Sui meccanismi articolati nelle costruzioni di Geometria elementare

1. La possibilità di eseguire una costruzione geometrica determinata dipende dalle costruzioni che si assumono come *primitive*, quindi dagli strumenti che ci si propone di usare. Per quanto si tratti di cose note [1], crediamo utile richiamare ancora una volta l'attenzione degli insegnanti di scuole medie (e, per mezzo loro, eventualmente, anche degli studenti) sull'accennata circostanza che la possibilità di risolvere un problema di geometria va intesa in senso *relativo*.

In Geometria elementare è tradizionale l'uso esclusivo della *riga* e del *compasso*, tanto che è invalsa l'abitudine di chiamare *costruzioni elementari* quelle eseguibili coi detti strumenti (*strumenti elementari*). Ciò non toglie che si possano adoperare altri strumenti, *talora non meno semplici della riga e del compasso*, sì da modificare il campo delle *costruzioni possibili*: in modo cioè da rendere eseguibili certe costruzioni che con gli strumenti elementari tradizionali non lo sono (v. più oltre, al n.° 6, la divisione d'un angolo qualsiasi in n parti uguali), e che tuttavia non sono meno *elementari* di quelle altre.

Il presente articolo si propone appunto di presentare ai

---

[1] V. ad es. Castelnuovo, *Sulla risolubilità dei problemi geometrici cogli strumenti elementari*, Questioni riguardanti le Matem. Elem. raccolte da F. Enriques, Vol. 2.°, pp. 99-128.

lettori del PERIODICO un'ampia classe di altri semplici strumenti [1] coi quali si possono eseguire svariate costruzioni.

Si tratta dei cosidetti *sistemi* o *meccanismi articolati*, od insiemi di aste rigide collegate tra loro con cerniere intorno a cui possono ruotare senza strisciare; alcune aste possono avere un estremo fisso, e quindi essere suscettibili d'un semplice moto di rotazione intorno ad un punto, altre possono avere gli estremi entrambi mobili. È ovvio che non occorre affatto che le aste siano rettilinee, e che studiando il moto che assume una cerniera libera quando si deforma il sistema si studia insieme anche quello di qualsiasi punto collegato rigidamente con essa.

Ci limiteremo a meccanismi articolati piani. Si hanno però anche meccanismi articolati sghembi: tra questi citiamo ad es. il ben noto *giunto* di CARDANO, utilizzato in varî strumenti di fisica (nella cosidetta *sospensione cardanica*).

Poichè un triangolo a lati rigidi non è deformabile, il più semplice meccanismo articolato, dopo il compasso ordinario, è il quadrangolo articolato, che s'incontra in varie questioni cinematiche (ad es. nel moto d'una *biella*). Noi però vogliamo lasciar da parte le applicazioni meccaniche dei sistemi articolati, numerose ed interessanti [2], per occuparci, da un punto di vista puramente geometrico, ed elementare, delle costruzioni che essi consentono di eseguire.

Sono anzitutto, in ordine di semplicità, operazioni su segmenti e su angoli; poi viene il tracciamento di curve piane più o meno complicate; ma ciò che più differenzia questi strumenti dalla riga e dal compasso è il fatto che con sistemi articolati *a due gradi di libertà* si possono realizzare delle trasformazioni geometriche. Per quanto alcuni sistemi

---

(1) Diversi da quelli (riga a due orli paralleli, squadra, falsa squadra, trasportatore di segmenti) di cui si parla nel citato Art. del CASTELNUOVO ed in quello, che lo precede nella stessa raccolta, di A. GIACOMINI.

(2) Chi volesse estendere le proprie cognizioni in merito può consultare: KOENIGS, *Leçons de cinématique*, Paris, 1897, Chap. XI; SCHOENFLIES, *Kinematik*, Encyklop. der Math. Wiss., IV 1, pp. 190-278, n.° 24 e seguenti; D'OCAGNE, *Cours de géométrie*, Tome II, Paris, 1918, pp. 39-50 e 315-320. Di questi libri ci siamo valsi nella redazione di questo articolo, anche come degli appunti d'un corso di lezioni del Prof. SEGRE dell'anno 1916-1917.

articolati sian noti da qualche secolo (v. i n[i] 3 e 8), si capisce quindi che la loro teoria sia recente, perchè, come osserva il KOENIGS, ciò che essa contiene di veramente generale si collega al concetto moderno di corrispondenza, anche se gli inventori (tra cui specialmente: PEAUCELLIER, SYLVESTER, HART, KEMPE) avessero talora di mira solo la descrizione di questa o quella linea particolare. Illustreremo la cosa attenendoci alle trasformazioni che s'incontrano in Geometria elementare.

2. Anzitutto, riunendo due parallelogrammi articolati $OABC$, $BCPP'$ com'è indicato nella fig. 1, si ha un semplice *traslatore* (di KEMPE): se cioè si fissa O, ad es., e si dispone OA in una direzione data, si potrà far descrivere a P una regione piana (cioè P è mobile con due gradi di libertà), ed inoltre il segmento PP' si manterrà sempre equipollente ad OA mentre il sistema si deforma (perchè $OABC$, $BCPP'$ restano sempre parallelogrammi), sicchè P e P' si corrisponderanno in un'*uguaglianza per traslazione*: se P descrive il contorno d'una figura data, P' descrive quello di un'altra figura che si deduce dalla prima con una traslazione. Mutando la direzione e la lunghezza di OA si hanno le varie possibili traslazioni.

Oss. — S'intende che le regioni piane descritte da P e P' sono limitate. Del resto, per l'esatta valutazione di quanto andiamo dicendo, non si dimentichi che ogni meccanismo ha una portata limitata.

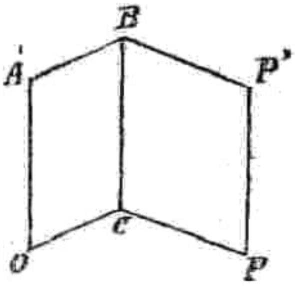

Fig. 1

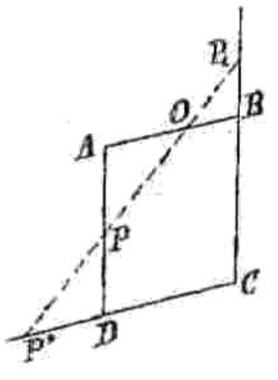

Fig. 2

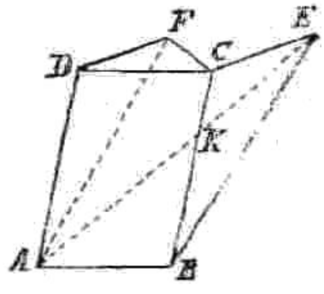

Fig. 3

3. Sui lati AB, BC, CD, DA d'un parallelogrammo articolato (fig. 2) si fissino rispett. i punti O, P_1, P', P. Se in

una posizione qualsiasi del parallelogrammo quei punti sono allineati si avranno le proporzioni:

$$OB : P_1B = OA : PA = P'D : PD ;$$

le quali provano che, al deformarsi del sistema, i triangoli OP_1B, OPA, $P'PD$, che hanno sempre uguali gli angoli in B, A, D, si mantengono simili, perciò O, P_1, P', P sono sempre allineati. D'altra parte, i rapporti $\frac{OP}{OP'}$, $\frac{OP}{OP_1}$ non mutano, perchè son sempre uguali rispett. ai rapporti $\frac{AP}{AD}$, $\frac{OA}{OB}$. Perciò P e P' si corrispondono sempre in un'*omotetia diretta* di centro O, e P e P_1 in un'*omotetia inversa* di centro O (*pantografo* di SCHEINER) [1].

4. Diciamo due parole anche del *pantografo sghembo*, o *plagiografo*, di SYLVESTER [2]. Sui lati CD, BC d'un parallelogrammo articolato (fig. 3) si fissino due triangoli simili DCF, BEC, in cui siano uguali rispett. le coppie di angoli: D, B; C, E; F, C. Dalla proporzione: $DF : DC = BC : BE$, essendo: $BC = AD$ e $DC = AB$, segue allora: $DF : AD = AB : BE$; perciò i triangoli ADF, EBA, che hanno uguali gli angoli in D e in B, risultano simili. Ne segue che il rapporto $\frac{AF}{AE}$, uguale ad $\frac{AD}{EB}$, resta costante al deformarsi del sistema. Si hanno inoltre le relazioni angolari:

$$DAE = AKB = AEB + EBC ; \quad DAE = DAF + FAE ;$$

dalle quali, poichè: $AEB = DAF$, segue che anche l'angolo FAE, restando sempre uguale ad EBC, non muta deformando il sistema. Perciò F corrisponde ad E in una trasfor-

(1) C. SCHEINER, *Pantographice, seu ars delineandi res quaslibet per parallelogrammum lineare seu cavum, mechanicum, mobile*; Romae, 1631.

(2) J. J. SYLVESTER, *On the Plagiograph aliter the skew Pantigraph*, Nature, Vol. XII (1875), pp. 168, 214-216; Coll. Math. Papers, Vol. III, pp. 26-34.

mazione che è il prodotto d'una rotazione di centro O per un' omotetia di centro O.

In particolare, se $BE = AD = BC$, risulta $AF = AE$, e l'apparecchio consente di effettuare una *rotazione* intorno ad O.

5. L'*inversione*, o *trasformazione per raggi vettori reciproci*, si può realizzare ad es. col ben noto *inversore* di PEAUCELLIER [1]. Due aste uguali OA, OB (fig. 4), articolate nel punto *fisso* O, hanno ai loro estremi due vertici opposti A, B d'un rombo articolato $APBP'$. Deformando il sistema, i punti P, P', O, ciascuno dei quali è sempre equidistante da A e da B, restano allineati; inoltre, se C è il centro del rombo, si ha:

$$\begin{aligned} OP \cdot OP' &= \overline{OC}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{CP}^2 = \\ &= \overline{OA}^2 - \overline{AP}^2 = \text{costante}; \end{aligned}$$

cioè P, P' sono omologhi in un'inversione di centro O. La potenza d'inversione è $\gtrless 0$ secondochè P, P' stanno dalla stessa parte o da parti opposte di O, cioè secondochè $OA \gtrless AP$.

Invece d'un rombo si può usare qualsiasi quadrangolo $APBP'$ in cui la diagonale AB sia perpendicolare all'altra, PP', nel suo punto medio (*inversore* di LIPKIN [2]), restando però O allineato con P e P'.

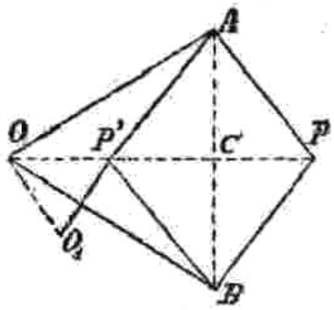

Fig. 4

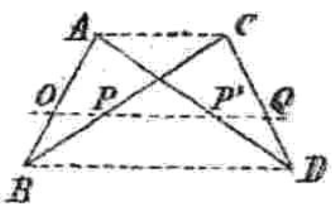

Fig. 5

Un altro inversore è quello di HART [3], che utilizza un

---

[1] PEAUCELLIER, *Lettre* a p. 414 dei Nouv. Ann., (2) 3 (1864); *Note sur une question de géométrie de compas*, id., (2) 12 (1873), pp. 71-78.

[2] L. LIPKIN, *Ueber eine genaue Gelenk-Geradführung*, Bull. de St. Pétersbourg, XVI (1871), pp. 57-60.

[3] H. HART, *On certain Conversions of Motion*, Messenger of Math., (2) 4 (1874), pp. 82-88 e 116-120.

controparallelogrammo (fig. 5), cioè un quadrangolo intrecciato $ABCD$ a lati opposti uguali ($AB = CD$, $AD = BC$). Per l'uguaglianza dei triangoli BAD, BCD, le diagonali AC, BD sono parallele. Perciò, se, per una certa posizione del sistema, quattro punti O, P, Q, P', fissati rispett. sui lati AB, BC, CD, DA, sono allineati, i rapporti $\frac{OB}{OA}$, $\frac{PB}{PC}$, $\frac{QD}{QC}$, $\frac{P'D}{P'A}$ riescono uguali, onde quei quattro punti stanno sempre su una parallela alle diagonali. Inoltre, dalle proporzioni:

$$OP : AC = OB : AB; \quad OP' : BD = OA : AB,$$

segue:

$$OP \cdot OP' = \frac{OA \cdot OB}{\overline{AB}^2} \cdot AC \cdot BD;$$

ossia, per il teor. di TOLOMEO (applicato al quadrangolo $ABCD$, che è inscrittibile in un cerchio per l'uguaglianza degli angoli BAD, BCD):

$$OP \cdot OP' = \frac{OA \cdot OB}{\overline{AB}^2} \cdot (AD \cdot BC - AB \cdot CD) = \text{costante};$$

sicchè, *fissato* O, i punti P, P' variano nel piano corrispondendosi in un'inversione di centro O e potenza positiva. Prendendo O su uno dei lati interni, e quindi P, P' sui due esterni, la potenza d'inversione riesce negativa. Si noti che l'inversore di HART ha solo quattro aste, mentre quello di PEAUCELLIER ne ha sei.

Oss. — Fissando P, anzichè O, si avrebbe (anche in segno):

$$PO \cdot (PP' - PO) = \text{cost.}; \text{ cioè: } PP' = PO + \frac{\text{cost.}}{PO};$$

ed i punti O, P', sempre allineati con P, si corrisponderebbero in una trasformazione che, com'è facile vedere, muta le rette in curve di 3.° ordine.

6. È meno semplice ottenere con un meccanismo articolato la simmetria rispetto ad una retta; perciò si può costruire prima (seguendo KEMPE) un *rovesciatore*, o *ribaltatore, di angoli* (fig. 6). Sia $OABC$ un controparallelogrammo; preso

su AB un punto D tale che: $DA : OA = OA : AB$, si completi l'antiparallelogrammo $OADE$. La similitudine fra i triangoli OAD, BAO, estesa a tutto il piano, fa corrispondere i due controparallelogrammi; perciò risultano ugnali gli angoli AOE, COA. Se ora tutto il sistema è articolato nei vertici, si possono disporre le aste OC, OA lungo i lati l, m d'un angolo dato: l'asta OE si disporrà lungo la retta l' simmetrica di l rispetto ad m.

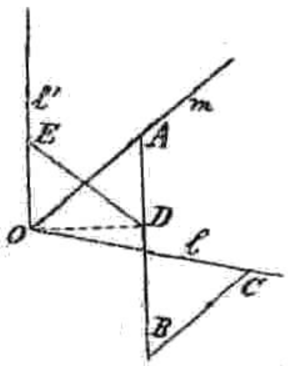

Fig. 6

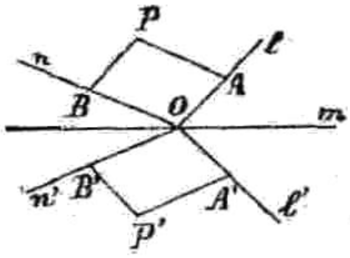

Fig. 7

Ciò posto, sia m una retta fissa (fig. 7), ed O un suo punto fisso; con due ribaltatori si possono guidare due coppie di aste l, l'; n, n' simmetriche rispetto ad m ed uscenti da O; se ora le aste l, n, e così le l', n', vengono collegate fra loro con due parallelogrammi articolati $OAPB$, $OA'P'B'$, tali che $OA = OA'$, $OB = OB'$, è chiaro che P, P' saranno sempre simmetrici rispetto ad m.

Oss. — Se, nel rovesciatore di Kempe, si collega al secondo controparallelogrammo un terzo che sia rispetto ad esso nelle condizioni del secondo rispetto al primo, e poi un quarto, un quinto, ecc., si ottengono delle nuove aste che formano con l un angolo rispett. triplo, quadruplo, quintuplo, ecc. di lm (*moltiplicatore* di Kempe). Disponendo le aste estreme d'un tale sistema lungo i lati d'un angolo dato, le aste intermedie dividono l'angolo stesso in 2, 3, 4, 5,... parti uguali.

7. Se, invece di realizzare delle trasformazioni, si vogliono descrivere, con meccanismi articolati, delle linee piane, bisognerà servirsi di sistemi con un sol grado di libertà. Così, l'inversore di Peaucellier (o qualsiasi altro inversore) può servire, con notevole precisione, a tracciare delle rette; in-

fatti, se P' (fig. 4) vien collegato ad un punto fisso O_1 mediante un'asta $O_1P' = O_1O$, esso è costretto a stare su un cerchio, di centro O_1, passante per il centro d'inversione, onde P descriverà una retta; se O_1P' è diverso da O_1O, anche P descrive un cerchio.

Tra le linee che son state descritte con procedimenti di questo genere, oltre a rette e cerchi, citiamo: le coniche (così, un semplice *ellissografo* articolato è dovuto ad HART, e se ne può leggere la descrizione a p. 48 del libro citato di D'OCAGNE), la cissoide, la cubica di AGNESI, le concoidi, ecc.

È chiaro però che si potranno tracciare solo curve algebriche, perchè i vincoli in un sistema articolato son dati tutti dal rendere costanti certe distanze (le lunghezze delle aste), e quindi si traducono in equazioni algebriche tra le coordinate dei punti fissi e quelle dei punti mobili. Viceversa, il KEMPE ha dimostrato (1) che *qualsiasi curva algebrica assegnata può essere descritta con un meccanismo articolato* (s'intende che se ne potrà descrivere un tratto). Ne segue subito che, per mezzo di meccanismi articolati, si può risolvere ogni problema di geometria piana che imponga agli enti da costruire solo condizioni algebriche: infatti, ridotto il problema alla ricerca di punti, questi si avranno come intersezioni di linee algebriche.

8. Terminiamo accennando ad altri strumenti che non sono semplici sistemi articolati, perchè intervengono in essi anche dei concetti ulteriori. Tra questi merita specialmente di essere ricordato il *compasso proporzionale* di GALILEO, che risale al 1606 (2), e che consiste in due aste articolate, come in un compasso ordinario, su ciascuna delle quali è incisa una graduazione avente lo zero nella cerniera; se la graduazione procede per parti uguali successive (*scala aritmetica*)

---

(1) A. B. KEMPE, *On a general method of describing plane curves of the n^{th} degree by linkwork*, Proc. London Math. Soc., 7 (1876), pp. 213-216; *How to draw a straight line*, London, 1877. Ivi si trovano anche le descrizioni degli apparecchi dei n.i 2 e 6.

(2) *Le operazioni del compasso geometrico e militare*, Opere di GALILEO GALILEI, 1.a ediz. completa, Vol. 11.°, 1854, pp. 213-283.

si potrà in modo semplicissimo dividere un segmento dato AB ad es. in 5 parti uguali: basta aprire il compasso in modo da collocare un segmento lungo come AB con gli estremi sui numeri 50 delle due scale (il che si può fare con un compasso ordinario), ed allora la distanza fra i numeri 10 delle due scale (che si può misurare anche con un compasso ordinario) dà la 5.ª parte di AB; se la graduazione procede diversamente si potranno fare operazioni più complicate, ad es. l'estrazione di radice quadrata, o cubica; in certo senso il compasso di GALILEO è quindi affine al *regolo calcolatore* moderno.

Citiamo da ultimo, nello stesso ordine d'idee, un ellissografo in parte articolato: di un segmento rigido AB l'estremo A descrive un cerchio di centro O (ad es. mediante un'asta rigida OA articolata nel punto fisso O), e l'estremo B scorre lungo un diametro del cerchio (mediante un perno, collocato in B, che scorre dentro una scanalatura di un'asta fissa disposta lungo quel diametro); è facile provare che ogni punto di AB descrive un'ellisse.

Torino, Università. EUGENIO G. TOGLIATTI