \tag{10}$$

6. - Ipotesi semplificatrici consentite nei casi usuali. Conseguenti limiti superiori per l'inclinazione α e pel momento perturbatore M.

Non sembra agevole, almeno a prima vista, una discussione espressiva delle disuguaglianze (1'), (2') per valori qualunque dei dati della questione: l, l_1; p, p_1; λ, λ_1. Conviene quindi tener conto di alcune semplificazioni sensibilmente verificate per le ordinarie lavagne a cavalletto. Noi ammetteremo precisamente:

1° che p_1 (peso del gambo) sia trascurabile di fronte a p (peso complessivo del telaio e della lavagna);

2° $a_1 = a$.

Con ciò la (4), avuto riguardo alle (9) e (10), diviene

$$X = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \left\{ \lambda p + \frac{1}{a} M \right\}, \tag{4'}$$

mentre le (6) e (7) si semplificano come segue:

$$N = \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right) p - \frac{1}{2a} M + v, \tag{6'}$$

$$N_1 = \frac{1}{2} \left\{ \lambda p + \frac{1}{a} M \right\}. \tag{7'}$$

La (2') assume in conformità l'aspetto particolarmente semplice

$$\operatorname{tg} \alpha \leq k.$$

Indicando con χ l'angolo $\left(< \frac{\pi}{4}\right)$ che ha per tangente la frazione k, il quale si dirà *angolo di attrito, ridotto,* potremo ritenere la disuguaglianza precedente sotto la forma definitiva

$$\alpha \leq \chi, \tag{11}$$

con χ costante prefissata.

Si noti che, per essere (n.° 2) $k < f$, sarà $\chi < \varphi$, designandosi al solito con φ l'angolo d'attrito negli appoggi ($\operatorname{tg} \varphi = f$). Se ci si accontentasse del sussistere dell'equilibrio (senza margine di sicurezza di fronte a cause perturbatrici tendenti a far scivolare gli appoggi), si avrebbe $k = f$ e si sarebbe condotti alla limitazione $\alpha \leq \varphi$. L'esigenza della stabilità dà luogo, come si vede, alla circostanza più restrittiva che *l'inclinazione* α *sulla verticale* (la quale, data l'ipotesi $\alpha_1 = \alpha$ è la stessa per la traccia del telaio e per il gambo) *non deve superare l'angolo d'attrito ridotto* χ. Ciò equivale a dire che *sia la traccia del telaio che il gambo devono star dentro non soltanto ai coni d'attrito dei rispettivi appoggi, ma addirittura dentro (o sopra) alle superficie coniche coassiali di semiapertura* χ.

Soddisfatta questa condizione, la (1') si traduce in una limitazione superiore per l'eventuale momento perturbatore M. Infatti, portandovi per X e per N i valori (4') e (7') e badando alla prima delle (10), essa può scriversi

$$M \leq plF(\alpha, k, \lambda), \tag{12}$$

dove

$$F(\alpha, k, \lambda) = \sin\alpha \left\{ \frac{k}{k + \operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{2}\lambda \right\}. \tag{13}$$

7. - Inclinazione di massima sicurezza. Studio della F come funzione di α.

Dalle (12) e (13) apparisce che, per lasciare al momento perturbatore M il massimo margine di cui è suscettibile (per una data lavagna, ossia per valori prefissati di p, l, k, λ), conviene disporre di α in modo da attribuire al secondo membro della (12) e per esso alla F, la quale si annulla per $\alpha = 0$ e rimane positiva nell'intervallo $(0, \chi)$ dell'argomento α, il massimo dei valori che essa può assumere in questo intervallo.

All'uopo cominciamo col derivare la (13) rispetto ad α, il che dà

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \frac{k}{(k + \operatorname{tg}\alpha)^2} + \cos\alpha \left\{ \frac{k}{k + \operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{2}\lambda \right\}.$$

Ove, nel secondo membro, si raccolga $k \cos\alpha$ a fattore e si ponga per brevità di scrittura

$$\operatorname{tg}\alpha = z, \tag{14}$$

$$Z(z) = \frac{k - z^3}{(k+z)^2} - \frac{\lambda}{2k}, \tag{15}$$

si ha identicamente

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = k \cos\alpha \, Z(z). \tag{16}$$

La posizione (14) consente di risguardare α come funzione di z, la quale va sempre crescendo da 0 a χ, mentre z cresce da 0 a k. Nell'intervallo $(0, \chi)$ di α, si ha costantemente $\cos\alpha > 0$, talchè il segno e le eventuali radici di $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$ nel detto intervallo corrispondono a quelli di Z nell'intervallo $(0, k)$ dell'argomento z.

Ora la (15), derivando, ci dà

$$Z'(z) = -\frac{3z^2}{(k+z)^2} - \frac{2(k - z^3)}{(k+z)^3},$$

da cui apparisce che Z' è sempre negativa per z compresa fra 0 e k.

Perciò $Z(z)$ va sempre decrescendo nell'intervallo a partire dal valore

$$Z(0) = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right) > 0.$$

Se anche il valore minimo

$$Z(k) = \frac{1}{2k}\left\{\frac{1-k^2}{2} - \lambda\right\} \tag{17}$$

è positivo (o nullo), cioè se

$$\lambda \leq \frac{1-k^2}{2}, \tag{18$_a$}$$

allora segue dalla (16) che F va sempre crescendo con α, sicchè il massimo è raggiunto per $\alpha = \chi$, ed è

$$(19_a) \qquad F^* = \frac{1}{2}(1-\lambda)\sin\chi.$$

Se invece

$$(18_b) \qquad \lambda > \frac{1-k^2}{2},$$

allora, per la (17), $Z(k) < 0$, e la funzione $Z(z)$ che decresce sempre al crescere di z da 0 a k, attraversa certamente una volta (e una volta soltanto) il valore zero. Dicasi z^* questa radice di $Z(z)$, e α^* il corrispondente valore (14). In base alla (16), sarà $\frac{\partial F}{\partial \alpha} > 0$ per $\alpha < \alpha^*$, $\frac{\partial F}{\partial \alpha} > 0$ per $\alpha > \alpha^*$, talchè la F ammette effettivamente un massimo (ed uno soltanto) in corrispondenza ad $\alpha = \alpha^*$; il quale massimo, in base alla (13), ha il valore

$$(19_b) \qquad F^* = \sin\alpha^* \left\{ \frac{k}{k + \operatorname{tg}\alpha^*} - \frac{1}{2}\lambda \right\}.$$

8. - Distinzione delle lavagne in due classi. Diverso loro comportamento di fronte alla stabilità dell'equilibrio.

Ove si ricordi (n.° 3) che $(1-\lambda)a$ designa l'ascissa del baricentro G del telaio (lavagna compresa), con che λh ne è l'ordinata, si può dire che λ rappresenta la frazione di altezza (a partire dal suolo), in corrispondenza a cui cade il baricentro.

Nel caso di una lavagna, posta a metà del telaio, si ha (almeno sensibilmente, ossia trascurando il peso del telaio di fronte a quello della lavagna) $\lambda = \frac{1}{2}$. Ma si può benissimo alzare o abbassare la lavagna, spostando (Fig. 1) la scannellatura DE, in modo da rendere λ sia maggiore che minore di $\frac{1}{2}$. In pratica, onde dare comodità a chi scrive, senza spreco di materiale, si tiene $\lambda > \frac{1}{2}$, press' a poco intorno a $^2/_3$, sicchè ci si trova nella eventualità (18_b). Comunque, giova considerare anche la (18_a), facendole corrispondere la qualifica *lavagna bassa*, mentre alla (18_b) fa naturalmente riscontro la qualifica opposta *lavagna alta*. Usando queste locuzioni il risultato qualitativo della precedente discussione si può riassumere come segue:

Per lavagne basse, il massimo valore M^* di M è raggiunto quando l'inclinazione sulla verticale è uguale all'angolo di attrito ridotto χ. Si ha allora, in base alle (12) e (19_a)

$$(20_a) \qquad M^* = pl\frac{1}{2}(1-\lambda)\sin\chi.$$

Notiamo incidentalmente che, in virtù della (10), $l \sin\chi(1-\lambda)$ non è che l'ascissa del baricentro G, sicchè la (20_a) fornisce quale margine di sicurezza la metà del momento del peso della lavagna (telaio compreso) rispetto al vertice C, margine, caeteris paribus tanto maggiore quanto più basso è il baricentro.

Le cose vanno diversamente per *lavagne alte* $\left(\lambda > \frac{1-k^2}{2}\right)$. C'è in tal caso un optimum di inclinazione $\alpha^* < \chi$. In corrispondenza a quest' α^*, la (12) dà, per il momento perturbatore, il margine massimo

$$(20_b) \qquad M^* = plF^*,$$

con F^* definita dalla (19_b).

Per completare questo secondo risultato, conviene anzi tutto rendersi conto del modo in cui $F^*(\alpha^*, k, \lambda)$ varia con k e con λ, si intende per lavagne alte, ossia per λ soddisfacente alla (18_b) e quindi compreso fra $\frac{1-k^2}{2}$ e l'unità. All'uopo formiamo le $\frac{dF^*}{dk}$, $\frac{dF^*}{d\lambda}$, tenendo conto che α^* è funzione di k e di λ. Siccome però $\frac{\partial F^*}{\partial \alpha^*} = 0$, così

$$\frac{dF^*}{dk} = \frac{\partial F^*}{\partial k}, \quad \frac{dF^*}{d\lambda} = \frac{\partial F^*}{\partial \lambda},$$

e la (19_b) ci dà semplicemente

$$\frac{dF^*}{dk}=\frac{\sin\alpha^*\,\mathrm{tg}\,\alpha^*}{(k+\mathrm{tg}\,\alpha^*)^2},\quad \frac{dF^*}{d\lambda}=-\frac{1}{2}\sin\alpha^*,$$

mostrando che, nell'ambito dei valori che ci interessano, la prima è sempre positiva e la seconda sempre negativa. Di qua e dalla (20_b), da un lato la circostanza intuitivamente evidente che M^* cresce con k, cioè al crescere dell'attrito degli appoggi (più precisamente di quella parte su cui si fa assegnamento); d'altro lato la constatazione che M^* decresce al crescere di λ. Sarà dunque buona norma costruttiva di rendere λ quanto più piccola è possibile compatibilmente colle altre esigenze pratiche, cioè di abbassare il baricentro del sistema per quanto è consentito dalle dette esigenze. Tenendone conto, si è condotti a prendere, come poc'anzi abbiamo accennato, $\lambda > \frac{1}{2}$ (press'a poco intorno ai $^2/_3$) e ci si trova quindi nell'ambito di validità della (18_b) (lavagne alte).

9. - Caso ordinario di lavagne alte. Determinazione quantitativa dell'inclinazione più conveniente. Esempio numerico.

In base a quanto precede, nella eventualità (18_b), la tangente trigonometrica dell'inclinazione α^* di massima sicurezza è fornita dalla radice z^* (compresa fra 0 e k) dell'equazione (15), la quale, liberata dai denominatori, assume la forma

$$z^3+\frac{2k}{\lambda}(k+z)^2-k=0, \tag{15'}$$

di terzo grado in z.

Lo studio qualitativo della radice z^* essendo stato fatto esaurientemente, non resta che esplicitarne l'espressione formale, ricorrendo alla formula cardanica.

Perciò si comincia a porre

$$z=3-\frac{\lambda}{6k}, \tag{21}$$

con che

$$k + z = \mathfrak{z} + \frac{6k^2 - \lambda}{6k}$$

e si è ridotti alla forma canonica

$$\mathfrak{z}^3 + \mathfrak{p}\mathfrak{z} + \mathfrak{q} = 0, \tag{15''}$$

dove

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{p} &= \lambda\left(1 - \frac{\lambda}{12k^2}\right), \\ \mathfrak{q} &= -\left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right)k - \frac{1}{6}\frac{\lambda^2}{k} + \frac{1}{108}\frac{\lambda^3}{k^3}. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Nelle circostanze usuali si può ritenere l'attrito abbastanza rilevante; certo tale che (pur essendo k il coefficiente di attrito ridotto) $12k^2$ sia (parecchio) superiore all'unità. Con ciò, in base alla prima delle (22), $\mathfrak{p}$ va ritenuto sempre positivo, sicchè risulta pure positiva la quantità

$$r^2 = \frac{\mathfrak{q}^2}{4} + \frac{\mathfrak{p}^3}{27} \tag{22}$$

(discriminante, cambiato di segno). La (15'') possiede pertanto una sola radice reale, fornita senza ambiguità dalla nota formula cardanica. Badando alla (21), avremo in definitiva

$$z^* = \left(-\frac{\mathfrak{q}}{2} + r\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{\mathfrak{q}}{2} - r\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\lambda}{6k}, \tag{23}$$

in cui ai radicali va attribuito il valore aritmetico.

Assumiamo a titolo d'esempio

$$k = \frac{1}{3}, \quad \lambda = \frac{3}{2}.$$

Le (15') e (15'') si riducono rispettivamente a

$$z^2 + \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = 0,$$

$$\mathfrak{z}^3 + \frac{1}{3}\mathfrak{z} - \frac{10}{27} = 0.$$

essendo

$$z + \frac{1}{3} = 3.$$

Si ha quindi

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{3}, \quad \mathfrak{q} = -\frac{10}{27}, \quad r^2 = \frac{26}{27^2},$$

$$z^* = \frac{1}{3}\left\{(5 + \sqrt{26})^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{26} - 5)^{\frac{1}{3}}\right\} - \frac{1}{3} = 0{,}23302.$$

Tale essendo la tangente trigonometrica della inclinazione α^* di massima sicurezza, risulta

$$\alpha^* = 13°7'1'',2,$$

e quindi, a norma della (19_b),

$$F^* = 0{,}057786,$$

sicchè il momento di sicurezza M^* è questa frazione $\left(\text{un po' più che } \frac{1}{20}\right)$ di pl.

Roma, R. Università.

TULLIO LEVI-CIVITA