Probabilità fuori dagli schemi di urne

Gli esempi e gli esercizi che si svolgono e si propongono usualmente nel calcolo delle probabilità si riferiscono quasi sempre all'abusato schema di giochi, o, come si usa anche dire, prendendo la denominazione da uno dei casi più tipici, allo schema delle urne. Con ciò ogni difficoltà concettuale si elimina, e la misura di una probabilità si riduce a una pura e semplice enumerazione di casi possibili e favorevoli, allo stesso modo come avverrebbe delle nozioni di peso, volume, ecc., se ci si riferisse ad uno schema in cui la materia fosse costituita di particelle tutte eguali tra loro. Per chiarire la nozione di peso, tale modo di procedere non sarebbe certo indicato, in primo luogo perchè non caratterizza il peso, tant'è vero che la stessa proprietà varrebbe anche per la nozione di volume, e poi, soprattutto, perchè una definizione data in un caso particolare e artificioso mal si presta alla necessaria estensione ai casi pratici, che diverrebbe apparentemente difficile e delicata. Lo stesso avviene nel calcolo delle probabilità; gli esempi e i ragionamenti tratti da schemi di urne possono essere utili quando interessa chiarire meccanicamente, dal punto di vista del calcolo numerico, dei procedimenti, riferendosi al caso più semplice e schematico ove non si presentano questioni concettuali, ma sono i meno adatti che si possano pensare quando loro scopo debba essere quello di chiarire un concetto, un principio, un risultato generale.

Un'altra via, indiretta e assai vaga, seguita spesso per chiarire la nozione di probabilità, è quella che vi conduce attraverso la considerazione delle frequenze e della loro stabilità, ammessa come fatto sperimentale; di qui derivano quasi tutti gli esempi che non si riferiscono allo schema delle urne. Di entrambe queste concezioni ho dimostrato l'inconsistenza logica [1], sostenendo che l'unico concetto non illusorio di probabilità è quello corrispondente all'uso comune, ove la probabilità è concepita in un senso puramente soggettivo, come la misura del nostro grado di fiducia (speranza, timore) con cui sentiamo di attendere il verificarsi d'un dato evento, e ho anche spiegato come, partendo da questo punto di vista, si possa rigorosamente fondare tutto l'ordinario calcolo delle probabilità [2].

Un'intervista del generale CROCCO sulla trasvolata atlantica, concessa durante la sosta a Bolama [3] e un problema sullo stesso argomento recentemente apparso fra le Questioni Proposte in questo stesso Periodico (Anno XI, N. 2, 1931) mi hanno suggerito le presenti consideraziani, allo scopo principale di chiarire mediante esempi opportuni, lontani da ogni usuale schema, come vada intesa la probabilità in senso soggettivo, in qual modo intervenga in problemi concreti, e come su di essa si possono fare ragionamenti e calcoli. Sopratutto questo punto può dar luogo, per la larga indeterminazione dei dati, a molte diffidenze; è perciò importante mostrare come, procedendo con spirito pratico e col dovuto buon senso, si possano ottenere conclusioni praticamente sufficienti in modo esente da critiche.

I problemi cui si riferisce l'intervista CROCCO e la « questione proposta » sono di natura notevolmente diversa, nè sono queste sole, evidentemente, le domande che si saranno dovute porre gli organizzatori della grande impresa, e per cui l'applicazione della teoria delle probabilità si sarebbe dimostrata utile. Ciò può ben dare un'idea della vastità dei

---

(1) In *Probabilismo - Saggio critico sulla teoria delle probabilità e sul valore della scienza*, Biblioteca di Filosofia diretta da A. Aliotta, Perrella ed., Napoli, 1931 (Prezzo. L. 5).

(2) Cfr. la mia memoria *Sul significato soggettivo della probabilità* in « Fundamenta Mathematicae », T. XVII, pp. 298-329, 1931; v. anche *Fondamenti logici del ragionamento probabilistico* in « Boll. Un. Mat. It. », A. IX, N. 5, 1930, e *Sui fondamenti logici del ragionamento probabilistico* in « Atti della S. I. Progr. Sc. » Congr. Bolzano-Trento (1930), Vol. II.

(3) « Gazzetta dello Sport », 29 dicembre 1930 - IX.

compiti in cui tale teoria ci potrà essere d'ausilio quando ci saremo liberati da troppo ristrette concezioni relative ai suoi concetti fondamentali e al suo dominio di applicabilità.

L'intervista del generale Crocco.

— « Ci spieghi, generale, in che cosa, secondo Lei, differisce il volo transatlantico *collettivo* dal volo transatlantico « *individuale* ».

— « Bisogna dire che un volo transatlantico in massa « presenta caratteristiche, alcune delle quali sono a suo vantaggio ed altre a suo svantaggio. Il numero degli apparecchi che si sorvegliano l'un l'altro e che al momento « opportuno possono aiutarsi l'un l'altro, costituisce certamente un vantaggio del volo in massa rispetto al volo « singolo, e ciò sia per la determinazione della rotta e della « quota, sia nel caso di avarie e di ammarraggio. È il principio fondamentale della *forza dell'unione*, simboleggiata « dal Fascio Littorio. Per contro, ed è questo che forma la « caratteristica più saliente dell'impresa, il volo in massa è « svantaggioso rispetto al volo individuale nel senso che esso « è legato alle eventualità occorrenti ad ogni singolo apparecchio, e perciò non riduce le probabilità di interruzione « della lunga traversata, ma in certo qual modo le rende « maggiori ».

« Infatti l'eventuale avaria di un singolo apparecchio può « determinare l'ammarraggio di tutta la formazione e quindi « moltiplicare le probabilità di avarie degli altri apparecchi. « La sorte della massa rimane quindi in certo modo legata « alla sorte del meno fortunato degli apparecchi che la compongono, precisamente come la resistenza di una catena « è legata alla resistenza della più debole delle sue maglie. « Ma ciò che costituisce l'enorme differenza tra il volo singolo e il volo collettivo è in quello che possiamo chiamare « successo integrale dell'impresa ».

— « Che cosa intende Lei per successo integrale »?

— « La parola « successo » non è forse appropriata. Meglio « dire « arrivo integrale ». E mi spiego. Nelle traversate « atlantiche dei singoli apparecchi, quali quelle che sinora si « sono svolte, non v'è da tenere presente che l'arrivo di un

« solo apparecchio. Questo arrivo è determinato sia dalla bontà « del materiale, sia dall'allenamento e dall'abilità del pilota, « e da una sua probabilità di riuscita che dipende appunto « dai suddetti elementi. Il verificarsi di queste probabilità « determina la riuscita dell'impresa ».

« Nel volo collettivo invece possono arrivare a destina- « zione, per lo meno simultaneamente, tutti gli apparecchi « che hanno iniziato la trasvolata, o un numero minore. Ciò « che io chiamo arrivo integrale è precisamente l'arrivo si- « multaneo di tutti gli apparecchi. Non già che l'arrestarsi « di qualche apparecchio lungo la rotta costituisca un insuc- « cesso; ma l'arrivo integrale rappresenta il successo al 100 « per 100 ».

— « Quale è la possibilità di questo che Ella chiama suc- « cesso al 100 per 100 »?

— « Questa probabilità dipende naturalmente dalla pro- « babilità di ogni singolo apparecchio, ma risulta enormemente « diminuita dal numero degli apparecchi per cui deve veri- « ficarsi. Il calcolo matematico la chiama probabilità com- « posta, e dimostra che essa è uguale al prodotto delle pro- « babilità di arrivo dei singoli apparecchi. Per fare un esempio, « se la probabilità di arrivo di un singolo apparecchio è del « 90 per 100, la probabilità composta di arrivo di 12 appa- « recchi su 12 partenti discende al 28 per 100 ».

« Questa enorme diminuzione sarebbe ancora maggiore se « la probabilità di arrivo di ogni singolo apparecchio fosse « minore. Con una probabilità singola dell'80 per 100, la « probabilità composta discende appena al 7 per 100; con una « probabilità singola del 60 per 100 si ha una probabilità « composta inferiore al 3 per 1000 ».

Considerazioni analoghe si trovano in un articolo comparso in quegli stessi giorni nel « Popolo di Roma ». « Se uno o « più saranno costretti ad ammarare, altri li imiteranno per « porgere aiuto per ogni evenienza. Misura, questa, che dimi- « nuisce sensibilmente le probabilità di perdita di apparecchi « e di vite, ma che moltiplica le probabilità contrarie ad un « arrivo in gruppo. Poichè le probabilità favorevoli non sono « maggiori di quelle che possiede un solo apparecchio, mentre « le sfavorevoli radunano quelle di tutti gli apparecchi par- « tecipanti ».

In casi di questo genere, ove nel linguaggio comune chiunque è condotto spontaneamente e naturalmente a parlare di probabilità, proprio i cultori e i teorici del calcolo delle probabilità avrebbero degli scrupoli o negherebbero addirittura la legittimità di tali locuzioni. I semplici esempi numerici del Crocco mostrano quanto utili e significative sarebbero le conclusioni cui il calcolo delle probabilità condurrebbe se simili pregiudiziali potessero essere superate salvando il rigore logico dei ragionamenti, ed è facile immaginare come, negli altri problemi accennati, e in altri analoghi, si potrebbero avere dei risultati su cui basare nel modo più naturale importanti decisioni. Sarebbe facile ad esempio determinare, in base ad ogni assegnata valutazione delle probabilità elementari, e per ogni ipotetico sistema di istruzioni relativo al volo, le probabilità p'_h $(h = 0, 1, \dots, n)$ che h siano quelli fra gli n apparecchi che supereranno a volo l'Atlantico d'un sol balzo, oppure le probabilità p''_k $(k = 0, 1, \dots, n)$ che k apparecchi superino comunque la prova, o, più in generale, le probabilità p_{hk} $(0 \leq h \leq k \leq n)$ che k apparecchi superino la prova, e h di essi senza scalo (sarebbe $p'_h = \Sigma_k p_{hk}$, $p''_k = \Sigma_h p_{hk}$; quest'ultima formulazione conterrebbe quindi, in particolare, le precedenti). Si potrebbero confrontare allora nel modo più preciso i vantaggi d'un ordine che disponga ad es., in caso di incidente ad un apparecchio, l'ammaraggio dell'apparecchio più vicino, o dell'intera formazione, per prestare aiuto. Vantaggi e svantaggi che sono quelli illustrati nell'intervista Crocco, ma di cui sarebbe certo utile, per valutare esattamente l'importanza, una precisazione quantitativa, almeno per quanto riguarda l'ordine di grandezza dei fattori da tenere presenti.

Non ci dilungheremo nel trattare questo problema, preferendo piuttosto soffermarci dettagliatamente sull'altro. Facciamo soltanto notare quale sia il compito del calcolo delle probabilità, per evitare un'interpretazione erronea, che l'esperienza dimostra assai facile. Dobbiamo scegliere fra diverse decisioni: quello che ci occorre è il quadro delle probabilità che ciascuna di esse comporta, ed è questo quadro che la teoria delle probabilità ci consente di prospettare, purchè si facciano delle valutazioni di probabilità sufficienti a determinarlo. La scelta di quello, tra i diversi quadri di probabilità, che merita la preferenza, è compito da lasciare al criterio e alla responsabilità di chi deve prendere una decisione in merito. Che non venga in mente di cercare un metodo razionale per tale scopo, come ad esempio potrebbe forse sembrare a taluno quello di rendere massimo il numero probabile di apparecchi che superano la prova!

Le navi lungo la rotta.

La « questione proposta » si riferisce invece al comportamento delle navi dislocate lungo la rotta, e chiede quale esso debba essere per ridurre al minimo la pericolosità della traversata. Vedremo come questo problema si tratti in modo sicuro, esauriente, elegante, secondo il calcolo delle probabilità; la nostra trattazione si riferisce però, per semplicità, al caso della trasvolata di un singolo apparecchio: nel caso di una trasvolata collettiva si dovrebbe apportare qualche correzione per il fatto che la stessa nave potrebbe esser chiamata contemporaneamente a soccorrere due o più apparecchi. Per semplicità supporremo anche di conoscere la tabella di marcia che i trasvolatori si prefiggono, e di essere sicuri che essi la seguiranno con precisione, fino al momento di un eventuale incidente. Prescinderemo cioè dalla probabilità che per circostanze accidentali, come la forza e la direzione del vento, la visibilità, il funzionamento del motore, o qualunque altra, il velivolo possa marciare più o meno rapidamente del previsto; per tener conto anche di ciò dovremmo considerare la legge di moto $x(t)$ come una *funzione a incremento aleatorio* (¹), e la trattazione perderebbe il carattere elementare che qui le manteniamo.

Indichiamo con x le ascisse lungo la rotta, e poniamo per semplicità $x = 0$ il punto di partenza e $x = 1$ il punto d'arrivo. Le circostanze oggettive del problema sono: la funzione, assegnata, $x(t)$, che rappresenta il moto dell'apparecchio, e

---

(¹) Cfr. per tale concetto *Sulle funzioni a incremento aleatorio*, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », 1929, 2° sem., e *Le leggi differenziali e la rinunzia al determinismo* « Rend. Sem. Mat. Roma », 1930. Ulteriori ricerche sull'argomento sono l'oggetto di varie successive note ai Lincei.

le funzioni $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ che rappresentano il moto delle n navi scaglionate lungo la rotta, e che si tratta di determinare nel modo più opportuno. Naturalmente, le navi avranno una velocità limitata, e supporremo uguale per tutte la massima velocità v raggiungibile; avremo con ciò la limitazione $\frac{dx_i}{dt} \leq v$. La velocità v è naturalmente minore di quella del velivolo; il caso opposto sarebbe del resto privo di ogni interesse, perchè allora l'apparecchio potrebbe addirittura essere scortato, e il problema non avrebbe più ragione di essere. Supporremo quindi sempre

$$V(t) = \frac{dx}{dt} > v.$$

Si tratterà ora, in primo luogo, di determinare, per ogni n-pla di funzioni $x_1(t)$, $x_2(t)$,..., $x_n(t)$, la probabilità P che l'apparecchio, in caso di incidente, possa essere salvato dalle navi, e, successivamente, di determinare tali funzioni in modo che P diventi massima [1]. Per determinare P occorrono naturalmente altri elementi, e precisamente la probabilità elementare di incidenti in un punto qualunque della rotta, e la probabilità che la nave più prossima faccia in tempo e riesca a portare soccorso. Analiticamente, dobbiamo assegnare: primo: $\mu(x)$ tale che $\mu(x)dx$ rappresenti la probabilità che il velivolo, supposto giunto senza incidenti fino al punto x, sia colpito da un incidente tra x e $x + dx$; secondo: $f(\delta)$, probabilità che l'apparecchio possa essere salvato da una nave quando sia colpito da un incidente a distanza δ da essa [2]. Notiamo che questi non sono, almeno secondo il nostro punto di vista,

---

(1) Può essere opportuno confrontare questo modo d'impostazione e i successivi svolgimenti e risultati con la risposta che ebbe la questione nell'apposita rubrica (1931, N. 3), non ispirata al calcolo delle probabilità, e che per tal motivo, anzichè tradurre in forma analitica il significato concettuale del problema, si limita a preoccuparsi della massima distanza dell'apparecchio dalle navi nel corso della trasvolata.

(2) Più generalmente potrebbe supporsi $f(\delta, x)$ dipendente anche da x; in particolar modo si osservi che ciò sarebbe necessario per tener conto che la probabilità di recar soccorsi è certamente minore nel tratto percorso di notte, e in quelli ove si avessero difficoltà speciali di navigazione o visibilità.

dei dati oggettivi, ma esprimono e misurano semplicemente dei nostri stati d'animo; ogni individuo potrà avere un'opinione diversa, e ogni opinione sarà caratterizzata da una particolare scelta delle funzioni $\mu(x)$ e $f(\delta)$, e condurrà a conclusioni diverse. Il valore che determineremo della probabilità P avrà anch'esso un senso puramente soggettivo: sarà il valore che deve attribuire a P, per mantenersi coerente colle proprie opinioni, un individuo la cui opinione sulla pericolosità della trasvolata e sull'efficacia dei soccorsi sia caratterizzata dalle supposte funzioni μ ed f.

Calcoliamo anzitutto la probabilità $\varphi(x)dx$ che un'incidente abbia luogo fra x e $x + dx$; essa si ottiene moltiplicando la probabilità $1 - e^{-\int \mu(x)dx}$ che nessun incidente abbia avuto luogo fra 0 e x per la probabilità subordinata a tale ipotesi, che è $\mu(x)dx$; è quindi

$$\varphi(x) = \mu(x) \left\{ 1 - e^{-\int_0^x \mu(x)dx} \right\};$$

Sia ora $\delta(x)$ la distanza dell'apparecchio, quando si trova nel punto x della rotta, dalla più vicina delle navi; la probabilità che fra x e $x + dx$ l'apparecchio sia colpito da un incidente, ma venga poi salvato, è naturalmente $\varphi(x) \cdot f[\delta(x)]dx$, e si avrà, integrando,

$$P = \int_0^1 \varphi(x) f[\delta(x)]dx.$$

La f dovrà essere comunque una funzione decrescente (tutt'al più mai crescente) di δ.

Se fra le $x(t)$, $x_i(t)$ si elimina la t esprimendo le x_i in funzione di x, le distanze fra l'apparecchio, all'istante in cui si trova in x, e le singole navi, sono

$$| x - x_1(x) |, \quad | x - x_2(x) |, \ldots, \quad | x - x_n(x) |;$$

avremo quindi

$$P = \sum_1^n {}_i \int_{(i)} \varphi(x) f[x - x_i(x)]dx$$

ove l'integrale i-esimo s'intenda esteso all'intervallo in cui l'apparecchio ha come nave più prossima quella i-esima (intervallo definito matematicamente da $(x_{i-1} + x_i < 2x < x_i + x_{i+1})$, e ove, per risparmiare il segno di valore assoluto ad $x - x_i(x)$, si estenda la definizione di f anche ai valori negativi ponendo $f(-\delta) = f(\delta)$.

Il problema è così completamente impostato, e non rimane che risolverlo; apparentemente si tratta d'un problema di calcolo delle variazioni (determinazione di n funzioni incognite in modo da sodisfare una condizione di massimo), ma ci si riduce invece subito a un problema di massimo per una funzione ordinaria di n variabili.

Si vede infatti senz'altro la convenienza che le navi marcino a tutto vapore nella stessa direzione degli apparecchi. La distanza $x - x_i(x)$ è sempre crescente (in valore algebrico, beninteso), e si annulla in un sol punto ξ_i, ovviamente interno all'intervallo i-esimo (punto in cui l'apparecchio sorpassa la nave, che ha, ricordiamo, velocità minore); in virtù della limitazione per la velocità delle navi, le $x_i(t)$ sono certo non più rapidamente crescenti delle $\xi_i + v(t - \tau_i)$ (ove τ_i è l'istante in cui $x_i(\tau_i) = x(\tau_i) = \xi_i$), e, di consegnenza, la distanza $x - x_i$ risulta ovunque diminuita (in valore assoluto) sostituendo la funzione $x_i(t)$ con la $\xi_i + v(t - \tau_i)$. Come era del resto evidente a priori.

Le incognite del problema, che erano n funzioni $x_i(x)$, si riducono pertanto ad n costanti ξ_i: basta determinare gli n punti in cui l'apparecchio deve sorvolare le navi scaglionate lungo la rotta. Basta, in altre parole, considerare il moto relativo dell'apparecchio e delle navi, con che ci si riduce al caso in cui queste fossero ferme, e il tragitto minore. Come variabile indipendente si assuma quindi, anzichè la x, la z tale che $z(t) = x(t) - vt$; la probabilità d'un incidente fra z e $z + dz$ sarà $\psi(z)dz = \varphi(x)dx$, e quindi

$$\psi(z) = \varphi(x)\frac{dx}{dz} = \varphi(x) : \left(1 - \frac{v}{V(x)}\right)$$

ove $V(x)$ è la velocità dell'apparecchio nel punto x. Per P abbiamo infine l'espressione

$$P = P(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_1^n {}_i \int_{(i)} \psi(z) f(z - z_i) dz$$

$(z_i = z(\tau_i) = \xi_i - v\tau_i =$ posizione iniziale della nave i-esima

ove l'integrale i-esimo è esteso tra $\frac{1}{2}(z_{i-1} + z_i)$ e $\frac{1}{2}(z_i + z_{i+1})$

Ci siamo ricondotti così a un problema elementare di massimo di cui non è possibile, naturalmente, dare la soluzione esplicita in forma generale. Ma possiamo trasformare tale condizione in altra equivalente e di immediata interpretazione intuitiva, in modo che, eliminando ogni calcolo e addirittura anzi ogni concetto matematico, si rende possibile una soluzione empirica del problema.

Abbiamo infatti

$$\frac{\partial P}{\partial z_i} = \int_{(i)} \psi(z) \frac{\partial}{\partial z_i} f(z - z_i) dz$$

eliminandosi ovviamente i termini provenienti dai limiti d'integrazione che contengono z_i, e cioè

$$\frac{1}{2}\psi\left(\frac{z_{i-1} + z_i}{2}\right) f\left(\frac{z_i - z_{i-1}}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{z_{i-1} + z_i}{2}\right) f\left(\frac{z_{i-1} - z_i}{2}\right) = 0$$

e l'analogo termine per $\frac{1}{2}(z_i + z_{i+1})$. Determinare le z_i tali da render minimo $P(z_1\, z_2 \dots z_n)$ equivale dunque a determinare le z_i tali da avere

$$\int_{(i)} \psi(z) \frac{\partial}{\partial z_i} f(z - z_i) dz = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

ove l'integrale i-esimo sia esteso tra $\frac{1}{2}(z_{i-1} + z_i)$ e $\frac{1}{2}(z_i + z_{i+1})$.

Tali equazioni si possono scrivere

$$\frac{\partial^* P}{\partial z_i} = 0$$

ove ∂^* indichi la differenziazione di P quando nella sua espressione i limiti d'integrazione si considerino fissi. Esse significano dunque che z_i deve essere il punto più favorevole dell' intervallo $\frac{1}{2}(z_{i-1} + z_i)$, $\frac{1}{2}(z_i + z_{i+1})$, e il problema originario, di determinare gli n punti z_i che rendono massima l'efficacia dei soccorsi, è ricondotto al seguente di cui si è provata l'equivalenza: *determinare gli* n *intervalli affidati alla sorveglianza di ciascuna nave in modo che, essendo le navi nel punto del rispettivo intervallo in cui è massima l'efficacia del loro soccorso, i punti di divisione fra gli intervalli successivi risultino equidistanti dalle due navi più prossime.*

Osserviamo subito che tale condizione, per poco che si pensi, appare ben naturale. Se un punto di divisione non cadesse nel punto di mezzo fra due navi, l'efficacia dei soccorsi si potrebbe senz'altro aumentare disponendo di portarvelo, ferme tutte le altre condizioni: in tal modo non si farebbe infatti che aumentare l'efficacia dei soccorsi nell'intervallo interessato dallo spostamento, che verrebbe servito da una nave più vicina. Se d'altra parte una nave non fosse nel punto più favorevole rispetto all'intervallo affidatole, portandovela, e lasciando invariata la suddivisione in intervalli, l'efficacia dei soccorsi aumenterebbe. Questo ragionamento semplicissimo mostra anzi che il risultato è indipendente da tutte le ipotesi di derivabilità ecc. implicite nei calcoli precedenti; condizione essenziale è solo che la f sia decrescente.

Potrebbe anche obbiettarsi che i calcoli precedenti sono inutili. Ciò è verissimo, ma solo in parte. Chè, anzitutto, mi premeva far vedere come si presenti l'impostazione secondo i principi del calcolo delle probabilità, e come essa, meccanicamente sviluppata, conduca senza difficoltà a questo risultato fondamentale, che altrimenti si poteva, sì, raggiungere per via più facile, ma non senza un po' di meditazione, di intuizione, di padronanza dell'argomento. Di più, l'espressione analitica è utile per precisare parecchie circostanze che potrebbero, prescindendone, lasciare dei dubbi o indurre a inesattezze: ad es. la distinzione e le relazioni fra μ, φ, ψ, la legittimità di ricondursi al moto relativo, e così via. Finalmente, vedremo che dall'impostazione analitica si può trarre un criterio notevole e di semplicissima applicazione pratica in un'ipotesi particolare, che si può ritenere sufficientemente approssimata.

Supponiamo infatti che f sia lineare:

$$f(\delta) = f_0 - \lambda\,|\delta| \qquad (\lambda > 0);$$

è allora

$$\frac{\partial}{\partial z_i} f(z - z_i) = \pm\lambda$$

(a seconda che $z \gtrless z_i$), e la condizione

$$\int_{(i)} \psi(z)\,\frac{\partial}{\partial z_i} f(z - z_i)\,dz = 0$$

si riduce alla

$$\int_{(l')}\psi(z)\,dz=\int_{(l'')}\psi(z)\,dz$$

ove i due integrali sono estesi alle due parti in cui l'intervallo i-esimo è diviso dal punto z_i. Essi non esprimono se non le probabilità totali di incidenti nei due tratti, e risulta che devono essere uguali. In questo caso il risultato fondamentale si esprime nella forma semplicissima: *considerati i* 2n *semintervalli fra le navi e i punti di divisione delle rispettive zone di competenza, due semintervalli compresi fra due navi successive devono avere uguale lunghezza, due semintervalli relativi alla stessa nave debbono avere uguale probabilità di incidenti.*

In formule, detti l_i', l_i'' i due semintervalli $\frac{1}{2}(z_{i-1}+z_i)$, z_i, e z_i, $\frac{1}{2}(z_i+z_{i+1})$, abbiamo le relazioni

$$l'_i=l''_{i-1}$$
$$[l''_i]=[l'_i]$$

ove con $[l]$ s'intenda la probabilità d'incidenti nell'intervallo l. Tali relazioni permettono di determinare per ricorrenza, assegnato il primo, $l'_1=u$, tutti gli altri semintervalli e quindi la loro somma

$$L(u)=\sum_1^n{}_i(l'_i+l''_i);$$

$L(u)$ risulta funzione crescente di u, e basterà determinare u in modo che $L(u)$ risulti uguale alla lunghezza effettiva L della trasvolata per risolvere completamente il problema, che è pertanto ricondotto alla risoluzione (grafica, numerica o analitica, a seconda della valutazione di probabilità) dell'unica equazione

$$L(u)=L.$$

Si ricordi però che per lunghezza dobbiamo sempre intendere quella del moto relativo; se, come avevamo convenuto, la lunghezza della trasvolata si pone $=1$, non è, ad esempio, $L=1$, ma $L=1-vT=$ lunghezza della trasvolata meno il percorso delle navi nel tempo impiegato per la trasvolata dal velivolo.

Bruno de Finetti