

I FONDAMENTI DELLA MATEMATICA

Concettina Gaccetta¹

Sunto: La scoperta delle geometrie non euclidee ha dimostrato la possibilità di formulare più teorie ugualmente coerenti, riferite agli stessi enti matematici. Di conseguenza si rese necessario ripensare il ruolo della verità e della coerenza nell'intera conoscenza matematica. Seguendo due percorsi differenti, Church e Turing hanno dimostrato che solo le teorie matematiche più elementari sono decidibili.

Abstract: The not euclidian geometry's discovery has demonstrated the possibility to formulate many theories which are equally consistent and related to the same mathematical elements. Following two different ways, Church and Turing have demonstrated that only the most elementary mathematical theories are decidable.

Parole chiave: teoria formale, numero di Gödel, funzioni ricorsive, funzioni calcolabili.

1. INTRODUZIONE

In questo lavoro descrivo un modulo riguardante il problema dei fondamenti della matematica, da svolgere durante l'ultimo anno della scuola secondaria superiore. Il percorso didattico richiede un tempo di 10 ore. Le modalità di lavoro possono essere lezioni frontali e interattive, le attività comprendono lavori individuali e di gruppo. Particolare

¹ Concettina Gaccetta – Catanzaro – Liceo Scientifico Statale “L. Siciliani”
cgaccetta@inwind.it

attenzione si deve porre nella verifica dei risultati d'apprendimento, per adeguare il percorso didattico alla situazione didattica registrata.

Lo scopo di questo lavoro non vuole essere quello di esaurire l'ampio tema dei fondamenti della matematica (non si accenna ad esempio al logicismo di Frege, Russel o all'intuizionismo di Kroneker e Brouwer) bensì quello di proporre particolari tratti della problematica, con l'augurio di suscitare negli studenti il desiderio di approfondire e nel caso consigliare testi specializzati di matematica e di filosofia.

2. MODULO: I FONDAMENTI DELLA MATEMATICA

PREREQUISITI

- Conoscere la struttura assiomatico-deduttiva degli “Elementi” di Euclide;
- Conoscere le geometrie non euclidee;
- Conoscere elementi di logica.

UNITÀ1: I SISTEMI FORMALI

CONOSCENZE

Comprendere il ruolo degli assiomi nella matematica classica e moderna;
Descrivere le caratteristiche di una teoria formale;
Comprendere il significato del formalismo di D. Hilbert;
Comprendere il diverso significato di “dimostrabilità” e “verità” di un'espressione.

COMPETENZE

- Saper distinguere tra la sintassi di una teoria matematica e la semantica della teoria.
- Saper determinare la tavola di verità di semplici proposizioni logiche;
- Saper verificare se un'espressione è una tautologia;
- Saper verificare se un'espressione è una contraddizione.

CONTENUTI:

Dall'assiomatica classica all'assiomatica moderna;
Il formalismo di D. Hilbert;
Le proprietà generali dei sistemi formali;
Il calcolo delle proposizioni come esempio di teoria formale.

UNITÀ2: IL PROBLEMA DELLA COMPLETEZZA

CONOSCENZE

- Conoscere l'esigenza dello sviluppo delle teorie formali;
- Conoscere gli assiomi del "calcolo del primo ordine con identità";
- Comprendere l'importanza del teorema di Gödel.

COMPETENZE

- Saper dimostrare partendo dagli assiomi semplici proposizioni;
- Saper interpretare simboli;
- Saper determinare il numero di Gödel per un simbolo, per una formula e per una sequenza di formule.

CONTENUTI:

Il calcolo dei predicati;
Il teorema di Gödel;
La centralità dell'aritmetica nella logica attraverso la codifica di Gödel.

UNITÀ3: DECIDIBILITÀ, MACCHINE DI TURING E TESI DI CHURCH.

CONOSCENZE

- Definire le funzioni calcolabili;
- Descrivere le caratteristiche di base della "macchina di Turing";
- Definire le funzioni ricorsive.

COMPETENZE

- Saper utilizzare una macchina di Turing in casi semplici;
Saper determinare se una funzione $f(x)$ con dominio N e a valori naturali è calcolabile.

CONTENUTI:

Il problema della decisione delle teorie formali e le funzioni calcolabili;
La macchina di Turing;
Le funzioni ricorsive e la tesi di Church.

3. IL MODULO A GRANDI LINEE

Con la scoperta delle geometrie non euclidee da un lato e della teoria degli insiemi dall'altro, sorse il problema di cercare una base dell'intera costruzione matematica.

Nel corso dell'Ottocento, l'assiomatica classica è sostituita dall'assiomatica moderna:

- La prima era fondata su assiomi evidenti, che garantivano la verità e la coerenza (da assiomi veri non si potevano dedurre contraddizioni, secondo il noto principio logico conosciuto già da Aristotele). L'unicità della geometria euclidea garantiva la validità di una tale assiomatica.
- La seconda sceglieva gli assiomi non in base alla loro presunta evidenza, ma in modo non contraddittorio. Essi erano enunciati, né veri né falsi, scelti liberamente come base dell'intero edificio.

Il particolare, la coerenza dei sistemi ipotetico-deduttivi, che nell'assiomatica classica era diretta conseguenza della “visibile” verità degli assiomi, diventava invece nel contesto moderno qualcosa da garantire nella costruzione delle teorie su basi convenzionali.

Tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento, il matematico D. Hilbert (1862-1943) elaborò un ambizioso programma, che si prefiggeva di individuare il fondamento dell'intera matematica. Egli riteneva che in matematica tutto potesse e dovesse essere dimostrato partendo da assiomi fondamentali, senza incorrere a contraddizioni.

Egli ebbe come fine quello di fornire una base al sistema numerico senza far uso della teoria degli insiemi, e di stabilire la coerenza dell'aritmetica. A capo della scuola formalista, Hilbert e i suoi allievi consideravano la matematica come un insieme di sistemi formali, ciascuno dei quali ha i propri concetti, assiomi, regole di deduzione dei teoremi e teoremi.

I formalisti dimostrarono la coerenza di semplici sistemi formali, ma non raggiunsero la meta della coerenza dell'aritmetica.

Si spiega, nel proseguo del modulo, cosa si intende per teoria matematica formalizzata, la distinzione tra sintassi di una teoria matematica e semantica della teoria, e le proprietà della teoria formale: coerenza, completezza, e decidibilità.

Il calcolo delle proposizioni è un esempio di teoria formale che po-

trebbe essere proposto: si definiscono i simboli del linguaggio, i criteri di formazione delle espressioni, gli assiomi della teoria, le regole di inferenza con cui, a partire dagli assiomi, si deducono altre espressioni.

La seconda unità didattica del modulo riguarda il problema della completezza. Il calcolo proposizionale risulta non adatto a costituire la base dell'aritmetica e della matematica in generale; necessita, infatti, di nuovi elementi linguistici che consentano, innanzitutto, di studiare la struttura interna delle proposizioni.

La teoria formale più semplice che si ottiene facendo uso di predicati e quantificatori è il *“calcolo dei predicati del primo ordine”*. Anche se essa ha un linguaggio più ricco di quello della teoria del calcolo proposizionale e un insieme di assiomi più ampio, anche questa teoria non è adeguata per la costruzione di una teoria formale dell'aritmetica. Mancano gli elementi “non logici” che servono a caratterizzare le proprietà dei numeri naturali: lo zero, il successore di un numero, le operazioni di addizione e moltiplicazione e il principio di induzione. Si ottiene così la teoria formale del *“calcolo del primo ordine con identità”*.

Il programma di Hilbert di ottenere una teoria **S**, coerente e completa, che esprima l'aritmetica elementare fallì quando, nel 1931 Kurt Gödel (1906-1978), uno dei maggiori logici e filosofi contemporanei, all'età di soli 25 anni, pubblicò uno scritto che conteneva il “teorema di incompletezza sintattica”:

Ogni teoria formale in grado di esprimere l'aritmetica è incompleta, ossia esistono formule in tale teoria, che non sono né dimostrabili né refutabili.

Gödel aveva dimostrato che cercare di creare un sistema matematico completo e coerente era un compito impossibile.

Per comprendere meglio il teorema di Gödel si può ricorrere a un analogo paradosso della logica greca antica, attribuito a Epimenide di Creta e noto come il *“paradosso del Mentitore”*.

Si introduce, inoltre, il numero di Gödel: numero naturale attribuito ad ogni simbolo di un alfabeto *“minimo”* che sia costituito da determinati segni, ai quali diamo un preciso significato. Seguendo poi una precisa regola, ad ogni formula sarà attribuito un numero naturale, ed in modo analogo sarà codificata anche una sequenza di formule. Non interessa tuttavia il calcolo dei numeri di Gödel, ma comprendere

che è possibile costruire una scrittura in cui le formule del linguaggio sono codificate in un opportuno numero naturale in modo univoco.

L'importanza della codifica introdotta da Gödel nel 1931 consiste nell'evidenziare la possibilità di "aritmetizzare" il linguaggio di una teoria, traducendo simboli e formule in numeri naturali.

A questo punto, per comprendere pienamente la rilevanza del teorema di Gödel si potrebbero illustrare le linee del suo ragionamento:

- a) attraverso il numero di Gödel è possibile codificare tramite numeri e formule aritmetiche anche proposizioni *sulla* matematica;
- b) tra le diverse formule, è possibile costruire una formula aritmetica, denominata G , che, una volta decifrata, significa "*la formula G non è dimostrabile*";
- c) si può costruire una formula aritmetica, denominata A , che, una volta decifrata, significa: "*L'aritmetica è consistente*";
- d) si può dimostrare l'implicazione $A \Rightarrow G$ che, una volta interpretata, significa: "*Se l'aritmetica è consistente, allora G non è dimostrabile*".
- e) Ma la formula A è indimostrabile. Infatti, se A fosse dimostrabile, allora, avendo già dimostrato $A \Rightarrow G$, si avrebbe, applicando la regola del Modus ponens, la dimostrazione di G .
- f) Ma G è indimostrabile e quindi non è dimostrabile la formula A : non è perciò dimostrabile che l'aritmetica è consistente.

Segue che l'aritmetica, con l'utilizzo dei suoi mezzi, non può dimostrare la propria consistenza.

Il teorema di Gödel pone un limite alla formalizzazione: nessuna teoria può, tramite se stessa, garantire la sua non contraddittorietà.

La terza unità didattica riguarda la decidibilità, le macchine di Turing e la tesi di Church.

In modo semplice, si potrebbe affermare che una teoria è decidibile se la dimostrazione dei suoi teoremi può essere eseguita da un automa con un programma assegnato.

In una teoria di questo tipo si può stabilire, con una procedura meccanica, per ogni enunciato, se esso gode della proprietà di "essere un teorema".

Il problema della decisione di una teoria formale è legato a una corretta definizione delle funzioni calcolabili.

Esse possono essere introdotte nel modo seguente: si definisce una funzione $f(x)$ che assume un valore, ad esempio 1 , se l'enunciato è un teorema, e un altro valore, 0 , in caso contrario; deve essere possibile,

inoltre, per ogni argomento della funzione, determinare il valore con una procedura finita. Le funzioni calcolabili sono funzioni numeriche definite sui naturali e a valori naturali, poiché il calcolo deve essere effettuato con procedure meccaniche e di conseguenza i dati iniziali e finali con cui operano le funzioni devono essere discreti.

Si spiega, inoltre, che esistono funzioni numeriche che non sono calcolabili.

Nel 1936 l'inglese A. M. Turing (1912-1954) analizzando il comportamento di un calcolatore ideale diede una precisa caratterizzazione delle funzioni calcolabili.

Si descrivono, a questo punto, le principali caratteristiche della “macchina di Turing”: strumenti ideali formati da: un nastro indefinito suddiviso in campi capaci ciascuno di contenere uno “0” o un “1”; è possibile osservare un solo campo alla volta del nastro e di eseguire un numero finito di azioni elementari. Il nastro scritto che sottoponiamo alla macchina costituisce “i dati”; il nastro modificato dopo che la macchina ha eseguito le azioni e si è fermata costituisce “il risultato”.

Egli giunse alla seguente conclusione, detta Tesi di Turing:

“una funzione è calcolabile se e solo se è calcolabile con una macchina di Turing”.

Nello stesso anno, lo statunitense Alonso Church(1903-1995), uno dei maggiori studiosi di problemi logico-matematici, cercò di definire lo stesso concetto partendo dalle proprietà delle funzioni numeriche ricorsive.

Si descrivono agli studenti le funzioni numeriche primitive e poi, a partire da queste, per mezzo delle procedure di *composizione*, di *ricorsione*, e tramite *minimalizzazione*, si introducono le altre funzioni ricorsive. Tutte le funzioni ricorsive sono calcolabili, in quanto lo sono le funzioni primitive e le regole di formazione delle funzioni ricorsive consentono di ottenere funzioni calcolabili. Si afferma, inoltre, che non è possibile dimostrare il contrario.

La tesi di Church garantisce che: “ *una funzione è calcolabile se e solo se è ricorsiva*”.

Le due tesi sono equivalenti: le funzioni ricorsive coincidono con le funzioni calcolabili con macchina di Turing, ossia i termini “*calcolabile*”, “*calcolabile con una macchina di Turing*” e “*funzioni ricorsive*” individuano le stesse funzioni numeriche.

A questo punto, si chiarisce il legame con il concetto di decidibilità delle teorie formali: la teoria è decidibile se si può stabilire una corrispondenza tra la classe dei teoremi di una teoria e quella delle funzioni ricorsive, o delle macchine di Turing, che sono calcolabili. Altrimenti essa non è decidibile.

Per il calcolo delle proposizioni tale corrispondenza esiste, nel caso del calcolo dei predicati del primo ordine o per quelli di ordine superiore non esiste.

Dopo D. Hilbert, nessun progetto ha avuto l'obiettivo di comprendere in sé l'intera disciplina.

4. CONSIDERAZIONI FINALI

L'argomento proposto, ai confini tra matematica e filosofia, consente di avere una nuova visione dell'intera costruzione matematica..

Il modulo costituisce una base per gli studenti che vogliano riflettere sui problemi logico-gnoseologici della matematica. Consente, inoltre, di presentare la disciplina come una scienza in continuo sviluppo; conduce alla riflessione critica degli argomenti proposti e potenzia la capacità di ricerca degli allievi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOYER C.B. (1998) *Storia della matematica*, Mondatori, Milano.
- [2] SINGH S. (1997) *L'ultimo teorema di Fermat*, Rizzoli, Milano.
- [3] (1978) *Grande Antologia Filosofica vol.XXXI*, Marzorati, Milano.
- [4] BERGAMINI M., TRIFONE A., NERI D., TAZZIOLI R. (2003) *Le Geometrie non euclidee e i fondamenti della matematica*, Zanichelli, Bologna.
- [5] MARASCHINI W., PALMA M.(1996) *Format, CLP, vol.3*, Paravia, Torino.
- [6] LACCHINI L., RIVOLTELLA P.C. (1992) *L'avventura del pensiero, vol.III*, Cedam, Padova.