ESERCIZI PER LA SCUOLA

ALGEBRA

Sulle equazioni di secondo grado

1. Trasformare la differenza $x^2 - c$ in un prodotto di due fattori di primo grado
2. Trasformare il trinomio di secondo grado
$$y = x^2 - 2mx + (m^2 - p)$$
in un prodotto di due fattori di primo grado, e da questa trasformazione ricavare i valori di x che annullano y.
3. Trovare le radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ trasformando il suo primo membro in un prodotto di due fattori di primo grado.
4. Trasformare in prodotti di due fattori di primo grado i seguenti trinomi:
$$n^2 - 3n + 2, \quad 2n^2 + n - 1, \quad \tfrac{1}{3}n^2 + \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{6}.$$
5. Porre il trinomio $x^4 - 12x^2 + 35$ nella forma di un prodotto di quattro fattori di primo grado.
6. Posto $x_1 + x_2 = a$, $x_1 x_2 = b$, trovare un trinomio di secondo grado in x il quale si annulli per $x = x_1$ e per $x = x_2$.
7. Calcolare la somma dei quadrati e la somma dei cubi delle radici dell'equazione:
$$3x^2 - 5x - 9 = 0.$$
8. Esprimere in funzione di A, B, C il prodotto
$$\frac{1 + m_1^2}{A + Bm_1 + Cm_1^2} \cdot \frac{1 + m_2^2}{A + Bm_2 + Cm_2^2}.$$
nel quale m_1 ed m_2 significano le radici dell'equazione
$$Bm^2 + 2\,(A - C)\,m - B = 0.$$
9. Posto: $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \beta$, esprimere in funzione di β le due somme:
$$\alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4}, \quad \alpha^5 + \frac{1}{\alpha^5}.$$

10. Provare che, se esiste un valore di x pel quale il trinomio x^2+px+q sia negativo, l'equazione $x^2+px+q=0$ ha le radici reali e disegnali.

11. Provare che, se il trinomio x^2+px+q è positivo per $x=a$ e negativo per $x=b$, esso si annulla per un valore di x compreso fra a e b.

12. Applicare il precedente teorema al calcolo delle radici della

$$30x^2-107\,x+1=0$$

a meno di 0,001.

13. Per quali valori di x è negativo il trinomio x^2-5x+6?

14. Posto $y=7x^2+200x-375$, calcolare la differenza dei valori di y che corrispondono ad $x=100{,}000001$ ed a $x=100$.

Dimostrare che si può dare ad h un valore positivo così piccolo, che la differenza dei valori di y corrispondenti ad $x=100+h$ ed a $x=100$, sia minore di $\frac{1}{10^{1000}}$.

15. Nell'ipotesi che i numeri a, b, c soddisfacciano alla $b^2-4ac>0$ e che sieno dati i segni dei rapporti $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, determinare i segni delle radici della $ax^2+bx+c=0$.

16. A quali condizioni debbono soddisfare a e b affinchè l'equazione $x^4+ax^2+b=0$ abbia quattro radici reali?

17. Discussione delle radici della:

$$x^2-2bm\,x+b^2-a^2=0$$

nella quale a e b sono positivi ed m è, in valore assoluto, minore di 1.

18. Provare che, se l'equazione:

$$x^2+2m\,(k-n)\,x+k^2m^2-n^2+2kn=0,$$

nella quale m, k, n sono positivi o negativi, ha le radici eguali, deve aver luogo una relazione fra k ed n.

19. Quale relazione deve aver luogo fra f, g, f_1, g_1 affinchè uno stesso valore di x soddisfaccia alle due equazioni

$$x^2+fx+g=0,\quad f_1x+g_1=0\,?$$

20. Quale relazione deve aver luogo fra b, c, b_1, c_1 affinchè le due equazioni

$$x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + b_1 x + c_1 = 0$$

abbiano una radice comune?

21. Quale relazione deve aver luogo fra a, b, c, a_1, b_1, c_1 affinchè le due equazioni

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0$$

abbiano una radice comune?

22. Esprimere in funzione di a, b, c, a_1, b_1, c_1 il prodotto

$$(a_1\beta_1^2 + b_1\beta_1 + c_1)\ (a_1\beta_2^2 + b_1\beta_2 + c_1)$$

nel quale β_1 e β_2 significano le radici della $ax^2+bx+c=0$; e dedurne la relazione menzionata nell'esercizio precedente.

23. Provare che, se l'eguaglianza:

$$ax^2 + bx + c = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

è soddisfatta da tre diversi valori di x, dev'essere

$$a = a_1, \; b = b_1, \; c = c_1.$$

24. Dimostrare che, se hanno luogo certe relazioni fra a, b, c, a_1, b_1, c_1, la frazione

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a_1x^2 + b_1x + c_1}$$

è indipendente da x.

25. Provare che la frazione $\frac{1}{x^2 - 1}$ si può mettere nella forma $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$, nella quale A e B sono indipendenti da x.

26. Provare che la frazione $\frac{3x^2 + 4}{x^3 - 15x^2 + 56x}$ si può trasformare nella somma

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-7} + \frac{C}{x-8},$$

nella quale A, B, C sono indipendenti da x.

27. Risolvere l'equazione

$$(x + 1)^2\ (x - 1)\ (x + 3) = 49725.$$

28. Trasformare il polinomio $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ in un prodotto di due fattori uno dei quali sia x^2 e provare che, colla sostituzione $y = x + \frac{1}{x}$, l'altro fattore diviene un trinomio di secondo grado rispetto ad y.

29. A quale condizione deve soddisfare il numero β affinchè l'equazione

$$x^4 + \beta x^3 - 10x^2 + \beta x + 1 = 0$$

abbia quattro radici reali?

30. Risolvere l'equazione:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-5} = 0.$$

D. Besso.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

F. Nicoli. — *Compendio di Geometria* con due appendici. — In Modena coi tipi della Società Tipografica, antica tipografia Soliani, 1885.

Il Prof. Francesco Nicoli, professore di matematica nella Scuola Militare di Modena, ha dato testè alle stampe un suo Compendio di Geometria, con due appendici, in cui sono riassunte le lezioni da lui dettate da parecchi anni nella scuola stessa. Il libro di cui è parola merita di esser segnalato all'attenzione degli insegnanti delle scuole secondarie per lo stretto rigore da cui è informato e per la sua semplicità e chiarezza, pregi che certamente non è facile riunire.

Le due appendici del Compendio, vertono sulla Trigonometria e sulle Projezioni quotate. Nella prima di queste, definiti i rapporti trigonometrici, l'A. passa ad esporre i teoremi dai quali dipende la risoluzione dei triangoli e fra questi può esser notato per la sua dimostrazione diretta il teo: che: *in ogni triangolo la somma di due lati stà alla loro differenza, come la tangente della semisomma degli angoli opposti a questi lati stà alla tangente della loro semidifferenza*, poi tratta la risoluzione dei triangoli sia rettangoli che obliquangoli e ne fa seguire alcune applicazioni. Nella seconda appendice vengono esposte quelle nozioni sulle proiezioni quotate, che sono necessarie a chi deve imprendere lo studio della Fortificazione. Vi si tratta della rappresentazione di punti e rette, del piano, dei problemi re-